

DOI 10.30898/1684-1719.2020.6.6

УДК 621.396.67

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ НА ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ С КУСОЧНО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФОРМОЙ ОБРАЗУЮЩЕЙ ГИБРИДНЫМ МЕТОДОМ

В. А. Калошин¹, Д. Т. Луу²

¹ Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН,
125007, Москва, Моховая, 11-1

² Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), 141700, Долгопрудный Моск. обл., Институтский пер. 9

Статья поступила в редакцию 27 мая 2020 г.

Аннотация. Рассмотрена задача рассеяния плоской электромагнитной волны на круглом идеально - проводящем цилиндре, ограниченном по торцам полусферами. Для решения задачи использован гибридный метод, сочетающий метод собственных функций, последовательных дифракций и принцип эквивалентности. Проведено сравнение результатов расчета диаграммы рассеяния гибридным методом, методом моментов и методом Гюйгенса-Френеля-Кирхгофа.

Ключевые слова: плоская электромагнитная волна, рассеяние, гибридный метод, метод Гюйгенса-Френеля-Кирхгофа.

Abstract. The problem of scattering a plane electromagnetic wave by a circular perfectly conducting cylinder bounded by hemispherical ends is solved. The hybrid method combining techniques of eigen functions, successive diffractions, and the principle of equivalence was used to solve the problem. The results of calculating the scattering patterns by the hybrid method, the method of moments, and the Huygens-Fresnel-Kirchhoff method are compared.

Key words: plane electromagnetic wave, scattering, hybrid method, Huygens-Fresnel-Kirchhoff method.

Введение

При решении задач рассеяния акустических и электромагнитных волн на телах вращения с кусочно-аналитической формой поверхности применяются как численные методы: моментов, конечных элементов, конечных разностей во временной области, T–матриц, так и асимптотические: метод Гюйгенса-Френеля-Кирхгофа (ГФК), геометрическая теория дифракции, метод параболического уравнения и т.д. [1 – 5].

В случае, когда хотя бы один из характерных электрических размеров задачи мал, асимптотические методы приводят к серьезным погрешностям. Если хотя бы один из этих размеров - велик, использование численных методов требует больших размеров оперативной памяти компьютера. В работах [6, 7] предложен гибридный метод решения подобных задач и, в качестве примера, решена двумерная задача рассеяния на цилиндре с кусочно-аналитической образующей. Гибридный метод основан на сочетании метода собственных функций, последовательных дифракций и принципа эквивалентности (строгой формулировки метода ГФК).

В данной работе гибридный метод, предложенный в работах [6, 7], использован для решения трехмерной задачи рассеяния плоской электромагнитной волны на теле в виде круглого цилиндра, ограниченного по торцам полусферами.

1. Гибридный метод решения задачи рассеяния

Пусть на идеально-проводящее тело в виде круглого цилиндра, ограниченного по торцам полусферами (рис.1), падает плоская электромагнитная волна, волновой вектор и вектор электрического поля которой лежат в плоскости XZ. Обозначим длину цилиндра h , а радиус ограничивающих цилиндр полусфер a .

Решение задачи рассеяния плоской волны сводится к задаче нахождения тока на поверхности тела S . Будем искать решение этой задачи в системе декартовых координат (x, y, z) и связанной с ней системе сферических координат (r, θ, φ) .

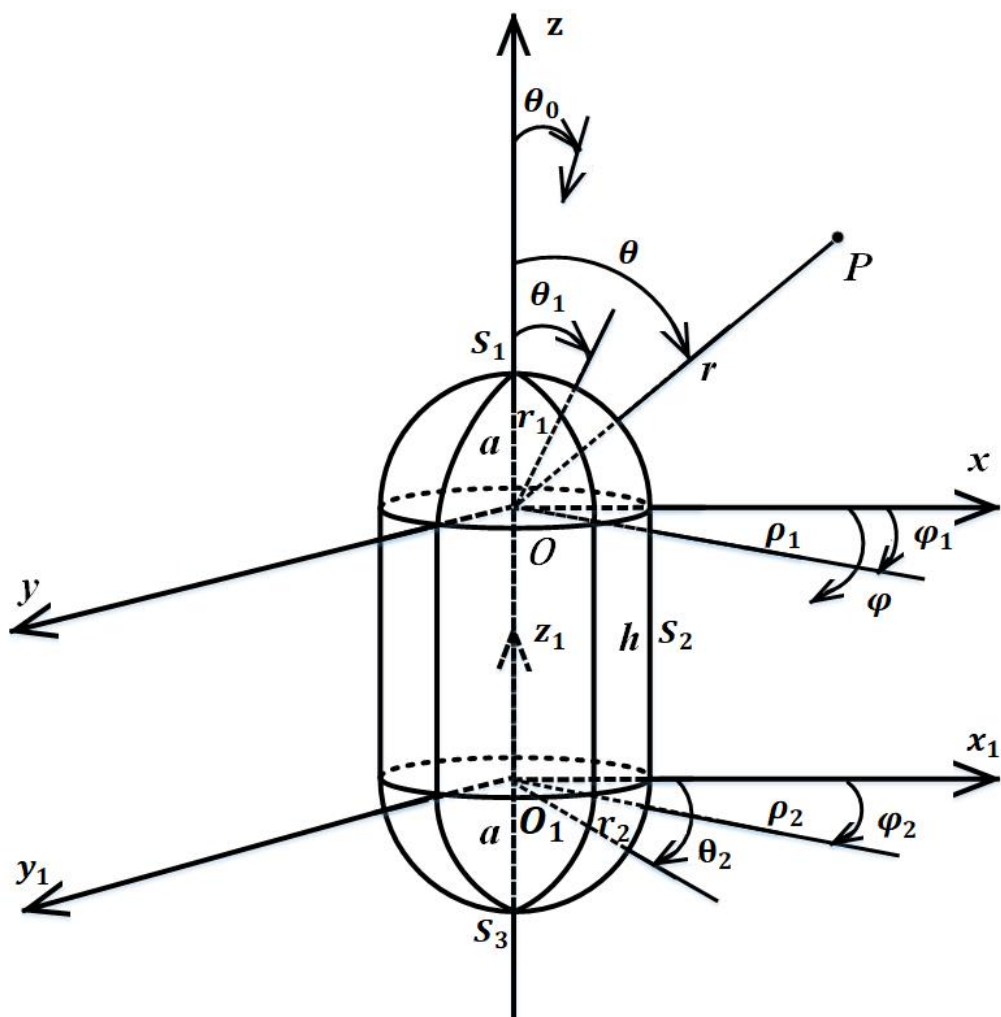


Рис 1. Геометрия задачи.

Разобьем поверхность S на три участка: S_1 и S_3 (поверхности полусфер) и S_2 (поверхность цилиндра), и рассмотрим последовательное рассеяние плоской волны на этих поверхностях.

Решение задачи рассеяния на поверхности S_1 будем искать в виде ряда по собственным функциям (ряда Ми) [1, 2] для полной сферы. При падении плоской электромагнитной волны под углом θ_0 к оси симметрии Z удобно ввести повернутую на этот угол систему декартовых координат (x', y', z') и связанную с ней систему сферических координат (r', θ', φ') (рис.2).

Компоненты полей в декартовой системе координат (x', y', z') имеют вид:

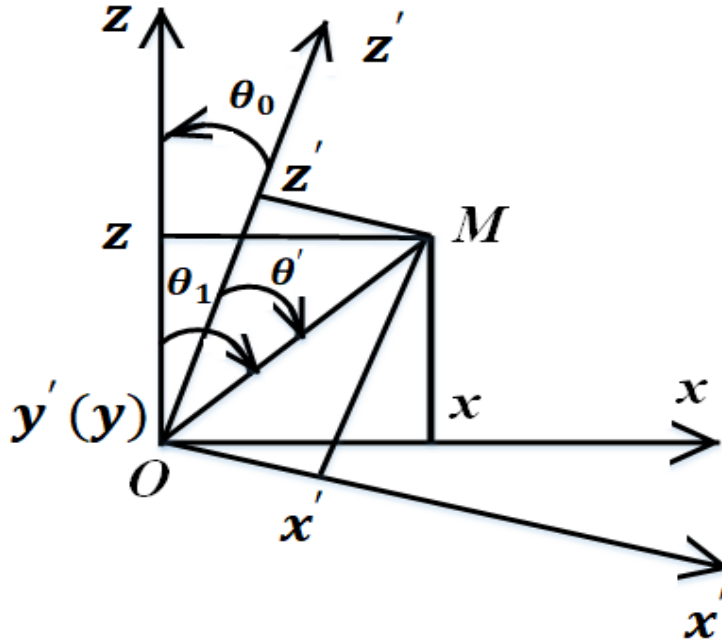


Рис 2. Поворот системы координат.

$$\begin{aligned}
 E_{x'} &= \sin \theta' \cos \varphi' E_{r'} + \cos \theta' \cos \varphi' E_{\theta'} - \sin \varphi' E_{\varphi'}, \\
 E_{y'} &= \sin \theta' \sin \varphi' E_{r'} + \cos \theta' \sin \varphi' E_{\theta'} + \cos \varphi' E_{\varphi'}, \quad E_{z'} = \cos \theta' E_r - \sin \theta' E_{\theta'}, \\
 H_{x'} &= \sin \theta' \cos \varphi' H_{r'} + \cos \theta' \cos \varphi' H_{\theta'} - \sin \varphi' H_{\varphi'}, \\
 H_{y'} &= \sin \theta' \sin \varphi' H_{r'} + \cos \theta' \sin \varphi' H_{\theta'} + \cos \varphi' H_{\varphi'}, \quad H_{z'} = \cos \theta' H_r - \sin \theta' H_{\theta'},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned}
 E_{r'} &= \frac{1}{r'} \sum_{m=0}^{\infty} m(m+1) U_m^{\text{э}}, \quad E_{\theta'} = \frac{1}{r'} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^2 (r' U_m^{\text{э}})}{\partial \theta' \partial r'} + \frac{i\omega\mu_a}{\sin(\theta')} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial U_m^{\text{М}}}{\partial \varphi'}, \\
 H_{\varphi'} &= i\omega\varepsilon_a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial U_m^{\text{э}}}{\partial \theta'} + \frac{1}{r' \sin(\theta')} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^2 (r' U_m^{\text{М}})}{\partial \varphi' \partial r'}, \\
 H_{r'} &= \frac{1}{r'} \sum_{m=0}^{\infty} m(m+1) U_m^{\text{М}}, \quad H_{\theta'} = \frac{-i\omega\varepsilon_a}{\sin(\theta')} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial U_m^{\text{э}}}{\partial \varphi'} + \frac{1}{r'} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^2 (r' U_m^{\text{М}})}{\partial \theta' \partial r'},
 \end{aligned}$$

$$E_{\varphi'} = \frac{1}{r' \sin(\theta')} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^2 (r' U_m^{\text{э}})}{\partial \varphi' \partial r'} - i \omega \mu_a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial U_m^{\text{М}}}{d \theta'},$$

$$U_m^{\text{э}} = \frac{2m+1}{m(m+1)} \frac{(-i)^{m-1}}{k} \left[\psi_m(kr') - \xi_m^{(1)}(kr') \frac{\frac{\partial(a\psi_m(ka))}{\partial a}}{\frac{\partial(a\xi_m^{(1)}(ka))}{\partial a}} \right] P_m^1(\cos(\theta') \cos(\varphi')),$$

$$U_m^{\text{М}} = -\frac{2m+1}{m(m+1)} \frac{(-i)^{m-1}}{k^2} \omega \varepsilon_a \left[\psi_m(kr') - \xi_m^{(1)}(kr') \frac{\psi_m(ka)}{\xi_m^{(1)}(ka)} \right] P_m^1(\cos(\theta') \sin(\varphi')),$$

ψ_m – сферические функции Бесселя, $\xi_m^{(1)}$ – сферические функции Ханкеля, P_m^1 – функция Лежандра.

Компоненты полей в системе координат (x, y, z) можно представить в виде:

$$E_x = E_{x'} \cos \theta_0 + E_{z'} \sin \theta_0, E_y = E_{y'}, E_z = E_{z'} \cos \theta_0 - E_{x'} \sin \theta_0, \quad (2)$$

$$H_x = H_{x'} \cos \theta_0 + H_{z'} \sin \theta_0, H_y = H_{y'}, H_z = H_{z'} \cos \theta_0 - H_{x'} \sin \theta_0.$$

В сферической системе координат $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ имеем:

$$E_{r_1} = \sin \theta_1 \cos \varphi_1 E_x + \sin \theta_1 \sin \varphi_1 E_y + \cos \theta_1 E_z,$$

$$E_{\theta_1} = \cos \theta_1 \cos \varphi_1 E_x + \cos \theta_1 \sin \varphi_1 E_y - \sin \theta_1 E_z, E_{\varphi_1} = -\sin \varphi_1 E_x + \cos \varphi_1 E_y,$$

$$H_{r_1} = \sin \theta_1 \cos \varphi_1 H_x + \sin \theta_1 \sin \varphi_1 H_y + \cos \theta_1 H_z, \quad (3)$$

$$H_{\theta_1} = \cos \theta_1 \cos \varphi_1 H_x + \cos \theta_1 \sin \varphi_1 H_y - \sin \theta_1 H_z, H_{\varphi_1} = -\sin \varphi_1 H_x + \cos \varphi_1 H_y,$$

где $\theta' = \arccos(\cos \theta_1 \cos \theta_0 + \sin \theta_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_0)$,

$$\varphi' = \arccos \left[\frac{-\cos \theta_1 \sin \theta_0 + \sin \theta_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_0}{\sqrt{1 - (\cos \theta_1 \cos \theta_0 + \sin \theta_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_0)^2}} \right].$$

Токи на полусфере S_1 определяется по формулам :

$$j_{\theta_1} = H_{\varphi_1}, j_{\varphi_1} = -H_{\theta_1}, r_1 = a \quad (4)$$

В цилиндрической системе координат (ρ_1, φ_1, z) эквивалентные токи на плоскости XU имеют вид:

$$J_{\varphi_1}^{\text{э}} = -H_{\rho_1}, J_{\rho_1}^{\text{М}} = -E_{\varphi_1}, J_{\rho_1}^{\text{э}} = H_{\varphi_1}, J_{\varphi_1}^{\text{М}} = E_{\rho_1}. \quad (5)$$

Далее, используя принцип эквивалентности [1] и интегрируя эквивалентные токи, определим векторные потенциалы в области между плоскостями XU и X_1Y_1 по формулам:

$$\begin{aligned} A_{\varphi_2}^{\text{э}} &= \int_a^{\infty} \int_0^{2\pi} \rho_1 \left[J_{\varphi_1}^{\text{э}} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - J_{\rho_1}^{\text{э}} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \right] G_1 d\varphi_1 d\rho_1, \\ A_{\varphi_2}^{\text{М}} &= \int_a^{\infty} \int_0^{2\pi} \rho_1 \left[J_{\varphi_1}^{\text{М}} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - J_{\rho_1}^{\text{М}} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \right] G_1 d\varphi_1 d\rho_1, \\ A_{\rho_2}^{\text{э}} &= \int_a^{\infty} \int_0^{2\pi} \rho_1 \left[J_{\rho_1}^{\text{э}} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + J_{\varphi_1}^{\text{э}} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \right] G_1 d\varphi_1 d\rho_1, \\ A_{\rho_2}^{\text{М}} &= \int_a^{\infty} \int_0^{2\pi} \rho_1 \left[J_{\rho_1}^{\text{М}} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + J_{\varphi_1}^{\text{М}} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \right] G_1 d\varphi_1 d\rho_1, \end{aligned} \quad (6)$$

где G_1 – функция Грина задачи рассеяния на круглом цилиндре [2].

Компоненты полного поля в области между плоскостями XU и X_1Y_1 можно представить в виде:

$$\begin{aligned} E_{\varphi_2} &= \frac{1}{-i\omega\epsilon_a} \left[k^2 A_{\varphi_2}^{\text{э}} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \left[\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \rho_2} (\rho_2 A_{\rho_2}^{\text{э}}) + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_{\varphi_2}^{\text{э}} \right] \right] - \frac{\partial}{\partial z} A_{\rho_2}^{\text{М}}, \\ H_{\rho_2} &= \frac{1}{-i\omega\mu_a} \left[k^2 A_{\rho_2}^{\text{М}} + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left[\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \rho_2} (\rho_2 A_{\rho_2}^{\text{М}}) + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_{\varphi_2}^{\text{М}} \right] \right] - \frac{\partial}{\partial z} A_{\varphi_2}^{\text{э}}, \\ H_z &= \frac{1}{-i\omega\mu_a} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \rho_2} (\rho_2 A_{\rho_2}^{\text{М}}) + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_{\varphi_2}^{\text{М}} \right] + \frac{1}{\rho_2} \left[\frac{\partial}{\partial \rho_2} (\rho_2 A_{\varphi_2}^{\text{э}}) - \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_{\rho_2}^{\text{э}} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$$E_{\rho_2} = \frac{1}{-i\omega\epsilon_a} \left[k^2 A_{\rho_2}^{\text{э}} + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left[\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \rho_2} (\rho_2 A_{\rho_2}^{\text{э}}) + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_{\varphi_2}^{\text{э}} \right] \right] + \frac{\partial}{\partial z} A_{\varphi_2}^{\text{м}},$$

$$H_{\varphi_2} = \frac{1}{-i\omega\mu_a} \left[k^2 A_{\varphi_2}^{\text{м}} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \left[\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \rho_2} (\rho_2 A_{\rho_2}^{\text{м}}) + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_{\varphi_2}^{\text{м}} \right] \right] + \frac{\partial}{\partial z} A_{\rho_2}^{\text{э}}.$$

Подставляя в формулу (7) значение $\rho_2=a$, находим компоненты магнитного поля и тока на поверхности S_2 по формулам:

$$j_{\varphi_2} = H_z, j_z = -H_{\varphi_2}. \quad (8)$$

Найдем токи на полусфере S_3 с при $r_3=a$ с использованием токового варианта гибридного метода:

$$j_{\theta_3} = \frac{1}{r_3} \left[\frac{\partial}{\partial r_3} (r_3 A_{\theta_3}^{\text{э}}) - \frac{\partial}{\partial \theta_3} A_{r_3}^{\text{э}} \right] + \exp(ikh) j_{\theta_1}, \quad (9)$$

$$j_{\varphi_3} = \frac{-1}{r_3} \left[\frac{1}{\sin \theta_3} \frac{\partial}{\partial \varphi_3} (A_{r_3}^{\text{э}}) - \frac{\partial}{\partial r_3} (r_3 A_{\varphi_3}^{\text{э}}) \right] + \exp(ikh) j_{\varphi_1},$$

$$A_{r_3}^{\text{э}} = \sin \theta_3 \int_0^h \int_0^{2\pi} a j_{\varphi_2} \sin(\varphi_3 - \varphi_2) G_2 dz d\varphi_2 + \cos \theta_3 \int_0^h \int_0^{2\pi} a j_z G_2 dz d\varphi_2,$$

$$A_{\theta_3}^{\text{э}} = \cos \theta_3 \int_0^h \int_0^{2\pi} a j_{\varphi_2} \sin(\varphi_3 - \varphi_2) G_2 dz d\varphi_2 - \sin \theta_3 \int_0^h \int_0^{2\pi} a j_z G_2 dz d\varphi_2,$$

$$A_{\varphi_3}^{\text{э}} = \int_0^h \int_0^{2\pi} a j_{\varphi_2} \cos(\varphi_3 - \varphi_2) G_2 dz d\varphi_2,$$

где G_2 – функция Грина в задаче рассеяния на сфере [2].

Найдем токи на полусфере S_3 с использованием апертурного варианта гибридного метода. Подставляя в формулу (7) значения $z = -h$, находим эквивалентные токи в плоскости $X_1 Y_1$ по формулам:

$$J_{\rho_2}^{\vartheta} = -H_{\rho_2}, J_{\rho_2}^M = -E_{\varphi_2}, J_{\varphi_2}^{\vartheta} = H_{\varphi_2}, J_{\varphi_2}^M = E_{\rho_2}. \quad (10)$$

Векторные потенциалы в сферических координатах имеют вид:

$$\begin{aligned} A_{\varphi_3}^{\vartheta} &= \int_a^{\infty} \int_0^{2\pi} \rho_2 \left[J_{\rho_2}^{\vartheta} \cos(\varphi_3 - \varphi_2) - J_{\rho_2}^{\vartheta} \sin(\varphi_3 - \varphi_2) \right] G_2 d\varphi_2 d\rho_2, \\ A_{\varphi_3}^M &= \int_a^{\infty} \int_0^{2\pi} \rho_2 \left[J_{\rho_2}^M \cos(\varphi_3 - \varphi_2) - J_{\rho_2}^M \sin(\varphi_3 - \varphi_2) \right] G_2 d\varphi_2 d\rho_2, \\ A_{r_3}^{\vartheta} &= \sin \theta_3 \int_a^{\infty} \int_0^{2\pi} \rho_2 \left[J_{\rho_2}^{\vartheta} \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + J_{\rho_2}^{\vartheta} \sin(\varphi_3 - \varphi_2) \right] G_2 d\varphi_2 d\rho_2, \\ A_{r_3}^M &= \sin \theta_3 \int_a^{\infty} \int_0^{2\pi} \rho_2 \left[J_{\rho_2}^M \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + J_{\rho_2}^M \sin(\varphi_3 - \varphi_2) \right] G_2 d\varphi_2 d\rho_2, \\ A_{\theta_3}^{\vartheta} &= \cos \theta_3 \int_a^{\infty} \int_0^{2\pi} \rho_2 \left[J_{\rho_2}^{\vartheta} \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + J_{\rho_2}^{\vartheta} \sin(\varphi_3 - \varphi_2) \right] G_2 d\varphi_2 d\rho_2, \\ A_{\theta_3}^M &= \cos \theta_3 \int_a^{\infty} \int_0^{2\pi} \rho_2 \left[J_{\rho_2}^M \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + J_{\rho_2}^M \sin(\varphi_3 - \varphi_2) \right] G_2 d\varphi_2 d\rho_2. \end{aligned} \quad (11)$$

В результате, для тока на поверхности S_3 ($r_3=a$) получаем:

$$\begin{aligned} j_{\theta_3} &= \frac{-1}{i\omega\mu_a} \left[k^2 A_{\varphi_3}^M + \frac{1}{r_3 \sin \theta_3} \frac{\partial}{\partial \varphi_3} \left(\frac{1}{r_3^2} \frac{\partial (r_3^2 A_{r_3}^M)}{\partial r_3} + \frac{1}{r_3 \sin \theta_3} \frac{\partial (\sin \theta_3 A_{\theta_3}^M)}{\partial \theta_3} + \frac{1}{r_3 \sin \theta_3} \frac{\partial A_{\varphi_3}^M}{\partial \varphi_3} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{r_3} \left[\frac{\partial}{\partial r_3} (r_3 A_{\theta_3}^{\vartheta}) - \frac{\partial}{\partial \theta_3} A_{r_3}^{\vartheta} \right], \\ j_{\varphi_3} &= \frac{1}{i\omega\mu_a} \left[k^2 A_{\theta_3}^M + \frac{1}{r_3} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(\frac{1}{r_3^2} \frac{\partial (r_3^2 A_{r_3}^M)}{\partial r_3} + \frac{1}{r_3 \sin \theta_3} \frac{\partial (\sin \theta_3 A_{\theta_3}^M)}{\partial \theta_3} + \frac{1}{r_3 \sin \theta_3} \frac{\partial A_{\varphi_3}^M}{\partial \varphi_3} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{r_3} \left[\frac{1}{\sin \theta_3} (r_3 A_{\theta_3}^{\vartheta}) - \frac{\partial}{\partial \theta_3} A_{r_3}^{\vartheta} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, мы нашли токи на всей поверхности тела с использованием двух вариантов гибридного метода с учетом взаимодействия. Далее с использованием принципа эквивалентности найдем диаграмму рассеяния. При интегрировании по S_1 и S_3 будем использовать сферические координаты $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ и $(r_3, \theta_3, \varphi_3)$ с центрами в точке O и O_1 , соответственно, а при интегрировании по S_2 – цилиндрическую систему координат.

В результате, для диаграммы рассеяния при интегрировании токов на S_1 получаем:

$$E_{\varphi}^1 = \frac{k^2}{-i\omega\varepsilon_a} A_{\varphi}^{\vartheta}, \quad E_{\theta}^1 = \frac{k^2}{-i\omega\varepsilon_a} A_{\theta}^{\vartheta}, \quad (13)$$

$$\text{где } A_{\theta}^{\vartheta} = a^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin(\theta_1) \frac{\partial}{\partial \theta} \left[j_{\theta_1} \frac{\partial \cos \beta}{\partial \theta_1} + j_{\varphi_1} \frac{1}{\sin(\theta_1)} \frac{\partial \cos \beta}{\partial \varphi_1} \right] G_0 d\varphi_1 d\theta_1,$$

$$A_{\varphi}^{\vartheta} = \frac{a^2}{\sin(\theta)} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin(\theta_1) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[j_{\theta_1} \frac{\partial \cos \beta}{\partial \theta_1} + j_{\varphi_1} \frac{1}{\sin(\theta_1)} \frac{\partial \cos \beta}{\partial \varphi_1} \right] G_0 d\varphi_1 d\theta_1,$$

$$\cos \beta = \cos(\theta) \cos(\theta_1) + \sin(\theta) \sin(\theta_1) \cos(\varphi - \varphi_1),$$

а компоненты тока определены формулами (4).

Вклад токов на поверхности S_2 в диаграмму рассеяния:

$$E_{\varphi}^2 = \frac{k^2}{-i\omega\varepsilon_a} A_{\varphi}^{\vartheta}, \quad E_{\theta}^2 = \frac{k^2}{-i\omega\varepsilon_a} A_{\theta}^{\vartheta}, \quad (14)$$

$$\text{где } A_{\theta}^{\vartheta} = -a \sin \theta \int_0^{-h} \int_0^{2\pi} j_z G_0 d\varphi_2 dz, \quad A_{\varphi}^{\vartheta} = a \int_0^{-h} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi - \varphi_2) j_{\varphi_2} G_0 d\varphi_2 dz, \quad \text{а компоненты}$$

тока определены формулами (8).

Вклад токов на поверхности S_3 в диаграмму рассеяния:

$$E_{\varphi}^3 = \frac{k^2}{-i\omega\varepsilon_a} A_{\varphi}^3, \quad E_{\theta}^3 = \frac{k^2}{-i\omega\varepsilon_a} A_{\theta}^3, \quad (15)$$

где $A_{\theta}^3 = a^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\theta_3) \frac{\partial}{\partial \theta} \left[j_{\theta_3} \frac{\partial \cos \beta}{\partial \theta_3} + j_{\varphi_3} \frac{1}{\sin(\theta_3)} \frac{\partial \cos \beta}{\partial \varphi_3} \right] G_0 d\varphi_3 d\theta_3,$

$$A_{\varphi}^3 = \frac{a^2}{\sin(\theta)} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\theta_3) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[j_{\theta_3} \frac{\partial \cos \beta}{\partial \theta_3} + j_{\varphi_3} \frac{1}{\sin(\theta_3)} \frac{\partial \cos \beta}{\partial \varphi_3} \right] G_0 d\varphi_3 d\theta_3,$$

$$\cos \beta = \cos(\theta) \cos(\theta_3) + \sin(\theta) \sin(\theta_3) \cos(\varphi - \varphi_3),$$

а компоненты тока определены формулами (12).

В результате, суммируя вклады всех токов для диаграммы рассеяния получаем:

$$E_{\varphi} = E_{\varphi}^1 + E_{\varphi}^2 + \exp[ikh \cos(\theta)] E_{\varphi}^3, \quad (16)$$

$$E_{\theta} = E_{\theta}^1 + E_{\theta}^2 + \exp[ikh \cos(\theta)] E_{\theta}^3.$$

Рассмотрим решение задачи рассеяния гибридным методом без учета взаимодействия.

При осевом падении плоской электромагнитной волны токи на полусфере S_1 будем, как и ранее, полагать равным токам на полной сфере при рассеянии плоской волны. Токи на полусферах S_2, S_3 полагаются равными нулю. В результате диаграмма рассеяния выражается только через токи на поверхности S_1 .

При падении плоской электромагнитной волны под углом θ_0 , токи на полусферах S_1, S_3 полагаются равными токам на полных сферах при рассеянии плоской волны. Токи на S_2 полагаются равным токам на цилиндре при рассеянии плоской волны в виде ряда Рэлея.

$$j_z = \frac{i\omega\varepsilon_a}{k^2 \sin\theta_0} \exp(-ikz \cos\theta_0) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^m \cos m\varphi_2 \left[J'_m(ka) - \frac{J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} H_m'^{(1)}(ka) \right],$$

$$j_{\varphi_2} = 0. \quad (17)$$

Вклад токов на поверхности цилиндра S_2 в диаграмму рассеяния:

$$E_{\varphi}^2 = 0, \quad E_{\theta}^2 = \frac{k^2}{-i\omega\varepsilon_a} A_{\theta}^{\circledast}. \quad (18)$$

где $A_{\theta}^{\circledast} = -a \sin\theta \int_0^{-h} \int_0^{2\pi} j_z G_0 d\varphi_2 dz$ или $A_{\theta}^{\circledast} = -a \sin\theta \left[\int_0^{-h} \int_0^{2\pi} J_z G_0 d\varphi_2 dz + \int_0^{-h} \int_{3\pi/2}^{2\pi} J_z G_0 d\varphi_2 dz \right]$

Токи на полусфере S_3 :

$$j_{\theta_3} = \exp(ikh \cos\theta_0) H_{\varphi_1}, \quad j_{\varphi_3} = -\exp(ikh \cos\theta_0) H_{\theta_1}. \quad (19)$$

Для рассеянного поля получаем:

$$E_{\varphi}^3 = \frac{k^2}{-i\omega\varepsilon_a} A_{\varphi}^{\circledast}, \quad E_{\theta}^3 = \frac{k^2}{-i\omega\varepsilon_a} A_{\theta}^{\circledast}, \quad (20)$$

где $A_{\theta}^{\circledast} = a^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin(\theta_1) \frac{\partial}{\partial\theta} \left[j_{\theta_1} \frac{\partial \cos\beta}{\partial\theta_1} + j_{\varphi_1} \frac{1}{\sin(\theta_1)} \frac{\partial \cos\beta}{\partial\varphi_1} \right] G_0 d\varphi_1 d\theta_1,$

$$A_{\varphi}^{\circledast} = \frac{a^2}{\sin(\theta)} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin(\theta_1) \frac{\partial}{\partial\varphi} \left[j_{\theta_1} \frac{\partial \cos\beta}{\partial\theta_1} + j_{\varphi_1} \frac{1}{\sin(\theta_1)} \frac{\partial \cos\beta}{\partial\varphi_1} \right] G_0 d\varphi_1 d\theta_1,$$

$$\cos\beta = \cos(\theta)\cos(\theta_1) + \sin(\theta)\sin(\theta_1)\cos(\varphi - \varphi_1).$$

В результате для диаграммы рассеяния в Е и Н плоскостях получаем:

$$E_{\varphi} = E_{\varphi}^1 + \exp[ikh \cos(\theta)] E_{\varphi}^3, \quad (21)$$

$$E_{\theta} = E_{\theta}^1 + E_{\theta}^2 + \exp[ikh \cos(\theta)] E_{\theta}^3.$$

2. Численные результаты

На рис. 3–10 приведены результаты расчета диаграммы рассеяния в Е и Н плоскостях при падении плоской волны под различными углами на цилиндр электрической длиной $kh = 5$ с различными электрическими размерами радиуса ограничивающих сфер ka . Кривая 1 на рисунках показывает результаты расчета методом моментов, 2 – гибридным методом с учетом взаимодействия (апертурный вариант), 3 – гибридным методом с учетом взаимодействия (токовый вариант), 4 – гибридным методом без учета взаимодействия, 5 – методом ГФК.

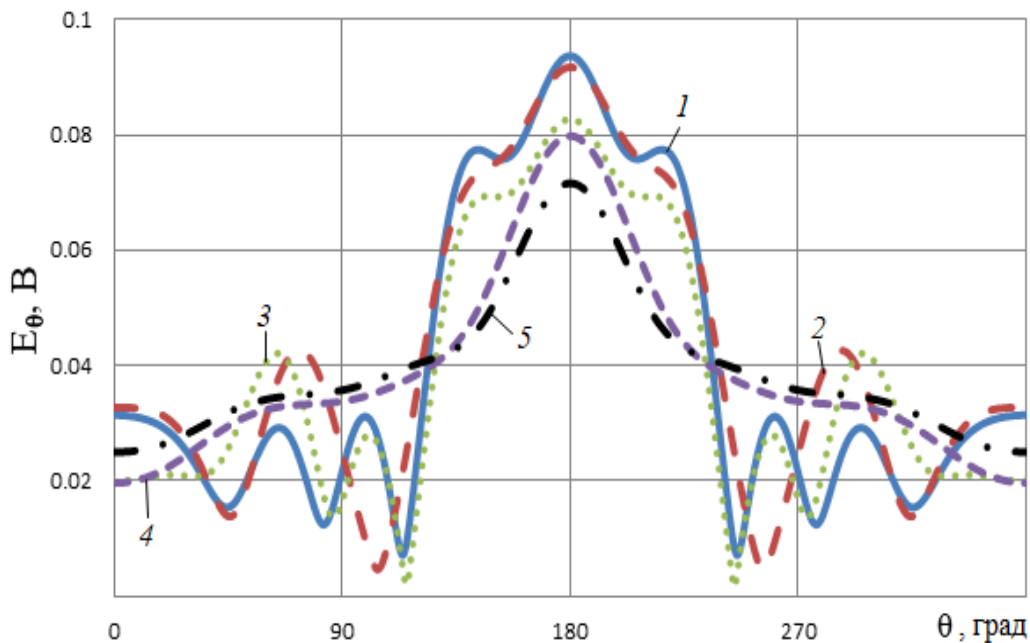


Рис 3а. Диаграммы рассеяния в Е плоскости при $\theta_0=0$, $\varphi=0$, $ka=3$.

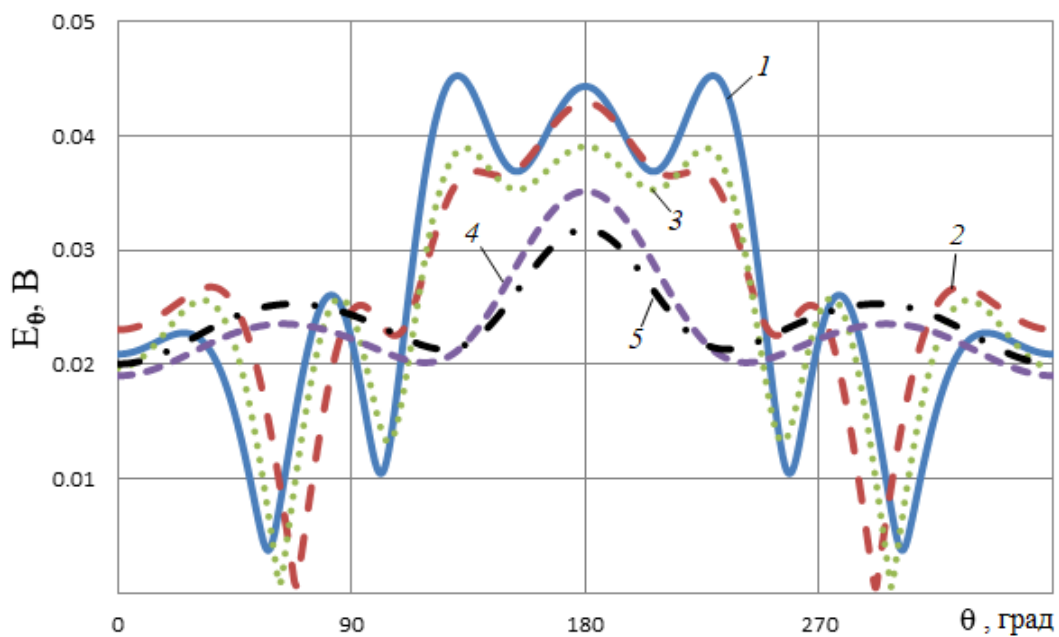


Рис 3б. Диаграммы рассеяния в E плоскости при $\theta_0=0, \varphi=0, ka=2$.

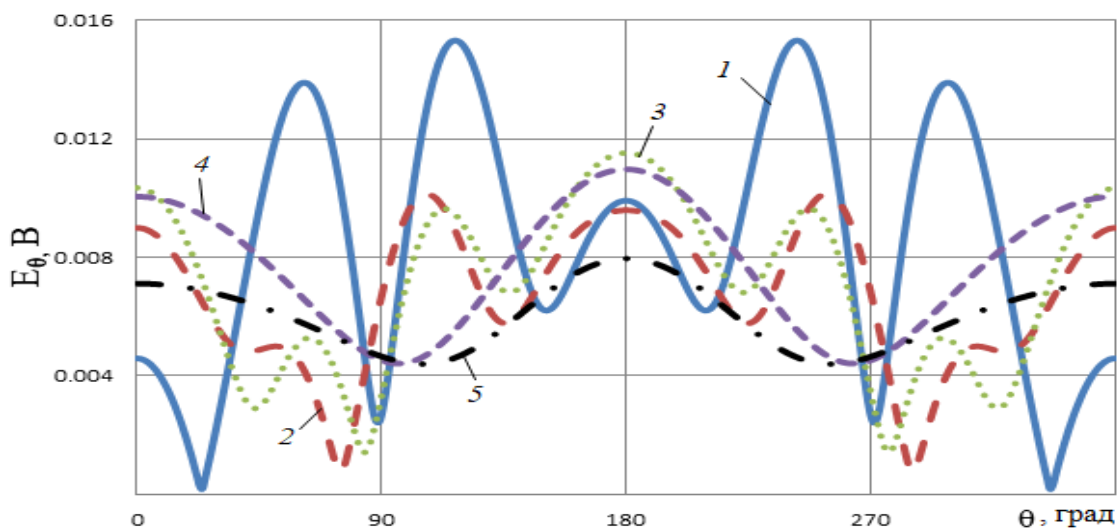


Рис 3в. Диаграммы рассеяния в E плоскости при $\theta_0=0, \varphi=0, ka=1$.

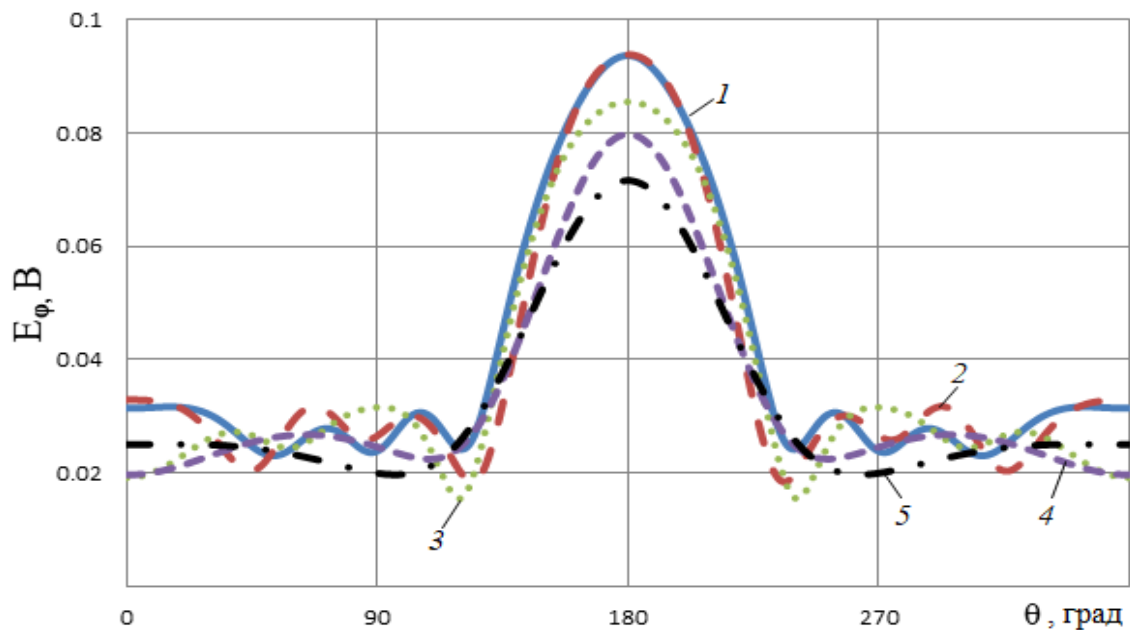


Рис 4а. Диаграммы рассеяния в Н плоскости при $\theta_0=0, \varphi=90^0, ka=3$.

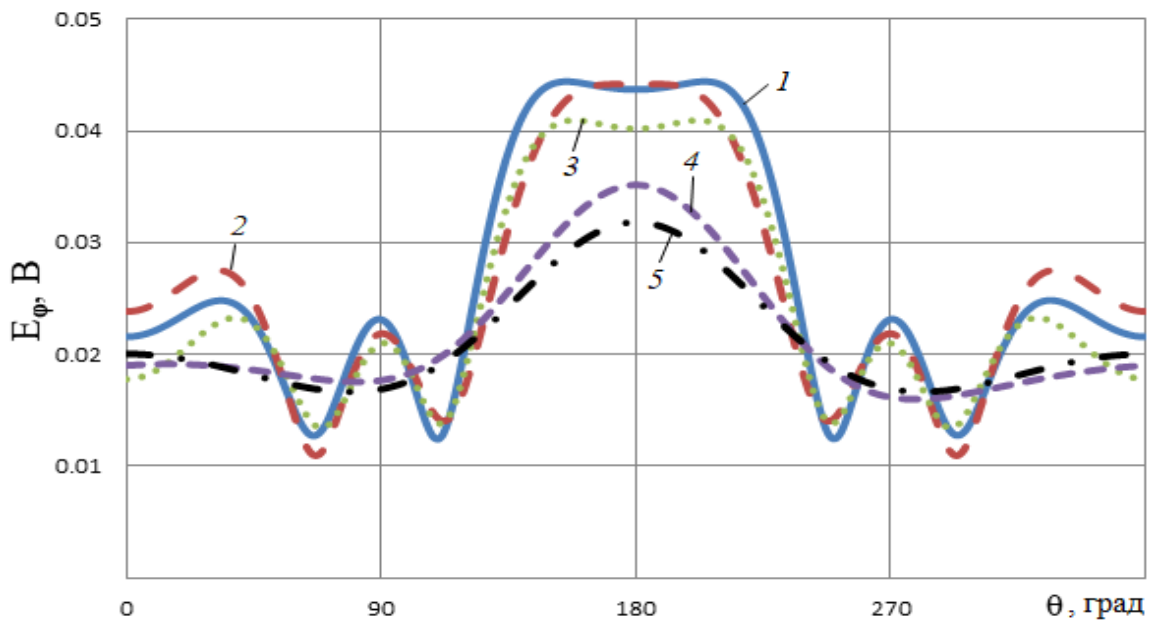


Рис 4б. Диаграммы рассеяния в Н плоскости при $\theta_0=0, \varphi=90^0, ka=2$.

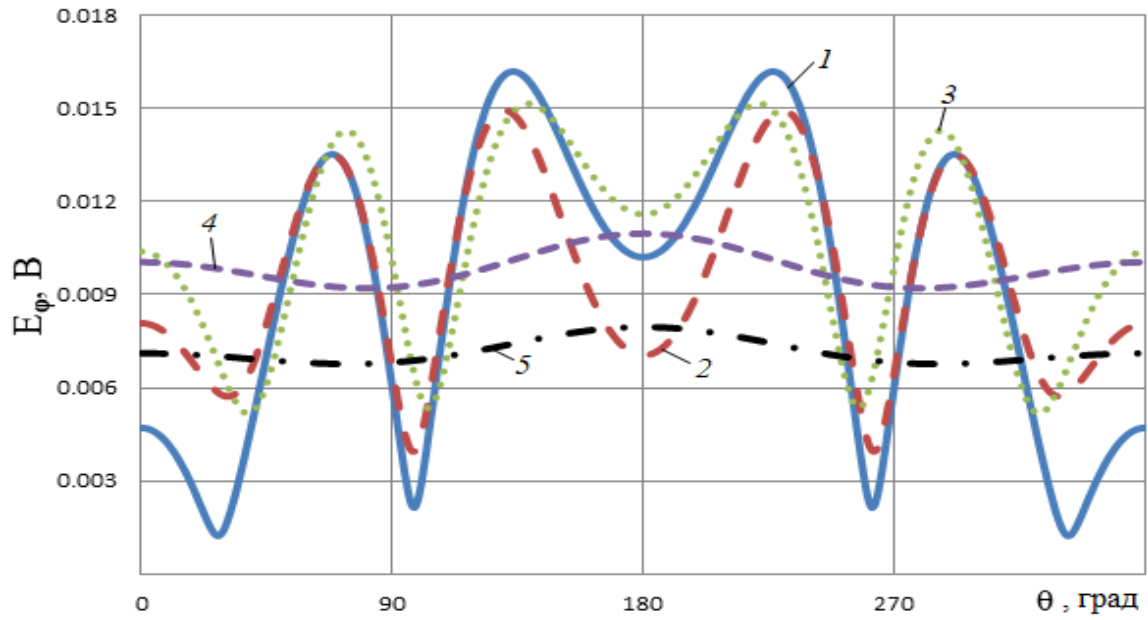


Рис 4в. Диаграммы рассеяния в Н плоскости при $\theta_0=0, \varphi=90^0, ka=1$.

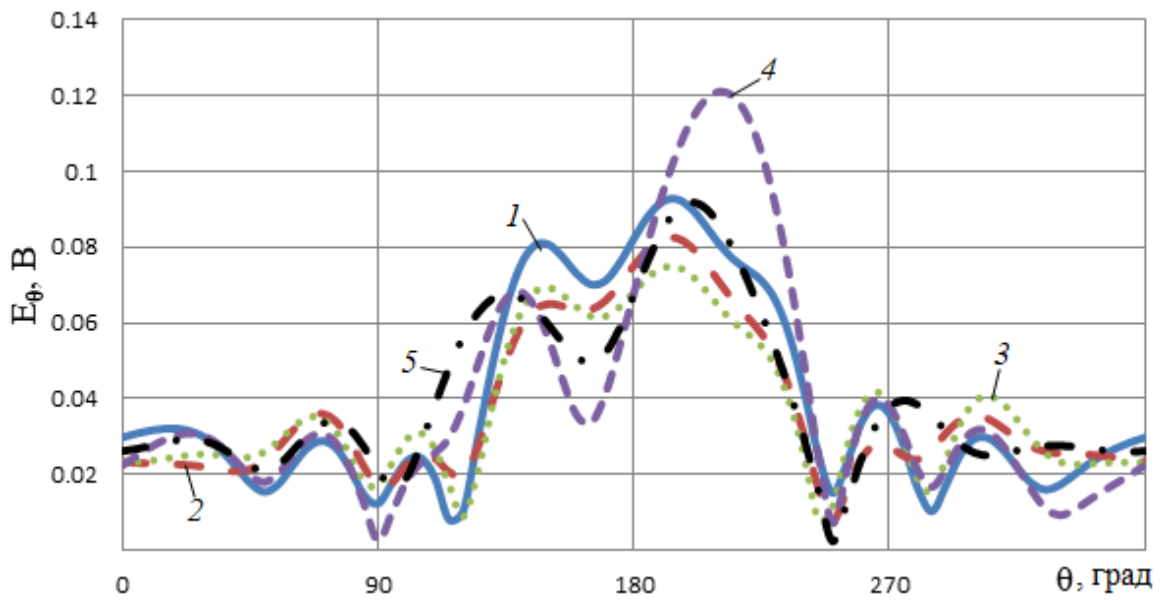


Рис 5а. Диаграммы рассеяния в Е плоскости при $\theta_0=10^0, \varphi=0, ka=3$.

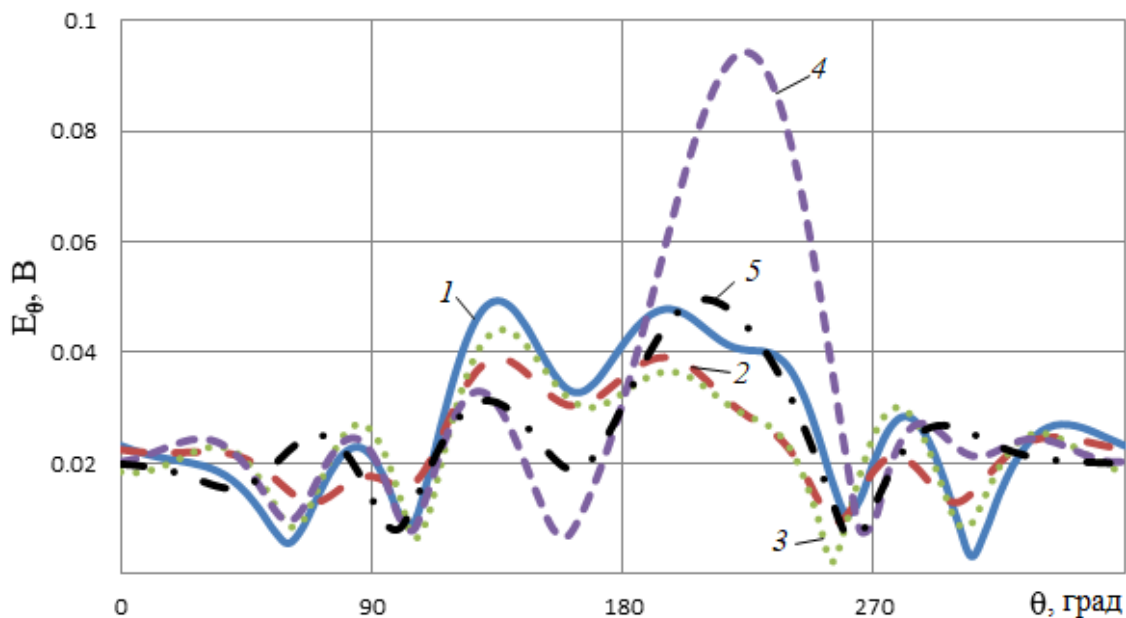


Рис 5б. Диаграммы рассеяния в E плоскости при $\theta_0=10^0$, $\varphi=0$, $ka=2$.

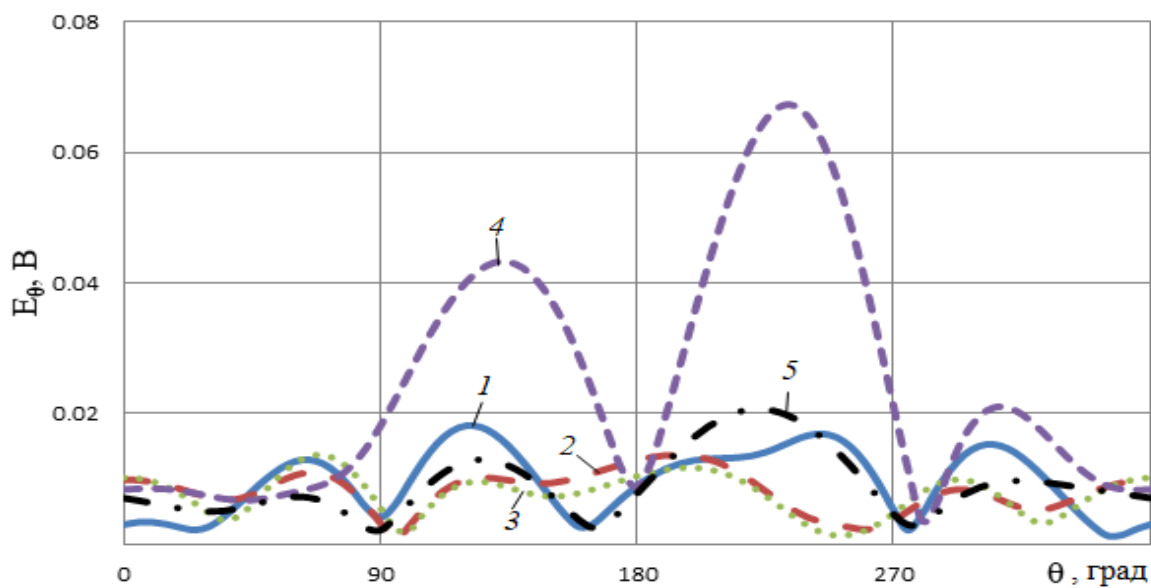


Рис 5в. Диаграммы рассеяния в E плоскости при $\theta_0=10^0$, $\varphi=0$, $ka=1$.

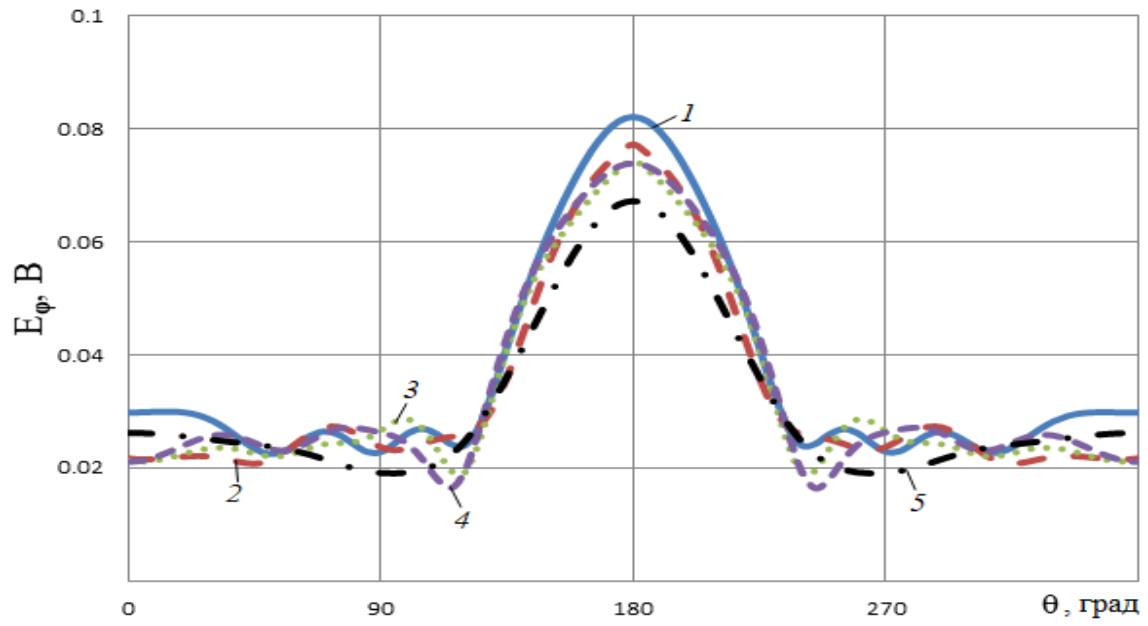


Рис 6а. Диаграммы рассеяния в Н плоскости при $\theta_0=10^0$, $\varphi=90^0$, $ka=3$.

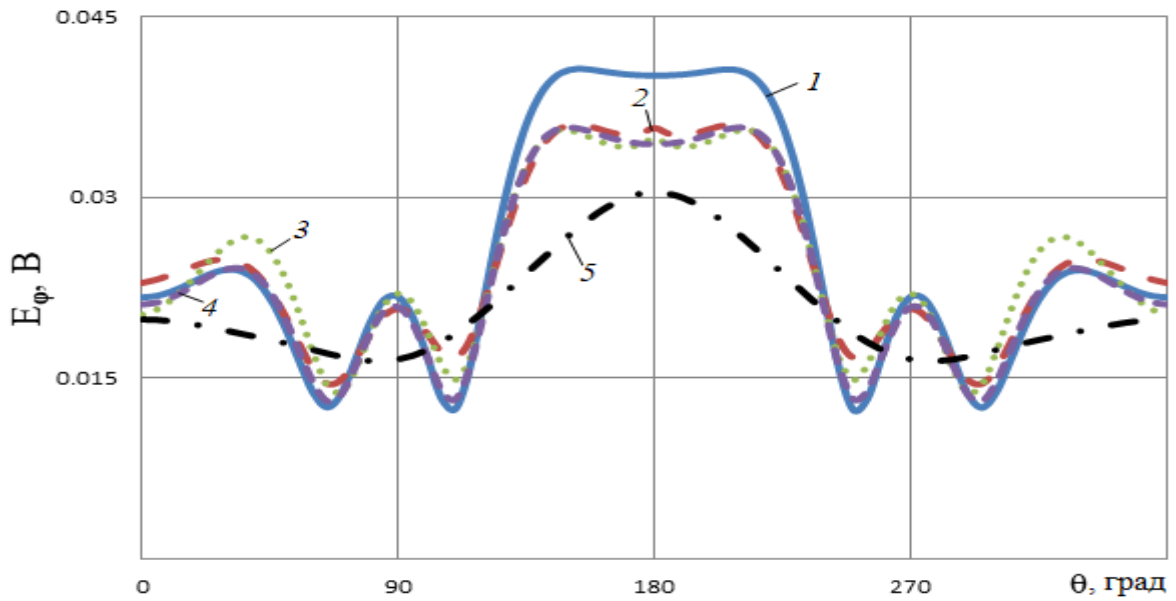


Рис 6б. Диаграммы рассеяния в Н плоскости при $\theta_0=10^0$, $\varphi=90^0$, $ka=2$.

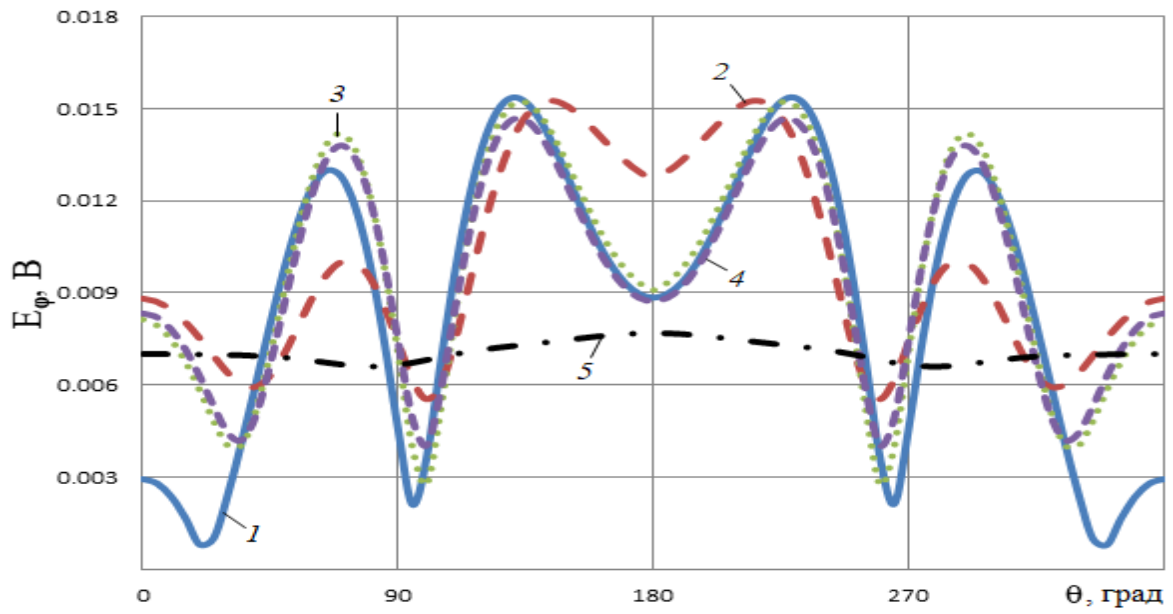


Рис 6в. Диаграммы рассеяния в Н плоскости при $\theta_0=10^0$, $\varphi=90^0$, $ka=1$.

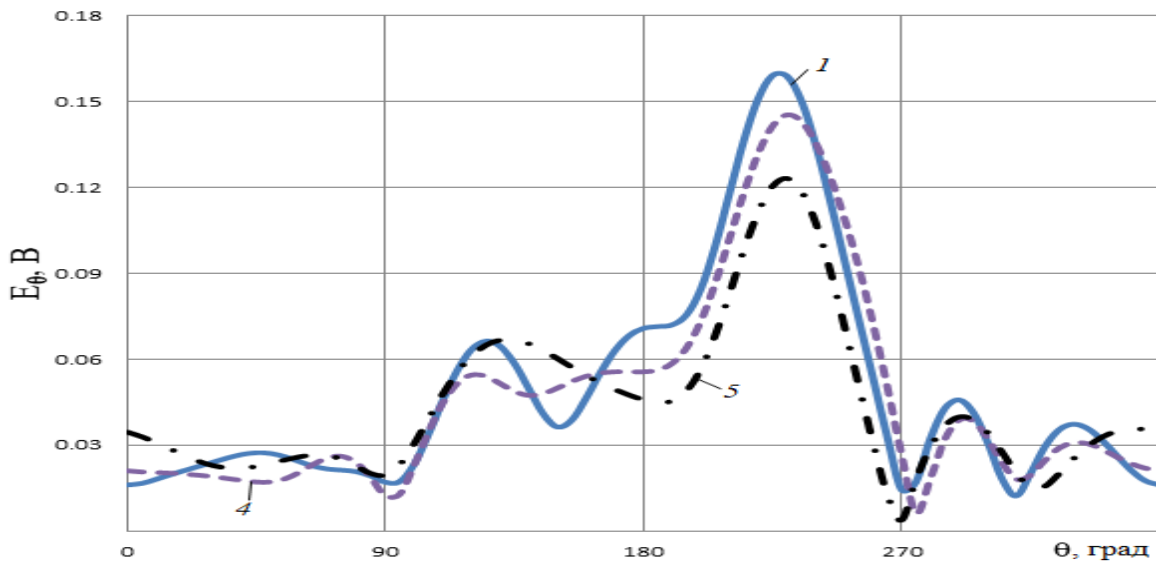


Рис 7а. Диаграммы рассеяния в Е плоскости при $\theta_0=45^0$, $\varphi=0$, $ka=3$.

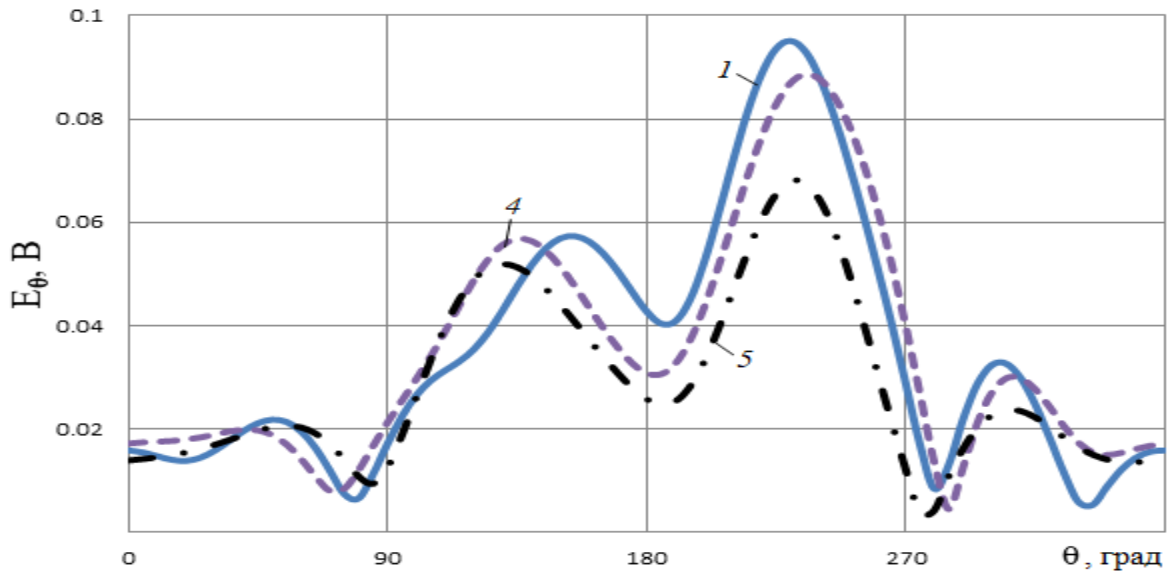


Рис 7б. Диаграммы рассеяния в Е плоскости при $\theta_0=45^0$, $\varphi=0$, $ka=2$.

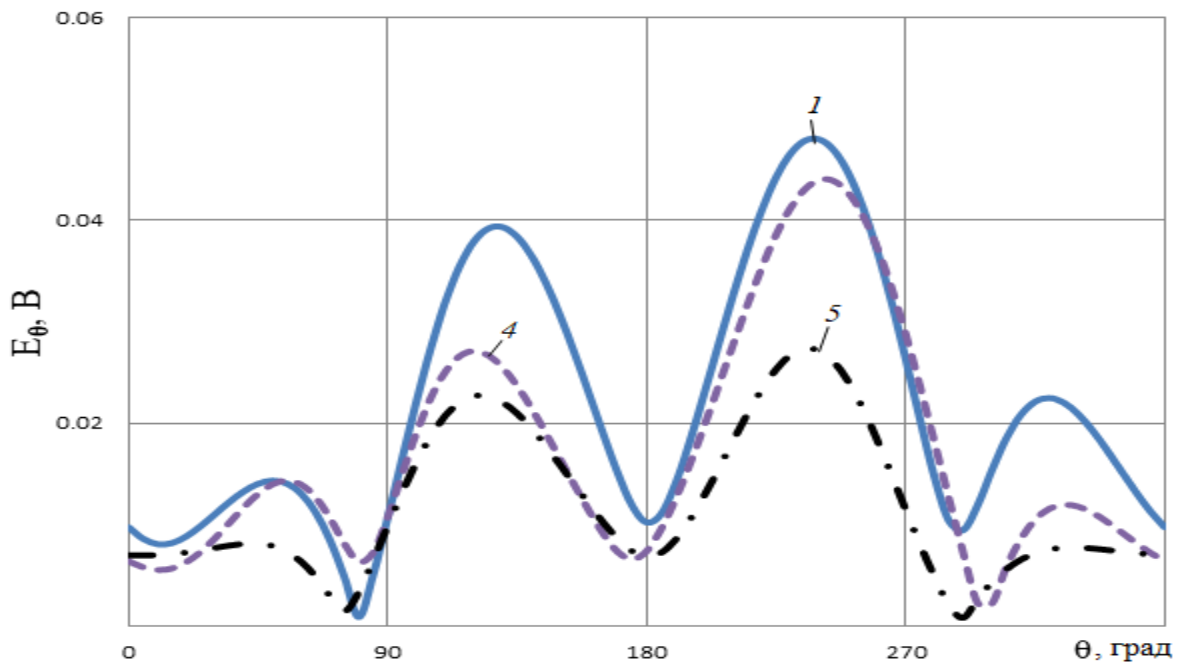


Рис 7в. Диаграммы рассеяния в Е плоскости при $\theta_0=45^0$, $\varphi=0$, $ka=1$.

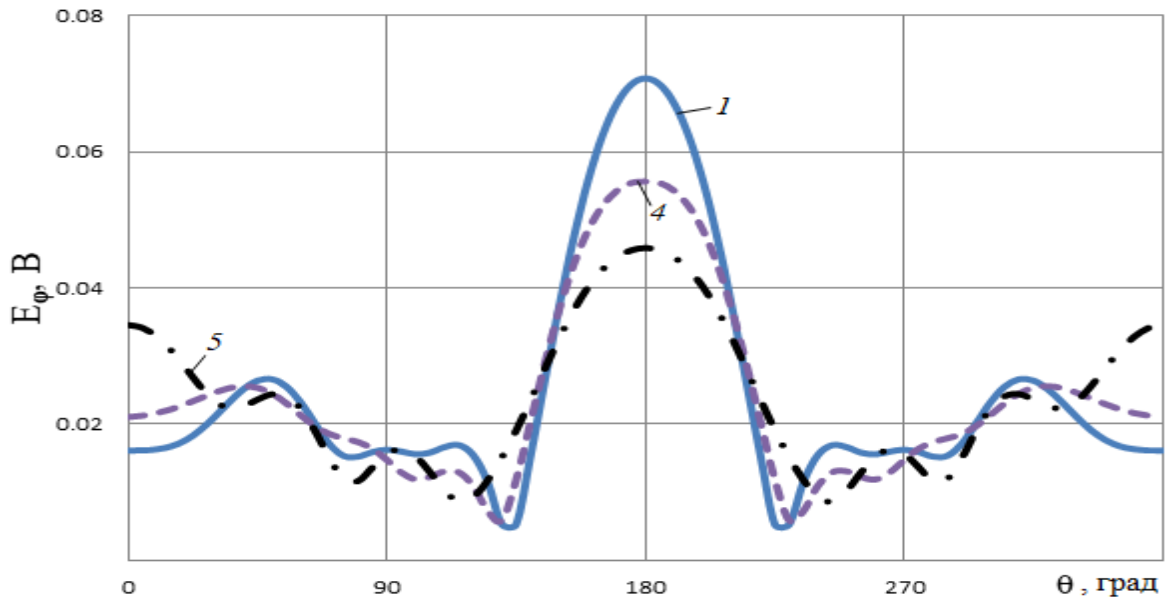


Рис 8а. Диаграммы рассеяния в Н плоскости при $\theta_0=45^0$, $\varphi=90^0$, $ka=3$.

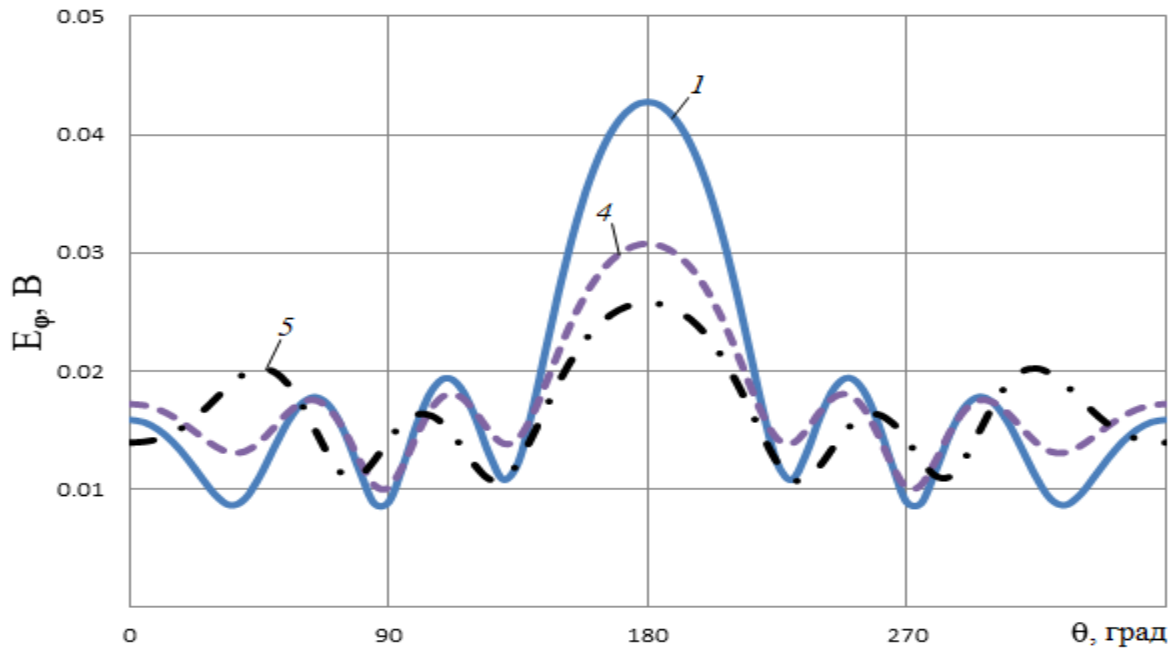


Рис 8б. Диаграммы рассеяния в Н плоскости при $\theta_0=45^0$, $\varphi=90^0$, $ka=2$.

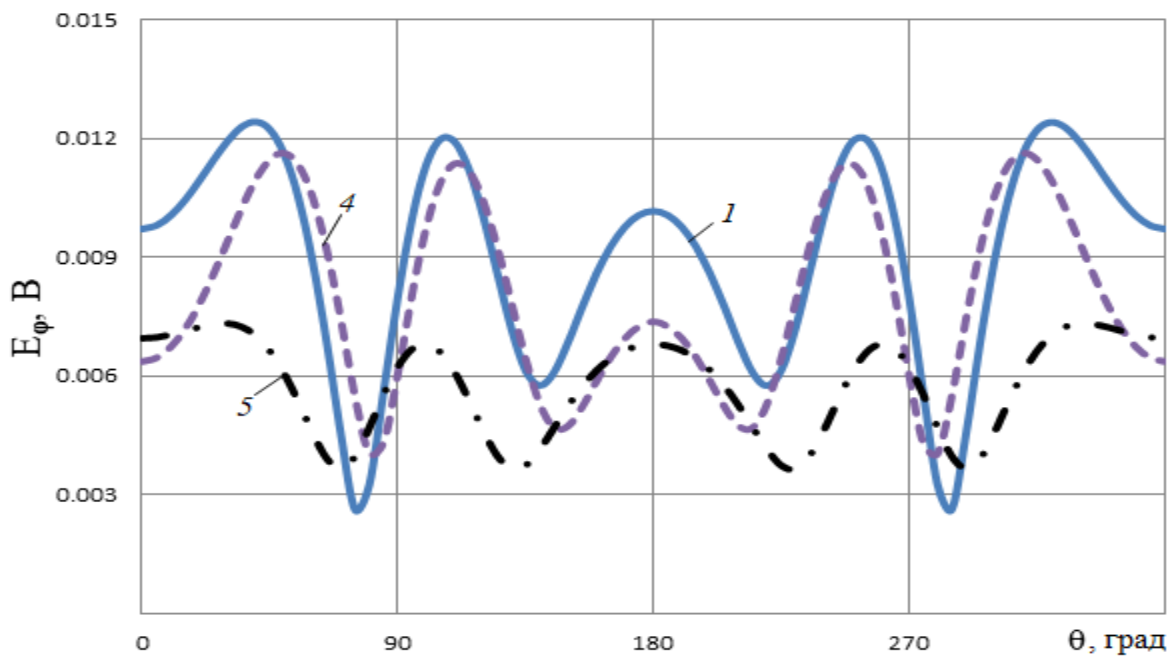


Рис 8в. Диаграммы рассеяния в Н плоскости при $\theta_0=45^0$, $\varphi=90^0$, $ka=1$.

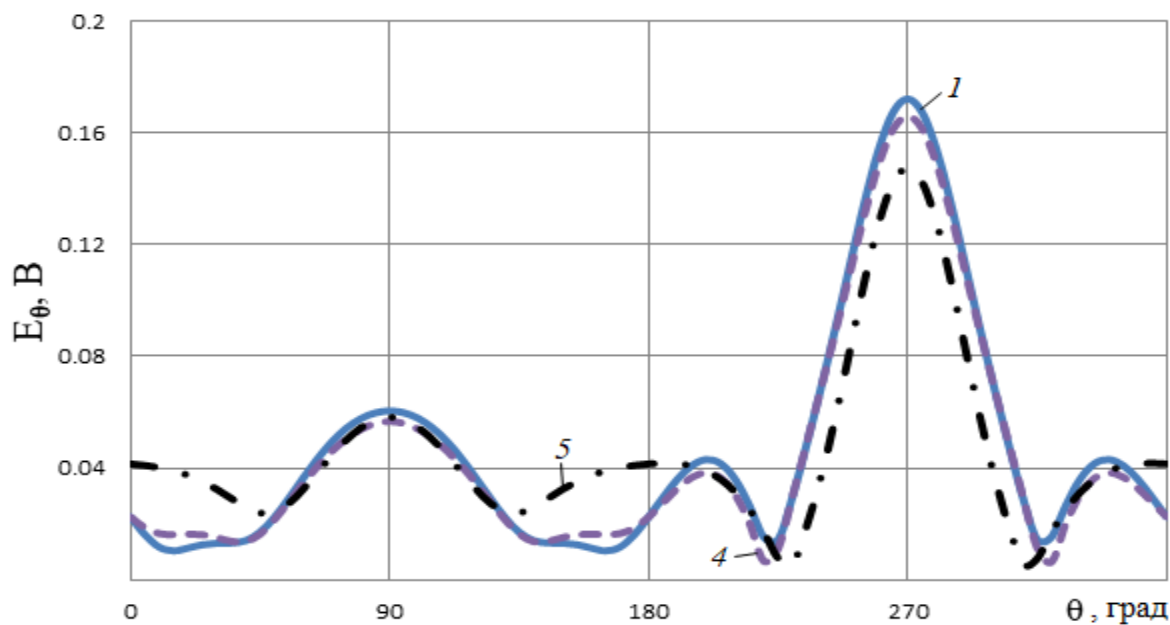


Рис 9а. Диаграммы рассеяния в Е плоскости при $\theta_0=90^0$, $\varphi=0$, $ka=3$.

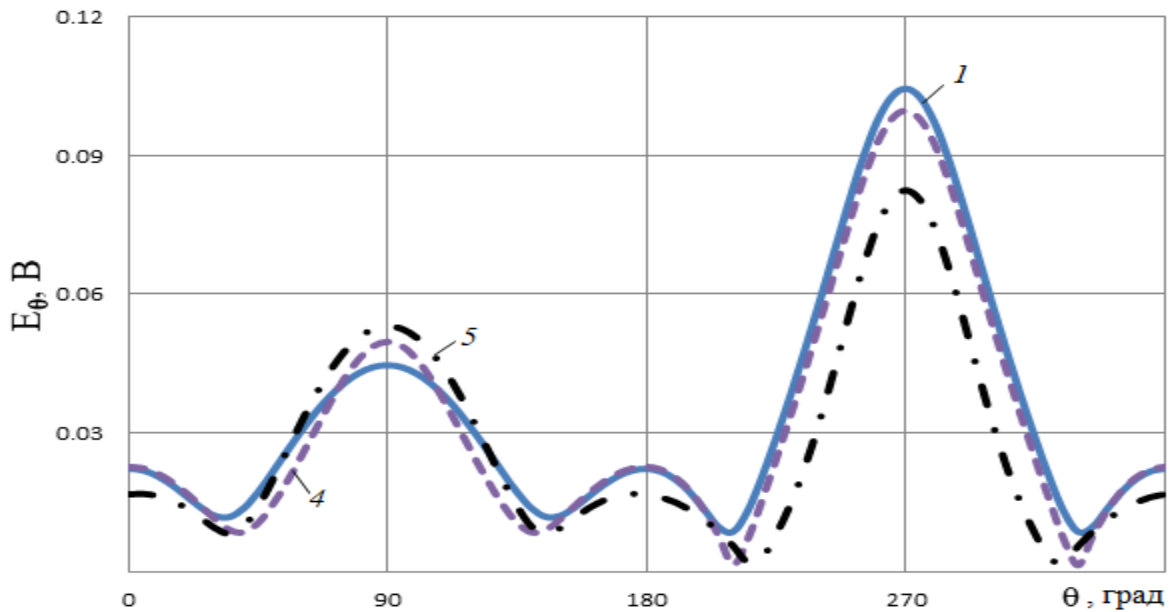


Рис 9б. Диаграммы рассеяния в E плоскости при $\theta_0=90^0$, $\varphi=0$, $ka=2$.

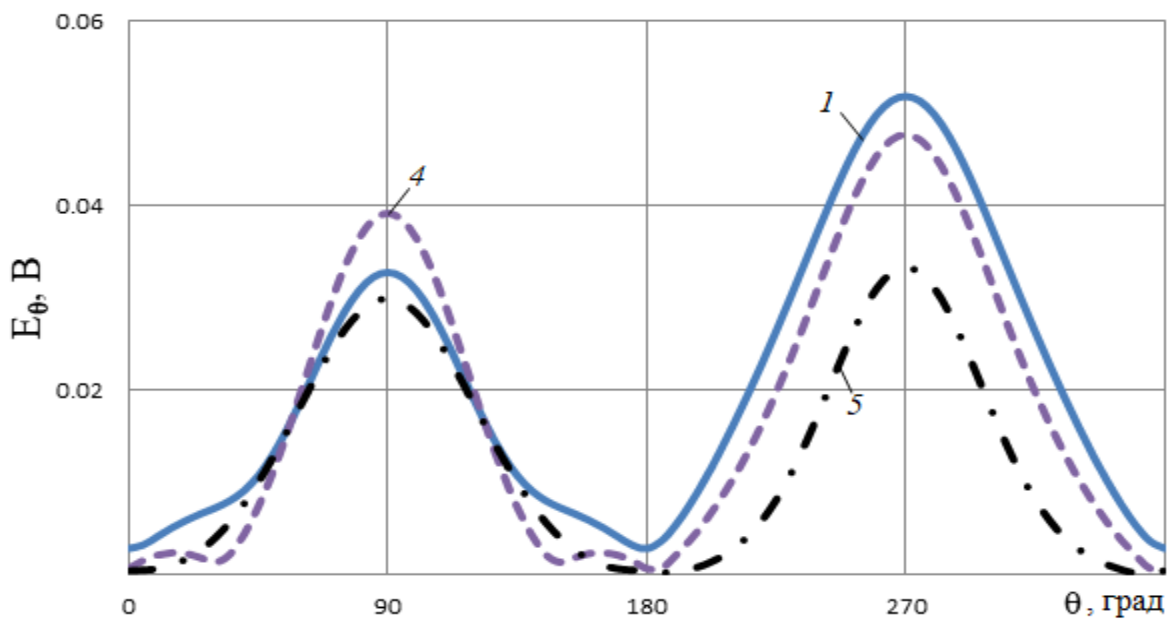


Рис 9в. Диаграммы рассеяния в E плоскости при $\theta_0=90^0$, $\varphi=0$, $ka=1$.

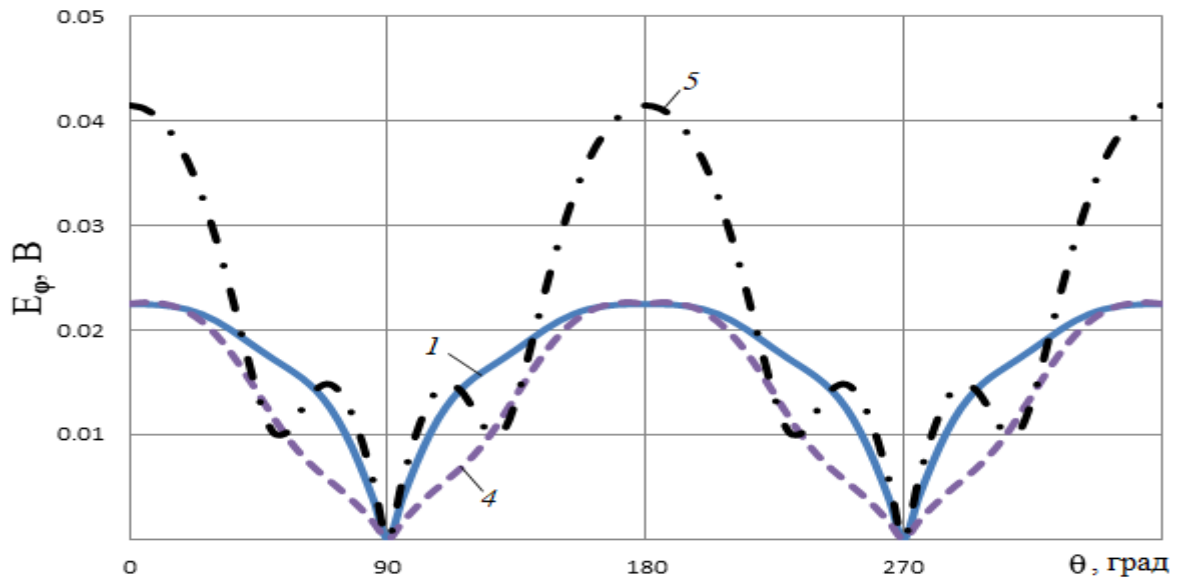


Рис 10а. Диаграммы рассеяния в Н плоскости при $\theta_0=90^0$, $\varphi=90^0$, $ka=3$.

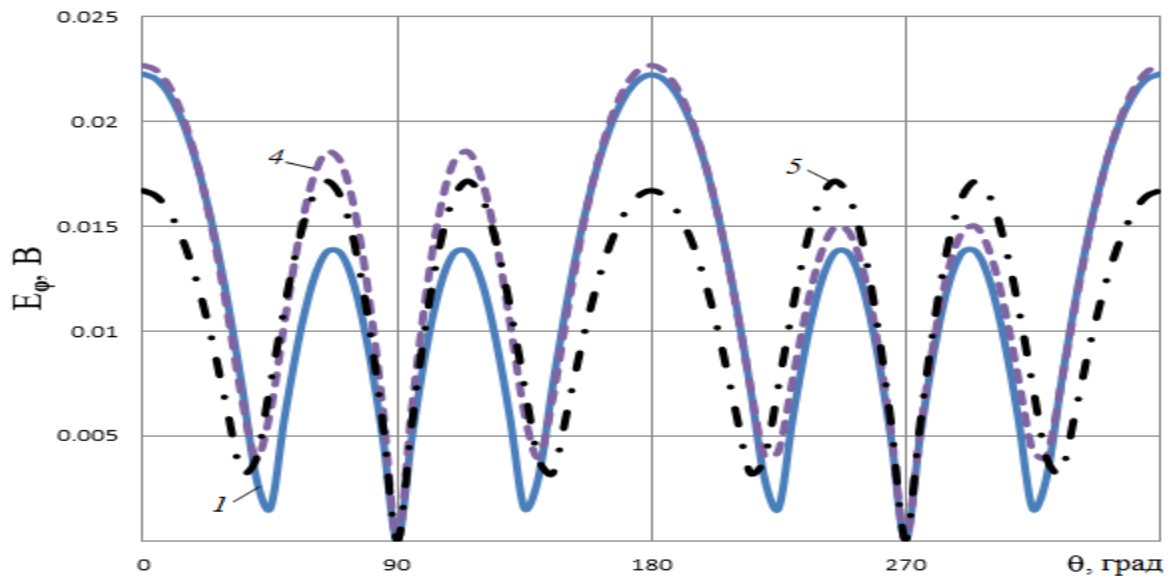


Рис 10б. Диаграммы рассеяния в Н плоскости при $\theta_0=90^0$, $\varphi=90^0$, $ka=2$.

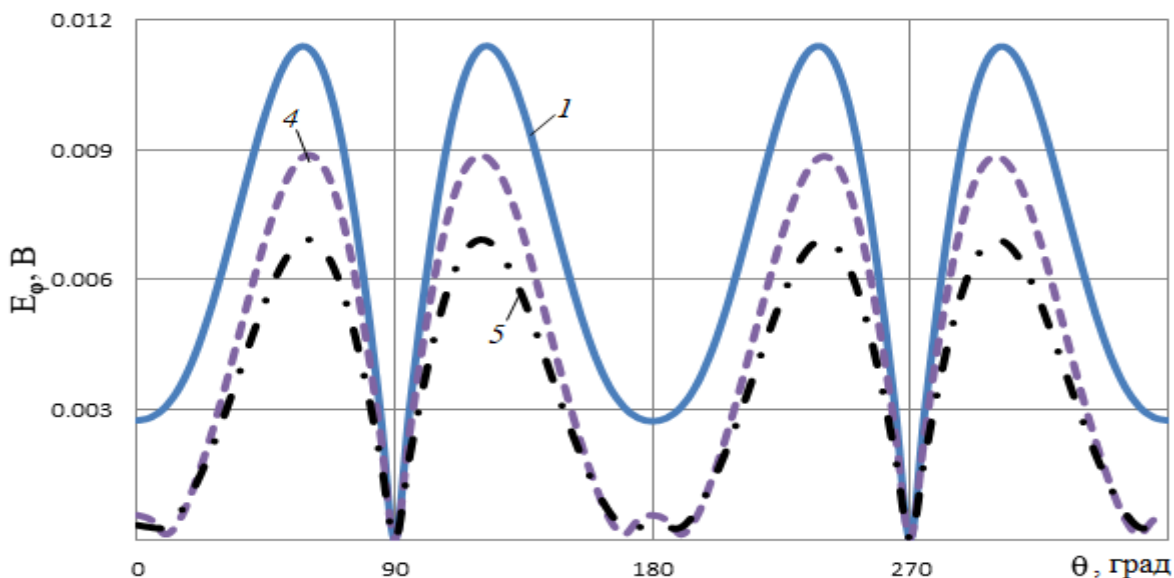


Рис 10в. Диаграммы рассеяния в Н плоскости при $\theta_0=90^\circ$, $\varphi=90^\circ$, $ka=1$.

Заключение

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. При падении плоской волны под малыми углами гибридный метод с учетом взаимодействия позволяет обеспечить хорошее совпадение с результатами расчета диаграммы рассеяния методом моментов при соотношении радиуса тела вращения к длине волны более 0.3, а для диаграммы рассеяния в Н плоскости и для меньших значений.
2. При падении плоской волны под большими углами все варианты гибридного метода обеспечивают близкие результаты.
3. Метод ГФК обеспечивает только качественное совпадение с результатами строгого расчета.

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания по теме 0030-2019-006.

Литература

1. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.-Л., Энергия.1967.
2. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. М., Мир. 1978.
3. Боровиков В.А., Кинбер Б.Е. Геометрическая теория дифракции. М. Связь. 1978.
4. Фок В.А.. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М., Советское радио.1970.
5. Kleshchev A.A. Some methods of solution of problems of sound diffraction on Bodies of Non-Analytical Form. // Open Journal of Acoustics. 2016. Vol.6. No .4. P. 45. Available at:
<https://www.scirp.org/journal/paperinformation.aspx?paperid=72779>
DOI: [10.4236/oja.2016.64005](https://doi.org/10.4236/oja.2016.64005)
6. Kaloshin V.A., Luu D.T. Plane wave scattering on ideally conductive plate with rounded edges. // Intern. Sci. Conf. “Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves RSEMW-2019”. Divnomorskoe, Russia. 2019. P. 232. Available at:
<https://ieeexplore.ieee.org/document/8792743> DOI: [10.1109/RSEMW.2019.8792743](https://doi.org/10.1109/RSEMW.2019.8792743)
7. Калошин В.А., Луу Д.Т. Рассеяние плоской волны на цилиндре с кусочно-аналитической формой сечения. // Радиотехника и электроника. 2020. Т.65. №5. С.457-463.

Для цитирования:

Калошин В.А., Луу Д.Т. Решение задачи рассеяния на теле вращения с кусочно-аналитической формой образующей гибридным методом. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2020. №6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun20/6/text.pdf>. DOI 10.30898/1684-1719.2020.6.6