

УДК 621.369

ОСОБЕННОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СПЕКТРАЛЬНО-ОГРАНИЧЕННЫХ СИГНАЛОВ

А. В. Кокошкин, В. А. Коротков, К. В. Коротков, Е. П. Новичихин
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
Фрязинский филиал
141120, Московская область, г. Фрязино, пл. академика Введенского, д.1.

Статья поступила в редакцию 8 июня 2017 г.

Аннотация. Для достижения целей экспериментального исследования сигнала часто необходимо знать его значения вне измеренных точек. Результаты интерполяции (ошибки интерполяции) зависят как от соответствия вида интерполяции сигналу, так и от расположения измеренных точек. В отличие от прочих методов, ошибки интерполяции рядом Фурье зависят не от расположения узлов интерполяции, а от спектра измеряемого сигнала. В данной работе рассматриваются особенности интерполяции спектрально-ограниченных сигналов. Экспериментальные данные предполагаются полученными в результате нескольких серий измерений с постоянным шагом, но с произвольным расположением начальной точки. Полученные результаты позволяют получать интерполированные значения, слабо зависящие от начальных точек измерений. В применении к обработке цифровых изображений это эквивалентно попытке увеличить пространственное разрешение при наличии нескольких исходных кадров невысокого качества. В нашей работе мы обратили особое внимание на проверку соответствия вида интерполяции (ряд Фурье) и свойств сигнала (спектральная ограниченность). Обычно рассмотрение спектрально ограниченных сигналов производится на основе ряда Котельникова без использования спектра сигнала. В данной работе вычисление спектра сигнала является важным отличием от других работ, позволяющим оценить реальное ограничение спектра измеренных данных (если

такое имеется). Это обеспечивает достоверность интерполяции рядом Фурье. Несмотря на то, что измеренные экспериментальные данные могут быть непериодическими, мы будем рассматривать их (в рамках ряда Фурье) как периодические с периодом равным времени измерения. В данной работе сравниваются результаты интерполяции рядами Котельникова, Фурье и кубическим сплайном. Показано определенное преимущество интерполяции ряда Фурье для периодического спектрально-ограниченного сигнала. Получены выражения для расчётов спектров экспериментально измеренных сигналов для нескольких серий измерений с постоянным шагом, но с произвольным расположением начальной точки.

Ключевые слова: спектрально ограниченный сигнал, интерполяция, ряд Котельникова, ряд Фурье.

Abstract. To achieve the objectives of experimental signal research, it is often necessary to know its values outside the measured points. The interpolation results (interpolation errors) depend both on the correspondence of the type of interpolation to the signal, and on the location of the measured points. Unlike other methods, the Fourier series interpolation errors do not depend on the location of the interpolation nodes, but depend on the spectrum of the measured signal. In this paper, we consider the features of interpolation of spectrally-bounded signals. The experimental data are assumed to be obtained as a result of several series of measurements with a constant step, but with an arbitrary arrangement of the starting point. The obtained results make it possible to get interpolated values that depend weakly on the initial measurement points. As applied to digital image processing, this is equivalent to trying to increase spatial resolution in the presence of several low-quality source frames. In our work, we paid special attention to verifying the correspondence between the type of interpolation (Fourier series) and signal properties (spectral limitation). Usually, the analysis of spectrally limited signals is performed on the basis of the Kotel'nikov series without using the signal spectrum. In this paper, the computation of the signal spectrum is an important difference from other works,

which makes it possible to estimate the real limitation of the spectrum of the measured data (if any). This ensures the reliability of interpolation by the Fourier series. In spite of the fact that the measured experimental data can be non-periodic, we shall consider them (within the Fourier series) as periodic with a period equal to the time of measurement. In this article we compare the results of interpolation by the Kotel'nikov and Fourier series and the cubic spline. A certain advantage of interpolation of the Fourier series for a periodic spectral-limited signal is shown. Expressions are obtained for calculating the spectra of experimentally measured signals for several series of measurements with a constant step, but with an arbitrary arrangement of the starting point.

Key words: spectrally limited signal, interpolation, Kotelnikov series, Fourier series.

Для достижения целей экспериментального исследования сигнала часто необходимо знать его значения вне измеренных точек. Различные алгоритмы интерполяции [1-7] обеспечивают получение значений в дополнительных точках на основе использования имеющихся данных. Результаты интерполяции (ошибки интерполяции) зависят как от соответствия вида интерполяции сигналу, так и от расположения измеренных точек. Как правило, априорной информации для построения функциональной модели данных недостаточно. Или построение такой функциональной модели принципиально невозможно. Поэтому обычно высказываются предположения исходя из особенностей аппаратуры для измерений.

Интересной особенностью ряда методов интерполяции является зависимость ошибок интерполяции от расположения узлов интерполяции. Эта особенность была использована для оценки ошибки интерполяции в работе [9]. В отличие от прочих методов, ошибки интерполяции рядом Фурье зависят не от расположения узлов интерполяции, а зависят от спектра измеряемого сигнала.

В данной работе рассматриваются особенности интерполяции спектрально-ограниченных сигналов. Экспериментальные данные предполагаются

полученными в результате нескольких серий измерений с постоянным шагом, но с произвольным расположением начальной точки. Полученные результаты позволяют получать интерполированные значения, слабо зависящие от начальных точек измерений. В применении к обработке цифровых изображений это эквивалентно попытке увеличить пространственное разрешение при наличии нескольких исходных кадров невысокого качества.

Одним из важных моментов для интерполяции является достоверность (малые ошибки) результатов интерполяции. В большинстве работ, посвященных интерполяции экспериментальных данных, анализируется влияние тех или иных параметров измеряемого сигнала и методики измерений на результаты интерполяции. В нашей работе мы обратили особое внимание на проверку соответствия вида интерполяции (ряд Фурье) и свойств сигнала (спектральная ограниченность). Часто такая проверка не делается или производится только с интерполированным сигналом [8]. В случае интерполяции рядом Фурье проверять ограниченность спектра после интерполяции является сомнительным занятием.

Обычно рассмотрение спектрально ограниченных сигналов производится на основе ряда Котельникова без использования спектра сигнала [3,8]. Предположение о неограниченности спектра используется для оценки величины возможных ошибок. В данной работе вычисление спектра сигнала является важным отличием от других работ, позволяющим оценить реальное ограничение спектра измеренных данных (если таковое имеется). Это обеспечивает достоверность интерполяции рядом Фурье.

Несмотря на то, что измеренные экспериментальные данные могут быть непериодическими, мы будем рассматривать их (в рамках ряда Фурье) как периодические с периодом равным времени измерения.

Для случая периодической функции справедливо разложение её в ряд Фурье:

$$y(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} f(k) \exp\left[-i \frac{2\pi k x}{T}\right], \quad (1)$$

где T - период функции. Пусть величина $y(x)$ известна в точках x_n и их число равно N . Если мы знаем спектр $f(k)$ соответствующий экспериментальным данным, то (1) позволяет получать интересующие нас интерполированные значения. Воспользуемся методом наименьших квадратов. Пусть координаты x_n принадлежат n_0 последовательностям (кадрам) по оси x с числом точек N/n_0 , с постоянным шагом $\Delta x = n_0 T / N$ и смещённым относительно друг друга на $\Delta m_q < \Delta x$ (q меняется от 0 до $n_0 - 1$):

$$x_{q,n} = \Delta m_q + n \Delta x . \quad (2)$$

$$\sum_x \left| y(x) - \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} f(k) \exp \left[-i \frac{2\pi k x}{T} \right] \right|^2 \rightarrow \min . \quad (3)$$

Продифференцируем (2) по $f^*(j)$ и получим:

$$\sum_x y(x) \exp \left[i \frac{2\pi j x}{T} \right] - \sum_x \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} f(k) \exp \left[-i \frac{2\pi (k-j) x}{T} \right] = 0 . \quad (4)$$

Учтём, что каждая координата x_n состоит из суммы n_0 последовательностей:

$$N_n F(j) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} f(k) \sum_{q=0}^{n_0-1} \sum_{n=-N_n/2}^{N_n/2-1} \exp \left[-i \frac{2\pi (k-j) \Delta m_q}{T} \right] \exp \left[-i \frac{2\pi (k-j) n \Delta x}{T} \right],$$

ИЛИ

$$N_n F(j) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} f(k) D(k-j) \sum_{n=-N_n/2}^{N_n/2-1} \exp \left[-i 2\pi \frac{(k-j)n}{N_n} \right], \quad (5)$$

где $D(k-j) = \sum_{q=0}^{n_0-1} \exp \left[-i \frac{2\pi (k-j) \Delta m_q}{T} \right]$, $N_n = \frac{N}{n_0}$,

$$F(j) = \frac{1}{N_n} \sum_x y(x) \exp \left[i \frac{2\pi j x}{T} \right] . \quad (6)$$

Сумма

$$S(k-j) = \sum_{n=-N_n/2}^{N_n/2-1} \exp \left[-i 2\pi \frac{(k-j)n}{N_n} \right]$$

не 0 только при $k - j = sN_n$ или $k = j + sN_n$, где s - целое число и равна $S(k - j) = N_n$.

Таким образом (5) преобразуется в

$$F(j) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} f(k) D(k-j) \sigma(k-j), \quad (7)$$

где $\sigma(k-j) = 1$, $k - j = sN_n$, и $\sigma(k-j) = 0$, $k - j \neq sN_n$, s - целое число, при этом следует учесть, что $-N/2 \leq k, j \leq N/2 - 1$.

Понятно, что для вычисления спектра $f(k = j + sN_n)$ необходимо решить систему n_0 уравнений.

Первичный спектр (6) после подстановки (2) можно вычислить по формуле:

$$F(j) = \frac{1}{N_n} \sum_{q=0}^{n_0-1} \exp\left[i2\pi \frac{j \Delta m_q}{T}\right] \sum_{n=-N_n/2}^{N_n/2-1} y(\Delta m_q + n \Delta x) \exp\left[i2\pi \frac{jn}{N_n}\right]. \quad (8)$$

Таким образом, спектр $f(k)$ можно вычислить с помощью (7) и (8) с использованием быстрого преобразования Фурье.

Приведём формулы для вычисления спектра $f(k)$, полученные из (7, 8) для случая двух последовательностей ($n_0 = 2$):

$$\begin{aligned} f(k) &= [N(1 - 0.25 D_{N/2} D_{-N/2})]^{-1} [F(k) - 0.5 D_{N/2} F(k + N/2)], \text{ при } k < 0, \\ f(k) &= [N(1 - 0.25 D_{N/2} D_{-N/2})]^{-1} [F(k) - 0.5 D_{-N/2} F(k - N/2)], \text{ при } k > 0, \\ f(k) &= [N(1 - 0.25 D_{N/2} D_{N/2})]^{-1} [F(k) - 0.5 D_{N/2} F(k - N/2)], \text{ при } k = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$D_k = 1 + \exp\left[-i \frac{2\pi k \Delta m}{T}\right], \text{ предполагается, что } \Delta m_0 = 0 \text{ и } \Delta m = \Delta m_1 \neq 0.$$

В качестве примера рассмотрим измеряемый сигнал в виде функции:

$$y(x) = \sin(\alpha x) + \sin(7\alpha x) + 1.5 \cos(4\alpha x), \quad (10)$$

где $\alpha = 0.475$.

Эта модельная функция выбрана исключительно с целью большей наглядности иллюстраций. Поскольку, в принципе, можно было рассматривать значения случайного процесса при условии спектральной ограниченности такого процесса (в общем случае предполагаем, что параметры и свойства сигнала не известны – модели сигнала нет). Мы интерполируем не функцию, а измеренные значения сигнала. Выбор функции (10) обусловлен не только тем, что читатель сам может проверить результаты нашей работы, что было бы труднее в случае случайного сигнала. Читатель может убедиться в том, что ограниченный спектр самой периодической функции (10) не гарантирует ограниченность спектра дискретных данных, полученных с помощью (10).

Следует отметить, что интерполяция не периодической функции рядом Фурье ограниченной длины имеет одну особенность – краевой эффект. Этот эффект может наблюдаться и в случае других интерполяций, например интерполяция кубическим сплайном [4].

Рассмотрим изменение спектра, рассчитанного на основе «измеренных» значений (10). Будем считать, что измеренные значения состоят из n_0 серий измерений, причем количество измерений в серии постоянно и равно N_n . Общее количество измерений равно $N = n_0 N_n$.

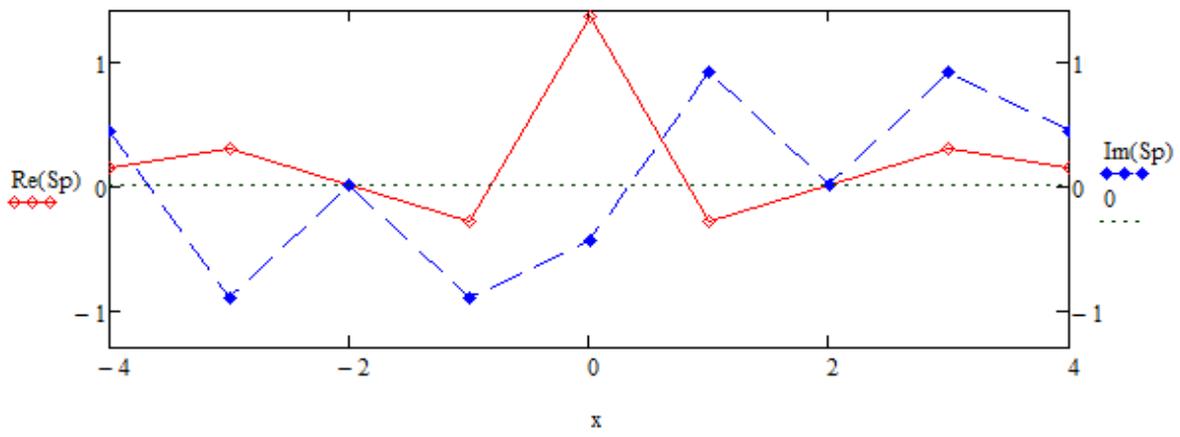
Полагаем, что

$T = 20$; $N_n = N / n_0 = 4$; $\Delta x = 5$; $\Delta m_0 = 0$. В дальнейшем используем следующую реализацию сдвигов кадров:

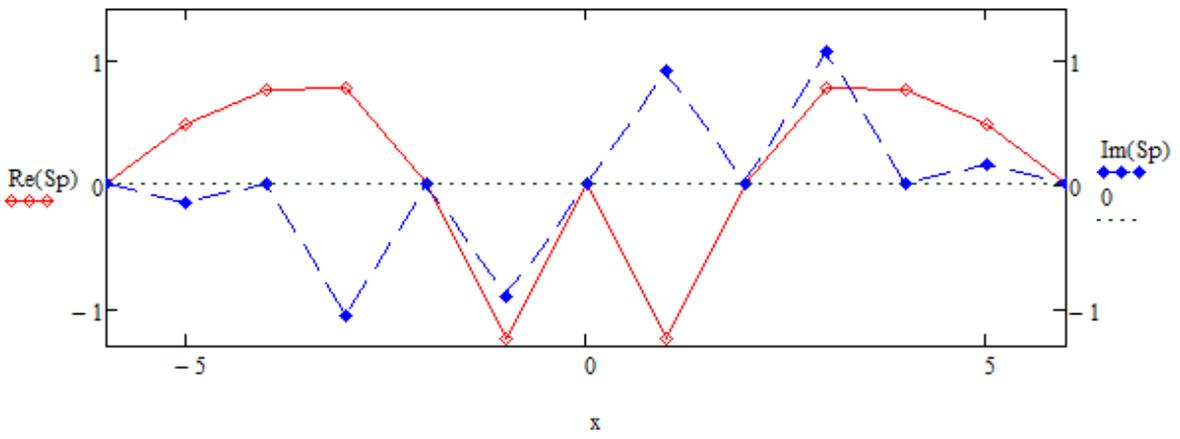
$$\Delta m = [0; 0,1; 0,2; 0,9; 0,3; 0,8; 0,4; 0,7; 0,5; 0,6] \Delta x. \quad (11)$$

На рис.1 представлены спектры для случаев $n_0 = 2$; 4 и 5 кадров рассчитанные с помощью (7).

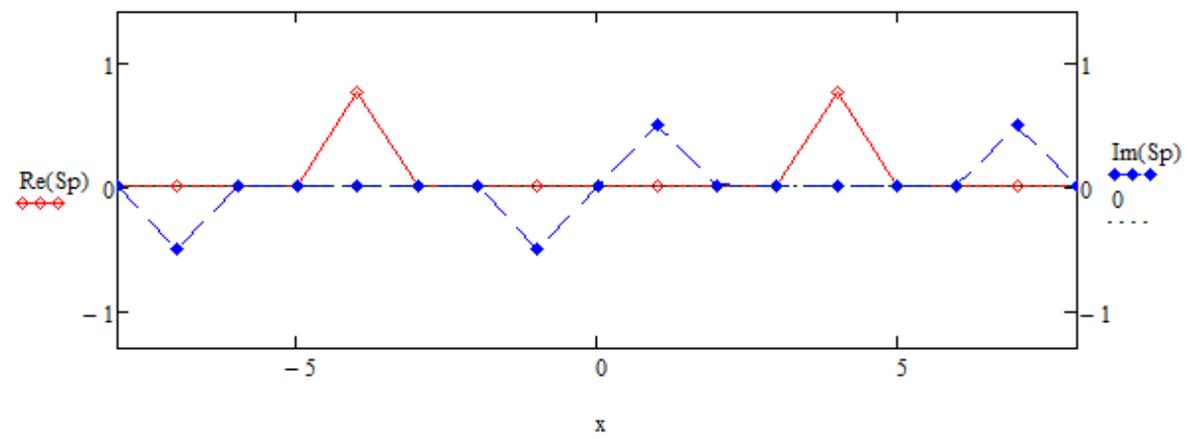
На рис.1 видно, что количество измерений из двух или трех кадров явно недостаточно для получения ограниченного спектра (рис.1а и рис.1б). При количестве измерений больше 16, что соответствует четырем или пяти кадрам (рис.1в и рис.1г) спектр становится ограниченным. Поэтому интерполяции Фурье с такими спектрами можно доверять.



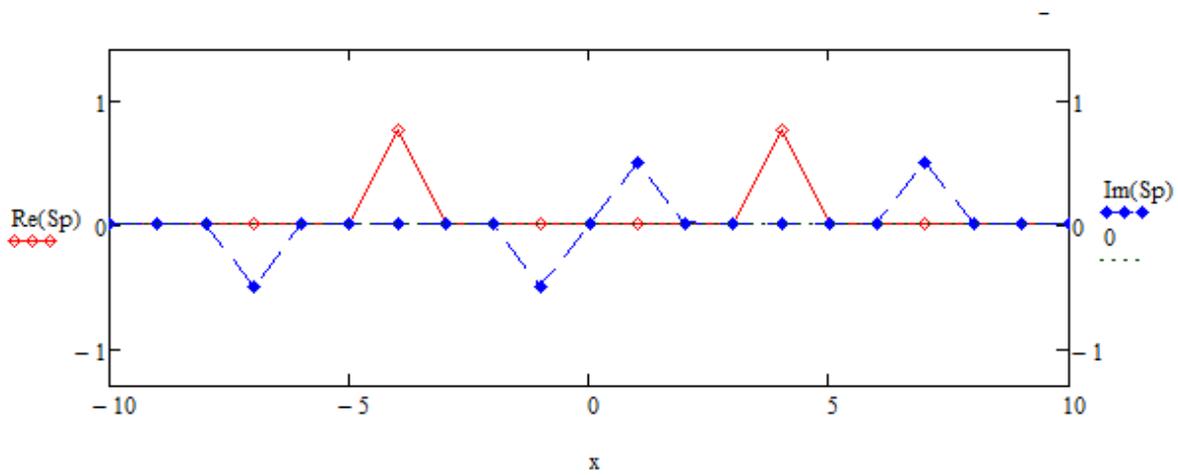
a) $n_0 = 2$;



б) $n_0 = 3$;



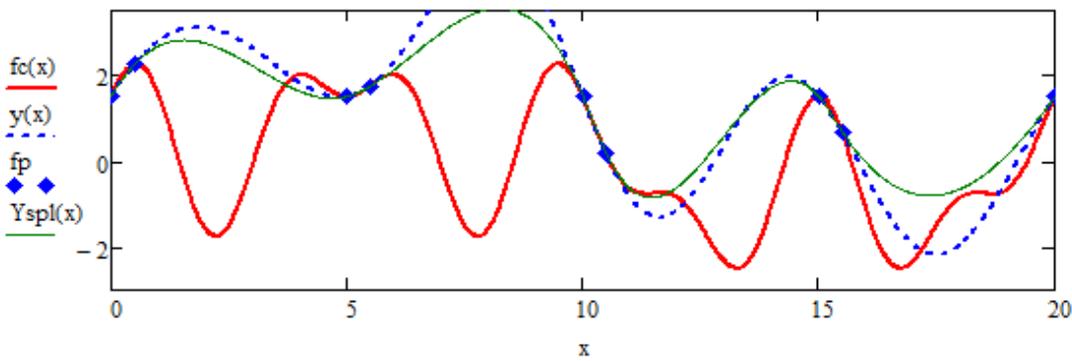
в) $n_0 = 4$;



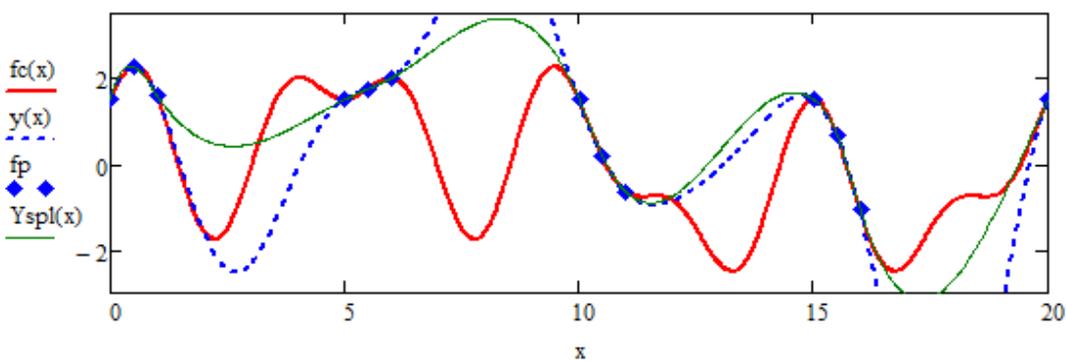
г) $n_0 = 5$.

Рис.1. Графики спектров (действительная часть отмечена красным цветом, мнимая – синим цветом). Ромбами показаны рассчитанные значения, которые для удобства соединены отрезками прямых линий. Графики а) – г) соответствуют количеству кадров n_0 от двух до пяти.

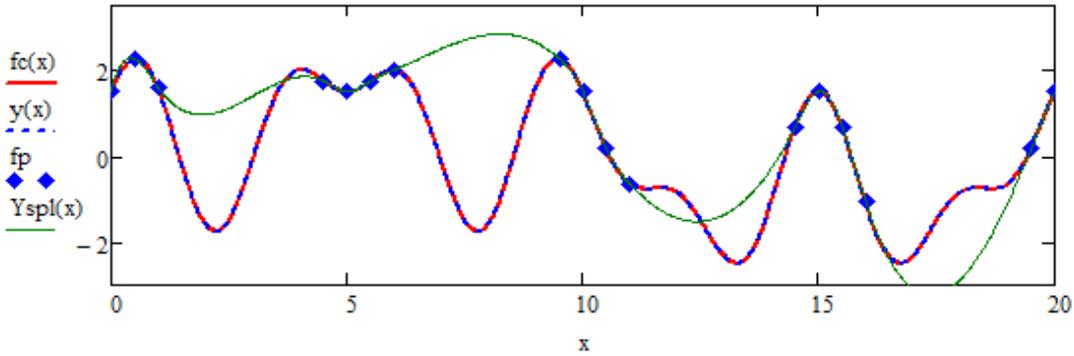
На рис.2 представлены результаты интерполяции соответствующие спектрам рис.1.



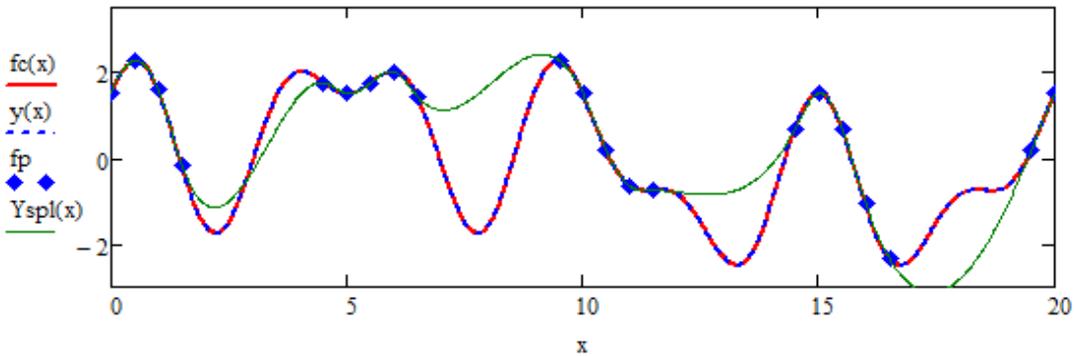
а) $n_0 = 2$



б) $n_0 = 3$



в) $n_0 = 4$



г) $n_0 = 5$.

Рис.2. Графики исходного сигнала – красная линия; интерполяции Фурье и кубическим сплайном – соответственно прерывистая синяя линия и зеленая линия. «Измеренные» значения отмечены синими ромбами. Графики а) – г) соответствуют количеству кадров n_0 от двух до пяти.

На рис.2 видно, что интерполяция Фурье хорошо ложится на измеренный сигнал при достижении количества измерений, достаточного для получения ограниченного спектра. В то же время из-за неравномерного расположения «измеренных» данных интерполяция кубическим сплайном дает неудовлетворительные результаты. На рис.3 приведены графики исходного сигнала и интерполяции Фурье и кубического сплайна для случая равномерного расположения «измеренных» данных с количеством измерений, соответствующим рис.1в и рис2в.

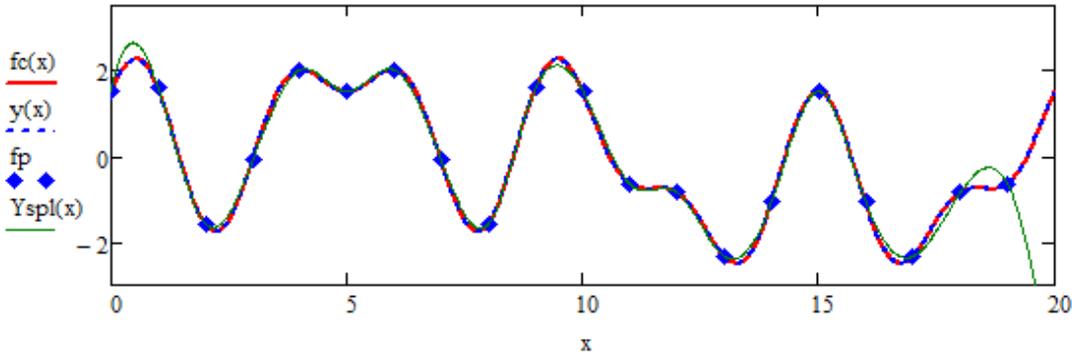


Рис.3. Графики исходного сигнала (красная линия) и интерполяции Фурье (синяя прерывистая линия) и кубического сплайна (зеленая линия) для случая равномерного расположения «измеренных» данных (синие ромбы) с количеством измерений, соответствующим рис.1в и рис2в.

На рис.3 видно, что интерполяции кубическим сплайном и Фурье почти везде совпадают с исходным сигналом. Интерполяция сплайном дает заметную погрешность вблизи начальных и конечных точек измерения (краевой эффект).

Сравним результаты интерполяции Фурье с интерполяцией рядом Котельникова модифицированным для неравномерных отсчетов [3]. При интерполяции рядом Фурье мы предположили, что исходный сигнал периодический. Ряд Котельникова может интерполировать и непериодический сигнал. Следует учитывать, что измеренные значения, лежащие в разных периодах, влияют на результат интерполяции. В принятых в этой работе обозначениях для периодического сигнала интерполяция рядом Котельникова выглядит следующим образом:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N_n-1} \sum_{q=0}^{n_0-1} y(\Delta m_q + n \Delta x) \sum_{k=-K}^K \phi(x, q, n, k), \quad (12)$$

где

$$\phi(x, q, n, k) = \frac{\prod_{p=0}^{n_0-1} \prod_{m=0}^{N_n-1} \sin(\pi(x - (\Delta m_p + m \Delta x + kT)) / N \Delta x)}{(\pi(x - (\Delta m_q + n \Delta x + kT)) / N \Delta x) \prod_{p=0, p \neq q}^{n_0-1} \prod_{m=0, m \neq n}^{N_n-1} \sin(\pi(x - (\Delta m_p + m \Delta x + kT)) / N \Delta x)},$$

K - число дополнительных периодов, участвующих в интерполяции рядом Котельникова.

На рис.4 представлены графики исходного сигнала и интерполяций Фурье и модифицированного ряда Котельникова для случая $K = 0$ (учитывается при интерполяции только один период).

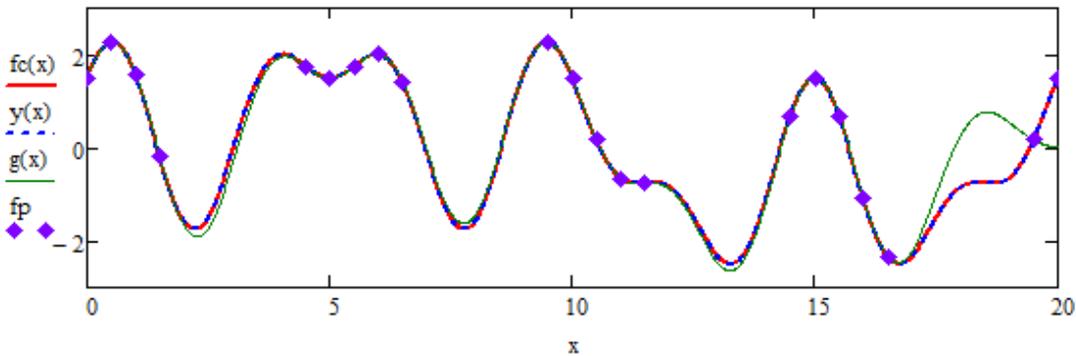


Рис.4. Графики исходного сигнала (10) (красная линия) и интерполяций Фурье (синяя прерывистая линия) и модифицированного ряда Котельникова (зеленая линия) для случая $K = 0$ (учитывается при интерполяции только один период). «Измеренные» значения отмечены синими ромбами.

На рис.4 видно, что влияние при интерполяции модифицированным рядом Котельникова неучтенных периодов измеренного сигнала особенно выражено на краях, но может проявляться и по всему периоду измерений. Величина отклонений при интерполяции зависит как от количества учтенных периодов, так и от вида сигнала.

Дополнительно рассмотрим сигнал, описываемый следующей формулой:

$$y_1(x) = \sin(\alpha(x - 0,5T)) + \sin(7\alpha(x - 0,5T)) + 1,5 \cos(4\alpha(x - 0,5T)). \quad (13)$$

Сигнал (13) отличается от сигнала (10) только наличием сдвига $0,5T$.

На рис.5 представлены графики исходного сигнала и интерполяций Фурье и модифицированного ряда Котельникова для случая $K = 0$ (учитывается при интерполяции только 1 период). Отличие рис.5 от рис.4 заключается в изменении сигнала (рис.4 соответствует (10), а рис.5 – (13)).

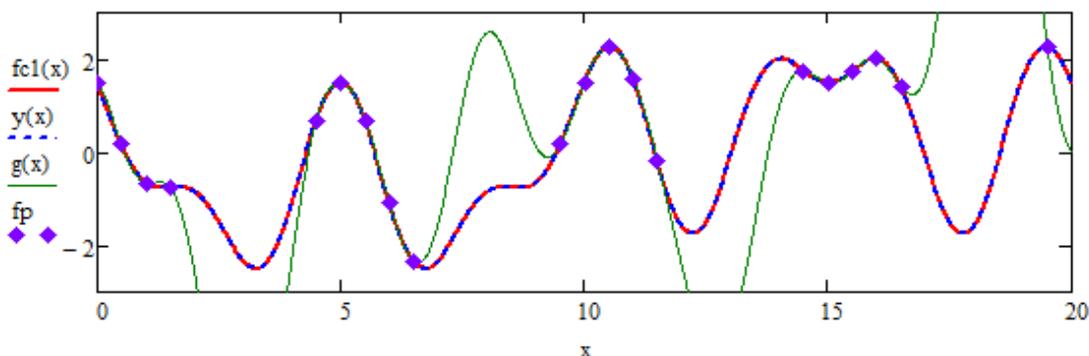


Рис.5. Графики исходного сигнала (13) (красная линия) и интерполяций Фурье (синяя прерывистая линия) и модифицированного ряда Котельникова (зеленая линия) для случая $K = 0$ (учитывается при интерполяции только один период). «Измеренные» значения отмечены синими ромбами.

Сравнение рис.5 и рис.4 позволяет сделать вывод о сильном влиянии вида сигнала на результаты интерполяции рядом Котельникова (12) при учете только 1 периода сигнала.

На рис.6 представлены графики среднеквадратичного отклонения интерполяции рядом Котельникова (12) от количества учтенных периодов для двух функций (10) и (13).

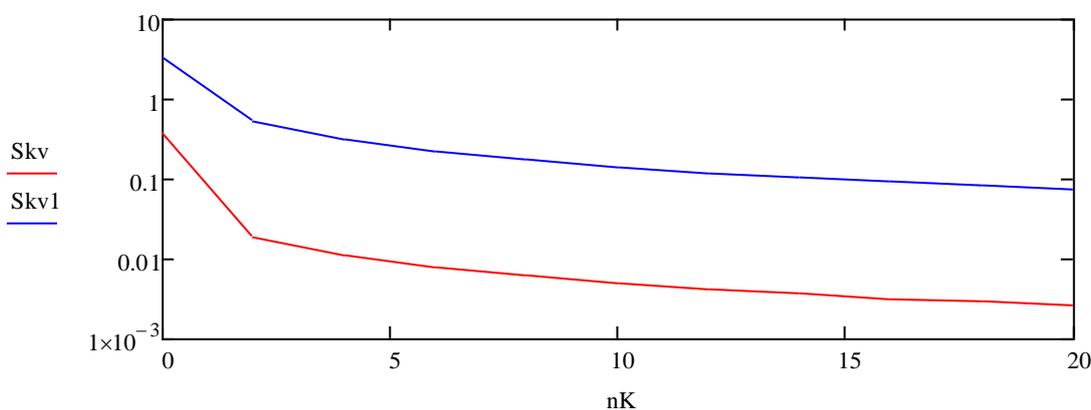


Рис.6. Графики среднеквадратичного отклонения интерполяции рядом Котельникова (12) от количества учтенных периодов для двух функций: (10) (красная линия) и (13) (синяя линия).

На рис.6 видно, что величина среднеквадратичных отклонений достаточно сильно зависит от вида интерполируемого сигнала.

Выводы:

- Получены выражения для расчётов спектров экспериментально измеренных сигналов для нескольких серий измерений с постоянным шагом, но с произвольным расположением начальной точки.
- Рассчитанные на основе полученных выражений спектры позволяют контролировать достоверность результатов интерполяции.
- Рассчитанный спектр позволяет интерполировать рядом Фурье экспериментальные данные.
- Экспериментальные данные предполагаются полученными в результате нескольких серий измерений с постоянным шагом, но с произвольным расположением начальной точки. Полученные результаты позволяют получать интерполированные значения, слабо зависящие от начальных точек измерений. В применении к обработке цифровых изображений это эквивалентно попытке увеличить пространственное разрешение при наличии нескольких исходных кадров невысокого качества.

Литература

1. В.А.Зверев. Радиооптика. М. «Советское радио» – 1975. – С. 304
2. А.П. Аксенов. Математический анализ. (Ряды Фурье. Интеграл Фурье. Суммирование расходящихся рядов.) Учебное пособие. СПб.: Изд-во «Нестор» – 1999. – С. 86
3. Я.И. Хургин, В.П. Яковлев Методы теории целых функций в радиофизике теории связи и оптике. М.: Государственное издательство физико-математической литературы – 1962. – С. 220
4. Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер Машинные методы математических вычислений. - М: Изд-во «Мир», 1980.– С.279
5. А. Г. Гранков, А. А. Мильшин, Е. П. Новичихин Поведение радиояркой температуры системы «океан-атмосфера» в условиях активности

среднеширотных и тропических циклонов. // Известия вузов, радиофизика, 2013, №10, С. 711–725.

6. С. П. Шарый. Курс вычислительных методов. Институт вычислительных технологий СО РАН. Новосибирск. 2016.
7. Е. В. Щерба. Анализ применимости методов интерполяции и экстраполяции для решения задачи восстановления изображения. // Компьютерная оптика, – 2009 – том 33. №3 – С. 336-339.
8. А. А. Афонский, Е. В. Суханов Интерполяция в цифровой осциллографии. // Контрольно-измерительные приборы и системы. №5, 2010. С. 13-16
9. В. А. Кокошкин, В. А. Коротков, К. В. Коротков, Е. П. Новичихин Об использовании простого способа оценки ошибки интерполяции экспериментальных данных. // Журнал Радиоэлектроники [электронный журнал], 2016, №9, URL: <http://jre.cplire.ru/jre/sep16/5/text.pdf>.

Ссылка на статью:

А. В. Кокошкин, В. А. Коротков, К. В. Коротков, Е. П. Новичихин. Особенности интерполяции спектрально-ограниченных сигналов. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2017. №6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun17/6/text.pdf>