

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2026.7.15>

УДК: 538.945

## ОСОБЕННОСТИ ВОЗБУЖДЕНИЯ МНОГОУРОВНЕВОГО ИСКУССТВЕННОГО АТОМА КВАНТОВЫМИ И КЛАССИЧЕСКИМИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ПОЛЯМИ

И.А. Соловых<sup>1,2</sup>, О.В. Тихонова<sup>1,2,3</sup>,  
А.В. Пашенко<sup>4,5</sup>, И.И. Соловьев<sup>2,3</sup>, Н.В. Кленов<sup>4,5</sup>

<sup>1</sup> МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет,  
119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

<sup>2</sup> МГУ имени М.В. Ломоносова, НИИ ядерной физики имени Д.В. Скобельцына,  
119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

<sup>3</sup> Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
125009, Москва, ул. Моховая, д. 11, стр. 7

<sup>4</sup> Московский технический университет связи и информатики,  
111024, Москва, ул. Авиамоторная, 8а

<sup>5</sup> Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики имени Н. Л. Духова,  
127030, Москва, ул. Суцевская, 22

Статья поступила в редакцию 9 июня 2026 г.

**Аннотация.** В рамках исследования динамики джозефсоновского искусственного атома на основе трансмона выявлены фундаментальные особенности возбуждения сверхпроводящей системы под действием квантового и классического микроволнового поля. Классическое поле, будучи неограниченным источником энергии, последовательно заселяет уровни трансмона, приводя к распределению населенностей по закону Пуассона. В противоположность этому, квантовое поле с конечным числом фотонов обеспечивает осциллирующую динамику заселения уровней с биномиальным распределением вероятностей, что позволяет передавать квантовую статистику между полем и атомом. Обнаружено, что в режиме сильной связи и при

оптимальной частотной отстройке квантовое поле селективно и эффективно заселяет требуемые уровни трансмона, что невозможно достичь при возбуждении классическим полем. Эти различия открывают перспективы использования многоуровневых искусственных атомов (кудитов) на основе трансмона в качестве квантовых интерфейсов и детекторов неклассических микроволновых состояний в архитектуре распределенных квантовых систем.

**Ключевые слова:** эффект Джозефсона, сверхпроводимость, искусственные атомы, квантовое электромагнитное поле, микроволновая квантовая оптика, трансмонный кудит.

**Финансирование:** Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение № 075-15-2024-538).

**Автор для переписки:** Кленов Николай Викторович, [nvklenov@mail.ru](mailto:nvklenov@mail.ru)

## Введение

Сверхпроводниковые квантовые схемы за последние два десятилетия превратились из лабораторных прототипов в одну из основных платформ квантовых технологий. Их ключевой элемент – искусственный атом на джозефсоновских переходах, который можно эффективно и управляемо связать с микроволновым электромагнитным полем. С другой стороны, микроволновые квантовые состояния света, часто естественным образом излучаемые упомянутыми джозефсоновскими атомами, сегодня рассматриваются не как побочный эффект при работе системы, а как самостоятельный ресурс для квантовых вычислений, метрологии, связи и микроволновой квантовой оптики [1, 2]. Таким образом, взаимодействие джозефсоновских искусственных атомов с микроволновыми квантовыми полями представляет собой важное и актуальное направление исследований, крайне востребованное с практической точки зрения.

При этом современные сверхпроводниковые процессоры в основном живут в парадигме «операции с твердотельными квантовыми битами за счет воздействия классического радиочастотного импульса». Подавляющее большинство операций над кубитами выполняется классическими

микроволновыми и магнитными импульсами, форма, частота и фаза которых задаются обычной электронной аппаратурой. Такой подход оказался чрезвычайно успешным и лежит в основе нынешней квантовой электродинамики на чипе (circuit QED) [3, 4]. Однако по мере перехода к модульным процессорам и распределенным квантовым системам возникает новый вопрос: что меняется, когда искусственный атом взаимодействует уже не с классической волной, а с подлинно квантовым микроволновым полем – с одним, несколькими фотонами или их суперпозициями, несущими информацию между удаленными узлами устройства [1, 5–12]. Особенно важен этот вопрос для трансмона. Первоначально трансмон был предложен как устойчивый к зарядовому шуму сверхпроводниковый кубит [13], однако та же самая система при работе за пределами двухуровневого приближения, естественно, становится кудитом – многоуровневым искусственным атомом. Дополнительные уровни здесь не являются лишь источником нежелательных утечек: они расширяют рабочее гильбертово пространство, делают отклик системы богаче и позволяют использовать один и тот же физический объект и как вычислительный элемент, и как сенсор, и как интерфейс между локальной схемой и микроволновым полем. Эксперименты последних лет уже продемонстрировали как чувствительность трансмонного кудита к микроволновым полям, так и возможность высокоразмерной обработки информации на сверхпроводниковых кудитах [14–21].

Поэтому анализ различий между классическим и квантовым воздействием на кудит имеет не только фундаментальный, но и вполне инженерный смысл. Два сигнала с одинаковой средней энергией еще не обязаны действовать на нелинейный искусственный атом одинаково: на отклик влияют не только амплитуда поля, но и его квантовая статистика, иные специфические характеристики. Это уже видно в работах по квантовому смещению волн и по рассеянию на одиночных сверхпроводниковых искусственных атомах, где классические и неклассические микроволновые поля оставляют качественно разные спектральные и динамические отпечатки [22–24]. В долгосрочной

перспективе такая постановка вопроса естественно подводит к идее полностью квантовых вычислительно-коммуникационных систем. В подобной архитектуре твердотельные кудиты внутри отдельных криогенных модулей отвечали бы за локальное хранение, преобразование, обработку и считывание квантовых данных, а «летающие» микроволновые фотонные кудиты – за перенос информации между этими модулями. Такой сценарий уже нельзя считать чистой фантазией: продемонстрированы детерминированный перенос состояний и удаленная запутанность на микроволновых фотонах, двунаправленная связь между сверхпроводниковыми узлами, микроволновые кубиты, перестраиваемые источники фотонных кубитов и кудитов, а также криогенные линии связи для микроволновых квантовых локальных сетей [6–8, 25, 26]. С этой точки зрения задача выявления особенностей воздействия классического и квантового поля на искусственный атом становится необходимой базовой задачей архитектуры будущих квантовых устройств. Здесь важно не только уметь генерировать малофотонные микроволновые состояния, но и понимать, как именно они преобразуются в измеряемый отклик многоуровневой системы [27–30].

В настоящей статье мы будем рассматривать трансмон именно как кудит и следить за тем, как разные типы поля возбуждают набор его энергетических состояний. В отличие от ранее рассмотренного фоковского управления трансмонным кудитом [31], в настоящей работе проводится прямое сравнение классического и квантованного воздействия при сопоставимой начальной энергии поля. Главная физическая идея состоит в том, что наиболее важная информация о природе поля может проявляться непосредственно в динамике населенностей уровней искусственного атома: классическое поле, как правило, возбуждает состояния в широком диапазоне и сравнительно неспецифично, тогда как квантованное малофотонное поле при подходящих условиях способно селективно возбуждать конкретные уровни. Именно это и делает кудит естественным кандидатом на роль компактного интерфейса между локальным квантовым процессором и квантовым микроволновым каналом.

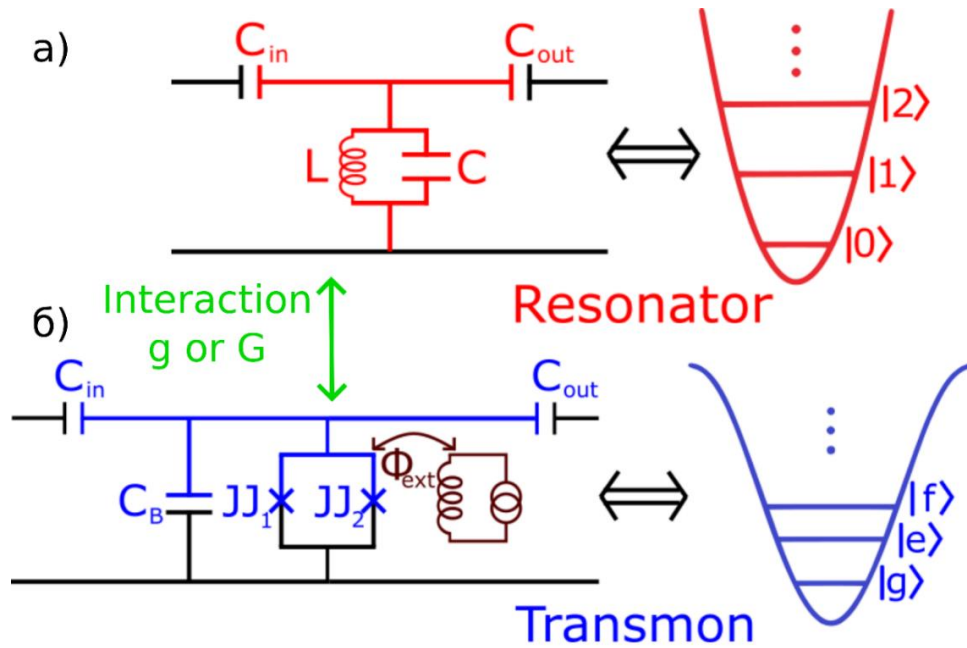


Рис. 1. Электрическая схема и энергетический спектр сверхпроводниковых квантовых систем: а) высокодобротный резонатор с эквидистантным спектром; б) трансмон со слабой нелинейностью и слегка неэквидистантным спектром. Конденсаторы  $C_{in/out}$  определяют взаимодействие с окружением. Зеленым цветом обозначено наличие квантового или классического взаимодействия между подсистемами.

## 1. Модель трансмона и его взаимодействие с квантовым и классическим полями

Прежде чем задавать взаимодействие трансмона с полем, зафиксируем микроскопическую модель самого искусственного атома. Трансмон представляет собой джозефсоновский переход, зашунтированный большой емкостью; его зарядовая энергия и джозефсоновская энергия задают гамильтониан:

$$\hat{H}_{tr} = 4E_C (\hat{q} - q_g)^2 - E_J \cos \hat{\phi}, \quad [\hat{\phi}, \hat{q}] = i. \quad (1)$$

Здесь  $E_C = e^2 / (2C_\Sigma)$  – зарядовая энергия островка,  $E_J$  – энергия Джозефсона,  $q_g$  – приведенный заряд затвора, а  $\hat{q}$  и  $\hat{\phi}$  – сопряженные операторы числа куперовских пар и фазы. В зарядовом базисе гамильтониан можно записать как:

$$\hat{H}_{tr} = \sum_q 4E_C (q - q_g)^2 |q\rangle\langle q| - \frac{E_J}{2} \sum_q (|q+1\rangle\langle q| + h.c.). \quad (2)$$

Эта форма показывает, что зарядовая энергия стремится локализовать состояние в базисе числа куперовских пар, а джозефсоновский член отвечает за туннелирование между соседними зарядовыми состояниями. В практически важном трансмонном режиме  $E_J / E_C \gg 1$  волновая функция сосредоточена около минимума потенциала  $\varphi = 0$ ; разложение слагаемого  $-E_J \cos \varphi$  по степеням фазы приводит к слабонелинейному осциллятору. Для низколежащих уровней получается приближенный спектр:

$$E_m \approx -E_J + \sqrt{8E_J E_C} \left( m + \frac{1}{2} \right) - \frac{E_C}{12} (6m^2 + 6m + 3). \quad (3)$$

Отсюда следуют формулы для энергии первых двух переходов и характеристики ангармонизма  $\alpha$  :

$$\hbar \omega_{01} \approx \sqrt{8E_J E_C} - E_C, \quad \hbar \omega_{12} \approx \sqrt{8E_J E_C} - 2E_C, \quad \alpha \approx -\frac{E_C}{\hbar}. \quad (4)$$

Именно конечный ангармонизм  $\alpha = \omega_{12} - \omega_{01}$  отличает трансмон от линейного  $LC$ -резонатора с эквидистантным спектром. В двухуровневом приближении он позволяет выделить состояния с номерами 0 и 1, формирующие кубит, а при использовании нескольких нижних уровней тот же объект становится кудитом. Поэтому в дальнейшем трансмон удобно описывать эффективной плазменной модой  $\omega_p$  с керровской нелинейностью:

$$\frac{\hat{H}_{tr}^{eff}}{\hbar} = \omega_p \left( \hat{n} + \frac{1}{2} \right) + \gamma \hat{n}(\hat{n} + 1), \quad \hat{n} = \hat{b}^\dagger \hat{b}, \quad 2\gamma \approx \alpha, \quad (5)$$

$\hat{n} = \hat{b}^\dagger \hat{b}$  – количество возбуждений в подсистеме трансмона. Таким образом, параметр  $\gamma$ , используемый ниже, является мерой слабой неэквидистантности трансмонной лестницы уровней и в трансмонном пределе имеет величину порядка  $-E_C / (2\hbar)$ . Эта связь между микроскопическими параметрами  $E_C, E_J$  и эффективной керровской моделью важна для интерпретации селективного заселения уровней многоуровневого искусственного атома.

Для сравнения двух типов воздействия рассматривается многоуровневый трансмон, описываемый бозонной модой  $b$ , и полевая мода в резонаторе  $a$

(см. рис. 1). В квантовом случае взаимодействие записывается в керровском приближении и приближении вращающейся волны (RWA) в виде гамильтониана:

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \left( \hat{k} + \frac{1}{2} \right) + \hbar(\omega_0 + \Delta\omega) \left( \hat{n} + \frac{1}{2} \right) + \hbar\gamma\hat{n}(\hat{n} + 1) + \hbar\frac{g}{2}(\hat{b}^\dagger\hat{a} + \hat{b}\hat{a}^\dagger), \quad (6)$$

где  $\hat{k} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$  – количество возбуждений в подсистеме микроволнового поля,  $\omega_0$  – основная мода резонатора,  $\Delta\omega = \omega_p - \omega_0$  – отстройка плазменной частоты трансмона от полевой моды,  $g$  – константа связи между подсистемами, а  $\gamma$  – нелинейность спектра трансмона. Решение нестационарного уравнения Шредингера  $i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$  для описывающей состояние системы волновой функции  $\Psi$  приводит к системе уравнений для амплитуд  $C_{n,k}(t)$  состояний полной системы:

$$i\dot{C}_{n,k} = n(\Delta\omega + \gamma)C_{n,k} + \gamma n^2 C_{n,k} + \sqrt{\frac{n(k+1)}{4}}gC_{n-1,k+1} + \sqrt{\frac{k(n+1)}{4}}gC_{n+1,k-1}. \quad (7)$$

В таком случае вероятность обнаружить трансмон в состоянии с номером  $n$  вычисляется следующим образом:

$$P_n(t) = \sum_k |C_{nk}(t)|^2. \quad (8)$$

Для классического поля с амплитудой  $\mathcal{E}_0$  используется гамильтониан:

$$\hat{H} = \hbar(\omega_0 + \Delta\omega)\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hbar\gamma\hat{n}(\hat{n} + 1) + \frac{ae\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}\cos(\omega_0 t)(\hat{b}^\dagger + \hat{b}), \quad (9)$$

где  $a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$  – характерный размер,  $e$  – заряд электрона. Уравнения для амплитуд  $C_n(t)$  состояний трансмона, получаемые из нестационарного уравнения Шредингера, в случае возбуждения классическим полем принимают вид:

$$i\dot{C}_n = n(\gamma n + \gamma + \Delta\omega)C_n - \frac{ae\mathcal{E}_0}{2\hbar}\sqrt{\frac{n+1}{2}}C_{n+1} - \frac{ae\mathcal{E}_0}{2\hbar}\sqrt{\frac{n}{2}}C_{n-1}. \quad (10)$$

Дальнейшее сравнение динамики в квантовом и классическом поле проводится при одинаковой начальной энергии полей. Для этого вводится связь классической константы воздействия  $G = \frac{eE_0 a}{\hbar}$  с параметрами квантового поля:

$$G = \frac{eE_0 a}{\hbar} = g\sqrt{2n_{\text{field}}}, \quad (11)$$

где  $n_{\text{field}}$  – среднее число фотонов в квантовой полевой моде в начальный момент времени. Для начального фоковского состояния с  $k_0$  фотонами это соотношение принимает вид  $G = g\sqrt{2k_0}$ . Оно позволяет сравнивать динамику при классическом и квантовом воздействии не по формальной амплитуде поля, а по физически сопоставимой начальной энергии.

Прежде всего, следует подчеркнуть, что фундаментальное различие взаимодействия трансмона с квантовым и классическим полем заключается в наличии у квантового поля степеней свободы, характеризующих его различные свойства. Как следствие, энергия, изначально запасенная в поле, перераспределяется между полевой и твердотельной подсистемами, при этом между ними возникает квантовая запутанность. Строго говоря, такой режим взаимовлияния двух квантовых подсистем не имеет классической аналогии. Тем не менее, рассматривая только одну подсистему, а именно, трансмон, оказывается возможным сравнить воздействие на него таких отличающихся по физическому описанию полей.

Далее последовательно будут рассмотрены важные случаи динамики возбуждения трансмона. Численные значения констант взаимодействия (если не указано иное) представлены в безразмерных единицах, нормированных на частоту полевой моды резонатора  $\omega_0$ . В качестве единицы измерения времени выбрана величина  $\omega_0^{-1}$ . Значения частоты, типичные для экспериментов со сверхпроводниковыми трансмонами, лежат в диапазоне 5–10 ГГц, что соответствует масштабу времени в сотни пикосекунд.

## 2. Резонансный случай без нелинейности

Сначала рассмотрим резонансный случай  $\Delta\omega = 0$  при отсутствии нелинейности  $\gamma = 0$ . Для классического поля трансмон ведет себя как гармонический осциллятор, возбуждаемый неограниченным резервуаром энергии. В рамках аналитического решения задачи можно показать, что распределение по возбуждениям для трансмона имеет вид распределения Пуассона:

$$P_n = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}, \quad (12)$$

где среднее число возбуждений квадратично растет со временем:

$$\bar{n} = \frac{1}{2} \left( \frac{Gt}{2} \right)^2. \quad (13)$$

Неограниченный рост возбуждения по состояниям трансмона продемонстрирован на рис. 2а. Причем, с течением времени максимум распределения смещается к все более высоким уровням, а значения  $P_n$  в каждый фиксированный момент времени в точности соответствуют распределению Пуассона (см. рис. 2б). Фактически, при резонансном классическом воздействии каждый уровень сначала заселяется, а затем опустошается, при этом возбуждение переходит к более высоким состояниям.

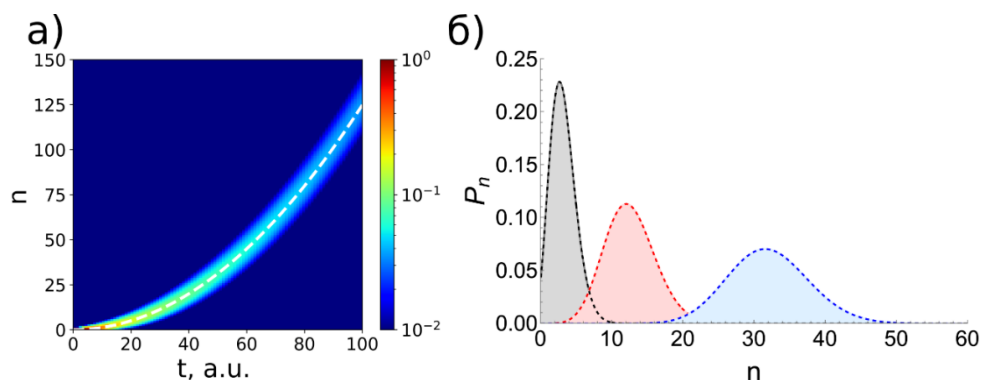


Рис. 2. Резонансное возбуждение трансмона классическим полем при  $\gamma = 0$ :

- а) двумерное распределение населенности состояний трансмона (показано цветом) в зависимости от номера уровня  $n$  и времени  $t$  при  $G=0.316$ ;
- б) Зависимость вероятности возбуждения трансмона от номера уровня  $n$  в случае  $G=0.316$  при фиксированных временах  $t = 25$  (серая заливка);  $t = 50$  (красная заливка);  $t = 80$  (синяя заливка); пунктирные кривые соответствуют распределению Пуассона.

Для квантового поля ситуация принципиально отличается. Поскольку начальная энергия квантового поля характеризуется некоторым конечным значением, энергия системы ограничена (см. рис. 3а), и среднее число возбуждений трансмона не растет бесконечно, а осциллирует со временем:

$$\langle \hat{b}^\dagger \hat{b}(t) \rangle = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \sin^2 \frac{gt}{2}. \quad (14)$$

В рамках аналитического решения задачи нами было обнаружено, что для начального фоковского состояния поля с  $k_0$  фотонами вероятность  $n$  возбуждений трансмона (вероятность возбуждения состояния с номером  $n$ ) соответствует наличию в поле  $k_0 - n$  фотонов и в каждый момент времени описывается биномиальным распределением с параметрами  $p$  и  $Q$  (см. рис. 3б):

$$W_{n, k_0-n} = C_{k_0}^n p^n Q^{k_0-n}, \text{ где } p = \sin^2 \frac{gt}{2}, Q = \cos^2 \frac{gt}{2}, C_{k_0}^n = \frac{k_0!}{n!(k_0-n)!}. \quad (15)$$

Соответственно, среднее и дисперсия числа возбуждений равны:

$$\langle n(t) \rangle = k_0 p, D_n = k_0 p Q. \quad (16)$$

Нетрудно заметить, что дисперсия обращается в ноль в моменты времени, когда трансмон либо полностью не возбужден, либо находится в состоянии с максимальным числом возбуждений. Фактически, возникают осцилляции населенностей типа Раби между нижним и верхним состояниями с малой вероятностью заселения других состояний (см. рис. 3а). Таким образом, квантовое поле не только ограничивает доступный энергетический ресурс, но и переносит свою статистику в распределение населенностей трансмона.

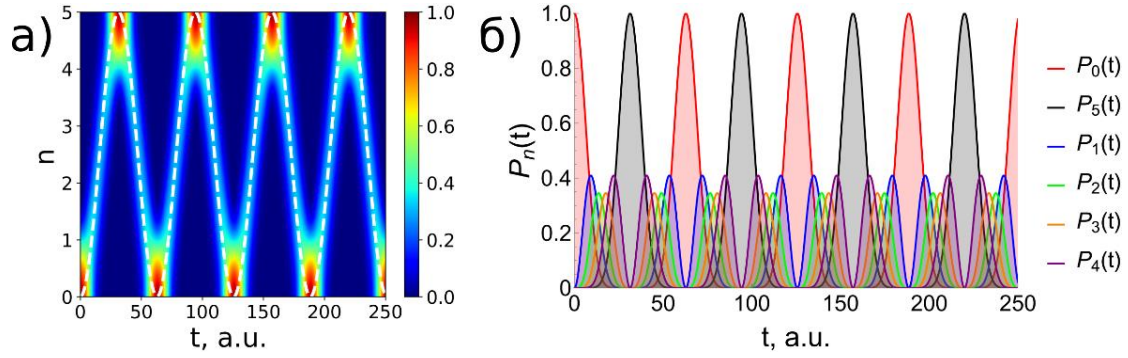


Рис. 3. Резонансное возбуждение состояния трансмона квантовым полем с числом фотонов  $k_0=5$  и  $g=0.1\omega_0$ : а) двумерное распределение населенности уровня  $n$  трансмона от времени  $t$  (цветовая шкала – численное решение, белая пунктирная линия – аналитическое решение); б) одномерные зависимости вероятности возбуждения состояния трансмона  $P_n(t)$  при  $k_0=5$ .

### 3. Нерезонансный случай без нелинейности

При наличии частотной отстройки  $\Delta\omega \neq 0$  и при  $\gamma = 0$  возбуждение трансмона классическим полем сохраняет пуассоновское распределение по состояниям трансмона (см. рис. 4), но среднее число возбуждений становится ограниченным и осциллирует:

$$\langle n(t) \rangle = \frac{e^2 \mathcal{E}_0^2 a^2}{2\hbar^2 \Delta\omega^2} \sin^2 \frac{\Delta\omega t}{2}. \quad (17)$$

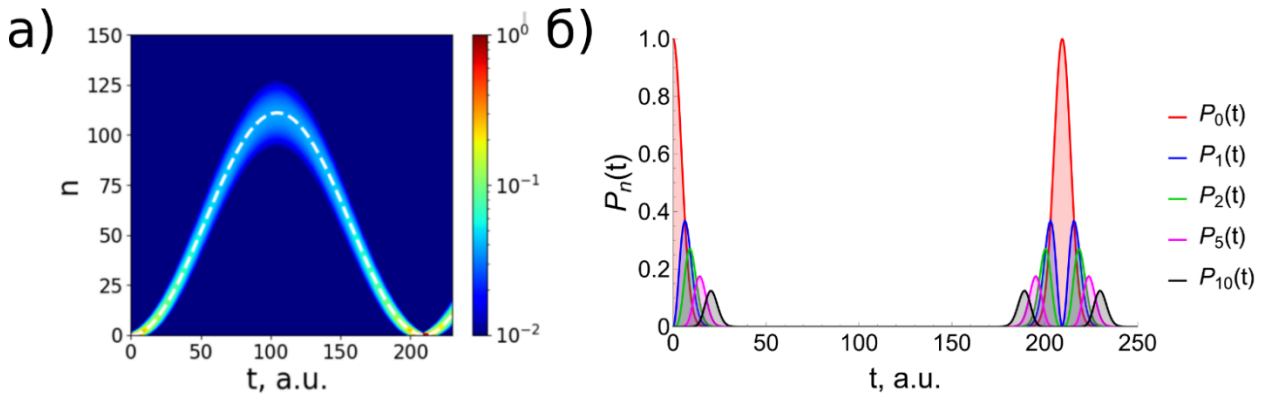


Рис. 4. Нерезонансная динамика взаимодействия с классическим полем при  $G = 0.447$ ,  $\Delta\omega = 0.03\omega_0$ ,  $\gamma = 0$ : а) двумерное распределение населенности уровня  $n$  трансмона от времени  $t$  (цветовая шкала – численное решение, белая пунктирная линия – аналитическое решение); б) одномерные зависимости вероятности возбуждения уровня трансмона  $P_n(t)$  с номером  $n$ .

В квантовом случае среднее число возбуждений, найденное нами аналитически, принимает вид:

$$\langle n(t) \rangle = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \frac{g^2}{g^2 + \Delta\omega^2} \sin^2 \frac{\sqrt{g^2 + \Delta\omega^2} t}{2}. \quad (18)$$

Вероятности населенностей по-прежнему описываются биномиальным законом, но параметр  $p$  становится зависящим от отстройки:

$$p = \frac{g^2}{g^2 + \Delta\omega^2} \sin^2 \frac{\sqrt{g^2 + \Delta\omega^2} t}{2}, \quad Q = 1 - p, \quad (19)$$

Как следствие, главное различие динамики возбуждения состоит в том, что в классическом случае частота осцилляций определяется отстройкой, а их амплитуда обратно пропорциональна  $\Delta\omega^2$  и неограниченно возрастает в пределе малых значений отстройки. Поэтому малая отстройка приводит к медленным осцилляциям с большой амплитудой. В квантовом случае частота и амплитуда слабо меняются при малых отстройках, поскольку определяются комбинацией  $g^2 + \Delta\omega^2 \gg \Delta\omega^2$ . Соответствующая динамика квантового случая показана на рис. 5.

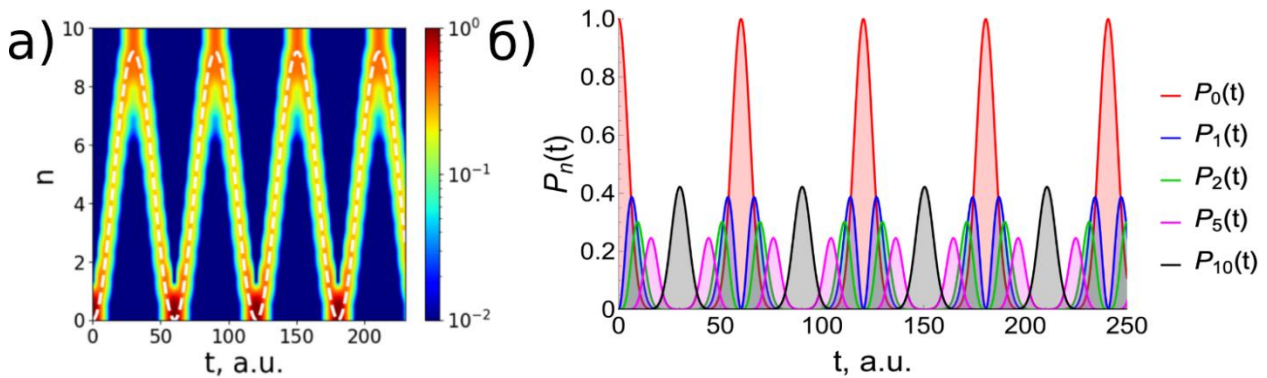


Рис. 5. Нерезонансная динамика взаимодействия с квантовым полем при  $k_0 = 10$ ,  $\Delta\omega = 0,03\omega_0$ ,  $\gamma = 0$ : а) двумерное распределение населенностей состояний трансмона от номера уровня  $n$  и времени  $t$  (цветовая шкала – численное решение, белая пунктирная линия – аналитическое решение); б) одномерные зависимости вероятности возбуждения уровня трансмона  $P_n(t)$  с номером  $n$ .

Более того, пуассоновское распределение, формирующееся в классическом поле, приводит к одновременному заселению целой группы состояний трансмона с достаточно малой вероятностью заселения каждого из них в отдельности. Вместе с тем, квантовое поле сохраняет дискретную структуру обмена возбуждениями между полевой модой и трансмоном, что обеспечивает периодически повторяющуюся наибольшую эффективность возбуждения именно для наивысшего возможного состояния.

Таким образом, даже при отсутствии нелинейности отстройка приводит к качественно различным режимам. Для классического поля она ограничивает рост среднего номера уровня, но сохраняет пуассоновский характер распределения: в каждый момент времени существует достаточно широкий набор эффективно заселенных возбужденных состояний. Для квантового поля промежуточные состояния заселяются мало, что делает возможным использование джозефсоновского кудита как детектора статистики воздействующего неклассического микроволнового поля.

#### 4. Динамика при наличии отстройки и нелинейности

При  $\Delta\omega \neq 0$  и  $\gamma \neq 0$  отклик трансмона определяется конкуренцией нелинейного сдвига уровней, частотной отстройки и силы связи. При этом заметная нелинейность существенно подавляет возбуждение трансмона как в квантовом, так и в классическом поле (см. рис. 6).

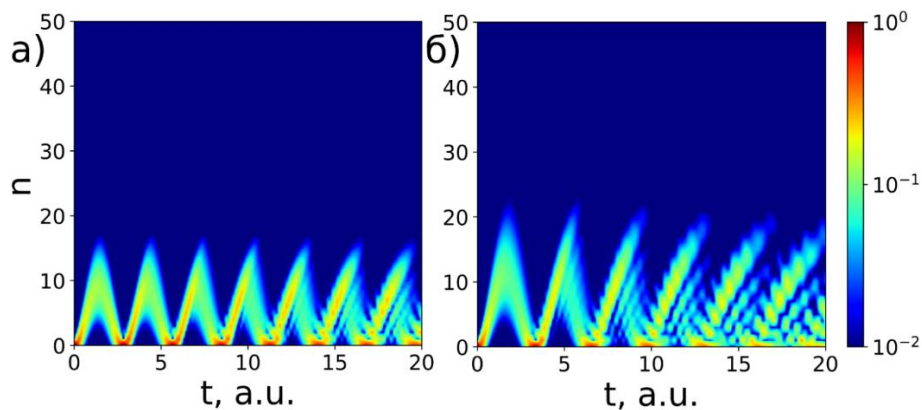


Рис. 6. Двумерное распределение населенностей состояний трансмона в зависимости от номера уровня  $n$  и времени  $t$  при наличии нелинейности  $\gamma = -0.02\omega_0$ ,  $\Delta\omega = 2.3\omega_0$  под воздействием: а) квантового поля  $k_0 = 50$ ,  $g = \omega_0$ ; б) классического поля с  $G = 10$ .

В условиях нелинейности и отстройки от резонанса получить аналитическое решение задачи не представляется возможным. Однако, в случае квантового поля можно выявить ряд важных физических эффектов и интересных режимов динамики, исходя из наличия «интегралов движения», то есть сохраняющихся величин в атомно-полевой системе. Первым и очевидным интегралом движения является полная энергия в системе, которая сохраняется в любой момент времени и складывается из числа возбуждений трансмона и числа фотонов микроволнового поля:

$$\hat{I}_1 = \hat{n} + \hat{k}. \quad (20)$$

Еще один важный интеграл движения включает в себя энергию взаимодействия трансмона с полем, нелинейность и учет отстройки от резонанса:

$$\hat{I}_2 = \Delta\omega\hat{n} + \gamma\hat{n}(\hat{n}+1) + \frac{g}{2}(\hat{b}^\dagger\hat{a} + \hat{b}\hat{a}^\dagger). \quad (21)$$

Если изначально трансмон не возбужден, среднее значение этого оператора равно нулю и сохраняется таким в любой момент времени. Используя данный результат, можно получить выражение для дисперсии по числу возбуждений трансмона в произвольный момент времени, где оператор атомно-полевого взаимодействия обозначен как  $\hat{W}$ :

$$\gamma D_n = -(\gamma + \Delta\omega)\langle\hat{n}\rangle - \gamma\langle\hat{n}\rangle^2 - \langle\hat{W}\rangle, \quad (22)$$

Анализ данного выражения позволяет выявить различные режимы динамики возбуждения трансмона. Наиболее интересным случаем является возможность возбуждения одного конкретного состояния трансмона, что соответствует условиям нулевой дисперсии и нулевой средней энергии атомно-полевого взаимодействия. Как следствие, получаем значение оптимальной отстройки, которая обеспечивает селективное возбуждение уровня трансмона с номером  $n$ :

$$\Delta\omega = -\gamma(n+1). \quad (23)$$

Эффективное селективное возбуждение трансмона, достижимое при оптимальной отстройке в квантовом поле с  $k_0 = 3$ , продемонстрировано на рис. 7а).

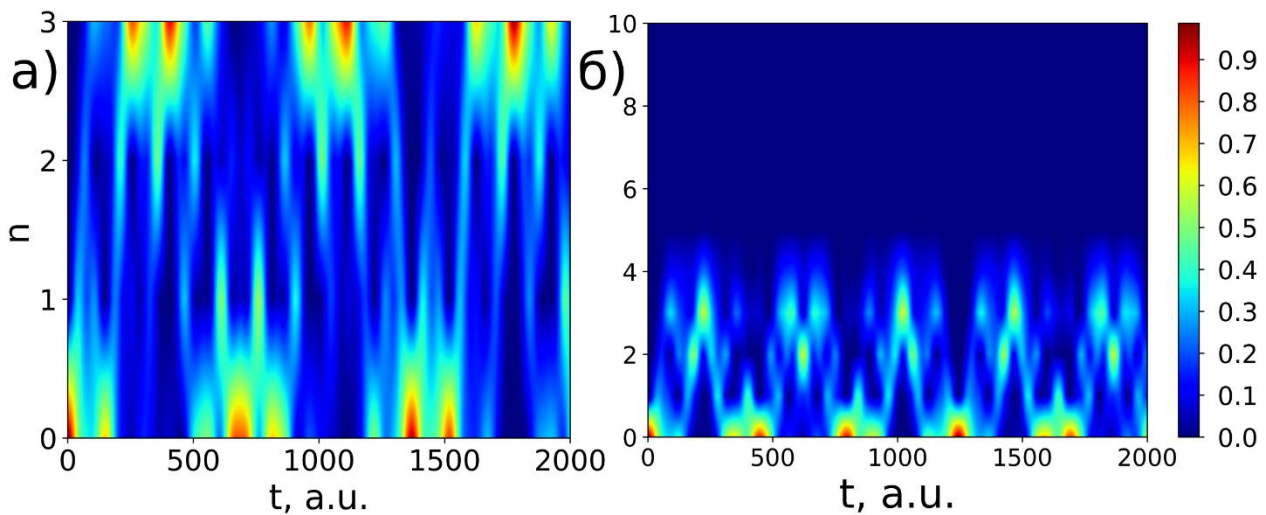


Рис. 7. Двумерное распределение населенностей состояний трансмона в зависимости от номера уровня  $n$  и времени  $t$  в случае слабой связи при наличии нелинейности  $\gamma = -0.02\omega_0, \Delta\omega = 0.08\omega_0$  под воздействием: а) квантового поля  $k_0 = 3, g = 0.025\omega_0$ ; б) классического поля с  $G = 0.061$ .

В режиме слабого взаимодействия, когда нелинейность превалирует над связью, динамика в квантовом и классическом полях может быть близкой, поскольку она, в большей степени, определяется именно нелинейностью. Поэтому и при воздействии классическим полем можно увидеть более эффективное возбуждение высоких уровней трансмона, но не одного конкретного, а целой группы состояний (рис. 7б). Для анализа селективности удобно рассматривать двумерные распределения вероятностей возбуждения конкретных уровней в зависимости от времени и частотной отстройки. В классическом поле картины для разных уровней имеют широкие области возбуждения, тогда как в квантовом случае максимумы вероятностей становятся более локализованными и согласуются с многофотонными условиями резонанса (рис. 7). Как следствие, в классическом поле невозможно подобрать оптимальную отстройку, которая обеспечивала бы возбуждение требуемого уровня с вероятностью, близкой к единице.

Даже в случае специального подбора оптимальной отстройки для возбуждения классическим полем исходя из численного расчета, эффективность возбуждения конкретного состояния оказывается небольшой за счет

относительно широкого набора одновременно возбуждаемых состояний (см. рис. 8).

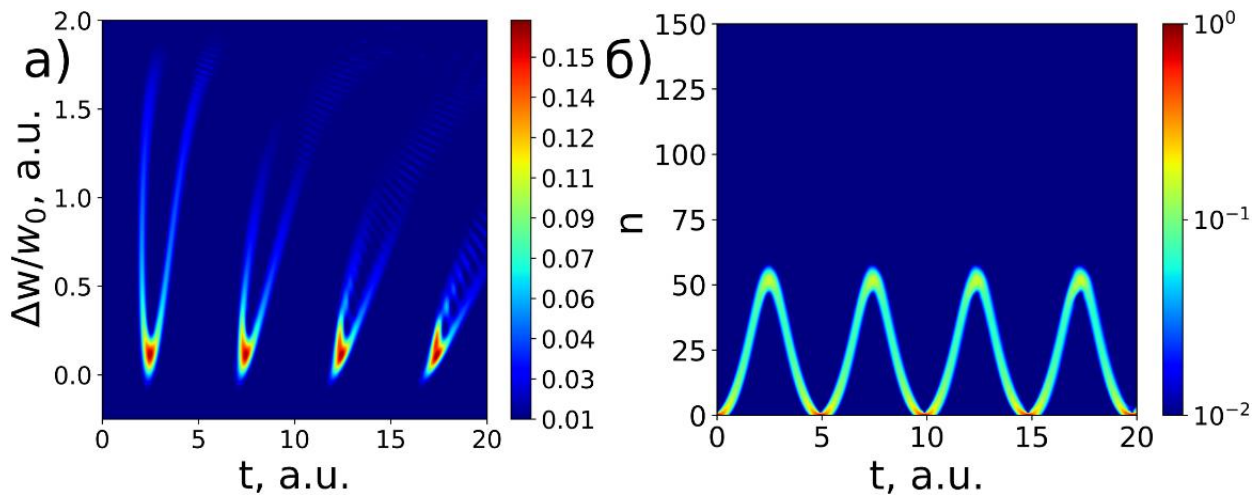


Рис. 8. а) Двумерное распределение населенности 52-го уровня трансмона в зависимости от частотной отстройки  $\Delta\omega$  и времени  $t$  при  $\gamma = -0.02\omega_0, G=10$ ;

б) Двумерное распределение населенностей состояний трансмона в зависимости от номера уровня  $n$  и времени  $t$  в случае оптимальной отстройки  $\Delta\omega = 0.1\omega_0$  при  $\gamma = -0.02\omega_0, G=10$ .

На рис. 8 представлена динамика возбуждения трансмона в условиях нелинейности при «настройке» на максимальное заселение верхнего уровня с  $n = 52$ , которое реализуется при отстройке порядка 0.1 (см. рис. 8а). Как видно из приведенных данных, даже в этом случае эффективность возбуждения оказывается невелика, не более 20 %, и сравнима с заселением других состояний.

Наибольшее отличие динамики возбуждения проявляется в режиме сильной связи. В случае квантового поля оптимальная отстройка обеспечивает периодическое возбуждение верхнего возможного состояния с вероятностью единица, в то время как в классическом поле заселение этого состояния остается подавленным по сравнению с другими уровнями в течение всего взаимодействия (см. рис. 9).

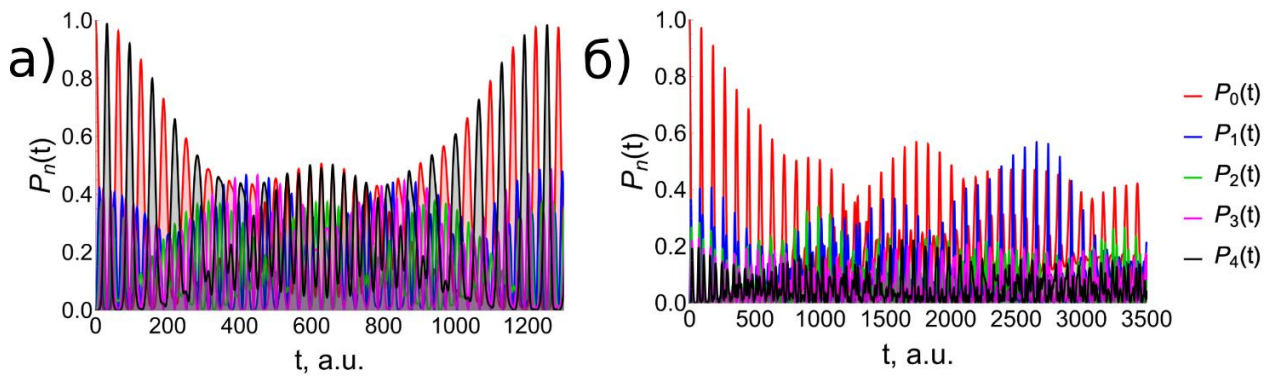


Рис. 9. Одномерные зависимости вероятности возбуждения состояний трансмона с номером  $n$  в зависимости от времени  $t$  в случае сильной связи и настройки на возбуждение четвертого уровня при  $\gamma = -0.005\omega_0, \Delta\omega = 0.025\omega_0$ : а) квантовое поле  $g = 0.1\omega_0$ ; б) классическое поле  $G = 0.283$ . В квантовом случае уровень 4 заселяется с высокой вероятностью, тогда как классический аналог не обеспечивает столь же селективного переноса населенности.

В случае более интенсивных классических полей настройка эффективного возбуждения на высокие состояния не только не дает высокой вероятности возбуждения, но и зачастую требует предельно больших значений отстройки, которые приводят к режимам, выходящим за рамки возможного рассмотрения в рамках приближения RWA и характеризующимся аperiодической динамикой [32].

## Заключение

Проведенное сравнение показывает, что классическое и квантовое электромагнитные поля, даже при одинаковой начальной энергии, формируют принципиально разные динамические картины возбуждения многоуровневого трансмона [34]. В резонансном случае при отсутствии нелинейности классическое поле действует как неограниченный резервуар энергии, последовательно перенося населенность к более высоким уровням и формируя пуассоновское распределение. Квантовое поле с конечным числом фотонов, напротив, ограничивает число доступных возбуждений и приводит к биномиальному распределению вероятностей.

В нерезонансном случае при отсутствии нелинейности классическое поле создает возвратную динамику населенностей, однако сохраняет широкий

пуассоновский характер заселения уровней. Квантовое поле демонстрирует более выраженную дискретность обмена возбуждениями, что открывает возможность переноса квантовой статистики поля в населенности трансмонного кудита. При наличии нелинейности различия усиливаются в режиме сильной связи: оптимальная отстройка позволяет квантовому полю селективно заселять заданные уровни (например, четвертый уровень с вероятностью, близкой к единице), тогда как классическое поле не обеспечивает селективности возбуждения высоких состояний.

Полученные результаты позволяют оценить параметры кудита как квантового интерфейса [35]. Типичная частота резонатора  $\approx 5\text{--}10$  ГГц задает временной масштаб процессов на уровне  $\sim 10^2$  пс. При реалистичном значении константы связи между полевой и твердотельной подсистемами время переноса одного возбуждения составляет  $\sim 0.5\text{--}1$  нс, что сравнимо с длительностью однокубитных операций в современных сверхпроводниковых процессорах. Это позволяет в перспективе использовать трансмонный кудит для детектирования неклассических полей в распределенных архитектурах. Поскольку параметры в нашем рассмотрении соответствуют стандартным квантовым джозефсоновским системам, в рамках существующих технологий возможна экспериментальная проверка предсказанных режимов с помощью управляемых по амплитуде и отстройке микроволновых полей. В частности, для оптимизации селективного заселения многоуровневого кудита перспективно использовать неклассические состояния с контролируемой фотонной статистикой. Найденные аналитические подходы для относительно простых случаев предоставляют основу для описания взаимодействия квантованного поля с кудитами произвольной размерности в условиях многофотонных резонансов. Дискретная структура биномиального распределения населенностей квантового поля, в отличие от пуассоновского распределения классического, позволяет ассоциировать характер возбуждения кудита с типом статистики фотонов во входном сигнале. Тем самым трансмонный кудит может быть

использован не только как сенсор, но и как элемент квантового томографа для характеристики малофотонных микроволновых полей.

Таким образом, полученные результаты позволяют целенаправленно использовать трансмонные кубиты в распределенных квантовых вычислительных системах как квантовые интерфейсы между локальными процессорами и каналами передачи данных, обеспечивая эффективный перенос квантовой информации и контроль квантовой статистики микроволновых полей.

**Финансирование:** Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение № 075-15-2024-538).

### Литература

1. Blais A. et al. Circuit quantum electrodynamics // Reviews of Modern Physics. – 2021. – Т. 93. – №. 2. – С. 025005.
2. Gu X. et al. Microwave photonics with superconducting quantum circuits // Physics Reports. – 2017. – Т. 718. – С. 1-102.
3. Blais A. et al. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation // Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics. – 2004. – Т. 69. – №. 6. – С. 062320.
4. Wallraff A. et al. Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics // Nature. – 2004. – Т. 431. – №. 7005. – С. 162-167.
5. Krantz P. et al. A quantum engineer's guide to superconducting qubits // Applied physics reviews. – 2019. – Т. 6. – №. 2.
6. Kurpiers P. et al. Deterministic quantum state transfer and remote entanglement using microwave photons // Nature. – 2018. – Т. 558. – №. 7709. – С. 264-267.
7. Leung N. et al. Deterministic bidirectional communication and remote entanglement generation between superconducting qubits // npj quantum information. – 2019. – Т. 5. – №. 1. – С. 18.

8. Yam W.K. et al. Cryogenic microwave link for quantum local area networks // npj Quantum Information. – 2025. – Т. 11. – №. 1. – С. 87.
9. Jaynes E.T., Cummings F.W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser // Proceedings of the IEEE. – 1963. – Т. 51. – №. 1. – С. 89-109.
10. Glauber R.J. Coherent and incoherent states of the radiation field // Physical Review. – 1963. – Т. 131. – №. 6. – С. 2766.
11. Hofheinz M. et al. Generation of Fock states in a superconducting quantum circuit // Nature. – 2008. – Т. 454. – №. 7202. – С. 310-314.
12. Hofheinz M. et al. Synthesizing arbitrary quantum states in a superconducting resonator // Nature. – 2009. – Т. 459. – №. 7246. – С. 546-549.
13. Koch J. et al. Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box // Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics. – 2007. – Т. 76. – №. 4. – С. 042319.
14. Kristen M. et al. Amplitude and frequency sensing of microwave fields with a superconducting transmon qudit // npj Quantum information. – 2020. – Т. 6. – №. 1. – С. 57.
15. Liu P. et al. Performing SU (d) operations and rudimentary algorithms in a superconducting transmon qudit for  $d = 3$  and  $d = 4$  // Physical Review X. – 2023. – Т. 13. – №. 2. – С. 021028.
16. Goss N. et al. Extending the computational reach of a superconducting qutrit processor // npj Quantum Information. – 2024. – Т. 10. – №. 1. – С. 101.
17. Nguyen L.B. et al. Empowering a qudit-based quantum processor by traversing the dual bosonic ladder // Nature Communications. – 2024. – Т. 15. – №. 1. – С. 7117.
18. Peterer M.J. et al. Coherence and decay of higher energy levels of a superconducting transmon qubit // Physical review letters. – 2015. – Т. 114. – №. 1. – С. 010501.
19. Seifert L.M. et al. Exploring ququart computation on a transmon using optimal control // Physical Review A. – 2023. – Т. 108. – №. 6. – С. 062609.

20. Champion E. et al. Multi-frequency control and measurement of a spin-7/2 system encoded in a transmon qudit // arXiv preprint arXiv:2405.15857. – 2024.
21. Wang Z. et al. High-EJ/EC transmon qudits with up to 12 levels // Physical Review Applied. – 2025. – Т. 23. – №. 3. – С. 034046.
22. Dmitriev A.Y. et al. Quantum wave mixing and visualisation of coherent and superposed photonic states in a waveguide // Nature communications. – 2017. – Т. 8. – №. 1. – С. 1352.
23. Pogosov W.V., Dmitriev A.Y., Astafiev O.V. Effects of photon statistics in wave mixing on a single qubit // Physical Review A. – 2021. – Т. 104. – №. 2. – С. 023703.
24. Dmitriev A.Y. et al. Direct experimental observation of sub-Poissonian photon statistics by means of multiphoton scattering on a two-level system // Physical Review A. – 2025. – Т. 111. – №. 4. – С. 043715.
25. Ilves J. et al. On-demand generation and characterization of a microwave time-bin qubit // npj Quantum Information. – 2020. – Т. 6. – №. 1. – С. 34.
26. Li Y. et al. Frequency-tunable microwave quantum light source based on superconducting quantum circuits // Chip. – 2023. – Т. 2. – №. 3. – С. 100063.
27. Schuster D.I. et al. Resolving photon number states in a superconducting circuit // Nature. – 2007. – Т. 445. – №. 7127. – С. 515-518.
28. Eichler C. et al. Experimental state tomography of itinerant single microwave photons // Physical Review Letters. – 2011. – Т. 106. – №. 22. – С. 220503.
29. Besse J.C. et al. Single-shot quantum nondemolition detection of individual itinerant microwave photons // Physical Review X. – 2018. – Т. 8. – №. 2. – С. 021003.
30. Kono S. et al. Quantum non-demolition detection of an itinerant microwave photon // Nature Physics. – 2018. – Т. 14. – №. 6. – С. 546-549.
31. Solovykh I.A. et al. Few-photon microwave fields for superconducting transmon-based qudit control // Beilstein Journal of Nanotechnology. – 2025. – Т. 16. – №. 1. – С. 1580-1591.

32. Forn-Díaz P. et al. Ultrastrong coupling regimes of light-matter interaction // *Reviews of Modern Physics*. – 2019. – Т. 91. – №. 2. – С. 025005.
33. Сергеев М.А., Бастрова М.В., Вожаков В.А., Кленов Н.В., Соловьев И.И., Терешонок М.В. Нейросетевой поиск оптимальных последовательностей импульсов для управления динамикой кубитов // *T-Comm - Телекоммуникации и Транспорт*. – 2024. – Т. 18, № 7. – С. 56–64.
34. Zakharov R.V., Tikhonova O.V., Klenov N.V., Soloviev I.I., Antonov V.N., and Yakovlev D.S. Solid-state qubit as an on-chip controller for non-classical field states // *Advanced Quantum Technologies*. – 2024. – Vol. 7, no. 10. – P. 2400141.

**Для цитирования:**

Соловых И.А., Тихонова О.В., Пащенко А.В., Соловьев И.И., Кленов Н.В. Особенности возбуждения многоуровневого искусственного атома квантовыми и классическими электромагнитными полями // *Журнал радиоэлектроники*. – 2026. – №. 7. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2026.7.15>