



DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.6.4>

УДК: 681.586.773; 53.043

ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ СВОЙСТВА НАЧАЛЬНО-НАПРЯЖЕННОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИКИ PZT-4 С ОДНОНАПРАВЛЕННЫМИ ТУННЕЛЬНЫМИ ПОРАМИ

А.А. Паньков

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
614990, Пермь, Комсомольский пр-кт, д. 29

Статья поступила в редакцию 27 марта 2023 г.

Аннотация. Представлены результаты прогнозирования и численный анализ влияния на эффективные трансверсально-изотропные электроупругие свойства пористой пьезокерамики PZT-4 с однонаправленными цилиндрическими (туннельными) порами значений ее начального осесимметричного напряженного состояния. Выявлены эффективные константы: модули Юнга и сдвига, коэффициент Пуассона в трансверсальной плоскости изотропии и «продольно-поперечный» пьезомодуль пористой керамики, на которые наиболее существенно, в сравнении с другими практически «инвариантными» константами, влияют характер и значения ее начального деформирования. Установлено, что «трансверсальная» гидростатическая начальная деформация пористой керамики более существенно влияет на эффективные константы пористой керамики, чем такие же значения «продольной» осевой начальной деформации.

Ключевые слова: пьезоэлектрический эффект, пористая пьезокерамика, электроупругие свойства, начальное напряженное состояние, механика композитов, краевая задача электроупругости, численное моделирование.

Финансирование: Результаты получены при выполнении государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации на выполнение фундаментальных научных исследований (проект № FSNM-2023-0006).

Автор для переписки: Паньков Андрей Анатольевич, a_a_pankov@mail.ru

Введение

Пьезоэлектрические (пьезоактивные) материалы используются в современных «интеллектуальных» мехатронных системах в качестве функциональных элементов, в частности: электромеханических преобразователей, датчиков физико-механических величин (давления, температуры и др.), актиuatorов [1-5], работа которых основывается на эффекте связанности деформационного и электрического полей. Прогнозирование уникальных свойств новых пьезоэлектрических структурно-неоднородных материалов (композитов), в частности, пьезокерамики с микропористой структурой основывается на постановке и решении связанной краевой задачи электроупругости для микронеоднородной представительной области материала с использованием методов механики композитов [6-10] с учетом таких «тонких» параметров, как особенности геометрической формы, взаимного расположения и нелинейности физико-механических свойств элементов структуры. Изучение закономерностей и эффектов влияния начального напряженного состояния на микро- и макроуровнях структурно-неоднородного материала на его результирующие эффективные физико-механические свойства - одна из задач механики композитов [11-20]. Для решения этой задачи хорошую эффективность показал линеаризованный подход [19,21,22] в рамках теории упругости для тела с начальным напряженным состоянием, который в [19,21] обобщен на электроупругий и магнитоэлектроупругий [22] композиты.

Цель – прогнозирование электроупругих свойства начально-напряженной трансверсально-изотропной пористой пьезокерамики PZT-4 с различной связанностью однонаправленных полидисперсных туннельных пор на основе решения [23] связанной стохастической краевой задачи электроупругости с использованием метода функций Грина механики композитов.

1. Математическая постановка задачи

При электромеханическом нагружении области \mathbf{V} пористой керамики (композита) напряжениями σ^{*0} , деформациями ϵ^{*0} и/или внешним электрическим полем с напряженностью \mathbf{E}^{*0} в каркасе пористой керамики возникают поля напряжения σ и индукции \mathbf{D} , которые удовлетворяют уравнениям равновесия и непрерывности [19-23]:

$$(\sigma_{ij} + \sigma_{kj}^0 u_{i,k}),_j = 0, \quad (D_j + D_k^0 u_{j,k}),_j = 0, \quad (1)$$

с учетом «поправок» в виде дополнительных слагаемых $\sigma_{kj}^0 u_{i,k}$, $D_k^0 u_{j,k}$, обусловленных наличием заданных начальных полей σ^0 , \mathbf{D}^0 и дополнительного искомого поля перемещений \mathbf{u} . Начальные поля σ^0 , \mathbf{D}^0 удовлетворяют уравнениям равновесия $\sigma_{ij,j}^0 = 0$ и непрерывности $D_{i,i}^0 = 0$.

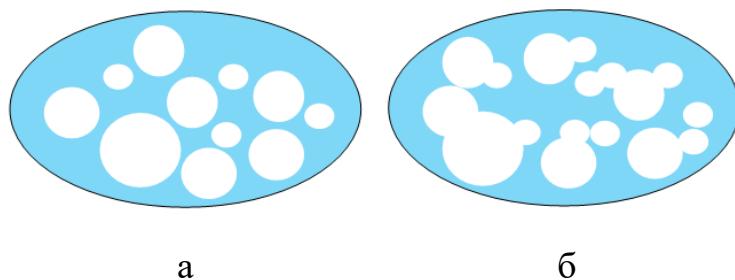


Рис. 1. Фрагменты структур с изолированными (а) и взаимопроникающими (б) порами в поперечном сечении пористой керамики

Первое уравнение в (1) преобразуем к виду: $\sigma_{ij,j} + \sigma_{kj}^0 u_{i,kj} = 0$, с учетом выполнения равенств $\sigma_{kj,j}^0 = 0$ для поля σ^0 начальных напряжений. Фрагменты полидисперсных структур (в поперечном сечении) трансверсально-изотропной пористой керамики с

однонаправленными туннельными (цилиндрическими) порами изображены на рис. 1 для различных рассматриваемых случаев связанности пор - взаимоизолированных (рис. 1а) и взаимопроникающих «кластерных» (рис. 1б) пор. В каркасе пористой керамики напряжения σ и индукции D (1) выражаются по известным определяющим соотношениям [5]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}u_{m,n} - e_{nij}E_n, \quad D_i = e_{imn}u_{m,n} + \lambda_{in}E_n, \quad (2)$$

через градиенты перемещений ∇u , напряженность E электрического поля с использованием известных тензоров упругих C , пьезоэлектрических e и диэлектрических λ свойств монолитной керамики. Осредненные оператором «объемного осреднения» $\langle \dots \rangle = 1/V \int_V \dots d\mathbf{r}$ «макроскопические» значения деформационного $\langle \nabla u \rangle$, $\langle \sigma \rangle$ и электрического $\langle E \rangle$, $\langle D \rangle$ полей связаны между собой с учетом начального напряженного состояния:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijmn}^* \langle u_{m,n} \rangle - e_{(\sigma)ij}^* \langle E_n \rangle, \quad \langle D_i \rangle = e_{(D)imn}^* \langle u_{m,n} \rangle + \lambda_{in}^* \langle E_n \rangle \quad (3)$$

посредством искомых тензоров C^* , $e_{(\sigma)}^*$, $e_{(D)}^*$, λ^* «эффективных» электроупругих свойств пористой керамики как гомогенного однородного материала. Отметим, что для эффективных трансверсально-изотропных свойств пористой (и монолитной) керамик с осесимметричным по оси r_3 начальным напряженным состоянием (ϵ^{*0} , E^{*0}) тензор пьезоэлектрических свойств e^* в матричной форме записи имеет вид [5]:

$$\left\| e_{ij}^* \right\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15}^* & 0 & 0 \\ e_{31}^* & e_{31}^* & e_{33}^* & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (4)$$

с учетом замен: $11 \rightarrow 1$, $22 \rightarrow 2$, $33 \rightarrow 3$, 23 и $32 \rightarrow 4$, 13 и $31 \rightarrow 5$, 12 и $21 \rightarrow 6$ двойных тензорных индексов на одиночные матричные.

2. Эффективные электроупругие свойства пористой керамики

Искомые тензоры C^* , $e_{(\sigma)}^*$, $e_{(D)}^*$, λ^* эффективных свойств трансверсально-изотропной пористой керамики найдем:

$$C^* = \langle C \rangle + \Delta^c, \quad e_{(\sigma)}^* = \langle e \rangle + \Delta_{(\sigma)}^e, \quad e_{(D)}^* = \langle e \rangle + \Delta_{(D)}^e, \quad \lambda^* = \langle \lambda \rangle + \Delta^\lambda \quad (5)$$

как частный случай полученного ранее решения [23] для двухфазного микронеоднородного композита с начальным напряженным состоянием через поправки:

$$\begin{aligned}\Delta_{ijmn}^c &= v_{\circ}(1-v_{\circ})(-C_{ijdb}\bar{A}_{dbmn} + e_{pij}\bar{F}_{pmn}), \\ \Delta_{(\sigma)ij}^e &= v_{\circ}(1-v_{\circ})(-e_{pij}\bar{H}_{pn} + C_{ijpq}\bar{B}_{pqn}), \\ \Delta_{(D)imn}^e &= v_{\circ}(1-v_{\circ})(-e_{ipq}\bar{A}_{pqmn} - \lambda_{ip}\bar{F}_{pmn}), \\ \Delta_{kn}^{\lambda} &= -v_{\circ}(1-v_{\circ})(\lambda_{kp}\bar{H}_{pn} + e_{kpq}\bar{B}_{pqn})\end{aligned}\quad (6)$$

к соответствующим осредненным по объему значениям:

$$\langle \mathbf{C} \rangle = \mathbf{C}(1-v_{\circ}), \quad \langle \mathbf{e} \rangle = \mathbf{e}(1-v_{\circ}), \quad \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle = \boldsymbol{\lambda}(1-v_{\circ}),$$

где тензоры $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$, ... (6) входят в разложения:

$$\bar{u}_{ij} = \bar{A}_{ijmn}u_{mn}^* + \bar{B}_{ijn}E_n^*, \quad \bar{E}_i = \bar{F}_{imn}u_{mn}^* + \bar{H}_{in}E_n^*, \quad (7)$$

с учетом представления пульсаций ($\mathbf{r} \in \mathbf{V}$):

$$u_{i,j}^{\dot{}}(\mathbf{r}) \equiv u_{i,j}(\mathbf{r}) - u_{ij}^* = \bar{u}_{ij}i_{\circ}^{\dot{}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}^{\dot{}}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}^* = \bar{\mathbf{E}}i_{\circ}^{\dot{}}(\mathbf{r})$$

производных перемещений $u_{i,j}^{\dot{}}(\mathbf{r})$ и электрической напряженности $\mathbf{E}^{\dot{}}(\mathbf{r})$ в области \mathbf{V} , $i_{\circ}^{\dot{}}(\mathbf{r}) = i_{\circ}(\mathbf{r}) - v_{\circ}$ - пульсация индикаторной функции $i_{\circ}(\mathbf{r})$ пор (здесь $i_{\circ} = 1$ в области пор и $i_{\circ} = 0$ - каркасе пористой керамики), $v_{\circ} = \langle i_{\circ} \rangle$ - относительное объемное содержание туннельных пор в области \mathbf{V} , в общем, $v_{\circ} \in (0;1)$. Вид тензоров $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$, ... в (6), (7) найден ранее в [24] в «обобщенном сингулярном приближении» [25], в котором у вторых производных функций Грина $\nabla \nabla \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \approx \mathbf{G}^s \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ учитывают лишь составляющие, пропорциональные обобщенной дельта-функции $\delta(\mathbf{r})$. В этом приближении характер связности неоднородностей (пор) в представительной области композита - пористой керамики учитывается выбором свойств, т.е. значениями тензоров \mathbf{C}_{\bullet} , \mathbf{e}_{\bullet} , $\boldsymbol{\lambda}_{\bullet}$ однородной электроупругой «среды сравнения» [25].

3. Результаты численного моделирования

Результаты прогнозирования численных значений эффективных

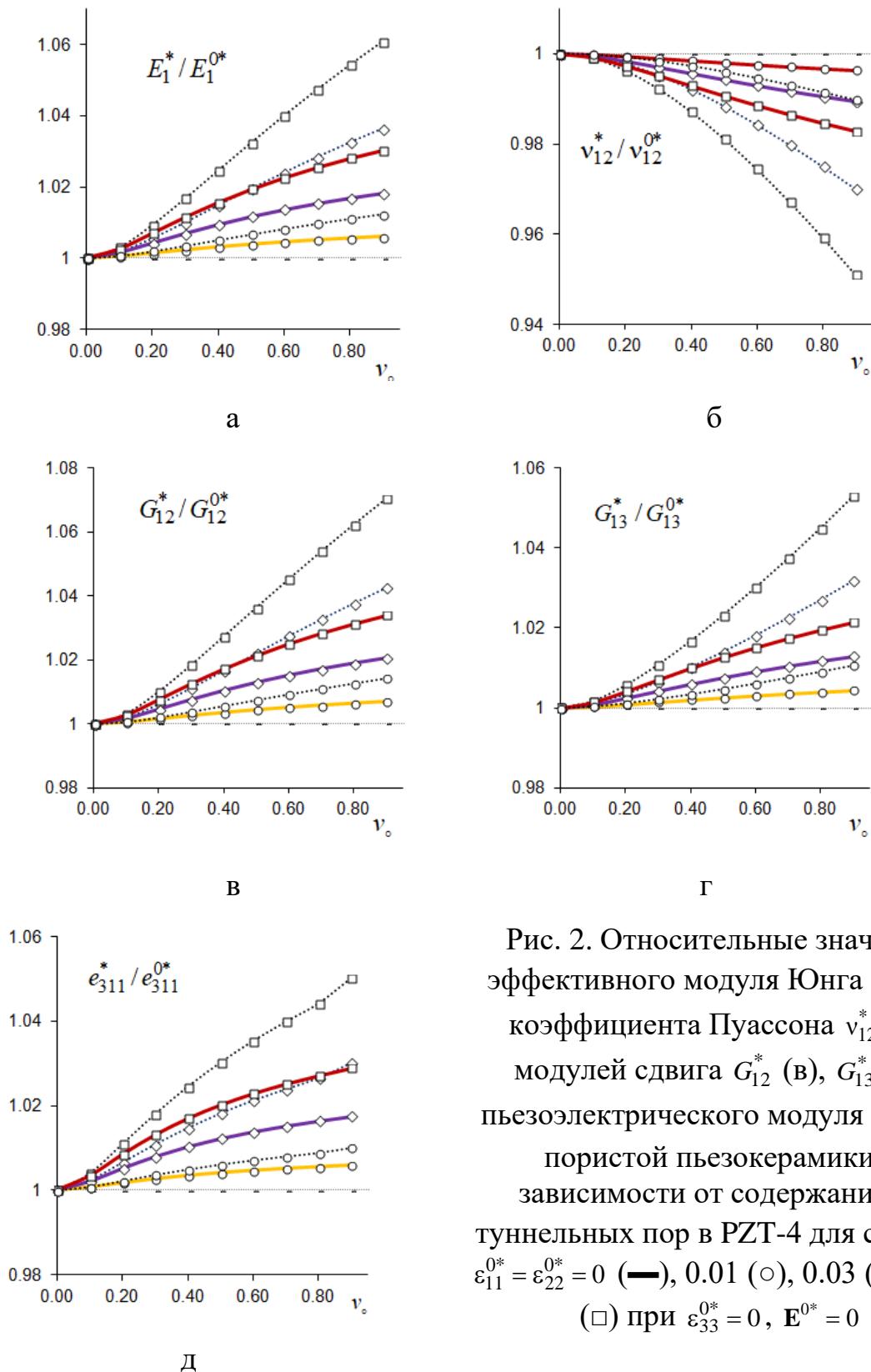


Рис. 2. Относительные значения эффективного модуля Юнга E_1^* (а), коэффициента Пуассона ν_{12}^* (б), модулей сдвига G_{12}^* (в), G_{13}^* (г), пьезоэлектрического модуля e_{311}^* (д) пористой пьезокерамики в зависимости от содержания v_0 . туннельных пор в PZT-4 для случаев $\epsilon_{11}^{0*} = \epsilon_{22}^{0*} = 0$ (—), 0.01 (○), 0.03 (◊), 0.05 (□) при $\epsilon_{33}^{0*} = 0$, $\mathbf{E}^{0*} = 0$

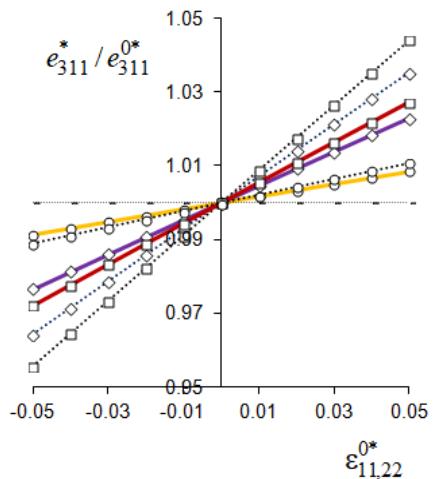
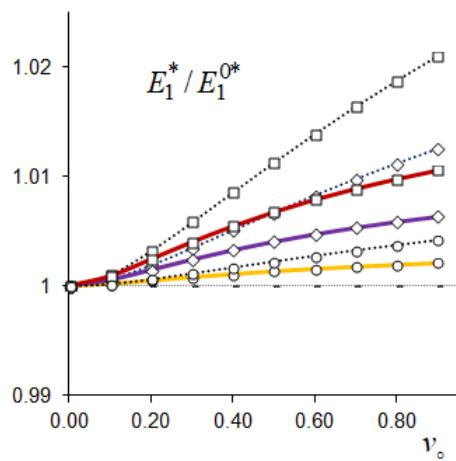
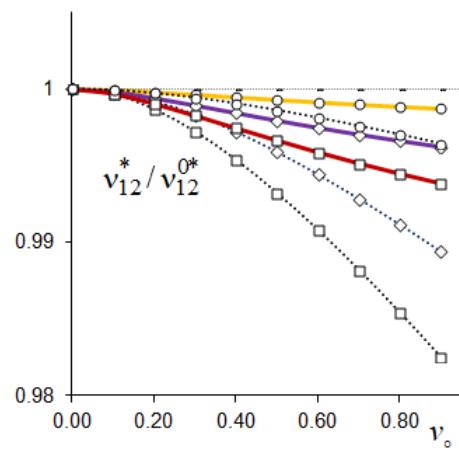


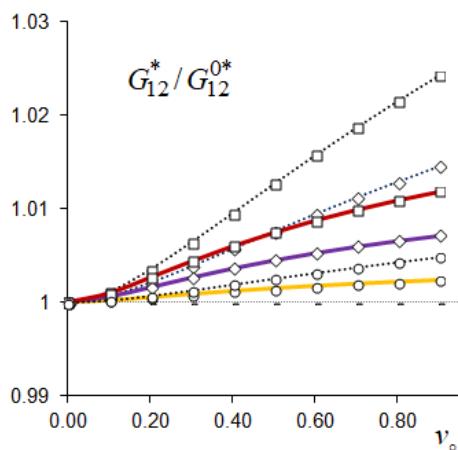
Рис. 3. Относительные значения эффективного пьезоэлектрического модуля e_{311}^* в зависимости от начальной макродеформации $\varepsilon_{11}^{0*} = \varepsilon_{22}^{0*} \neq 0$ пористой пьезокерамики PZT-4 с объемной долей туннельных пор $v_o = 0.2$ (○), 0.6 (◊), 0.8 (□) при $\varepsilon_{33}^{0*} = 0$, $\mathbf{E}^{0*} = 0$



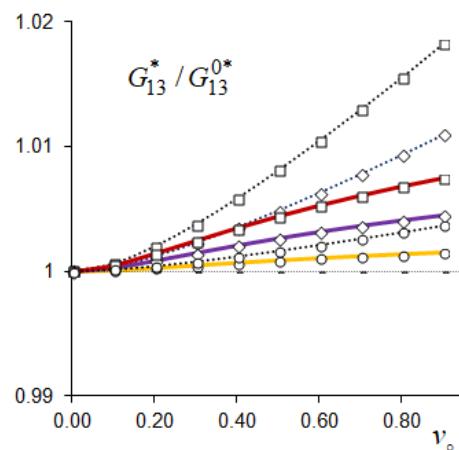
а



б



в



г

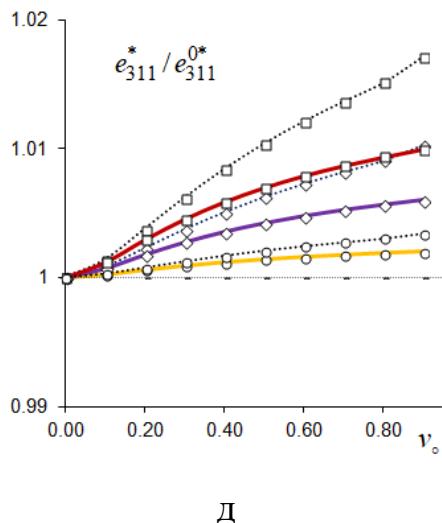


Рис. 4. Относительные значения эффективного модуля Юнга E_1^* (а), коэффициента Пуассона ν_{12}^* (б), модулей сдвига G_{12}^* (в), G_{13}^* (г), пьезоэлектрического модуля e_{311}^* (д) пористой пьезокерамики в зависимости от содержания v_0 .
туннельных пор в PZT-4 для случаев $\epsilon_{33}^{0*} = 0$ (—), 0.01 (○), 0.03 (◊), 0.05 (□)
при $\epsilon_{11}^{0*} = \epsilon_{22}^{0*} = 0$, $\mathbf{E}^{0*} = 0$

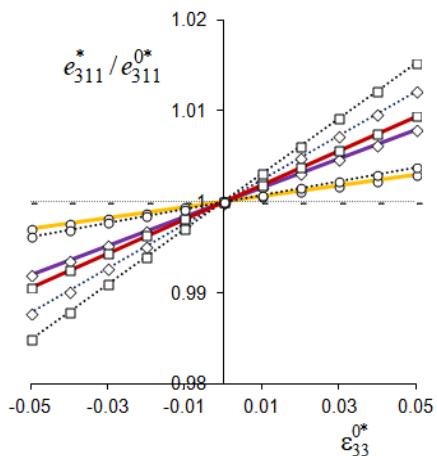


Рис. 5. Относительные значения эффективного пьезоэлектрического модуля e_{311}^* в зависимости от начальной макродеформации $\epsilon_{33}^{0*} \neq 0$ пористой пьезокерамики PZT-4 с объемной долей туннельных пор $v_0 = 0.2$ (○), 0.6 (◊), 0.8 (□) $\epsilon_{11}^{0*} = \epsilon_{22}^{0*} = 0$, $\mathbf{E}^{0*} = 0$

технических констант E_1^* , ν_{12}^* , G_{12}^* , G_{13}^* , e_{311}^* трансверсально-изотропных электроупругих свойств пористой пьезокерамики в зависимости от величины v_0 относительной объемной доли однородных (вдоль оси r_3 - направления поляризации каркаса пористой пьезокерамики) туннельных пор даны на рис. 2 – 5 в виде графиков: сплошные линии для взаимоизолированных (рис. 1а), пунктирные линии для взаимопроникающих «кластерных» (рис. 1б) пористых структур как частные случаи обобщенного сингулярного приближения (15), (16) [23] со «средой сравнения» – монолитная керамика, т. е. принимаем равенства $\mathbf{C}_* = \mathbf{C}$, $\mathbf{e}_* = \mathbf{e}$, $\lambda_* = \lambda$ или «среда сравнения» имеет осредненные по объему пористой керамики свойства, т.е. $\mathbf{C}_* = \langle \mathbf{C} \rangle$, $\mathbf{e}_* = \langle \mathbf{e} \rangle$, $\lambda_* = \langle \lambda \rangle$.

Заключение

Проведен численный анализ всех независимых характеристик трансверсально-изотропных электроупругих свойств пористой пьезокерамики PZT-4 с учетом наличия начально-напряженного состояния каркаса и различной связанности однонаправленных полидисперсных туннельных пор. Анализ основан на полученном ранее аналитическом решении [23] связанной стохастической краевой задачи электроупругости с использованием метода функций Грина механики композитов. Выявлены эффективные технические константы: E_1^* , v_{12}^* , G_{12}^* , G_{13}^* , e_{311}^* (рис. 2 – 4) электроупругих свойств пористой пьезокерамики, на которые существенно влияет начальное деформирование материала $\varepsilon_{11}^{0*} = \varepsilon_{22}^{0*} \neq 0$ при $\varepsilon_{33}^{0*} = 0$, $\mathbf{E}^{0*} = 0$ на макроуровне материала. При этом для других эффективных констант имеем: $E_3^* / E_3^{0*} \approx 1$, $v_{13}^* / v_{13}^{0*} \approx 1$, $e_{333}^* / e_{333}^{0*} \approx 1$, $e_{113}^* / e_{113}^{0*} \approx 1$, $\lambda_{11}^* / \lambda_{11}^{0*} \approx 1$, $\lambda_{33}^* / \lambda_{33}^{0*} \approx 1$. Ненулевые значения начальной трансверсальной деформации $\varepsilon_{11}^{0*} = \varepsilon_{22}^{0*} \neq 0$ (рис. 2, 3) в отличие от таких же значений продольной деформации $\varepsilon_{33}^{0*} \neq 0$ (рис. 4, 5) пористой керамики более значительно влияют на эффективные электроупругие свойства материала, в частности, на значения эффективного пьезоэлектрического модуля e_{311}^* .

Финансирование: Результаты получены при выполнении государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации на выполнение фундаментальных научных исследований (проект № FSNM-2023-0006).

Литература

1. Tzou H.S. *Piezoelectric shells (Distributed sensing and control of continua)*. Kluwer Academic Publishers. 1993. 320 p
2. Rubio W.M., Vatanabe S.L., Paulino G.H., Silva E.C.N. *Functionally graded piezoelectric material systems - a multiphysics perspective*. In book *Advanced computational materials modeling: from classical to multi-scale techniques*. Edited

- by Miguel Vaz J'unior, Eduardo A. de Souza Neto, Pablo A. Munoz-Rojas. Weinheim, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA. 2011. 414 p. P.301-339. <http://dx.doi.org/10.1002/9783527632312>
3. Ebrahimi F. *Piezoelectric materials and devices-practice and applications*. IntechOpen. 2013. 176 p. <http://dx.doi.org/10.5772/45936>
 4. Уорден К. *Новые интеллектуальные материалы и конструкции. Свойства и применение*. Москва, Техносфера. 2006. 224 с.
 5. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. *Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях. Физическая акустика. Т.1. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Часть А*. Москва, Мир. 1966. С. 204-326.
 6. Kolpakov A.G. Effect of influation of initial stresses on the homogenized characteristics of composite. *Mechanics of materials*. 2005. V.37. №8. P.840-854. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2004.08.002>
 7. Каралюнас Р.И. Эффективные термопьезоэлектрические свойства слоистых композитов. *Механика композитных материалов*. 1990. №5. С.823-830.
 8. Гетман И.П. О магнитоэлектрическом эффекте в пьезокомпозитах. *ДАН СССР*. 1991. Т.317. №2. С.1246-1259.
 9. Коган Л.З., Мольков В.А. Магнитоэлектрические свойства волокнистых пьезокомпозитов. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 1996. №5. С.62-68.
 10. Gorbachev V.I. Integral formulas in electromagnetic elasticity of heterogeneous bodies. application in the mechanics of composite materials. *Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International J.* 2017. V.8. №2. P.147-170. <https://doi.org/10.1615/CompMechComputApplIntJ.v8.i2.40>
 11. Васидзу К. *Вариационные методы в теории упругости и пластичности*. Москва, Мир. 1987. 542 с.
 12. Гузь А.Н. Об определении приведенных упругих постоянных композитных слоистых материалов с начальными напряжениями. *Доклады АН УССР. Сер. A*. 1975. №3. С.216-219.

13. Гузь А.Н. *Упругие волны в телах с начальными напряжениями*. В 2-х т. Т.2. *Закономерности распространения*. Киев, Наукова думка. 1986. 536 с.
14. Алексин В.В., Аннин Б.Д., Колпаков А.Г. *Синтез слоистых материалов и конструкций*. Новосибирск, изд-во: Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1988. 128 с.
15. Akbarov S.D., Guliev M.S. Axisymmetric longitudinal wave propagation in a finite prestretched compound circular cylinder made of incompressible materials. *International Applied Mechanics*. 2009. V.45. №10. P.1141-1151. <https://doi.org/10.1007/s10778-010-0255-y>
16. Akbarov S.D. Recent investigations on dynamic problems for an elastic body with initial (residual) stresses. *International Applied Mechanics*. 2007. V.43. №12. P.1305-1324. <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0003-8>
17. Гулиев М.С., Сейфулаев А.И., Абдуллаева Д.Н. Исследование распространения упругих волн в составном цилиндре с начальным кручением. *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2018. №5. С.404-413. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-5-404-413>
18. Белянкова Т.И., Калинчук В.В. Свойства преднапряженных изотропных материалов при учете упругих модулей высших порядков. *Наука Юга России*. 2017. №2. С.3-12. <https://doi.org/10.23885/2500-0640-2017-13-2-3-12>
19. Nedin R.D., Dudarev V.V., Vatulyan A.O. Vibrations of inhomogeneous piezoelectric bodies in conditions of residual stress-strain state. *Applied Mathematical Modelling*. 2018. V.63. P.219-242. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.06.038>
20. Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnukhin R.M. Determination of the inhomogeneous preliminary stress-strain state in a piezoelectric disk. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2018. V.59. №3. P.542-550. <https://doi.org/10.1134/S0021894418030197>

21. Dasdemir A. Forced vibrations of pre-stressed sandwich plate-strip with elastic layers and piezoelectric core. *International Applied Mechanics*. 2018. V.54. №4. P.480-493. <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0901-3>
22. Guo X., Wei P. Dispersion relations of elastic waves in one-dimensional piezoelectric/piezomagnetic phononic crystal with initial stresses. *Ultrasonics*. 2016. V.66. P.72-85. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2015.11.008>
23. Pan'kov A.A. Effect of initial stress state on effective properties of piezocomposite. *Mechanics of Composite Materials*. 2022. V.58. №5. P.733-746. <https://doi.org/10.1007/s11029-022-10063-w>
24. Паньков А.А. Коэффициенты электромагнитной связи композита с пьезоактивными фазами. *Физическая мезомеханика*. 2011. Т.14. №2. С.93-99.
25. Шермергор Т.Д. *Теория упругости микронеоднородных сред*. Москва, Наука. 1976. 399 с.

Для цитирования:

Паньков А.А. Электроупругие свойства начально-напряженной пьезокерамики PZT-4 с односторонними туннельными порами. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2023. №6. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.6.4>