

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2026.6.3>

УДК: 537.874; 537.624

## ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ ИНТЕРПРЕТАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПРЕЦЕССИИ НАМАГНИЧЕННОСТИ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

В.С. Власов <sup>1</sup>, А.В. Голов <sup>1</sup>, Л.Н. Котов <sup>1</sup>, В.И. Щеглов <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Сыктывкарский государственный университет им. П.Сорокина,  
167001, Сыктывкар, Октябрьский пр., 55

<sup>2</sup> Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН,  
125009, Москва, ул. Моховая, 11 с.7

Статья поступила в редакцию 12 мая 2026 г.

**Аннотация.** Рассмотрено применение модели динамического потенциала для интерпретации нелинейной прецессии намагниченности в среде с кубической анизотропией типа [001]. Предложена модель динамического потенциала с учетом взаимодействия намагниченности с внешним полем, характера одноосной и кубической анизотропии, а также размагничивания формы пластины. Выполнен анализ потенциальной поверхности кубической анизотропии типа [001], установлено, что такая поверхность имеет максимум на середине пластины и четыре симметрично расположенных минимума. Выявлены два характерных сечения потенциала вертикальной плоскостью, из которых первое сечение проходит через один из минимумов, а второе сечение проходит через максимум между двумя соседствующими минимумами. Предложен критерий перехода прецессии намагниченности от малой к большой окружности, состоящий в достижении амплитудой намагниченности точки пересечения сечений первого и второго вида. Показано, что свободное установление намагниченности происходит в два этапа. На первом этапе

намагниченность раскручивается по спирали, на втором этапе намагниченность прецессирует внутри одного из локальных минимумов потенциала. Показано, что продолжительность первого этапа обратно пропорциональна величине константы анизотропии, а продолжительность второго определяется параметром релаксации намагниченности. Рассмотрены вынужденные колебания намагниченности при увеличении амплитуды переменного поля. На первом этапе намагниченность прецессирует по малой окружности. На втором этапе намагниченность прецессирует по большой окружности. Переход от первого этапа ко второму происходит скачком при критическом значении амплитуды переменного поля, которое соответствует переходу потенциала от сечения первого вида к сечению второго вида. Приведены некоторые замечания, касающиеся возможного развития работы.

**Ключевые слова:** нелинейные колебания, прецессия намагниченности, кубическая анизотропия.

**Финансирование:** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, грант №75-72-20063, а также в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

**Автор для переписки:** Щеглов Владимир Игнатьевич, [vshcheg@cplire.ru](mailto:vshcheg@cplire.ru)

## Введение

Исследование нелинейных колебаний намагниченности представляет значительный интерес благодаря огромному разнообразию наблюдаемых динамических эффектов – от простого ограничения амплитуды резонансных колебаний и генерации многочисленных гармоник и кратных частот до параметрического возбуждения обменных спиновых волн, сопровождаемых процессами трех и четырехмагнотного взаимодействия и различных видов динамического хаоса [1-7]. При этом размах прецессии намагниченности, как правило, ограничивается довольно малыми углами отклонения от направления равновесия, не более 1-2 градусов, преодолеть которые мешает тот факт, что, начиная с этого момента, вся энергия возбуждающего поля уходит на

параметрическое возбуждение обменных спиновых волн так что на долю однородной прецессии ничего не остается. В работах [8-10] сделана попытка обобщения на несколько большие углы, однако все ограничивается констатацией динамического хаоса опять же вблизи положения равновесия.

Отдельный интерес представляют работы, посвященные динамике намагниченности при больших углах прецессии, которыми считаются углы, превышающие 1-2 градуса, вплоть до 90 градусов. При этом полагается, что необходимым условием достижения таких углов является нормальное намагничивание тонкой пленки, при котором частота возбуждения однородного ферромагнитного резонанса приходится на дно спектра обменных волн, так что их параметрическое возбуждение исключается. В работах [11-15] представлены экспериментальные результаты по наблюдению углов прецессии до 20 градусов, а в импульсном режиме – до 40-60 градусов.

После установления такого факта последовали работы [16-19] и другие, частично обобщенные в обзоре [20] и продолженные в работе [21], где было выполнено теоретическое рассмотрение различных режимов прецессии намагниченности с большими углами в нормально намагниченных пленках, обладающих различными ориентациями осей кубической анизотропии.

Показано, что при малых амплитудах возбуждения намагниченность прецессирует, в основном, вокруг отдельных осей анизотропии, а при достаточно большом уровне возбуждения такие колебания сливаются воедино, причем переход от одной оси анизотропии к другой имеет скачкообразный характер. Построены прецессионные портреты компонент намагниченности, отклоненных от нормали к плоскости пленки на углы в десятки градусов, отмечена возможность существования колебаний хаотического характера, построены бифуркационные диаграммы и отмечены интервалы показателей Ляпунова, соответствующие динамическому хаосу.

Ряд работ последнего времени посвящен рассмотрению подобных явлений в однородно намагниченных наночастицах [22-24], причем выявлены три критерия однородности: размер частицы менее  $10^{-4}$  см, отсутствие

тепловых флуктуаций и однодоменность реализуемая при размерах менее  $10^{-6}$  см.

В то же время, несмотря на огромный охват материала перечисленных работ, главным в них явилась констатация различных видов прецессии и параметров хаоса. Результаты, как правило, были привязаны к параметрам реальных материалов, что ограничило возможность их вариации в широких пределах. Критерии переходов между режимами, конкретные механизмы и модели формирования хаоса были представлены недостаточно.

В настоящей работе предпринята попытка в какой-то степени обобщить полученные результаты с единых позиций в рамках модели динамического потенциала.

## 1. Общая геометрия и математический аппарат задачи

Подобно [25, 26], [27, с.388, рис. 9.1] будем рассматривать задачу в традиционной геометрии магнестрикционного преобразователя, схема которой, показана на рис. 1.

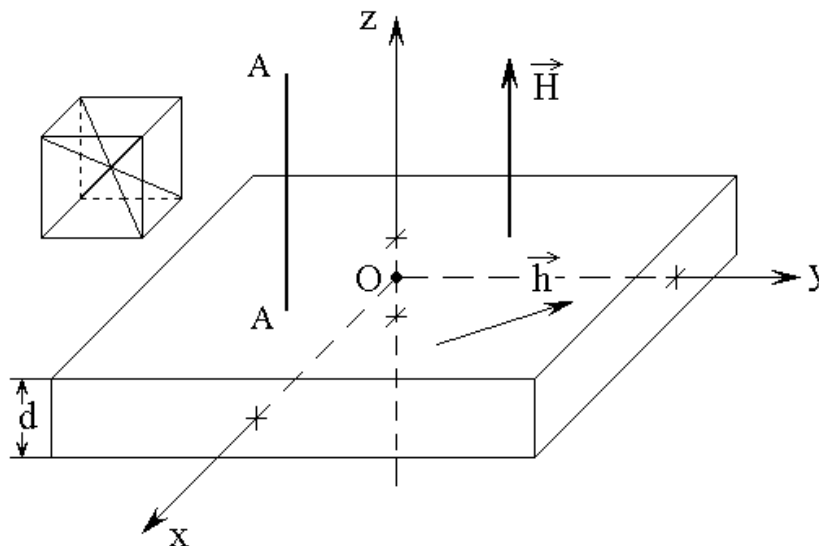


Рис. 1. Общая геометрия задачи.

В основе задачи лежит пластина (пленка) толщины  $d$ , магнитная анизотропия которой имеет кубическую симметрию, плоскость (001) которой совпадает с плоскостью пластины. Кроме кубической в пленке присутствует одноосная анизотропии типа «легкая ось», ось которой A-A перпендикулярна плоскости

пластины. Задача рассматривается в декартовой системе координат  $Oxyz$ , единичные направляющие векторы осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  которой обозначаются далее как  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  соответственно. Плоскость  $Oxy$  такой системы совпадает с плоскостью пластины, а ось  $Oz$  этой плоскости перпендикулярна. Начало системы координат  $O$  находится на середине толщины пластины, поверхности пластины по  $z$  соответствуют координатам  $\pm d/2$ . Постоянное поле  $\vec{H}$  имеет вид:

$$\vec{H} = H_{0x}\vec{i} + H_{0y}\vec{j} + H_{0z}\vec{k}, \quad (1)$$

переменное поле равно:

$$\vec{h} = h_x\vec{i} + h_y\vec{j} + h_z\vec{k}. \quad (2)$$

В рамках настоящей работы будем считать постоянное поле ориентированным перпендикулярно плоскости пластины, то есть:

$$H_{0x} = H_{0y} = 0, H_{0z} = H_0. \quad (3)$$

Переменное поле лежит в плоскости пластины, меняется во времени по синусоиде с правой круговой поляризацией, имеет частоту  $f$ , амплитуду  $h_0$  и следующие компоненты:

$$h_x = h_0 \sin(2\pi f t); \quad (4)$$

$$h_y = h_0 \cos(2\pi f t); \quad (5)$$

$$h_z = 0. \quad (6)$$

Главные факторы, определяющие прецессию намагниченности и хаос, описанные в работах [16-22] – постоянное поле, размагничивание формы пластины и анизотропия обоих видов – кубическая и одноосная.

В отсутствие одноосной анизотропии размагничивание формы стремится уложить намагниченность в плоскость пластины, а внешнее постоянное поле, будучи нормальным к этой плоскости, стремится вывернуть намагниченность из нее. Если внешнее поле меньше поля размагничивания, то намагниченность принимает положение, отклоненное от нормали к пластине на некоторый угол [28], [29, с.189-194]. Одноосная анизотропия типа «легкая ось» действует

против размагничивания формы, так что результирующая анизотропия вдоль оси  $Oz$ , а также результирующая ориентация намагниченности определяется суммарным воздействием обоих этих факторов.

В отсутствие или при достаточно малой кубической анизотропии приложение переменного поля в этом состоянии вызывает прецессию равновесного положения намагниченности [27, гл.9,10].

При этом проекция прецессионного движения на плоскость пластины представляет собой большое кольцо, радиус которого определяется углом отклонения равновесной намагниченности от оси  $Oz$ , причем по огибающей такое кольцо сопровождается малыми кольцами, радиус которых определяется величиной переменного поля [27, с.392, рис. 9.2д].

В рамках настоящей работы, в отличие от [27], прецессия равновесия намагниченности не является основным предметом рассмотрения, поэтому отметим, что, согласно [27, стр.502-503], при поле кубической анизотропии выше 3-4 % от поля размагничивания, прецессия равновесия срывается, уступая место простой однородной прецессии [27, с.392, рис. 9.2е], так что будем считать поле кубической анизотропии заведомо большим этого значения.

Математический аппарат задачи, в основном, совпадает с приведенным в работе [27, стр.491-495], Рассмотрение проводится на основе уравнения Ландау-Лифшица-Гильберта [2, стр.39, форм.(1.3.2)],

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = -\gamma [\vec{M} \times \vec{H}_e] + \frac{\alpha}{M_0} \left[ \vec{M} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right], \quad (7)$$

где  $\vec{M}$  – вектор динамической намагниченности,  $\vec{H}_e$  – эффективное поле, определяемое параметрами среды и условиями задачи,  $\gamma$  – гиромагнитная постоянная ( $\gamma > 0$ ),  $\alpha$  – параметр затухания прецессии намагниченности.

Записывая (7) по компонентам и разрешая полученную систему уравнений относительно производных от компонент намагниченности, получаем систему уравнений движения в виде [27, стр.54, форм.(2.97)-(2.99)], [31, стр.16, форм.(1.1)]:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2} \cdot \left[ (m_y + \alpha m_x m_z) \cdot H_{ez} - (m_z - \alpha m_y m_x) \cdot H_{ey} - \alpha \cdot (m_y^2 + m_z^2) \cdot H_{ex} \right]; (8)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2} \cdot \left[ (m_z + \alpha m_y m_x) \cdot H_{ex} - (m_x - \alpha m_z m_y) \cdot H_{ez} - \alpha \cdot (m_z^2 + m_x^2) \cdot H_{ey} \right]; (9)$$

$$\frac{\partial m_z}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2} \cdot \left[ (m_x + \alpha m_z m_y) \cdot H_{ey} - (m_y - \alpha m_x m_z) \cdot H_{ex} - \alpha \cdot (m_x^2 + m_y^2) \cdot H_{ez} \right]; (10)$$

где  $m_{x,y,z}$  – намагниченность, нормированная на величину намагниченности насыщения  $M_0$ .

**Замечание.** Запись уравнений движения для намагниченности именно в таком виде, в отличие от упрощенного вида, получаемого путем линеаризации [1-3], [30, стр.42, форм. (2.37)-(2.39)], позволяющего получить удобную формулировку тензора восприимчивости, необходима здесь по той причине, что рассматриваемое далее, а также в работах [16-24], движение намагниченности является существенно нелинейным, так что использование процедуры линеаризации полностью исключается.

Входящие в уравнения (8)-(10) эффективные поля  $H_{ex}$ ,  $H_{ey}$ ,  $H_{ez}$  в общем случае определяются по формуле [27, стр.18, форм.(1.2)]:

$$H_{ex,y,z} = -\frac{\partial U_a}{\partial M_{x,y,z}} = -\frac{1}{M_0} \cdot \frac{\partial U_a}{\partial m_{x,y,z}}, \quad (11)$$

где  $U_a$  – плотность полной энергии структуры, определяемая взаимодействием намагниченности с внешними полями  $U_H$ , а также полями размагничивания  $U_M$  и анизотропии одноосной  $U_E$  и кубической  $U_C$ , в общем случае имеющая вид:

$$U_a = U_H + U_M + U_E + U_C. \quad (12)$$

Приведем в рамках рассматриваемой задачи выражения для этих плотностей энергии по отдельности.

Плотность энергии взаимодействия намагниченности с постоянным и переменным внешними полями имеет вид [27, стр.188-189, форм.(4.207),(4.208)]:

$$U_H = -\vec{M} \vec{H} = -M_0 m_x h_x - M_0 m_y h_y - M_0 H_0 m_z. \quad (13)$$

Плотность энергии размагничивания в рассматриваемой геометрии имеет вид [27, стр.188-189, форм.(4.200)]:

$$U_M = -\frac{1}{2} \vec{M} \vec{H}_M, \quad (14)$$

где поле размагничивания формы тонкой пластины [27, стр.188-189, форм (4.201), (4.203)] имеет вид:

$$\vec{H}_M = -4\pi M_0 m_z \quad (15)$$

так что [27, стр.188-189, форм.(4.204)]:

$$U_M = 2\pi M_0^2 m_z^2. \quad (16)$$

Плотность энергии одноосной анизотропии, ось которой параллельна координатной оси Oz, имеет вид [27, стр.158-160, форм.(4.52)]:

$$U_E = -K_E m_z^2, \quad (17)$$

где анизотропия типа «легкая ось» соответствует  $K_E > 0$ .

Плотность энергии кубической анизотропии с ориентацией [001] имеет вид [27, стр.168-170, форм.(4.114)]

$$U_C^{(001)} = -K_C (m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2). \quad (18)$$

где  $K_C$  – константа кубической анизотропии, а поле кубической анизотропии равно:

$$H_C = \frac{2K_C}{M_0}. \quad (19)$$

В рамках настоящей работы будем полагать оси типа [111] – легкими, для которых должно быть  $K_C > 0$  [27, стр.494, форм.(10.34)].

Таким образом, полная плотность энергии (12) принимает вид:

$$U_a = -M_0 m_x h_x - M_0 m_y h_y - M_0 H_0 m_z + 2\pi M_0^2 m_z^2 - K_E m_z^2 - K_C (m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2). \quad (20)$$

Структура четвертого и пятого слагаемых этого выражения относительно  $m_z^2$  одинакова, поэтому для упрощения записи введем обозначение

$$K_A = K_E - 2\pi M_0^2, \quad (21)$$

которое дальше будем называть «условной анизотропией».

Поле такой условной анизотропии получаемое в соответствии с (11) и стремлении динамической компоненты намагниченности к единице, с точностью до знака имеет вид:

$$H_A = \frac{2K_A}{M_0}. \quad (22)$$

В условиях ориентационного перехода это поле играет такую же роль, как обычное поле анизотропии при простом ориентационном переходе [27, стр.202-207].

При  $K_E < 2\pi M_0^2$  константа  $K_A$  отрицательна, так что ее действие уподобляется действию размагничивания формы.

Такая анизотропия стремится уложить намагниченность в плоскость пластины, тогда как постоянное поле, приложенное по нормали к плоскости пластины, стремится намагниченность из этой плоскости вывернуть. Когда эти противодействующие тенденции уравниваются, вектор намагниченности принимает равновесное положение.

При вариации постоянного поля  $H_0$  намагниченность испытывает простой ориентационный переход, подобный описанному в работе [27, стр.202-207, рис. 5.3], отличающийся только ориентацией системы координат.

Вариация поля  $H_0$  допустима только в пределах от нуля до поля  $H_A$ , определяемого формулой (22). При этом угол отклонения вектора намагниченности от нормали к плоскости пластины  $\theta$  принимает значение:

$$\theta = \arcsin \frac{\sqrt{4K_A^2 - M_0^2 H_0^2}}{2K_A}. \quad (23)$$

Можно видеть, что при поле  $H_0 = 0$  угол  $\theta$  равен 90 градусов, то есть намагниченность лежит в плоскости пластины, а при поле  $H_0 = H_A$  угол  $\theta$

равен нулю, так что намагниченность перпендикулярна плоскости пластины. При промежуточных значениях поля угол  $\theta$  также принимает промежуточные значения.

При введении условной анизотропии плотность энергии (20) принимает вид:

$$U_a = -M_0 m_x h_x - M_0 m_y h_y - M_0 H_0 m_z - K_A m_z^2 - K_C (m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2). \quad (24)$$

Эффективные поля, получаемые с помощью формулы (11) принимают вид:

$$H_{ex} = h_x + \frac{2K_C}{M_0} m_x (m_y^2 + m_z^2); \quad (25)$$

$$H_{ey} = h_y + \frac{2K_C}{M_0} m_y (m_z^2 + m_x^2); \quad (26)$$

$$H_{ez} = H_0 + \frac{2K_A}{M_0} + \frac{2K_C}{M_0} m_z (m_x^2 + m_y^2). \quad (27)$$

Эти поля будут использоваться далее для расчета динамики намагниченности.

## 2. Основные параметры задачи

Для удобства сравнения с полученными ранее результатами основные параметры были выбраны близкими к принятым в работе [27, стр.391]. Так, намагниченность насыщения  $M_0$  положена равной 22,28 Гс. Пластина полагалась заведомо тонкой, так что ее толщина в расчетах явно не фигурировала, а поле размагничивания (15) соответственно равнялось:  $H_M = 280$  Гс, Постоянное поле  $H_0$  варьировалось от нуля до 280 Э, базовое значение составляло 170 Э. Поле одноосной анизотропии варьировалось от нуля до 280 Э, так что при необходимости могло полностью компенсировать поле размагничивания, что обеспечивало  $K_A = 0$ . Учитывая ограничение, накладываемое на кубическую анизотропию для исключения прецессии равновесия, составлявшее 4 % от  $H_M$ , поле кубической анизотропии должно быть больше 11 Э, так что константа кубической анизотропии  $K_C$ , согласно (19), должна превышать 122 эрг см<sup>-3</sup>. В рамках настоящей работы эта константа

варьировалась от этой величины до  $10^5$  эрг см<sup>-3</sup>. Базовое значение параметра затухания  $\alpha$  составляло 0,3 и от этой величины варьировалось в обе стороны на порядок и более. Базовое значение частоты переменного поля  $f$  равнялась 100 МГц и от этого значения варьировалась на порядок в обе стороны. Амплитуда переменного поля  $h_0$  варьировалась от 1 до 1000 Э. Более точные значения параметров указываются в тексте.

В рамках настоящей работы система уравнений движения намагниченности (8)-(10) с учетом (25)-(27) решалась численно методом Рунге-Кутты четвертого порядка с восстановлением длины вектора намагниченности на каждом шаге по времени. Процедура решения подробно описана в работе [25].

### 3. Модель динамического потенциала

В основу интерпретации рассматриваемых далее явлений будем полагать модель динамического потенциала, подобную предложенной в работах [31, 32], [33, стр.108-116], то есть будем исходить из потенциальной энергии системы и характер колебаний будем интерпретировать на основе геометрического анализа структуры потенциальной поверхности.

Как показано в разделе 1, потенциальная энергия, то есть потенциал рассматриваемой системы имеет вид (24):

$$U_a = -M_0 m_x h_x - M_0 m_y h_y - M_0 H_0 m_z - K_A m_z^2 - K_C (m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2), \quad (28)$$

где первые три слагаемые – взаимодействие намагниченности в внешнем поле, четвертое – условная анизотропия, сходная с одноосной и пятое – кубическая анизотропия. При этом одноосная анизотропия имеет тип «легкая ось», а легкие оси кубической анизотропия имеют тип (111), так что константы  $K_A$  и  $K_C$  – положительны.

Рассмотрим сначала возможность свободных колебаний системы, то есть случай, когда внешнее возбуждение отсутствует:

$$h_x = h_y = h_z = 0. \quad (29)$$

При этом полная плотность энергии (28) принимает вид:

$$U = -M_0 H_0 m_z - K_A m_z^2 - K_C (m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2). \quad (30)$$

Свободные колебания системы происходят в потенциальной яме, то есть в окрестности минимума потенциала, который существует только в случае, если потенциальная поверхность является достаточно неоднородной.

По переменным, то есть по компонентам намагниченности  $m_x$ ,  $m_y$ , выражение (30) имеет четвертый порядок, так что при положительном характере может иметь четыре корня, между которыми должны располагаться три экстремума, из которых два крайних являются минимумами, а средний между ними – максимумом.

Можно видеть, что четвертый порядок выражения (30) обеспечивается только третьим слагаемым, то есть кубической анизотропией, поэтому сначала рассмотрим потенциал кубической анизотропии отдельно в следующем виде:

$$U_C = -K_C (m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2), \quad (31)$$

где  $K_C > 0$ .

На рис. 2 изображена потенциальная поверхность кубической анизотропии, определяемая выражением (31) при переменных  $m_x$  и  $m_y$ . Для удобства рассмотрения константа кубической анизотропии  $K_C$  положена равное единице, а потенциал по вертикальной оси нормирован на свое максимальное значение.

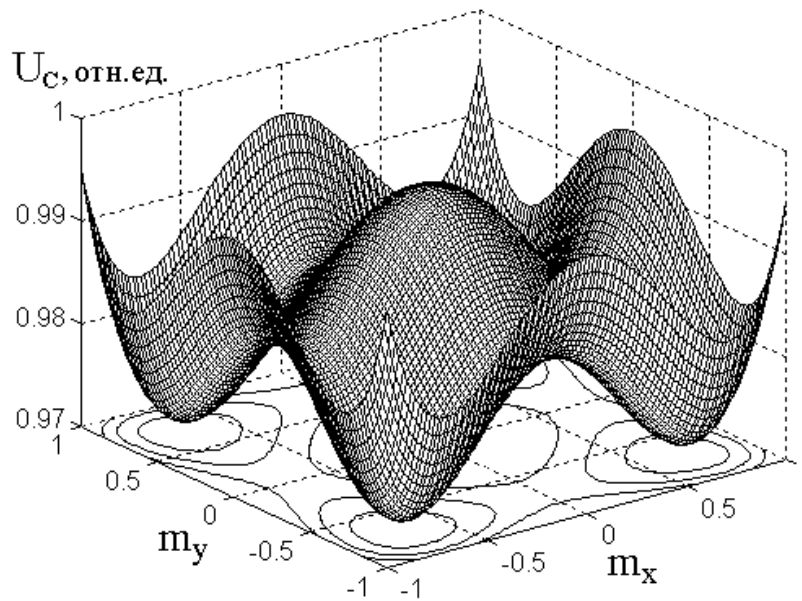


Рис. 2. Потенциальная поверхность кубической анизотропии.  
 Параметры:  $K_C = 1$ ,  $K_A = 0$ ,  $H_0 = 0$ .

Из рисунка видно, что потенциал на середине имеет максимум, а в окрестности углов параметрической плоскости (по  $m_x$ ,  $m_y$ ) – четыре минимума. Из сопоставления с рис. 1 можно видеть, что такая структура потенциальной поверхности обусловлена проекциями легких осей ячейки типа (111) на плоскость  $Oxy$ , то есть (001). В силу симметрии ячейки глубина всех минимумов одинакова. При этом максимум соответствует значению потенциала вблизи единицы (0.998 отн.ед.), а минимумы приходятся на уровень 0,972 отн.ед.

На рис. 3 показана карта сечения потенциальной поверхности на середине между уровнями максимума и минимумов, то есть при величине потенциала около 0.985 отн.ед. Линии соответствуют одинаковому уровню потенциала, то есть, следуя топографической терминологии, их можно назвать «горизонталями». Короткие штрихи имеют вспомогательное значение и направлены от соответствующих горизонталей в сторону уменьшения потенциала.

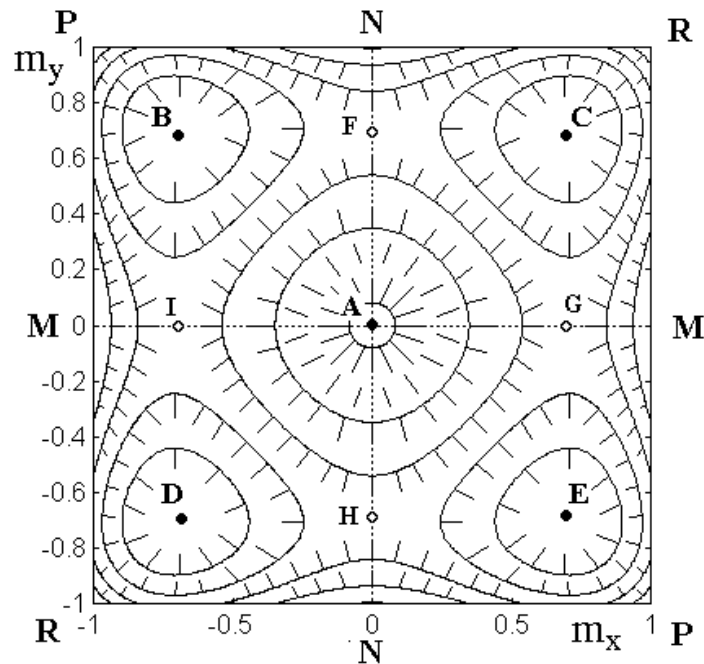


Рис. 3. Сечение потенциальной поверхности на середине высоты между максимальным и минимальными значениями потенциала.

На рисунке центральный максимум обозначен буквой А, а боковые минимумы – буквами В, С, D, Е соответственно. Между каждой парой соседствующих минимумов имеются седловидные точки F, G, H, I, в которых со стороны минимумов имеются спады, а в перпендикулярном направлении – подъемы.

Можно видеть, что карта в целом является симметричной относительно горизонтальной М-М и вертикальной N-N средних линий полного параметрического квадрата, а также является симметричной относительно диагоналей того же квадрата Р-Р и R-R соответственно.

Согласно общим положениям теории колебаний, в рамках модели динамического потенциала прецессию намагниченности можно рассматривать как колебания системы в потенциальной яме в окрестности минимального значения потенциальной поверхности [33, стр.108-116]. Из рассмотрения рис. 2 и рис. 3 можно видеть, что при малой амплитуде намагниченность колеблется только в пределах какой-либо из четырех потенциальных ям В, С, D, Е. Чтобы перейти из одной ямы в другую, амплитуда колебаний намагниченности должна возрасти настолько, что кинетическая энергия системы перевалит через

барьер, разделяющий соседние потенциальные ямы, то есть например, для перехода из точки С в точку Е система должна будет перейти через барьер в точке G.

В такой ситуации при малой амплитуде намагниченность может прецессировать в какой-либо из потенциальных ям В, С, D или Е, не выходя из своей ямы, а при большой амплитуде – перескакивать через барьеры F, G, H, I из одной ямы в другую соседнюю, совершая полные обороты вокруг центрального максимума поверхности в точке А.

#### 4. Два вида потенциальных сечений

В силу симметрии потенциальной поверхности, принципиальным различием обладают только два вида проходящих через центр А сечений потенциала вертикальной плоскостью.

Сечение первого вида проходит через точки расположенных попарно минимумов В и Е (плоскость В-А-Е) или через точки таких же минимумов D и С (плоскость D-А-С), то есть соответствует диагонали квадрата параметрической карты, представленной на рис. 3.

Сечение второго вида проходит через точки расположенных попарно седловин F и H (плоскость F-А-H) или через точки таких же седловин I и G (плоскость I-А-G), то есть соответствует средней линии квадрата параметрической карты, представленной на рис. 3.

Для дальнейшего рассмотрения удобно выразить полную плотность энергии через одну переменную, в качестве которой выберем  $m_x$ .

Прежде всего выразим  $m_z$  через  $m_x$  и  $m_y$ . Условие сохранения длины вектора намагниченности имеет вид:

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1. \quad (32)$$

Из этого условия получаем:

$$m_z = \sqrt{1 - m_x^2 - m_y^2}. \quad (33)$$

Подставляя это выражение в (30), получаем:

$$U = -M_0 H_0 \sqrt{1 - m_x^2 - m_y^2} - K_A (1 - m_x^2 - m_y^2) - K_C \left[ m_x^2 m_y^2 + (m_x^2 + m_y^2)(1 - m_x^2 - m_y^2) \right]. \quad (34)$$

Чтобы свести все к  $m_x$ , в этом выражении остается еще выбор переменной  $m_y$ . В соответствии с сечениями двух видов рассмотрим для потенциала два варианта:

#### **Вариант №1** (диагональ квадрата).

Полагаем  $m_y = m_x$ . При этом из (34) получаем потенциал в виде:

$$U^{(1)} = -M_0 H_0 \sqrt{1 - 2m_x^2} - K_A (1 - 2m_x^2) - K_C \left[ m_x^4 + 2m_x^2 (1 - 2m_x^2) \right]. \quad (35)$$

#### **Вариант №2** (средняя линия квадрата).

Полагаем  $m_y = 0$ . При этом из (34) получаем потенциал в виде:

$$U^{(2)} = -M_0 H_0 \sqrt{1 - m_x^2} - K_A (1 - m_x^2) - K_C \left[ m_x^2 (1 - m_x^2) \right]. \quad (36)$$

Эти два варианта будут далее рассмотрены при различных значениях анизотропии.

### **5. Удельный вклад кубической анизотропии в полную энергию материала**

Как отмечено в разделе 3, четвертый порядок потенциала обеспечивается за счет кубической анизотропии, поэтому рассмотрим формирование потенциала в широком диапазоне ее изменения.

В выражении для полной энергии (28) анизотропия участвует наравне с другими видами энергии – взаимодействия намагниченности с внешним полем и энергией условной анизотропии.

При принятых здесь параметрах задачи (раздел 2) плотность энергии взаимодействия с внешним полем составляет около 3400 эрг см<sup>-3</sup>.

Полагая для простоты, что вклад одноосной анизотропии достаточно мал, то есть условная анизотропия представляет, в основном, энергию

размагничивания, получаем для такой анизотропии энергию  $240 \text{ эрг см}^{-3}$ , что значительно меньше вклада за счет внешнего поля.

Таким образом, можно считать, что основной вклад в энергию, кроме кубической анизотропии, вносит взаимодействие с внешним полем.

В качестве рубежа для оценки вклада кубической анизотропии положим уровень  $1000 \text{ эрг см}^{-3}$ . По сравнению с этим рубежом кубическую анизотропию будем считать слабой, средней и сильной.

Для оценки плотности энергии кубической анизотропии воспользуемся выражениями (35) и (36), в которых положим  $m_x = 0.5$  отн.ед. При этом первое выражение дает сомножитель при константе  $K_C$  равным около  $0,2$  отн.ед., а второе – около  $0,3$  отн.ед.

Полагая  $K_C = 10^3 \text{ эрг см}^{-3}$ , для такой константы получаем плотность энергии анизотропии около  $200\text{-}300 \text{ эрг см}^{-3}$ , что значительно меньше плотности энергии за счет внешнего поля. Такую анизотропию будем считать слабой.

При  $K_C = 10^4 \text{ эрг см}^{-3}$ , вклад кубической анизотропии получается около  $2000\text{-}3000 \text{ эрг см}^{-3}$ , что вполне сравнимо с плотностью энергии за счет внешнего поля. Такую анизотропию будем считать средней.

При  $K_C = 10^5 \text{ эрг см}^{-3}$ , вклад кубической анизотропии получается около  $20000\text{-}30000 \text{ эрг см}^{-3}$ , что заметно превышает плотность энергии за счет внешнего поля. Такую анизотропию будем считать сильной.

Таким образом, принципиального различия характера потенциала и соответственно прецессии намагниченности, которую на данном этапе будем полагать в отсутствие затухания, можно ожидать именно от этих трех градаций кубической анизотропии – слабой, средней и сильной. Рассмотрим эти три случая по отдельности.

## 6. Слабая кубическая анизотропия

На рис. 4 представлены линии сечений потенциальной поверхности по диагонали квадрата (кривая 1) и по средней линии квадрата (кривая 2) для случая слабой анизотропии.

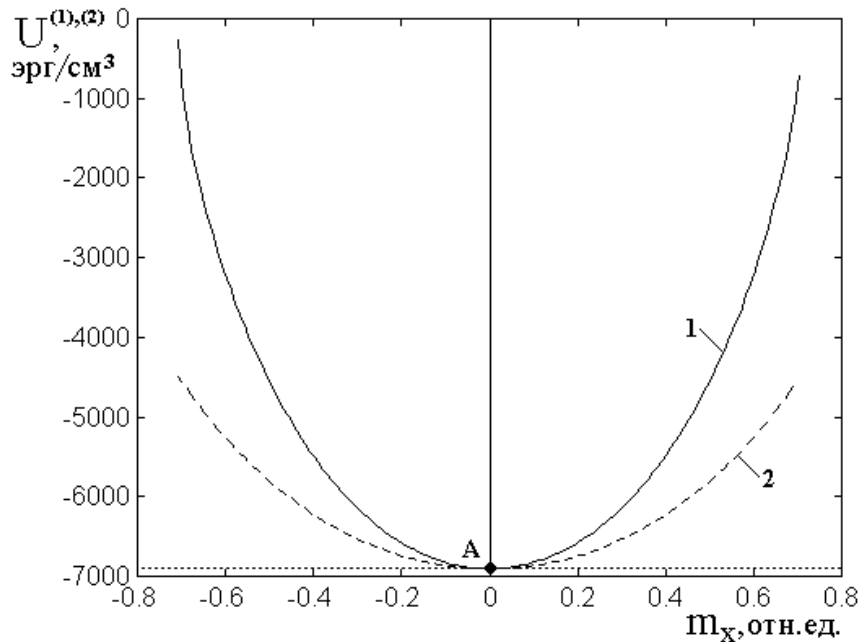


Рис. 4. Линии сечений потенциальной поверхности по диагонали квадрата (сплошная линия, кривая 1) и по средней линии квадрата (пунктирная линия, кривая 2). Кривые построены по формулам (35), (36). Константа кубической анизотропии  $K_C = 10^3$  эрг см<sup>-3</sup>. Остальные параметры – базовые (раздел 2).

Из рисунка можно видеть, что обе кривые имеют четкий квадратичный вид, так что потенциал имеет единственный минимум в точке A. В отсутствие возбуждения колебания намагниченности происходят полностью симметрично относительно минимума, а при возбуждении намагниченность может прецессировать на уровне потенциала, задаваемого амплитудой возбуждения. При этом намагниченность в плоскости  $m_x m_y$  будет прецессировать по замкнутой траектории, периодически переходя с потенциала 1 на потенциал 2 и обратно, то есть ее амплитуда будет периодически меняться.

Рассмотрим теперь прецессию намагниченности в таком потенциале, для чего обратимся к рис. 5, где показаны колебания намагниченности во времени (участок начального установления удален) и соответствующий прецессионный портрет.

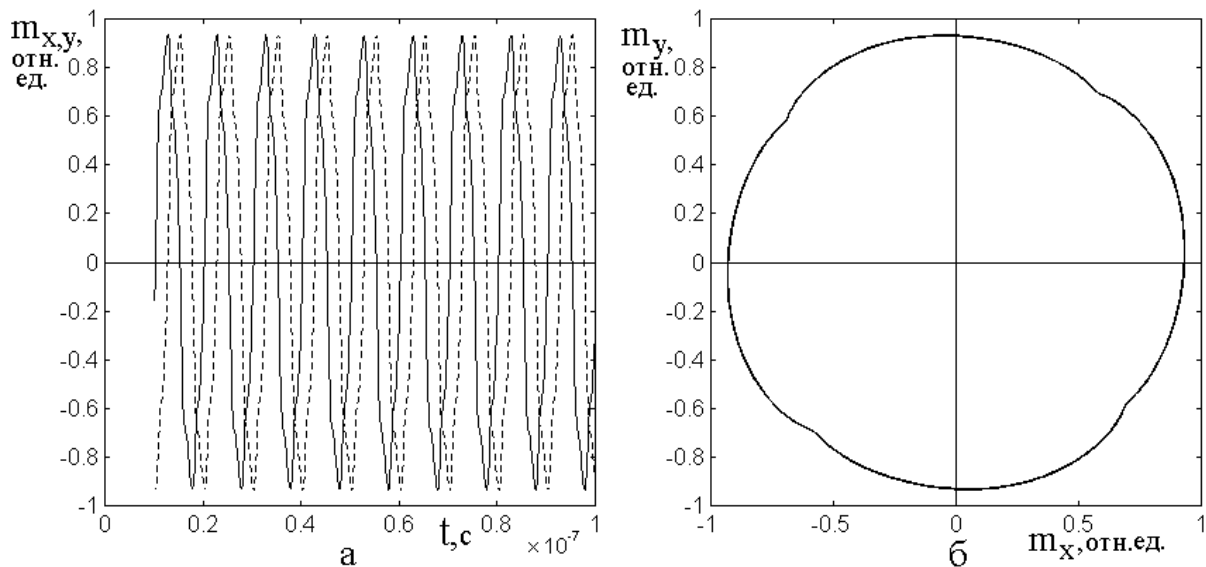


Рис. 5. Прецессия намагниченности при слабой кубической анизотропии.  
 а – колебания компонент намагниченности  $m_x$  (сплошная линия)  
 и  $m_y$  (пунктир) во времени; б – соответствующий прецессионный портрет.  
 Константа кубической анизотропии  $K_C = 10^3$  эрг см $^{-3}$ . Амплитуда переменного  
 поля  $h_0 = 110$  Э. Остальные параметры – базовые (раздел 2).

Из рис. 5а видно, что колебания намагниченности имеют характер, близкий к синусоидальному со взаимным сдвигом компонент на 90 градусов. Прецессионный портрет на рис. 5б близок к правильной окружности с учетом того, что на средних линиях квадрата амплитуда несколько увеличивается, а на диагоналях уменьшается, что полностью соответствует характеру потенциала на рис. 4.

## 7. Средняя кубическая анизотропия

На рис. 6 представлены линии сечений потенциальной поверхности по диагонали квадрата (кривая 1) и по средней линии квадрата (кривая 2) для случая средней анизотропии.

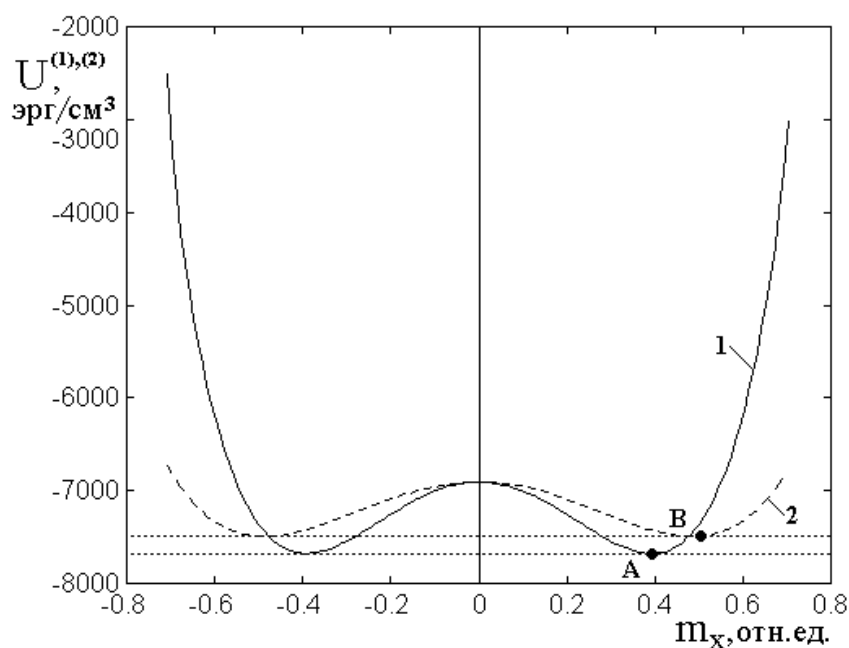


Рис. 6. Линии сечений потенциальной поверхности по диагонали квадрата (сплошная линия, кривая 1) и по средней линии квадрата (пунктирная линия, кривая 2). Кривые построены по формулам (35), (36). Константа кубической анизотропии  $K_C = 10^4$  эрг см<sup>-3</sup>. Остальные параметры – базовые (раздел 2).

Из рисунка можно видеть, что обе кривые имеют вид, соответствующий четвертой степени переменной, так что потенциал имеет один максимум при  $m_x = 0$  и два симметрично расположенных минимума, отмеченных точками А (диагональ квадрата) и В (средняя линия квадрата). Наблюдаемые кривые можно рассматривать как смещение вниз, то есть к меньшему уровню потенциала кривых, приведенных на рис. 4. При таком смещении середина кривых меняется мало, а ближайшие к середине части ветвей опускаются, формируя минимумы, тогда как удаленные от середины части ветвей, хотя также опускаются, но медленнее, чем ближайшие к середине. За счет такого опускания и формируются минимумы на обеих кривых в точках А и В.

Важно отметить, что снижение кривой 1, соответствующей диагонали, происходит быстрее, чем снижение кривой 2, соответствующей средней линии квадрата. При этом точка А, соответствующая кривой 1, располагается ниже точки В, соответствующей кривой 2, то есть минимум диагонали А глубже минимума средней линии В.

Свободные колебания, происходящие при сохранении уровня потенциала, в окрестности минимума кривой 1, то есть точки А, происходят в пределах потенциальной ямы у этой точки, не выходя из нее. На потенциальном портрете это будет выглядеть как малая частично сплюснутая окружность, размер которой будет определяться шириной потенциальной кривой на данном уровне.

Из сравнения с рис. 4 можно видеть, что этот минимум лежит значительно ниже единственного минимума на кривой 1 на рис. 4, соответствующего слабой анизотропии.

Если уровень потенциала таких колебаний лежит выше точки В, то намагниченность выходит из потенциальной ямы в точке А и продолжает колебаться в пределах, ограничиваемых развернутыми ветвями кривой 2. На прецессионном портрете это выглядит как большой круг, размер которого определяется полным размахом ветвей потенциальной кривой 2 на достигнутом уровне.

При достаточном возбуждении намагниченность может прецессировать на уровне потенциала, задаваемого амплитудой возбуждения, позволяющей потенциалу располагаться выше точки В. При этом намагниченность в плоскости  $m_x m_y$  будет прецессировать по замкнутой траектории, периодически переходя с потенциала 1 на потенциал 2 и обратно, то есть ее амплитуда будет периодически меняться.

Более подробно характер вынужденной прецессии в отсутствие затухания представлен на рис. 7, где показаны колебания намагниченности во времени (участок начального установления удален) и соответствующий прецессионный портрет.

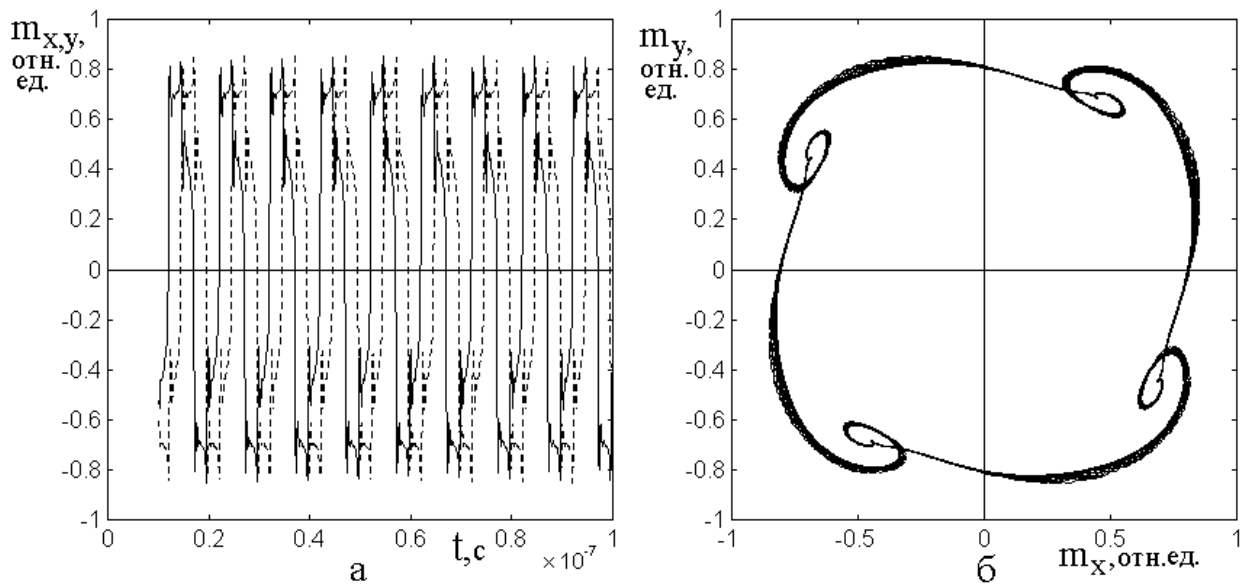


Рис. 7. Прецессия намагниченности при средней кубической анизотропии.

а – колебания компонент намагниченности  $m_x$  (сплошная линия)

и  $m_y$  (пунктир) во времени; б – соответствующий прецессионный портрет.

Константа кубической анизотропии  $K_c = 10^4$  эрг см<sup>-3</sup>. Амплитуда переменного поля  $h_0 = 110$  Э. Остальные параметры – базовые (раздел 2).

Из рис. 7а видно, что колебания намагниченности имеют характер, близкий к импульсному с резкими выбросами на фронтах, при взаимном сдвиге компонент на 90 градусов. Прецессионный портрет на рис. 7б по огибающей близок к правильной окружности, однако на диагоналях квадрата имеются резко выраженные «завитки», соответствующие минимумам потенциальных кривых 1 (точкам А) на рис. 6.

Прецессирующая намагниченность задерживается в локальных ямах потенциала 1, совершает там несколько оборотов, после чего выскакивает из ямы на большую окружность, устремляясь к другому локальному минимуму, где опять несколько задерживается, после чего выскакивает из него, идет дальше и так далее.

Из сопоставления уровней минимумов потенциала на рис. 6 можно видеть, что необходимым условием выхода на большую окружность из завитков малых окружностей является достижение размаха колебаний уровня, определяемого точкой В на рис. 6. То есть, если потенциал не достигает такого уровня, то прецессия ограничивается малыми окружностями в потенциальной

яме кривой 1 на рис. 6, а если потенциал превышает этот уровень, то прецессия вырывается на простор, соответствующий большой окружности, ширина которой определяется расстоянием между ветвями потенциальной кривой 2, расположенными выше точки В.

## 8. Сильная кубическая анизотропия

Рассмотрим теперь случай сильной кубической анизотропии. На рис. 8 для такого случая представлены линии сечений потенциальной поверхности по диагонали квадрата (кривая 1) и по средней линии квадрата (кривая 2).

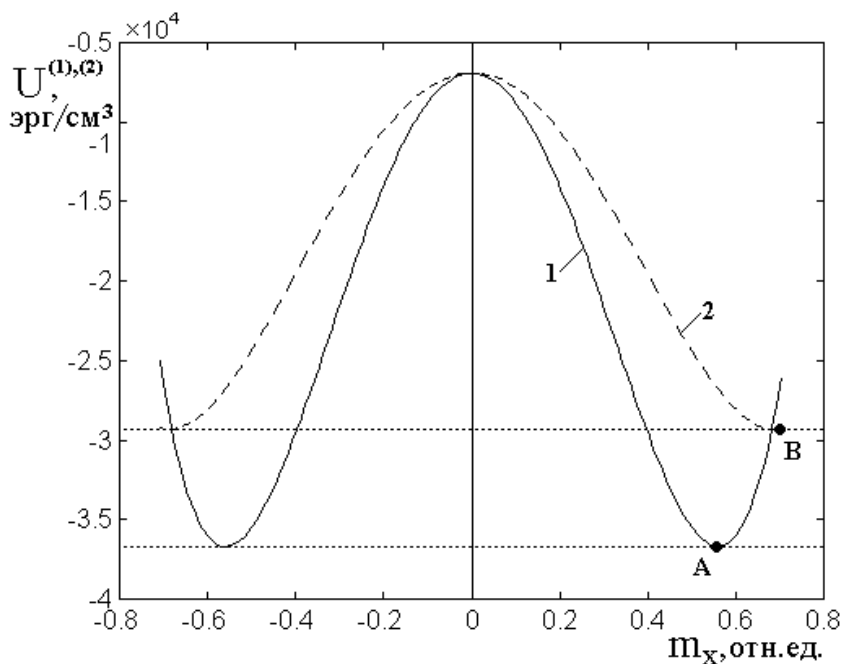


Рис. 8. Линии сечений потенциальной поверхности по диагонали квадрата (сплошная линия, кривая 1) и по средней линии квадрата (пунктирная линия, кривая 2). Кривые построены по формулам (35), (36). Константа кубической анизотропии  $K_C = 10^5$  эрг см<sup>-3</sup>. Остальные параметры – базовые (раздел 2).

Из рисунка можно видеть, что здесь дальнейшее опускание обеих кривых продолжается, так что минимумы разъезжаются от центрального максимума в обе стороны, так что на кривой 1 они еще остаются, а на кривой 2 выходят за рамки рисунка, так что точка В кривой 2 приходится на этот край и спадающая с двух сторон потенциальная яма не формируется.

Заметим, что эти рамки ограничиваются максимальным значением компоненты намагниченности  $m_x$  на диагонали квадрата, когда компонента  $m_y$

имеет такое же значение, а векторная сумма обеих компонент равна единице, то есть на уровне  $\sqrt{2}/2 = 0,7071$  отн.ед.

Таким образом, на совокупности потенциальных кривых остается единственный минимум, отмеченный точкой А на кривой 1.

Свободные колебания в таком случае происходят в окрестности этого единственного минимума и прецессионный портрет должен иметь вид малой искаженной окружности.

Вынужденные колебания при уровне потенциала ниже точки А вообще не возбуждаются, а выше этой точки, но ниже точки В происходят в пределах ямы около точки А. Если амплитуда возбуждения становится настолько большой, что уровень потенциала превышает точку В, то намагниченность выбирается из этой ямы и прецессирует дальше в пределах, допустимых полным расстоянием между ветвями кривой 2 на этом уровне.

Характер колебаний намагниченности для случая, когда уровень возбуждения приходится по потенциалу между точками А и В, показан на рис. 9. Для получения более наглядной картины уровень возбуждения (амплитуда поля  $h_0$ ) по сравнению с предыдущими случаями несколько увеличен.

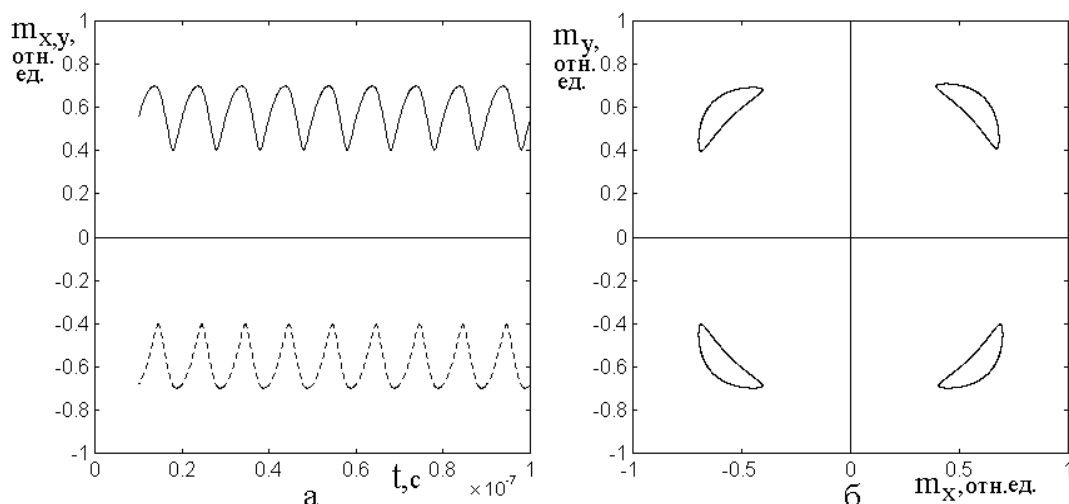


Рис. 9. Прецессия намагниченности при средней кубической анизотропии.

а – колебания компонент намагниченности  $m_x$  (сплошная линия)

и  $m_y$  (пунктир) во времени; б – соответствующий прецессионный портрет.

Константа кубической анизотропии  $K_C = 10^4$  эрг см<sup>-3</sup>. Амплитуда переменного поля  $h_0 = 1000$  Э. Остальные параметры – базовые (раздел 2).

Из рис. 9а видно, что колебания обеих компонент намагниченности имеют характер, близкий к синусоидальному с некоторым обострением частей синусоид, соответствующих меньшим значениям компонент той и другой намагниченностей.

Прецессионный портрет на рис. 9б состоит из четырех частей, расположенных в соответствии с минимумами потенциала кривой 1 типа точки А на рис. 8. Поскольку квадрат имеет две диагонали, на каждой из которых кривая 1 имеет по два минимума, то замкнутых частей полного портрета получается в целом четыре. Все они располагаются симметрично относительно центра квадрата со сдвигом на 90 градусов, а их положение в той или иной четвертях квадрата определяется заданием начальных условий той или иной компонент намагниченности в момент включения возбуждения.

Можно видеть, что замкнутые траектории на рис. 9б заметно отличаются от правильных окружностей. Для удобства терминологии будем далее их называть «частичными малыми окружностями».

Заметим, что приведенные на рис. 9а периодические развертки по времени соответствуют единственной малой окружности, расположенной в левой верхней четверти рис. 9б. Остальные три частичные окружности получаются при отмеченном выше варьировании начальных условий.

Если амплитуда возбуждения недостаточна, чтобы поднять потенциал выше точки В кривой 2 на рис. 8, то прецессия ограничивается только такими четырьмя частичными малыми окружностями. При этом прецессирующая намагниченность остается в рамках каждой одной из таких окружностей, а перескоки из одной в другую, подобные «завиткам» на рис. 7б, не происходят.

Если амплитуда колебаний достаточна для подъема по потенциалу выше точки В, то малые окружности сливаются воедино и дальнейшая прецессия происходит по большой окружности, диаметр которой становится близким к единице, то есть намагниченность в системе  $Oxuz$  (рис. 1) прецессирует уже почти по плоскости  $Oxu$ , то есть, образно говоря, описывает «расплющенный блин» или «плоскую тарелку». При еще большем увеличении уровня

возбуждения такая тарелка уже почти не меняется, все больше расплющиваясь и приближаясь к плоскости  $Oxy$ , причем кубической анизотропии уже не чувствует. При принятых здесь базовых параметрах (раздел 2) такой переход от четырех малых окружностей к одной большой, то есть переход по уровню потенциала выше точки В на рис. 8, происходит при уровне возбуждения  $h_0$  порядка 2000 Э. Оценка, подобная приведенной в разделе 5, показывает, что в этом случае плотность энергии внешнего поля (здесь – переменного) составляет уже около  $40000 \text{ эрг см}^{-3}$  и более, так что значительно превышает плотность энергии кубической анизотропии.

## 9. Свободное установление намагниченности

Рассмотрим теперь прецессию намагниченности в условиях свободного установления, то есть, когда внешнее возбуждение отсутствует, но задано некоторое начальное положение намагниченности, после чего системе предоставляется возможность свободного движения. Обратимся к рис. 10, где показаны колебания намагниченности во времени (а) и соответствующий прецессионный портрет (б). Начальное положение намагниченности установлено в виде небольшого отклонения от нормали к плоскости пластины, то есть от оси  $Oz$  на рис. 1.

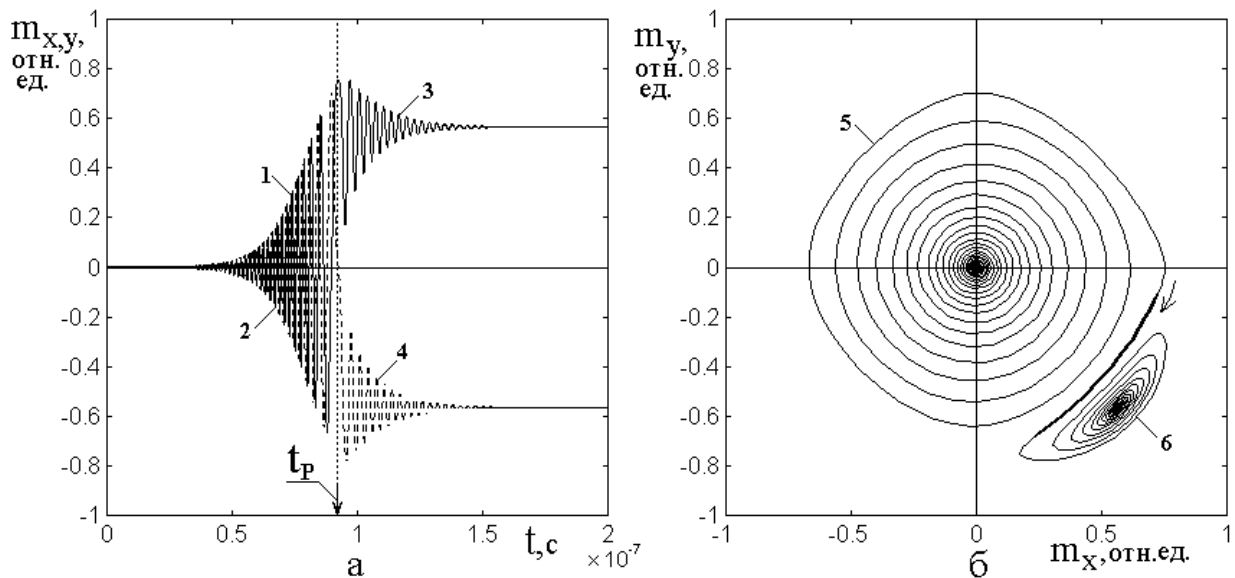


Рис. 10. Прецессия намагниченности в условиях свободного установления ( $h_0 = 0$ ). а – колебания компонент намагниченности  $m_x$  (1, 3 – сплошная линия) и  $m_y$  (2, 4 – пунктир) во времени; б – соответствующий прецессионный портрет (5 – большие окружности, 6 – малые окружности). Константа кубической анизотропии  $K_C = 10^3$  эрг см<sup>-3</sup>. Начальные значения компонент намагниченности:  $m_{x0} = 10^{-4}$  отн.ед.,  $m_{y0} = -10^{-4}$  отн.ед.

Остальные параметры – базовые (раздел 2).

Из рисунка видно, что движение намагниченности во времени происходит в два этапа, где колебания принципиально различны. Критическое время перехода от первого этапа ко второму обозначено через  $t_p$ . На первом этапе, то есть при  $0 < t < t_p$ , намагниченность стремится занять положение, близкое к равновесному, которое определяется ориентацией осей кубической анизотропии с учетом условной анизотропии, в рассматриваемом случае близкой к размагничиванию. Движение намагниченности происходит путем прецессионных колебаний (кривая 1 –  $m_x$ , кривая 2 –  $m_y$ , кривые частично накладываются друг на друга). Амплитуда таких колебаний увеличивается за счет того, что конус прецессии все больше разворачивается в плоскость. Когда ориентация намагниченности достигает уровня равновесного отклонения, соответствующего углу  $\theta$ , определяемому формулой (23) (раздел 2), дальнейшее раскрытие конуса прецессии прекращается. На рисунке первый этап соответствует увеличению амплитуды колебаний до времени около

$t_p = 0,95 \cdot 10^{-7}$  с. После этого движение намагниченности скачком переходит ко второму этапу, то есть ко времени  $t > t_p$ , так что прецессия происходит далее вокруг направления равновесного отклонения (кривая 3 –  $m_x$ , кривая 4 –  $m_y$ ). В рассматриваемом случае ориентации анизотропии типа [001], таких направлений равновесного отклонения всего четыре (рис. 2 и рис. 3, раздел 3), так что намагниченность «зацепляется» за одно первое попавшееся из таких положений и дальше прецессирует уже в соответствующей этому положению потенциальной яме. Здесь амплитуда колебаний намагниченности постепенно уменьшается за счет затухания, после чего намагниченность окончательно устанавливается вдоль равновесного положения и колебания прекращаются.

Прецессионный портрет такого движения показан на рис. 10б. Видны две группы окружностей – большие с центром в начале координат (кривые 5) и малые, центр которых находится в правом нижнем углу квадрата  $m_x m_y$  (кривые 6). Центральные большие окружности соответствуют первому этапу. Траектории прецессионного портрета здесь разворачиваются по часовой стрелке. Радиусы этих окружностей постепенно увеличиваются в соответствии с ростом амплитуды на рис. 10а. Переход от первого этапа ко второму при времени  $t = t_p$  происходит скачком от больших окружностей к малым. Малые окружности, расположенные в правом нижнем углу квадрата  $m_x m_y$ , соответствуют второму этапу. Траектории прецессионного портрета теперь разворачиваются против часовой стрелки. Переход от больших окружностей к малым отмечен утолщенным участком траектории, направление развития которой в этом месте отмечено стрелкой. Радиусы малых окружностей постепенно уменьшаются, стремясь к нулю, что соответствует затуханию колебаний намагниченности в процессе релаксации.

## 10. Замечание о вариации параметров

Проведенное рассмотрение относится к случаю слабой кубической анизотропии при  $K_C = 10^3$  эрг см<sup>-3</sup>. Общий характер прецессии намагниченности в случаях средней и сильной анизотропии остается подобным рассмотренному с тем отличием, что продолжительность первого этапа по мере увеличения анизотропии уменьшается. Так, при слабой анизотропии ( $K_C = 10^3$  эрг см<sup>-3</sup>) скачкообразный переход от первого этапа ко второму происходит при времени  $t_p = 0,95 \cdot 10^{-7}$  с, при средней ( $K_C = 10^4$  эрг см<sup>-3</sup>) – при времени  $t_p = 0,15 \cdot 10^{-7}$  с, при сильной ( $K_C = 10^5$  эрг см<sup>-3</sup>) – при времени  $t_p = 0,02 \cdot 10^{-9}$  с. То есть уменьшение продолжительности первого этапа по мере увеличения анизотропии близко к закону обратной пропорциональности в виде:

$$t_p = \frac{10^{-4}}{K_C}, \quad (37)$$

где  $t_p$  получается в секундах.

На рис. 11 приведена зависимость продолжительности первого этапа прецессии намагниченности от константы кубической анизотропии, полученная из расчета прецессии (точки) и расчета по формуле (37) (сплошная линия).

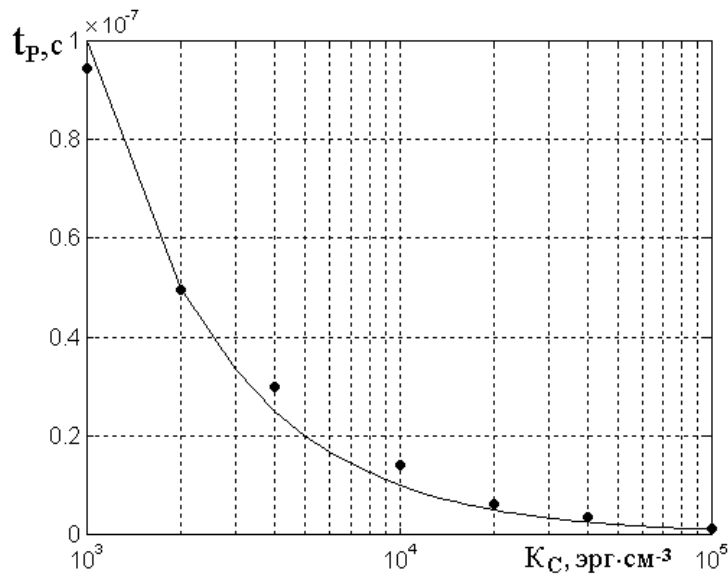


Рис. 11. Зависимость продолжительности первого этапа прецессии намагниченности от константы кубической анизотропии.

Точки – результаты расчета зависимости намагниченности от времени, подобные приведенным на рис. 10.

Сплошная линия построена по формуле (37). Остальные параметры – те же, что на рис. 10.

Из рисунка видно, что формула (37) обеспечивает согласие с непосредственным расчетом прецессии с точностью около 15 %.

Рассмотрим теперь вариацию начальных значений компонент намагниченности. Принятые здесь начальные значения  $m_{x0} = 10^{-4}$  отн.ед.,  $m_{y0} = -10^{-4}$  отн.ед. выбраны из удобства рассмотрения. Продолжительность первого этапа прецессии обратна начальным значениям таких компонент. Так, при слабой анизотропии увеличение начальных значений на порядок приводит к уменьшению продолжительности первого этапа с  $0,95 \cdot 10^{-7}$  до  $0,70 \cdot 10^{-7}$  с, а уменьшение тех же значений на порядок приводит к увеличению продолжительности первого этапа с  $0,95 \cdot 10^{-7}$  до  $1,20 \cdot 10^{-7}$  с. То есть можно полагать, что продолжительность первого этапа при изменении начальных значений компонент намагниченности близка к обратной пропорциональности по закону:

$$t_p = \frac{5 \cdot 10^{-11}}{m_{x0} + 4 \cdot 10^4}, \quad (38)$$

где  $t_p$  получается в секундах.

На рис. 12 представлена зависимость продолжительности первого этапа прецессии намагниченности от начального значения компоненты намагниченности. Кривая 1 построена по формуле (38). Точки получены из решения уравнений движения намагниченности.

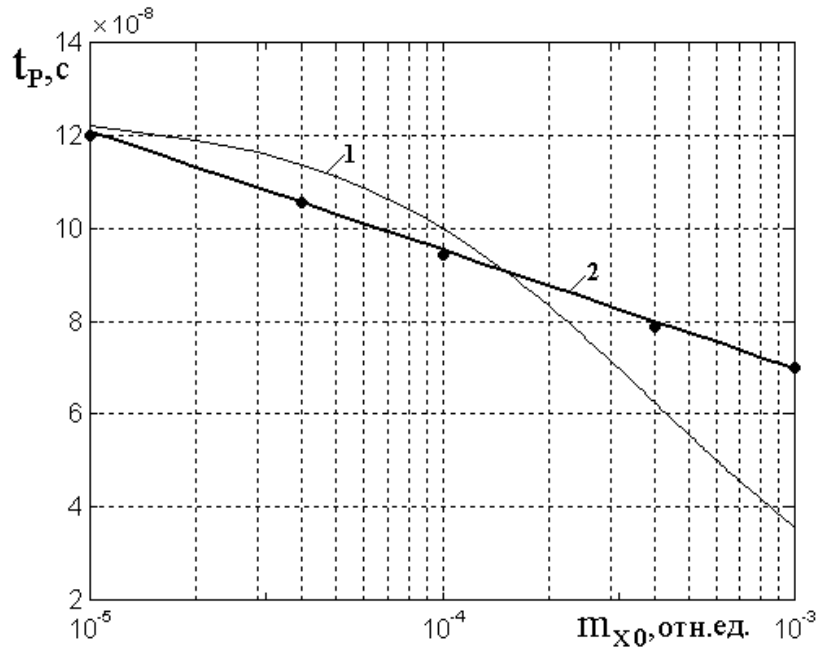


Рис. 12. Зависимость продолжительности первого этапа прецессии намагниченности от начального значения компоненты намагниченности  $m_{x0}$ . При этом  $m_{y0} = -m_{x0}$ . Константа кубической анизотропии  $K_C = 10^3$  эрг см<sup>-3</sup>.

Точки – результаты расчета зависимости намагниченности от времени, подобные приведенным на рис. 10. 1 – тонкая сплошная линия построена по формуле (38); 2 – утолщенная сплошная линия построена по формуле (41).

Остальные параметры – те же, что на рис. 10.

Из рисунка видно, что кривая 1, хотя и передает общий характер зависимости, но не вполне ложится на расчетные точки. Особенно большое отклонение наблюдается, когда  $m_{x0}$  становится больше  $2 \cdot 10^4$  отн.ед., причем по мере увеличения  $m_{x0}$  отклонение увеличивается. В то же время видно, что расчетные точки довольно хорошо ложатся на прямую линию, показанную утолщенной кривой 2.

Таким образом, введение логарифмического масштаба при обратной пропорциональности является недостаточным, так что требует уточнения. Можно полагать, что лучшие результаты дает двукратное применение логарифмического масштаба. Введем для этого вспомогательную функцию:

$$u = \log(m_{x0}) + 5. \quad (39)$$

Можно видеть, что при  $m_{x0} = 10^{-5}$  отн.ед., функция  $u$  равна нулю, при  $m_{x0} = 10^{-4}$  отн.ед.,  $u = 1$ , при  $m_{x0} = 10^{-3}$  отн.ед.,  $u = 2$ . Таким образом, вариация  $m_{x0}$  от  $10^{-5}$  до  $10^{-3}$  соответствует изменению  $u$  от нуля до 2 отн.ед.

Поставим условие, чтобы функция  $m_x$  на краях исследуемого интервала  $m_{x0}$  принимала значения, соответствующие расчетным точкам  $12.1 \cdot 10^{-8}$  и  $7.0 \cdot 10^{-8}$ . Полагая, что продолжительность первого этапа прецессии может быть представлена в виде прямой линии, воспользуемся построением прямой, проходящей через две точки. Полагая координаты крайних точек по горизонтальной оси равными 0 и 2, а по вертикальной  $12.1 \cdot 10^{-8}$  и  $7.0 \cdot 10^{-8}$ , получаем уравнение прямой в виде:

$$y = -2.5 \cdot 10^{-8} \cdot u - 5.0 \cdot 10^{-9}. \quad (40)$$

Подставляя в эту формулу выражение для  $m_x$  вида (39), получаем зависимость времени протяженности первого этапа от начального отклонения намагниченности:

$$t_p = -2.5 \cdot 10^{-8} \cdot (\log(m_{x0}) + 5) - 5.0 \cdot 10^{-9}, \quad (41)$$

где  $K_c = 10^4$  получается в секундах.

Эта зависимость представлена на рис. 12 в виде утолщенной кривой 2. Можно видеть, что здесь совпадение кривой с расчетными точками получается в пределах единиц процентов.

Таким образом, можно считать, что зависимость времени первого этапа прецессии от начального отклонения намагниченности, будучи представленной в двукратном логарифмическом масштабе, является линейной.

Проверка показывает, что изменение продолжительности первого этапа при вариации начальных значений компонент намагниченности в случаях средней и сильной анизотропии происходит аналогичным образом.

## 11. Вынужденные колебания при слабой анизотропии

Рассмотрим теперь вынужденные колебания намагниченности в широком интервале переменного поля при различных уровнях кубической анизотропии. Следуя порядку изложения в разделах 6-8, начнем со случая слабой анизотропии.

В качестве основного параметра будем рассматривать максимальное значение компоненты намагниченности  $m_x$ , которое достигается при заданной амплитуде переменного поля. Такое значение будем брать из прецессионного портрета по горизонтальной его оси. Это же правило отсчета касается как основной большой окружности, так и малых частичных окружностей в соответствии с конкретным видом прецессионного портрета. Ограничимся рассмотрением только компоненты  $m_x$ , так как компонента  $m_y$  ведет себя полностью аналогичным образом.

На рис. 13 представлены зависимости максимальных значений компоненты намагниченности  $m_x$  от амплитуды переменного поля  $h_0$ . На врезках – схема отсчета значений  $m_x$ .

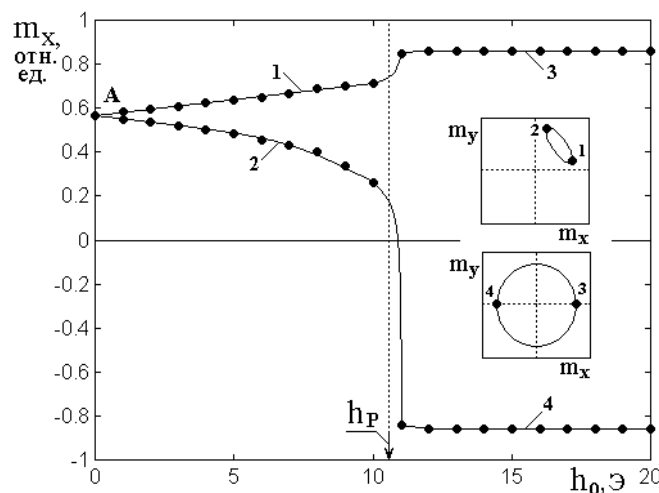


Рис. 13. Вынужденная прецессия намагниченности при слабой кубической анизотропии в широком интервале переменного поля. Показана зависимость максимальных значений компоненты намагниченности  $m_x$  от амплитуды переменного поля. На врезках показана схема отсчета значений  $m_x$ .

1, 2 – прецессия намагниченности по малой окружности; 3, 4 – прецессия намагниченности по большой окружности. Константа кубической анизотропии  $K_C = 10^3$  эрг см<sup>-3</sup>. Остальные параметры – базовые (раздел 2).

На рисунке видны две четко различающиеся области изменения поля, разделенные критическим значением  $h_0 = h_p$ .

При поле ниже  $h_p$  намагниченность прецессирует по малой окружности, расположенной в правой верхней четверти квадрата  $m_x m_y$ , как это показано на верхней врезке. Соответствующие этой области кривые 1 и 2 при нулевом поле начинаются в точке А, являющейся центром малой окружности. Эта точка соответствует минимуму потенциала в одной из потенциальных ям, подобных показанным на рис. 2 и рис. 3.

По мере увеличения  $h_0$  кривые 1 и 2 расходятся почти линейно вплоть до критического значения поля  $h_p = 10,4$  Э, где происходит их резкий скачок в противоположные стороны так, что кривая 1 переходит в кривую 3, а кривая 2 – в кривую 4. При поле выше  $h_p$  намагниченность прецессирует по большой окружности, как это показано на нижней врезке. При этом амплитуда  $m_x$  при увеличении  $h_0$  уже почти не меняется, оставаясь на уровне около 0,84 отн.ед., так как конус прецессии уже развернут почти полностью и дальше ему некуда разворачиваться.

В качестве сравнения можно обратиться к рис. 5б, где представлена прецессия по большой окружности в поле  $h_0 = 110$  Э, которое значительно превышает максимальное поле на рис. 13. Видно, что здесь амплитуда  $m_x$  близка к 0,9 отн.ед., то есть конус прецессии развернулся почти полностью в плоскость.

## 12. Вынужденные колебания при средней анизотропии

Рассмотрим теперь вынужденные колебания намагниченности в широком интервале переменного поля при среднем уровне кубической анизотропии. Будем следовать той же схеме рассмотрения, что в случае слабой анизотропии (раздел 11).

На рис. 14 представлены зависимости максимальных значений компоненты намагниченности  $m_x$  от амплитуды переменного поля  $h_0$ . На врезках – схема отсчета значений  $m_x$ .

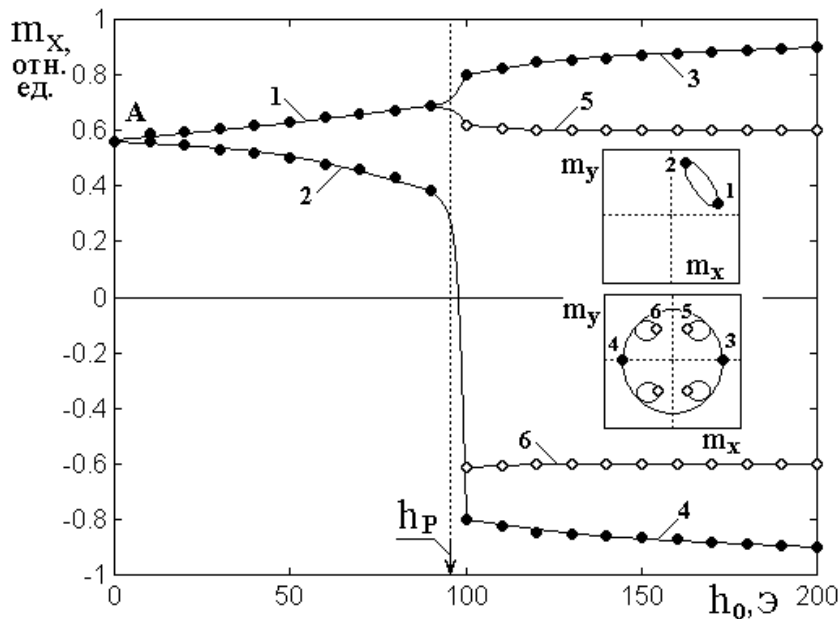


Рис. 14. Вынужденная прецессия намагниченности при средней кубической анизотропии в широком интервале переменного поля. Показана зависимость максимальных значений компоненты намагниченности  $m_x$  от амплитуды переменного поля. На врезках – схема отсчета значений  $m_x$  1, 2 – прецессия намагниченности по малой окружности; 3, 4 – прецессия намагниченности по большой окружности; 5, 6 – прецессия намагниченности по малым окружностям. Константа кубической анизотропии  $K_C = 10^4$  эрг см<sup>-3</sup>.

Остальные параметры – базовые (раздел 2).

Как и в предыдущем случае, на рисунке видны две четко различающиеся области изменения поля, разделенные критическим значением  $h_0 = h_p$ . Здесь однако значение  $h_p$  значительно больше и составляет около 95 Э.

При поле ниже  $h_p$  намагниченность прецессирует по малой окружности, расположенной в правой верхней четверти квадрата  $m_x m_y$ , как это показано на верхней врезке. Соответствующие этой области кривые 1 и 2 при нулевом поле начинаются в точке А, являющейся центром малой окружности. Эта точка соответствует минимуму потенциала в одной из потенциальных ям, подобных показанным на рис. 2 и рис. 3.

По мере увеличения  $h_0$  кривые 1 и 2 расходятся почти линейно вплоть до критического значения поля  $h_p = 95$  Э, где происходит их резкий скачок в противоположные стороны так, что кривая 1 переходит в кривую 3, а кривая 2 – в кривую 4. При поле выше  $h_p$  намагниченность прецессирует по большой окружности, как это показано на нижней врезке. Раскрытие кривых 3 и 4 здесь несколько больше, чем на рис. 13, так как переменное поле на порядок больше. При этом амплитуда  $m_x$  при увеличении  $h_0$  хотя и меняется, но довольно мало, так что, начиная с уровня 0,84 отн.ед., стремится к уровню 0,90 отн.ед. Как и в предыдущем случае, конус прецессии уже развернут почти полностью и дальше ему некуда разворачиваться.

В отличие от предыдущего случая, здесь, кроме большой окружности существуют четыре малых, соответствующие локальным минимумам потенциала. Структура прецессионного портрета для этого случая показана на нижней врезке. Кривые 1 и 2 при переходе через поле  $h_p$  теперь раздваиваются, причем наружные ветви 3 и 4 соответствуют большой окружности, а внутренние ветви 5 и 6 – частичным малым окружностям.

В качестве сравнения можно обратиться к рис. 7б, где представлена прецессия по большой окружности, сопровождаемая четырьмя малыми окружностями в поле  $h_0 = 110$  Э, которое несколько превышает критическое поле  $h_p = 95$  Э, так что малые окружности уже достаточно развиваются.

### 13. Вынужденные колебания при сильной анизотропии

Рассмотрим теперь вынужденные колебания намагниченности в широком интервале переменного поля при сильном уровне кубической анизотропии. Будем следовать той же схеме рассмотрения, что в предыдущих двух случаях (разделы 11-12).

На рис. 15 представлены зависимости максимальных значений компоненты намагниченности  $m_x$  от амплитуды переменного поля  $h_0$ . На врезках – схема отсчета значений  $m_x$ .

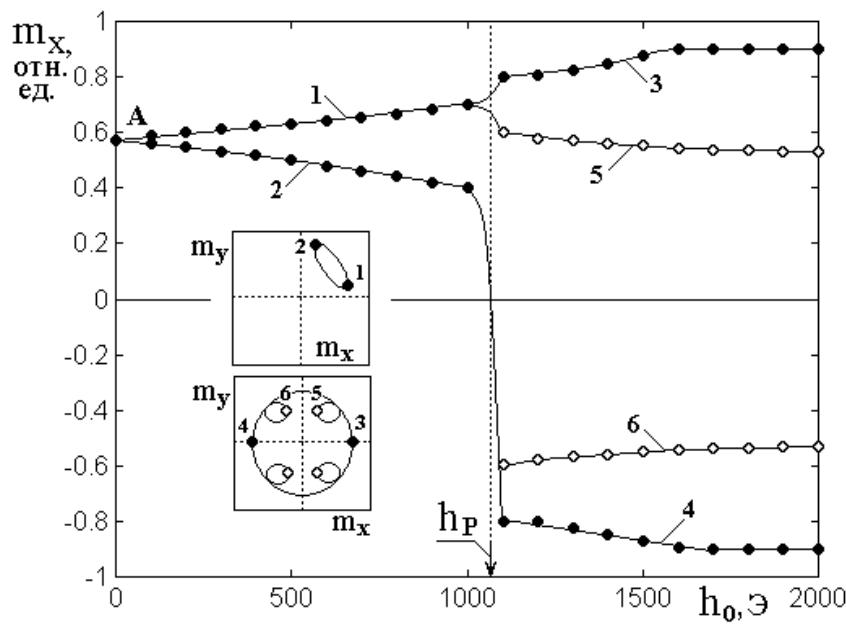


Рис. 15. Вынужденная прецессия намагниченности при сильной кубической анизотропии в широком интервале переменного поля. Показана зависимость максимальных значений компоненты намагниченности  $m_x$  от амплитуды переменного поля. На врезках – схема отсчета значений  $m_x$ . 1, 2 – прецессия намагниченности по малой окружности; 3, 4 – прецессия намагниченности по большой окружности; 5, 6 – прецессия намагниченности по малым окружностям. Константа кубической анизотропии  $K_C = 10^5$  эрг см<sup>-3</sup>. Остальные параметры – базовые (раздел 2).

Как и в предыдущих случаях, на рисунке видны две четко различающиеся области изменения поля, разделенные критическим значением  $h_0 = h_p$ . Здесь значение  $h_p$  весьма большое и составляет около 1060 Э.

При поле ниже  $h_p$  намагниченность прецессирует по малой окружности, расположенной в правой верхней четверти квадрата  $m_x m_y$ , как это показано на верхней врезке. Соответствующие этой области кривые 1 и 2 при нулевом поле начинаются в точке А, являющейся центром малой окружности. Эта точка соответствует минимуму потенциала в одной из потенциальных ям, подобных показанным на рис. 2 и рис. 3.

По мере увеличения  $h_0$  кривые 1 и 2 расходятся почти линейно вплоть до критического значения поля  $h_p = 1060$  Э, где происходит их резкий скачок в противоположные стороны так, что кривая 1 переходит в кривую 3, а кривая 2 –

в кривую 4. При поле выше  $h_p$  намагниченность прецессирует по большой окружности, как это показано на нижней врезке. Раскрытие кривых 3 и 4 здесь еще больше, чем на рис. 14, так как переменное поле еще на порядок больше. При этом амплитуда  $m_x$  при дальнейшем увеличении  $h_0$  меняется также довольно мало, стремясь к единице.

Как и в случае средней анизотропии (раздел 12), здесь кроме большой окружности существуют четыре малых, соответствующие локальным минимумам потенциала. Структура прецессионного портрета для этого случая показана на нижней врезке. Кривые 1 и 2 при переходе через поле  $h_p$  теперь раздваиваются, причем наружные ветви 3 и 4 соответствуют большой окружности, а внутренние ветви 5 и 6 – частичным малым окружностям. Можно отметить, что диаметры малых окружностей здесь немного больше, чем в предыдущем случае, так что кривая 5 несколько опускается, а кривая 6 поднимается. Можно полагать, что такое их поведение обусловлено увеличением амплитуды переменного поля.

Сравнение с рис. 9б показывает, что там прецессионный портрет представляет собой четыре отдельные малые окружности, а большая окружность отсутствует. Причиной такого поведения является недостаточный уровень переменного поля, где оно составляет всего 1000 Э, тогда как, согласно рис. 15, для возникновения большой окружности поле должно превышать величину  $t_p = 1060$  Э, так что амплитуда переменного поля на рис. 9б недостаточна.

#### **14. Критическое поле в широком интервале изменения константы анизотропии**

В предыдущих разделах (разделы 11-13) значения константы анизотропии менялись друг от друга на порядок (в 10 раз), что давало слишком мало точек для получения достаточно плавной характеристики прецессии намагниченности.

Рассмотрим теперь вариацию константы анизотропии более мелкими шагами, составляющими 0,1 от порядка. В качестве исследуемого параметра возьмем критическое поле  $h_p$ , при котором прецессия намагниченности переходит с малой окружности на большую, так что, раскрыв конуса прецессии резко увеличивается (рис. 13, рис. 14, рис. 15).

На рис. 16 показана зависимость критического поля  $h_p$  от величины константы анизотропии, меняющейся в пределах от нуля до  $K_C = 10^4$  эрг см<sup>-3</sup>. Точки получены из решения уравнений движения для намагниченности (раздел 1).

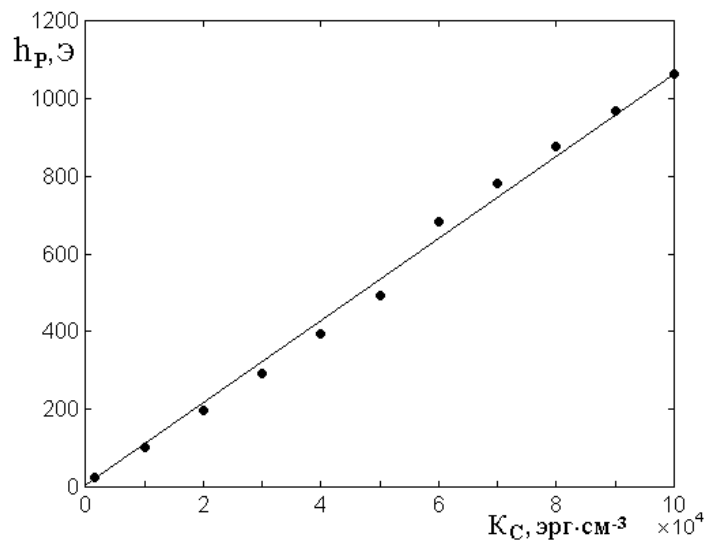


Рис. 16. Зависимость критического поля перехода прецессии от малых окружностей к большой при изменении константы анизотропии. Точки – результаты расчета по уравнениям движения для намагниченности. Сплошная линия построена по формуле (42). Остальные параметры – базовые (раздел 2).

Из рисунка видно, что точки с довольно высокой точностью (около 5 %) ложатся на прямую линию, построенную по формуле:

$$h_p = 0,107 \cdot K_C. \quad (42)$$

Заметим, что на этом графике точки, соответствующие рис. 13 и рис. 14, лежат в самом начале приведенной зависимости (около 10 % от начала), а точка, соответствующая рис. 15 – на правом конце той же зависимости. То есть здесь равномерное расположение точек по оси  $K_C$  соответствует более подробному рассмотрению общего характера исследуемой зависимости, который с высокой точностью соответствует ее прямолинейности.

## 15. Некоторые замечания о возможном развитии работы

Проведенное в настоящей работе рассмотрение выполнено в условиях базового значения постоянного поля  $170 \text{ Э}$  при значении намагниченности  $M_0 = 22,28 \text{ Гс}$ , то есть  $4\pi M_0 = 280 \text{ Э}$ . Такое соотношение этих параметров с учетом кубической анизотропии типа  $[001]$  соответствует равновесной ориентации намагниченности вблизи середины интервала углов от нормали до плоскости пластины. Переменное поле направлено в плоскости пластины. В то же время, влияние переменного поля на раскачку прецессии будет максимальным при малом отклонении намагниченности от нормали, а по мере увеличения этого отклонения будет спадать. можно полагать, что в таких условиях характер прецессии намагниченности, в том числе формирование больших и малых окружностей, будет меняться. Так что представляет интерес рассмотреть характер колебаний при вариации как величины постоянного, так и ориентации переменного полей. То же касается возможного влияния одноосной анизотропии, перпендикулярной плоскости пластины. По мнению авторов, такое рассмотрение в рамках описанной здесь модели динамического потенциала может составить предмет для отдельной работы.

Далее, все приведенные здесь результаты относятся к случаю довольно большого затухания прецессии намагниченности, при базовом значении параметра  $\alpha$  равном  $0,3$ . Однако предварительная проверка показывает, что характер полученных результатов при вариации затухания заметно меняется. Важное значение имеет соотношение между величиной затухания и частотой переменного поля. Проверка показывает, что в ряде случаев прецессия принимает хаотический характер, отмеченный, например, в работах [20, 21] и ряде других (см. Введение). Авторы полагают, что применение рассмотренной здесь модели динамического потенциала позволит навести на такие явления более подробную систематическую интерпретацию.

## Заключение

1) Выполнен краткий обзор предшествующих работ, посвященных нелинейной динамике намагниченности при больших углах прецессии, которыми считаются углы, превышающие 1-2 градуса, вплоть до 90 градусов. Отмечено, что необходимым условием достижения таких углов является нормальное намагничивание тонкой пленки. Отмечена возможность существования колебаний хаотического характера и построены бифуркационные диаграммы. Установлено, что главным в предшествующих работах явилась констатация различных видов и режимов прецессии намагниченности. В настоящей работе предпринята попытка в какой-то степени обобщить полученные результаты с единых позиций в рамках модели динамического потенциала.

2) Приведена общая геометрия задачи, представляющая собой нормально намагниченную магнитную пластину с кубической анизотропией типа [001]. Определено равновесное положение намагниченности при одноосной и кубической анизотропии с учетом размагничивания формы пластины. Записаны уравнения движения намагниченности, получены эффективные поля и приведена схема решения задачи методом Рунге-Кутты.

3) Предложена модель динамического потенциала, представляющая собой плотность энергии системы с учетом взаимодействия намагниченности с внешним полем, характера одноосной и кубической анизотропии, а также размагничивания формы. Выполнен анализ потенциальной поверхности кубической анизотропии типа [001], установлено, что такая поверхность имеет максимум на середине пластины и четыре симметрично расположенных минимума, соответствующих проекциям осей типа (111) на плоскость пластины.

4) Выявлены два характерных сечения потенциала проходящей через центр симметрии вертикальной плоскостью, из которых первое сечение проходит через любой из четырех минимумов, а второе сечение проходит через максимумы между двумя соседствующими минимумами. Отмечено, что

прецессия намагниченности может происходить как в одном из частичных минимумов, так и по общему кругу с центом симметрии структуры. При этом в первом случае намагниченность не выходит за пределы окрестности сечения первого вида, а во втором периодически переходит из одного минимума в соседний, для чего преодолевает максимум, определяемый сечением второго вида.

5) Рассмотрен удельный вклад кубической анизотропии в полную энергию материала. Отмечено, что формирование потенциальной поверхности с четырьмя минимумами и расположенным между ними максимумом обусловлено за счет четвертого порядка по намагниченности, свойственного только кубической анизотропии. На основе сравнения вклада кубической анизотропии с вкладом за счет внешнего поля, выделены три характерных уровня анизотропии: слабый, когда ее вклад значительно меньше вклада за счет внешнего поля, средний, когда вклад за счет анизотропии имеет тот же порядок, что и вклад внешнего поля и сильный, когда вклад за счет анизотропии значительно превышает вклад за счет внешнего поля.

6) Рассмотрен случай слабой кубической анизотропии. Получены линии сечений первого и второго вида, показано, что обе они имеют квадратичный характер, причем минимумы совпадают, а ветви сечений второго вида разнесены дальше от оси симметрии, чем ветви сечений первого вида. Это означает, что намагниченность при заданном уровне потенциала имеет круговую прецессию по большой окружности с периодическим переходом через небольшие максимумы, определяемые более разнесенными ветвями сечения второго вида. Построен прецессионный портрет и отмечены небольшие искажения правильной окружности, соответствующие таким переходам.

7) Рассмотрен случай средней кубической анизотропии. Получены сечения первого и второго вида, показано, что линии сечений обоих видов имеют характер симметричного многочлена четвертой степени, имеющего на середине максимум, по обе стороны от которого располагаются минимумы, после которых ветви сечений уходят на бесконечность. Отмечено, что здесь по

амплитуде намагниченности имеется интервал, где линия сечения второго вида проходит выше линии сечения первого вида, после чего при дальнейшем увеличении намагниченности линии меняются местами. Область, где линия сечения первого вида проходит ниже линии сечения второго вида соответствует прецессии намагниченности в окрестности минимума потенциала. Для того, чтобы выйти из этой области амплитуда намагниченности должна превысить точку пересечения кривых обоих видов, после чего прецессия дальше продолжается по большой окружности. Таким образом, критерием перехода от прецессии по малой окружности к прецессии по большой окружности является достижение амплитудой намагниченности точки пересечения кривых первого и второго вида. На прецессионном портрете отмечены четыре малые окружности и объединяющая их одна большая.

8) Рассмотрен случай сильной кубической анизотропии. Получены сечения первого и второго вида, показано, что линии сечений обоих видов имеют вид симметричного многочлена четвертой степени, имеющего на середине максимум, по обе стороны от которого расположены два минимума, однако здесь линия сечения первого вида проходит значительно ниже линии сечения второго вида. Прецессия намагниченности происходит в пределах окрестности минимумов первого вида вплоть до амплитуд намагниченности, близких к единице. При этом прецессионный портрет имеет вид отдельных четырех малых окружностей, замыкание которых может произойти только при стремлении амплитуды намагниченности к единице.

9) Рассмотрено свободное установление намагниченности происходящее после заданного начального отклонения в случае слабой анизотропии. Показано, что движение намагниченности происходит в два этапа. На первом намагниченность, отпущенная из положения по нормали к плоскости пластины, стремится перейти ближе к плоскости пластины, так что постепенно раскручивается по спирали, диаметр которой увеличивается до тех пор, пока намагниченность не встречает на своем пути какой-либо из минимумов, соответствующих сечению первого вида. Далее начинается второй этап, в ходе

которого намагниченность прецессирует внутри этого минимума и постепенно затухает. прецессионный портрет здесь на первом этапе состоит из совокупности спирально уменьшающихся больших окружностей, а на втором – из спирально уменьшающихся малых окружностей, соответствующих одному из частичных минимумов.

10) Рассмотрена зависимость продолжительности первого этапа прецессии намагниченности от константы кубической анизотропии. Показано, что эта зависимость близка к обратной пропорциональности от величины константы. Рассмотрена зависимость продолжительности первого этапа от величины начального значения поперечной компоненты намагниченности. Показано, что эта зависимость, будучи представленной в двукратном логарифмическом масштабе, является линейной.

11) Рассмотрены вынужденные колебания намагниченности в широком интервале переменного поля при различных уровнях кубической анизотропии. Показано, что во всех случаях зависимости максимальных значений поперечной компоненты намагниченности от амплитуды переменного поля имеет близкий характер, состоящий из двух этапов. На первом этапе амплитуда возбуждения мала, так что намагниченность прецессирует по малой окружности в окрестности одного из локальных минимумов потенциала. По мере увеличения амплитуды возбуждения при достижении критического ее значения амплитуда прецессии намагниченности резко увеличивается, так что намагниченность далее прецессирует по большой окружности, что соответствует второму этапу. При слабой и сильной анизотропии большая окружность имеет незначительные отклонения, соответствующие минимумам потенциала, При средней анизотропии большая окружность сопровождается четырьмя малыми окружностями. Рассмотрена зависимость критического поля перехода от первого этапа ко второму в широком интервале изменения анизотропии. Показано, что такая зависимость в полном интервале от слабой до сильной анизотропии имеет характер, близкий к линейному.

12) Приведены некоторые замечания, касающиеся возможного развития работы. Отмечено, что рассматриваемые явления могут зависеть от соотношения между величиной постоянного поля и намагниченностью насыщения материала, то есть от равновесной ориентации намагниченности в свободном состоянии, которая может меняться от малых значений до близких к 90 градусам. Представляет интерес рассмотрение вынужденных колебаний в широком параметра затухания, а также при различном диапазоне частоты возбуждающего поля. Отмечено, что именно в этих условиях поведение намагниченности может приобретать хаотический характер.

**Финансирование:** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, грант №75-72-20063, а также в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им.В.А. Котельникова РАН.

### Литература

1. Гуревич А.Г. Ферриты на сверхвысоких частотах. М.: Гос.Изд.физ.-мат.лит. 1960.
2. Гуревич А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. М.: Наука. 1973.
3. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. М.: Физматлит. 1994.
4. Сул Г. Теория ферромагнитного резонанса при больших уровнях высокочастотной мощности. // В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А.Г. Гуревича. // М.: ИЛ. 1961. С.163-205.
5. Моносов Я.А. Нелинейный ферромагнитный резонанс. М.: Наука. 1971.
6. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения. // УФН. 1974. Т.114. №4. С.609-(632).
7. Львов В.С. Нелинейные спиновые волны. М.: Наука. 1987.

8. Wigen P.E., Doetsch H., Ming Y., Baselgia L., Waldner F. Chaos in magnetic garnet thin films. // J.Appl.Phys., 1988, v.63, №8, p.4157-4159.
9. Каганов М.И., Пустыльник Н.Б., Шалаева Т.И. Магноны, магнитные поляритоны, магнитостатические волны. // УФН. 1997. Т.167. №2. С.191-237.  
<https://doi.org/10.3367/UFNr.0167.199702d.0191>
10. Алексеев К.Н., Берман Г.П., Цифринович В.И., Фришман А.М. Динамический хаос в магнитных системах. // УФН. 1992. Т.162. №7. С.81-118. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0162.199207b.0081>
11. Temiryasev A.G., Tikhomirova M.P., Zilberman P.E. Exchange spin waves in nonuniform yttrium iron garnet films. // JAP. 1994. V.76. №9. P.5586-5591.
12. Gulyaev Yu.V., Temiryasev A.G., Tikhomirova M.P., Zilberman P.E. Magnetoelastic interaction in yttrium iron garnet films inhomogeneities through the film thickness. // JAP. 1994. V.75. №10. P.5619-5624.
13. Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Темирязов А.Г., Тихомирова М.П. Основная мода нелинейного спин-волнового резонанса в нормально намагниченных ферритовых пленках. // ФТТ. 2000. Т.42. №6. С.1062-1067.
14. Alvarez L.F., Pla O., Chubykalo O. Quasiperiodicity, bistability, and chaos in the Landau-Lifshitz equation. // Phys.Rev.B, 2000, v.61, №17, p.11613-11617.
15. Gerrits Th., Schneider M.L., Kos A.B., Silva T.J. Large-angle magnetization dynamics measured by time-resolved ferromagnetic resonance. // Phys.Rev.B, 2006, v.73, №9, p.094454(7).
16. Шутый А.М., Семенцов Д.И. Нелинейные эффекты прецессионного движения намагниченности в области ферромагнитного резонанса. // ФТТ, 2000, т.42, № 7, с.1268-1271.
17. Шутый А.М., Семенцов Д.И. Динамика намагниченности в условиях нелинейного ферромагнитного резонанса в пленке типа (111). // ФТТ. 2001. Т.43. №8. С.1439-1442.
18. Шутый А.М., Семенцов Д.И. Динамика нелинейного прецессионного движения намагниченности в феррит-гранатовой пленке типа (100). // ФТТ, 2002, т.44, № 4, с.734-738.

19. Шутый А.М., Семенцов Д.И. Нелинейные динамические режимы намагниченности в феррит-гранатовых пленках типа (100). // ЖЭТФ. 2007. Т.131. №5. С.868-877.
20. Семенцов Д.И., Шутый А.М. Нелинейная регулярная и стохастическая динамика намагниченности в тонкопленочных структурах. // УФН. 2007. Т.177. №8. С.831-857.
21. Шутый А.М., Семенцов Д.И. Хаотическая динамика намагниченности в монокристаллических тонкопленочных структурах. // Кристаллография. 2009. Т.54. №1. С.103-111.
22. Шутый А.М., Семенцов Д.И. Динамика намагниченности одноосной наночастицы в области неколлинеарного ферромагнитного резонанса. // ФТТ. 2022. Т.64. №12. С.1933-1940.  
<https://doi.org/10.21883/FTT.2022.12.53645.448>
23. Василевская Т.М., Семенцов Д.И., Шутый А.М. Ферромагнитный резонанс в монокристаллической частице с одноосной анизотропией при продольной накачке. // ФТТ. 2022. Т.64. №2. С.200-205.  
<https://doi.org/10.21883/FTT.2022.02.51948.214>
24. Шутый А.М., Василевская Т.М., Семенцов Д.И., Елисеева С.В. Прецессионная динамика намагниченности одноосной наночастицы в области ферромагнитного резонанса. // ФТТ. 2023. Т.65. №5. С.1047-1053.  
<https://doi.org/10.21883/FTT.2023.06.55664.56>
25. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. // РЭ. 2009. Т.54. №7. С.863-874.
26. Власов В.С., Котов Л.Н., Щеглов В.И. Нелинейная прецессия вектора намагниченности в условиях ориентационного перехода. Сыктывкар: ИПО:СыктГУ 2013.
27. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Ферромагнитный резонанс в условиях ориентационного перехода. М.: Физматлит. 2018.

28. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейная динамика установления намагниченности в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами в условиях ориентационного перехода. // РЭ, 2010, Т.55, №6, С.689-701.
29. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Динамика намагниченности в условиях изменения ее ориентации. М.: Физматлит. 2019.
30. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Магнитостатические волны в неоднородных полях. М.: Физматлит. 2016.
31. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ автомодуляционных явлений в системе связанных магнитного и упругого осцилляторов на основе модели потенциала. // Журнал радиоэлектроники. – 2015. – № 6. <http://jre.cplire.ru/jre/jun15/9/text.pdf>
32. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 1. Динамический потенциал. // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2017. №7. <http://jre.cplire.ru/jre/jul17/6/text.pdf>
33. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Динамический хаос в системе из двух связанных осцилляторов. М.: Физматлит. 2025.

**Для цитирования:**

Власов В.С., Голов А.В., Котов Л.Р., Щеглов В.И. Применение модели динамического потенциала для интерпретации нелинейной прецессии намагниченности в анизотропной среде // Журнал радиоэлектроники. – 2026. – № 6. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2026.6.3>