“ЖУРНАЛ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ” N6, 2008

УДК 517 + 530

АППРОКСИМАЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПРОВОДНИКОВ ПОЛЯМИ ЭКРАНИРОВАННЫХ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ

В. П. Казанцев, М. В. Долгополова
Сибирский федеральный университет

Получена 2 июня 2008 г.

Найдены комплексные электрические потенциалы и энергетические соотношения для экранированных точечных зарядов на плоскости. Показано, что, как комплексные электрические потенциалы экранированных точечных зарядов, так и их энергии взаимодействия могут быть выражены через функции Грина. Построена вариационная схема аппроксимации полей проводников полями экранированных точечных зарядов, эффективность которой подтверждается примерами расчета погонной емкости длинных линий.

В работе [1] дан подробный анализ понятий точечных мультиполей на плоскости, а также показано, что электрическое поле системы круговых параллельных проводов может быть на основе вариационного принципа Гаусса приближенно с какой угодно точностью полями точечных мультиполей отдельных проводов. В работах [2,3], где рассматривались задачи электростатики на плоскости, было указано, что с полем аппроксимирующего точечного заряда тесно связано понятие внутреннего конформного радиуса $A(\tilde{z})$, так что величину аналогичную определяемой в работе [4] емкости поверхности относительно точки, емкость линии относительно точки $\tilde{z}$ можно определить как:

$$C(\tilde{z}) = 2\pi\varepsilon_0 \left(\ln \frac{R}{A(\tilde{z})} \right)^{-1};$$

где R - нормировочная постоянная [3]. Если заменить электрическое поле экранированного проводника вне него полем экранированного точечного заряда, расположенного внутри проводника в точке $\tilde{z}$, то такой аппроксимации будет отвечать оценка снизу емкости проводника относительно экрана [2]

$$C < \left(\frac{1}{C_n(\tilde{z})} - \frac{1}{C_э(\tilde{z})} \right) = 2\pi\varepsilon_0 \left(\ln \frac{A_э(\tilde{z})}{A_n(\tilde{z})} \right)^{-1}, \tag{1}$$

где $A_э(\tilde{z})$ и $A_n(\tilde{z})$ - внутренние конформные радиусы полости экрана и области проводника относительно точки $\tilde{z}$; $C_n(\tilde{z})$ и $C_э(\tilde{z})$ - емкости проводника и экрана относительно точки $\tilde{z}$.

Естественным образом возникает вопрос о последовательном уточнении оценки (1). Такое уточнение можно проводить, приближая электрическое поле экранированного проводника полями экранированных точечных зарядов, расположенных в одной или нескольких точках внутри проводника. В связи с чем возникает потребность анализа потенциалов, напряженностей электрических полей и энергий экранированных точечных зарядов. Такой анализ и будет проведен в этой работе.

Электрические поля и энергии экранированных точечных зарядов

Подробный анализ комплексной функции Грина для областей комплексной плоскости проведен в работе [3]. Напомним, что комплексная функция Грина области представляет собой комплексный потенциал, в общем случае с точностью до постоянной величины, экранированного границей области единичного точечного заряда. Для конечной области комплексной плоскости S, она может быть выражена через функцию $G(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)$, конформно отображающею экранированную область на круг радиусом $A(\tilde{z})$ так, что

$$G(\tilde{z},\tilde{z},\tilde{z}^*) = 0\,;\; \partial_z G(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)\big|_{z=\tilde{z}} = 1,$$

по формуле

$$\Gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{G(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)}{A(\tilde{z})} \right). \tag{2}$$

Положительную величину $A(\tilde{z})$ называют внутренним конформным радиусом области, ассоциированным с точкой $\tilde{z}$. На экране, как это видно из (2), $\operatorname{Re}\Gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = 0$.

Для анализа удобно представлять функцию Грина суммой

$$\Gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = \Gamma_0(z,\tilde{z}) + \gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*), \tag{3}$$

где

$$\Gamma_0(z,\tilde{z}) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{z-\tilde{z}}{R} \right)$$

- комплексный потенциал единичного точечного заряда (функция Грина всей комплексной плоскости). В этой работе $\gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)$ мы не будем отличать от комплексного потенциала зарядов $d\lambda(z_S)$, наведенных на заземленном экране ∂S электрическим полем точечного заряда, расположенного в точке $\tilde{z}$, поскольку будем рассматривать либо конечные экранируемые области, либо бесконечные экраны. Таким образом,

$$\gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\partial S}\ln\left(\frac{z-z_S}{R}\right)d\lambda(\tilde{z}_S). \tag{4}$$

Отметим, что вне экрана $\gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = -\Gamma_0(z,\tilde{z})$, то есть совпадает с потенциалом отрицательного единичного точечного заряда, расположенного в точке $\tilde{z}$.

Для реализации вариационного подхода к задачам аппроксимации электрического поля проводников полями точечных зарядов важны энергетические соотношения. Собственная энергия зарядов, наведенных на экране полем точечного заряда λ_0, расположенного в точке $\tilde{z}$ равна

$$W_{соб} = \frac{\lambda_0^2}{2}\operatorname{Re}\int\gamma(z_S,\tilde{z},\tilde{z}^*)d\lambda(z_S) = \frac{\lambda_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{A(\tilde{z})}. \tag{5}$$

Энергия взаимодействия наведенных зарядов с точечным зарядом выражается соотношением:

$$W_{вз} = -2W_{соб}. \tag{6}$$

Энергия взаимодействия двух точечных экранированных зарядов $\lambda_0^{(i)}$ и $\lambda_0^{(j)}$, расположенных в различных точках z_i и z_j может быть выражена через функцию Грина

$$W_{ij} = W_{ji} = \lambda_0^{(i)}\lambda_0^{(j)}\operatorname{Re}\Gamma(z_i,z_j,z_j^*) = \lambda_0^{(i)}\lambda_0^{(j)}\operatorname{Re}\Gamma(z_j,z_i,z_i^*), \tag{7}$$

поскольку $\lambda_0^{(i)}\Gamma(z_i,z_j,z_i^*)$ и $\lambda_0^{(j)}\Gamma(z_i,z_j,z_j^*)$ - это комплексные потенциалы, создаваемые единичными точечными зарядами, расположенные в точках z_i и z_j, в точках z_j и z_i. Заметим, что из полученного соотношения ясна видна симметрия реальной части функции Грина относительно перестановки z_i и z_j, а вместе с тем и гармоничность $\Gamma(z_i,z_j,z_j^*)$, как по z_i так и по z_j .

Вариационная схема решения задачи аппроксимации электрического поля проводников полями экранированных точечных зарядов

Пусть провод, на комплексной плоскости которому соответствует область S_n, заключен внутри параллельного ему цилиндрического экрана. Этому экрану на комплексной плоскости будет отнесена область $C-S-\partial S$ $(S_n \subset S)$. Будем аппроксимировать поле вне провода в области $S-S_n$ полями экранированных точечных зарядов, расположенных в точках $z_m \in S_n$, источниками которых служат распределенные по ∂S_n с плотностями $\lambda_0^{(m)}\sigma_m$ заряды.

Поле экранированного провода, которому на комплексной плоскости отвечает область S_n, аппроксимируем комплексным потенциалом [5]

$$\Pi_M(z) = \sum_{m=1}^{M} \lambda_0^{(m)} \Pi_0^{(m)}(z, z_m, z_m^*),$$

который является вне провода суперпозицией потенциалов экранированных точечных зарядов $\lambda_0^{(m)}$ расположенных в точках $z_m \in S_n$, а внутри провода суперпозицией потенциалов зарядов, наведенных точечным зарядом $\lambda_0^{(m)}$ на поверхности провода.

Собственная энергия экранированных точечных зарядов может быть записана в виде:

$$W_M = \frac{1}{2}\vec{\lambda}_0 \cdot \hat{A} \cdot \vec{\lambda}_0;\ \vec{\lambda}_0 = (\lambda_0^{(1)}; \lambda_0^{(2)}; \ldots; \lambda_0^{(M)});$$

$$A_{ii} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{a(z_i, z_i^*)}{a_n(z_i, z_i^*)},$$

$$A_{ij} = \mathrm{Re}(\Gamma(z_j, z_i, z_i^*) - \Gamma_n(z_j, z_i, z_i^*)), \tag{8}$$

где $a(z_i, z_i^*)$ и $a_n(z_i, z_i^*)$; $\Gamma(z_j, z_i, z_i^*)$ и $\Gamma_n(z_j, z_i, z_i^*)$ - внутренние конформные радиусы и функции Грина областей S и S_n.

При решении задачи о емкости экранированного провода следует минимизировать функционал энергии (8) по $\vec{\lambda}$ и $\vec{\lambda}_0$ при условии постоянства полного заряда проводника

$$\sum_{m=1}^{M} \lambda_0^{(m)} = \lambda_0 = \vec{e} \cdot \vec{\lambda}_0 .$$

Минимизируя электростатическую энергию, получим

$$\min W = \frac{\lambda_0^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\vec{e} \cdot \hat{A}^{-1} \cdot \vec{e}}.$$

Для значения емкости провода относительно экрана, на основании вариационного принципа Гаусса [6] будем иметь неравенство:

$$C > \vec{e} \cdot \hat{A}^{-1} \cdot \vec{e}. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь как реализуется предложенная вариационная схема на конкретном примере.

Комплексные функции Грина круга, кругового кольца, кругового полукольца и прямоугольника

Решение этой задачи может быть осуществлено по общей схеме, описанной формулами (8) – (9). *Для этого найдем функцию Грина круга,* она может быть выражена через функцию

$$G(z, \tilde{z}, \tilde{z}^*) = (|z|^2 - a^2) \frac{z - \tilde{z}}{z\tilde{z}^* - a^2},$$

конформно отображающую круг $(|z - z_0| \le a)$ на круг радиусом

$$a(\breve{z}, \breve{z}^*) = \frac{a^2 - |\tilde{z}|^2}{a},$$

тогда

$$\Gamma(z, \tilde{z}, \tilde{z}^*) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{a(z - \tilde{z})}{a^2 - z\tilde{z}^*}\right). \tag{10}$$

Функция Грина для кругового кольца $R_1 < |z| < R_2$ будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_\kappa(z, \tilde{z}, \tilde{z}^*) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0} (\ln(\frac{R_2(z - \tilde{z})}{R_2^2 - \tilde{z}^* z}) - (\ln\frac{|\tilde{z}|}{R_2} \Big/ \ln\frac{R_2}{R_1}) \ln\frac{z}{R_2} - \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_1^{2k}}{k(R_2^{2k} - R_1^{2k})} \left(\frac{R_2^{2k}}{\tilde{z}^{*k} z^k} + \frac{\tilde{z}^{*k} z^k}{R_2^{2k}} - \frac{\tilde{z}^k}{z^k} - \frac{z^k}{\tilde{z}^k}\right)) \end{aligned}. \tag{11}$$

Функция Грина кругового концентрического полукольца $R_1 < |z| < R_2 \cap \operatorname{Im} z > 0$ может быть выражена через комплексную функцию Грина кругового концентрического кольца $\Gamma_\kappa(z, \tilde{z}, \tilde{z}^*)$, если воспользоваться зеркальной симметрией кольца относительно оси x. В самом деле, функция $\Gamma_\kappa^*(z^*, \tilde{z}, \tilde{z}^*)$ при $\operatorname{Im} \tilde{z} > 0$ и $\operatorname{Im} z > 0$ будет аналитической функцией z в полукольце, реальная часть которой принимает на отрезках оси x те же значения, что и $\Gamma_{\kappa}(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)$, а на границах $|z| = R_1$ и $|z| = R_2$ нулевые значения. Тогда комплексной функцией Грина для полукольца будет служить

$$\Gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = \Gamma_{\kappa}(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) - \Gamma_{\kappa}^*(z^*,\tilde{z},\tilde{z}^*),$$

и, используя формулу (11) можно найти

$$\Gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}(\ln\left(\frac{(z-\tilde{z})(R_2^2-\tilde{z}z)}{(z-\tilde{z}^*)(R_2^2-\tilde{z}^*z)}\right) + \\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{R_1^{2k}}{k(R_2^{2k}-R_1^{2k})}(\frac{R_2^{2k}}{\tilde{z}^{*k}z^k} - \frac{R_2^{2k}}{\tilde{z}^k z^k} + \frac{\tilde{z}^{*k}z^k}{R_2^{2k}} - \frac{\tilde{z}^k z^k}{R_2^{2k}} - \frac{\tilde{z}^k}{z^k} + \frac{\tilde{z}^{*k}}{z^k} - \frac{z^k}{\tilde{z}^k} + \frac{z^k}{\tilde{z}^{*k}})).$$

(12)

Функция Грина для прямоугольника $|\operatorname{Re} z| < a/2 \cap |\operatorname{Im} z| < b/2$ может быть выражена через функцию Грина кругового концентрического полукольца (12) и функцию

$$w(z) = i\sqrt{R_1R_2}\exp\left(\frac{\pi z}{b}\right);\ \frac{R_2}{R_1} = \exp\left(\frac{\pi a}{b}\right),$$

которая конформно отображает прямоугольник $|\operatorname{Re} z| < a/2 \cap |\operatorname{Im} z| < b/2$ на полукольцо $|w| > R_1 \cap |w| < R_2 \cap \operatorname{Im} w > 0$. Используя эти формулы, получим функцию Грина

$$\Gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}(\ln(\frac{(w(z)-w(\tilde{z}))(R_2^2-w(\tilde{z})w(z))}{(w(z)-w^*(\tilde{z}))(R_2^2-w^*(\tilde{z})w(z))}) + \\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{R_1^{2k}}{k(R_2^{2k}-R_1^{2k})}(\frac{R_2^{2k}}{w^{*k}(\tilde{z})w^k(z)} - \frac{R_2^{2k}}{w^k(\tilde{z})w^k(z)} + \frac{w^{*k}(\tilde{z})w^k(z)}{R_2^{2k}} - \frac{w^k(\tilde{z})w^k(z)}{R_2^{2k}} \\ -\frac{w^k(\tilde{z})}{w^k(z)} + \frac{w^{*k}(\tilde{z})}{w^k(z)} - \frac{w^k(z)}{w^k(\tilde{z})} + \frac{w^k(z)}{w^{*k}(\tilde{z})}))$$

(13)

Рассмотрим выражение для внутреннего конформного радиуса прямоугольника, ассоциированного с точкой $\tilde{z}$:

$$a(\tilde{z},\tilde{z}^*) = \frac{2\operatorname{Im} w(\tilde{z})\left(R_2^2 - |w(\tilde{z})|^2\right)}{|w'(\tilde{z})||R_2^2 - w^2(\tilde{z})|}\exp(-(\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{R_1^{2k}}{k(R_2^{2k}-R_1^{2k})}(\frac{R_2^{2k}}{|w(\tilde{z})|^{2k}} - \\ \frac{R_2^{2k}}{w^{2k}(\tilde{z})} + \frac{|w(\tilde{z})|^{2k}}{R_2^{2k}} - \frac{w^{2k}(\tilde{z})}{R_2^{2k}} - 2 + \frac{w^k(\tilde{z})}{w^{*k}(\tilde{z})} + \frac{w^{*k}(\tilde{z})}{w^k(\tilde{z})}))),$$

(14)

Используя формулу (14) и выражение для внутреннего конформного радиуса круга с радиусом a:

$$a(\tilde{z},\tilde{z}^*)=\frac{a^2-\left|\tilde{z}\right|^2}{a},$$

для диагональных элементов энергетической матрицы запишем

$$A_{ii}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}(\ln(\frac{2R\operatorname{Im}w(z_i)(R_2^2-\left|w(z_i)\right|^2)}{(R^2-\left|z_i-z_0\right|^2)\left|w'(z_i)\right|\left|R_2^2-w^2(z_i)\right|})-$$

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{R_1^{2k}}{k(R_2^{2k}-R_1^{2k})}(\frac{R_2^{2k}}{\left|w(z_i)\right|^{2k}}-\frac{R_2^{2k}}{w^{2k}(z_i)}+\frac{\left|w(z_i)\right|^{2k}}{R_2^{2k}}-\frac{w^{2k}(z_i)}{R_2^{2k}}-2+\frac{w^k(z_i)}{w^{*k}(z_i)}+\frac{w^{*k}(z_i)}{w^k(z_i)}))$$

Для записи недиагональных элементов энергетической матрицы согласно соотношению (8) следует использовать комплексные функции Грина прямоугольника (13) и круга (10), тогда

$$A_{ij}=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\operatorname{Re}(\ln(\frac{(R^2-(z_j-z_0)^*(z_i-z_0))(w(z_i)-w(z_j))(R_2^2-w(z_j)w(z_i))}{R(z_i-z_j)(w(z_i)-w^*(z_j))(R_2^2-w^*(z_j)w(z_i))}\cdot$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{R_1^{2k}}{k(R_2^{2k}-R_1^{2k})}(\frac{R_2^{2k}}{w^{*k}(z_j)w^k(z_i)}-\frac{R_2^{2k}}{w^k(z_j)w^k(z_i)}+\frac{w^{*k}(z_j)w^k(z_i)}{R_2^{2k}}-\frac{w^k(z_j)w^k(z_i)}{R_2^{2k}}-$$

$$\frac{w^k(z_j)}{w^k(z_i)}+\frac{w^{*k}(z_j)}{w^k(z_i)}-\frac{w^k(z_i)}{w^k(z_j)}+\frac{w^k(z_i)}{w^{*k}(z_j)}))$$

Аппроксимация электрического поля заряженного проводящего круга, экранированного в прямоугольнике полями экранированных зарядов

Будем аппроксимировать электрическое поле экранированного в прямоугольнике круга полями пяти экранированных точечных зарядов $\lambda_0^{(1)}$, $\lambda_0^{(2)}$, $\lambda_0^{(3)}$, $\lambda_0^{(4)}$, $\lambda_0^{(5)}$, расположенных внутри круга в точках

$$z_1=x_0+\beta_1R+iy_0,\ z_2=x_0+i(y_0+\beta_2R);$$

$$z_3=x_0-\beta_3R+iy_0,\ z_4=x_0+i(y_0-\beta_4R),\ z_5=z_0.$$

Значения параметров β_k можно выбрать так, чтобы положения зарядов соответствовали точным решениям задачи о проводящем круге, экранированном соответствующей прямой, а именно:

$$\beta_1 = \frac{R}{a/2 - x_0 + \sqrt{(a/2 - x_0)^2 - R^2}}\,;\ \beta_2 = \frac{R}{b/2 - y_0 + \sqrt{(b/2 - y_0)^2 - R^2}}\,;$$

$$\beta_3 = \frac{R}{a/2 + x_0 + \sqrt{(a/2 + x_0)^2 - R^2}}\,;\ \beta_4 = \frac{R}{b/2 + y_0 + \sqrt{(b/2 + y_0)^2 - R^2}}\,.$$

Приведенные выше формулы существенно упрощаются при симметричном расположении круга в экранирующем его прямоугольнике, когда центр круга совпадает с центром прямоугольника, тогда $z_0 = 0$. Симметрия расположения круга в прямоугольнике позволяет редуцировать энергетическую матрицу, уменьшив ее ранг на две единицы, так как

$$\lambda_0^{(1)} = \lambda_0^{(3)},\ \lambda_0^{(2)} = \lambda_0^{(4)}.$$

Если ввести новые обозначения, то можно записать:

$$\vec{\Lambda} = (\Lambda_1; \Lambda_2; \Lambda_3)\,;\ \vec{\lambda}_0 = \left(\frac{\Lambda_1}{2}; \frac{\Lambda_2}{2}; \frac{\Lambda_1}{2}; \frac{\Lambda_2}{2}; \Lambda_3 \right).$$

Для более симметричной фигуры, квадрата получим

$$a = b\,;\ \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4,$$

тогда число определяемых параметров можно сократить до двух

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \frac{1}{2}\tilde{\Lambda}_1;\ \Lambda_3 = \tilde{\Lambda}_2,$$

а функционал энергии представить в виде

$$W = \frac{1}{2}\tilde{\vec{\Lambda}} \cdot \hat{a} \cdot \tilde{\vec{\Lambda}}. \qquad (15)$$

Элементы редуцированной матрицы будут определяться как

$$a_{11} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}(\ln(\frac{8b\beta^3\,\mathrm{th}\,\eta\,\mathrm{cth}(2\xi)\,\mathrm{th}(\eta - 2\xi)}{\pi R(1 - \beta^8)}) - \ln(\frac{(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\xi)(\mathrm{ch}^2(\eta - \xi) - \sin^2\xi)}{(\mathrm{ch}^2\xi - \sin^2\xi)(\mathrm{ch}^2(\eta - \xi) - \cos^2\xi)}) -$$
$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{16\,\mathrm{sh}((2p-1)\eta)\,\mathrm{sh}((2p-1)(\eta - 2\xi))}{(2p-1)(\exp(4(2p-1)\eta) - 1)} \cdot (\mathrm{ch}(2(2p-1)\xi) + \cos(2(2p-1)\xi)))$$

,

$$a_{12} = a_{21} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}(\ln(\frac{1}{\beta}\,\mathrm{th}\,\xi\,\mathrm{cth}(\eta - \xi)) + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{8\,\mathrm{sh}((2p-1)\eta)\,\mathrm{sh}((2p-1)(\eta - 2\xi))}{(2p-1)(\exp(4(2p-1)\eta) - 1)})$$

(16)

$$a_{22} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}(\ln(\frac{2b}{\pi R}\,\mathrm{th}\,\eta) - \sum_{p=1}^{\infty}2\frac{\mathrm{th}((2p-1)\eta)}{2p-1}\exp(-2(2p-1)\eta)),$$

где

$$\xi = \frac{\eta\beta R}{a};\ \eta = \frac{\pi}{2}.$$

Рассмотрим численный пример для круга с радиусом R, экранированного в квадрате со стороной a так, что центры квадрата и круга совпадают. С помощью формул (16) находим элементы матрицы $\hat{a}$, далее, минимизируя функционал энергии (15) по $\tilde{\tilde{\Lambda}}$ при условии

$$\tilde{\Lambda}_1 + \tilde{\Lambda}_2 = \lambda_0,$$

получаем оценку снизу C_0 для емкости конденсатора, образованного границами круга и квадрата как обкладками. Результаты приведены в таблице 1.

Здесь C - значение емкости экранированного в квадрате круга, полученные в работе [7]. Результат, по утверждению автора [7], получен со всеми точными цифрами, однако вычисленная здесь оценка снизу позволяет усомниться в этом. По-видимому, все же погрешность найденной в [7] оценки не будет превосходить нескольких единиц четвертого после запятой знака.

Таблица 1.

$2R/a$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\frac{C_0}{2\pi\varepsilon_0}$	0.4205	0.5934	0.7814	1.0080	1.3007	1.7059	2.3194	3.3909	5.9170
$\frac{C}{2\pi\varepsilon_0}$	0.422	0.596	0.780	1.008	1.302	1.704	2.318	3.390	5.920

В заключение отметим, что использование комплексной формы записи электростатических соотношений позволило компактно описать развитую здесь вариационную схему аппроксимации электрических полей проводников полями экранированных точечных зарядов. С помощью этой схемы вычисления практически можно проводить с наперед заданной точностью, выбирая соответствующим образом число аппроксимирующих зарядов. Отметим также, что в настоящей работе впервые было получено выражение для комплексной функции Грина прямоугольника.

Список литературы

1. Казанцев В.П., Золотов О.А., Долгополова М.В. // УФН – 2006 – Т.176 - №5 – С. 537 – 542.

2. Казанцев В.П., Золотов О.А., Долгополова М.В. // Вестник КрасГУ – 2005 - №4 – С15.
3. Казанцев В.П. // ДАН -2001 – Т.380 - №6 – С.749 – 753.
4. Казанцев В.П. // Известие вузов. Физика – 2001 - №7 – С.78 – 83.
5. Казанцев В.П., Золотов О.А., Долгополова М.В. // Вестник КрасГУ – 2006 - №7 – С.12.
6. Полиа Г. Изопериметрические неравенства в математической физике/ Г. Полиа, Г. Сеге. – М.: ГИФМЛ, 1962.
7. Пергаменцева Э.Д. // Журн. Техн. Физ. – 1978 – Т.48 - №6 – С.1153 – 1155.