

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.6.11>

УДК: 621.3.01; 512.62

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ВЕЙВЛЕТОВ ЭРМИТА-ГАУССА И ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ В ЗАДАЧАХ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

А.Ю. Гришенцев ¹, Н.В. Коровкин ², А.Г. Коробейников ^{1,3}

¹ Университет ИТМО,

197101, г. Санкт-Петербург, Кронверкский пр-кт, д. 49, лит. А.

² Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая, д.29 литера Б.

³ Санкт-Петербургский филиал Института земного магнетизма, ионосферы и
распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова Российской академии наук,
199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д.5 литера Б.

Статья поступила в редакцию 16 марта 2025 г.

Аннотация. Вейвлеты Эрмита-Гаусса получают в результате произведения полиномов Эрмита на функцию Гаусса. Вейвлеты Эрмита-Гаусса образуют базис в пространстве вещественных чисел и поэтому позволяют производить декомпозицию функций удовлетворяющих условию Дирихле. Множество ортонормированных форм вейвлетов Эрмита-Гаусса являются собственными функциями преобразования Фурье, такая особенность определяет использование вейвлетов в широком спектре теоретических и практических инженерных задач. Анализ литературы показывает, что преобразованию Фурье различных форм вейвлетов Эрмита-Гаусса, их взаимному выражению через преобразование Фурье и связи с другими функциями имеющими вид произведения полиномов на функцию Гаусса, уделено недостаточное внимание. Поэтому, по мнению авторов, исследования являются актуальными. Предметом исследований является повышение эффективности преобразования

Фурье многочленов некоторых видов на основе декомпозиции по базису вейвлетов Эрмита-Гаусса. В ходе исследований сформулировано и доказано пять взаимосвязанных теорем, образующих основу работы. Для формулировок и доказательства теорем используется два вида декомпозиции. Первый способ декомпозиции основан на обобщенном преобразовании Фурье по базису вейвлетов Эрмита-Гаусса. Вторым способом декомпозиции многочленов основан на последовательном делении с остатком. Основным результатом работы является предложенный математический аппарат в виде сформулированных и доказанных теорем применимых для преобразования Фурье произвольных полиномов одной переменной, умноженных на функцию Гаусса, причем преобразование выполняется аналитически и без использования интеграла Фурье. По мнению авторов, полученный результат способствует развитию теории и практики обработки сигналов, в области радиоэлектроники, оптоэлектроники, электротехники и теории автоматического управления. В заключительной части работы изложены некоторые примеры использования разработанной теории и предложен метод синтеза откликов систем имеющих дробно-рациональную передаточную функцию и метод синтеза радиосигналов на основе вейвлетов Эрмита-Гаусса.

Ключевые слова: вейвлеты Эрмита-Гаусса, полиномы Эрмита, преобразование Фурье, собственные функции, передаточная функция, синтез сигналов.

Автор для переписки: Гришенцев Алексей Юрьевич, agrishentsev@yandex.ru

Введение

Полиномы Эрмита представляют интерес для фундаментальной математики и прикладных исследований. Анализ литературы показывает, что начиная с трудов Шарля Эрмита [1], и последующих работ [2,3], вплоть до настоящего времени [4,5] имеется существенный интерес к теме, т.к. полиномы Эрмита находят новое применение в самых различных областях исследований.

Значительное число публикаций посвящено изучению свойств ортогональных полиномов [6] и, в частности, полиномов Эрмита [7]. Полиномы Эрмита образуют ортогональный базис в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, поэтому среди имеющихся публикаций особенное внимание уделено исследованию методов интерполяции [8,9] на их основе. Произведение полиномов Эрмита на функцию Гаусса позволяет получить функции, образующие базисные вейвлеты семейства – вейвлетов Эрмита-Гаусса¹ (ВЭГ) и обладающие рядом интересных свойств. В частности, каждый ортонормированный базисный вейвлет семейства является собственной функцией преобразования Фурье, т.е. каждый нормированный ВЭГ во временном пространстве эквивалентен своему образу в частотном: $\mathcal{F}\{\bar{\psi}(v,t)\} = \lambda_v \bar{\psi}(v,\omega)$, где $\bar{\psi}(v,t)$ и $\bar{\psi}(v,\omega)$ – нормированные ВЭГ во временном и частотном пространствах, соответственно; v – номер ВЭГ $v \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0 = (0,1,2,\dots)$; t – время; $\omega = 2\pi f$ – круговая частота; $\lambda_v = (-j)^v$ – собственное значение при соответствующем ВЭГ. ВЭГ являются частными решениями уравнений Шредингера [10] и потому активно используются в квантовой механике. Кроме того ВЭГ применяются в оптике [11], радиофизике [12], теории автоматического управления [13] и других направлениях науки и техники.

¹ Следует отметить, что в некоторой литературе вейвлеты Эрмита-Гаусса называются полиномами Эрмита с весом или просто функциями Эрмита, по мнению авторов более точное современное название: вейвлеты Эрмита-Гаусса.

В данной работе изложены результаты исследований некоторых свойств ВЭГ и их приложение к теории автоматического управления и синтеза сигналов в области радиоэлектроники и электротехники.

Существует несколько различных форм записи ВЭГ [14] образующихся в результате произведения полиномов Эрмита и функции Гаусса. В частности общий вид полиномов Эрмита:

$$H(v, t) = \sum_{k=0}^{\lfloor v/2 \rfloor} \left((-1)^k \frac{v!}{k!(v-2k)!} (2t)^{v-2k} \right), \quad (1)$$

здесь и далее $\lfloor \dots \rfloor$ – округление вниз и $\lceil \dots \rceil$ – округление вверх.

Форма полиномов (1) преимущественно используется в физике. Функция Гаусса в общем виде записывается как: $G(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, при математическом ожидании $\mu = 0$ и среднеквадратичном отклонении $\sigma = 1$, получим:

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (2)$$

Произведение (1) на (2) с нормированием, позволяет получить ортонормированные ВЭГ:

$$\bar{\psi}(v, t) = \frac{1}{\sqrt{2^v v! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{k=0}^{\lfloor v/2 \rfloor} \left((-1)^k \frac{v!}{k!(v-2k)!} (2t)^{v-2k} \right), \quad (3)$$

где $\sqrt{2^v v! \sqrt{\pi}}$ – норма ВЭГ и $\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}^2(v, t) dt = 1$, для $v \in \mathbb{N}_0$. Форма записи ВЭГ через производные, дающая результат аналогичный (3) имеет вид:

$$\bar{\psi}(v, t) = \frac{(-1)^v}{\sqrt{2^v v! \sqrt{\pi}}} e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^v e^{-t^2}}{dt^v}. \quad (4)$$

Нормальная форма ВЭГ, используемая чаще в математических приложениях имеет вид:

$$\varphi(v, t) = (-1)^v \frac{d^v e^{-\frac{t^2}{2}}}{dt^v}, \quad (5)$$

или аналогичную форму, выраженную без использования производной:

$$\varphi(v, t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{k=0}^{\lfloor v/2 \rfloor} \left((-1)^k \frac{v!}{2^{v-k} k! (v-2k)!} (2t)^{v-2k} \right). \quad (6)$$

Следует отметить, что нормальная форма $\varphi(v, t)$ ВЭГ образует не нормированный базис, т.к. $\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(v, t) dt} \neq 1$ и не ортогональный базис т.е. $\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v, t) \varphi(v+k, t) dt} \neq 0$, где $k \neq 0$ – произвольное целое число. В отличие от $\varphi(v, t)$, ВЭГ в форме $\bar{\psi}(v, t)$ образуют ортонормированный базис.

1. Метод

Введем некоторые операции, которые понадобятся в дальнейших рассуждениях. Частный случай обобщенного преобразования Фурье [15] для декомпозиции по базису ортонормированных ВЭГ $\bar{\psi}(v, t)$. При этом прямое и обратное преобразование связаны следующим выражением:

$$\begin{cases} C_v = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{\psi}(v, t) dt \\ f(t) = \sum_{v=0}^{\infty} C_v \bar{\psi}(v, t) \end{cases}, \quad (7)$$

где $C_v \in \mathbb{C}$ – коэффициенты разложения произвольной функции $f(t)$ удовлетворяющей условиям Дирихле получены с помощью операции скалярное произведение. Обозначим такую декомпозицию $\{C_v\} = G\{f(t)\}$ и $f(t) = G^{-1}\{C_v\}$. В случае если функция $f(t)$ образована полиномом $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_k t^k + \dots + a_K t^K$ степени K умноженным на весовую функцию Гаусса $e^{-\frac{t^2}{2}}$, обозначим $w(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} p(t)$, то прямое и обратное преобразование имеют вид: $\{C_k\} = G\{w(t)\}$ и $w(t) = G^{-1}\{C_k\}$, где $k = \overline{0, K}$.

Второй способ декомпозиции (разложение по степеням) основан на итеративном делении многочлена с последующим разложением остатка. Пусть имеется функция вида $w(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} p(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_k t^k + \dots + a_K t^K)$, для декомпозиции станем использовать ВЭГ в нормальной форме $\varphi(v, t)$.

Коэффициенты разложения S_ν получены за счет последовательного деления и вычитания. Операцию деления записывать не станем, учитывая, что у каждого ВЭГ $\varphi(\nu, t)$ при (максимальной) степени ν параметра t множитель единица, т.к. ВЭГ $\varphi(\nu, t)$ имеют нормальную форму. Получим: $w_{K-1}(t) = w(t) - S_K \varphi(K, t)$, $w_{K-2}(t) = w_{K-1}(t) - S_{K-1} \varphi(K-1, t)$, ..., $0 = w_0(t) - S_0 \varphi(0, t)$ или в общем виде, полагая, что $w_K(t) = w(t)$ и $w_{-1}(t) = 0$: $w_{k-1}(t) = w_k(t) - S_k \varphi(k, t)$. Обратная операция – синтез, реализуется с помощью выражения: $w(t) = \sum_{k=0}^K S_k \varphi(k, t)$ Введем краткое обозначение такого способа декомпозиции и обратной операции (синтеза):

$$\begin{cases} \{S_k\} = U\{w(t)\} \\ w(t) = U^{-1}\{S_k\} \end{cases} \quad (8)$$

Теорема 1. Преобразование Фурье нормальной формы ВЭГ имеет вид:

$$\mathcal{F}\{\varphi(n, t)\} = (-j)^n e^{-\frac{\omega^2}{2}} \omega^n.$$

Доказательство 1. Исследуем скалярное произведение $C_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(n, t) \bar{\psi}(\nu, t) dt$

при $\nu = \overline{0, n}$, которое является основой декомпозиции $\{C_\nu\} = G\{\varphi(n, t)\}$. Учитывая собственные числа преобразования Фурье $\lambda_\nu = (-j)^\nu$, при пробегании n некоторого числа значений $n = \overline{0, N}$, получим коэффициенты декомпозиции $C_{n, \nu}$ для $\varphi(n, t)$ при $n = \overline{0, N}$ по ортонормированному базису $\bar{\psi}(\nu, t)$ для $\nu = \overline{0, n}$:

$$C_{n, \nu} = (-j)^\nu \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(e^{-\frac{t^2}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor \nu/2 \rfloor} \left((-1)^k \frac{n!}{2^{K-k} k! (n-2k)!} (2t)^{n-2k} \right)} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2^\nu \nu! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{t^2}{2} \sum_{m=0}^{\lfloor \nu/2 \rfloor} \left((-1)^m \frac{\nu!}{m! (\nu-2m)!} (2t)^{\nu-2m} \right)} \right) \right] dt. \quad (9)$$

Запишем выражение (9) в виде:

$$C_{n, \nu} = (-j)^\nu \frac{1}{\sqrt{2^\nu \nu! \sqrt{\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(e^{-t^2 \sum_{k=0}^{\lfloor \nu/2 \rfloor} \left((-1)^k \frac{n!}{2^{K-k} k! (n-2k)!} (2t)^{n-2k} \right)} \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\lfloor \nu/2 \rfloor} \left((-1)^m \frac{\nu!}{m! (\nu-2m)!} (2t)^{\nu-2m} \right) \right) \right] dt, \quad (10)$$

и исследуем подынтегральное выражение (10), образованное произведением двух полиномов на экспоненциальную функцию e^{-t^2} . Произведение двух полиномов даст полином. Поэтому подынтегральную функцию можно разделить на частные суммы вида: $qt^p e^{-t^2}$, где q некоторая константа. Как известно [3] интеграл от выражений типа: $qt^{2s} e^{-r^2 t^2}$ и $qt^{2s+1} e^{-r^2 t^2}$, где $s \in \mathbb{N}_0$ можно вычислить, используя выражение:

$$\begin{cases} \int qt^{2s} e^{-r^2 t^2} dt = -q \frac{t^{2s-1} e^{-r^2 t^2} (2s-1)!!}{2r^2} \sum_{q=0}^{s-1} \frac{1}{2^q (2s-2q-1)!! (rt)^{2q}} + q \frac{\sqrt{\pi} (2s-1)!!}{2^{s+1} r^{2s+1}} \operatorname{erf}(rt) + c \\ \int qt^{2s+1} e^{-r^2 t^2} dt = -q \frac{t^{2s} e^{-r^2 t^2}}{2r} \sum_{q=0}^s \frac{s!}{(s-q)! r^q t^{2q}} + c \end{cases}, (11)$$

где $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx$ – функция ошибок. Выражение (11) задает способ

вычисления неопределенного интеграла. При переходе к определенному несобственному интегралу: для нечетных степеней $t^{2s+1} \int_{-\infty}^{\infty} qt^{2s+1} e^{-r^2 t^2} dt = 0$; и для

четных степеней t^{2s} : $\int_{-\infty}^{\infty} qt^{2s} e^{-r^2 t^2} dt = q \frac{\sqrt{\pi} (2s-1)!!}{2^s r^{2s+1}}$. Таким образом, только

интегралы от сумм с четной степенью при t многочлена (10) будут отличны от нуля (что определяет «шахматный порядок», исследуемых далее матриц).

Таким образом, подынтегральное выражение из (10) $\varphi(n,t)\psi(v,t)$, где

$\psi(v,t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{k=0}^{\lfloor v/2 \rfloor} \left((-1)^k \frac{v!}{k!(v-2k)!} (2t)^{v-2k} \right)$ – не нормированная функция $\bar{\psi}(v,t)$, будет

формировать матрицу $\mathbf{P} = (\rho_{n,v}) = \varphi(n,t)\psi(v,t)$ образованную многочленами:

$$\mathbf{P}^T = e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1+t^2 & 0 & \dots \\ 0 & 2t^2 & 0 & -6t^2+2t^4 & \dots \\ 0 & 0 & 2-6t^2+4t^4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 36t^2-36t^4+8t^6 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. (12)$$

Интегрирование полученных многочленов матрицы (12) по (11) позволяет получить матрицу коэффициентов $\mathbf{E} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{n,v} dt \right) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(n,t)\psi(v,t) dt \right)$:

$$E = \sqrt{\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 6 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{4} & 0 & -6 & 0 & 24 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{15}{4} & 0 & -30 & 0 & 120 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Учитывая нормирующий множитель $\frac{1}{\sqrt{2^v v! \sqrt{\pi}}}$ и собственные числа $(-j)^v$

из матрицы (13) не сложно получить разреженную треугольную матрицу коэффициентов декомпозиции:

$$(C_{n,v}) = \sqrt[4]{\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{j}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{3j}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{j\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{15j}{4\sqrt{2}} & 0 & -\frac{5j\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{j\sqrt{15}}{2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Анализ выполненных преобразований показывает, что коэффициенты матрицы (14) можно выразить через индексы (n, v) с помощью формулы:

$$C_{n,v} = \delta_0^{(n-v) \bmod 2} \frac{(-j)^v \sqrt{2^v v! \sqrt{\pi}}}{2^n} \left((-1)^{\lfloor \frac{n-v}{2} \rfloor} \frac{n!}{\lfloor \frac{n-v}{2} \rfloor! v!} \right), \quad (15)$$

где $\delta_0^{(n-v) \bmod 2}$ – символ Кронекера, $\delta_p^k = \begin{cases} 1, & k = p \\ 0, & k \neq p \end{cases}$.

Используя (7) в части обратного преобразования (синтеза), запишем:

$$f(n,t) = \sum_{v=0}^n C_{n,v} \bar{\Psi}(v,t) = \sum_{v=0}^n \left(\delta_0^{(n-v) \bmod 2} \frac{(-j)^v \sqrt{2^v v! \sqrt{\pi}}}{2^n} \left((-1)^{\lfloor \frac{n-v}{2} \rfloor} \frac{n!}{\lfloor \frac{n-v}{2} \rfloor! v!} \right) \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2^v v! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{t^2}{2} \lfloor \frac{v}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{v}{2} \rfloor} \left((-1)^k \frac{v!}{k!(v-2k)!} (2t)^{v-2k} \right) \right). \quad (16)$$

После некоторого упрощения, выполним анализ полученного выражения (16) который показывает, что все частичные суммы (16) сокращаются, кроме той, что содержит наибольшую степень при t . Сократим дроби образующие (16), и объединением произведения внеся все множители под двойную сумму:

$$f(n,t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{v=0}^n \delta_0^{(n-v) \bmod 2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{v}{2} \rfloor} \left(\frac{(-1)^{\lfloor \frac{2k+n-v}{2} \rfloor} (-j)^v 2^v v! n!}{2^{2k+n} k!(v-2k)! \lfloor \frac{n-v}{2} \rfloor! v!} \right) (t)^{v-2k}. \quad (18)$$

Следующим действием избавимся от символа Кронекера и поменяем порядок суммирования, таким образом, чтобы внутренняя сумма отвечала за сложение членов, содержащих одинаковую степень при t . Для этого введем новую переменную $l = v - 2k$, а в суммах укажем шаг приращения, например:

$\sum_{l=l_0, \Delta l}^L f(l)$, где l_0 – начальное значение; Δl – шаг приращения; L – конечное значение.

В результате выполнения указанных действий получим:

$$f(n,t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{l=(n \bmod 2), 2, v=l, 2}^n \sum_{l} \left(\frac{(-1)^{\lfloor \frac{n-l}{2} \rfloor} (-j)^v 2^{l-n} n!}{\lfloor \frac{n-v}{2} \rfloor! \lfloor \frac{v-l}{2} \rfloor! l!} t^l \right) = (-j)^n e^{-\frac{t^2}{2}} t^n. \quad (19)$$

Выражение (19) упорядочено по степеням при t и для всех степеней, исключая старшую, сумма членов (19) равна нулю, из чего следует, что

$$\mathcal{F}\{\varphi(n,t)\} = (-j)^n e^{-\frac{\omega^2}{2}} \omega^n, \text{ ч.т.д.}$$

Замечание 1.1. Справедливо и обратное утверждение:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{(-j)^n e^{-\frac{\omega^2}{2}} \omega^n\right\} = \varphi(n,t).$$

Замечание 1.2. Справедливо следующее утверждение:

$$\mathcal{F}\left\{(-1)^n (-j)^n e^{-\frac{t^2}{2}} t^n\right\} = \mathcal{F}\left\{(j)^n e^{-\frac{t^2}{2}} t^n\right\} = \varphi(n, \omega).$$

Усилим свойство, изложенное в теореме 1.

Теорема 2. Преобразование Фурье производной порядка (g) от нормальной формы ВЭГ имеет вид: $\mathcal{F}\left\{\frac{d^{(g)}\varphi(n,t)}{dt^{(g)}}\right\} = (-j)^{n-g} e^{-\frac{\omega^2}{2}} \omega^{n+g}$.

Доказательство 2. Учитывая определение нормальной формы ВЭГ через производную (5) запишем: $\frac{d^{(g)}\varphi(n,t)}{dt^{(g)}} = (-1)^n \frac{d^{(n+g)} e^{-\frac{t^2}{2}}}{dt^{(n+g)}}$, таким образом, производная порядка (g) от $\varphi(n,t)$ есть ВЭГ в форме $(-1)^n \frac{d^{(n+g)} e^{-\frac{t^2}{2}}}{dt^{(n+g)}}$, далее по теореме 1

получим: $\mathcal{F}\left\{(-1)^n \frac{d^{(n+g)} e^{-\frac{t^2}{2}}}{dt^{(n+g)}}\right\} = (-j)^{n-g} e^{-\frac{\omega^2}{2}} \omega^{n+g}$, ч.т.д.

Замечание 2.1. Справедливо и обратное утверждение:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{(-j)^{n-g} e^{-\frac{\omega^2}{2}} \omega^{n+g}\right\} = (-1)^n \frac{d^{(n+g)} e^{-\frac{t^2}{2}}}{dt^{(n+g)}}.$$

Используя теорему 2 построим ряд.

Теорема 3. $\mathcal{F}\left\{\sum_{n=0}^N \sum_{g=0}^{G_n} \left(\frac{d^{(g)}\varphi(n,t)}{dt^{(g)}}\right)\right\} = e^{-\frac{\omega^2}{2}} \sum_{n=0}^N \sum_{g=0}^{G_n} \left((-j)^{n-g} \omega^{n+g}\right)$.

Доказательство 3. Учитывая теорему 2 и аддитивность преобразования Фурье имеем $\mathcal{F}\left\{\sum_{n=0}^N \sum_{g=0}^{G_n} \left(\frac{d^{(g)}\varphi(n,t)}{dt^{(g)}}\right)\right\} = \sum_{k=0}^K \sum_{l_k=0}^{G_n} \mathcal{F}\left\{\frac{d^{(g)}\varphi(n,t)}{dt^{(g)}}\right\} = e^{-\frac{\omega^2}{2}} \sum_{n=0}^N \sum_{g=0}^{G_n} \left((-j)^{n-g} \omega^{n+g}\right)$, ч.т.д.

Замечание 3.1. Для прямого и обратного преобразования Фурье справедливо:

$$\begin{cases} \mathcal{F}\left\{\sum_{n=0}^N \sum_{g=0}^{G_n} \left(\frac{d^{(g)}\varphi(n,t)}{dt^{(g)}}\right)\right\} = e^{-\frac{\omega^2}{2}} \sum_{n=0}^N \sum_{g=0}^{G_n} \left((-j)^{n-g} \omega^{n+g}\right) \\ \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-\frac{\omega^2}{2}} \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^{G_n} \left((-j)^{n-g} \omega^{n+g}\right)\right\} = \sum_{n=0}^N \sum_{g=0}^{G_n} \left(\frac{d^{(g)}\varphi(n,t)}{dt^{(g)}}\right) \end{cases} \quad (20)$$

Пусть $w(t) = p(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$ произведение произвольного полинома $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_kt^k + \dots + a_Kt^K$, где $k = \overline{0, K}$; $a_k \in \mathbb{C}$, на весовую функцию Гаусса. Предположение 4.1. Преобразование Фурье $\mathcal{F}\{w(t)\} = W(\omega)$, многочлена вида $w(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_kt^k + \dots + a_Kt^K)$ есть многочлен вида $W(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}(b_0 + b_1\omega + b_2\omega^2 + \dots + b_k\omega^k + \dots + b_K\omega^K)$, причем $w(t)$ и $W(\omega)$ многочлены степени K .

Теорема 4. Преобразование Фурье многочлена $w(t) = p(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$ в выражении через собственные функции и числа имеет следующий вид:

$$\mathcal{F}\{w(t)\} = W(\omega) = \sum_{k=0}^K (-j)^k C_k \bar{\psi}(k, \omega), \text{ где } \{C_k\} = G\{w(t)\}.$$

Доказательство 4. Нормированный ВЭГ $\bar{\psi}(v, t)$ есть собственная функция преобразования Фурье $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(v, t) e^{-j\omega t} dt = (-j)^v \bar{\psi}(v, \omega)$ с собственными числами $(-j)^v$, преобразование Фурье линейно, т.е. для него справедлив закон

$$\text{аддитивности } \mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^K \bar{\psi}(k, t)\right\} = \sum_{k=0}^K \mathcal{F}\{\bar{\psi}(k, t)\} \text{ и однородности } \mathcal{F}\{c\bar{\psi}(k, t)\} = c\mathcal{F}\{\bar{\psi}(k, t)\},$$

где $c = const$. Любой многочлен вида $w(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_kt^k + \dots + a_Kt^K)$ разложим методом декомпозиции $\{C_k\} = G\{w(t)\}$ по ортонормированному базису ВЭГ $\bar{\psi}(k, t)$, на конечное число коэффициентов C_k , $k = \overline{0, K}$, из чего следует, что:

$$\mathcal{F}\{w(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^K C_k \bar{\psi}(k, t)\right\} = \sum_{k=0}^K C_k \mathcal{F}\{\bar{\psi}(k, t)\} = \sum_{k=0}^K (-j)^k C_k \bar{\psi}(k, \omega), \text{ ч.т.д.}$$

Следствие 4.1. Доказательство теоремы 4, так же является доказательством сделанного ранее предположения 4.1.

Следствие 4.2. Преобразование Фурье произведения полинома $p(t)$ умноженного на ВЭГ $\bar{\psi}(v, t)$ есть многочлен степени $K + v$:

$$\mathcal{F}\{p(t)\bar{\psi}(v,t)\} = \mathcal{F}\left\{e^{-\frac{t^2}{2}}(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_k t^k + \dots + a_{K+v}t^{K+v})\right\} = \quad (21)$$

$$= e^{-\frac{\omega^2}{2}}(b_0 + b_1\omega + b_2\omega^2 + \dots + b_k\omega^k + \dots + b_{K+v}\omega^{K+v})$$

Следствие 4.3. Для произвольного многочлена вида

$$W(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}(b_0 + b_1\omega + b_2\omega^2 + \dots + b_k\omega^k + \dots + b_K\omega^K), \text{ справедливо}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{W(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\sum_{k=0}^K C_k \bar{\psi}(k, \omega)\right\} = \sum_{k=0}^K C_k \mathcal{F}^{-1}\{\bar{\psi}(k, \omega)\} = \sum_{k=0}^K (j)^k C_k \bar{\psi}(k, t),$$

где $\{C_k\} = G\{W(\omega)\}$, $k = \overline{0, K}$.

Пусть $w(t)$ произвольный многочлен вида:

$$w(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_k t^k + \dots + a_K t^K), \text{ тогда справедлива следующая теорема.}$$

Теорема 5. Коэффициенты $(b_0, b_1, b_2, \dots, b_k, \dots, b_K)$ многочлена

$$W(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}(b_0 + b_1\omega + b_2\omega^2 + \dots + b_k\omega^k + \dots + b_K\omega^K)$$

полученного в результате преобразования Фурье $\mathcal{F}\{w(t)\} = W(\omega)$ выразимы через операцию декомпозиции

$$\{S_k\} = \mathcal{U}\{w(t)\} \text{ так что: } b_k = (-j)^k S_k, \quad k = \overline{0, K}.$$

Доказательство 5. Применим метод декомпозиции $\{S_k\} = \mathcal{U}\{w(t)\}$, для

$$k = \overline{0, K} \text{ тогда } w(t) = \sum_{k=0}^K S_k \varphi(k, t), \text{ далее выполним преобразование Фурье}$$

$$\mathcal{F}\{w(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^K S_k \varphi(k, t)\right\}, \text{ и учитывая свойство аддитивности преобразования}$$

$$\text{Фурье, запишем: } \mathcal{F}\{w(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^K S_k \varphi(k, t)\right\} = \sum_{k=0}^K S_k \mathcal{F}\{\varphi(k, t)\}. \text{ По теореме 1:}$$

$$\mathcal{F}\{\varphi(k, t)\} = (-j)^k e^{-\frac{\omega^2}{2}} \omega^k, \text{ из чего следует: } \mathcal{F}\{w(t)\} = \sum_{k=0}^K S_k \mathcal{F}\{\varphi(k, t)\} = \sum_{k=0}^K S_k (-j)^k e^{-\frac{\omega^2}{2}} \omega^k,$$

следовательно: $b_k = (-j)^k S_k$, $k = \overline{0, K}$, ч.т.д.

Следствие 5.1. Для произвольного многочлена вида

$$W(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}} (b_0 + b_1\omega + b_2\omega^2 + \dots + b_k\omega^k + \dots + b_K\omega^K),$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{W(\omega)\} = w(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} (a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_kt^k + \dots + a_Kt^K), \text{ справедливо:}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{W(\omega)\} = \sum_{k=0}^K (j)^k S_k e^{-\frac{t^2}{2}} t^k, \text{ где } \{S_k\} = \mathcal{U}\{W(\omega)\}, k = \overline{0, K}, \text{ т.е. } a_k = (j)^k S_k.$$

2. Алгебраические примеры

Приведем некоторые примеры использования теорем. Пример использования теоремы 1. Выполним преобразование Фурье выражения нормальной формы ВЭГ девятого порядка:

$$\varphi(9, t) = e^{-\frac{t^2}{2}} (945t - 1260t^3 + 378t^5 - 36t^7 + t^9), \text{ получим: } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(9, t) e^{-j\omega t} dt = -je^{-\frac{\omega^2}{2}} \omega^9,$$

с другой стороны обратное преобразование Фурье:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -je^{-\frac{\omega^2}{2}} \omega^9 e^{j\omega t} d\omega = \varphi(9, t) = e^{-\frac{t^2}{2}} (945t - 1260t^3 + 378t^5 - 36t^7 + t^9), \text{ что соответствует}$$

прямому и обратному (замечание 1.1) использованию теоремы 1. Учитывая свойство аддитивности, теорема 1 позволяет вычислять преобразование Фурье

произвольного многочлена вида: $w(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} (a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_kt^k + \dots + a_Kt^K)$.

Исследуем следующий пример. Пусть имеется многочлен $w(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} (3t^5 + 15t^2 - 2)$

необходимо вычислить его преобразование Фурье $\mathcal{F}\left\{e^{-\frac{t^2}{2}} (3t^5 + 15t^2 - 2)\right\}$

используя теорему 1. Применяя свойство аддитивности преобразования Фурье

$$\text{получим: } \mathcal{F}\left\{3t^5 e^{-\frac{t^2}{2}} + 15t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - 2e^{-\frac{t^2}{2}}\right\} = 3\mathcal{F}\left\{t^5 e^{-\frac{t^2}{2}}\right\} + 15\mathcal{F}\left\{t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\right\} - 2\mathcal{F}\left\{e^{-\frac{t^2}{2}}\right\}, \text{ далее для}$$

каждого слагаемого на основании замечания 1.2 запишем выражение через ВЭГ

$\varphi(v, \omega)$:

$$3\mathcal{F}\left\{t^5 e^{-\frac{t^2}{2}}\right\} = 3(-j)^5 \varphi(5, \omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}} (-3j\omega^5 + 30j\omega^3 - 45j\omega),$$

$$15\mathcal{F}\left\{t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\right\} = 15(-j)^2 \varphi(2, \omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}} (-15\omega^2 + 15)$$

$$\text{и } -2\mathcal{F}\left\{e^{-\frac{t^2}{2}}\right\} = -2(-j)^0 \varphi(0, \omega) = -2e^{-\frac{\omega^2}{2}},$$

сложив полученные многочлены, получим окончательный результат:

$$\mathcal{F}\left\{e^{-\frac{t^2}{2}} (3t^5 + 15t^2 - 2)\right\} = e^{-\frac{\omega^2}{2}} (-3j\omega^5 + 30j\omega^3 - 15\omega^2 - 45j\omega + 13). \text{ Используя замечание 1.1}$$

не сложно получить аналогичное разложение при обратном преобразовании

Фурье для многочленов вида: $W(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}} (b_0 + b_1\omega + b_2\omega^2 + \dots + b_k\omega^k + \dots + b_K\omega^K)$.

На основании теорем 2 и 3 запишем пример вычисления преобразования Фурье от производных ВЭГ $\varphi(v, \omega)$, для удобства результаты сведем в таблицы 1 и 2.

Таблица 1. Выражение $\frac{d^{(g)}\varphi(k, t)}{dt^{(g)}}$, для $k = \overline{0, 3}$ и $g = \overline{0, 2}$.

$\frac{d^{(g)}\varphi(k, t)}{dt^{(g)}}$	g			
		0	1	2
k	0	$e^{-\frac{t^2}{2}}$	$-e^{-\frac{t^2}{2}}t$	$e^{-\frac{t^2}{2}}(-1+t^2)$
	1	$e^{-\frac{t^2}{2}}t$	$e^{-\frac{t^2}{2}}(1-t^2)$	$e^{-\frac{t^2}{2}}(-3t+t^3)$
	2	$e^{-\frac{t^2}{2}}(-1+t^2)$	$e^{-\frac{t^2}{2}}(3t-t^3)$	$e^{-\frac{t^2}{2}}(3-6t^2+t^4)$
	3	$e^{-\frac{t^2}{2}}(-3t+t^3)$	$e^{-\frac{t^2}{2}}(-3+6t^2-t^4)$	$e^{-\frac{t^2}{2}}(15t-10t^3+t^5)$

Таблица 2. Выражение для $\mathcal{F}\left\{\frac{d^{(g)}\varphi(k,t)}{dt^{(g)}}\right\}=(-j)^{k-g}e^{-\frac{\omega^2}{2}}\omega^{k+g}$, для $k=\overline{0,3}$ и $g=\overline{0,2}$.

$\mathcal{F}\left\{\frac{d^{(g)}\varphi(k,t)}{dt^{(g)}}\right\}$	g			
		0	1	2
k	0	$e^{-\frac{\omega^2}{2}}$	$je^{-\frac{\omega^2}{2}}\omega$	$-e^{-\frac{\omega^2}{2}}\omega^2$
	1	$-je^{-\frac{\omega^2}{2}}\omega$	$e^{-\frac{\omega^2}{2}}\omega^2$	$je^{-\frac{\omega^2}{2}}\omega^3$
	2	$-e^{-\frac{\omega^2}{2}}\omega^2$	$-je^{-\frac{\omega^2}{2}}\omega^3$	$e^{-\frac{\omega^2}{2}}\omega^4$
	3	$je^{-\frac{\omega^2}{2}}\omega^3$	$-e^{-\frac{\omega^2}{2}}\omega^4$	$-je^{-\frac{\omega^2}{2}}\omega^5$

Пример использования теоремы 4. Пусть имеется полином вида:

$p(t)=11t^7+25t^2-10t+5$ умножив его на $e^{-\frac{t^2}{2}}$ приведем к виду

$w(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}p(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}(11t^7+25t^2-10t+5)$. Произведем декомпозицию $G\{w(t)\}$ и

вычислим коэффициенты:

$$\{C_k\}=\left\{\frac{35^4\sqrt{\pi}}{2},\frac{1075^4\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2}},\frac{25^4\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}},\frac{1155\sqrt{3^4\sqrt{\pi}}}{8},0,\frac{231\sqrt{15^4\sqrt{\pi}}}{4},0,\frac{33\sqrt{35^4\sqrt{\pi}}}{2\sqrt{2}}\right\}$$

заменяв t на ω и выполнив преобразование $\sum_{k=0}^K(-j)^k C_k \bar{\psi}(k,\omega)$, получим:

$$\mathcal{F}\{w(t)\}=W(\omega)=e^{-\frac{\omega^2}{2}}(30-1145j\omega-25\omega^2+1155j\omega^3-231j\omega^5+11j\omega^7),$$

что соответствует теореме 4.

Пример использования теоремы 5. Выполним декомпозицию

$\{S_k\}=\mathcal{U}\{w(t)\}$, заданного ранее многочлена $w(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}(11t^7+25t^2-10t+5)$, получим

коэффициенты многочлена $W(\omega)$: $\{S_k\}=\{30,1145,25,1155,0,231,0,11\}$, что

соответствует теореме 5. Используя полученные коэффициенты $\{S_k\}$ вычислим

$$\mathcal{F}\{w(t)\}=W(\omega)=e^{-\frac{\omega^2}{2}}\sum_{k=0}^7(-j)^k S_k \omega^k=e^{-\frac{\omega^2}{2}}(30-1145j\omega-25\omega^2+1155j\omega^3-231j\omega^5+11j\omega^7).$$

3. Вывод дополнительных преобразований

Используя теорему 1 и свойства интегралов [16], не сложно получить выражение для расчета преобразования Фурье произвольного многочлена вида:

$$w(t) = \sum_{m=0}^M \left(e^{-\frac{r_m t^2}{2}} a_m t^m \right) \quad (22)$$

где $r_m \in \mathbb{R}$. Отметим, что при сопоставлении (22) с функцией Гаусса получим

$1/\sigma^2 = r_m$, т.е. r_m определяет ширину функции $w(t)$ во временной и $\mathcal{F}\{w(t)\} = W(\omega)$

в частотной областях. Используя теорему 1, получим для каждой частичной

суммы $\left(e^{-\frac{r_m t^2}{2}} a_m t^m \right)$ преобразование Фурье:

$$\mathcal{F} \left\{ \left(e^{-\frac{r_m t^2}{2}} a_m t^m \right) \right\} = (-j)^m \left(\frac{a_m}{r_m^{(2m+1)/2}} e^{-\frac{\omega^2}{2r_m}} \right)^{\lfloor m/2 \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \left((-1)^k \frac{r_m^k m!}{2^{m-k} k! (m-2k)!} (2\omega)^{m-2k} \right). \quad (23)$$

Из (23) можно получить общее выражение для преобразования Фурье (22):

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \sum_{m=0}^M \left(e^{-\frac{r_m t^2}{2}} a_m t^m \right) \right\} &= \sum_{m=0}^M \left(\mathcal{F} \left\{ e^{-\frac{r_m t^2}{2}} a_m t^m \right\} \right) = \\ &= \sum_{m=0}^M \left((-j)^m \left(\frac{a_m}{r_m^{(2m+1)/2}} e^{-\frac{\omega^2}{2r_m}} \right)^{\lfloor m/2 \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \left((-1)^k \frac{r_m^k m!}{2^{m-k} k! (m-2k)!} (2\omega)^{m-2k} \right) \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Частный случай многочлена (22), имеет вид:

$$w(t) = e^{-\frac{r t^2}{2}} \sum_{m=0}^M (a_m t^m). \quad (25)$$

Выражение (25) отличается от (22) общим экспоненциальным множителем $e^{-\frac{r t^2}{2}}$ для всех слагаемых.

Для обратного преобразования Фурье многочленов вида:

$$W(\omega) = \sum_{m=0}^M \left(e^{-\frac{r_m \omega^2}{2}} a_m \omega^m \right), \quad (26)$$

используя преобразования аналогичные изложенным выше и теорему 1, получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_{m=0}^M \left(e^{-\frac{r_m \omega^2}{2}} a_m \omega^m \right) \right\} = \\ = \sum_{m=0}^M \left((j)^m \left(\frac{a_m}{r_m^{(2m+1)/2}} e^{-\frac{t^2}{2r_m}} \right) \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \left((-1)^k \frac{r_m^k m!}{2^{m-k} k! (m-2k)!} (2t)^{m-2k} \right) \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Многочлены вида (22,25,26) и их преобразование Фурье (24,27) могут быть очень полезны для формирования откликов систем с дробно-рациональной передаточной функцией и синтеза радиочастотных сигналов с заданной шириной спектра частот.

4. Метод синтеза откликов систем с дробно-рациональной передаточной функцией

Известно, что в частотной области передаточные функции выражаются через дробно-рациональные функции вида:

$$H(j\omega) = \frac{S_{out}(j\omega)}{S_{in}(j\omega)} = \frac{\sum_{n=0}^N \beta_n (j\omega)^n}{1 \pm \sum_{m=1}^M \alpha_m (j\omega)^m} = \frac{\sum_{n=0}^N \beta_n (j\omega)^n}{\sum_{m=0}^M \alpha_m (j\omega)^m}, \quad (28)$$

где β_n – коэффициенты полинома числителя; α_m – коэффициенты полинома знаменателя; $S_{out}(j\omega)$ – отклик системы в частотном пространстве; $S_{in}(j\omega)$ – возмущающее воздействие в частотном пространстве. Следует отметить, что существует несколько различных форм записи дробно-рациональных уравнений передаточных функций, в данном случае использована (28) удобная для изложения материала настоящей работы. При этом, $S_{out}(j\omega) = H(j\omega)S_{in}(j\omega)$. Для реальных устройств свойства и соответствующая им форма дробно-рациональной функции (28) ограничены условиями физической реализуемости. Так, например, известны ограничения для комплексной проводимости и сопротивления [17]. В некоторых случаях желательно иметь в качестве отклика системы многочлен $e^{-f(\omega^2)} \sum_{n=0}^N \beta_n (j\omega)^n$, где $f(\omega^2)$ – некоторая функция, определяющая Гауссову форму выражения $e^{-f(\omega^2)}$. Например, используя в качестве возмущающего воздействия выражение вида:

$$S_{in}(j\omega) = e^{-r\frac{\omega^2}{2}} \sum_{m=0}^M \alpha_m(j\omega)^m, \quad (29)$$

получим отклик системы в виде многочлена степени N :

$$S_{out}(j\omega) = H(j\omega)S_{in}(j\omega) = e^{-r\frac{\omega^2}{2}} \sum_{m=0}^M \alpha_m(j\omega)^m \frac{\sum_{n=0}^N \beta_n(j\omega)^n}{\sum_{m=0}^M \alpha_m(j\omega)^m} = e^{-r\frac{\omega^2}{2}} \sum_{n=0}^N \beta_n(j\omega)^n. \quad (30)$$

На основании выражения (27), используя не явное преобразование Фурье, не сложно получить образ во временном пространстве для выражений (29, 30). Таким образом, во временном пространстве отклик системы тоже будет многочленом степени N , причем используя доказанные теоремы результат несложно получить без явного обратного преобразования Фурье, что в некоторых случаях критично учитывая вычислительную сложность быстрого преобразования Фурье $O(L \log L)$, где L – длина преобразуемого вектора. Возмущающее воздействие (22) во временном пространстве так же является полиномом степени M , который можно получить, используя (27). Управляя параметром r в (29) можно управлять шиной спектра и длительностью возмущающего воздействия и отклика системы.

Решение подобных задач полезно, например, при исследовании передаточных функций линейных электрических цепей или при распознавания сигналов заданной формы при корреляционной фильтрации, и в других задачах теории автоматического управления, радиоэлектроники и электротехники.

Исследуем частный случай. Пусть дана схема (рис. 1) необходимо синтезировать ответный отклик в виде многочлена тока $\dot{I}_1(j\omega)$ на возмущающее воздействие $\dot{U}_{in}(j\omega) = \dot{E}(j\omega) - R_1 \dot{I}_1(j\omega)$ на зажимах (1,2), где $\dot{E}(j\omega)$ – идеальный источник ЭДС; R_1 – внутреннее сопротивление источника ЭДС переводящее идеальный источник в неидеальный; $\dot{I}_1(j\omega)$ – ток в первой 621.3.01; 512.62 ветви. Нижние индексы, в обозначениях на схеме (рис. 1), и далее по тексту соответствуют номеру ветви схемы.

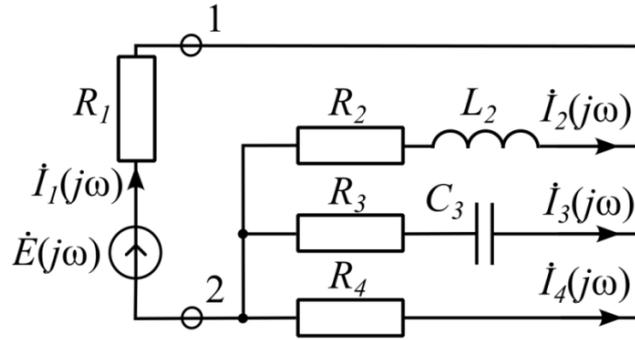


Рис. 1. Исследуемая схема.

Методом контурных токов [18], получим уравнение, связывающее ток $\dot{I}_1(j\omega)$ и напряжение на зажимах (1,2) в виде выражения проводимости:

$$Y(j\omega) = \frac{\dot{I}_1(j\omega)}{\dot{U}_{in}(j\omega)} = \frac{R_2 + R_4 + j(L_2 + C_3R_2R_3 + C_3R_2R_4 + C_3R_3R_4)\omega - (C_3L_2R_3 + C_3L_2R_4)\omega^2}{R_2R_4 + j(L_2R_4 + C_3R_2R_3R_4)\omega - C_3L_2R_3R_4\omega^2}. \quad (31)$$

Тогда $\dot{I}_1(j\omega) = Y(j\omega)\dot{U}_{in}(j\omega)$, при этом $Y(j\omega)$ – проводимость, есть передаточная функция связывающая возмущение $\dot{U}_{in}(j\omega)$ и отклик системы $\dot{I}_1(j\omega)$. За счет изменения значений R, L, C компонентов схемы можно задавать значения коэффициентов полинома числителя и знаменателя (31).

Подав на вход схемы (рис. 1) напряжение в виде многочлена:

$$\dot{U}_{in}(j\omega) = e^{-r\frac{\omega^2}{2}} (R_2R_4 + j(L_2R_4 + C_3R_2R_3R_4)\omega - C_3L_2R_3R_4\omega^2). \quad (32)$$

Получим отклик системы так же в виде многочлена:

$$\dot{I}_1(j\omega) = e^{-r\frac{\omega^2}{2}} (R_2 + R_4 + j(L_2 + C_3R_2R_3 + C_3R_2R_4 + C_3R_3R_4)\omega - (C_3L_2R_3 + C_3L_2R_4)\omega^2). \quad (33)$$

Причем, множитель $e^{-r\frac{\omega^2}{2}}$, в соответствии с (26,27) будет определять ширину отклика и возмущающего воздействия в частотной и временной областях. Подбором компонентов схемы, с учетом физической реализуемости $C_3, L_2, R_1, R_2, R_3, R_4 \in \mathbb{R}$ и $C_3, L_2, R_1, R_2, R_3, R_4 \geq 0$, можно определить коэффициенты и соответствующую форму многочленов. Распределение множителя мнимой единицы j при степенях круговой частоты ω в (32,33) определяет, что $\mathcal{F}^{-1}\{\dot{U}_{in}(j\omega)\} = u_{in}(t)$ и $\mathcal{F}^{-1}\{\dot{I}_1(j\omega)\} = i_1(t)$ реализуемы во временном пространстве

как вещественные функции. Отметим, что сигналы, соответствующие выражениям (32, 33), могут быть сложно реализуемы по энергетическим соображениям, т.к. может потребоваться передать значительную мощность за относительно малое время, причем в заданной форме (32). Решить данный вопрос, обеспечив физическую реализуемость возмущающего воздействия, можно с помощью масштабирования по амплитуде, введя в выражение (32) масштабирующий множитель (ξ^{-1}), выбираемый из условия физической реализуемости формы сигнала на заданных масштабах времени.

Таким образом, получим для возмущающего воздействия (напряжения):

$$\begin{cases} \dot{U}_{in}(j\omega) = \frac{1}{\xi} e^{-r\frac{\omega^2}{2}} (R_2 R_4 + j(L_2 R_4 + C_3 R_2 R_3 R_4)\omega - C_3 L_2 R_3 R_4 \omega^2) \\ u_{in}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\dot{U}_{in}(j\omega)\} = \\ = \frac{1}{\xi \sqrt{r^5}} e^{-\frac{t^2}{2r}} (R_2 R_4 r^2 - C_3 L_2 R_3 R_4 r - (L_2 R_4 + C_3 R_2 R_3 R_4)rt + C_3 L_2 R_3 R_4 t^2) \end{cases} \quad (34)$$

Для отклика, т.е. в рассматриваемом случае для тока, получим:

$$\begin{cases} \dot{I}_1(j\omega) = \frac{1}{\xi} e^{-r\frac{\omega^2}{2}} \begin{pmatrix} R_2 + R_4 + j(L_2 + C_3 R_2 R_3 + C_3 R_2 R_4 + C_3 R_3 R_4)\omega - \\ -(C_3 L_2 R_3 + C_3 L_2 R_4)\omega^2 \end{pmatrix} \\ i_1(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\dot{I}_1(j\omega)\} = \\ = \frac{1}{\xi \sqrt{r^5}} e^{-\frac{t^2}{2r}} \begin{pmatrix} (R_2 + R_4)r^2 - (C_3 L_2 R_3 + C_3 L_2 R_4)r - \\ -(L_2 + C_3 R_2 R_3 + C_3 R_2 R_4 + C_3 R_3 R_4)rt + (C_3 L_2 R_3 + C_3 L_2 R_4)t^2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (35)$$

Для примера приведем численное моделирование, пусть параметры схемы (рис. 1), следующие: $R_1 = 50$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $R_3 = 1$ Ом, $R_4 = 50$ Ом, $L_2 = 3.2 \cdot 10^{-4}$ Гн, $C_3 = 5.0 \cdot 10^{-6}$ Ф. При параметре $r = 10^{-9}$ и масштабирующем множителе $\xi = 2.0 \cdot 10^7$ возмущающее напряжение имеет уравнение:

$$\begin{cases} \dot{U}_{in}(j\omega) = 5.0 \cdot 10^{-8} e^{-2 \cdot 10^{-9} \omega^2} (150 + 1.68 \cdot 10^{-2} j\omega - 8.0 \cdot 10^{-8} \omega^2) \\ u_{in}(t) = 5.0 \cdot 10^{-8} e^{-5 \cdot 10^8 t^2} (2.21 \cdot 10^6 - 5.29 \cdot 10^{11} t + 2.53 \cdot 10^{15} t^2) \end{cases}$$

и отклик тока:

$$\begin{cases} \dot{I}_1(j\omega) = 5.0 \cdot 10^{-8} e^{-2 \cdot 10^{-9} \omega^2} (53 + 1.33 \cdot 10^{-3} j\omega - 8.16 \cdot 10^{-8} \omega^2) \\ i_1(t) = 5.0 \cdot 10^{-8} e^{-5 \cdot 10^8 t^2} (-9.04 \cdot 10^5 - 4.22 \cdot 10^{10} t + 2.58 \cdot 10^{15} t^2) \end{cases}$$

На графиках (рис. 2, 3) приведены изображения в частотном и временном пространствах возмущающего воздействия напряжения (рис. 2) и отклика тока на возмущение (рис. 3).

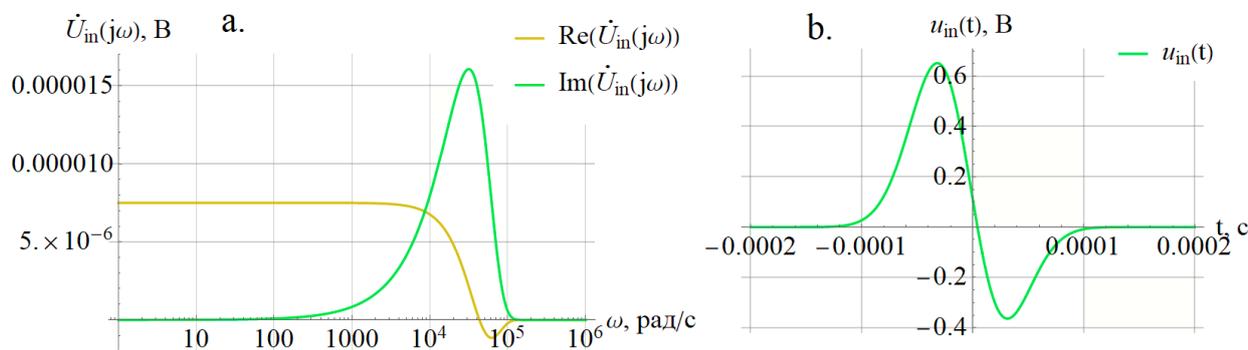


Рис. 2. Возмущающее напряжение: а. – $\dot{U}_{in}(j\omega)$ в частотном пространстве; б. – $u_{in}(t)$ во временном пространстве.

Следует отметить, что на графиках (рис. 2, б.) и (рис. 3, б.) имеется отрицательные значения времени, что является следствием моделирования в частотной области и последующим отображением сигналов во временную область с помощью преобразования Фурье реализуемого по теореме 1. При практической реализации, условная точка нуля времени будет определяться началом возмущающего воздействия.

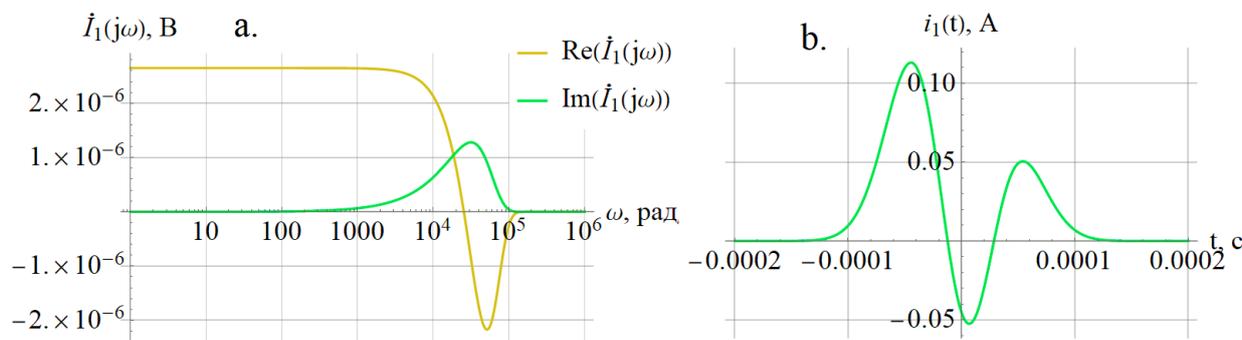


Рис. 3. Отклик на возмущающее воздействие (ток): а. – $\dot{I}_1(j\omega)$ в частотном пространстве; б. – $i_1(t)$ во временном пространстве.

Одно из возможных применений предлагаемого метода синтеза откликов в виде многочленов, является управление откликом электронных систем что позволяет, например, синтезировать каскады передающих устройств, синтезирующих различные (в том числе взаимно-ортогональные) отклики на общее возмущающее воздействие и осуществлять когерентную передачу

символов кодированных различными формами многочленов, имеющих форму (30). С другой стороны, разработав схемы обратных преобразований можно осуществлять когерентный прием. Таким образом, предоставляется возможность аппаратной реализации преобразований сигналов, что позволяет существенно повысить быстродействие и снизить стоимость реализации приемо-передающих устройств.

5. Синтез сигналов с заданной шириной спектра

ВЭГ образуют базис в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ и потому позволяют синтезировать ортогональные и биортогональные алфавиты сигнальных символов. Одним из возможных способов синтеза сигналов является непосредственное использование ВЭГ, например, в форме (3) или (6). Причем возможно использование как непосредственно определяя форму сигнала ВЭГ, так и используя ВЭГ в качестве огибающей, при модуляции гармонического сигнала. При этом возникает вопрос управления шириной сигнала в частотной и временной областях. Управление шириной сигнала в частотной и временной областях возможно за счет полученных ранее выражений (22-27). Но при использовании (22-27) форма ВЭГ будет изменена, т.к. (22-27) масштабируют только функцию Гаусса, а ВЭГ состоят из произведения полиномов Эрмита на функцию Гаусса. Поэтому для сохранения формы ВЭГ и соответственно свойств, необходимо масштабировать и функцию Гаусса и полином Эрмита. На основании (3) запишем модифицированную форму ВЭГ позволяющую осуществить такое масштабирование:

$$\eta(v, t, \mu) = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2^v v! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{\mu^2 t^2}{2}} \sum_{k=0}^{\lfloor v/2 \rfloor} \left((-1)^k \frac{v!}{k!(v-2k)!} (2\mu t)^{v-2k} \right), \quad (36)$$

где $\mu \geq 0$ – масштабирующий коэффициент. Выражение (36) определяет

нормированную функцию, т.е. $\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\eta(v, t, \mu)|^2 dt} = 1$ при $v \in \mathbb{N}_0$ и $\mu \geq 0$; и образует

ортогональное множество, т.е. $\int_{-\infty}^{\infty} \eta(v, t, \mu) \eta(n, t, \mu) dt = \delta_v^n$ при $v, n \in \mathbb{N}_0$ и $\mu = const$.

Таким образом (36) порождает ортонормированное множество в $L^2(\mathbb{R})$.

Используя теорему 1 получим преобразование Фурье (36):

$$\mathcal{F}\{\eta(v,t,\mu)\} = \frac{(-j)^v \sqrt{\mu}}{\mu^{v+1} \sqrt{2^v v!} \sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2\mu^2} |v/2|} \sum_{k=0}^{\lfloor v/2 \rfloor} \left((-1)^k \frac{v!}{k!(v-2k)!} \mu^{2k} (2\omega)^{v-2k} \right). \quad (37)$$

Выражение (36) позволяет во временном пространстве синтезировать сигнал непосредственно или может быть использовано в качестве огибающей при модуляции гармонического сигнала. При этом μ является масштабирующим коэффициентом.

Заключение

Выполнены исследования преобразования Фурье ортонормированных и нормальных форм вейвлетов Эрмита-Гаусса. Сформулированные и доказанные теоремы, по мнению авторов, способствуют развитию методов аналитического и машинного расчета при решении ряда задач в частотной и/или временной области. Приведены некоторые алгебраические примеры и примеры практического использования в задачах радиоэлектроники, сформулированных авторами теорем.

Предложен метод синтеза откликов в виде многочленов для систем с дробно-рациональной передаточной функцией. Подобные решения могут быть полезны как в задачах исследования систем, так и для управляемого синтеза сигналов заданной формы в частотной и/или временной области.

ВЭГ образуют базис и при этом являются собственными функциями преобразования Фурье. Имеются перспективы применения ВЭГ непосредственно или в качестве огибающей, для синтеза радиосигналов. За счет изменения масштабирующего параметра ВЭГ предоставляется возможность управления соотношением протяженности сигнала во временном и занимаемой им ширины полосы в частотном пространствах. Причем как во временном, так и в частотном пространствах представление сигнала эффективно ограничено функцией Гаусса.

Основным результатом работы является предложенный математический аппарат в виде сформулированных и доказанных теорем применимых для преобразования Фурье произвольных полиномов одной переменной, умноженных на функцию Гаусса, причем преобразование выполняется аналитически и без использования интеграла Фурье. По мнению авторов, полученный результат способствует развитию теории и практики прикладной математики и обработки сигналов, в области радиоэлектроники, оптоэлектроники, электротехники и теории автоматического управления.

Литература

1. Hermite M. Sur un nouveau développement en série des fonctions. – Imprimerie de Gauthier-Villars, 1864.
2. Градштейн И.С., Рыжик И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
3. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
4. Суетин С.П. Полиномы Эрмита–Паде и квадратичные аппроксимации Шафера для многозначных аналитических функций // Успехи математических наук. – 2020. – Т. 75. – №. 4 (454). – С. 213-214. <https://doi.org/10.4213/rm9954>
5. Duran U. et al. A note on the (p, q) -Hermite polynomials // Appl. Math. Inf. Sci. – 2018. – V. 12. – №. 1. – P. 227-231. <https://doi.org/10.18576/amis/120122>
6. Шарапудинов И.И., Гаджиева З.Д., Гаджимирзаев Р.М. Разностные уравнения и полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера // Владикавказский математический журнал. – 2017. – Т. 19. – №. 2. – С. 58-72. <https://doi.org/10.23671/VNC.2017.2.6509>

7. Горлов В.А., Паршин Д.С. Разложение функции с экспоненциальным ростом в ряд Фурье по ортогональным полиномам Чебышева-Эрмита // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2015. – Т. 3. – №. 8-3. – С. 245-248. <https://doi.org/10.12737/15633>
8. Доброхотов С.Ю., Цветкова А.В. О лагранжевых многообразиях, связанных с асимптотикой полиномов Эрмита // Математические заметки. – 2018. – Т. 104. – № 6. – С. 835-850. <https://doi.org/10.4213/mzm12093>
9. Ровба Е.А., Пищик К.В. Интерполяционный рациональный процесс Эрмита-Фейера на отрезке. Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Серия 2. Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. 2020. – Т. 10. – № 3. – С. 6-15.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
11. Борзов В.В., Дамаскинский Е.В. Обобщенные когерентные состояния: Новый подход // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН. – 2003. – Т. 300. – №. 8. – С. 65-71.
12. Кислинский В.С., Грахова Е.П., Абдрахманова Г.И. Применение вейвлетов и функций Эрмита для моделирования СШП импульсов под требования маски ГКРЧ // Инфокоммуникационные технологии. 2015. – Т. 13. – № 4. – С. 391-398. <https://doi.org/10.18469/ikt.2015.13.4.05>
13. Сеницын И.Н. Методы моментов в задачах аналитического моделирования распределений в нелинейных стохастических системах на многообразиях // Системы и средства информатики. – 2015. – Т. 25. – № 3. – С. 24-43. <https://doi.org/10.14357/08696527150302>
14. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Второе издание. – М.: Наука, 1974. – 296 с.
15. Гришенцев А.Ю. Автокорреляционные и фрактальные свойства матриц линейного унитарного преобразования Фурье // Радиотехника. 2019. – № 1. – С. 5-14. <https://doi.org/10.18127/j00338486-201901-01>

16. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс, 9-е изд. – М.: Айрис-пресс. 2010. – 608 с.
17. Зиборов С.Р. Синтез линейных радиотехнических цепей. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2013. – 92 с.
18. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники, 4-е изд. Т. 1. – СПб: Питер, 2006. – 463 с.

Для цитирования:

Гришенцев А.Ю., Коровкин Н.В., Коробейников А.Г. Исследование свойств преобразования Фурье вейвлетов Эрмита-Гаусса и применение полученных результатов в задачах радиоэлектроники // Журнал радиоэлектроники. – 2025. – № 6. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.6.11>