

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.6.1>

УДК: 621.391

МИНИМИЗАЦИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБКИ ПРИ ВЗВЕШЕННОМ ПРИЕМЕ СООБЩЕНИЯ С ДВУХПОЗИЦИОННОЙ ИМПУЛЬСНО-КОВОЙ МАНИПУЛЯЦИЕЙ В УСЛОВИЯХ МЕЖСИМВОЛЬНОЙ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ

А.Н. Дегтярев, С.А. Конева

Севастопольский государственный университет
299053, Россия, г. Севастополь, ул. Университетская, 33

Статья поступила в редакцию 5 марта 2024 г.

Аннотация. С целью повышения помехоустойчивости систем передачи информации предлагается снизить уровень межсимвольной интерференции, для чего осуществляется ортогонализация канальных символов. Ортогонализация производится путем определения веса ортогональности. Приведен расчет E -критерия оценки уровня межсимвольной интерференции для классической и предлагаемой систем передачи информации методом импульсно-кодовой манипуляции. Для обеих систем предполагалось, что в качестве формирующего фильтра используются нормированные фильтры нижних частот Баттерворта. Показано, что при отношениях сигнал/шум, превышающих некоторое критическое значение, взвешенная обработка сигнала обеспечивает меньшее значение вероятности ошибки бита, чем классический способ обработки. Приведено общее аналитическое выражение веса ортогональности канальных символов, обеспечивающее минимум вероятности ошибки бита

Ключевые слова: межсимвольная интерференция, вес ортогональности, каналные символы, вероятность ошибки, E-критерий.

Автор для переписки: Дегтярёв Андрей Николаевич, degtyaryov1966@yandex.ru

Введение

Повышение помехоустойчивости систем передачи информации (СПИ) является одной из важных проблем теории и техники связи. В современных СПИ на помехоустойчивость существенно влияет межсимвольная интерференция (МСИ). В работах [1-5] рассмотрены классические методы борьбы с МСИ: использование эквалайзера; нелинейной обработки сигналов, в частности, прием с обратной связью по решению и т.д. Общим недостатком классических методов является то, что нарушение синхронизации приводит к существенному росту МСИ, и, следовательно, к повышению вероятности ошибки при приеме бита сообщения.

Кроме того, при аддитивном белом гауссовском шуме применяются алгоритмы, минимизирующие вероятность ошибки при приеме сигнальной последовательности на основе алгоритма Витерби, вычислительная сложность которого находится в экспоненциальной зависимости от длительности импульсной характеристики канала связи [5, 6, 7].

Все известные методы борьбы с МСИ включают в себя выбор формы сигнала конечной продолжительности и с ограниченным спектром [5]. При этом под шириной спектра понимают частотную полосу, в которой сосредоточено 90% энергии сигнала. Такой подход приводит к необходимости искать компромисс между длительностью сигнала, шириной его спектра и вычислительной сложностью принимающего устройства.

В работе [8] для снижения уровня МСИ предлагается осуществить ортогонализацию интерферирующих и принимаемого каналных символов. Предполагается, что указанный метод ортогонализации позволит одновременно снизить уровень МСИ и межканальных помех и не требует от приемника больших вычислительных возможностей.

При оценке уровня МСИ в [8] использовался D -критерий. В [8] представлены результаты численных расчетов определения веса ортогональности канальных символов. Функции, составляющие вес ортогональности, выбирались произвольно.

Целью настоящей работы является оценка зависимости E -критерия уровня МСИ от тактового интервала и определение веса ортогональности канальных символов, оптимального по критерию минимума вероятности ошибки бита.

Практически все виды полосовых сигналов цифровой модуляции строятся на основе сигналов многопозиционной импульсно-кодовой манипуляции (ИКМ-М). Процесс модуляции рассматривается как процесс переноса спектров низкочастотных импульсов в область несущей частоты. Поэтому метод борьбы с МСИ целесообразно рассматривать на примере сигналов ИКМ.

1. Зависимость E -критерия от тактового интервала для классического случая передачи информации сигналами с модуляцией ИКМ-2

Структурная схема системы передачи методом ИКМ-М показана на рис. 1.

На рис. 1 обозначено: КМК – кодер модуляционного кода; ТС – устройство тактовой синхронизации; РУ – решающее устройство; $b(t)$ – первичный сигнал.

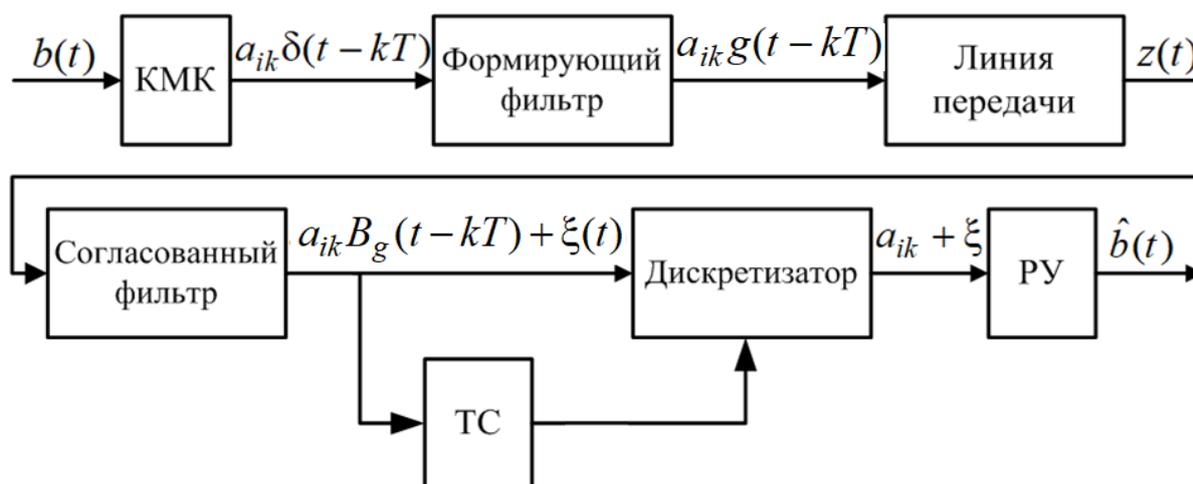


Рис. 1. Структурная схема системы передачи методом ИКМ-М.

На k -м тактовом интервале вырабатывается число a_{ik} , которое определяет уровень бесконечно короткого импульса $\delta(t)$. Канальный символ $s_{ik}(t)$, вырабатываемый формирующим фильтром на k -м тактовом интервале, равен:

$$s_{ik}(t) = a_{ik} g_k(t) = a_{ik} g(t - kT),$$

где T – тактовый интервал.

На выходе линии передачи с аддитивным белым гауссовским шумом $n(t)$, которая не изменяет форму сигнала, имеет место аддитивная смесь сигнала и помехи $z(t) = s_{ik}(t) + n(t)$.

На выходе согласованного с сигналом $s_{ik}(t)$ фильтра присутствует фильтрованный канальный символ $a_{ik} B_{gk}(t) = a_{ik} B_g(t - kT)$ и фильтрованная помеха $\xi(t)$. При $k = 0$ функция $B_g(t)$ имеет вид корреляционной функции импульсной характеристики формирующего фильтра. После окончания k -ого тактового интервала дискретизатор берет отсчет выходного сигнала согласованного фильтра, который является оценкой $\hat{a}_{ik} = a_{ik} + \xi$, где $\xi = \xi(kT)$ – значение помехи $\xi(t)$ в момент взятия отсчета. РУ выносит решение о переданном числе a_{ik} . Уровень МСИ оценивается E -критерием:

$$E = \frac{1}{B_g(0)} \sqrt{\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} B_g^2(nT)}.$$

При ИКМ-2 вероятность ошибки бита на выходе демодулятора при наличии МСИ определяется как:

$$p_{\bar{o}} = Q \left(\frac{\sqrt{2} h_{\bar{o}}}{\sqrt{1 + 2 h_{\bar{o}}^2 E^2}} \right), \quad (1)$$

где $h_{\delta} = \sqrt{\frac{E_{\delta}}{N_0}}$; N_0 – спектральная плотность мощности белого гауссовского

шума; E_{δ} – энергия бита; $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – интеграл ошибки.

Проведем расчет E -критерия для формирующего фильтра в виде нормированного фильтра нижних частот Баттерворта (НФНЧБ) 2-го порядка. Импульсная характеристика указанного фильтра равна:

$$g(t) = 1(t) \sqrt{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t \approx 1(t) 1,414 e^{-0,7071t} \sin 0,7071t.$$

Корреляционная функция этой импульсной характеристики запишется как:

$$B_g(\tau) = 0,3535 e^{-0,7071|\tau|} \cos(0,7071|\tau|) + 0,3535 e^{-0,7071|\tau|} \sin(0,7071|\tau|),$$

$$B_g(0) = 0,3535.$$

E -критерий для данного случая формирующего фильтра имеет вид:

$$E = \frac{\sqrt{2}}{0,3535} \sqrt{\frac{0,5e^{-1,414T}}{1 - e^{-1,414T}} + \frac{0,5e^{-1,414T} \sin(1,414T)}{1 - 2e^{-1,414T} \cos(1,414T) + e^{-2,828T}}}.$$

График зависимости E -критерия от длительности тактового интервала для рассмотренного случая показан на рис. 2 (кривая 3).

Аналогично предыдущему расчету определим E -критерий для формирующего фильтра в виде НФНЧБ 4-го порядка (рис.2, кривая 4).

Проведем расчет E -критерия для формирующего фильтра, который представлен идеальным нормированным фильтром нижних частот (ФНЧ). Импульсная характеристика указанного фильтра равна:

$$g(t) = \frac{\sin(t)}{\pi t}.$$

Корреляционная функция импульсной характеристики идеального нормированного ФНЧ запишется как:

$$B_g(\tau) = \frac{\sin(\tau)}{\pi\tau}.$$

$$B_g(0) = \frac{1}{\pi}.$$

E -критерий для данного случая определяется как:

$$E = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot \frac{\pi^2 - 3\text{Li}_2(e^{2jT}) - 3\text{Li}_2(e^{-2jT})}{T^2}},$$

где $\text{Li}_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ – дилогарифм.

График зависимости E -критерия от длительности тактового интервала для рассмотренного случая показан на рис. 2 (кривая 5).

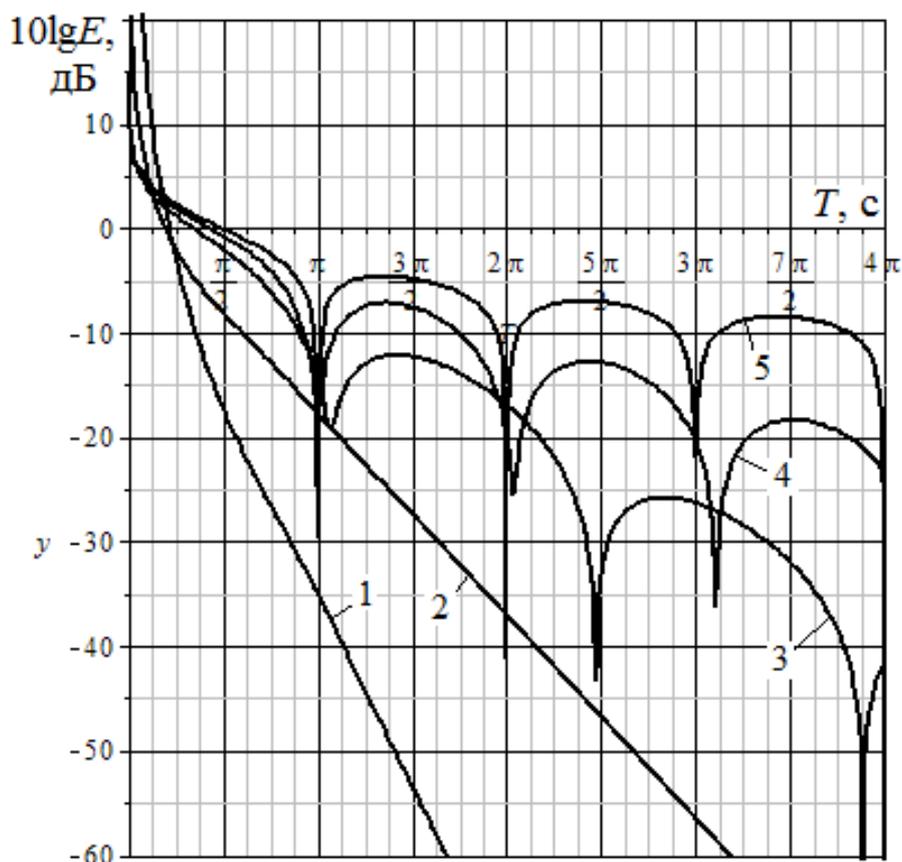


Рис. 2. Графики зависимости E -критериев от длительности тактового интервала.

В случае использования в качестве формирующего фильтра идеального нормированного ФНЧ уровень E -критерия равен нулю, когда величина тактового интервала строго кратна π . Это объясняется тем, что корреляционная функция, импульсной характеристики идеального нормированного ФНЧ удовлетворяет условию отсечности, если отсчеты этой корреляционной функции берутся в моменты времени, кратные π (т.е. $\tau = \pi n$, $n = \dots \pm 2, \pm 1, 0$). Если в качестве формирующих фильтров используются неидеальные НФНЧБ, то минимумы E -критериев возникают, когда величина тактового интервала примерно кратна π .

Так, если формирующий фильтр выполнен в виде НФНЧБ 2-го порядка, то минимум E -критерия достигается при величине тактового интервала, равном 3,356 с и составляет 0,02475. НФНЧБ 4-го порядка обеспечивает минимум E -критерия 0,01681 при величине тактового интервала 3.141 с.

Это объясняется тем, что корреляционные функции импульсных характеристик реальных фильтров не удовлетворяют условию отсечности. Эти корреляционные функции только с ростом порядка ФНЧ стремятся к корреляционной функции импульсной характеристики идеального фильтра. Однако, как следует из проведенных вычислений, при заданном порядке формирующего фильтра, можно определить величину тактового интервала, при котором обеспечивается минимальное значение E -критерия.

Отклонение величины тактового интервала от значения, определяющего минимум E -критерия, приводит к резкому росту МСИ. Причем, чем больше порядок фильтра, тем выше уровень МСИ. Это связано с тем, что с ростом порядка фильтра увеличивается число полюсов его передаточной функции. Каждый полюс представляет собой комплексную величину, вещественная часть которой определяет затухание. Величина, обратная затуханию, является постоянной времени фильтра. Среди всех полюсов можно выделить полюсы с минимальным затуханием, которым соответствует максимальная постоянная времени. Максимальная постоянная времени определяет длительность импульсной характеристики фильтра. Чем больше длительность импульсной

характеристики фильтра, тем больше уровень МСИ. Так, k -й полюс $p_k = \sigma_k + j\omega_k$ передаточной функции НФНЧБ порядка N задается через затухание $\sigma_k = -\sin \theta_k$ и частоту среза $\omega_k = \cos \theta_k$, причем $\theta_k = \frac{2k-1}{2N}\pi$, $k = 1, 2, \dots, N$. Т.е. с ростом N модуль минимального затухания уменьшается. При отклонении тактового интервала от оптимальной величины уровень МСИ повышается с ростом порядка формирующего фильтра N .

2. Зависимость Е-критерия от величины тактового интервала и порядка формирующего фильтра при приеме сигналов с ортогонализацией канальных символов

Для снижения уровня МСИ при передаче информации методом АИМ-2 будем использовать систему, структурная схема которой показана на рис. 3. В этой системе используется ортогональность канальных символов $s_{ik}(t) = a_{ik}g_k(t) = a_{ik}g(t - kT)$ с весом $\rho_g(t)$. Как следует из [5], число уравнений для определения веса ортогональности равно порядку фильтра.

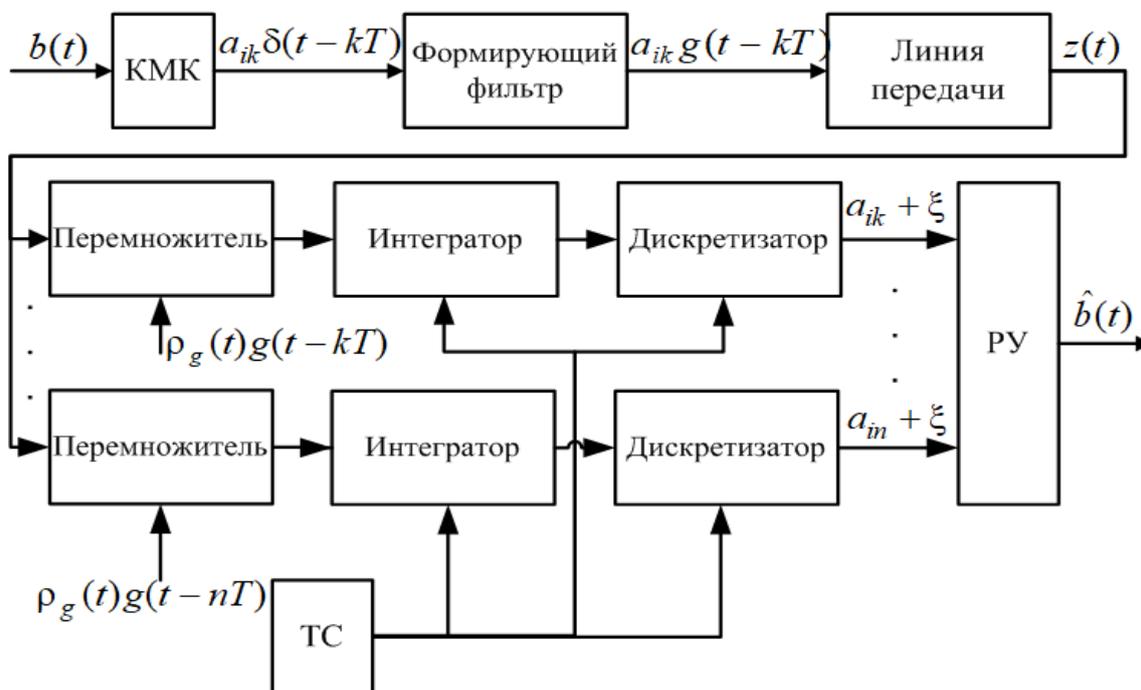


Рис. 3. Структурная схема системы передачи информации методом АИМ-М с ортогонализацией канальных символов

Рассмотрим случай использования в качестве формирующего фильтра НФНЧБ 2-го порядка. В этом случае условие ортогональности с весом $\rho_g(t)$ функций $g(t)$ и $g(t+nT)$, $n=0,1$, определяется выражением:

$$B_{gp}(nT) = \int_0^{\infty} g(t)g(t+nT)\rho_g(t)dt = \begin{cases} 1, n=0, \\ 0, n=1. \end{cases} \quad (2)$$

Запишем выражение импульсной характеристики НФНЧБ 2-го порядка в виде:

$$g(t) = 1(t)A_1e^{\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t),$$

где $A_1 = \sqrt{2}$, $\sigma_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\omega_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Смещенные на интервалы времени, кратные тактовому интервалу импульсные характеристики имеют вид:

$$\begin{aligned} g(t+nT) &= 1(t+nT) \left\{ A_1 e^{\sigma_1(t+nT)} \sin(\omega_1 t + \omega_1 nT) \right\} = \\ &= 1(t+nT) \left\{ A_1 e^{\sigma_1 nT} \cos(\omega_1 nT) e^{\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t) + A_1 e^{\sigma_1 nT} \sin(\omega_1 nT) e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t) \right\}, \\ & \quad n=0,1. \end{aligned}$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части условия (2).

$$\begin{aligned} B_{gp}(nT) &= A_1 e^{\sigma_1 nT} \cos(\omega_1 nT) \int_0^{\infty} A_1 e^{2\sigma_1 t} \sin^2(\omega_1 t) \rho_g(t) dt + \\ &+ A_1 e^{\sigma_1 nT} \sin(\omega_1 nT) \int_0^{\infty} A_1 e^{2\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t) \cos(\omega_1 t) \rho_g(t) dt. \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_0^{\infty} A_1 e^{2\sigma_1 t} \sin^2(\omega_1 t) \rho_g(t) dt, \\ F_2 &= \int_0^{\infty} A_1 e^{2\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t) \cos(\omega_1 t) \rho_g(t) dt. \end{aligned}$$

С учетом принятых обозначений имеем:

$$B_{gp}(nT) = F_1 A_1 e^{\sigma_1 nT} \cos(\omega_1 nT) + F_2 A_1 e^{\sigma_1 nT} \sin(\omega_1 nT). \quad (3)$$

Используя условия (3), составим уравнения для определения неизвестных величин F_1 и F_2 :

$$\begin{cases} B_{gp}(0) = F_1 A_1 = 1, \\ B_{gp}(T) = F_1 A_1 e^{\sigma_1 T} \cos(\omega_1 T) + F_2 A_1 e^{\sigma_1 T} \sin(\omega_1 T) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Решение линейной системы уравнений (4) зависит от величины тактового интервала:

$$F_1 = \frac{1}{A_1}, \quad F_2 = -\frac{\cos(\omega_1 T)}{A_1 \sin(\omega_1 T)}.$$

Запишем E -критерий для рассматриваемого случая в виде:

$$E_p = \frac{1}{B_{gp}(0)} \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{-2} B_{gp}^2(nT) + \sum_{n=2}^{\infty} B_{gp}^2(nT)} = \frac{1}{B_{gp}(0)} \sqrt{2 \sum_{n=2}^{\infty} B_{gp}^2(nT)}. \quad (5)$$

Подставляем в E -критерий (5) выражение (3) и, учитывая, что согласно условию (2) $B_{gp}(0) = 1$, и получаем:

$$\begin{aligned} E_p &= \sqrt{2 \sum_{n=2}^{\infty} B_{gp}^2(nT)} = \sqrt{2 \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ F_1 A_1 e^{\sigma_1 nT} \cos(\omega_1 nT) + F_2 A_1 e^{\sigma_1 nT} \sin(\omega_1 nT) \right\}^2} = \\ &= \left[\left(F_1^2 + F_2^2 \right) A_1^2 \frac{e^{4\sigma_1 T}}{1 - e^{2\sigma_1 T}} + \left(F_1^2 - F_2^2 \right) A_1^2 \frac{e^{4\sigma_1 T} \cos(4\omega_1 T) - e^{6\sigma_1 T} \cos 2\omega_1 T}{1 - 2e^{2\sigma_1 T} \cos 2\omega_1 T + e^{4\sigma_1 T}} + \right. \\ &\quad \left. + 2F_1 F_2 A_1^2 \frac{e^{4\sigma_1 T} \sin(4\omega_1 T) - e^{6\sigma_1 T} \sin 2\omega_1 T}{1 - 2e^{2\sigma_1 T} \cos 2\omega_1 T + e^{4\sigma_1 T}} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

График зависимости E_p от величины тактового интервала показан на рис. 2 (кривая 2).

Аналогично рассчитаем зависимость E -критерия от величины тактового интервала для случая, когда формирующий фильтр выполнен в виде нормированного ФНЧ Баттерворта 4-го порядка (рис. 2, кривая 1).

Итак, увеличение тактового интервала и порядка N формирующего фильтра приводит к снижению уровня МСИ, поскольку соседние с принимаемым каналные символы на МСИ влияние не оказывают.

Отметим также, что если условие ортогональности принимаемого и соседних с ним канальных символов соблюдается, то вид веса ортогональности не влияет на E -критерий оценки МСИ. Таким образом, вид веса можно задавать из условия минимума вероятности ошибки при приеме сигналов.

3. Зависимость вероятности ошибки от E -критерия при приеме сигналов с ИКМ-2 с ортогонализацией канальных символов

Рассмотрим, как ортогонализация принимаемого и соседних канальных символов влияет на вероятность ошибки при приеме сигналов с ИКМ-2.

На входы перемножителей приемника (рис. 3) поступает аддитивная смесь последовательности канальных символов $s_{ik}(t) = a_{ik} g_k(t) = a_{ik} g(t - kT)$ и реализации белого гауссовского шума $n(t)$

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{ik}(t) + n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{ik} g(t - kT) + n(t).$$

Будем считать, что производится поэлементный прием сигнала, и принимается канальный символ $a_{i0} g(t)$ ($k = 0$). В этом случае остальные канальные символы $s_{ik}(t) = a_{ik} g(t - kT)$, $k \neq 0$, являются интерферирующими. Рассмотрим входную смесь на первом входе верхнего перемножителя (рис. 3):

$$z(t) = a_{i0} g(t) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} a_{ik} g(t - kT) + n(t). \quad (6)$$

Произведем нормировку импульсных характеристик $g(t - kT)$ и запишем канальные символы в виде:

$$s_{ik}(t) = a_{ik} g(t - kT) = a_{ik} \frac{g(t - kT)}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt}} = a_{ik} \frac{g(t - kT)}{\sqrt{B_g(0)}}. \quad (7)$$

С учетом (7) выражение (6) запишем как:

$$z(t) = a_{i0} \frac{g(t)}{\sqrt{B_g(0)}} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} a_{ik} \frac{g(t - kT)}{\sqrt{B_g(0)}} + n(t).$$

На второй вход верхнего перемножителя (рис. 3) поступает произведение:

$$g(t)\rho_g(t)/\sqrt{B_g(0)}.$$

На выходе верхнего интегратора в общем случае будем иметь:

$$\begin{aligned} z_{\rho} &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t) g(t)\rho_g(t)/\sqrt{B_g(0)} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{\sqrt{B_g(0)}} \rho_g(t) \left(a_{i0} \frac{g(t)}{\sqrt{B_g(0)}} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} a_{ik} \frac{g(t - kT)}{\sqrt{B_g(0)}} + n(t) \right) dt = \\ &= \frac{a_{i0}}{B_g(0)} \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)\rho_g(t) dt + \frac{1}{B_g(0)} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} a_{ik} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t - kT)\rho_g(t) dt + \\ &\quad + \frac{a_{i0}}{\sqrt{B_g(0)}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)n(t)\rho_g(t) dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Примем обозначение:

$$B_{gp}(kT) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t - kT)\rho_g(t) dt$$

и перепишем (8) в виде:

$$z_p = \frac{a_{i0}}{B_g(0)} B_{gp}(0) + \frac{1}{B_g(0)} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} a_{ik} B_{gp}(kT) + \frac{1}{\sqrt{B_g(0)}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)n(t)\rho_g(t)dt.$$

Оценка полезной составляющей отсчетного значения сигнала на выходе интегратора равна $\hat{a}_{i0} = \frac{a_{i0}}{B_g(0)} B_{gp}(0)$.

Помеховая составляющая отсчетного значения выходного сигнала интегратора равна:

$$\xi = \frac{1}{B_g(0)} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} a_{ik} B_{gp}(kT) + \frac{1}{\sqrt{B_g(0)}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)n(t)\rho_g(t)dt.$$

Математическое ожидание $M\{\xi\}$ помеховой составляющей отсчетного значения выходного сигнала интегратора ξ равно нулю, поскольку математическое ожидание белого гауссовского шума равны нулю.

Определим средний квадрат величины ξ .

$$\begin{aligned} M\{\xi^2\} &= M \left\{ \left[\frac{1}{B_g(0)} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} a_{ik} B_{gp}(kT) + \frac{1}{\sqrt{B_g(0)}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)n(t)\rho_g(t)dt \right]^2 \right\} = \\ &= M \left\{ \frac{1}{B_g^2(0)} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} a_{ik} a_{in} B_{gp}(kT) B_{gp}(nT) + \right. \\ &+ \frac{2}{B_g(0)\sqrt{B_g(0)}} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} a_{ik} B_{gp}(kT) \int_{-\infty}^{\infty} g(t)n(t)\rho_g(t)dt + \\ &\left. + \frac{1}{B_g(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n(t)n(\tau)g(t)g(\tau)\rho_g(t)\rho_g(\tau)dtd\tau \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{B_g^2(0)} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} M\{a_{ik}a_{in}\} B_{gp}(kT) B_{gp}(nT) + \\
 &+ \frac{2}{B_g(0)\sqrt{B_g(0)}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} M\{a_{ik}n(t)\} B_{gp}(kT) g(t) \rho_s(t) dt + \\
 &+ \frac{1}{B_g(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M\{n(t)n(\tau)\} g(t) g(\tau) \rho_g(t) \rho_g(\tau) dt d\tau.
 \end{aligned}$$

Примем во внимание, что математическое ожидание шума равно нулю, коэффициенты a_{ik} являются статистически независимыми, величина $B_n(\tau, t) = M\{n(t)n(\tau)\}$ представляет собой корреляционную функцию шума, и получим:

$$\sigma_{\xi}^2 = M\{\xi^2\} = \frac{1}{B_g^2(0)} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} a_{ik}^2 B_{gp}^2(kT) + \frac{\sigma^2}{B_g(0)} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^2 \rho_g^2(t) dt..$$

Белый гауссовский шум является дельта-коррелированным случайным процессом, поэтому $B_n(\tau, t) = \sigma^2 \delta(\tau - t)$, где σ^2 – дисперсия шума. Тогда дисперсия помеховой составляющей отсчетного значения выходного сигнала интегратора равна:

$$\sigma_{\xi}^2 = M\{\xi^2\} = \frac{1}{B_g^2(0)} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} a_{ik}^2 B_{gp}^2(kT) + \frac{\sigma^2}{B_g(0)} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^2 \rho_g^2(t) dt.$$

В худшем случае $a_{ik} = a_{i0}$, тогда

$$\sigma_{\xi}^2 = a_{i0}^2 \frac{1}{B_g^2(0)} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} B_{gp}^2(kT) + \frac{\sigma^2}{B_g(0)} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^2 \rho_g^2(t) dt.$$

Введем обозначение:

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^2 \rho_g^2(t) dt$$

Отношение сигнал/шум на выходе интегратора составит:

$$h_{\sigma\rho} = \frac{\hat{a}_{i0}}{\sigma_{\xi}} = \frac{a_{i0} B_{gp}(0)}{B_g(0) \sqrt{a_{i0}^2 \frac{1}{B_g^2(0)} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} B_{gp}^2(kT) + H}} = \frac{\frac{a_{i0}}{\sigma}}{\sqrt{\frac{a_{i0}^2}{\sigma^2} \frac{1}{B_{gp}^2(0)} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} B_{gp}^2(kT) + \frac{B_g(0)}{B_{gp}^2(0)} H}}.$$

Учтем, что числитель последнего выражения представляет собой отношение сигнал/шум h_{σ} в отсутствие межсимвольной интерференции, компонента дисперсии, вызванная межсимвольной интерференцией пропорциональна квадрату E -критерия оценки МСИ при приеме сигналов ИКМ-2 с ортогонализацией канальных символов:

$$E_p^2 = \frac{1}{B_{gp}^2(0)} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} B_{gp}^2(kT),$$

а также то, что $h_{\sigma} = \sqrt{\frac{E_{\sigma}}{N_0}}$, $a_{i0} = \sqrt{E_{\sigma}}$, $\sigma = \sqrt{\frac{N_0}{2}}$,

и получим выражение для отношения сигнал/шум:

$$h_{\sigma\rho} = \frac{\sqrt{2}h_{\sigma}}{\sqrt{\sqrt{2}h_{\sigma}^2 E_p^2 + \frac{B_g(0)}{B_{gp}^2(0)} H}}. \tag{9}$$

Вероятность ошибки при приеме одного бита сообщения имеет вид:

$$p_{\sigma p} = Q(h_{\sigma p}) = Q\left(\frac{\sqrt{2}h_{\sigma}}{\sqrt{\sqrt{2}h_{\sigma}^2 E_p^2 + \frac{B_g(0)}{B_{gp}^2(0)} H}}\right). \quad (10)$$

Если условия ортогональности (2) выполняются для $N-1$ интерферирующих канальных символов (N – порядок формирующего фильтра), то $B_{gp}^2(0) = 1$, и получаем:

$$h_{\sigma p} = \frac{\sqrt{2}h_{\sigma}}{\sqrt{2h_{\sigma}^2 E_p^2 + B_g(0)H}},$$

где:

$$E_p^2 = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0, \pm 1, \dots, \pm N-1}}^{\infty} B_{gp}^2(kT).$$

В этом случае вероятность ошибки при приеме одного бита сообщения имеет вид:

$$p_{\sigma p} = Q(h_{\sigma p}) = Q\left(\frac{\sqrt{2}h_{\sigma}}{\sqrt{2h_{\sigma}^2 E_p^2 + B_g(0)H}}\right). \quad (11)$$

Из сравнения выражений (11) и (1) следует вывод о том, что вероятность ошибки (11) в предлагаемой системе существенно зависит от произведения $B_g(0)H$. При бесконечном отношении сигнал/шум:

$$p_{\sigma p} = Q(h_{\sigma p}) = Q\left(\frac{1}{E_p}\right), \quad p_{\sigma} = Q\left(\frac{1}{E}\right).$$

Так как $\frac{1}{E_p} > \frac{1}{E}$, то при некотором значении h_{σ} , превышающем критическое значение $h_{\sigma_{кр}}$ вероятность ошибки в случае приема сигналов

с ортогонализацией канальных символов становится меньше вероятности ошибки для случая, когда прием ведется классической системой. При этом:

$$h_{\text{окр}} = \sqrt{\frac{B_g(0)H - B_{g\rho}^2(0)}{2B_{g\rho}^2(0)(E^2 - E_\rho^2)}}.$$

Поскольку $B_{g\rho}(0) = 1$, а $B_g(0)$ при заданном формирующем фильтре является фиксированной, то для снижения значения $h_{\text{окр}}$ необходимо минимизировать величину H .

4. Вес, оптимальный по критерию минимума величины H

Определим вес, оптимальный по критерию минимума вероятности ошибки, при приеме сигналов с ортогонализацией канальных символов.

Запишем условия ортогональности с весом $\rho_{\text{opt}}(t)$ функций $g(t)$ и $g(t + nT)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$$B_{g\rho}(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t + nT)\rho_{\text{opt}}(t)dt = \begin{cases} 1, n = 0, \\ 0, n \neq 0. \end{cases} \quad (12)$$

Для минимизации величины H при выполнении условий (12) составим функцию Лагранжа:

$$L = g(t)^2 \rho_{\text{opt}}^2(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n g(t)g(t + nT)\rho_{\text{opt}}(t).$$

Найдем производную L по $\rho_{\text{opt}}(t)$ и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dL}{d\rho_{\text{opt}}(t)} = 2g(t)^2 \rho_{\text{opt}}(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n g(t)g(t + nT) = 0.$$

Решаем полученное уравнение относительно $\rho_{gopt}(t)$ и получаем:

$$\rho_{gopt}(t) = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n g(t) g(t+nT)}{2g(t)^2} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n g(t+nT)}{g(t)}.$$

Учтем множитель $1/2$ в множителях Лагранжа λ_n и получим:

$$\rho_{gopt}(t) = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n g(t+nT)}{g(t)}. \quad (13)$$

Подставляем (13) в (12) и имеем:

$$B_{gp}(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) g(t+nT) \frac{\sum_{m=-\infty}^{\infty} \lambda_m g(t+mT)}{g(t)} dt = \begin{cases} 1, n=0, \\ 0, n \neq 0. \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$B_{gp}(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t+nT) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lambda_m g(t+mT) dt = \begin{cases} 1, n=0, \\ 0, n \neq 0. \end{cases} \quad (14)$$

Решение системы уравнений (14) относительно множителей Лагранжа λ_m позволяет полностью определить вес $\rho_{gopt}(t)$.

Минимальное значение величины H равно $H_{\min} = \lambda_0$.

5. Примеры расчета вероятности ошибки при приеме сигналов с ИКМ-2

Рассчитаем вероятность ошибки при приеме сигналов ИКМ-2 с ортогонализацией канальных символов, приняв, что формирующий фильтр представляет собой НФНЧБ 4-го порядка.

Импульсная характеристика этого фильтра имеет вид:

$$g(t) = 1(t) \left\{ A_1 e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 e^{\sigma_2 t} \cos(\omega_2 t + \theta_2) \right\},$$

где $A_1 = -1$, $A_2 = 2,414$, $\sigma_1 = -0,3826$, $\sigma_2 = -0,9238$, $\omega_1 = 0,9238$, $\omega_2 = 0,3826$,
 $\theta_1 = -0,3926$, $\theta_2 = -1,178$.

Будем считать, что тактовый интервал равен π . При таком тактовом интервале E -критерий, определяемый для классического случая достигает минимального значения $E = \min$.

Оптимальный по критерию минимума вероятности ошибки вес будем искать в виде (13). Коэффициенты λ_m определим, решая систему уравнений, полученную для рассматриваемого случая из условий (14),

$$B_{gp}(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t+nT) \sum_{m=0}^3 \lambda_m g(t+mT) dt = \begin{cases} 1, n=0, \\ 0, n=1,2,3. \end{cases}$$

Подставляем в эту систему уравнений выражения для $g(t+nT)$ и $g(t+mT)$, интегрируем и получаем:

$$\begin{cases} 0,3266\lambda_0 - 2,026 \cdot 10^{-3}\lambda_1 - 2,251 \cdot 10^{-3}\lambda_2 + 2,124 \cdot 10^{-3}\lambda_3 = 1, \\ -2,026 \cdot 10^{-3}\lambda_0 + 0,1386\lambda_1 - 3,033 \cdot 10^{-2}\lambda_2 + 8,233 \cdot 10^{-3}\lambda_3 = 0, \\ -2,251 \cdot 10^{-3}\lambda_0 - 3,033 \cdot 10^{-2}\lambda_1 + 6,967 \cdot 10^{-3}\lambda_2 - 1,955 \cdot 10^{-3}\lambda_3 = 0, \\ 2,124 \cdot 10^{-3}\lambda_0 + 8,233 \cdot 10^{-3}\lambda_1 - 1,955 \cdot 10^{-3}\lambda_2 + 5,635 \cdot 10^{-4}\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Решаем систему уравнений и определяем:

$$\lambda_0 = 27,56; \lambda_{\pm 1} = -259,1; \lambda_{\pm 2} = -3195; \lambda_{\pm 3} = -7403.$$

Вычисляем значение E -критерия E_p при $T = \pi$: $E_p = 4,479 \cdot 10^{-4}$.

Получим значение E -критерия для классического случая при $T = \pi$: $E = 1,682 \cdot 10^{-2}$.

Для рассматриваемого случая $B_g(0) = 0,3266$, $B_{gp}(0) = 1$.

Определим критическое значение $h_{\sigma_{кр}}$ отношения сигнал/шум:

$$h_{\sigma_{кр}} = \sqrt{\frac{B_g(0)\lambda_0 - B_{gp}^2(0)}{2B_{gp}^2(0)(E^2 - E_p^2)}} = \sqrt{\frac{0,3266 \cdot 27,56 - 1^2}{2 \cdot 1^2 \left((1,682 \cdot 10^{-2})^2 - (4,479 \cdot 10^{-4})^2 \right)}} \approx 118,9.$$

Вероятности ошибки для классического и рассматриваемого случаев при $h_{\sigma_{кр}} = 118,9$ равны $p_{\sigma_{\min}} = p_{\sigma} \approx 3,765 \cdot 10^{-685}$.

Рассчитаем вероятность ошибки при приеме сигналов ИКМ-2 с ортогонализацией канальных символов, приняв, что формирующий фильтр представляет собой НФНЧБ 4-го порядка при $T = 9\pi/8$.

Коэффициенты оптимального веса имеют следующие значения:

$$\lambda_0 = 33,87; \lambda_{\pm 1} = -514,4; \lambda_{\pm 2} = -3219; \lambda_{\pm 3} = -2559.$$

Вычисляем значение E -критерия E_p при $T = 9\pi/8$ $E_p = 1,564 \cdot 10^{-4}$.

Получим значение E -критерия для классического случая при $T = 9\pi/8$: $E = 0,1227$.

Для рассматриваемого случая $B_g(0) = 0,3266$, $B_{gp}(0) = 1$. Определим критическое значение отношения сигнал/шум $h_{\sigma_{кр}} = 18,28$. Вероятности ошибки при $h_{\sigma_{кр}} = 18,28$ составляют $p_{\sigma_{\min}} = p_{\sigma} \approx 3,927 \cdot 10^{-15}$.

Графики зависимостей $p_{\sigma_{\min}}$ и p_{σ} от отношения сигнал/шум показаны на рис. 4.

6. Оптимизация веса по критерию минимума вероятности ошибки

Приведенные выше вычисления показывают, что снижение уровня МСИ за счет ортогонализации интерферирующих канальных символов с принимаемым канальным символом приводит при низких отношениях сигнал/шум к возрастанию влияния шума на вероятность ошибки. Причиной этого является определение веса ортогональности по критерию минимума величины H .

Покажем, что вес ортогональности можно определить путем минимизации вероятности ошибки.

Задача формулируется следующим образом.

При заданном тактовом интервале необходимо определить коэффициенты λ_n веса $\rho_{opt}(t)$ (13) при которых величина вероятности ошибки $p_{\delta p}$ (10) является минимальной. Выполнения условий ортогональности (14) требовать не будем. Минимизация выражения (10) эквивалентна максимизации отношения сигнал/шум (9).

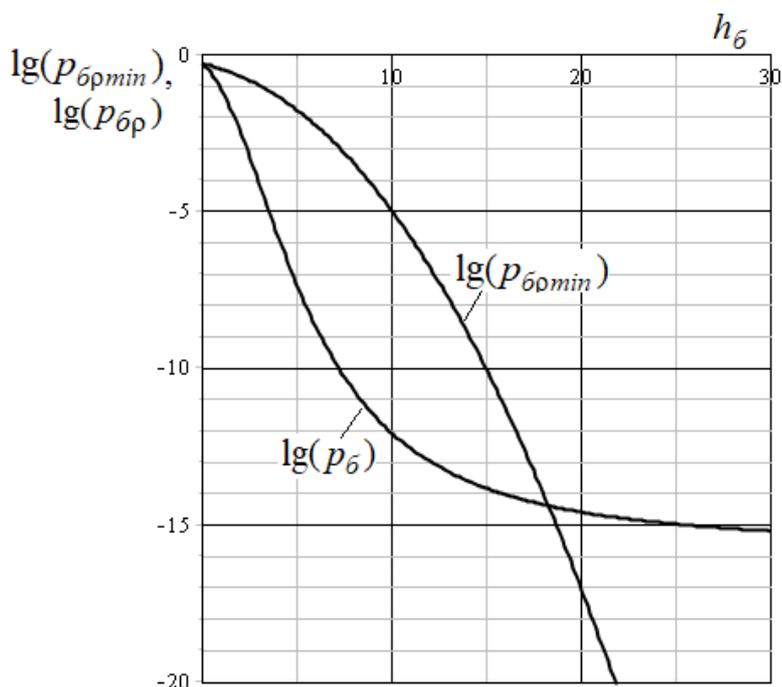


Рис. 4. Графики зависимостей $p_{\delta p min}$ и p_{δ} от отношения сигнал/шум при $T = 9\pi/8$.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда формирующий фильтр является НФНЧБ 4-го порядка, а тактовый интервал $T = 9\pi/8$.

В этом случае имеем:

$$B_g(0) = 0,3266,$$

$$\rho_{opt}(t) = \frac{\sum_{n=0}^3 \lambda_n g(t + nT)}{g(t)},$$

$$\begin{aligned}
 B_{gp}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lambda_m g(t+mT) dt = \\
 &= 3,2664 \cdot 10^{-1} \lambda_0 - 2,6441 \cdot 10^{-2} \lambda_1 - 3,0017 \cdot 10^{-3} \lambda_3 + 9,7375 \cdot 10^{-3} \lambda_2, \\
 H &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^2 \rho_{gopt}^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^3 \lambda_n g(t+nT) \right)^2 dt = \\
 &= 8,6387 \cdot 10^{-3} \lambda_1 \lambda_3 + 2,2448 \cdot 10^{-4} \lambda_3^2 - 6,0034 \cdot 10^{-3} \lambda_0 \lambda_3 - \\
 &\quad - 1,8003 \cdot 10^{-3} \lambda_2 \lambda_3 - 5,2882 \cdot 10^{-2} \lambda_1 \lambda_0 + 8,7738 \cdot 10^{-2} \lambda_1^2 + \\
 &\quad + 1,9475 \cdot 10^{-2} \lambda_0 \lambda_2 + 3,2664 \cdot 10^{-1} \lambda_0^2 + 3,6510 \cdot 10^{-3} \lambda_2^2 - 3,5461 \cdot 10^{-2} \lambda_1 \lambda_2.
 \end{aligned}$$

Вычислим сумму, которая входит в выражение для квадрата E -критерия:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} B_{gp}^2(kT) &= 1,5838 \cdot 10^{-3} \lambda_1 \lambda_3 + 3,9042 \cdot 10^{-5} \lambda_3^2 - 4,9480 \cdot 10^{-4} \lambda_0 \lambda_3 - \\
 &- 3,2035 \cdot 10^{-4} \lambda_2 \lambda_3 - 1,0026 \cdot 10^{-2} \lambda_1 \lambda_0 + 1,6064 \cdot 10^{-2} \lambda_1^2 + 2,0291 \cdot 10^{-3} \lambda_2 \lambda_0 + \\
 &\quad + 1,6075 \cdot 10^{-3} \lambda_0^2 + 6,5714 \cdot 10^{-4} \lambda_2^2 - 6,4981 \cdot 10^{-3} \lambda_2 \lambda_1.
 \end{aligned}$$

Квадрат E -критерия равен:

$$\begin{aligned}
 E_p^2 &= \frac{1}{B_{gp}^2(0)} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} B_{gp}^2(kT) = \left(1,5838 \cdot 10^{-3} \lambda_1 \lambda_3 + 3,9042 \cdot 10^{-5} \lambda_3^2 - 4,9480 \cdot 10^{-4} \lambda_0 \lambda_3 - \right. \\
 &- 3,2035 \cdot 10^{-4} \lambda_2 \lambda_3 - 1,0026 \cdot 10^{-2} \lambda_1 \lambda_0 + 1,6064 \cdot 10^{-2} \lambda_1^2 + 2,0291 \cdot 10^{-3} \lambda_2 \lambda_0 + \\
 &\quad \left. + 1,6075 \cdot 10^{-3} \lambda_0^2 + 6,5714 \cdot 10^{-4} \lambda_2^2 - 6,4981 \cdot 10^{-3} \lambda_2 \lambda_1 \right) / \left(3,2664 \cdot 10^{-1} \lambda_0 - \right. \\
 &\quad \left. - 2,6441 \cdot 10^{-2} \lambda_1 - 3,0017 \cdot 10^{-3} \lambda_3 + 9,7375 \cdot 10^{-3} \lambda_2 \right).
 \end{aligned}$$

Будем определять коэффициенты λ_n веса, которые максимизируют отношение сигнал/шум h_{op} в случае ортогонализации, задав какое-либо отношение сигнал/шум h_o в классическом случае. Пусть $h_o = 8$.

Решение системы уравнений:

$$\frac{dh_{\sigma p}}{d\lambda_n} = \frac{d}{d\lambda_n} \left(\frac{\sqrt{2}h_{\sigma}}{\sqrt{\sqrt{2}h_{\sigma}^2 E_p^2 + \frac{B_g(0)}{B_{gp}^2(0)} H}} \right) = 0, \quad n=0,1,2,3,$$

относительно λ_n имеет вид:

$$\lambda_0 = 3,3083; \lambda_1 = -1,3176; \lambda_2 = -10,3724; \lambda_3 = 4,8279.$$

С учетом полученных λ_n определяем величины, входящие в выражение (10):

$$H = 3,1424; B_{gp}(0) = 1; E_p^2 = 4,2310 \cdot 10^{-3}.$$

График зависимости вероятности ошибки $p_{\sigma opt}$ от отношения сигнал/шум h_{σ} в канале для рассмотренного случая оптимизации показан на рис. 5. На рис. 5 также представлены графики зависимостей от h_{σ} для классических случаев: вероятности ошибки p_{σ} при отсутствии МСИ и вероятности ошибки $p_{\sigma MCI}$ при наличии МСИ.

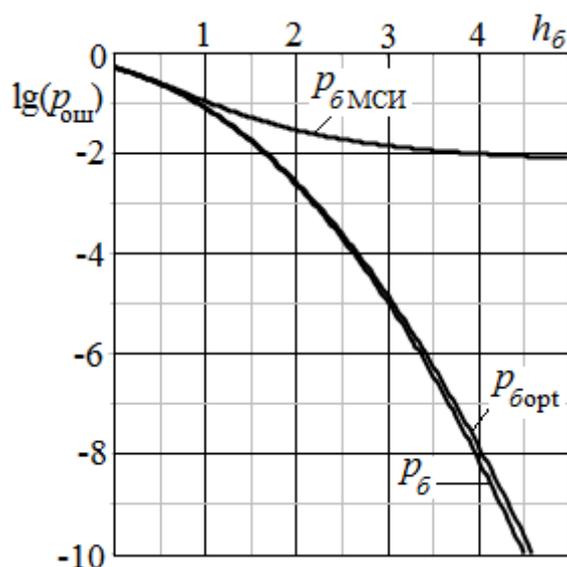


Рис. 5. Графики зависимостей вероятностей ошибок от отношения сигнал/шум при $T = 9\pi/8$.

Для сравнения, получим при отношении сигнал/шум в канале $h_{\sigma} = 4$ следующие значения вероятностей ошибок: $p_{\text{бopt}} = 1,4530 \cdot 10^{-8}$; $p_{\sigma} = 7,7086 \cdot 10^{-9}$; $p_{\text{бМСИ}} = 9,5079 \cdot 10^{-3}$.

Отметим, что соседние канальные символы вносят в МСИ свой вклад за счет нестрогой ортогональности с принимаемым канальным символом. Так, имеем:

$$B_{gp}(0) = 1; B_{gp}(1) = 1,6814 \cdot 10^{-3};$$

$$B_{gp}(2) = 1,3361 \cdot 10^{-2}; B_{gp}(3) = -5,2012 \cdot 10^{-3}.$$

Приведенные расчеты показывают, что, ослабив требования к ортогональности канальных символов, соседствующих с принимаемым канальным символом, можно определить вес, который снижает вероятность ошибки до значения, практически равному значению вероятности ошибки в классическом случае при отсутствии МСИ.

Заключение

Минимизация вероятности ошибки бита производится за счет исключения влияния на E -критерий ближайших к принимаемому интерферирующих канальных символов. Чем выше порядок формирующего фильтра, тем меньше E -критерий, тем меньше вероятность ошибки бита.

Увеличение МСИ, вызванное нарушением тактовой синхронизации, компенсируется путем взвешенной обработки принимаемого канального символа.

Направлением дальнейших исследований является применение рассмотренного метода для одновременного снижения влияния межсимвольных и межканальных помех.

Литература

1. Зюко А. Г. Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации. Москва, Радио и связь. 1985. 272 с.
2. Бельфиоре К. А., Парк Дж. Х. Компенсация посредством решающей обратной связи. Труды института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. 1979. Т. 67. №8. С.67-83.
3. Кловский Д.Д., Николаев Б.И. Инженерная реализация радиотехнических схем. Москва, Связь. 1975. 200 с.
4. Спилкер Дж. Цифровая спутниковая связь. Москва, Связь. 1979. 592 с.
5. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. Москва. Издательский дом «Вильямс». 2003. 1099 с.
6. Хабаров Е. О. Анализ характеристик ряда алгоритмов демодуляции в каналах с межсимвольной интерференцией. Электросвязь. 2008. №5. С. 50-54.
7. Мартышевская Д. А. Повышение помехоустойчивости высоскоростной передачи цифровых сигналов с помощью подавления межсимвольной интерференции. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. 05.12.04 – Радиотехника в том числе системы и устройства телевидения. Владимир. 2017. ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых (ВлГУ)». 141 с.
8. Дегтярев А.Н. Ортогонализация функций и повышение помехоустойчивости высокоскоростных систем передачи информации. Москва, Инфра-М. 2019. 152 с.

Для цитирования:

Дегтярев А.Н., Конева С.А. Минимизация вероятности ошибки при взвешенном приеме сообщения с двухпозиционной импульсно-кодовой манипуляцией в условиях межсимвольной интерференции. // Журнал радиоэлектроники. – 2024. – № 6. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.6.1>