

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.6.7>

УДК: 621.396; 521.19

СТОХАСТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В ЦИФРОВОМ ФИЛЬТРЕ НА ОСНОВЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Ю.М. Вешкурцев¹, Д.А. Титов², А.С. Табакова²

¹ Институт радиоэлектроники, сервиса и диагностики
644077, г. Омск, проспект Мира, 57

² Омский государственный технический университет
644050, г. Омск, проспект Мира, 11

Статья поступила в редакцию 9 марта 2023 г.

Аннотация. Рассмотрено явление стохастического резонанса в радиотехнической системе, по структуре аналогичной цифровому фильтру на основе характеристической функции Ляпунова. Раскрыт физический смысл стохастического резонанса и подтверждена гипотеза о его существовании в радиотехнической системе. В процессе моделирования цифрового фильтра установлены эффект и показатели стохастического резонанса при фильтрации аддитивной смеси квазидетерминированного сигнала и «белого» шума. Получено улучшение отношения сигнал/шум на выходе системы в 634 раза по сравнению с отношением сигнал/шум на её входе при фильтрации аддитивной смеси центрированного квазидетерминированного сигнала и «белого» шума. При фильтрации аддитивной смеси нецентрированного квазидетерминированного сигнала и «белого» шума указанный показатель стохастического резонанса ниже и составляет 174 раза. Предложено закрепить явление стохастического резонанса для радиотехнической системы такими новыми определениями как полоса и ширина полосы резонанса. В цифровом модеме со схемой, аналогичной цифровому фильтру на основе

характеристической функции Ляпунова, в полосе резонанса заметно возрастает помехоустойчивость. Целью данной работы является изложение гипотезы с перспективой на будущее, раскрывающей возможности применения нового эффекта в построении радиотехнических систем.

Ключевые слова: стохастический резонанс, характеристическая функция Ляпунова, цифровой фильтр, квазидетерминированный сигнал, помехоустойчивость цифрового фильтра.

Автор для переписки: Титов Дмитрий Анатольевич, dtitov2@yandex.ru

Введение

За двадцать лет до окончания 20 века ученые открыли новый эффект, получивший позже название стохастический резонанс [1]. Правда, известно его определение как стохастическая фильтрация [2] или совсем новое название типа фильтрация в пространстве вероятностей [3]. Новый эффект сразу привлек внимание ученых физиков, математиков, химиков, биологов, социологов, биофизиков, экологов, геофизиков, астрономов и ученых других отраслей науки. Поток публикаций с описанием нового эффекта растет, и актуальность тематики усиливается. Знакомство с новым эффектом в радиотехнике начнем с рассмотрения цифрового фильтра (ЦФ), главного компонента теории фильтрации сигналов. Для этого выберем ЦФ, построенный на основе характеристической функции (х.ф.) Ляпунова и опубликованный в статье [3]. Таким образом, целью данной работы является изучение стохастического резонанса в отдельной радиотехнической системе, например, в ЦФ.

1. Описание нелинейной системы

В работе [3] синтезирована структурная схема системы (рис. 1), реализующей алгоритм цифровой фильтрации с использованием характеристической функции Ляпунова. На данной структурной схеме АЦП – аналого-цифровой преобразователь; ФП1 – функциональный преобразователь первый; СНС – сумматор накапливающий со скользящим

усреднением; Д – делитель на коэффициент R ; ФП2 – функциональный преобразователь второй; БУ – блок управления.

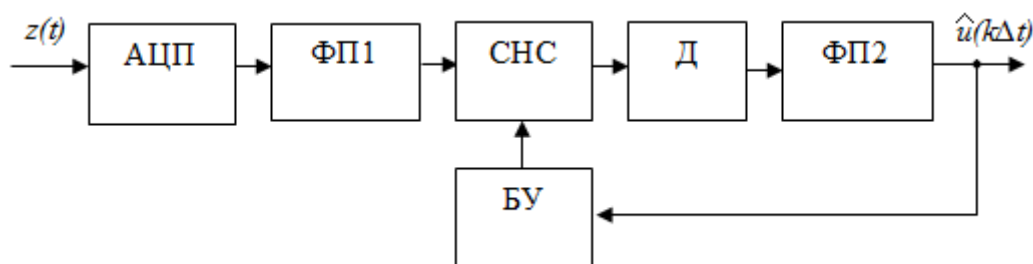


Рис. 1. Структурная схема ЦФ

Помимо стандартных блоков линейного ЦФ в данной структурной схеме содержатся блок деления на константу R и функциональные преобразователи ФП1, ФП2 прямой и обратной тригонометрической функции синус соответственно. При вычислении функции синуса аргумент представляется в радианах.

Пусть аддитивная смесь на входе фильтра представлена суммой

$$z(t) = u(t) + n(t), \quad (1)$$

$$u(t) = e_0 + U_0 \sin(\omega_0 t + \eta), \quad (2)$$

$$u_1(t) = U_0 \sin(\omega_0 t + \eta), \quad (3)$$

которая по отдельности содержит $u(t)$ – нецентрированный сигнал (2) либо $u_1(t)$ – центрированный сигнал (3); $n(t)$ – «белый» шум; t – время. Кроме того, $u(t)$ – нецентрированный квазидетерминированный сигнал с законом распределения арксинус; e_0 – математическое ожидание сигнала (2); U_0 , ω_0 – амплитуда и круговая частота сигнала (постоянные величины); η – начальный угол сдвига фазы сигнала (случайная величина с равномерным законом распределения на интервале $-\pi \dots +\pi$); $\sigma_{\text{ш}}^2$ – интенсивность (энергия) шума. Оценки вероятностных характеристик «белого» шума и квазидетерминированного сигнала (3) измерялись виртуальным прибором XN1.31beta. Отличие значений оценок от теоретических значений вероятностных характеристик не более 15%. Интервал дискретизации аддитивной смеси (1) равен $\Delta t = 2$ мкс, $\omega_0 = 2\pi \cdot 50000$ рад/с и соответствует рекомендациям [4].

В соответствии с работой [3] оценка действительной части х.ф. определена выражением

$$\hat{A}_z(V, t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos[z(k\Delta t) \cdot V], \quad (4)$$

где V – параметр х.ф.; $z(k\Delta t)$ – k -ое дискретное мгновенное значение аддитивной смеси сигнала и шума, взятое в момент времени $t = t_0 + k\Delta t$ при $t_0 = 0$; Δt – интервал дискретизации; N – объем выборки мгновенных значений аддитивной смеси. Аналогично можно определить оценку мнимой части х.ф.

$$\hat{B}_z(V, t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin[z(k\Delta t) \cdot V]. \quad (5)$$

При $N \rightarrow \infty$ оценки (4) и (5) состоятельны, эффективны и не смещены [4]. Выражения (4) и (5) можно использовать при построении приборов для измерения оценок х.ф., либо в составе алгоритмов цифровой фильтрации сигналов [5]. Далее в статье будет использоваться оценка мнимой части х.ф. Структурная схема ЦФ на рис. 1 использует скользящее усреднение, поэтому алгоритм (5) следует переписать в виде

$$\hat{B}_z(V, k\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sin[z((k-l)\Delta t) \cdot V], \quad (6)$$

где l – целое число. В соответствии со структурной схемой на рис. 1 выражение (6) описывает сигнал на выходе делителя D при $R = N$. В условиях, когда в аддитивной смеси (1) шум $n(t) = 0$, рассмотрим как меняется форма сигнала на выходе ЦФ с алгоритмом (6).

На основе структурной схемы на рис. 1 в пакете Matlab разработана имитационная модель ЦФ с алгоритмом (6). В качестве входного сигнала модели использовались дискретные значения смеси (1), определяемые выражениями

$$z(k\Delta t) = u(k\Delta t) + n(k\Delta t), \quad (1a)$$

$$u(k\Delta t) = e_0 + U_0 \sin\left(2\pi \frac{f_0}{f_d} k + \eta\right), \quad (2a)$$

$$u_1(k\Delta t) = U_0 \sin\left(2\pi \frac{f_0}{f_d} k + \eta\right), \quad (3a)$$

где $f_d = 1/\Delta t$ – частота дискретизации; f_0 – частота сигнала. Для экспериментального определения явления стохастического резонанса на вход имитационной модели при $N = 5$ подаются сигналы (1а) с различным сочетанием параметров.

Анализ формы сигналов на выходе ЦФ с алгоритмом функционирования (6) позволяет сказать, что при $U_0 = 0,4$ выходной сигнал фильтра на рис. 2 по форме соответствует входному сигналу. При возрастании амплитуды U_0 до значений $\pi/2$ и более форма выходного сигнала начинает отличаться от формы входного сигнала. На рис. 2 также показана форма выходного сигнала фильтра при действии на его входе сигнала амплитудой $U_0 = 1,6$. Амплитуда выходного сигнала при $U_0 = 1,6$ на рис. 2 ограничена на уровне ± 1 подобно сигналу на выходе двухполупериодного диодного ограничителя. В результате этого у сигнала на выходе фильтра появилось горизонтальное плато. Для того, чтобы зафиксировать нахождение отсчета сигнала на плато, можно ввести пороги $\pm\Pi$

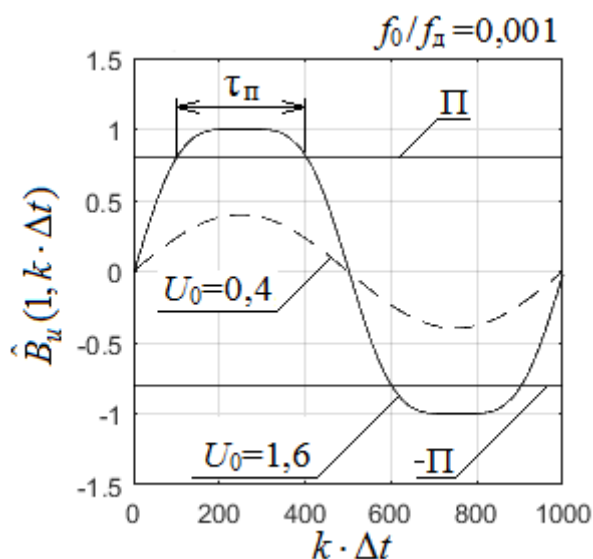


Рис. 2. Формы сигналов на выходе ЦФ

определенного уровня. Длину τ_n горизонтального плато будем вычислять как количество отсчетов, которые превышают порог Π . На рис. 3 показан сигнал на выходе ЦФ (6) с последовательно растущей амплитудой. Кроме того, на рис. 3 видно, что сигнал на выходе нелинейной системы при $U_0 = 2,0$ (рис. 3а) $U_0 = 2,4$ (рис. 3б) содержит не горизонтальное плато, а, по определению физиков [1],

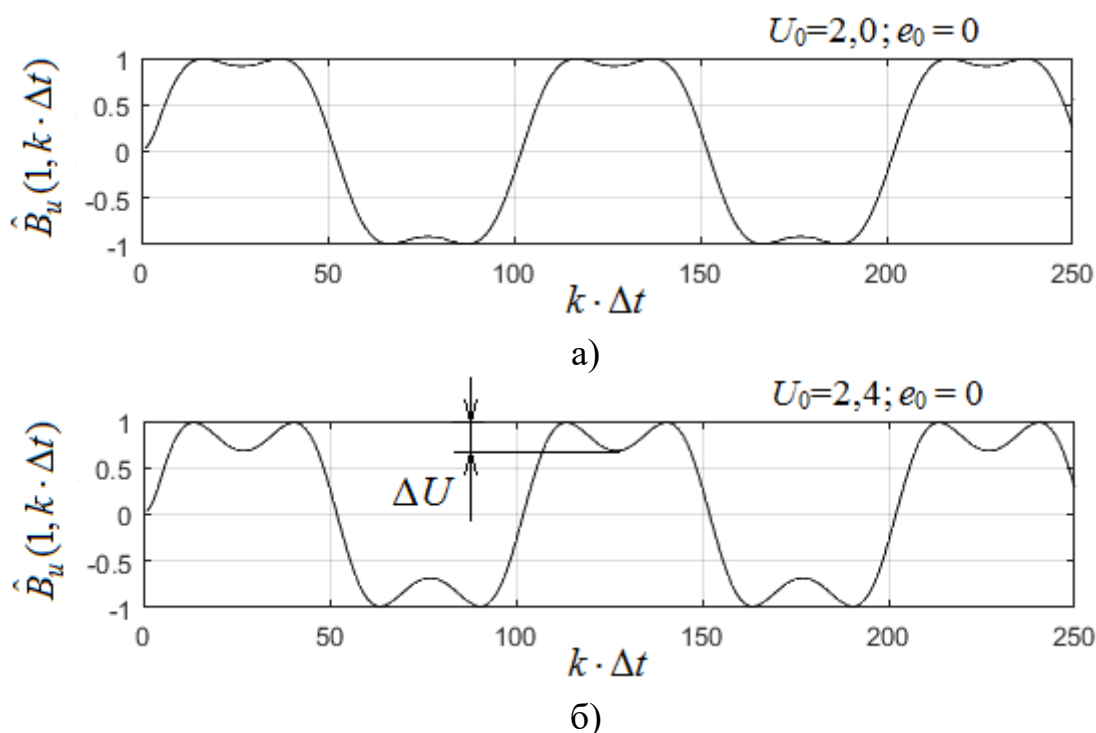


Рис. 3. Форма сигнала на выходе ЦФ при поступлении на его вход централизованного периодического сигнала

параболические потенциальные ямы, которые при увеличении амплитуды сигнала становятся всё глубже. При $e_0 = 0$ глубина потенциальных ям одинакова у положительной и отрицательной полувольты периодического сигнала и равна ΔU – потенциальному барьеру. Такое симметричное расположение и равенство потенциальных ям влияет на гармонизацию физических процессов, вызывающих стохастический резонанс в системе. Результаты моделирования ЦФ подтверждают сказанное.

Форма сигнала на рис. 3 становится другой (рис. 4), если математическое ожидание сигнала $e_0 > 0$ или $0 > e_0$ и равно, например, $e_0 = 0,3$. Теперь глубина потенциальных ям у положительной и отрицательной полувольты периодического сигнала (2а) разная и равна $\Delta D = \Delta U + e_0$ – потенциальному барьеру величиной 0,6, например, у положительной полувольты периодического сигнала (рис. 4а). Когда $e_0 = -0,3$, то потенциальный барьер у отрицательной полувольты периодического сигнала будет $\Delta D_{\text{отп}} = -\Delta U - e_0$ величиной (-0,6), при этом у положительной полувольты периодического сигнала барьер $\Delta D_{\text{шт}} = \Delta U - e_0$ будет не более величины 0,1 (рис. 4б). В расположении и глубине потенциальных ям появилась асимметрия, нарушилась гармония физических

процессов, вызывающих стохастический резонанс в системе. И, как результат этого, стали возможны потери явления стохастического резонанса.

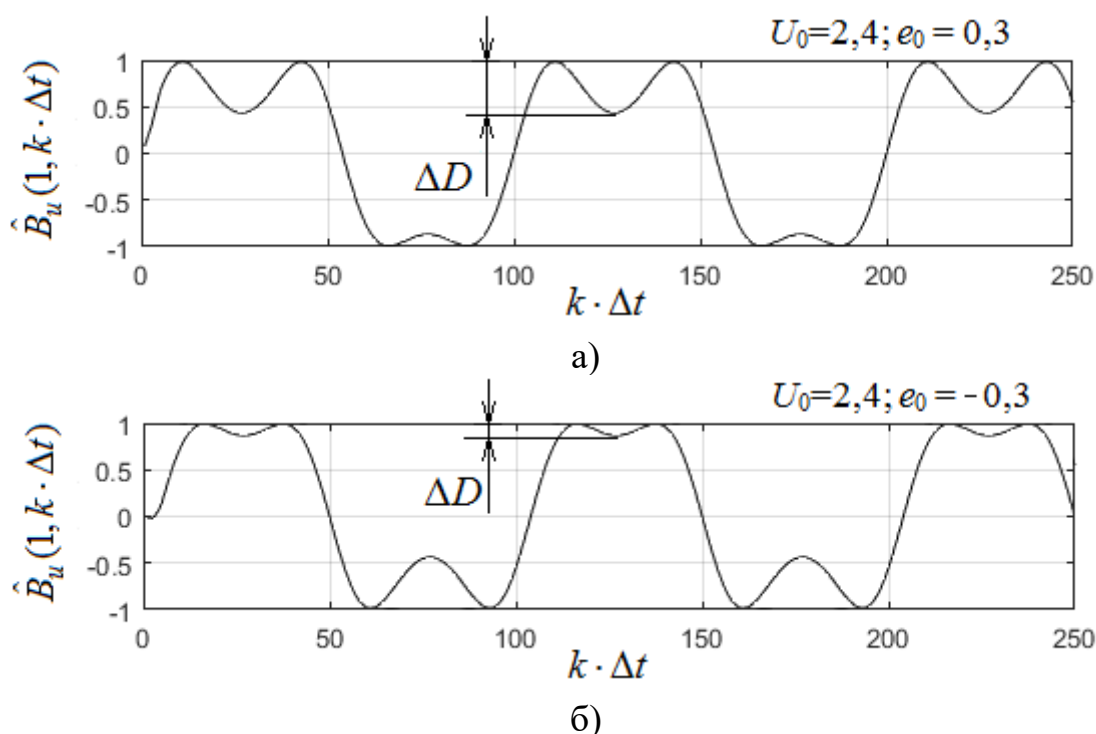
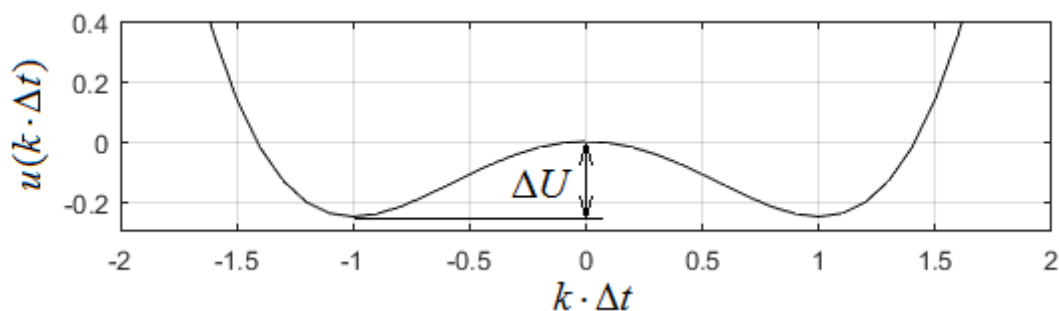


Рис. 4. Форма сигнала на выходе ЦФ при поступлении на его вход нецентрированного периодического сигнала

В силу дискретности строения материи потенциальные ямы создают барьер величиной ΔU или ΔD движению броуновской частицы по траектории на рис. 3, 4. Преодоление частицей потенциальных ям включает в себе физический смысл стохастического резонанса. Подробное описание движения частицы по траектории с наличием потенциальных ям и барьеров приведено в работе [6]. Применительно к рис. 3 изобразим отдельно на рис. 5 траекторию с наличием симметричных потенциальных ям у отрицательной полуволны сигнала и запишем уравнение потенциала [6]

$$u(k\Delta t) = \frac{1}{4}b(k\Delta t)^4 - \frac{1}{2}a(k\Delta t)^2, \quad (7)$$

где $u(k\Delta t)$ – симметричный бистабильный потенциал; $\Delta U = a/(4b)$ – потенциальный барьер; a, b – коэффициенты.

Рис. 5. Симметричный потенциал при $a = 1$, $b = 1$

2. Физический смысл стохастического резонанса

Используя пояснения ученых [1], раскроем физический смысл стохастического резонанса в ЦФ. Глубина потенциальной ямы представляет собой некоторый барьер величиной ΔU движению броуновской частицы по нелинейной траектории, показанной на рис. 3, 4. В условиях действия слабого периодического возмущения $u(t)$ движение частицы совершается с частотой Крамерса [1], в которую входит интенсивность (энергия) шума. Облегчим условия движения частицы путем подачи на вход системы аддитивной смеси периодического сигнала и «белого» шума, интенсивность которого будем изменять. Вероятность преодоления частицей потенциальной ямы в соответствии с нижеследующим выражением, по определению [1], зависит от интенсивности шума

$$v_K = [L(\Delta U) \cdot D]^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\Delta U}{\sigma_{\text{ш}}^2}\right), \quad (8)$$

поскольку она изменяет частоту Крамерса. Здесь v_K – частота Крамерса; D – координата минимума потенциала (потенциальной ямы); $L(\Delta U)$ – функция, зависящая от траектории движения частицы. Можно подобрать такую оптимальную интенсивность шума, при которой вероятность преодоления частицей потенциальной ямы становится больше нуля и устремляется к единице вероятность появления мгновенных значений сигнала, а скорость движения частицы по траектории приближается к частоте периодического сигнала и даже может сравняться с ней. В момент равенства частоты Крамерса и частоты периодического сигнала наступает стохастический резонанс, при котором

энергия слабого периодического сигнала растет за счет истока энергии шума. При этом отношение сигнал/шум увеличивается. Запомним на будущее, стохастический резонанс наступает при слабом сигнале, т.е. при малом отношении сигнал/шум на входе системы. Это подтверждает математическое моделирование, результаты которого будут представлены ниже.

Чуть подробнее скажем о вероятности преодоления частицей потенциальной ямы. Эта вероятность зависит от величины потенциального барьера и будет рассчитана чуть позже. Таким образом, стохастический резонанс можно контролировать по наличию у системы следующих показателей:

- коэффициента усиления энергии периодического сигнала;
- увеличения отношения сигнал/шум на выходе системы;
- вероятности времён пребывания частицы в потенциальной яме.

По заключению авторов обзора [1, С. 10] «... как качественные, так и количественные характеристики стохастического резонанса будут во многом определяться свойствами конкретных нелинейных систем». Отсюда следует, что в нелинейных радиотехнических системах стохастический резонанс возможен, его предстоит выявлять и изучать.

3. Доказательство явления стохастического резонанса элементами теории вероятностей

Доказательство явления стохастического резонанса проведем с использованием элементов теории вероятностей, в частности путем определения значений вероятности и событий, которые представляют собой полученные в ходе эксперимента дискретные мгновенные значения сигнала на горизонтальном плато длиной $\tau_{\text{п}}$ (рис. 2). Заметим, горизонтальное плато на рис. 2 предшествует возникновению потенциальной ямы, полученной при амплитуде периодического сигнала $U_0 = 2,0$ и показанной на рис. 3а. Кроме того, на рис. 2 указаны пороги П, которые также участвуют в эксперименте. При построении всех зависимостей диапазон значений $\tau_{\text{п}}$ разбивался на 8 равных отрезков или «коридоров». Ширина одного отрезка равна $16/8 = 2$. В эксперименте подсчитывалось количество

периодов ν сигнала, мгновенные значения которого превысили порог Π и попали в любой «коридор» на горизонтальном плато на рис. 2. Отдельно подсчитывались периоды сигнала, мгновенные значения которых не превысили порог Π . Всего обработано 100 периодов сигнала, за каждый период сигнала рассмотрено 1000 мгновенных значений.

Эксперимент начинался с исследования воздействия на ЦФ слабого периодического сигнала амплитудой $U_0 = 0,6$. Установлено, что при воздействии такого сигнала выходной сигнал ЦФ с алгоритмом функционирования (6) не превышает порог значением $\Pi = 0,8$. Аналогично исследовано воздействие шума с $\sigma_{ш} = 0,574$. Превышений порогового значения $\Pi = 0,8$ выходным сигналом ЦФ с алгоритмом (6) также не зафиксировано. Слабый регулярный сигнал, также как и слабое шумовое воздействие в отдельности не могут вызвать преодоления порога Π выходным сигналом ЦФ.

Исследования ЦФ продолжены с аддитивной смесью (1а), в которой содержится сигнал (3а) с амплитудой $U_0 = 0,6$ и «белый» шум с $\sigma_{ш} = 0,574$. Полученные результаты представлены на рис. 6, где количество периодов $\nu = 10$ не превысили порог (рис. 6а) и количество периодов $\nu = 90$ превысили порог (рис. 6б). Рассчитаем вероятности. Вероятность $P_{1\Pi} = 10/100 = 0,1$, с которой дискретные мгновенные значения сигнала не превышали порог. Вероятность $P_{1\Pi} = 90/100 = 0,9$, с которой дискретные мгновенные значения сигнала превышали порог. По-другому можно сказать, что с вероятностью 0,9 явление стохастического резонанса имело место в нелинейной системе типа ЦФ. Возврат к вероятности $P_{1\Pi} = 0,9$ последует чуть позже.

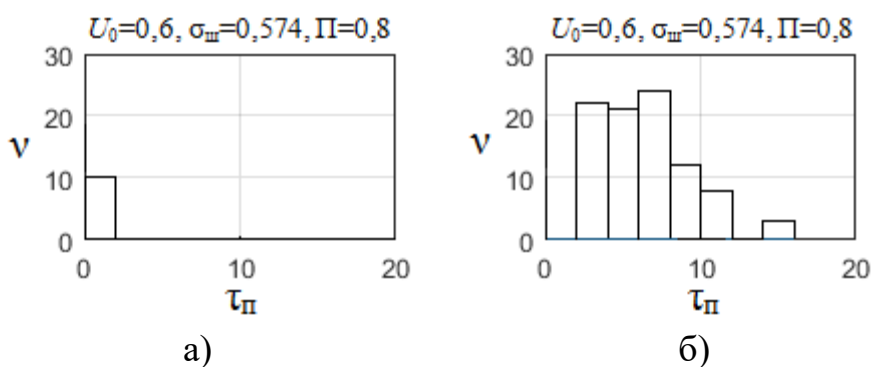


Рис. 6. Гистограмма периодов сигнала

В работе [1, С. 30] указано, что при исследовании явления стохастического резонанса входные и выходные сигналы системы могут быть ассоциированы с передаваемой информацией. Информация об амплитуде и фазе регулярного сигнала может быть закодирована в переходах системы из одного состояния в другое [1]. Для ЦФ (б) переходы между состояниями можно связать с установлением на его выходе значений $\hat{B}_z(V, k\Delta t) > \Pi$ либо $\hat{B}_z(V, k\Delta t) < -\Pi$ (см. рис. 2). Рассмотрим превышения порога Π , т.е. случай, когда $\hat{B}_z(V, k\Delta t) > \Pi$, и будем их фиксировать с помощью порогового устройства, работающего в соответствии с выражением

$$c(k\Delta t) = \begin{cases} 1, & \hat{B}_z(V, k\Delta t) > \Pi \\ 0, & \hat{B}_z(V, k\Delta t) \leq \Pi \end{cases}$$

Форма сигнала на выходе ЦФ с алгоритмом (б) при воздействии смеси (1а) с параметрами $U_0 = 0,6$, $\sigma_{ш} = 0,574$ показана на рис. 7а. Сигнал на выходе устройства, детектирующего пересечение порога $\Pi = 0,8$, показан на рис. 7б. Входной сигнал показан на рис. 7в.

Проанализировав содержание рис. 7а – 7в, можно сделать вывод о том, что пересечения порога Π происходят регулярно, т.е. при поступлении на вход ЦФ положительной полуволны полезного сигнала. Если амплитуда сигнала остается неизменной, т.е. $U_0 = 0,6$, а интенсивность шума возрастает, то пересечения остаются регулярными пока $\sigma_{ш}$ не достигнет некоторого критического значения.

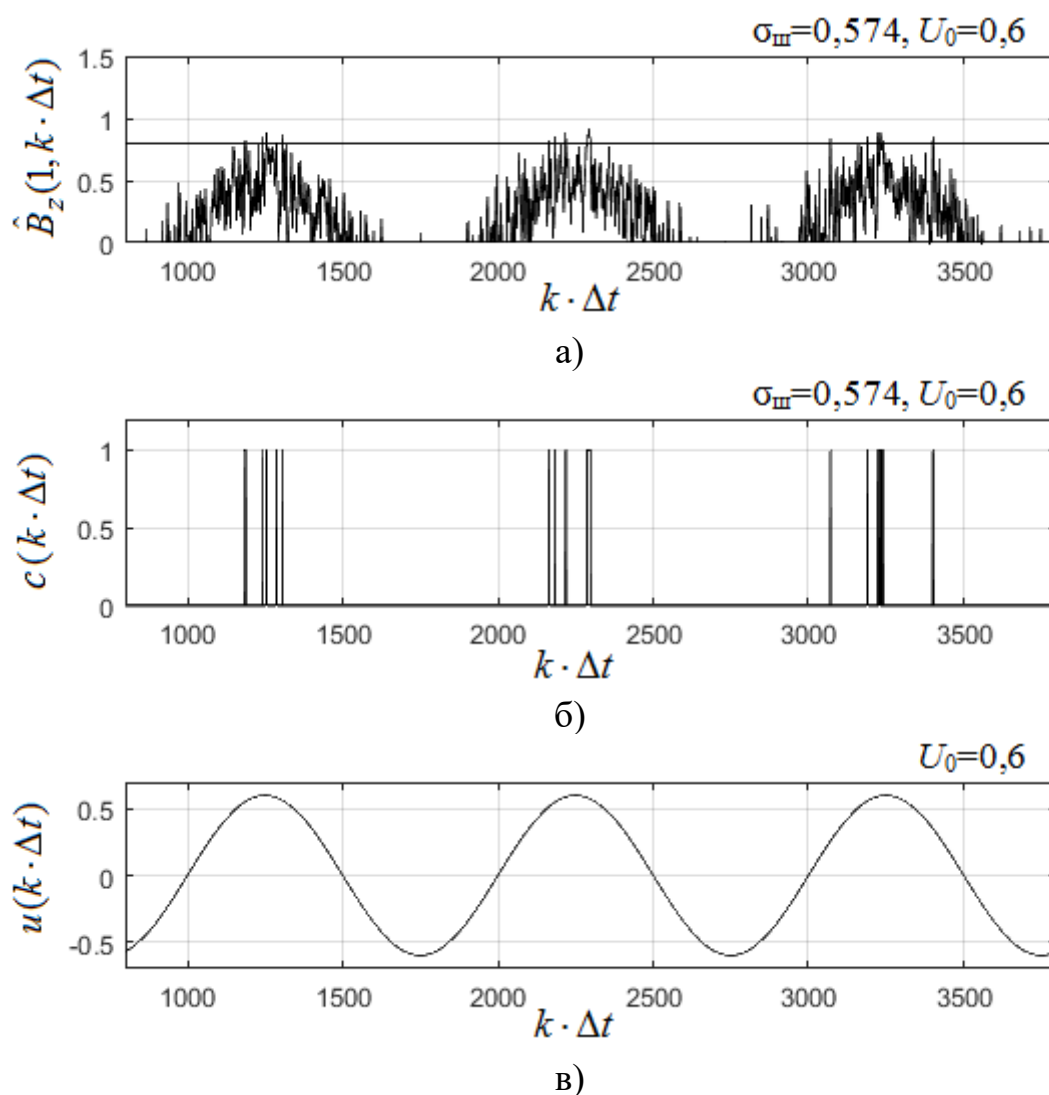


Рис. 7. Разные формы сигналов

При увеличении $\sigma_{ш}$ до критического значения можно видеть, что пересечения порога Π наступают как во время воздействия положительной полувольты регулярного сигнала, так и во время воздействия его отрицательной полувольты. Например, на рис. 8а, 8б показано, что при $\sigma_{ш} = 1,05$ имеется пересечение порога $\Pi = 0,8$ во время воздействия на входе ЦФ мгновенных значений отрицательной полувольты полезного сигнала. При таких условиях регулярность пересечения порога выходным сигналом ЦФ начинает нарушаться. При этом пересечения порога Π во время воздействия отрицательной полувольты полезного сигнала происходят редко.

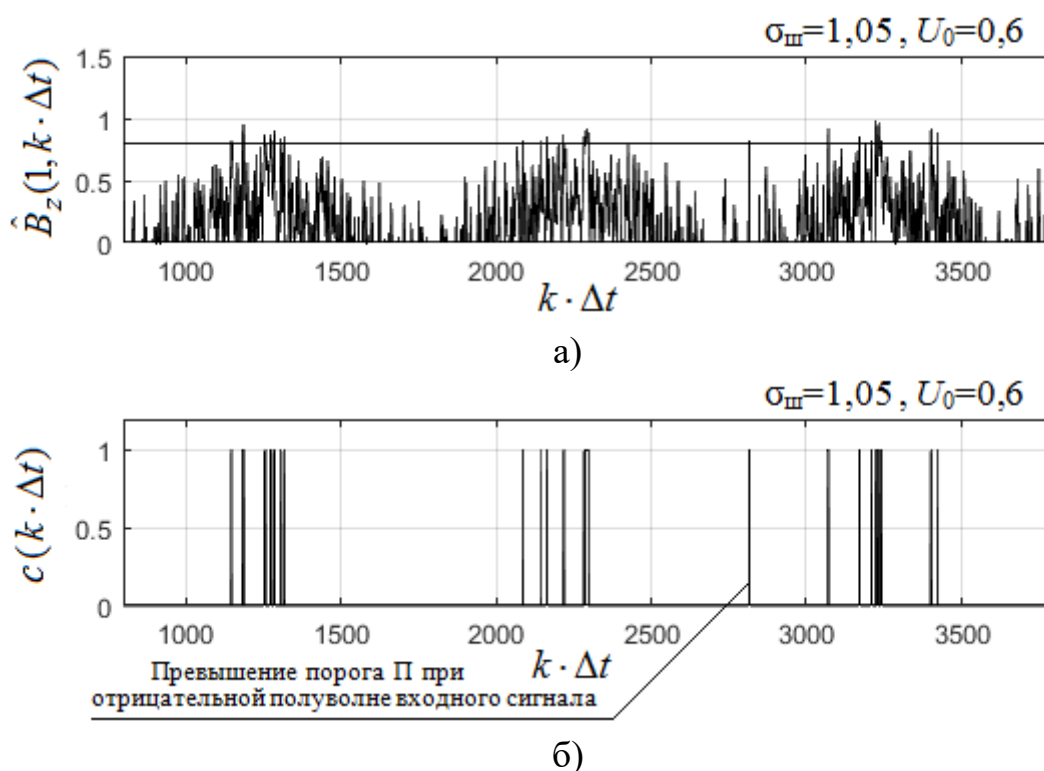
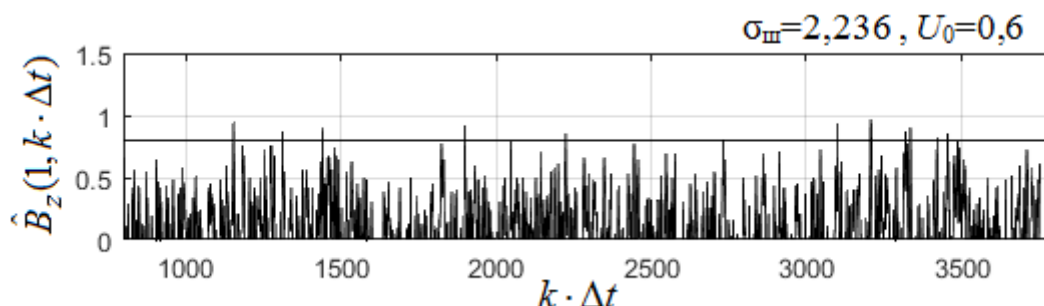


Рис. 8. Формы сигналов

При дальнейшем увеличении $\sigma_{ш}$ пересечения порога становятся беспорядочными и уже не соответствуют приходу на вход положительной полуволны регулярного сигнала. Примеры пересечений порога $\Pi = 0,8$ при $U_0 = 0,6$ и $\sigma_{ш} = 2,236$ показаны на рис. 9а, 9б. Таким образом, при больших значениях $\sigma_{ш}$ происходит потеря явления стохастического резонанса, т.к. под воздействием шума большой интенсивности ЦФ с алгоритмом (6) начинает часто слишком часто переходить из одного состояния в другое.

Расчеты показывают, что в ЦФ возникает эффект стохастического резонанса за счет истока энергии шума, содержащегося в аддитивной смеси (1а). В противном случае событий появления слабого периодического сигнала на горизонтальном плато на рис. 2 не могло быть. При стохастическом резонансе дополнительная энергия в большом количестве истекает через поле от шума.



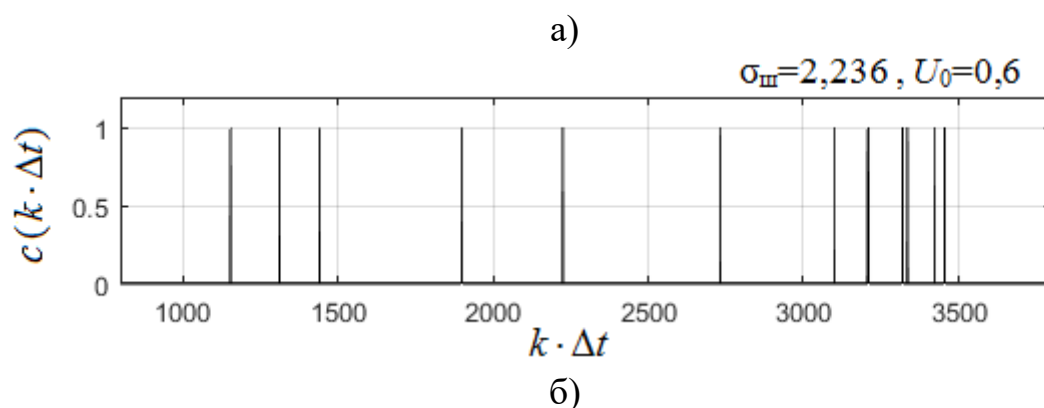


Рис. 9. Формы сигналов

4. Подтверждение гипотезы о стохастическом резонансе в цифровом фильтре на основе характеристической функции Ляпунова

Модель ЦФ на основе характеристической функции Ляпунова построена в полном соответствии со структурной схемой на рис. 1 и испытана. Методика эксперимента опубликована в работе [3] с гипотезой о присутствии в полученных результатах явления резонанса. Пришло время гипотезу подтвердить. Повторим из работы [3] методику моделирования ЦФ и покажем новые результаты эксперимента.

Методика эксперимента включала моделирование слагаемых аддитивной смеси (1а), а именно квазидетерминированного сигнала (2а, 3а), а также $n(t)$ – гауссова «белого» шума с математическим ожиданием равным нулю. Х.ф. шума равна $\Theta(V) = \exp(-V^2\sigma_{ш}^2/2)$. Сигналы (2а, 3а) генерировались с амплитудами значением от 0,1 до 0,9 с шагом 0,1, при этом $e_0 = 0,3$. Частота сигналов $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 10^5$ рад/с, частота дискретизации $4 \cdot 10^5$ Гц. Случайный процесс типа «белый» шум генерировался датчиком шума, при этом среднее квадратичное отклонение шума изменялось дискретно от 0,1 до 0,9 с шагом 0,1.

При проведении эксперимента и на рис. 10 использованы следующие обозначения: $h_{вх}^2 = (\sigma_c^2)_{вх} / (\sigma_{ш}^2)_{вх}$ – отношение по мощности сигнал/шум на входе ЦФ; $h_{вых}^2 = (\sigma_c^2)_{вых} / (\sigma_{ш}^2)_{вых}$ – отношение по мощности сигнал/шум на выходе ЦФ; $h_{вх}$, $h_{вых}$, – отношение по напряжению сигнал/шум на входе и выходе ЦФ

соответственно; $m_2 = [U_0^2/2] + e_0^2$ – энергия нецентрированного сигнала (2); $\sigma_c^2 = U_0^2/2$ – энергия центрированного сигнала (3). В модели ЦФ использовалось значение $N = 5$.

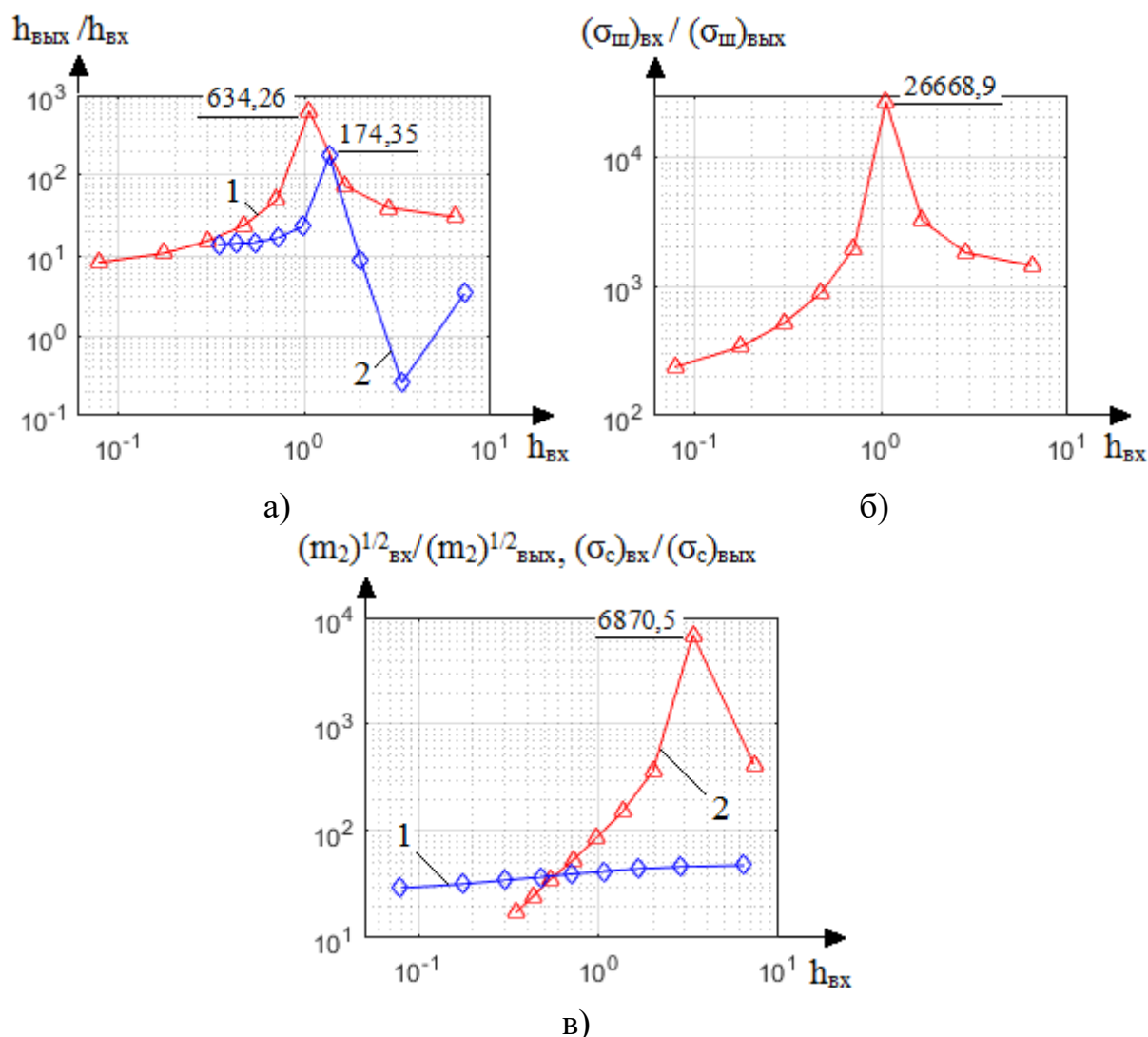


Рис. 10. Результаты моделирования ЦФ: 1 – центрированный и 2 – нецентрированный квазидетерминированный сигнал

В начале рассмотрим значения отношения сигнал/шум на входе и выходе ЦФ. На рис. 10а приведена зависимость вида h_{BYX}/h_{BX} от отношения h_{BX} . При стохастическом резонансе отношение $(h_{BYX}/h_{BX}) = 634,26$ для сигнала (3а) и отношение $(h_{BYX}/h_{BX}) = 174,35$ для сигнала (2а), т.е. при отношении на входе ЦФ $h_{BX} = 1,06$ отношение на выходе ЦФ увеличилось в 634 раза или только в 174 раза. Для обоих сигналов стохастический резонанс появляется практически при одной и той же абсциссе, а точнее для $h_{BX} = 1,06$ у сигнала (3а) и для $h_{BX} = 1,36$ для сигнала (2а). Как и ожидалось ранее, вид кривых 1, 2 разный. У кривой 2

присутствует как стохастический резонанс, так и анти резонанс, а точнее его отсутствие. Заметим, по словам авторов обзора [1], стохастический резонанс появляется при слабом периодическом сигнале, т.е. при малом отношении сигнал/шум на входе системы. При большом отношении сигнал/шум на входе системы показатель стохастического резонанса проявляется слабее. Например, у кривой 1 на рис. 10а показатель резонанса равен 30,27 при $h_{\text{вх}} = 6,4$, т.е. он в 31 раз меньше числа 634,26. Таким образом, два независимых моделирования разными методами подтвердили явление стохастического резонанса в ЦФ, в котором использована характеристическая функция Ляпунова. Указанная ранее вероятность $P_{\text{ИП}} = 0,9$ вычислена при отношении $h_{\text{вх}} = 0,74$. С помощью кривой 1 на рис. 10а установим показатель резонанса для абсциссы $h_{\text{вх}} = 0,74$ и получим результат $(h_{\text{вых}}/h_{\text{вх}}) = 50$. Такой результат подтверждает явление стохастического резонанса в ЦФ.

Показательно выглядит картина, раскрывающая ответ на вопрос: за счет чего возникает стохастический резонанс в системе? На рис. 10б представлен график изменения «белого» шума или другими словами можно сказать перетекание, расходование, исток энергии шума, например, через электрическое поле. Удивительно, но абсцисса максимального расходования энергии шума на рис. 10б равна $h_{\text{вх}} = 1,06$ и совпадает с абсциссой на рис. 10а, при которой возник стохастический резонанс в системе с симметричными потенциальными ямами (рис. 3б). Подробный анализ этого явления позволяет выделить следующее. Дополнительная энергия в большом количестве истекает через поле от шума в периодический сигнал, уменьшая тем самым интенсивность шума. При этом появляется так называемый «полюс затухания» шума величиной 26668,9. И как результат этого, отношение сигнал/шум при этом увеличивается до больших значений (например, до значения 634,26 на рис. 10а). Следовательно, в результате появления стохастического резонанса в системе энергия шума в большом количестве расходуется на усиление периодического сигнала. Благодаря наличию усиления энергия периодического сигнала остается практически постоянной (кривая 1 на рис. 10в) на протяжении всего

стохастического резонанса. Можно сказать, что центрированный квазидетерминированный сигнал (3) за счет шума является энергосберегающим носителем информации для ЦФ на основе характеристической функции Ляпунова. Напротив, нецентрированный квазидетерминированный сигнал (2) является энергозатратным носителем информации. Это вытекает из следующего ниже анализа.

Картину, аналогичную рис. 10б, можно видеть на рис. 10в. Здесь кривая 2 представляет анти резонанс нецентрированного квазидетерминированного сигнала (2а). Абсцисса антирезонанса равна $h_{\text{вх}} = 3,34$ и полностью совпадает с абсциссой кривой 2 на рис. 10а, в которой значение $(h_{\text{ввых}}/h_{\text{вх}}) = 0,26$ для сигнала (2а). Энергия сигнала (2а) настолько израсходована системой, что виден провал до минимума в значении показателя $h_{\text{ввых}}/h_{\text{вх}}$ на рис. 10а. Создается такое мнение, что нецентрированный сигнал (2а) без участия шума способен вызвать стохастический резонанс за счет энергии постоянной составляющей сигнала. Полюс затухания сигнала (2а) равен 6870,5 при абсциссе $h_{\text{вх}} = 3,34$. Далее с увеличением абсциссы до значения $h_{\text{вх}} = 7,3$ показатель увеличивается до числа 3,45. Значит, хотя и слабый, но всё же стохастический резонанс присутствует. Однако в интервале $3 \leq h_{\text{вх}} \leq 5$ у кривой 2 на рис. 10а стохастический резонанс отсутствует.

Существование стохастического резонанса в ЦФ на основе характеристической функции Ляпунова подтвердилось. Главные показатели о его появлении в ЦФ полностью совпадают с известными характеристиками [1].

Помимо физического содержания стохастический резонанс имеет иной смысл. Для радиотехники это новый эффект или новое явление, которое следует изучать и применять при решении задач. Относительно ЦФ на основе характеристической функции Ляпунова можно констатировать, что в нём присутствуют два новых элемента. Первым элементом является характеристическая функция Ляпунова со своими свойствами, в том числе способностью хорошо фильтровать шум [7, С. 25]. Вторым элементом служит стохастический резонанс и его свойства по повышению отношения сигнал/шум

на выходе ЦФ. Наверное, между свойствами элементов возможен компромисс, который предстоит ещё определить. Помимо ЦФ в радиотехнике известен [8] демодулятор сигналов с новой модуляцией, построенный аналогично ЦФ (рис. 1) на основе характеристической функции Ляпунова. Явление стохастического резонанса в демодуляторе повышает на 10 дБ помехоустойчивость модема на уровне вероятности ошибок $1 \cdot 10^{-45}$ [9].

Для расширения границ науки введем новые определения. Полоса стохастического резонанса – интервал между минимальным и максимальным отношением сигнал/шум на входе системы, при котором эффект стохастического резонанса имеет место. Ширина полосы стохастического резонанса в децибелах – разность между максимальным значением в децибелах отношения сигнал/шум и минимальным значением в децибелах отношения сигнал/шум на входе системы, в которой эффект стохастического резонанса наблюдается. Для накопления компетенций применения на практике новых определений запишем их значения для ЦФ на основе характеристической функции Ляпунова, используя кривую 1 на рис. 10а. Полоса стохастического резонанса в ЦФ составляет интервал (0,07 – 10) отношений сигнал/шум. Ширина полосы стохастического резонанса в ЦФ будет 56,9 дБ.

Заключение

В результате проведенных исследований и доказательств можно сделать следующие выводы:

- 1) В радиотехнической системе, построенной по структуре ЦФ на основе характеристической функции Ляпунова, при нарушении на входе системы условия $|U_0| \leq \pi/2$ появляются, по определению физиков, глубокие так называемые параболические потенциальные ямы;
- 2) При слабом периодическом сигнале на входе системы преодоление потенциальных ям броуновской частицей зависит от интенсивности шума, увеличение энергии которого вызывает явление стохастического резонанса и улучшение характеристик системы;

- 3) Эффект стохастического резонанса в системе имеет много признаков и характеризуется усилением периодического сигнала с помощью истока энергии шума в сигнал, после чего значительно возрастает отношение сигнал/шум на выходе системы по сравнению с отношением на её входе;
- 4) Моделирование ЦФ на основе характеристической функции Ляпунова выявило зависимость такого важного показателя стохастического резонанса как отношение сигнал/шум на выходе ЦФ от структуры аддитивной смеси. При фильтрации смеси центрированного квазидетерминированного сигнала и «белого» шума показатель резонанса $h_{\text{ВЫХ}}/h_{\text{ВХ}} = 634$, в то время как при фильтрации смеси нецентрированного квазидетерминированного сигнала и шума он равен $h_{\text{ВЫХ}}/h_{\text{ВХ}} = 174$;
- 5) Эффект стохастического резонанса можно характеризовать такими новыми определениями как полоса резонанса и ширина полосы резонанса в децибелах;
- 6) Радиомодем, построенный аналогично ЦФ на основе характеристической функции Ляпунова, при явлении стохастического резонанса в демодуляторе имеет помехоустойчивость выше на 10 дБ при вероятности ошибок $1 \cdot 10^{-45}$.

Литература

1. Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка. *Успехи физических наук*. 1999. Т.169. №1. С.7-38.
2. Климонтович Ю.Л. Что такое стохастическая фильтрация и стохастический резонанс? *Успехи физических наук*. 1999. Т.169. №1. С.39-47.
<https://doi.org/10.3367/UFNr.0169.199901d.0039>

3. Вешкурцев Ю.М., Вешкурцев Н.Д., Титов Д.А. Фильтрация в пространстве вероятностей аддитивной смеси нецентрированного квазидетерминированного сигнала и шума. *Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика*. 2018. №3. С.18-23.
4. Вешкурцев Ю.М., Титов Д.А. Определение частоты дискретизации случайного процесса. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2022. №6. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.6.2>
5. Вешкурцев Ю.М. *Прикладной анализ характеристической функции случайных процессов*. Москва, Радио и связь. 2003. 204 с.
6. Иманбаева А.К., Токмырзаева Ж.Б. Отношение сигнал-шум в бистабильных стохастических резонаторах. *Вестник КазНУ. Серия: физическая*. 2017. №2(61). С.100-107.
7. Вешкурцев Ю.М. *Основы теории построения модемов нового поколения*. Новосибирск, ООО «СибАК». 2020. 184 с.
8. Патент РФ № 2626332. Вешкурцев Ю.М., Вешкурцев Н.Д., Алгазин Е.И. *Способ демодуляции сигнала*: Дата заявки: 27.07.2016. Дата публикации: 26.07.2017. 5 с. URL: https://i.moscow/patents/ru2626332c1_20170726
9. Вешкурцев Ю.М. Обобщение теории нового метода модуляции и демодуляции случайного сигнала. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2022. №12. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.12.8>

Для цитирования:

Вешкурцев Ю.М., Титов Д.А., Табакова А.С. Стохастический резонанс в цифровом фильтре на основе характеристической функции Ляпунова. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2023. №6. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.6.7>