

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.6.2>

УДК: 621.396:519.21

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Ю.М. Вешкурцев<sup>1</sup>, Д.А. Титов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт радиоэлектроники, сервиса и диагностики,  
644077, г. Омск, проспект Мира, 57

<sup>2</sup> Омский государственный технический университет,  
644050, г. Омск, проспект Мира, 11

Статья поступила в редакцию 17 мая 2022 г.

**Аннотация.** С помощью дополнительного коэффициента сделано уточнение частоты дискретизации, полученной в результате применения теоремы Уиттекера-Котельникова-Шеннона к случайному процессу с многими вероятностными характеристиками. Целью данной работы является определение значений дополнительного коэффициента, позволяющего находить значение частоты дискретизации процесса при сохранении заданной погрешности искажения любой из множества вероятностных характеристик. Предложено трансцендентное уравнение, решение которого с использованием экспериментальных данных исследования вероятностных характеристик реальных источников случайных процессов позволяет вычислить значение дополнительного коэффициента. При вариации вероятностных характеристик процесса и погрешностей искажения расчетное значение дополнительного коэффициента получается разным. Установлено, что применение дополнительного коэффициента значением больше единицы, не нарушает фундаментальность теоремы Уиттекера-Котельникова-Шеннона и позволяет обоснованно выбрать частоту дискретизации случайного процесса, не превышая при этом заданную погрешность искажения его вероятностных характеристик.

**Ключевые слова:** частота дискретизации сигнала, теорема Уиттекера-Котельникова-Шеннона, вероятностные характеристики случайного процесса

**Автор для переписки:** Титов Дмитрий Анатольевич, [Dtitov2@yandex.ru](mailto:Dtitov2@yandex.ru)

## Введение

Представление сигнала с помощью отдельных аналоговых (мгновенных) дискретных значений известно давно и связано с применением на практике теоремы отсчетов Уиттекера-Котельникова-Шеннона (УКШ) [1]. Теорема стимулировала развитие цифровых методов обработки сигналов, актуальных в настоящее время. План исследований и доказательство теоремы сводились всегда к утверждению, что сигнал можно восстановить (аппроксимировать) со сколь угодно высокой точностью, если дискретные мгновенные значения его следуют через интервал (шаг) дискретизации, равный  $\Delta t = 1/2F_B$ , где  $F_B$  – верхняя частота в спектре сигнала. В работе [2] дискретные мгновенные значения сигнала с гауссовой корреляционной функцией заменены его квантованными значениями по уровню и далее рассчитано среднее квадратичное отклонение (СКО) погрешности восстановления случайного процесса. Показано, что СКО зависит от числа уровней квантования АЦП, количества использованных отсчетов ( $L$ ) сигнала и равно 0,1 при  $L = 10$ . При этом информация о погрешностях восстановления вероятностных характеристик процесса не приводится.

Применительно к случайному сигналу о восстановлении процесса говорить проблематично или, скорее всего, даже не стоит из-за ошибок [3, С.74], поскольку в математической модели такого колебания содержатся случайные величины или случайные функции времени. В зависимости от состава математической модели в статистической радиотехнике такое колебание может быть квазидетерминированным сигналом или случайным сигналом. Оба сигнала имеют фундаментальные вероятностные характеристики, которые после дискретизации случайного процесса могут иметь отличия от фундаментального вида. Можно сказать, что при сохранении всех других условий (непрерывности,

стационарности процесса) возникшие отличия фундаментальных характеристик вызывают погрешности от дискретизации случайного сигнала.

Этот вопрос рассмотрен в статье [4], где авторы показали искажение оценки спектральной плотности мощности случайного процесса. Для уменьшения искажений спектра они рекомендовали выбирать частоту дискретизации процесса равной  $4F_B$  и это не предел [3]. Можно записать следующее равенство  $\Delta t = 1/4F_B = 1/2\lambda F_B$  при значении  $\lambda = 2$ . Переходя к определению частоты дискретизации сигнала, получим

$$F_D = 2 \cdot \lambda \cdot F_B \quad (1)$$

где  $\lambda$  – дополнительный коэффициент, который принимает любое значение внутри, например, диапазона  $1 \dots 10$ . Таким образом, дополнительный коэффициент значением единица не нарушает фундаментальность теоремы УКШ при анализе детерминированных сигналов, а коэффициент значением больше единицы позволяет с меньшими ошибками расширить применение этой теоремы для сигналов из класса случайных процессов [3, С.77].

В литературе [2-4] и других источниках отсутствуют сведения о количественном значении погрешности за счет искажения любой вероятностной характеристики случайного сигнала после его дискретизации. При переходе к вероятностным характеристикам случайного сигнала уточним следующее. Без учета моментных функций известно 5 одномерных вероятностных характеристик и  $5d$  многомерных характеристик, где  $d = 2, 3, 4 \dots$ . Наибольший интерес представляют одномерные плотность вероятностей (статистический закон распределения мгновенных значений сигнала) и корреляционная функция случайного сигнала. Они чаще других вероятностных характеристик используются при построении теории или для вычислений на практике. В данной работе задача определения значения дополнительного коэффициента с целью уточнения теоремы УКШ при дискретизации случайного процесса с заданной погрешностью искажения вероятностных характеристик решается экспериментально-аналитическим методом.

## 1. Методика экспериментальных исследований

Методика проведения экспериментальных исследований базируется на использовании сертифицированных генераторов разных фирм с известной корреляционной функцией (или спектральной плотностью мощности) и законом распределения мгновенных значений сигнала. Кроме того, применяется устройство измерения вероятностных характеристик дискретного случайного сигнала. В качестве такого средства выбран виртуальный прибор XN 1.31 beta (ОмГТУ, Россия), который с учетом моментных функций порядка  $k = 1, 2, 3, 4$  позволяет по одной реализации измерить 15 оценок вероятностных характеристик случайного сигнала. Описание прибора и инструкция по работе с ним имеются в монографии [5]. В основе построения прибора лежит теория [6] измерения оценок действительной и мнимой части одномерной характеристической функции (х.ф.) Ляпунова случайного процесса  $\xi(t)$

$$\Theta_1(V_m) = m_1 \{ \exp[jV_m \xi(t)] \} = m_1 \{ \cos[V_m \xi(t)] \} + jm_1 \{ \sin[V_m \xi(t)] \} = A(V_m) + jB(V_m), \quad (2)$$

где  $A(V_m)$ ,  $B(V_m)$  – действительная и мнимая часть х.ф.;  $V_m$  – параметр х.ф.;  $m_1\{\cdot\}$  – оператор математического ожидания. Разработаны аналитические формулы [6], использующие измеренные прибором XN 1.31 beta оценки действительной и мнимой части х.ф. при разных значениях её параметра, которые позволяют восстановить форму исследуемой вероятностной характеристики дискретного случайного сигнала

$$\widehat{W}_1(x) = \frac{1}{x_m} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{A}(V_m) \cos(V_m x) + \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{B}(V_m) \sin(V_m x) \right], \quad (3)$$

где  $\widehat{W}_1(x)$  – оценка одномерной плотности вероятностей;  $V_m = m\Delta V$ ;  $\Delta V$  – шаг дискретизации параметра х.ф.;  $x_m = \max \{ \xi(t) \}$  – максимальное мгновенное значение сигнала  $\xi(t)$  (случайный процесс  $\xi(t)$  находится в пределах  $\pm x_m$ ). Вероятностную характеристику, обозначенную сверху значком « $\widehat{\cdot}$ », будем называть оценкой этой характеристики,

$$\hat{k}(\tau) = \frac{\pi^2}{6\Delta V^2} + \frac{4}{\Delta V^2} \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^m}{m^2} \left[ \hat{A}(m\Delta V) - \frac{1}{2} \hat{A}(m\Delta V, \tau) \right], \quad (4)$$

где  $\hat{A}(m\Delta V, \tau)$  – оценка действительной части двумерной х.ф.;  $\hat{k}(\tau)$  – оценка корреляционной функции случайного сигнала;  $M$  – число значений оценки х.ф. С помощью преобразования Винера-Хинчина функции (4) получено выражение для спектральной плотности мощности [5]

$$\begin{aligned} \hat{G}(\omega) = & \frac{16\Delta\tau}{\Delta V^2} \sum_{n=1}^N \left[ \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^m}{m^2} \left( \hat{A}(m\Delta V) - \frac{1}{2} \hat{A}(m\Delta V, n\Delta\tau) \right) \right] \cos(\omega n\Delta\tau) + \\ & + \frac{8\Delta\tau}{\Delta V^2} \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^m}{m^2} \left( \hat{A}(m\Delta V) - \frac{1}{2} \right) + \frac{\pi^2\Delta\tau}{3\Delta V^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $N = \tau_{\max}/\Delta\tau$ ,  $\Delta\tau$  – шаг дискретизации параметра функции  $k(\tau)$ ;  $\tau_{\max}$  – максимальное значение параметра корреляционной функции случайного процесса.

В эксперименте участвуют непрерывные случайные сигналы, вероятностные характеристики которых в статистической радиотехнике хорошо изучены и являются фундаментальными. Методика определения погрешности прибора XN 1.31 beta подробно описана в работе [5]. Для уменьшения погрешности измерений оценок вероятностных характеристик исследуется реализация непрерывного случайного процесса, содержащая  $3 \cdot 10^4$  дискретных отсчетов сигнала. В этом случае погрешность прибора XN 1.31 beta не превышает 8% [5, С.39].

Первый непрерывный случайный сигнал, показанный на рис. 1, записывается математической моделью

$$u_1(t) = U_0 \sin(\omega t + \eta), \quad (6)$$

где  $U_0$ ,  $\omega$  – постоянные величины;  $\eta$  – случайная величина равномерно распределена в диапазоне  $-\pi \dots \pi$ . Сигнал (6) имеет известную корреляционную функцию и плотность вероятностей. Он генерируется устройством АКПП3409/4 (SIGLENT Technologies Co/Ltd, Китай). В статистической радиотехнике [7] фундаментальные вероятностные характеристики сигнала с моделью (6) представлены формулами

$$W_1(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{(U_0^2 - x^2)}} \quad (7)$$

– одномерная плотность вероятностей (закон арксинуса);

$$k(\tau) = \sigma_1^2 \cos \omega \tau \quad (8)$$

– корреляционная функция, где  $\sigma_1^2 = U_0^2/2$ .

Второй непрерывный случайный сигнал с математической моделью

$$u_2(t) = v_0 \sin(\omega t + \eta), \quad (9)$$

где  $v_0$  – случайная величина, распределенная по закону Релея;  $\omega$  – постоянная величина;  $\eta$  – случайная величина равномерно распределена в диапазоне  $-\pi \dots \pi$ , имеет другое изображение, показанное на рис. 2. Этот сигнал называют «белым» шумом. Он генерируется устройством UPV Audio Analyzer (Rohde & Schwarz, Германия). Фундаментальные вероятностные характеристики второго сигнала определяются выражениями [7]

$$W_1(x) = \left( \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \right) \exp\left( -\frac{x^2}{2\sigma_2^2} \right) \quad (10)$$

– одномерная плотность вероятностей (гауссово распределение);  $\sigma_2^2$  – средняя мощность сигнала;

$$k(\tau) = \frac{\sigma_2^2}{2} \delta(\tau);$$

$$G(\omega) = \frac{\sigma_2^2}{2} \quad (11)$$

– корреляционная функция и спектральная плотность мощности соответственно, где  $\delta(\tau)$  – дельта функция.

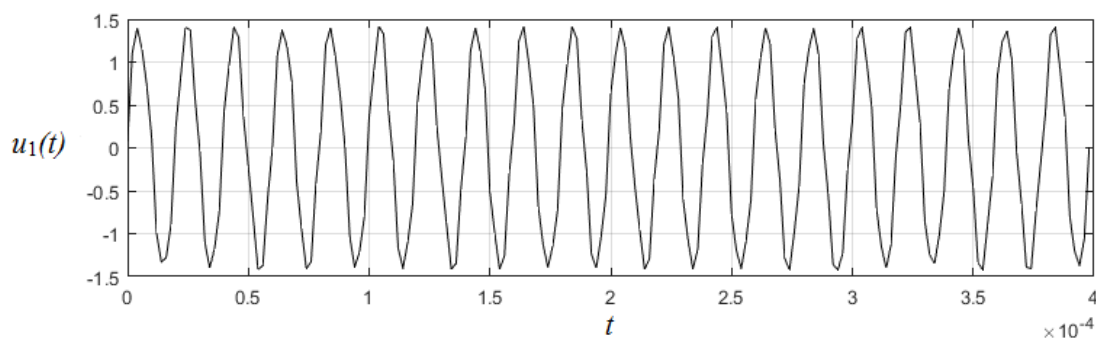


Рис. 1. Квазидетерминированный сигнал первый

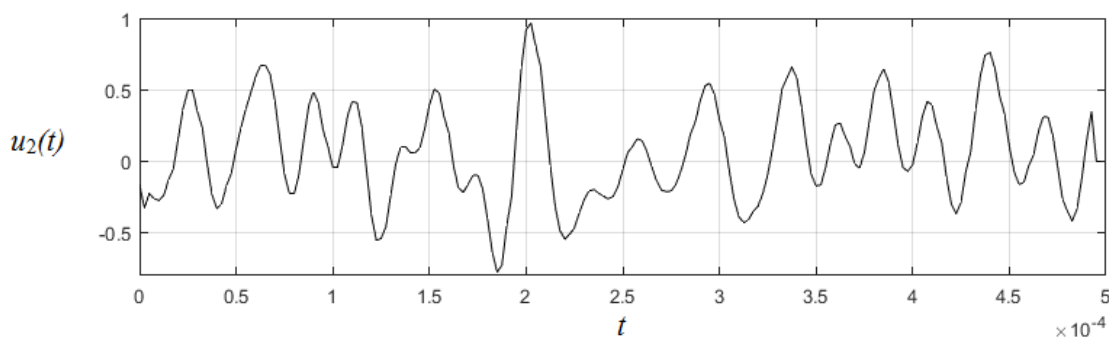


Рис. 2. Квазидетерминированный сигнал второй

Дискретизация случайных сигналов указанных физических генераторов проводится с помощью конвейерного 12-разрядного АЦП микропроцессора TMS320F2812, в котором предусмотрено изменение частоты дискретизации (1) при значениях коэффициента  $\lambda$ , взятых из диапазона 1...5.

Абсолютная погрешность за счет искажения любой вероятностной характеристики случайного сигнала после его дискретизации рассчитывается как разность между экспериментальными (3, 4, 5) и теоретическими (7, 8, 10, 11) значениями характеристик. Количество указанных разностей при расчете математического ожидания и дисперсии погрешности всегда больше двадцати. Относительная погрешность вычисляется как отношение среднего квадратичного отклонения (СКО) абсолютной погрешности к теоретическому значению вероятностной характеристики в любой точке наблюдения с заранее указанной величиной переменной.

## 2. Результаты эксперимента

При проведении эксперимента частота сигнала (6) равна 50 кГц, средняя мощность колебания  $\sigma_1^2 = 1,016 \text{ В}^2\text{с}$ , а его амплитуда  $U_0 = 1,42548 \text{ В}$ . Второй сигнал (9) – это «белый» шум в полосе частот от 0 до 40 кГц, средняя мощность шума  $\sigma_2^2 = 0,1462 \text{ В}^2\text{с}$ . Частота дискретизации обоих сигналов разная и зависит от коэффициента  $\lambda$  в формуле (1), величина которого последовательно равнялась значению 1; 1,25; 2; 2,5; 5. Объем выборочных данных о сигнале составил  $3 \cdot 10^4$  дискретных значений. Результаты эксперимента сведены в таблицы 1 – 4.

Таблица 1. Погрешность искажения корреляционной функции после дискретизации сигнала

Квазидетерминированный сигнал (6)						
Закон распределения сигнала: арксинус						
Вероятностная характеристика: корреляционная функция						
Коэффициент $\lambda$		1	1,25	2	2,5	5
Погрешность	Математическое ожидание	$-9,9 \cdot 10^{-4}$	$8,7 \cdot 10^{-4}$	$-5 \cdot 10^{-4}$	$4,3 \cdot 10^{-5}$	0,0016
	СКО	0,0219	0,0157	0,0164	0,0175	0,0161

Таблица 2. Погрешность искажения плотности вероятностей после дискретизации сигнала

Квазидетерминированный сигнал (6)						
Закон распределения сигнала: арксинус						
Вероятностная характеристика: плотность вероятностей						
Коэффициент $\lambda$		1	1,25	2	2,5	5
Погрешность	Математическое ожидание	-0,015	-0,002	-0,0002	-0,0086	0,0014
	СКО	0,065	0,0380	0,0206	0,0249	0,0145

Таблица 3. Погрешность искажения спектральной плотности мощности после дискретизации сигнала

Квазидетерминированный сигнал (9)						
Закон распределения сигнала: нормальный						
Вероятностная характеристика: спектральная плотность мощности						
Коэффициент $\lambda$		1	1,25	2	2,5	5
Погрешность	Математическое ожидание	$-3 \cdot 10^{-9}$	$-3 \cdot 10^{-7}$	$-2,4 \cdot 10^{-7}$	$-2,4 \cdot 10^{-7}$	$-2,8 \cdot 10^{-7}$
	СКО	$5,4 \cdot 10^{-7}$	$4,3 \cdot 10^{-8}$	$4,5 \cdot 10^{-8}$	$5,4 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$

Таблица 4. Погрешность искажения плотности вероятностей после дискретизации сигнала

Квазидетерминированный сигнал (9)						
Закон распределения сигнала: нормальный						
Вероятностная характеристика: плотность вероятностей						
Коэффициент $\lambda$		1	1,25	2	2,5	5
Погрешность	Математическое ожидание	$3,9 \cdot 10^{-5}$	$5,0 \cdot 10^{-5}$	$4,8 \cdot 10^{-5}$	$3,6 \cdot 10^{-5}$	$4,8 \cdot 10^{-5}$
	СКО	0,0063	0,0098	0,0085	0,0091	0,0072



### 3. Обсуждение результатов

Погрешность от дискретизации случайного процесса для указанных в таблицах 1 – 4 одномерных вероятностных характеристик получилась разная и зависит от значения коэффициента  $\lambda$ . Отсюда следует главный вывод о том, что частота дискретизации случайного сигнала в несколько раз больше частоты дискретизации детерминированного колебания, т. е. в формуле (1) коэффициент  $\lambda > 1$ . Она зависит, кроме того, от меры неопределенности (энтропии) или хаоса случайного сигнала. Для сигнала (9) энтропия равна 0,66 двоичных единицы [бит] [8], когда  $\sigma_2^2 = 0,1462 \text{ В}^2\text{с}$ , а у сигнала (6) она будет 4 бит [9], если  $U_0 = 1,42548 \text{ В}$ . При одинаковой погрешности искажения плотности вероятностей частота дискретизации случайного сигнала (6) будет больше, чем, например, для сигнала (9).

Математическое ожидание в таблицах 1 – 4 постоянно стремится к нулю. Это позволяет утверждать, что оценки вероятностных характеристик (3, 4, 5) являются несмещенными. Следовательно, при дискретизации случайного процесса несмещенность оценок вероятностных характеристик не нарушается, другими словами, данное фундаментальное свойство оценок сохраняется.

По данным таблиц 1 – 4 построены кривые на рис. 3, 4 и проведена аппроксимация экспериментальных результатов экспоненциальной зависимостью общего вида

$$\sigma_n = \chi + \beta \exp(\mu - \alpha n), \quad (12)$$

где значения коэффициентов  $\chi$ ,  $\beta$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$  записаны в таблицах 5, 6, а СКО погрешности  $\sigma_n$  внесено в таблицы 1 – 4 отдельно для каждой вероятностной характеристики. На рис. 3 (б) и 4(б) графики построены для  $\lambda = 1; 1,25; 1,43; 1,5; 1,67; 2; 2,5; 3,3; 5$ .

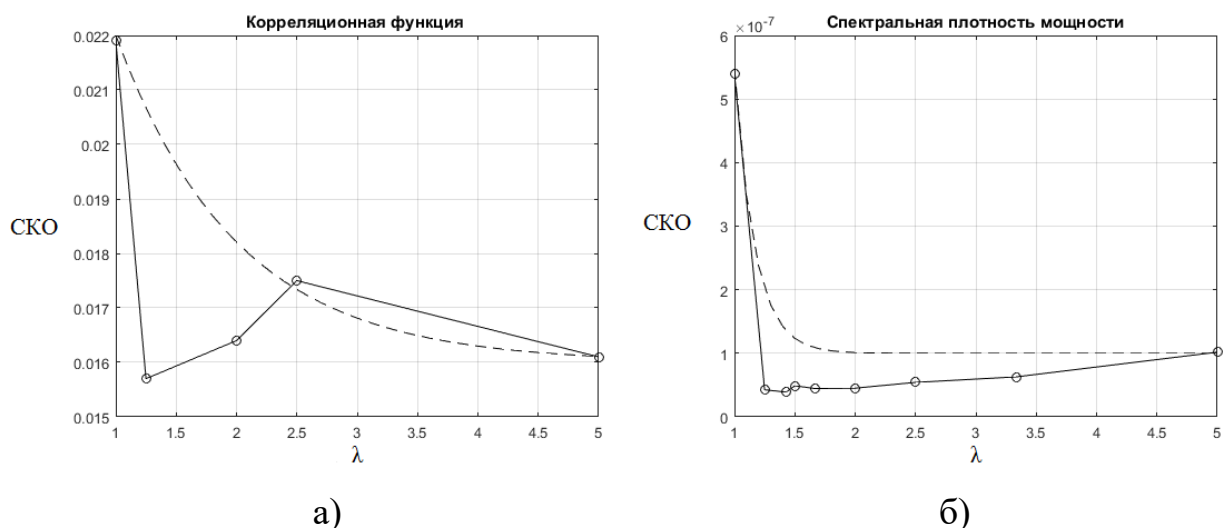


Рис. 3. Погрешность от дискретизации случайного процесса при анализе корреляционной функции (а) и спектральной плотности мощности (б) :

- а) – квазидетерминированный сигнал первый;
- б) – квазидетерминированный сигнал второй

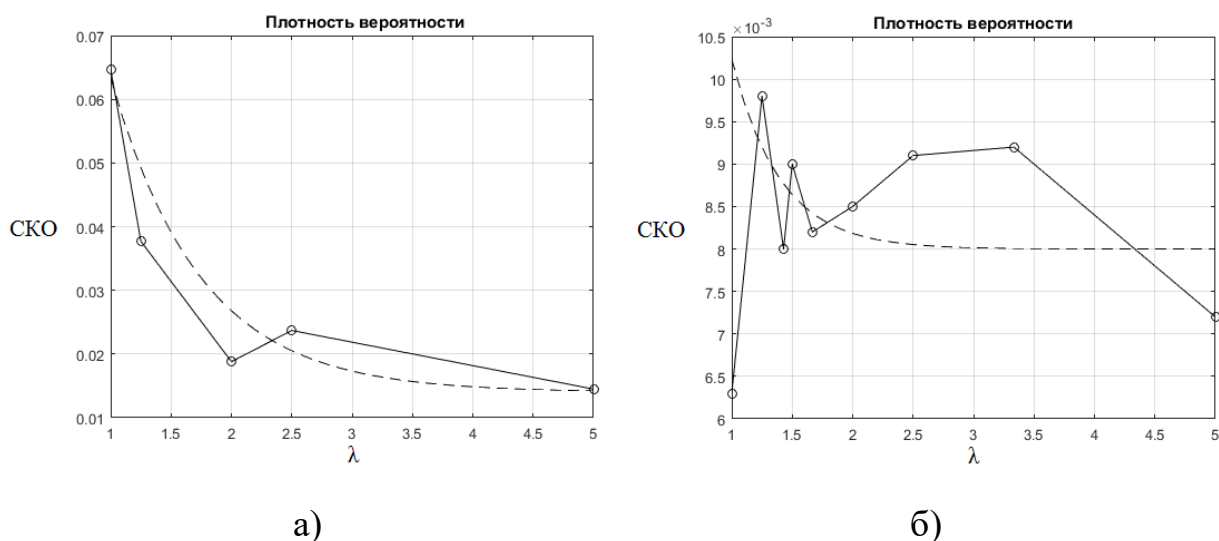


Рис. 4. Погрешность от дискретизации случайного процесса при анализе плотности вероятностей:

- а) – квазидетерминированный сигнал первый;
- б) – квазидетерминированный сигнал второй

Таблица 5. Значения коэффициентов

Квазидетерминированный сигнал (б)							
Корреляционная функция				Плотность вероятностей			
$\chi$	$\beta$	$\mu$	$\alpha$	$\chi$	$\beta$	$\mu$	$\alpha$
0,016	0,006	1	1	0,014	0,07	1	1,35

Таблица 6. Значения коэффициентов

Квазидетерминированный сигнал (9)							
Спектральная плотность мощности				Плотность вероятностей			
$\chi$	$\beta$	$\mu$	$\alpha$	$\chi$	$\beta$	$\mu$	$\alpha$
$1 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{-5}$	1	5,9	0,008	0,01	1	2,5

#### 4. Решение трансцендентного уравнения

На практике приходится решать много разных задач, например, необходимо определить частоту дискретизации квазидетерминированного сигнала амплитудой  $U_0 = 1,5$  В, при которой искажение корреляционной функции (8) составит  $\gamma = 20\%$  в точке с абсциссой  $\tau = 0,25$  мс при  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 10^3$  [рад/с].

Решение трансцендентного уравнения (12) относительно коэффициента  $\lambda$  будет определяться выражением

$$\lambda = \frac{\mu - \ln[(\sigma_n - \chi)/\beta]}{\alpha}. \quad (13)$$

Подставляя в формулу (13) значения коэффициентов из таблицы 5 применительно к сигналу (6) и результат из соотношения  $\sigma_n = \gamma \cdot k(\tau)/100$ , получим  $\lambda = 1,934 \approx 2$ . Возвращаясь к формуле (1), определим частоту дискретизации квазидетерминированного сигнала частотой 50 кГц. Это значение  $\lambda$  почти совпадает с результатом, полученным в работе [4], т.к. корреляционная функция и спектральная плотность мощности связаны между собой фундаментальным преобразованием Винера-Хинчина [7]. Теперь гипотетически можно полагать, что в работе [4] спектральная плотность мощности была определена с погрешностью 20 %. В доказательство сказанного на рис. 5, 6 приведена спектральная плотность мощности «белого» шума с полосой 40 кГц.

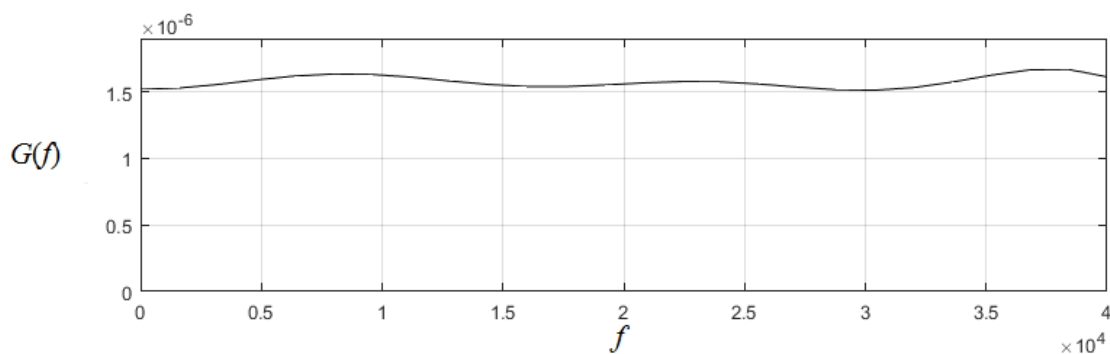


Рис. 5. Спектральная плотность мощности сигнала (9) при значении коэффициента  $\lambda = 2$

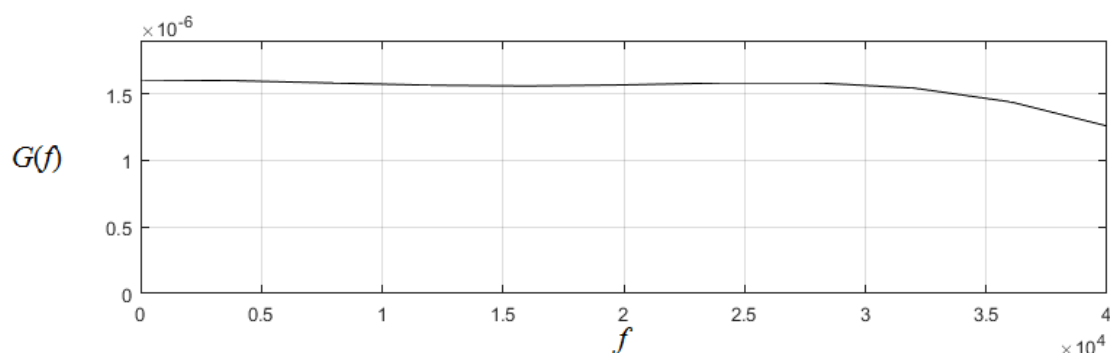


Рис. 6. Спектральная плотность мощности сигнала (9) при значении коэффициента  $\lambda = 5$

Даже визуально можно установить, что искажение спектральной плотности мощности на рис. 5 больше, чем искажение той же характеристики на рис. 6. Выходит, частота дискретизации случайного процесса действительно определяет погрешность искажения вероятностной характеристики сигнала.

К сказанному можно добавить, что результаты исследования плотности вероятностей можно также распространить на характеристическую функцию и функцию распределения вероятности, поскольку эти характеристики связаны фундаментальными преобразованиями с плотностью вероятностей.

## Заключение

Экспериментально-аналитическим методом подтверждена фундаментальность теоремы УКШ на примере дискретизации случайных сигналов с разной степенью хаоса. Установлено, что с повышением хаоса частота дискретизации случайного процесса растет, если каждый раз выполняется условие по сохранению заданного значения погрешности

искажения фундаментальных вероятностных характеристик. На примере исследования корреляционной функции (или спектральной плотности мощности) и плотности вероятностей предложено трансцендентное уравнение, решение которого с учетом заданной погрешности искажения вероятностных характеристик позволяет определить значение дополнительного коэффициента, увеличивающего частоту квантования для детерминированного колебания, вытекающую из теоремы УКШ, при переходе к случайному процессу. Полученные результаты можно распространить на характеристическую функцию и функцию распределения вероятности, поскольку они связаны фундаментальными преобразованиями с плотностью вероятностей.

**Автор для переписки:** Титов Дмитрий Анатольевич, [Dtitov2@yandex.ru](mailto:Dtitov2@yandex.ru)

### Литература

1. Басараб М.А., Зелкин Е.Г., Кравченко В.Ф., Яковлев В.П. *Цифровая обработка сигналов на основе теоремы Уиттекера-Котельникова-Шеннона*. Москва, Радиотехника. 2004. 72 с.
2. Яковлев В.П. Фильтрация сигнала на выходе аналого-цифрового преобразования. *Проблемы передачи информации*. 1988. Т.24. №2. С.51-58.
3. Джерри А.Дж. Теорема отсчетов Шеннона, её различные обобщения и приложения. Обзор. *ТИИЭР*. 1977. Т.65. №11. С.53-89.
4. Кинщак В.И., Нестеров А.В. Выбор частоты квантования при измерении характеристик случайного процесса дискретными методами. *Известия высших учебных заведений, серия Радиоэлектроника*. 1979. №1. С.108-110.
5. Вешкурцев Ю.М., Вешкурцев Н.Д., Титов Д.А. *Приборостроение на базе характеристической функции случайных процессов*: монография. Новосибирск, АНС «СибАК». 2018. 182 с.
6. Вешкурцев Ю.М. *Прикладной анализ характеристической функции случайных процессов*: монография. Москва, Радио и связь. 2003. 204 с.

7. Левин Б.Р. *Теоретические основы статистической радиотехники*. Москва, Сов. Радио. 1966. 728 с.
8. Заездный А.М. *Основы расчетов по статистической радиотехнике*. Москва Связь. 1969. 447 с.
9. Вешкурцев Ю.М., Вешкурцев Н.Д. Энтропия закона арксинуса *Наука, образование, бизнес: Материалы регион. науч. – прак. конференции*. Омск, полиграфический центр КАН. 2011. С.143-146.

**Для цитирования:**

Вешкурцев Ю.М., Титов Д.А. Определение частоты дискретизации случайного процесса. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2022. №6. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.6.2>