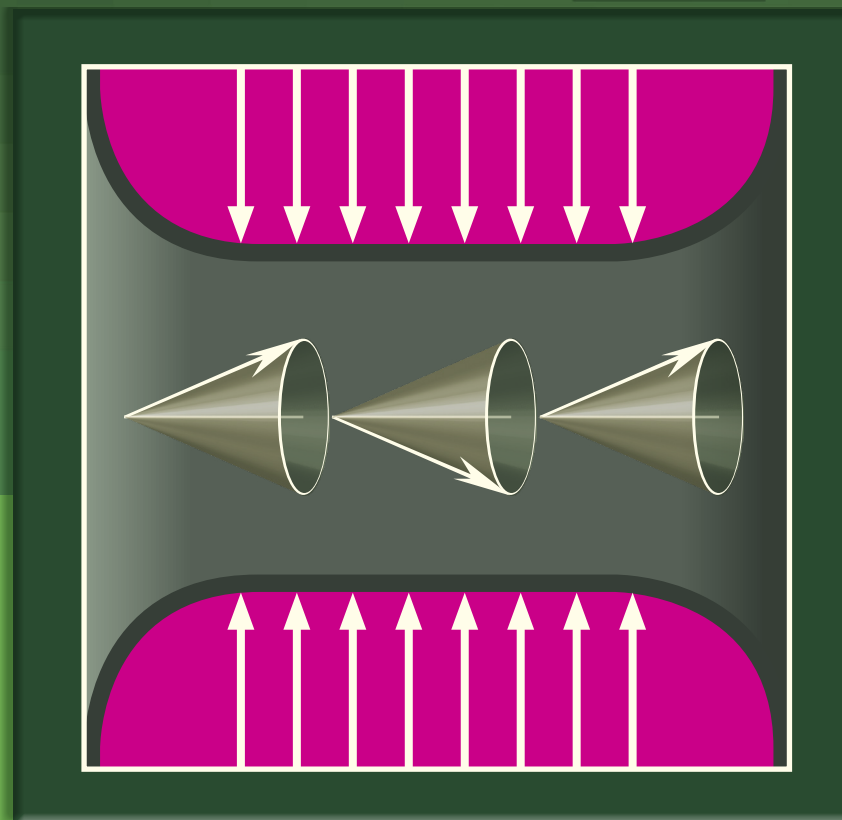


В.Г. Шавров
В.И. Щеглов

СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ С ОБМЕНОМ И ДИССИПАЦИЕЙ

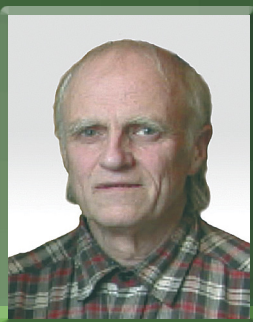


В.Г. Шавров
В.И. Щеглов

СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ С ОБМЕНОМ И ДИССИПАЦИЕЙ



Шавров Владимир Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией магнитных явлений в микроэлектронике Института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН



Щеглов Владимир Игнатьевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН



В.Г. Шавров
В.И. Щеглов

СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ С ОБМЕНОМ И ДИССИПАЦИЕЙ

Рекомендовано

*Федеральным учебно-методическим объединением в системе
высшего образования по укрупненной группе специальностей
и направлений подготовки 03.00.00 «Физика и астрономия»
в качестве учебного пособия для обучающихся по основным
образовательным программам высшего образования
по направлению подготовки «Физика»
уровней бакалавриата (03.03.02) и магистратуры (03.04.02)
специалитета по специальности
«Фундаментальная и прикладная физика» (03.05.02)*



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2021

УДК 537.874; 537.624

ББК 22.33

Ш 14

Шавров В.Г., Щеглов В.И. **Спиновые волны в средах с обменом и диссипацией.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2021. — 496 с. — ISBN 978-5-9221-1940-5.

Монография посвящена рассмотрению дисперсионных свойств спиновых волн в средах, обладающих неоднородным обменным взаимодействием, а также умеренной и малой диссипацией, каковыми в первую очередь являются пленки железо-иттриевого граната (ЖИГ). Рассмотрены свойства гиротропной волны в бигиротропной среде. Отмечено влияние диссипации на магнитостатические волны дипольного характера. Основное внимание уделено коротким магнитостатическим волнам нанометровой длины, для которых проявления динамического размагничивания и неоднородного обменного взаимодействия являются решающими факторами, формирующими закон дисперсии. Обсуждены перспективы применения нанометровых обменных волн в устройствах обработки информации терагерцевого диапазона частот.

Монография предназначена специалистам, работающим в области физики магнитных явлений, инженерам и конструкторам СВЧ-аппаратуры, а также студентам и аспирантам соответствующих специальностей.

ISBN 978-5-9221-1940-5

© ФИЗМАТЛИТ, 2021

© В. Г. Шавров, В. И. Щеглов, 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список наиболее часто используемых сокращений	11
Введение	12
Глава 1. Общие волновые процессы в магнитных средах (обзор литературы)	16
1.1. Первое упоминание о спиновых волнах — тепловые магноны	16
1.2. Ферромагнитный резонанс и невзаимные устройства	17
1.3. Стабильные и нестабильные нелинейные процессы	17
1.4. Обменные волны по толщине пленки	18
1.5. Появление железиттриевого граната	20
1.6. Магнитостатические резонансные типы	20
1.7. Магнитостатические волны дипольного характера	22
1.8. Магнитоупругие волны	23
1.9. Магнитооптические эффекты	24
1.10. Линии задержки с неоднородным полем	25
1.11. Различие фазовой и групповой скоростей	26
1.12. Магнитостатические волны в неоднородном поле	26
1.13. Возбуждение волн импульсами света	28
1.14. Современные работы по магнитостатическим волнам	30
1.15. Заключительное замечание	31
Выводы по главе 1	31
Глава 2. Математический аппарат, используемый при расчете дисперсионных свойств волн в магнитной среде	36
2.1. Основные виды электромагнитных волн в магнитной среде	36
2.2. Роль магнитной проницаемости в распространении волн в магнитной среде	37
2.2.1. Тензор магнитной проницаемости	38
2.2.2. Получение тензоров магнитной восприимчивости и проницаемости путем линеаризации уравнения движения	40
2.2.3. Общая схема получения тензора магнитной проницаемости	44
2.3. Уравнение Уокера	45
2.4. Граничные условия	49
2.5. Дисперсионное соотношение для магнитной пластины со свободными поверхностями (задача Дэймона–Эшбаха)	51
2.5.1. Полная формулировка задачи	51
2.5.2. Решение уравнений без граничных условий	52

2.5.3. Вывод дисперсионного соотношения	58
2.5.4. Дисперсионное соотношение в полярной системе координат	61
2.6. Частотные области существования объемных и поверхностных волн	62
2.7. Замечание о дальнейшем рассмотрении	65
2.8. Уравнение второго порядка со смешанной производной.	65
2.8.1. Частный случай решения уравнения со смешанной производной	67
2.8.2. Классическое решение уравнения со смешанной производной	68
2.9. Методы решения уравнений высоких степеней	75
2.9.1. Уравнения третьей степени	76
2.9.2. Уравнения четвертой степени	85
Выводы по главе 2	91
Глава 3. Дисперсионные свойства гиромагнитной волны в пластине феррита с диссипацией	94
3.1. Общий характер гиромагнитной волны в магнитной среде	94
3.2. Уравнения электродинамики для безграничной бигиротропной среды.	95
3.3. Гиромагнитная и гирозлектрическая волны	100
3.4. Поля гиромагнитной волны	103
3.5. Гиромагнитная волна в ферритовой пластине	104
3.5.1. Общая геометрия задачи	104
3.5.2. Поля гиромагнитной волны в принятой геометрии	105
3.5.3. Граничные условия	107
3.5.4. Дисперсионное соотношение в общем виде	107
3.5.5. Дисперсионное соотношение, выраженное через волновое число вдоль направления распространения волны	110
3.6. Дисперсия гиромагнитной волны в пластине феррита без диссипации	113
3.6.1. Решение дисперсионного соотношения методом поиска нуля	114
3.6.2. Дисперсия в большом интервале волновых чисел	115
3.6.3. Дисперсия при малых значениях волнового числа	117
3.6.4. Влияние диэлектрической проницаемости среды	121
3.7. Общий характер дисперсии гиромагнитной волны в среде с диссипацией	123
3.8. Дисперсионное соотношение для гиромагнитной волны в среде с диссипацией	124
3.8.1. Получение компонент параметров A, B, C, D	126
3.8.2. Преобразование квадратного корня	126
3.8.3. Преобразование левой части дисперсионного соотношения	128
3.8.4. Преобразование правой части дисперсионного соотношения	129

3.8.5. Система уравнений для компонент волнового числа	130
3.8.6. Структура полученной системы уравнений	131
3.8.7. Тензор магнитной проницаемости	132
3.9. Универсальный характер полученного решения и его упрощенный вариант	133
3.10. Общая схема решения дисперсионного соотношения	134
3.11. Дисперсия для действительной части волнового числа	135
3.11.1. Дисперсия в отсутствие диссипации	135
3.11.2. Влияние диссипации среды	137
3.11.3. Дисперсионные кривые	138
3.12. Влияние диэлектрической проницаемости на дисперсию гиромангнитной волны	140
3.13. Дисперсия гиромангнитной волны при больших волновых числах	141
Выводы по главе 3	144
Глава 4. Дисперсионные свойства магнитоэлектростатических волн в каталитивно намагниченной пластине феррита с диссипацией	149
4.1. Общий характер дисперсии в среде с диссипацией	149
4.1.1. Общая геометрия задачи	150
4.1.2. Дисперсионное соотношение в отсутствие диссипации	150
4.1.3. Магнитная восприимчивость в среде с затуханием	151
4.1.4. Упрощенное преобразование параметра ϑ в случае комплексного волнового числа	152
4.1.5. Общий вид волновой функции и дисперсионного соотношения в случае комплексного волнового числа	155
4.2. Дисперсионное соотношение для действительной части волнового числа	155
4.2.1. Преобразование левой части дисперсионного соотношения	156
4.2.2. Преобразование правой части дисперсионного соотношения	157
4.2.3. Полное дисперсионное соотношение	158
4.2.4. Оценка предельных значений частот при типичных параметрах эксперимента	161
4.2.5. Предельный переход к соотношению Дэймона–Эшбаха	163
4.3. Дисперсионное соотношение для мнимой части волнового числа	164
4.3.1. Выделение из полного дисперсионного соотношения части, соответствующей мнимой компоненте волнового числа	164
4.3.2. Дисперсионное соотношение для мнимой части волнового числа в явном виде	166
4.4. Дисперсионные кривые при параметрах эксперимента	167
4.4.1. Дисперсионные кривые для длины волны при параметрах эксперимента	167
4.4.2. Дисперсионные кривые для диссипации при параметрах эксперимента	169
4.4.3. Зависимости амплитуды ПМСВ от частоты	171

4.5. Распространение волны перпендикулярно направлению поля . . .	172
4.5.1. Основные алгоритмы расчета	173
4.5.2. Схема определения времени установления	175
4.6. Роль диссипации в формировании дисперсии действительной части волнового числа для прямых ПМСВ	176
4.6.1. Групповая скорость волны	179
4.6.2. Механизм ограничения дисперсионных кривых для прямых ПМСВ	180
4.7. Роль диссипации в формировании дисперсии волнового числа для обратных ПМСВ	183
4.7.1. Механизм ограничения дисперсионных кривых для обратных ПМСВ	185
4.8. Области существования прямых и обратных волн по параметру затухания	187
4.9. Роль диссипации в формировании дисперсии мнимой части волнового числа	188
4.10. Аналогия со случаем электромагнитных волн	190
4.11. Распространение волны в произвольном направлении относительно поля	193
4.11.1. Волновое число и дисперсионные соотношения	193
4.12. Дисперсия прямых ПМСВ при изменении действительной части волнового числа	194
4.12.1. Малое затухание	194
4.12.2. Большое затухание	196
4.13. Дисперсия обратных ПМСВ при изменении действительной части волнового числа	199
4.13.1. Малое затухание	199
4.13.2. Большое затухание	201
4.14. Дисперсия ПМСВ при изменении мнимой части волнового числа	204
4.14.1. Малое затухание	204
4.14.2. Большое затухание	207
4.15. Возбуждение ПМСВ линейным преобразователем	209
4.16. Замечание о наблюдении прямых ПМСВ в эксперименте	210
4.17. Некоторые рекомендации для наблюдения диссипативных ПМСВ в эксперименте	211
Выводы по главе 4	212
Глава 5. Влияние поля размагничивания на дисперсию поверхностной волны Дэймона–Эшбаха	219
5.1. Обоснование необходимости рассмотрения влияния размагничивания на дисперсию магнитостатической волны	219
5.2. Общий характер влияния динамического размагничивания на распространение магнитостатической волны	220
5.3. Эффективные поля магнитостатической волны	221
5.3.1. Дипольное поле магнитостатической волны	222
5.3.2. Размагничивающее поле дипольной волны в тонкой пластине	224

5.3.3. Параметр размагничивания дипольной волны	226
5.3.4. Нормировка параметра размагничивания	227
5.3.5. Зависимость поля размагничивания от волнового числа . .	228
5.4. Тензор магнитной восприимчивости с учетом размагничивания	230
5.5. Уравнение Уокера с учетом размагничивания	234
5.5.1. Решение уравнения Уокера	235
5.5.2. Критическая частота волны	243
5.6. Полная формулировка задачи о распространении поверхностной волны	247
5.7. Решение в трех областях.	248
5.8. Вывод дисперсионного соотношения из решения и граничных условий	252
5.8.1. Левая часть дисперсионного соотношения	255
5.8.2. Последовательность расчета левой части	256
5.8.3. Правая часть дисперсионного соотношения	256
5.8.4. Последовательность расчета правой части	261
5.9. Действительная и мнимая части дисперсионного соотношения	262
5.10. Дисперсия поверхностной волны с учетом размагничивания . . .	263
5.10.1. Степень деформации дисперсионной кривой	266
5.11. Дисперсионная кривая при изменении параметра размагничи- вания.	267
5.12. Структура распределения намагниченности внутри пластины . .	269
5.13. Динамический потенциал внутри пластины	272
5.14. Степень влияния поля размагничивания на дисперсию волн при различной толщине пластины	274
Выводы по главе 5	277
Глава 6. Влияние обменного взаимодействия и динамического размагничивания на дисперсию поверхностной волны Дэймона– Эшбаха	281
6.1. Обоснование необходимости рассмотрения влияния неоднород- ного обменного взаимодействия на дисперсию магнитостатиче- ской волны	281
6.2. Общий характер влияния обменного взаимодействия на распро- странение магнитостатической волны	283
6.3. Эффективные поля магнитостатической волны	283
6.4. Тензор восприимчивости с учетом размагничивания и обмена . .	285
6.4.1. Уравнения движения для компонент намагниченности . . .	285
6.4.2. Линеаризация уравнений движения	286
6.4.3. Тензор динамической восприимчивости	287
6.5. Уравнение Уокера для обменных волн	290
6.5.1. Решение уравнения Уокера	292
6.5.2. Упрощение коэффициентов уравнения Уокера	296
6.6. Двойственный характер поперечного волнового числа	298
6.7. Действительная и мнимая части поперечного волнового числа в отсутствие обмена	300

6.8. Влияние размагничивания на поперечное волновое число	304
6.9. Уравнение для определения поперечного волнового числа при заданном продольном волновом числе с учетом обменного взаимодействия	309
6.9.1. Алгоритмизация решения системы уравнений для компонент поперечного волнового числа	314
6.10. Соотношение между компонентами волнового числа в реальных условиях	315
6.11. Проявление двойственности поперечного волнового числа	316
6.12. Расчет компонент поперечного волнового числа по полной системе уравнений методом поиска нуля	317
6.12.1. Замечание о предпочтительном выборе мнимой компоненты поперечного волнового числа	321
6.12.2. Нули функции, определяющей компоненты поперечного волнового числа	322
6.12.3. Влияние обменного взаимодействия на компоненты поперечного волнового числа	324
6.13. Качественная интерпретация наблюдаемых явлений	326
6.13.1. Роль динамического размагничивания	326
6.13.2. Роль обменного взаимодействия	331
6.13.3. Роль жесткости системы	333
6.14. Дисперсионное соотношение	335
6.14.1. Общая структура компонент тензора магнитной проницаемости	335
6.14.2. Общая постановка задачи о распространении поверхностной волны	335
6.14.3. Решение общей задачи методом разделения переменных	336
6.14.4. Вывод дисперсионного соотношения из решения и граничных условий	337
6.15. Общая структура компонент поперечного волнового числа	339
6.15.1. Компоненты поперечного волнового числа в отсутствие обмена	339
6.15.2. Компоненты поперечного волнового числа при наличии обменного взаимодействия	340
6.15.3. Последовательность расчета компонент поперечного волнового числа при наличии обмена	340
6.16. Общая схема получения закона дисперсии	341
6.17. Получение компонент тензора проницаемости и промежуточных параметров	342
6.17.1. Компоненты тензора проницаемости при $k_x \rightarrow k_x^{(+)}$	342
6.17.2. Последовательность расчета компонент тензора проницаемости при $k_x \rightarrow k_x^{(+)}$	345
6.17.3. Компоненты тензора проницаемости при $k_x \rightarrow k_x^{(-)}$	346
6.17.4. Последовательность расчета компонент тензора проницаемости при $k_x \rightarrow k_x^{(-)}$	349

6.17.5. Промежуточные параметры $\varepsilon^{(+)}$ и $\varepsilon^{(-)}$	350
6.17.6. Последовательность расчета промежуточных параметров $\varepsilon^{(+)}$ и $\varepsilon^{(-)}$	351
6.18. Схема структуры дисперсионного соотношения	351
6.18.1. Левая часть дисперсионного соотношения	352
6.18.2. Последовательность расчета левой части	353
6.18.3. Правая часть дисперсионного соотношения	354
6.18.4. Последовательность расчета правой части	355
6.19. Действительная и мнимая части дисперсионного соотношения	356
6.19.1. Последовательность расчета действительной и мнимой частей дисперсионного соотношения	357
6.20. Общая схема получения закона дисперсии	358
6.21. Примеры расчета закона дисперсии в реальных ситуациях	359
6.21.1. Классическая обменная волна в безграничном пространстве и в тонкой пластине	359
6.21.2. Дисперсия с размагничиванием и обменом	361
6.21.3. Зависимость дисперсии от толщины пластины	363
6.21.4. Зависимость дисперсии от величины обменного взаимодействия	365
6.22. Замечание об ограничении диапазона по волновому числу	367
6.23. Особые случаи дисперсии	367
6.23.1. Дисперсионное соотношение	368
6.23.2. Дисперсия при больших волновых числах	370
6.23.3. Дополнительное решение дисперсионного соотношения	375
Выводы по главе 6	379
Глава 7. Влияние обмена и размагничивания на ограничение волнового числа в задаче Дэймона–Эшбаха с диссипацией.	389
7.1. Общие замечания о постановке задачи об ограничении волнового числа	389
7.2. Дисперсионное соотношение	393
7.3. Время собственного пробега волны	394
7.3.1. Влияние дискретности развертки по волновому числу на время собственного пробега волны	397
7.4. Время релаксации	399
7.4.1. Определение времени релаксации для колебаний намагниченности	400
7.4.2. Задача о возбуждении однородной прецессии намагниченности	401
7.4.3. Схема определения времени релаксации	402
7.4.4. Времена релаксации магнитных колебаний при различном затухании	403
7.5. Сравнение времен релаксации и собственного пробега волны	406
7.6. Времена собственного пробега и релаксации в диапазоне частот	408
7.6.1. Время собственного пробега	408
7.6.2. Время релаксации	410

7.7. Время релаксации в широком диапазоне частот	413
7.8. Влияние толщины пластины на ограничение волнового числа . .	415
7.9. Некоторые практические рекомендации	419
Выводы по главе 7	420
Глава 8. Спин-волновой резонанс в тонких магнитных пленках в отсутствие поверхностной анизотропии	424
8.1. Краткий обзор основных исследований спин-волнового резонанса	425
8.2. Общая геометрия задачи	426
8.3. Модель поверхностной анизотропии	427
8.3.1. Тензор магнитной восприимчивости	431
8.3.2. Интеграл перекрытия в модели поверхностной анизотропии	432
8.3.3. Развитие модели поверхностной анизотропии	435
8.3.4. Оценка величины поверхностной анизотропии	436
8.3.5. Обсуждение модели поверхностной анизотропии	438
8.4. Модель жесткой струны	440
8.4.1. Сопrotивление изгибу жесткой струны	441
8.4.2. Волновое уравнение с третьей производной	444
8.4.3. Колебания смещения в жесткой струне	447
8.4.4. Спектр резонансных частот колебаний жесткой струны . .	453
8.4.5. Замечание о роли интеграла перекрытия в задаче о струне	456
8.5. Модель спиновой цепочки	457
8.5.1. Эффективные поля, действующие на цепочку спинов в магнитной пленке	457
8.5.2. Механизм выпрямления спиновой цепочки	459
8.5.3. Прецессия намагниченности спиновой цепочки	460
8.5.4. Решение с учетом граничных условий	461
8.5.5. Интеграл перекрытия	463
8.6. Некоторые дополнительные замечания	464
Выводы по главе 8	466
Глава 9. Вопросы дальнейших исследований и применения обменных волн	469
9.1. Некоторые вопросы, требующие дальнейшей разработки	469
9.2. Возможные применения обменных волн	471
Выводы по главе 9	473
Литература	475

Список наиболее часто используемых сокращений

- ФМР — ферромагнитный резонанс
- МСВ — магнитостатическая волна
- ПМСВ — поверхностная магнитостатическая волна
- ОМСВ — объемная магнитостатическая волна
- ЭМВ — электромагнитная волна
- СВЧ — сверхвысокая частота
- ЖИГ — железиттриевый гранат

Введение

Спиновые волны, распространяющиеся в магнитных средах и содержащих такие среды структурах, составляют основу для широкого класса устройств обработки информации в диапазоне сверхвысоких частот. Среди таких устройств можно упомянуть фильтры, линии задержки, фазовращатели, преобразователи частоты, ограничители, шумоподавители, невзаимные и нелинейные устройства и другие. В качестве волноведущих сред используются пленки и пластины ферритов, в первую очередь — железиттриевого граната (ЖИГ), имеющего рекордно низкие магнитные потери.

Диапазоны частот, охватываемые такими волнами — от десятков мегагерц до единиц и более терагерц. Длины волн составляют от нескольких сантиметров до единиц нанометров.

В основе перечисленных и множества других устройств лежат физические свойства спиновых волн, в первую очередь, законы их дисперсии в различных условиях с учетом как дипольного, так и обменного взаимодействия, в том числе в средах, обладающих диссипацией.

Настоящая монография посвящена обзору свойств спиновых волн в наиболее распространенных случаях. Основное внимание уделяется довольно коротким волнам, для рассмотрения которых достаточно магнитостатического приближения. Некоторые вопросы рассмотрены также для более длинных волн в рамках полной электродинамики, однако из них выбраны только те, которые логически вытекают из свойств магнитостатических волн и являются их продолжением.

В силу ограниченности объема за рамками рассмотрения остаются весьма актуальные и активно развиваемые в последние годы положения спинтроники, учитывающие электрическую природу электронов как носителей магнитных спинов, а также свойства ударного изменения намагнитченности под действием мощных импульсов света от фемтосекундного лазера. Этим вопросам авторы предполагают уделить внимание в других монографиях.

Настоящая монография является пятой в серии предлагаемых авторами книг, посвященных ферромагнитному резонансу и динамике намагнитченности.

Первая книга [1] посвящена распространению магнитостатических волн в неоднородно намагнитченных пластинах и пленках. Вторая [2] — таким же волнам, распространяющимся в сложных структурах, в первую очередь, в решетках с различной величиной шага. В третьей книге [3] рассмотрен ферромагнитный резонанс при изменении ориентации намагнитченности и в четвертой книге [4] рассматривается динамика

намагниченности, в первую очередь, волновые процессы, в магнитных средах, находящихся в условиях ориентационных переходов.

В настоящей монографии распределение материала по главам следующее.

ПЕРВАЯ ГЛАВА содержит краткий обзор литературы, посвященной развитию физики и техники спиновых волн за последние 70 лет, начиная с шестидесятых годов, когда впервые было обнаружено и экспериментально доказано существование магнитостатических волн дипольного характера, позволивших создать первые линии задержки, обладающие уникальными свойствами.

Во **ВТОРОЙ ГЛАВЕ** приводится основной математический аппарат, используемый для расчета свойств магнитостатических волн. Получен тензор магнитной восприимчивости, уравнение Уокера и решение задачи Дэймона–Эшбаха, касающейся распространения поверхностных магнитостатических волн в касательно намагниченной ферритовой пластине.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА посвящена расширению решения задачи типа Дэймона–Эшбаха на случай достаточно длинных волн, частично выходящих за рамки магнитостатического приближения. Эта глава развития в дальнейшем материале монографии не имеет и приведена здесь для полноты картины.

В **ЧЕТВЕРТОЙ ГЛАВЕ** рассмотрены магнитостатические волны, распространяющиеся в пластине, обладающей магнитной диссипацией. Показано, что в рамках магнитостатического приближения диссипация приводит к ограничению волнового числа по величине, препятствуя возбуждению достаточно коротких волн.

ПЯТАЯ ГЛАВА посвящена рассмотрению дипольных волн с учетом динамического размагничивания, обусловленного неоднородностью распределения намагниченности в волне вдоль ее направления распространения. Показано, что учет размагничивания особенно важен для достаточно коротких волн, длина которых исчисляется единицами микрометров.

В **ШЕСТОЙ ГЛАВЕ** рассматривается роль обменного взаимодействия, являющегося особенно существенным для волн короче единиц микрометров. Рассмотрение проведено в геометрии задачи Дэймона–Эшбаха, существенным моментом является решение задачи для случая отсутствия поверхностной анизотропии, до сих пор считавшейся необходимым атрибутом существования обменных волн в тонких пластинах.

В **СЕДЬМОЙ ГЛАВЕ** показано, что квадратичный закон дисперсии обменных волн позволяет обойти ограничение по волновому числу, имеющему место в диссипативной среде. При этом становится возможным возбуждение магнитостатических обменных волн, длина которых составляет единицы нанометров, а допустимые частоты в условиях довольно невысокого подмагничивания простираются до десятков терагерц.

ВОСЬМАЯ ГЛАВА посвящена рассмотрению распространения обменных волн по толщине тонкой магнитной пленки с возбуждением

соответствующих спин-волновых резонансов. Показано, что решающую роль в таком возбуждении играет не поверхностная анизотропия, а жесткость спиновой цепочки, связанной обменным взаимодействием.

В ДЕВЯТОЙ ГЛАВЕ упомянуты некоторые соображения, касающиеся корректности классического рассмотрения обменных волн, а также приведены возможные области их практического применения.

В основном содержании монографии используются материалы работ [5–38], отражающих основные результаты, полученные авторами в период с 2014 по 2020 годы. На другие работы приведены соответствующие ссылки.

Определенный опыт работы авторов со студентами и начинающими исследователями показывает, что при первоначальном ознакомлении с предметом заметные трудности вызывает освоение математического аппарата, значительная часть которого рассеяна в статьях, не всегда легко стыкующихся друг с другом. С целью преодоления подобного положения вторая глава монографии посвящена более или менее подробному описанию математического аппарата, используемого при расчетах волновых процессов в магнитных средах.

Основной текст монографии также рассчитан на возможность последовательного воспроизведения приведенных математических выкладок, по мере возможности, без обращения к дополнительным источникам и чрезмерного напряжения умственных возможностей читателя. Такое стремление не позволило авторам избежать некоторых незначительных повторов, призванных облегчить понимание текста текущего раздела без обращения к предыдущим. В этом плане монографию можно рассматривать как некий рабочий инструмент, призванный научить восприимчивых читателей пользоваться требуемым математическим аппаратом, по крайней мере, в той степени, в какой это доступно авторам.

Как и в предыдущих монографиях данной серии, в описанных здесь работах принимали участие многочисленные соавторы. Так, в теоретических работах, касающихся дисперсионных свойств магнито-статических волн в диссипативной среде, важная роль принадлежит П. А. Макарову, а также его ученицам Ю. И. Келлер, Л. А. Мальцевой и М. А. Уляшевой. В обсуждении ряда работ того периода, а также предоставлении значительного количества весьма полезных ссылок, принимал участие В. С. Власов.

На начальном этапе работ по размагничиванию и обменному взаимодействию значительная роль принадлежала В. И. Зубкову.

В экспериментальных работах по исследованию дисперсии магнито-статических волн, особенно малой длины, принимал участие Э. Г. Локк. Его роль, а также вклад работавших с ним А. Ю. Анненкова и С. В. Геруса подробно освещены в первой монографии настоящей серии.

Начальному этапу работы весьма способствовало стимулирующее внимание и полезные замечания С. В. Яковлева, П. Е. Зильбермана, А. Ф. Кабыченкова, В. В. Коледова, С. В. Тарасенко, Л. Н. Котова,

В. А. Котова. Многие экспериментальные аспекты работы обсуждались с П. М. Ветошко.

В многочисленных обсуждениях оригинальных работ авторов, лежащих в основе данной монографии, принимали участие: А. В. Вашковский, Ю. И. Беспятых, И. Е. Дикштейн, В. В. Тарасенко, В. Д. Харитонов, Е. И. Нефедов, Г. С. Макеева, Ф. В. Лисовский, Е. Г. Мансветова, Г. В. Арзамасцева, Н. Н. Кирюхин, А. В. Вороненко, Д. Г. Шахназарян, В. В. Кильдишев, Л. А. Красножен.

Важнейшая роль в создании благоприятных условий для работы, постоянное к ней внимание и неоднократное оказание значительной помощи принадлежит академику РАН Ю. В. Гуляеву.

Непосредственное выполнение работы, в том числе написание настоящей монографии, оказалось возможным благодаря помощи члена-корреспондента РАН С. А. Никитова.

Значительная часть статей, положенных в основу настоящей монографии, была опубликована в электронном «Журнале радиоэлектроники», за что авторы приносят благодарность коллективу редакции и ответственному секретарю Е. В. Корженевской.

Практически все работы были выполнены с деятельным участием многочисленного технического персонала, без помощи которого выполнение приведенного труда было бы совершенно невозможным.

Всем перечисленным участникам и соавторам работ авторы выражают огромную признательность, отдают низкий поклон и приносят глубочайшую благодарность. Величайшее спасибо Вам, дорогие соратники, друзья и помощники!

Глава 1

ОБЩИЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В МАГНИТНЫХ СРЕДАХ (ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ)

Настоящая глава служит вводным разделом в основной текст монографии и представляет собой краткий обзор литературы, посвященной волновым процессам в магнитных средах. Основное внимание уделяется магнитостатическим волнам (МСВ), в первую очередь, обменного характера.

Некоторое внимание уделено также электромагнитным, магнитным дипольным и магнитоупругим волнами в том числе приведены данные о волновых процессах сверхбыстрого характера, имеющих место при фемтосекундном изменении состояния среды.

Обзор в основном, кроме нескольких особо важных случаев, не включает в себя работы авторов данной монографии, так как этим работам посвящена основная часть текста, составляющая последующие главы.

Обзор не ставит целью критический разбор сегодняшнего состояния работ по волновым процессам в магнитных средах, а призван дать читателю лишь общее представление о вопросе, позволяющее более свободно ориентироваться в основном содержании последующего текста.

Не претендуя на полноту, обзор представляет собой краткое весьма конспективное перечисление только основных работ и основных результатов. Данные представлены в историческом плане с повышенным вниманием к волнам обменного характера. За более полной информацией по всем затронутым вопросам читатель может обратиться к предыдущим монографиям настоящей серии [1–4].

1.1. Первое упоминание о спиновых волнах — тепловые магноны

Исторически первым, или, во всяком случае, достаточно ранним, упоминанием о волнах в магнитных средах, по-видимому, можно считать работы Блоха–Гейзенберга, выполненные в 30-х годах XX века. Краткий обзор этих работ с достаточно подробным изложением математического аппарата можно найти в монографии [39]. В этих работах интерпретация экспериментально наблюдаемого уменьшения намагниченности ферромагнетика по мере увеличения температуры выполнена на основе введения волновых функций электронов, обладающих спиновым магнитным моментом. Повышение температуры приводит

к возбуждению спиновых волн обменного характера, что нарушает жесткое упорядочение спинов, обусловленное обменным взаимодействием, в результате чего общая намагниченность уменьшается. Такие спиновые волны получили название магнонов по аналогии с волнами упругого характера — фононами. Спектр магнонов носит шумовой характер, так что спиновые волны имеют длину порядка единиц и долей микрометра. Когерентное возбуждение спиновых волн, позволяющее использовать их для обработки информации, в те времена осуществить было затруднительно из-за крайне малой их длины. Поэтому реальное освоение обменных волн, в первую очередь в области конструирования устройств, временно приостановилось.

1.2. Ферромагнитный резонанс и невзаимные устройства

Решающее продвижение в деле освоения магнитных волн произошло в 40-х годах 20-го века и было связано с открытием явления ферромагнитного резонанса, имеющего место в диапазоне сверхвысоких частот (от сотен мегагерц до сотен гигагерц) [40–42]. Для интерпретации динамики намагниченности было введено уравнение Ландау–Лифшица:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma[\mathbf{M} \times \mathbf{H}]. \quad (1.1)$$

Это уравнение, будучи первоначально предложенным для описания динамики доменов [43], вскоре нашло широчайшее применение для представления динамической восприимчивости ферромагнетика, возбуждаемого переменным полем [1–4, 40–44].

Узкополосный характер ферромагнитного резонанса, возбуждаемого в магнитных диэлектриках, в первую очередь в ферритах, позволил создать эффективные фильтры, дециметрового и сантиметрового диапазонов частот [40–42, 45, 46].

С освоением волноводной техники возникло значительное разнообразие невзаимных устройств, использующих правовинтовой характер прецессии намагниченности.

К таким устройствам можно отнести фазовращатели, вентили, циркуляторы, как фарадеевские, так и дифференциальные, игрек-циркуляторы и другие [47–50].

Теоретическое обоснование электродинамики таких устройств, в первую очередь использующих волноводную технику, можно найти в [40–42, 47, 51].

1.3. Стабильные и нестабильные нелинейные процессы

Нелинейный характер прецессии намагниченности послужил поводом к использованию для обработки информации стабильных нелинейных процессов, таких как умножение частоты и детектирование [52–59].

Перспектива достижения крайне низкого уровня шума породила многочисленные попытки создания параметрического усилителя на феррите [60–64]. В экспериментах было достигнуто усиление в десятки децибел, однако шум при этом оказался примерно таким же, как в обычных широко использовавшихся в то время электронных лампах, что значительно превышало ожидаемый уровень.

С другой стороны, попытки использовать невзаимные волноводные устройства на высоком уровне мощности выявили аномально большой рост потерь при достижении мощностью определенного порогового уровня. Явление было названо «дополнительным поглощением». В этом случае электромагнитные колебания на выходе устройства также становились нестабильными и содержали большую примесь хаотического шума [65, 66].

Теоретическое обоснование нестабильным нелинейным процессам было дано на основе модели параметрического возбуждения спиновых волн обменного характера [40–42, 67, 68]. Возбуждение происходило на половинной частоте накачки, имело пороговый характер и обеспечивало перекачку энергии первичного сигнала в параметрически возбуждаемый резервуар коротких обменных волн с последующей релаксацией их в решетку. При этом за порогом возбуждения колебания сигнала, то есть уровень дополнительного поглощения, становились неустойчивыми, приобретая шумовой характер. Именно такое их поведение обеспечивало высокий уровень шума параметрического усилителя, ограничивающего его дальнейшую разработку.

Шумовой характер колебаний в запороговом состоянии первоначально был объяснен на основе модели автомодуляции, происходящей по причине различия времен поперечной и продольной релаксаций намагниченности [66]. Позднее для интерпретации подобных явлений была привлечена модель турбулентности спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения [69, 70].

Таково было исторически второе обращение к волнам обменного характера. Тогда экспериментальная база еще не позволяла осуществить их когерентное возбуждение, однако появилось множество работ, посвященных исследованию обменных волн в процессе их параметрического возбуждения. Определенную библиографию (хотя далеко не исчерпывающую) таких работ, вышедших в 60–70-х гг. XX века, можно найти в монографиях [66, 70], а также [40–42].

1.4. Обменные волны по толщине пленки

Параллельно с исследованием ферромагнитного резонанса в магнитодиэлектриках, в первую очередь в ферритах, проводилось изучение резонансных явлений в проводящих материалах. Вследствие сильного скин-эффекта, не допускающего проникновение поля сверхвысоких частот внутрь образца, в экспериментах использовались тонкие метал-

личные пленки, в том числе железа и пермаллоя, намагниченные по нормали к плоскости.

В первых же работах был выявлен многомодовый дискретный характер возбуждаемых резонансных колебаний [71].

Для интерпретации экспериментов была предложена модель возбуждения по толщине пленки стоячих волн обменного характера [72]. В качестве граничных условий, обеспечивающих эффективное взаимодействие неоднородных колебаний намагниченности с возбуждающим однородным переменным полем, была предложена модель поверхностной анизотропии. То есть предполагалось, что спины, находящиеся на поверхности пленки, имеют там жесткое закрепление, обеспечивающее узел стоячей волны намагниченности.

Явление было названо «спин-волновым резонансом» и породило значительное разнообразие исследований в тонких пленках из самых различных обладающих намагниченностью материалов.

В экспериментах было установлено, что длина возбуждаемой волны определяется толщиной пленки. Уже в ранних работах такая длина составляла десятки нанометров (при толщине пленки в 500 нм в [71] возбуждалось до десяти гармоник).

Среди наиболее заметных работ, по-видимому, следует отметить достаточно широкие исследования [73–75], работы по многослойным [76, 77] и неоднородным по толщине пленкам [78–81], а также работы, использующие теоретическую модель на основе функций Грина [82–88].

Подробный обзор дальнейшего развития таких работ можно найти, например, в монографиях [41, 42]. Теоретическая трактовка большинства работ базировалась на модели поверхностной анизотропии, впервые предложенной в работе [72].

В ряде работ, где простое «жесткое» закрепление спинов на поверхностях пленки оказывалось недостаточным, экспериментальные результаты трактовались путем предположительного введения «частичного» и «упругого» закрепления [41, 42].

Таково было исторически третье достаточно широкое обращение исследователей к обменным волнам. Здесь возможность их эффективного когерентного возбуждения обеспечивалась малостью толщины пленки, игравшей роль характерного размера, сравнимого с длиной возбуждаемой волны. Типичные длины волн в эксперименте измерялись единицами и долями микрометров, причем волна затухала уже на расстоянии нескольких своих периодов. Так, даже в лучшем материале, каковым является железиттриевый гранат, длина свободного пробега волны составляла всего 2–3 мкм, так что спин-волновой резонанс можно было наблюдать только в пленках, толщина которых не превышала этой величины [89].

Сложилось такое положение, что все исследователи уже знали о существовании обменных волн и даже можно было осуществить их

когерентное возбуждение, однако в весьма специфических условиях, только по толщине пленки в виде стоячих резонансов.

Дальнейшему освоению обменных волн, как и прежде, мешала их крайне малая длина (менее 1 мкм) в сочетании с отсутствием технических возможностей изготовить возбудитель, размеры которого были бы соизмеримы с такой длиной волны.

1.5. Появление железоиттриевого граната

Решающим прорывом в освоении волновых процессов в магнитных средах явилось создание феррита нового поколения — железоиттриевого граната (ЖИГ) [1–4, 40–42, 47, 90–96].

Этот феррит обладает рекордно низкими магнитными потерями. Так, ширина линии ферромагнитного резонанса может составлять менее 0,5 Э, тогда как для ферритов других марок эта величина превышает десятки и сотни эрстед [40–42, 47].

Дополнительным достоинством железоиттриевого граната являются крайне низкие упругие потери, в хороших образцах могущие быть меньше на порядок, чем у кварца [97–99].

Еще одно достоинство железоиттриевого граната состоит в его весьма высокой оптической прозрачности в сочетании с высоким фарадеевским вращением в диапазоне длин волн от 1 до 6 мкм [100].

Все эти три достоинства, каждое в своей области или в совокупности, обеспечили железоиттриевому гранату широкое применение как в исследовании разнообразных физических процессов, так и в конструировании различных устройств обработки информации.

1.6. Магнитостатические резонансные типы

Рекордно низкий уровень магнитных потерь, обеспечиваемый новым материалом, позволил уменьшить ширину линии ферромагнитного резонанса с десятков и сотен эрстед в обычных ферритах до долей эрстеда в железоиттриевом гранате. При этом наблюдавшиеся ранее в эксперименте широкие линии распались на множество отдельных пиков значительно меньшей ширины. Первые эксперименты выявили множественный характер структуры линии ферромагнитного резонанса, определяемый формой и размерами образца [101–108].

При этом оказалось, что вследствие высокой магнитной проницаемости феррита, особенно ярко выраженной для железоиттриевого граната (десятки тысяч и более), электрическое поле колебаний в условиях резонанса ничтожно мало по сравнению с магнитным, так что в большинстве экспериментов им можно было пренебречь.

Для интерпретации таких экспериментов успешным оказалось приближение магнитостатики, позволяющее рассматривать электромагнитные колебания в образцах небольших размеров (хотя бы на порядок

меньших длины волны в свободном пространстве), как колебания собственно намагниченности без какого-либо учета электрического поля.

Для характеристики неоднородного распределения динамической намагниченности в пространстве было введено уравнение Уокера, являющееся для магнитной среды аналогом уравнения Лапласа [1, 2, 40, 41, 101, 102]:

$$\Delta\psi + 4\pi\operatorname{div} \mathbf{m} = 0. \quad (1.2)$$

где Δ — оператор Лапласа, \mathbf{m} — динамическая намагниченность, а скалярный потенциал ψ определяется соотношением:

$$\mathbf{h} = \operatorname{grad} \psi, \quad (1.3)$$

где \mathbf{h} — переменное магнитное поле, связанное с намагниченностью через тензор динамической магнитной восприимчивости $\vec{\chi}$ [1–4, 40–42, 44], так что:

$$\mathbf{m} = \vec{\chi} \mathbf{h}. \quad (1.4)$$

При этом сам тензор восприимчивости $\vec{\chi}$ определяется решением уравнения Ландау–Лифшица (1.1). Подробный вывод такого тензора для наиболее простого случая изотропной среды можно найти в [1, стр. 41–47]. В более общем случае, например, если среда обладает анизотропией, эффективные поля, входящие в уравнение Ландау–Лифшица, должны быть определены из общего выражения для плотности магнитной энергии, включающей такую анизотропию. Многочисленные примеры получения тензора восприимчивости для более сложных случаев приведены в монографиях [1–4, 44].

Уравнение (1.2) соответствует безграничной среде (с учетом приближения магнитоэлектроники) и не имеет резонансного характера. Для учета стоячих колебаний по длине образца, которые собственно и дают наблюдаемые в эксперименте резонансные пики, необходим учет граничных условий.

Классические условия электродинамики требуют непрерывности касательной составляющей поля и нормальной составляющей индукции на поверхности образца. Для потенциала такие условия означают равенство соответствующих производных. В декартовой системе координат $Oxyz$ для границы образца, совпадающей с плоскостью Oyz при $x = 0$, такие условия имеют вид [1, 2, 40–42, 102]:

$$\mu \frac{\partial \psi^i}{\partial x} + i\nu \frac{\partial \psi^i}{\partial y} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \psi^e}{\partial x} \Big|_{x=0}; \quad (1.5)$$

$$\psi^i \Big|_{x=0} = \psi^e \Big|_{x=0}, \quad (1.6)$$

где μ и ν — компоненты тензора восприимчивости, а индексы « i » и « e » соответствуют потенциалу внутри и вне образца.

Решение уравнения (1.2) с граничными условиями (1.5), (1.6) позволяет найти тонкую структуру линий ферромагнитного резонанса, расщепленных на так называемые «уокеровские типы».

Подробный расчет такой структуры можно найти в [101–108], а многочисленные ссылки на последующие работы в [40–42].

1.7. Магнитостатические волны дипольного характера

Малость затухания магнитных колебаний в железиттриевом гранате породила попытки возбуждения в нем не только однородных резонансов, но и неоднородных распространяющихся магнитостатических волн [1–4, 40–42].

Первые эксперименты были выполнены на ферритовом диске, помещенном в прямоугольный резонатор. При этом подача в качестве возбуждения импульса сверхвысокой частоты порождала ответный импульс, задержанный на несколько микросекунд. Эксперимент был интерпретирован как возбуждение магнитостатических волн на периферии диска с последующим считыванием их с его центра.

Запаздывание вторичного импульса по времени породило возможность создания линии задержки. Традиционно использовавшиеся в технике устройства задержки того времени выполнялись на коаксиальных кабелях. Так, для обеспечения времени задержки в одну микросекунду требовалась довольно громоздкая бухта кабеля длиной около 300 метров. То есть использование железиттриевого граната давало возможность создать высокоэффективную линию задержки крайне малых размеров, исчисляемых единицами и долями кубических сантиметров.

Такая перспектива породила большое количество работ, посвященных как исследованию распространения магнитостатических волн, так и конструированию на их основе разнообразных устройств обработки аналоговой информации.

Конструктивная схема диска в резонаторе оказалась мало эффективной и вскоре была вытеснена схемой аксиально намагниченного ферритового цилиндра, на торцах которого размещались излучающая и приемная проволочные антенны.

В диапазоне 1–2 гигагерц было получено время задержки более 20 мкс при ослаблении задержанного сигнала на 40 дБ. Длина магнитостатических волн в этих экспериментах составляла от десятков микрометров до единиц миллиметров, так что волны имели чисто дипольную природу, и обменное взаимодействие, характерным размером для которого являются единицы и доли микрометра, затронуто не было.

Подробное описание работ по дипольным магнитостатическим волнам и их применению в технике можно найти в монографиях [1, 41, 42], а также в обзорах [109–113].

Теоретическая трактовка распространяющихся магнитостатических волн основывалась на решении так называемой «задачи Дэймона–

Эшбаха» [41, 42, 114–121]. В постановке такой задачи полагалось, что феррит имеет вид пластины, намагниченной параллельно или перпендикулярно ее плоскости, а магнитостатические волны распространяются вдоль продольного размера пластины. При этом в геометрии пластины решалось уравнение Уокера (1.2) с принятыми на двух противоположных поверхностях граничными условиями вида (1.5)–(1.6), тогда как размер пластины вдоль ее плоскости никак не ограничивался. Потенциал при этом предполагался зависящим от координаты именно вдоль плоскости пластины, что в совокупности с гармонической зависимостью от времени давало решение в виде распространяющейся волны.

Рассматривались как объемные, так и поверхностные волны.

Были получены дисперсионные соотношения для обоих типов волн, интервалы существования волн по частоте и по полю, а также сопровождающие волну поля и компоненты намагниченности. Относительно дисперсии магнитостатических волн, было выявлено, что их частота при уменьшении длины волны, начиная с некоторой ее величины, насыщается, стремясь к постоянному значению. Для объемных волн такое значение лежит ниже частоты, соответствующей длинным волнам, а для поверхностных — выше таковой. То есть, при достаточно малой длине волны дисперсионная кривая для тех и других волн имеет почти горизонтальный участок. Отметим еще раз, что рассмотрение касается только волн чисто дипольного характера.

Подробное решение задачи Дэймона–Эшбаха с детальным изложением промежуточных выкладок можно найти в монографии [1], а также в несколько более сжатом виде в монографии [2]. Там же приведена библиография по данному вопросу.

1.8. Магнитоупругие волны

В магнитной среде, обладающей упругими и магнитоупругими свойствами, кроме чисто дипольных возможно распространение также чисто упругих и смешанных магнитоупругих волн.

Чисто упругие волны имеют линейную дисперсию, так что их частота прямо пропорциональна длине волны. Вследствие стремления дисперсии магнитостатических волн при малой их длине к постоянному значению, в диапазоне сверхвысоких частот сильно наклонная дисперсионная кривая для упругих волн пересекает почти горизонтальную дисперсионную кривую для магнитостатических волн.

Явление пересечения носит название «кроссовера» и состоит в том, что в некоторой окрестности точки пересечения магнитная и упругая волны сливаются друг с другом, образуя единую магнитоупругую волну, являющуюся по своим свойствам в равной степени как магнитной, так и упругой [42, 122–126].

Магнитоупругие волны были обнаружены в экспериментах примерно в то же время, что и дипольные. При этом подача СВЧ-импульса

на излучающую антенну линии задержки на ферритовом цилиндре, на выходной антенне наблюдалось два несколько разнесенных по времени выходных импульса: один задержанный за счет дипольной волны, а другой — за счет упругой. Возбуждение упругой волны на торце цилиндра, оба торца которого были оптически отполированы, давало многократное отражение упругого импульса от обоих торцов цилиндра по очереди, что порождало серию из нескольких десятков и более выходных импульсов.

Значительное число экспериментально наблюдавшихся результатов по магнитоупругим волнам описаны в обзоре [98]. Некоторые данные также отражены в упомянутых выше обзорах [109, 110], а также в монографии [42]. Длина волны в этих экспериментах составляла десятки и сотни микрометров, так что обменное взаимодействие также еще не было активно задействовано.

Кроме возбуждения магнитоупругих волн в классической схеме линии задержки, влияние упругих свойств магнетика было отмечено в экспериментах по нелинейному ферромагнитному резонансу [66]. При этом за счет параметрических эффектов было возможно как возбуждение магнитоупругого резонанса на сравнительно низких частотах (единицы мегагерц) [127], так и на частотах, близких к частоте классического ферромагнитного резонанса [66].

При стороннем возбуждении упругих волн оказалось возможным наблюдать в эксперименте рассеяние спиновых волн на упругих — так называемый «спиновый эффект Мандельштама–Бриллюэна» [128–130]. Теоретическая трактовка этого явления, в том числе применительно к обменным волнам, была первоначально дана в работе [131, 132], после чего получила свое развитие в монографии [66]. Среди более поздних результатов, в том числе с участием поверхностных волн, можно отметить работы [133–137].

1.9. Магнитооптические эффекты

Всесторонние исследования железиттриевого граната, наряду с уникальными резонансными и магнитоупругими свойствами, выявили весьма высокую его прозрачность в сочетании со значительным эффектом Фарадея в диапазоне оптических волн от 1 до 6 мкм [100]. Это обстоятельство породило многочисленные исследования распространения магнитостатических волн с использованием оптических методов.

В первую очередь исследовалось вращение плоскости поляризации света и дифракция узкого светового луча на решетке намагниченности, создаваемой распространяющейся спиновой волной. Эти работы позволили определить пространственное распределение и длину распространяющейся магнитостатической волны.

Дальнейшее применение магнитооптические эффекты нашли в устройствах переключения и модуляции света, в том числе при

его распространении по магнитооптическим волноводам [138], намагниченность в пределах которых управлялась распространяющейся магнитостатической волной [100, 139, 140].

Введение в железиттриевый гранат добавки висмута, а также использование многослойных структур, позволило заметно повысить магнитооптические свойства таких устройств [141, 142].

Следует заметить, что во всех этих работах использовался свет в окне прозрачности железиттриевого граната, то есть при длине оптической волны более 1 мкм (или, в лучшем случае, более 0,5 мкм), так что работали в основном магнитостатические волны дипольного характера, тогда как эффективное исследование обменных волн длины менее 1 мкм по-прежнему оставалось недоступным.

1.10. Линии задержки с неоднородным полем

Существенное продвижение в сторону более коротких волн произошло при создании линий задержки с неоднородным полем [41, 42, 143].

Геометрия такой линии задержки представляла собой обычный ферритовый цилиндр (или «стержень»), на концах которого размещались излучающая и приемная проволочные антенны. Цилиндр намагничивался извне постоянным полем, ориентированным вдоль его оси. При этом вблизи торцов цилиндра за счет размагничивания формы, внутреннее поле получалось меньшим, чем в его середине.

Исследовались объемные магнитостатические волны, дисперсия которых такова, что с увеличением поля длина волны уменьшается. С уменьшением длины волны падает также и ее групповая скорость, так что импульсы коротких волн распространяются медленнее, чем импульсы длинных.

Такая волна, возбуждаемая вблизи торца цилиндра, где внутреннее поле было мало, распространялась далее вдоль оси цилиндра к его середине, следуя в области плавно увеличивающегося поля. При этом, как длина волны, так и ее скорость, уменьшались. Пройдя точку середины цилиндра, волна переходила в область плавно уменьшающегося поля, так что ее длина и скорость постепенно увеличивались. Дойдя до противоположного торца, волна имела ту же длину, как и на первом торце, так что ее поле приемной антенной хорошо улавливалось. Таким образом, пройдя всю длину цилиндра, волна задерживалась тем сильнее, чем ее скорость в центральной части цилиндра была меньше.

В эксперименте линии задержки с наиболее удачной конфигурацией поля в диапазоне частот 1–4 ГГц обеспечивали время задержки до 40 нс при затухании волны не более 60 дБ. Реальные конструкции и технические характеристики таких линий задержки описаны в цитированных выше обзорах [109, 110].

Теоретическая трактовка распространения магнитостатических волн в неоднородном поле, применительно к линиям задержки,

приведена в работах [144–147]. Влияние магнитоупругих эффектов отражено в работе [148, 149]. В работе [150] предложен механизм усиления распространяющихся магнитостатических волн за счет тока, текущего в наложенной на феррит полупроводниковой пластине.

В экспериментах по линиям задержки с неоднородным полем удалось реально возбуждать когерентные достаточно короткие магнитостатические волны. Минимальная достижимая длина таких волн была порядка 1 мкм. Затухание волн позволяло им распространяться на расстояние в 100–200 раз большее своей длины. Именно в таких экспериментах выполнялось зондирование волновых пучков с помощью света. Наблюдалось также преобразование магнитостатических волн в упругие для волн той же длины в точке кроссовера. То есть исследователи здесь уже вплотную подошли к границе возбуждения обменных волн. Дальнейшего продвижения не допускали тогдашние (70-е годы XX века) технические возможности оптики и оптической литографии.

1.11. Различие фазовой и групповой скоростей

Сложный закон дисперсии магнитостатических волн дипольного характера говорит о существенном различии фазовой и групповой скоростей. Для волн с линейной дисперсией на принципиальный характер такого различия было указано еще Рэлеем [151] и подробно разобрано, например, в книгах [152, 153] и в работах [154, 155, 157, 158].

В анизотропной среде, каковой являются магнитные материалы за счет свойственной им гиротропии, направления векторов фазовой и групповой скоростей существенно различаются.

Для магнитостатических волн дипольного характера такое различие подробно рассмотрено в книге [159]. Там же показана возможность применения к распространению узких пучков магнитостатических волн законов геометрической оптики. Некоторые особенности такого распространения для частного случая поверхностных магнитостатических волн рассмотрены в обзоре [160].

1.12. Магнитостатические волны в неоднородном поле

В работе Аулда [161] различие направлений векторов фазовой и групповой скоростей магнитостатической волны было использовано для создания переключателя каналов информации за счет изменения направления подмагничивающего поля. Там же была предложена теоретическая модель распространения волны в неоднородно намагниченной среде, использующая аналогию между волной и частицей, движение которой описывается с помощью уравнений Гамильтона.

В работе [162] метод Гамильтона–Аулда был применен для описания распространения магнитостатической волны в пластине, неод-

нородное поле внутри которой создается за счет размагничивающих факторов.

На начальном этапе исследования распространения волн в неоднородном поле (до начала 90-х годов XX века) значительные трудности в эксперименте вызывала малая площадь доступных ферритовых пластин, не превышавшая 1–2 квадратных сантиметров. Эта трудность была преодолена только с созданием ферритовых пленок большой площади.

С конца 60-х годов в течение двух десятилетий параллельно с исследованием магнитостатических волн развивалось другое направление использования ферритов в системах обработки информации, в первую очередь систем памяти — изучение цилиндрических магнитных доменов (ЦМД) [163–169]. В качестве рабочей среды для поддержания ЦМД наиболее перспективными оказались пленки смешанных ферритов-гранатов [170–173], причем для увеличения объемов памяти требовались такие пленки большой площади (до десятков и сотен квадратных сантиметров).

Весьма успешное развитие технологии эпитаксиального роста таких пленок на подложках из гадолиний-галлиевого граната позволило применить ее для создания пленок железоиттриевого граната такой же большой площади. В руках исследователей магнитостатических волн оказались пленки в виде дисков диаметром до 70 мм и более.

Использование техники подвижных микрополосковых антенн позволило на практике развернуть широкие исследования распространения пучков магнитостатических волн в неоднородном поле.

В качестве базовых конфигураций неоднородного поля были выбраны поля типа «линейного», «долины» и «вала».

Поле «линейное» обеспечивало отклонение пучка магнитостатических волн на углы до 90 градусов, причем этот угол задавался изменением поля или частоты в пределах 10–20% от начального значения.

Поле типа «долины» обеспечивало расщепление единого пучка магнитостатической волны на две составляющие, расходящиеся в диаметрально противоположные стороны на углы до 90 градусов, причем геометрическое положение уровня расщепления задавалось конфигурацией дна «долины» подмагничивающего поля.

Поле типа «вала» обеспечило возможность волноводного распространения магнитостатических волн на расстояние до 5–7 сантиметров с потерями менее 10 дБ, что явилось рекордным для распространения МСВ в любых предшествующих экспериментах.

Распространение таких волн в неоднородных полях позволило создать ряд высокоэффективных устройств обработки информации, из которых можно упомянуть фильтры узкополосные (до 10 МГц), многоканальные (до 5 каналов и более), линии задержки до 20 мкс, волноводы с произвольными точками доступа, фазовращатели, управляемые полями в единицы эрстед, высокочувствительные датчики величины и направления магнитного поля.

Подробный обзор как результатов исследования МСВ в неоднородных полях, так и их технических применений с обширной библиографией содержится в первой монографии настоящей серии [1], куда авторы и рекомендуют обратиться читателю за дальнейшими подробностями.

Большая площадь доступных пленок железиттриевого граната позволила обратиться к исследованию распространения магнитостатических волн в более сложных условиях, в первую очередь в неоднородностях, создаваемых решетками различных типов. Подробный обзор таких исследований содержится во второй монографии настоящей серии [2]. Рассмотрены различные соотношения между периодом решетки и длиной волны. Для случаев, когда период решетки значительно меньше, сравним и значительно больше длины волны, приведен подробный разбор требуемого математического аппарата.

Отдельно рассмотрен случай медленно меняющегося поперечного неоднородного поля. Показано, что в таком поле возможно эффективное преобразование коротких магнитостатических волн в длинные электромагнитные, что проявляется в эксперименте как излучение электромагнитной волны из феррита. Приведены результаты экспериментов по исследованию диаграммы направленности излучения. Для интерпретации таких экспериментов предложена модель ускоренного движения магнитных зарядов [174–177]. Для больших подробностей авторы также рекомендуют читателю обратиться к монографиям [1, 2].

Следует заметить, что все данные, рассмотренные в монографиях [1, 2], а также в остальных цитированных в настоящем разделе ссылках, относятся только к дипольным волнам. Распространение подобных данных на обменные волны в момент написания настоящей монографии еще ожидает своего исследователя.

1.13. Возбуждение волн импульсами света

Важным направлением сегодняшнего дня в технике МСВ следует считать возбуждение таких волн мощными импульсами света.

Для исследования используется метод «накачки-зонда», когда возмущение намагниченности создается мощным лазером (обычно пико- или фемтосекундным), а ее считывание — другим маломощным лазером по эффекту Фарадея или Керра [178–180]. Мощный импульс света нагревает магнитную среду, в результате чего в ней возникают упругие напряжения волнового характера [181–183], за счет магнитострикции вызывающие изменение намагниченности, в том числе прецессию резонансного характера [184, 185] и спиновые волны [186].

Все эксперименты по методу «накачки-зонда» можно разделить на две большие группы: использующие единую среду и использующие разделенную среду.

В экспериментах первой группы импульс света воздействует непосредственно на магнитную среду. При этом за счет нагревания происходит ее расширение, то есть возникает интенсивное упругое смещение, причем намагниченность среды из-за роста температуры уменьшается.

Для интерпретации таких экспериментов используется так называемая «трехтемпературная модель» [187, 188]. При этом магнитная пленка рассматривается как резервуар для одновременного сосуществования трех различных возбужденных систем: электронов, спинов и решетки. Короткий импульс света возбуждает систему электронов, после чего энергия этих электронов расходуется по двум другим системам — фононной и магнетонной. Повышение температуры среды в этом случае соответствует сильному возбуждению фононной системы. Изменение намагниченности при повышении температуры учитывается как интенсивное возбуждение магнетонного резервуара, снижающего суммарную намагниченность.

Принципиально важным моментом здесь является различие времен релаксации этих трех систем: минимальное — у электронной и значительно большее у фононной и магнетонной. При этом длительность импульса света должна быть значительно меньше времени релаксации любой из систем, но импульс требуется достаточно сильный, чтобы раскатать электронную систему до значительной амплитуды. Математическое описание такого явления производится на основе системы из трех уравнений первого порядка (по одному для каждой системы), которые имеют одинаковый вид, а именно: скорость изменения температуры данной системы предполагается пропорциональной разности температур между этой системой и двумя другими. В результате получаются экспоненциальные зависимости, которые при подборе констант довольно удовлетворительно согласуются с экспериментом.

Таким образом, необходимым условием реализации трехтемпературной модели является наличие быстро релаксирующей электронной системы, для чего в эксперименте выбирается хорошо проводящий металл, чаще всего — никель. Тем не менее, отсутствие электронной системы в ряде экспериментов с непроводящими средами не мешает возбуждению интенсивных спиновых волн, происходящему через посредство фононной системы, как это имеет место, например, в железиттриевом гранате [186].

В экспериментах второй группы используется трехслойная структура, представляющая собой две пленки, нанесенные на противоположные поверхности единой подложки. При этом одна из пленок является немагнитной, но имеет значительный коэффициент теплового расширения, а другая является магнитной со значительной магнитострикцией.

Импульс света падает на первую пленку, вызывая ее термическое расширение, то есть соответствующий импульс упругого смещения, который, проходя через подложку, являющуюся здесь как бы буферной

зоной, доходит до второй пленки и возбуждает в ней через посредство магнитострикции интенсивные магнитные колебания.

Такая схема используется в работах [189–191]. Трехтемпературная модель здесь не применяется, а вместо нее рассмотрено непосредственное распространение упругого импульса во времени. Сопоставление времен релаксации выполняется численным порядком, что позволяет в достаточной степени интерпретировать эксперименты.

Некоторые аспекты процессов возбуждения магнитных колебаний фемтосекундными импульсами света, в том числе роль магнитной анизотропии и формы поступающего импульса, рассматриваются в работах [183, 192].

Отметим, что в большинстве работ, кроме [186], основное внимание уделяется именно процессам импульсного возбуждения, тогда как свойствам возбуждаемых магнитоэлектрических волн достаточного внимания не уделяется. Тем не менее, из ряда приводимых авторами данных косвенным путем можно сделать вывод, что возбуждаемые волны могут быть достаточно короткими, причем в некоторых случаях удается проследить даже зачатки квадратичного закона дисперсии, свойственного обменным волнам. Тем не менее, вопрос о возможности когерентного возбуждения обменных волн по-прежнему остается открытым.

1.14. Современные работы по магнитоэлектрическим волнам

Важнейшей тенденцией сегодняшнего дня является стремление к нанометровому масштабу размеров устройств обработки информации.

В диапазоне СВЧ широкие перспективы открываются при использовании магнитных кристаллов [193, 194], спинтроники [195–197] и сверхбыстрых процессов в магнетиках при воздействии мощных импульсов света [178–180, 184–189]. Весьма перспективным является использование спиновых волн в тонких магнитных пленках и спиновых волноводах на их основе [193, 194, 200–203].

Так, в работе [200] на основе машинного моделирования предложены многочисленные варианты распространения магнитоэлектрических волн в различных условиях. Работа [201] посвящена рассмотрению возможностей создания логически цепей на основе разветвленных структур из спиновых волноводов. В работе [202] описан вариант преобразователя, способного возбуждать магнитоэлектрические волны микронных размеров. В работе [203] приведены данные, касающиеся распространения коротких магнитоэлектрических волн в условиях, близких к проявлению обменного взаимодействия.

Работа [204] посвящена распространению спиновых волн в неоднородном магнитном поле. В отличие от данных, приведенных в монографии [1], исследование выполнено с применением наиболее мощных современных пакетов обработки изображений.

В работе [205] выполнено исследование распространения МСВ применительно к современным устройствам обработки информации.

1.15. Заключительное замечание

Таким образом, можно видеть, что сегодняшние нанотехнологии позволяют возбуждать спиновые волны длиной в единицы нанометров, физика которых существенно отличается от физики длинных дипольных волн. Важнейшими здесь являются дополнительные дипольные силы, свойственные широкому фронту распространяющихся волн, а также мощные силы неоднородного обменного взаимодействия, существенно проявляющиеся для волн короче 1 мкм.

Однако следует отметить, что, несмотря на значительные успехи в освоении коротких спиновых волн [202–205], теоретическое обоснование наблюдаемых явлений развито недостаточно, что, по-видимому, связано с высокой сложностью требуемого здесь математического аппарата. Так, в подавляющем большинстве работ обменное взаимодействие учитывается лишь в виде квадратичной по волновому числу добавки к эффективному магнитному полю, а дипольное поле размагничивания вообще не учитывается.

Относительно монографий настоящей серии [1–4], заметим, что результаты, представленные в [1, 2] и цитированных там ссылках, относятся только к дипольным волнам, распространяющимся в изотропной среде. Влияние анизотропии на ферромагнитный резонанс подробно рассмотрено в монографии [3], однако характеристики магнитостатических волн в таких условиях не рассматривались. Небольшой экскурс в сторону обменных волн содержится в главе 7 монографии [4], однако приведенные там данные ограничиваются только случаем безграничной среды. Более подробное рассмотрение обменных волн является одним из главных предметов внимания настоящей монографии и по мере сил авторов будет выполнено далее.

Выводы по главе 1

Данная глава посвящена обзору литературы по вопросам распространения магнитостатических и частично электромагнитных волн в магнитных средах. Обзор носит исторический характер и рассматривает последовательные этапы исследования физических свойств и технических приложений таких волн. Основное внимание уделено волнам обменного характера, как наиболее коротким и достаточно перспективным в качестве элементной базы для устройств обработки информации в масштабе наноразмеров.

Основные результаты, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующим.

1. В качестве первого упоминания или введения в обиход обменных волн отмечена теория зависимости намагниченности магнетика от температуры. Основное положение теории состоит в представлении

магнитной среды в качестве резервуара для магнитных волн, магнонов, имеющих обменный характер. При повышении температуры количество возбужденных магнонов увеличивается, за счет чего интегральная намагниченность среды уменьшается.

2. Отмечена важность открытия ферромагнитного резонанса, как исторически первой возможности полностью регуляризованного возбуждения магнитных колебаний когерентного характера. Приведены примеры применения резонансных свойств магнитной среды, в первую очередь ее гиротропии, для создания широкого класса волноводных устройств, реализующих невзаимные условия распространения электромагнитных волн. В качестве устройств упомянуты вентили, циркуляторы, фазовращатели и другие, нашедшие широкое применение в технике сверхвысоких частот.

3. Рассмотрены стабильные нелинейные процессы в магнетике при возбуждении ферромагнитного резонанса, такие как умножение частоты и детектирование. Приведены примеры создания параметрических усилителей сигнала сверхвысокой частоты. Отмечено существование нестабильных нелинейных процессов возбуждения прецессии намагниченности, обусловленных параметрическим возбуждением обменных волн на половинной частоте накачки. Характерным свойством нестабильности являются хаотические колебания намагниченности автомодуляционного характера. Упомянуты две основные теоретические модели такой нестабильности: различие времен продольной и поперечной релаксаций намагниченности и турбулентность спиновых волн за порогом возбуждения.

4. Рассмотрено возбуждение обменных волн в тонких магнитных пленках. Отмечен резонансный характер такого возбуждения, обусловленный установлением стоячих волн по толщине пленки за счет их отражения от поверхностей пленки. В качестве механизма отражения предложена модель, предполагающая закрепление спинов на поверхности пленки. Отмечено, что такое возбуждение возможно только в пленках, толщина которых не превышает единиц микрометров.

5. В качестве революционного прорыва в освоении резонансных свойств магнетиков отмечено появление железоиттриевого граната. Приведены ссылки на работы, сообщающие о возможности синтеза таких монокристаллов. Отмечены три уникальных параметра железоиттриевого граната, выделяющие его из ряда других ферритов: рекордно низкие магнитные потери, позволившие сузить линию ферромагнитного резонанса до величины в доли эрстеда, рекордно малое затухание упругих волн, меньшее затухания в лучшем кварце на порядок, и высокая прозрачность в сочетании со значительным фарадеевским вращением в оптическом диапазоне длин волн.

6. Рассмотрены свойства возбуждения ферромагнитного резонанса в образцах ограниченных размеров. Отмечено, что, благодаря малости затухания, свойственной железоиттриевому гранату, возможно

возбуждение множества магнитостатических типов, соответствующих различным пространственным конфигурациям установления стоячих колебаний по объему образца. Приведены ссылки на работы, описывающие многократное расщепление резонансной линии и идентификацию пространственного распределения динамической намагниченности в различных типах.

7. Рассмотрены магнитостатические волны дипольного характера, распространение которых становится возможным благодаря крайне низким потерям в железиттриевом гранате. Отмечены первые эксперименты по наблюдению таких волн, состоящие в регистрации импульсного сигнала, задержанного во времени вследствие малости скорости распространения магнитостатических волн по сравнению с электромагнитными. В качестве основы для теоретической интерпретации распространения дипольных волн отмечена модель Дэймона–Эшбаха, рассматривающая распространение волны в касательно намагниченной ферритовой пластине.

8. Рассмотрены магнитоупругие волны, представляющие собой комбинацию из связанных между собой магнитостатической и упругой волн, имеющих одинаковые частоты и волновые числа. Представлены ссылки на эксперименты по возбуждению таких волн и исследованию их различных свойств, в том числе по многократному отражению в ограниченных образцах, и некоторым нелинейным свойствам, обусловленным параметрическими эффектами.

9. Рассмотрены возможности исследования и использования уникальных оптических свойств железиттриевого граната. Отмечена возможность создания эффективных модуляторов света и других управляемых магнитным полем оптических устройств, использующих волноводное распространение магнитостатической волны.

10. Рассмотрено аксиальное распространение дипольных магнитостатических волн в ферритовых цилиндрах, намагниченных неоднородным полем. Отмечено, что за счет неоднородности внутреннего поля в таком цилиндре, обусловленной размагничивающими факторами торцов, происходит изменение длины магнитостатической волны. В поле, возрастающем к середине цилиндра, длина магнитостатической волны может уменьшаться до величины в единицы микрометров, а ее скорость также падает более чем на порядок. Приведены ссылки на теоретическую интерпретацию наблюдаемых явлений, основанную на рассмотрении бегущей волны в линейно возрастающем или убывающем поле на основе метода ВКБ. Отмечено, что столь сильное уменьшение скорости волны позволило создать высокоэффективные линии задержки импульсного сигнала сверхвысоких частот, причем время задержки достигало десятков микросекунд при общих габаритах устройства в единицы кубических сантиметров.

11. Рассмотрено принципиальное различие понятия фазовой и групповой скоростей распространяющейся волны, отмеченное еще класси-

ками в 19 веке. Приведены ссылки на работы, где такое различие рассмотрено применительно к магнитостатическим волнам. Отмечено, что причиной несовпадения направлений векторов фазовой и групповой скоростей в феррите является его анизотропия, проявляющаяся в гиротропных свойствах. Приведены ссылки на работы, где описаны такие эксперименты и дана им теоретическая трактовка.

12. Рассмотрено распространение магнитостатических волн в среде с неоднородным распределением подмагничивающего поля. Отмечено, что развитие подобных работ в полном объеме стало возможным благодаря созданию пленок железоиттриевого граната большой площади, достигающей десятков квадратных сантиметров. В качестве базовой модели отмечены три различных разновидности конфигурации подмагничивающего поля: линейное, типа «долины» и типа «вала». При этом линейно неоднородное поле позволяет отклонить пучок магнитостатических волн на большие углы, поле типа «долины» — развести пучки с отличающимися частотами в разные стороны, а поле типа «вала» — создать волновод для магнитостатических волн длиной в несколько сантиметров без заметного затухания. Теоретическая трактовка экспериментальных результатов выполняется на основе метода Гамильтона–Аулда, основного на аналогии между распространяющейся волной и движущейся частицей.

13. Рассмотрено сравнительно новое направление исследования магнитостатических волн, состоящее в возбуждении их под действием короткого мощного импульса света, исходящего от фемтосекундного лазера. Приведены схемы двух наиболее распространенных методов эксперимента. В первом методе свет падает непосредственно на магнитную пленку, чем вызывает возбуждение колебаний намагниченности за счет теплового нагрева или обратного эффекта Фарадея. Во втором методе свет падает на обратную сторону подложки, на которой находится магнитная пленка. На этой стороне подложки нанесена металлическая пленка, которая под действием света нагревается и расширяется от тепла, создавая импульс упругого смещения, через подложку попадающий на магнитную пленку, в которой посредством магнитострикции возбуждает колебания намагниченности. Приведены ссылки на возможные интерпретации наблюдаемых явлений, в том числе отмечена «трехтемпературная модель», рассматривающая взаимодействие трех систем: магнитной, упругой и электронной.

14. Отмечены некоторые наиболее перспективные направления исследования магнитостатических волн, развиваемые в настоящее время. Приведены ссылки на работы по волноводному распространению магнитостатических волн в масштабах десятков нанометров. Отмечено направление, использующее эффекты проводимости и изменения направления спина электрона при переходе между двумя средами с различными свойствами анизотропии. Приведены ссылки на возможное применение наноразмерных устройств на магнитостатических волнах

для построения сетей с логической обработкой информации. Отмечена важность расширения проводимых исследований на диапазон обменных волн длиной в десятки и единицы нанометров.

15. В заключительном замечании приведены некоторые соображения, касающиеся основных предметов рассмотрения работ, цитированных в настоящем обзоре. Отмечено несколько недостаточное внимание к обменным волнам, обусловленное невысоким уровнем доступной в те времена экспериментальной техники. Декларировано намерение авторов в возможной для них степени хотя бы немного продвинуться далее в исследовании магнитостатических волн обменного характера, в первую очередь в плане совершенствования соответствующего математического аппарата.

Глава 2

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ ПРИ РАСЧЕТЕ ДИСПЕРСИОННЫХ СВОЙСТВ ВОЛН В МАГНИТНОЙ СРЕДЕ

Настоящая глава посвящена краткому обзору основного математического аппарата, используемого при расчете волновых процессов в магнитных средах. В основе аппарата лежит решение граничной задачи при заданном тензоре динамической магнитной проницаемости. Для различных задач, рассматриваемых в последующих главах, как граничные условия, так и тензор проницаемости будут различаться. В настоящей главе на примере классической задачи Дэймона–Эшбаха приведены основные приемы как получения тензора, так и решения граничной задачи в целом. Авторы не ставят целью дублировать материалы, приведенные в других монографиях настоящей серии [1–4], а намерены привести лишь сведения, необходимые для понимания и удобства воспроизведения результатов, приведенных в последующих главах данной монографии. Для этого в настоящей главе аппарат изложен более подробно.

Основной ход изложения будет следовать [1–4], а необходимые дополнительные ссылки будут указаны в тексте.

2.1. Основные виды электромагнитных волн в магнитной среде

В наиболее общем случае в магнитной среде распространяются обычные электромагнитные волны с поправкой на магнитную проницаемость. То есть при достаточно большой магнитной проницаемости (больше единицы в несколько раз) энергия магнитного поля волны преобладает над энергией электрического поля. При очень большой магнитной проницаемости (десятки, сотни, тысячи) электрическое поле волны в сравнении с магнитным оказывается настолько малым, что им можно пренебречь. Волна становится чисто магнитной, а взаимодействие между последовательными периодами волны происходит за счет сил дипольного характера. Дипольное взаимодействие осуществляется за счет локальных полей, создаваемых неоднородно распределенной намагниченностью. То есть возмущение намагниченности в какой-то точке среды создает поле, которое воздействует на намагниченность

в другой точке той же среды и само на себе испытывает воздействие, оказываемое возмущением в этой другой точке. Такое взаимодействие происходит без участия электрического поля, что может иметь место только в случае достаточно медленного изменения намагниченности, то есть в условиях магнитостатики.

В связи с этим в магнитной среде можно рассматривать два вида волн — электромагнитные, имеющие кроме магнитной заметную электрическую составляющую, и магнитостатические, в которых электрическая составляющая настолько ничтожна, что ею можно пренебречь. При этом распространение электромагнитных волн рассчитывается классическим способом в рамках полной электродинамики с учетом как магнитного, так и электрического поля, а для распространения магнитостатических волн достаточно приближения магнитостатики, где для получения возвращающей силы, необходимой для существования волны, следует учитывать дипольное взаимодействие.

В обоих случаях магнитное поле волны определяется магнитной проницаемостью среды, которая может быть как постоянной, так и зависящей от частоты. Поэтому в качестве первого этапа рассмотрения математического аппарата, обратимся к вычислению магнитной проницаемости.

2.2. Роль магнитной проницаемости в распространении волн в магнитной среде

В основе решения задач об электродинамических процессах в магнитных средах лежит понятие магнитной проницаемости, как коэффициента пропорциональности между действующим на среду магнитным полем и намагниченностью этой среды.

Проницаемость во времени может быть как постоянной, так и переменной.

В случае постоянной проницаемости в среде возможно распространение электромагнитных волн, отличие которых от волн в свободном пространстве состоит только в величине магнитного поля волны. Закон дисперсии таких волн представляет собой прямую линию, отражающую прямую пропорциональность между частотой волны и ее волновым числом.

Если проницаемость зависит от времени, то магнитное поле волны может меняться в соответствии с таким изменением. То есть, в те моменты времени, когда проницаемость будет велика, поле волны тоже будет большим, а в те моменты, когда проницаемость мала, поле волны также уменьшается.

Поведение проницаемости во времени может определяться не только воздействием внешнего магнитного поля, но и собственными процессами, связанными с инерционными свойствами намагниченности.

Такие инерционные свойства в сочетании с возвращающей силой могут быть причиной собственных колебаний намагниченности, имеющих резонансный характер. Эти колебания могут происходить синхронно во всем объеме среды, так что их частота с длиной волны никак не будет связана. С точки зрения закона дисперсии такие колебания представляют собой прямую линию, параллельную оси волновых чисел. Эта линия будет пересекать ось частот в точке, соответствующей собственному магнитному резонансу. Таким образом, проявление инерционных свойств намагниченности может быть причиной пересечения законов дисперсии для волн, в которых проницаемость постоянна и для колебаний, где она определяется этими свойствами. В случае одновременного существования волн того и другого типа, их взаимодействие может привести к расталкиванию ветвей дисперсионных кривых. На частотах расталкивания возможно стремление волнового числа объединенной волны к бесконечности. Следует, однако, не забывать, что такая идеализированная ситуация возможна только в бездиссипативной среде, тогда как в реальных средах диссипация на расталкивание ветвей должна накладывать определенные ограничения. Механизм и результаты действия такого ограничения рассматриваются в главе 4 монографии.

2.2.1. Тензор магнитной проницаемости

В ферромагнитной среде, спины которой благодаря обменно-взаимодействию ориентированы в одном направлении, свободные колебания намагниченности представляют собой прецессию, обусловленную тем, что спин, кроме магнитного, обладает также еще и механическим моментом, подобным моменту волчка. Групповая ориентация спинов в едином направлении позволяет ввести усредненную характеристику — общий вектор намагниченности среды. Динамика движения такого вектора описывается уравнением Ландау–Лифшица [40–43]:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}]. \quad (2.1)$$

Здесь \mathbf{M} — вектор намагниченности, \mathbf{H} — эффективное поле, γ — гиромагнитное отношение.

В магнитной среде, обладающей диссипацией, к этому уравнению добавляется диссипативный член Гильберта [40–42, 206], в результате чего уравнение (2.1) принимает вид:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}] + \frac{\alpha}{M_0} \left[\mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right], \quad (2.2)$$

где α — параметр затухания.

Входящее в уравнения (2.1) и (2.2) поле \mathbf{H} является «эффективным» в том смысле, что оно определяется не только извне приложенным полем, но и магнитными полями, создаваемыми намагничен-

ностью. В общем случае такое поле определяется выражением [41, стр. 68], [42, стр. 42]:

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{M}} + \sum_{p=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_p} \left[\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_p} \right)} \right], \quad (2.3)$$

где U — плотность энергии, содержащая различные ее виды, к которым относятся: энергия взаимодействия намагниченности с внешним полем, с полями размагничивания, энергия обменного взаимодействия, энергия анизотропии, энергия магнитоупругого взаимодействия и возможные другие ее виды.

Замечание. Выражение (2.3) является универсальным и используется для получения эффективного поля из плотности энергии во всех случаях, кроме поля размагничивания для волны. Физическое содержание выражения (2.3) состоит в том, что оно определяет поле, создаваемое намагниченностью. Однако для поля размагничивания выражение для плотности энергии содержит сложное интегрирование с учетом размагничивающего фактора [39, стр. 291, форм. (41.9)–(41.12)], который для волны заранее не известен, так что прямое использование формулы (2.3) затруднено. Поэтому для определения поля размагничивания волны, используется особый прием, позволяющий при учете периодичности волны определить создаваемое намагниченностью поле непосредственно из уравнений магнитостатики. Этот прием будет приведен далее в главе 5 (разд. 5.4).

Получаемая в результате решения уравнения (2.1) или (2.2) магнитная проницаемость имеет тензорный характер и может быть представлена в виде:

$$\vec{\chi} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Заметим, что в полные уравнения электродинамики входит тензор именно магнитной проницаемости, в отличие от обычно используемого в магнитостатике тензора восприимчивости. Соотношение между этими тензорами в магнитной среде дается приведенной далее формулой (2.33).

Раскрытие векторных произведений в уравнениях движения (2.1) или (2.2) в декартовой системе координат дает в качестве коэффициентов при компонентах намагниченности составляющие тензора не проницаемости, а восприимчивости. При этом тензор проницаемости может быть получен из тензора восприимчивости путем прибавления единичного тензора. Поэтому первым этапом решения задачи является получение именно тензора восприимчивости, из которого далее может быть получен тензор проницаемости.

Для каждого из перечисленных случаев плотности энергии тензор магнитной проницаемости (или восприимчивости) будет иметь

собственный специфический вид, которых для каждой задачи должен быть определен отдельно. При этом в задачах о распространении электромагнитной волны в бигиротропной среде, которым посвящена глава 3 настоящей монографии, более удобным является использование тензора проницаемости, а для задач о распространении магнитостатических волн (главы 4–8) более удобным, то есть приводящим к более компактным математическим выкладкам, является тензор восприимчивости. Однако в любом случае, если эффективные поля известны, то схема получения компонент того или другого тензора является общей и включает в себя линеаризацию уравнений движения. Приведем вкратце такую схему для простейшего случая изотропной среды, намагниченной постоянным полем.

2.2.2. Получение тензоров магнитной восприимчивости и проницаемости путем линеаризации уравнения движения

Следуя [1, 2, 5, 40–42], приведем схему получения тензора проницаемости в случае столь малых колебаний намагниченности, что их можно считать линейными. На данном этапе положим, что входящее в уравнение (2.2) поле является постоянным с небольшой добавкой переменного характера. В этом случае вид тензора получается особенно простым, хотя его структура является довольно общей.

Будем исходить из уравнения (2.2), записанного в декартовой системе координат $Oxyz$, ось Oz которой ориентирована вдоль направления постоянного поля \mathbf{H}_0 . Раскрывая векторные произведения, получаем:

$$\dot{M}_x = -\gamma(M_y H_z - M_z H_y) + \frac{\alpha}{M_0}(M_y \dot{M}_z - M_z \dot{M}_y); \quad (2.5)$$

$$\dot{M}_y = -\gamma(M_z H_x - M_x H_z) + \frac{\alpha}{M_0}(M_z \dot{M}_x - M_x \dot{M}_z); \quad (2.6)$$

$$\dot{M}_z = -\gamma(M_x H_y - M_y H_x) + \frac{\alpha}{M_0}(M_x \dot{M}_y - M_y \dot{M}_x). \quad (2.7)$$

Положим поле и намагниченность в виде:

$$\mathbf{H} = \{h_x; h_y; H_0 + h_z\}; \quad (2.8)$$

$$\mathbf{M} = \{m_x; m_y; M_0 + m_z\}, \quad (2.9)$$

где H_0 и M_0 — постоянные.

Учитывая малость колебаний намагниченности, полагаем:

$$h_x \sim h_y \sim h_z \sim m_x \sim m_y \sim m_z \sim \dot{m}_x \sim \dot{m}_y \sim \dot{m}_z \ll H_0 \sim M_0. \quad (2.10)$$

Подставляя эти выражения в (2.5)–(2.7) и выполняя линеаризацию, состоящую в пренебрежении малыми слагаемыми порядка $m_i m_k$, $m_i \dot{m}_k$, $m_i h_k$, получаем:

$$\dot{m}_x = -\gamma(m_y H_0 - M_0 h_y) - \alpha \dot{m}_y; \quad (2.11)$$

$$\dot{m}_y = -\gamma(M_0 h_x - H_0 m_x) + \alpha \dot{m}_x; \quad (2.12)$$

$$\dot{m}_z = 0. \quad (2.13)$$

Третье уравнение здесь говорит о постоянстве z -компоненты вектора намагниченности, то есть в динамике его можно не рассматривать.

Положим теперь гармоническую зависимость от времени для поля и намагниченности в виде:

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 e^{i\omega t}; \quad (2.14)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 e^{i\omega t}. \quad (2.15)$$

Подставляя (2.14)–(2.15) в (2.11)–(2.12), выполняя дифференцирование, раскрывая скобки и перенося неизвестные величины (компоненты намагниченности) в левую часть, а известные (компоненты поля) в правую, получаем:

$$i\omega m_{0x} + (\gamma H_0 + i\omega\alpha)m_{0y} = \gamma M_0 h_{0y}; \quad (2.16)$$

$$i\omega m_{0y} - i\omega(\gamma H_0 + i\omega\alpha)m_{0x} = -\gamma M_0 h_{0x}. \quad (2.17)$$

Здесь индексы «0» при переменных величинах означают, что компоненты поля и намагниченности являются амплитудами при временных множителях. Не забывая этого обстоятельства, для упрощения записи индексы «0» можно опустить. Раскрывая скобки, записывая переменные в порядке следования индексов x , y и меняя знак второго уравнения, получаем:

$$i\omega m_x + (\gamma H_0 + i\omega\alpha)m_y = \gamma M_0 h_y; \quad (2.18)$$

$$(\gamma H_0 + i\omega\alpha)m_x - i\omega m_y = \gamma M_0 h_x. \quad (2.19)$$

Решение этой системы имеет вид:

$$m_x = \chi h_x + i\chi_a h_y; \quad (2.20)$$

$$m_y = -i\chi_a h_x + \chi h_y, \quad (2.21)$$

где введены обозначения:

$$\chi = -\frac{\gamma M_0 (\gamma H_0 + i\omega\alpha)}{\omega^2 - (\gamma H_0 + i\omega\alpha)^2}; \quad (2.22)$$

$$\chi_a = -\frac{i\omega\gamma M_0}{\omega^2 - (\gamma H_0 + i\omega\alpha)^2}, \quad (2.23)$$

представляющие собой компоненты тензора восприимчивости [40–42]:

$$\overleftrightarrow{\chi} = \begin{pmatrix} \chi & i\chi_a & 0 \\ -i\chi_a & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

так что:

$$\mathbf{m} = \overleftrightarrow{\chi} \mathbf{h}. \quad (2.25)$$

Подобно [1, 2], введем нормированные обозначения:

$$\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}; \quad (2.26)$$

$$\Omega_H = \frac{H_0}{4\pi M_0}. \quad (2.27)$$

Компоненты тензора восприимчивости (2.22), (2.23) принимают вид:

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{(\Omega_H + i\alpha\Omega)}{\Omega_H^2 - (1 + \alpha^2)\Omega^2 + 2i\alpha\Omega\Omega_H}; \quad (2.28)$$

$$\chi_a = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\Omega}{\Omega_H^2 - (1 + \alpha^2)\Omega^2 + 2i\alpha\Omega\Omega_H}. \quad (2.29)$$

Освобождаясь от мнимости в знаменателях, получаем:

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\Omega_H(\Omega_H^2 - \Omega^2)}{RS} - i\alpha \frac{\Omega(\Omega_H^2 + \Omega^2)}{RS} \right\}, \quad (2.30)$$

$$\chi_a = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\Omega(\Omega_H^2 - \Omega^2)}{RS} - i\alpha \frac{2\Omega^2\Omega_H}{RS} \right\}, \quad (2.31)$$

где введено вспомогательное обозначение:

$$RS = (\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + \alpha^2(2\Omega\Omega_H)^2. \quad (2.32)$$

Можно видеть, что компоненты тензора имеют резонансный характер, так что частота резонанса определяется минимумом выражения RS . Более подробно вопрос о минимуме RS обсуждается далее.

Обратимся теперь к получению тензора проницаемости $\overleftrightarrow{\mu}$. Этот тензор связан с тензором восприимчивости $\overleftrightarrow{\chi}$ соотношением [40–42]:

$$\overleftrightarrow{\mu} = 1 + 4\pi\overleftrightarrow{\chi}, \quad (2.33)$$

так что:

$$\overleftrightarrow{\mu} = \begin{pmatrix} 1 + 4\pi\chi & i4\pi\chi_a & 0 \\ -i4\pi\chi_a & 1 + 4\pi\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

или:

$$\overleftrightarrow{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Таким образом, получаем компоненты тензора проницаемости в виде:

$$\mu = \frac{(\Omega_H^2 - \Omega^2)(\Omega_H^2 - \Omega^2 + \Omega_H)}{RS} - i\alpha \frac{\Omega(\Omega_H^2 + \Omega^2)}{RS}; \quad (2.36)$$

$$\mu_a = \frac{\Omega(\Omega_H^2 - \Omega^2)}{RS} - i\alpha \frac{2\Omega^2\Omega_H}{RS}, \quad (2.37)$$

где RS определяется выражением (2.32).

Выражение RS содержит α^2 , то есть при малых значениях α второе слагаемое может быть значительно меньше первого. Однако это не так

вблизи резонанса, когда частота Ω становится достаточно близкой к частоте Ω_H . При этом именно второе слагаемое обеспечивает конечность амплитуды колебаний на частоте резонанса, так как даже при $\Omega = \Omega_H$ знаменатели в выражениях (2.36)–(2.37) остаются конечными. Однако на некотором расстоянии от резонансной частоты второе слагаемое в выражении RS становится достаточно малым по сравнению с первым, то есть им можно пренебречь. При этом получаем:

$$RS \rightarrow (\Omega_H^2 - \Omega^2)^2. \quad (2.38)$$

В таком приближении компоненты проницаемости принимают вид:

$$\mu = \frac{\Omega_H^2 - \Omega^2 + \Omega_H}{\Omega_H^2 - \Omega^2} - i\alpha \frac{\Omega(\Omega_H^2 + \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2}; \quad (2.39)$$

$$\mu_a = \frac{\Omega}{\Omega_H^2 - \Omega^2} - i\alpha \frac{2\Omega^2\Omega_H}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2}. \quad (2.40)$$

Представим μ и μ_a в виде суммы действительной и мнимой частей:

$$\mu = \mu' + i\mu''; \quad (2.41)$$

$$\mu_a = \mu'_a + i\mu''_a. \quad (2.42)$$

При этом получаем:

$$\mu' = \frac{\Omega_H^2 - \Omega^2 + \Omega_H}{\Omega_H^2 - \Omega^2}; \quad (2.43)$$

$$\mu'' = -\alpha \frac{\Omega(\Omega_H^2 + \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2}; \quad (2.44)$$

$$\mu'_a = \frac{\Omega}{\Omega_H^2 - \Omega^2}; \quad (2.45)$$

$$\mu''_a = -\alpha \frac{2\Omega^2\Omega_H}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2}. \quad (2.46)$$

В дальнейшем, где для компонент проницаемости будут использоваться именно такие выражения, следует не забывать о возможной их расходимости вблизи резонанса. При этом влияние диссипации будет учитываться за счет мнимых компонент проницаемости (2.41), (2.42), содержащих действительные величины μ'' и μ''_a .

Замечание. Проведенное здесь рассмотрение выполнено в декартовой системе координат. Однако уравнение (2.2) от выбора системы не зависит, так что то же самое можно сделать в любой другой системе координат. Для цилиндрической системы подобное рассмотрение, в результате линеаризации уравнения (2.2) приводящее к резонансной формуле Смита–Сула, можно найти, например, в [3, стр. 55–61].

2.2.3. Общая схема получения тензора магнитной проницаемости

Приведем вкратце основную схему получения магнитной проницаемости для различных классов рассматриваемых далее задач. Будем полагать, что среда намагничена постоянным полем определенного направления. При достаточно большой величине поля вектор намагниченности стремится ориентироваться точно вдоль поля. Если поле недостаточно для точного выстраивания намагниченности, ориентация ее вектора может отличаться от направления поля. При этом нахождению тензора проницаемости должно предшествовать определение равновесной ориентации вектора намагниченности. Схема определения такой ориентации для случая одноосной анизотропии при произвольном направлении поля подробно представлена в [3, стр. 203–207]. Получение динамической восприимчивости для этого случая разобрано там же в главе 6 [3, стр. 265–276].

Итак, пусть направление равновесной ориентации вектора намагниченности известно. Переменное поле предполагается ориентированным перпендикулярно этому направлению. Зависимость переменного поля от времени предполагается гармонической с заданной частотой. Компоненты намагниченности предполагаются также гармоническими, однако их частота может быть произвольной.

Задача решается в декартовой системе координат, одна из осей которой (обычно ось Oz) ориентирована вдоль равновесного направления намагниченности.

Прежде всего записывается плотность энергии, из которой в соответствии с формулой (2.3) получаются эффективные поля. При учете размагничивания для волны, эффективное поле находится с помощью искусственного приема, описанного в разд. 5.4.

Подстановка эффективных полей в уравнение Ландау–Лифшица с последующим раскрытием векторных произведений и дифференцированием компонент намагниченности и переменного поля по времени позволяет получить систему уравнений для амплитуд компонент намагниченности по трем координатам.

Выполнение процедуры линеаризации позволяет свести систему к двум уравнениям для двух компонент намагниченности, перпендикулярных направлению равновесной ориентации намагниченности. Полученная система должна содержать в левой части компоненты переменной намагниченности, а в правой — компоненты вынуждающего поля. Коэффициенты при переменных в левой части уравнений полученной системы являются искомыми компонентами тензора восприимчивости.

Тензор проницаемости получается из тензора восприимчивости путем прибавления единичной матрицы в соответствии с формулой (2.33).

В задачах, рассматриваемых далее в настоящей монографии, тензор магнитной проницаемости получается на основе уравнения Ландау–Лифшица в нескольких вариантах, определяемых свойствами среды и распространяющейся волны. Во всех случаях среда предполагает

ся изотропной, однако в ней может присутствовать размагничивание, неоднородный обмен и диссипация. В общем случае решение получается крайне громоздким, поэтому рассмотрены четыре следующих варианта.

Первый — среда без размагничивания, обмена и диссипации — для однородных колебаний в безграничной среде. Этот случай рассмотрен в разделе 2.2.2 и соответствует $\alpha = 0$.

Второй — среда без размагничивания и обмена, но с диссипацией — для однородных колебаний в безграничной среде и для волн, достаточно длинных, в которых можно пренебречь обменом и размагничиванием. Этот случай также рассмотрен в разделе 2.2.2 и соответствует $\alpha \neq 0$.

Третий — среда с размагничиванием без диссипации — для волны с достаточной длиной, так что обмен еще не сказывается. Этот случай будет рассмотрен в главе 5.

Четвертый — среда с обменом и размагничиванием без диссипации — для волны короткой, в которой обмен приобретает решающее значение. Этот случай будет рассмотрен в главе 6.

В общем случае анизотропия, обмен, размагничивание — вводятся через эффективные поля в уравнение Ландау–Лифшица. Диссипация вводится в уравнение Ландау–Лифшица через член Гильберта без учета анизотропии, размагничивания, обмена.

Граничные условия важны только в ограниченной среде и с уравнением Ландау–Лифшица напрямую не связаны. Для учета граничных условий есть свое уравнение — Лапласа или Уокера. В эти уравнения магнитная проницаемость входит для описания магнитных свойств вещества — поле заменяется на магнитную индукцию. При этом магнитная проницаемость опять-таки получается из уравнения Ландау–Лифшица.

В ограниченной среде при одном или двух безграничных размерах получаются волны, бегущие вдоль этих размеров. В магнитной среде это волны типа Дэймона–Эшбаха [114–116]. Ограничение двух размеров по одной координате дает возможность существования стоячих волн резонансного характера. В тонкой магнитной пленке это стоячие резонансы Сиви–Танненвальда–Киттеля [71–75]. В случае всех трех ограниченных размеров возможны стоячие колебания сложной конфигурации. В магнитной среде это — уокеровские типы [101–108].

2.3. Уравнение Уокера

Электромагнитные явления в среде, обладающей намагнитченностью, происходят в соответствии с магнитной проницаемостью этой среды, которая в общем случае имеет тензорный характер.

В изотропной среде использование классических уравнений электродинамики (уравнений Максвелла), после взятия дивергенции

от градиента того или иного поля, приводит к уравнению Лапласа, симметричному относительно входящих в него переменных.

Однако в анизотропной среде, одной из разновидностей которой является среда гиротропная, та же операция приводит к уравнению, несимметричному относительно переменных, так как переменные ведут себя по-разному относительно различных осей координат.

В приближении магнитостатики, то есть при электрическом поле, равном нулю, такое несимметричное уравнение для намагниченности носит название уравнения Уокера, к рассмотрению которого обратимся далее.

Уравнение Уокера получается из классических уравнений электродинамики, взятых в магнитостатическом приближении, то есть из следующей системы:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0; \quad (2.47)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.48)$$

Предполагая поле и индукцию в виде суммы постоянного и переменного слагаемых, и учитывая, что производные от постоянных величин равны нулю, получаем такие же уравнения для переменных полей:

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = 0; \quad (2.49)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \quad (2.50)$$

где:

$$\mathbf{b} = \mathbf{h} + 4\pi\mathbf{m}. \quad (2.51)$$

Согласно известному соотношению векторного анализа

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} a = 0, \quad (2.52)$$

где a — произвольная скалярная функция, следует, что первое уравнение допускает возможность введения скалярного потенциала ψ такого, что:

$$\mathbf{h} = \operatorname{grad} \psi, \quad (2.53)$$

то есть:

$$h_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (2.54)$$

$$h_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad (2.55)$$

$$h_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (2.56)$$

В этом случае первое уравнение (2.49) удовлетворяется тождественно. Из уравнения (2.50) при этом получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = \operatorname{div} (\mathbf{h} + 4\pi\mathbf{m}) = \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi + 4\pi \operatorname{div} \mathbf{m}. \quad (2.57)$$

Учитывая следующее из векторного анализа соотношение

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \Delta \psi, \quad (2.58)$$

где Δ — оператор Лапласа, получаем:

$$\Delta \psi + 4\pi \operatorname{div} \mathbf{m} = 0. \quad (2.59)$$

Это — уравнение Уокера в общем виде, являющееся аналогом уравнения Лапласа для среды, обладающей отличной от нуля намагнитченностью \mathbf{m} , входящей в выражение для индукции (2.51).

Переменная намагнитченность \mathbf{m} обусловлена действием переменного поля \mathbf{h} , так что \mathbf{m} и \mathbf{h} связаны между собой через восприимчивость $\vec{\chi}$ следующим соотношением:

$$\mathbf{m} = \vec{\chi} \mathbf{h}, \quad (2.60)$$

где $\vec{\chi}$, благодаря анизотропии или гиротропии среды, имеет тензорный характер.

В разделе 2.2.2 показано, что тензор восприимчивости в декартовой системе координат $Oxyz$, ось Oz которой ориентирована вдоль направления постоянного поля, имеет вид (2.24):

$$\vec{\chi} = \begin{pmatrix} \chi & i\chi_a & 0 \\ -i\chi_a & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

При этом компоненты намагнитченности в соответствии с (2.60) приобретают вид (2.20), (2.21):

$$m_x = \chi h_x + i\chi_a h_y; \quad (2.62)$$

$$m_y = -i\chi_a h_x + \chi h_y. \quad (2.63)$$

При этом, в силу проведенной ранее линейризации, выполняется соотношение:

$$m_z = 0. \quad (2.64)$$

Записывая уравнение (2.59) в координатах, то есть раскрывая выражения для оператора Лапласа и дивергенции, получаем:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 4\pi \left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (2.65)$$

Входящие в правую часть этого выражения компоненты намагнитченности определяются соотношениями (2.62)–(2.64), в которых компоненты поля могут быть выражены через потенциал с помощью (2.54)–(2.56). То есть появляется возможность намагнитченность из уравнения (2.65) исключить и получить уравнение только для потенциала.

Таким образом, из (2.62)–(2.64) с учетом (2.54)–(2.56), получаем:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} = \chi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i\chi_a \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}; \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} = -i\chi_a \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + \chi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}; \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial m_z}{\partial z} = 0. \quad (2.68)$$

Подставляя (2.66)–(2.68) в (2.65) получаем:

$$(1 + 4\pi\chi) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.69)$$

Это — уравнение Уокера, записанное через компоненту восприимчивости χ .

Согласно разделу 2.2.2, компоненты тензора восприимчивости χ и χ_a имеют вид (2.28), (2.29):

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{(\Omega_H + i\alpha\Omega)}{\Omega_H^2 - (1 + \alpha^2)\Omega^2 + 2i\alpha\Omega\Omega_H}; \quad (2.70)$$

$$\chi_a = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\Omega}{\Omega_H^2 - (1 + \alpha^2)\Omega^2 + 2i\alpha\Omega\Omega_H}, \quad (2.71)$$

где нормированные частоты Ω и Ω_H определяются соотношениями (2.26), (2.27):

$$\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}; \quad (2.72)$$

$$\Omega_H = \frac{H_0}{4\pi M_0}. \quad (2.73)$$

Для некоторых задач, в том числе для классической задачи Дэймона–Эшбаха, рассматриваемой далее, определенное значение имеет случай отсутствия диссипации, то есть соответствующий $\alpha = 0$. При этом (2.70)–(2.71) приобретают особенно простой вид:

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\Omega_H}{\Omega_H^2 - \Omega^2}; \quad (2.74)$$

$$\chi_a = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\Omega}{\Omega_H^2 - \Omega^2}. \quad (2.75)$$

Следуя [1, стр. 52–53], введем полезные для дальнейшего вспомогательные обозначения:

$$\kappa = \frac{\Omega_H}{\Omega_H^2 - \Omega^2}; \quad (2.76)$$

$$\nu = \frac{\Omega}{\Omega_H^2 - \Omega^2}; \quad (2.77)$$

$$\mu = 1 + \kappa = 1 + \frac{\Omega_H}{\Omega_H^2 - \Omega^2}. \quad (2.78)$$

При этих обозначениях из (2.20)–(2.21) получаем:

$$4\pi m_x = \kappa h_x + i\nu h_y; \quad (2.79)$$

$$4\pi m_y = -i\nu h_x + \kappa h_y, \quad (2.80)$$

или с учетом (2.54)–(2.56):

$$4\pi m_x = \kappa \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\nu \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad (2.81)$$

$$4\pi m_y = -i\nu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \kappa \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (2.82)$$

В соответствии с (2.74) можно видеть, что:

$$1 + 4\pi\chi = 1 + \frac{\Omega_H}{\Omega_H^2 - \Omega^2}, \quad (2.83)$$

откуда, с учетом (2.78), получаем:

$$1 + 4\pi\chi = \mu. \quad (2.84)$$

При этом уравнение Уокера (2.69) принимает вид:

$$\mu \cdot \left(\frac{\partial^2 \psi^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial z^2} = 0. \quad (2.85)$$

Это — уравнение для потенциала ψ внутри магнитной среды, где индекс « i » означает принадлежность к внутреннему объему среды.

Вне среды, то есть при $\chi = 0$ или $\mu = 1$ оно переходит в обычное уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \psi^e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi^e}{\partial z^2} = 0, \quad (2.86)$$

где индекс « e » соответствует отсутствию среды, то есть свободному пространству.

2.4. Граничные условия

При распространении в ограниченной среде дисперсионные свойства волны определяются граничными условиями.

Согласно общим положениям электродинамики, на границе магнитной среды должны оставаться непрерывными нормальная компонента индукции \mathbf{B} и касательная компонента поля \mathbf{H} . Рассмотрим, какую роль здесь играет магнитная проницаемость среды.

В электромагнитных волнах надо учитывать компоненты не только магнитного, но и электрического поля. Это будет сделано далее в главе 3. Здесь же ограничимся случаем магнитостатической волны, как более важным для дальнейшего рассмотрения. В качестве примера обратимся к традиционной геометрии распространения волны в пластине, намагниченной вдоль ее плоскости. Распространение магнитостатических волн в такой геометрии было рассмотрено в работе [114], являющейся в настоящее время классической базой для различного рода волновых задач.

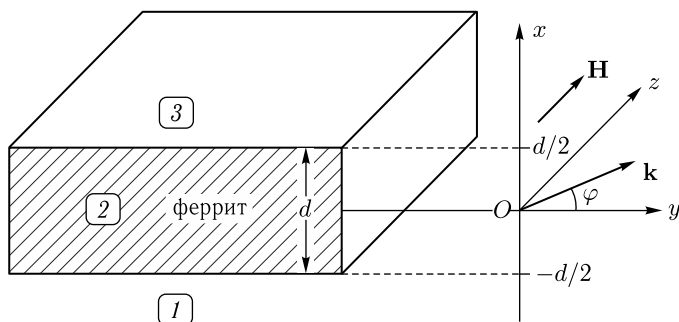


Рис. 2.1. Геометрия задачи

Итак, будем исходить из геометрии задачи, представленной на рис. 2.1.

Структура представляет собой безграничную ферритовую пластину 2 толщиной d , по обе стороны от которой находятся свободные полупространства 1 и 3. Система координат $Oxyz$ выбрана таким образом, что ее плоскость Oyz параллельна плоскостям ферритовой пластины, а ось Ox — им перпендикулярна. При этом ось Oz ориентирована вдоль направления внешнего поля. Начало координат O находится посередине между поверхностными плоскостями пластины, координаты которых равны $\pm d/2$.

Граничные условия на поверхностях пластины — непрерывность нормальной компоненты индукции \mathbf{B} и тангенциальной компоненты поля \mathbf{H} имеют вид:

$$B_x^i|_{x=\pm\frac{d}{2}} = B_x^e|_{x=\pm\frac{d}{2}}; \quad (2.87)$$

$$H_{y,z}^i|_{x=\pm\frac{d}{2}} = H_{y,z}^e|_{x=\pm\frac{d}{2}}. \quad (2.88)$$

Выражая компоненты \mathbf{B} и \mathbf{H} через потенциалы ψ^i и ψ^e с помощью (2.54)–(2.56), а также учитывая (2.79), получаем:

$$B_x^i = h_x^i + 4\pi m_x = \frac{\partial\psi^i}{\partial x} + \kappa \frac{\partial\psi^i}{\partial x} + i\nu \frac{\partial\psi^i}{\partial y} = \mu \frac{\partial\psi^i}{\partial x} + i\nu \frac{\partial\psi^i}{\partial y}; \quad (2.89)$$

$$B_x^e = h_x^e = \frac{\partial\psi^e}{\partial x}; \quad (2.90)$$

$$H_y^i = h_y^i = \frac{\partial\psi^i}{\partial x}; \quad (2.91)$$

$$H_y^e = h_y^e = \frac{\partial\psi^e}{\partial x}; \quad (2.92)$$

$$H_z^i = h_z^i = \frac{\partial\psi^i}{\partial z}; \quad (2.93)$$

$$H_z^e = h_z^e = \frac{\partial\psi^e}{\partial z}. \quad (2.94)$$

Подставляя эти выражения в (2.87)–(2.88), получаем граничные условия в виде:

$$\mu \frac{\partial \psi^i}{\partial x} + i\nu \frac{\partial \psi^i}{\partial y} \Big|_{x=\pm \frac{d}{2}} = \frac{\partial \psi^e}{\partial x} \Big|_{x=\pm \frac{d}{2}}; \quad (2.95)$$

$$\psi^i \Big|_{x=\pm \frac{d}{2}} = \psi^e \Big|_{x=\pm \frac{d}{2}}. \quad (2.96)$$

В принятой геометрии имеются две границы, на каждой из которых выполняются по два граничных условия, так что в целом граничных условий получается четыре. Это означает, что при решении полной задачи из этих граничных условий можно будет определить четыре параметра. Добавим еще, что на бесконечности как магнитная индукция, так и поле, должны стремиться к нулю, так что это даст еще четыре параметра. Более подробно соответствие между количеством условий и параметров будет рассмотрено далее.

Замечание. Вторая пара граничных условий (2.96) получена из равенства производных, то есть выполняется с точностью до произвольной постоянной, прибавляемой к потенциалу (что является результатом интегрирования). В работе [114] эта постоянная полагается равной нулю, так как все поля вычисляются через производные от потенциала, а производная от постоянной величины равняется нулю. Следующим и здесь этому же правилу.

2.5. Дисперсионное соотношение для магнитной пластины со свободными поверхностями (задача Дэймона–Эшбаха)

В качестве базового примера, лежащего в основе результатов, приведенных в дальнейших разделах монографии, рассмотрим дисперсионные свойства волны, распространяющейся в касательно намагниченной ферритовой пластине. Эта задача впервые была решена в работе [114], после чего многократно приводилась в различных монографиях [1, 2, 41, 42]. В силу ее важности, приведем здесь достаточно подробное решение, в основном следуя первой монографии настоящей серии [1, стр. 50–66]. Главное внимание обратим на дисперсионное соотношение, как наиболее необходимое для дальнейшего изложения материала, представленного в настоящей монографии, а для получения потенциалов, полей и компонент намагниченности рекомендуем читателю обратиться непосредственно к [1, стр. 68–72].

2.5.1. Полная формулировка задачи

Будем рассматривать задачу в геометрии, приведенной на рис. 2.1. С учетом (2.85), (2.86), а также (2.95), (2.96), получаем следующую формулировку полной задачи.

Уравнения:

область 1 (вне феррита):

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = 0. \quad (2.97)$$

область 2 (внутри феррита):

$$\mu \cdot \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} = 0. \quad (2.98)$$

область 3 (вне феррита):

$$\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} = 0. \quad (2.99)$$

Граничные условия на нижней $\left(x = -\frac{d}{2}\right)$ и верхней $\left(x = \frac{d}{2}\right)$ поверхностях:

$$\mu \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + i\nu \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \Big|_{x=-\frac{d}{2}} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{d}{2}}; \quad (2.100)$$

$$\mu \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + i\nu \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \Big|_{x=\frac{d}{2}} = \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \Big|_{x=\frac{d}{2}}; \quad (2.101)$$

$$\psi_2 \Big|_{x=-\frac{d}{2}} = \psi_1 \Big|_{x=-\frac{d}{2}}; \quad (2.102)$$

$$\psi_2 \Big|_{x=\frac{d}{2}} = \psi_3 \Big|_{x=\frac{d}{2}}. \quad (2.103)$$

2.5.2. Решение уравнений без граничных условий

Рассмотрим решение в областях 1–3 по отдельности.

ОБЛАСТЬ 1 (вне феррита).

Уравнение для потенциала ψ_1 в этой области имеет вид (2.97):

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = 0. \quad (2.104)$$

Решим уравнение (2.104) методом разделения переменных. Для этого предположим, что решение имеет вид:

$$\psi_1 = X_1(x) \cdot Y_1(y) \cdot Z_1(z). \quad (2.105)$$

Подставим решение (2.105) в уравнение (2.104) и разделим все на $X_1 \cdot Y_1 \cdot Z_1$. Подставляя (2.105) в (2.104), получаем:

$$\frac{X_1''}{X_1} + \frac{Y_1''}{Y_1} + \frac{Z_1''}{Z_1} = 0. \quad (2.106)$$

Введем постоянную разделения λ_1 :

$$\frac{X_1''}{X_1} + \frac{Y_1''}{Y_1} = -\frac{Z_1''}{Z_1} = \lambda_1^2. \quad (2.107)$$

Из (2.107) получаем уравнение для Z_1 :

$$Z_1'' + \lambda_1^2 Z_1 = 0. \quad (2.108)$$

Его решение имеет вид:

$$Z_1 = G_1 e^{i\lambda_1 z} + H_1 e^{-i\lambda_1 z}. \quad (2.109)$$

Здесь и далее буквами A, B, C, D, G, H с соответствующими индексами обозначаем произвольные постоянные, которые должны быть определены из граничных условий.

Аналогично находим Y_1 и X_1 . Из (2.107) получаем:

$$\frac{X_1''}{X_1} + \frac{Y_1''}{Y_1} = \lambda_1^2. \quad (2.110)$$

Введем еще одну постоянную разделения μ_1 :

$$\frac{X_1''}{X_1} = -\frac{Y_1''}{Y_1} + \lambda_1^2 = \mu_1^2. \quad (2.111)$$

Из (2.111) получаем уравнение для X_1 :

$$X_1'' - \mu_1^2 X_1 = 0. \quad (2.112)$$

Его решение имеет вид:

$$X_1 = A_1 e^{\mu_1 x} + B_1 e^{-\mu_1 x}. \quad (2.113)$$

Аналогично из (2.111) получаем уравнение для Y_1 :

$$Y_1'' + (\mu_1^2 - \lambda_1^2) Y_1 = 0. \quad (2.114)$$

Его решение имеет вид:

$$Y_1 = C_1 e^{i\sqrt{\mu_1^2 - \lambda_1^2} y} + D_1 e^{-i\sqrt{\mu_1^2 - \lambda_1^2} y}. \quad (2.115)$$

ОБЛАСТЬ 2 (внутри феррита).

Уравнение для потенциала ψ_2 в этой области имеет вид (2.98):

$$\mu \cdot \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} = 0. \quad (2.116)$$

Решим уравнение (2.116) методом разделения переменных:

$$\psi_2 = X_2(x) \cdot Y_2(y) \cdot Z_2(z). \quad (2.117)$$

Подставим решение (2.117) в уравнение (2.116) и разделим все на $X_2 \cdot Y_2 \cdot Z_2$.

Подставляя (2.117) в (2.116), получаем:

$$\mu \cdot \left(\frac{X_2''}{X_2} + \frac{Y_2''}{Y_2} \right) + \frac{Z_2''}{Z_2} = 0. \quad (2.118)$$

Введем постоянную разделения λ_2 :

$$\mu \cdot \left(\frac{X_2''}{X_2} + \frac{Y_2''}{Y_2} \right) = -\frac{Z_2''}{Z_2} = \lambda_2^2. \quad (2.119)$$

Из (2.119) получаем уравнение для Z_2 :

$$Z_2'' + \lambda_2^2 Z_2 = 0. \quad (2.120)$$

Его решение имеет вид:

$$Z_2 = G_2 e^{i\lambda_2 z} + H_2 e^{-i\lambda_2 z}. \quad (2.121)$$

Аналогично находим Y_2 и X_2 . Из (2.119) получаем:

$$\mu \cdot \left(\frac{X_2''}{X_2} + \frac{Y_2''}{Y_2} \right) = \lambda_2^2. \quad (2.122)$$

Введем еще одну постоянную разделения μ_2 :

$$\frac{X_2''}{X_2} = -\frac{Y_2''}{Y_2} + \frac{\lambda_2^2}{\mu} = \mu_2^2. \quad (2.123)$$

Из (2.123) получаем уравнение для X_2 :

$$X_2'' - \mu_2^2 X_2 = 0. \quad (2.124)$$

Его решение имеет вид:

$$X_2 = A_2 e^{\mu_2 x} + B_2 e^{-\mu_2 x}. \quad (2.125)$$

Аналогично из (2.123) получаем уравнение для Y_2 :

$$Y_2'' + \left(\mu_2^2 - \frac{\lambda_2^2}{\mu} \right) Y_2 = 0. \quad (2.126)$$

Его решение имеет вид:

$$Y_2 = C_2 e^{i\sqrt{\mu_2^2 - \frac{\lambda_2^2}{\mu}} y} + D_2 e^{-i\sqrt{\mu_2^2 - \frac{\lambda_2^2}{\mu}} y}. \quad (2.127)$$

ОБЛАСТЬ 3 (вне феррита).

Решение в этой области полностью аналогично решению в области 1 с заменой индекса «1» на индекс «3», поэтому запишем его далее просто по аналогии.

ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ имеет вид (формулы (2.109), (2.113), (2.115), (2.121), (2.125), (2.127)):

область 1:

$$X_1 = A_1 e^{\mu_1 x} + B_1 e^{-\mu_1 x}; \quad (2.128)$$

$$Y = C_1 e^{i\sqrt{\mu_1^2 - \lambda_1^2} y} + D_1 e^{-i\sqrt{\mu_1^2 - \lambda_1^2} y}; \quad (2.129)$$

$$Z_1 = G_1 e^{i\lambda_1 z} + H_1 e^{-i\lambda_1 z}; \quad (2.130)$$

область 2:

$$X_2 = A_2 e^{\mu_2 x} + B_2 e^{-\mu_2 x}; \quad (2.131)$$

$$Y_2 = C_2 e^{i\sqrt{\mu_2^2 - \frac{\lambda_2^2}{\mu}} y} + D_2 e^{-i\sqrt{\mu_2^2 - \frac{\lambda_2^2}{\mu}} y}; \quad (2.132)$$

$$Z_2 = G_2 e^{i\lambda_2 z} + H_2 e^{-i\lambda_2 z}; \quad (2.133)$$

область 3:

$$X_3 = A_3 e^{\mu_3 x} + B_3 e^{-\mu_3 x}; \quad (2.134)$$

$$Y_3 = C_3 e^{i\sqrt{\mu_3^2 - \lambda_3^2} y} + D_3 e^{-i\sqrt{\mu_3^2 - \lambda_3^2} y}; \quad (2.135)$$

$$Z_3 = G_3 e^{i\lambda_3 z} + H_3 e^{-i\lambda_3 z}. \quad (2.136)$$

Предположим, что волна распространяется в плоскости Oyz . При этом зависимости всех трех решений от y и z должны совпадать. Из этого условия получаем:

$$\sqrt{\mu_1^2 - \lambda_1^2} = \sqrt{\mu_2^2 - \frac{\lambda_2^2}{\mu}} = \sqrt{\mu_3^2 - \lambda_3^2}; \quad (2.137)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3. \quad (2.138)$$

Введем обозначения μ_0 и λ_0 из условий:

$$\mu_0 = \mu_2; \quad (2.139)$$

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3. \quad (2.140)$$

Подставляя эти обозначения в (2.137), получаем:

$$\sqrt{\mu_1^2 - \lambda_0^2} = \sqrt{\mu_0^2 - \frac{\lambda_0^2}{\mu}} = \sqrt{\mu_3^2 - \lambda_0^2}. \quad (2.141)$$

Выражение (2.141) можно рассматривать как систему двух уравнений относительно μ_1 и μ_3 . Возводя все три составляющих (2.141) в квадрат, после чего приравнивая первое и третье, а затем первое и второе, получаем:

$$\mu_1 = \sqrt{\mu_0^2 + \frac{\mu - 1}{\mu} \cdot \lambda_0^2}; \quad (2.142)$$

$$\mu_3 = \sqrt{\mu_0^2 + \frac{\mu - 1}{\mu} \cdot \lambda_0^2}. \quad (2.143)$$

Так как волна распространяется в плоскости Oyz , то $Y_{1,2,3}$ и $Z_{1,2,3}$ являются периодическими. При этом, поскольку они выражаются через экспоненту с мнимой единицей i в показателе, то λ_0 и $\sqrt{\mu_0^2 - \frac{\lambda_0^2}{\mu}}$ должны быть действительными.

Предположим, что решение в области 1 спадает до нуля при $x \rightarrow +\infty$, а в области 3 — при $x \rightarrow -\infty$. При этом, учитывая, что $\mu_1 > 0$ и $\mu_3 > 0$, получаем, что: $B_1 = 0$ и $A_3 = 0$.

Для удобства введем обозначения без индексов: $A_1 = A$ и $B_3 = B$, а также: $C_{1,2,3} = C$, $D_{1,2,3} = D$, $G_{1,2,3} = G$, $H_{1,2,3} = H$.

В результате ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ принимает вид: часть решения, зависящая только от x :

$$X_1 = Ae^{\sqrt{\mu_0^2 + \frac{\mu-1}{\mu} \cdot \lambda_0^2} x}; \quad (2.144)$$

$$X_2 = A_2 e^{\mu_0 x} + B_2 e^{-\mu_0 x}; \quad (2.145)$$

$$X_3 = Be^{-\sqrt{\mu_0^2 + \frac{\mu-1}{\mu} \cdot \lambda_0^2} x}; \quad (2.146)$$

часть решения, зависящая только от y и z , одинаковая во всех областях:

$$Y = Ce^{i\sqrt{\mu_0^2 - \frac{\lambda_0^2}{\mu}} y} + De^{-i\sqrt{\mu_0^2 - \frac{\lambda_0^2}{\mu}} y}; \quad (2.147)$$

$$Z = Ge^{i\lambda_0 z} + He^{-i\lambda_0 z}. \quad (2.148)$$

В этом решении 8 постоянных коэффициентов, а граничных условий, по которым их предстоит определять, только 4. Поэтому 4 коэффициента можно задать произвольно. Предположим далее, что волны распространяются только в положительных направлениях осей Oy и Oz , то есть $C = 0$ и $G = 0$. Поскольку можно произвольно задать еще два коэффициента, то можно положить $D = 1$ и $H = 1$. При этом часть решения, зависящая только от y и z , принимает вид:

$$Y = e^{-i\sqrt{\mu_0^2 - \frac{\lambda_0^2}{\mu}} y}, \quad (2.149)$$

$$Z = e^{-i\lambda_0 z}. \quad (2.150)$$

Таким образом, в полном решении остаются только 4 коэффициента A , A_2 , B_2 , B , для определения которых имеются 4 граничных условия (2.100)–(2.103).

Введем теперь в решение волновые числа в явном виде с помощью обозначений:

волновое число по координате x вне пластины:

$$k_x^e = \sqrt{\mu_0^2 + \frac{\mu-1}{\mu} \cdot \lambda_0^2}; \quad (2.151)$$

волновое число по координате x внутри пластины:

$$k_x^i = i \cdot \mu_0; \quad (2.152)$$

волновое число по координате y во всем пространстве:

$$k_y = \sqrt{\mu_0^2 - \frac{\lambda_0^2}{\mu}}; \quad (2.153)$$

волновое число по координате z во всем пространстве:

$$k_z = \lambda_0. \quad (2.154)$$

Эта система содержит 6 величин: k_x^e , k_x^i , k_y , k_z , μ_0 , λ_0 . Так как четыре уравнения (2.151)–(2.154) содержат шесть неизвестных, то две из них можно исключить, в результате чего получатся два уравнения с четырьмя неизвестными. Исключим μ_0 и λ_0 . Для этого выразим их через k_x^i и k_z с помощью (2.152) и (2.154), подставим полученные выражения в (2.151) и (2.153), откуда, после возведения в квадрат, получим:

$$(k_x^e)^2 = -(k_x^i)^2 + \frac{\mu - 1}{\mu} \cdot k_z^2; \quad (2.155)$$

$$k_y^2 = -(k_x^i)^2 - \frac{\mu - 1}{\mu} \cdot k_z^2. \quad (2.156)$$

В эти выражения μ_0 и λ_0 уже не входят. Однако здесь имеется четыре волновых числа k_x^e , k_x^i , k_y , k_z , связанные двумя уравнениями. Поэтому два из них можно задать изначально, а два других выразить через них. Поскольку в плоскости Oyz никаких ограничений для распространения волн нет (геометрически пластина ограничена только по оси Ox), то будем считать заданными k_y и k_z , а k_x^e и k_x^i выразим через них. Для этого пределаем следующее. Вычитая (2.156) из (2.155), получаем:

$$(k_x^e)^2 - k_y^2 - k_z^2 = 0. \quad (2.157)$$

Находя из этого выражения $(k_x^e)^2$ и подставляя в (2.155), получаем:

$$\mu \cdot [(k_x^i)^2 + k_y^2] + k_z^2 = 0. \quad (2.158)$$

Из (2.157) и (2.158) после некоторых преобразований получаем:

$$k_x^e = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}; \quad (2.159)$$

$$k_x^i = \sqrt{-\left(k_y^2 + \frac{k_z^2}{\mu}\right)} = i \cdot \sqrt{k_y^2 + \frac{k_z^2}{\mu}}. \quad (2.160)$$

ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ в обозначениях (2.151)–(2.154) принимает вид: часть решения, зависящая только от x :

$$X_1 = Ae^{k_x^e x}; \quad (2.161)$$

$$X_2 = A_2 e^{ik_x^i x} + B_2 e^{-ik_x^i x}; \quad (2.162)$$

$$X_3 = Be^{-k_x^e x}; \quad (2.163)$$

часть решения, зависящая только от y и z , принимает вид:

$$Y = e^{-ik_y y}; \quad (2.164)$$

$$Z = e^{-ik_z z}. \quad (2.165)$$

Здесь k_y и k_z — пока произвольные действительные величины (их действительность обусловлена отсутствием затухания). При этом из (2.159) следует, что k_x^e тоже всегда действительное, то есть X_1 и X_3 вне пластины экспоненциально спадают. В то же время, из (2.160) следует, что k_x^i может быть как действительным, так и мнимым, в зависимости от знака подкоренного выражения, которое определяется соотношением между величинами k_y и k_z , а также величиной и знаком μ в зависимости от Ω .

2.5.3. Вывод дисперсионного соотношения

Итак, в соответствии с (2.105), (2.117), решение (2.104) и (2.116) имеет вид:

$$\psi_1 = X_1 \cdot Y \cdot Z, \quad (2.166)$$

$$\psi_2 = X_2 \cdot Y \cdot Z, \quad (2.167)$$

$$\psi_3 = X_3 \cdot Y \cdot Z. \quad (2.168)$$

Граничные условия на нижней ($x = -\frac{d}{2}$) и верхней ($x = \frac{d}{2}$) поверхностях имеют вид (2.100)–(2.103):

$$\mu \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + i\nu \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \Big|_{x=-\frac{d}{2}} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{d}{2}}; \quad (2.169)$$

$$\mu \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + i\nu \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \Big|_{x=\frac{d}{2}} = \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \Big|_{x=\frac{d}{2}}; \quad (2.170)$$

$$\psi_2 \Big|_{x=-\frac{d}{2}} = \psi_1 \Big|_{x=-\frac{d}{2}}; \quad (2.171)$$

$$\psi_2 \Big|_{x=\frac{d}{2}} = \psi_3 \Big|_{x=\frac{d}{2}}. \quad (2.172)$$

Подставим решение (2.166)–(2.168) в граничные условия (2.169)–(2.172) и разделим первые два уравнения на Z , а вторые два уравнения на $Y \cdot Z$. В этом случае граничные условия принимают вид:

$$\mu \frac{\partial X_2}{\partial x} \cdot Y + i\nu X_2 \frac{\partial Y}{\partial y} \Big|_{x=-\frac{d}{2}} = \frac{\partial X_1}{\partial x} \cdot Y \Big|_{x=-\frac{d}{2}}; \quad (2.173)$$

$$\mu \frac{\partial X_2}{\partial x} \cdot Y + i\nu X_2 \frac{\partial Y}{\partial y} \Big|_{x=\frac{d}{2}} = \frac{\partial X_3}{\partial x} \cdot Y \Big|_{x=\frac{d}{2}}; \quad (2.174)$$

$$X_2 \Big|_{x=-\frac{d}{2}} = X_1 \Big|_{x=-\frac{d}{2}}; \quad (2.175)$$

$$X_2 \Big|_{x=\frac{d}{2}} = X_3 \Big|_{x=\frac{d}{2}}. \quad (2.176)$$

Здесь согласно (2.161)–(2.165):

$$X_1 = Ae^{k_x^e x}; \quad (2.177)$$

$$X_2 = A_2 e^{ik_x^i x} + B_2 e^{-ik_x^i x}; \quad (2.178)$$

$$X_3 = Be^{-k_x^e x}; \quad (2.179)$$

$$Y = e^{-ik_y y}. \quad (2.180)$$

Находим производные из решения (2.177)–(2.180):

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} = k_x^e \cdot A \cdot e^{k_x^e x}; \quad (2.181)$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial x} = ik_x^i \cdot (A_2 e^{ik_x^i x} - B_2 e^{-ik_x^i x}); \quad (2.182)$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial x} = -k_x^e \cdot B \cdot e^{-k_x^e x}; \quad (2.183)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = -ik_y \cdot e^{-ik_y y}. \quad (2.184)$$

Введем обозначения:

$$\rho = \frac{k_x^i d}{2}; \quad (2.185)$$

$$\delta = \frac{k_x^e d}{2}. \quad (2.186)$$

Производные и решение на границах принимают вид:

$$\left. \frac{\partial X_1}{\partial x} \right|_{x=-\frac{d}{2}} = k_x^e \cdot A \cdot e^{-\delta}; \quad (2.187)$$

$$\left. \frac{\partial X_2}{\partial x} \right|_{x=-\frac{d}{2}} = ik_x^i \cdot (A_2 e^{-i\rho} - B_2 e^{i\rho}); \quad (2.188)$$

$$\left. \frac{\partial X_2}{\partial x} \right|_{x=\frac{d}{2}} = ik_x^i \cdot (A_2 e^{i\rho} - B_2 e^{-i\rho}); \quad (2.189)$$

$$\left. \frac{\partial X_3}{\partial x} \right|_{x=\frac{d}{2}} = -k_x^e \cdot B \cdot e^{-\delta}; \quad (2.190)$$

$$\dots \dots \dots X_1 \Big|_{x=-\frac{d}{2}} = A \cdot e^{-\delta}; \quad (2.191)$$

$$X_2 \Big|_{x=-\frac{d}{2}} = A_2 e^{-i\rho} + B_2 e^{i\rho}; \quad (2.192)$$

$$X_2 \Big|_{x=\frac{d}{2}} = A_2 e^{i\rho} + B_2 e^{-i\rho}; \quad (2.193)$$

$$X_3 \Big|_{x=\frac{d}{2}} = B \cdot e^{-\delta}. \quad (2.194)$$

Подставляя (2.180), (2.184), (2.187)–(2.194) в граничные условия (2.173)–(2.176) и разделяя на $e^{-ik_y y}$, получаем систему уравнений для A , A_2 , B_2 , B :

$$\mu \cdot ik_x^i (A_2 e^{-i\rho} - B_2 e^{i\rho}) + \nu k_y (A_2 e^{-i\rho} + B_2 e^{i\rho}) = k_x^e A e^{-\delta}; \quad (2.195)$$

$$\mu \cdot ik_x^i (A_2 e^{i\rho} - B_2 e^{-i\rho}) + \nu k_y (A_2 e^{i\rho} + B_2 e^{-i\rho}) = -k_x^e B e^{-\delta}; \quad (2.196)$$

$$A_2 e^{-i\rho} + B_2 e^{i\rho} = A e^{-\delta}; \quad (2.197)$$

$$A_2 e^{i\rho} + B_2 e^{-i\rho} = B e^{-\delta}. \quad (2.198)$$

Введем обозначения:

$$\varepsilon_1 = i\mu k_x^i + \nu k_y; \quad (2.199)$$

$$\varepsilon_2 = -i\mu k_x^i + \nu k_y. \quad (2.200)$$

С этими обозначениями из (2.195)–(2.198) получаем:

$$A_2 \varepsilon_1 e^{-i\rho} + B_2 \varepsilon_2 e^{i\rho} - A k_x^e e^{-\delta} = 0; \quad (2.201)$$

$$A_2 \varepsilon_1 e^{i\rho} + B_2 \varepsilon_2 e^{-i\rho} + B k_x^e e^{-\delta} = 0; \quad (2.202)$$

$$A_2 e^{-i\rho} + B_2 e^{i\rho} - A e^{-\delta} = 0; \quad (2.203)$$

$$A_2 e^{i\rho} + B_2 e^{-i\rho} - B e^{-\delta} = 0. \quad (2.204)$$

Это — система 4 уравнений с 4 неизвестными A , A_2 , B_2 , B . Условием существования ненулевого решения является равенство нулю ее определителя: $D_0 = 0$, что и дает дисперсионное соотношение. Этот определитель имеет вид:

$$D_0 = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 e^{-i\rho} & \varepsilon_2 e^{i\rho} & -k_x^e e^{-\delta} & 0 \\ \varepsilon_1 e^{i\rho} & \varepsilon_2 e^{-i\rho} & 0 & k_x^e e^{-\delta} \\ e^{-i\rho} & e^{i\rho} & -e^{-\delta} & 0 \\ e^{i\rho} & e^{-i\rho} & 0 & -e^{-\delta} \end{vmatrix}. \quad (2.205)$$

Для раскрытия этого определителя умножим третью строку на $-k_x^e$ и прибавим к первой, а затем умножим четвертую строку на k_x^e и прибавим ко второй. Получаемый определитель разлагаем по четвертому столбцу, а тот, который остается — по третьему. Учитывая далее, что должно быть $D_0 = 0$, получаем:

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon_1 - k_x^e) e^{-i\rho} & (\varepsilon_2 - k_x^e) e^{i\rho} \\ (\varepsilon_1 + k_x^e) e^{i\rho} & (\varepsilon_2 + k_x^e) e^{-i\rho} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.206)$$

Раскрывая входящий в (2.206) определитель, получаем дисперсионное соотношение в виде [1, стр. 65, форм. (2.279)]:

$$\frac{e^{2i\rho} - e^{-2i\rho}}{e^{2i\rho} + e^{-2i\rho}} = \frac{k_x^e (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(k_x^e)^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}. \quad (2.207)$$

Здесь входящие в (2.206) величины определяются через волновые числа k_y , k_z в соответствии с формулами (2.185), (2.199), (2.200), (2.159), (2.160), а входящие в эти формулы компоненты тензора проницаемости μ , ν — формулами (2.77), (2.78).

Соотношение (2.207) является базовым, во всяком случае, для волны, распространяющейся в касательно намагниченной пластине.

Далее будет показано, что все дисперсионные соотношения для задач, рассматриваемых в настоящей монографии, могут быть приведены к выражениям, имеющим такую же структуру. При этом параметры ρ , $\varepsilon_{1,2}$, k_x^e , k_x^i будут иметь свою собственную структуру, определяемую спецификой конкретной задачи.

2.5.4. Дисперсионное соотношение в полярной системе координат

Соотношение (2.207) получено в декартовой системе координат. Однако для ряда задач, в том числе касающихся распространения магнитоэлектрических волн в произвольном направлении относительно поля, а также в неоднородно намагниченных структурах, более удобным является использование полярной системы координат, переход к которой, следуя [1, стр. 66–67], рассмотрим далее.

Итак, в дисперсионное соотношение (2.207) входят четыре волновых числа: k_x^e , k_x^i , k_y , k_z . Два из них k_x^e и k_x^i с помощью выражений (2.159) и (2.160) можно исключить. При этом в дисперсионном соотношении останутся только k_y и k_z . Это означает, что если задано, например, k_y , то дисперсионное соотношение позволяет определить k_z через k_y . Такую процедуру удобно сделать в полярной системе координат, показанной на рис. 2.2.

При этом:

$$k_y = k \cdot \cos \varphi; \quad (2.208)$$

$$k_z = k \cdot \sin \varphi. \quad (2.209)$$

В этой системе координат волновые числа k_x^e и k_x^i , первоначально определенные формулами (2.159) и (2.160), принимают вид:

$$k_x^e = \sqrt{k_y^2 + k_z^2} = k; \quad (2.210)$$

$$k_x^i = i \sqrt{k_y^2 + \frac{k_z^2}{\mu}} = ik \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{\mu}} = ik\alpha, \quad (2.211)$$

где введено обозначение:

$$\alpha = \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{\mu}}. \quad (2.212)$$

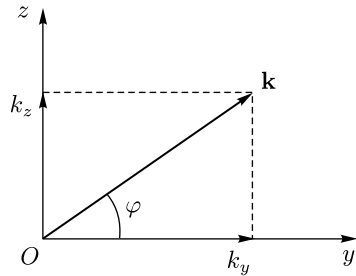


Рис. 2.2. Волновой вектор в полярной системе координат

Вычислим промежуточные выражения, входящие в дисперсионное соотношение (2.207):

$$2i\rho = -kd\alpha; \quad (2.213)$$

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 2\mu k\alpha; \quad (2.214)$$

$$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = k^2 [(\nu^2 - \mu^2 + \mu) \cos^2 \varphi - \mu] = k^2 \cdot \beta, \quad (2.215)$$

где введено обозначение:

$$\beta = (\nu^2 - \mu^2 + \mu) \cos^2 \varphi - \mu. \quad (2.216)$$

При этом получаем:

$$k_x^e (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = 2\mu k^2 \alpha; \quad (2.217)$$

$$(k_x^e)^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 = -k^2 (\beta - 1). \quad (2.218)$$

Подставляя (2.213), (2.217) и (2.218) в (2.207), получаем:

$$\frac{e^{-kd\alpha} - e^{kd\alpha}}{e^{-kd\alpha} + e^{kd\alpha}} = -\frac{2\mu\alpha}{\beta - 1}, \quad (2.219)$$

откуда получаем:

$$\frac{2\mu\alpha}{\beta - 1} = \frac{e^{kd\alpha} - e^{-kd\alpha}}{e^{kd\alpha} + e^{-kd\alpha}}, \quad (2.220)$$

или:

$$\frac{2\mu\alpha}{\beta - 1} = \text{th}(kd\alpha). \quad (2.221)$$

Преобразуя (2.221) получаем основное дисперсионное соотношение для изотропной ферритовой пластины со свободными поверхностями, намагниченной в плоскости:

$$\beta - 1 - 2\mu\alpha \text{cth}(kd\alpha) = 0. \quad (2.222)$$

Входящие в это соотношение параметры α , β , μ , ν , Ω , Ω_H определяются формулами (2.212), (2.216), (2.77), (2.78), (2.26), (2.27).

Дисперсионное соотношение (2.222) можно разрешить относительно k . Для этого удобно воспользоваться выражением (2.220), а именно: умножить числитель и знаменатель его правой части на $e^{kd\alpha}$, после чего разрешить полученное уравнение относительно $e^{2kd\alpha}$, откуда выразить k с помощью логарифма. В результате получаем дисперсионное соотношение в виде:

$$k = \frac{1}{2d\alpha} \cdot \ln \frac{\beta - 1 + 2\mu\alpha}{\beta - 1 - 2\mu\alpha}. \quad (2.223)$$

2.6. Частотные области существования объемных и поверхностных волн

Для определения характера волны, в первую очередь, является ли волна поверхностной или объемной, следует знать области частот, в которых такие ее свойства сохраняются. Из (2.178) видно, что ха-

раक्टर волны внутри пластины определяется действительностью или мнимостью волнового числа k_x^i , где, согласно (2.160):

$$k_x^i = i\sqrt{k_y^2 + \frac{k_z^2}{\mu}}, \quad (2.224)$$

так что все в конечном счете определяется знаком подкоренного выражения, входящего в (2.224).

Так, если подкоренное выражение положительно, то k_x^i является действительным. При этом показатель экспоненты $e^{\pm ik_x^i x}$ является мнимым, то есть по толщине пластины намагниченность имеет осциллирующий характер с постоянной амплитудой, так что волна является объемной.

Если подкоренное выражение отрицательно, то k_x^i является мнимым. При этом показатель экспоненты $e^{\pm ik_x^i x}$ является действительным, то есть по толщине пластины намагниченность по направлению внутрь пластины спадает по экспоненциальному закону и волна является поверхностной.

Из структуры выражения (2.224) можно видеть, что единственная возможность его отрицательности, то есть объемного характера волны, может быть реализована только в случае отрицательности μ . При этом конкретный интервал допустимых значений μ , где подкоренное выражение будет отрицательным, зависит от конкретного соотношения значений k_y и k_z , то есть от направления распространения волны.

Таким образом, объемные волны могут существовать только при отрицательных значениях μ , при условии подходящего соотношении между k_y и k_z , а во всех других случаях волны будут поверхностными.

В разд. 2.2.2 показано, что μ , будучи компонентой тензора проницаемости, в простейшем случае определяется соотношением между частотой волны и приложенным полем, имеющим вид (2.78):

$$\mu = 1 + \frac{\Omega_H}{\Omega_H^2 - \Omega^2}. \quad (2.225)$$

Найдем частотные области объемных и поверхностных волн, следующие из этого соотношения:

Возможны следующие случаи:

$$1) \Omega = 0, \text{ при этом: } \mu = 1 + \Omega_H^{-1}; \quad (2.226)$$

$$2) 0 < \Omega < \Omega_H, \text{ при этом: } 1 + \Omega_H^{-1} < \mu < +\infty; \quad (2.227)$$

$$3) \Omega_H < \Omega < \sqrt{\Omega_H(\Omega_H + 1)}, \text{ при этом: } -\infty < \mu < 0; \quad (2.228)$$

$$4) \Omega = \sqrt{\Omega_H(\Omega_H + 1)}, \text{ при этом: } \mu = 0; \quad (2.229)$$

$$5) \sqrt{\Omega_H(\Omega_H + 1)} < \Omega < +\infty, \text{ при этом: } 0 < \mu < 1. \quad (2.230)$$

Таким образом, имеются три области, где возможен тот или иной характер волн: область A , определяемая интервалом частот (2.227), область B , определяемая интервалом частот (2.228), и область C , определяемая интервалом частот (2.230).

Схема зависимости $\mu(\Omega)$ с учетом этих областей приведена на рис. 2.3.

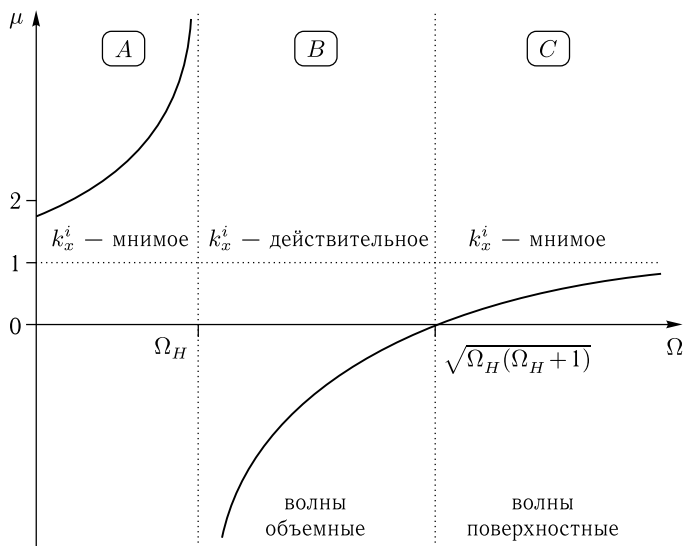


Рис. 2.3. Схема зависимости μ от Ω

Из рисунка видно, что имеется только одна область B , соответствующая интервалу частот $\Omega_H < \Omega < \sqrt{\Omega_H(\Omega_H + 1)}$, где $\mu < 0$, то есть k_x^i может быть действительным. Это — область ОБЪЕМНЫХ волн, для которых зависимость потенциала ψ_2 от координаты x периодически осциллирует. В этой области действительность k_x^i определяется соотношением между k_y и k_z , определяемым условием:

$$k_y^2 + \frac{k_z^2}{\mu} < 0, \quad (2.231)$$

откуда получаем:

$$\frac{k_z}{k_y} > \sqrt{-\mu}, \quad (2.232)$$

что дает сектор, определяющий возможные пределы распространения объемных волн. Его величину удобно определять в цилиндрической системе координат с помощью угла отсечки [1, стр. 72–74].

В области A , соответствующей интервалу частот $0 < \Omega < \Omega_H$, где $\mu > 0$, волны распространяться не могут, так как при этом их частота должна была бы быть ниже частоты однородного ФМР.

В области C , соответствующая интервалу частот $\sqrt{\Omega_H(\Omega_H + 1)} < \Omega < +\infty$, где $\mu > 0$, величина k_x^i всегда мнимая. Это область ПОВЕРХНОСТНЫХ волн, для которых зависимость потенциала ψ_2 от координаты x спадает по экспоненте от той или иной поверхности пластины.

2.7. Замечание о дальнейшем рассмотрении

Главным предметом дальнейшего рассмотрения в настоящей монографии будут дисперсионные свойства волн в ферритовой пластине, намагниченной касательно к ее плоскости. Предполагается, что волны распространяются в направлении, перпендикулярном приложенному полю или под углами к этому полю, определяемыми интервалом углов отсечки. Согласно показанному в [1, 2, 41, 42, 114, 159], в таких условиях волны имеют поверхностный характер. В настоящий момент объемные волны еще ожидают своего исследователя.

В основу изложения будет положено дисперсионное соотношение, подобное (2.207). В некоторых случаях будет упомянуто эквивалентное ему соотношение (2.222).

Будет рассмотрена роль электрического поля, свойства волнового числа магнитостатических волн при достаточно больших его значениях, а также влияние динамического размагничивания волны и неоднородного обменного взаимодействия на закон дисперсии распространяющейся волны. Некоторое внимание будет уделено стоячим волнам по толщине пленки, в первую очередь роли и содержанию понятия поверхностной анизотропии.

Вопросы распространения рассматриваемых волн в неоднородных полях и сложных структурах, а также в условиях ориентационных переходов, которым посвящены предыдущие монографии настоящей серии [1–4], здесь затронуты не будут, так как эти вопросы также еще ожидают грядущих исследователей.

В рамках этой главы далее будут рассмотрены некоторые чисто математические вопросы, полезные при решении уравнений, возникающих в процессе решения задач о распространении волн в магнитных средах. К таковым вопросам относятся решение дифференциального уравнения второго порядка типа уравнения Уокера, содержащего смешанную производную, а также решение алгебраических уравнений третьей и четвертой степени.

2.8. Уравнение второго порядка со смешанной производной

В ряде задач, рассматриваемых далее в настоящей монографии, встречается уравнение второго порядка, содержащее смешанную производную по двум координатам. К такому виду приводится уравнение

Уокера в задаче о волне типа Дэймона–Эшбаха с учетом размагничивания (раздел 5.5, формулы (5.70), (5.74)) и обмена (раздел 6.5, формулы (6.70), (6.74)).

Вообще говоря, уравнение типа Уокера со смешанной производной достаточно часто возникает также в других задачах, например в задаче о распространении магнитостатических волн в условиях ориентационного перехода, рассмотренной в четвертой монографии настоящей серии [4, глава 14, стр. 354–361].

В общем случае уравнение Уокера с произвольным тензором восприимчивости $\vec{\chi}$ в декартовой системе координат $Oxyz$:

$$\vec{\chi} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix}, \quad (2.233)$$

имеет вид [4, стр. 351, форм. (14.33)]:

$$\begin{aligned} (1 + 4\pi a_{xx}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (1 + 4\pi a_{yy}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + (1 + 4\pi a_{zz}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \\ + 4\pi(a_{xy} + a_{yz}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + 4\pi(a_{xz} + a_{zx}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \\ + 4\pi(a_{yz} + a_{zy}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} = 0. \end{aligned} \quad (2.234)$$

Можно видеть, что смешанная производная возникает всегда, когда тензор $\vec{\chi}$ не является антисимметричным, то есть при $a_{ik} \neq -a_{ki}$, хотя бы при каком-нибудь одном наборе индексов i и k . Такое положение возникает, например, тогда, когда равновесное положение вектора намагниченности определяется действием двух сил, имеющих различные направления, например, поля анизотропии и внешнего поля. В условиях ориентационного перехода пример такого тензора для намагниченности в условиях ориентационного перехода приведен в монографии [3] на стр. 271, формула (6.202), в которой $a_{xy} = -a_{yx}$, $a_{yz} = -a_{zy}$, но $a_{xz} = a_{zx}$, так что коэффициент при производной $\partial^2 \psi / \partial x \partial z$ не обращается в нуль, в результате чего уравнение типа (2.234) содержит смешанную производную. В задачах, рассматриваемых в настоящей монографии, намагниченность также подвержена действию двух или даже трех сил — кроме внешнего поля также действию поля размагничивания и поля неоднородного обмена, что обеспечивает в соответствующих уравнениях Уокера наличие смешанной производной.

Способ решения уравнения со смешанной производной подробно описан в главе 4 монографии [4, разд. 4.1.6–4.1.8, стр. 73–83]. В то же время, в какой-либо другой литературе, по крайней мере, известной авторам настоящей монографии, описание такого способа отсутствует. Поэтому, ввиду его важности, авторы сочли полезным для дальнейшего изложения привести здесь его сжатый конспективный вариант,

за подробностями которого рекомендуют читателю обратиться непосредственно к монографии [4].

2.8.1. Частный случай решения уравнения со смешанной производной

Будем рассматривать уравнение со смешанной производной, имеющее вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0. \quad (2.235)$$

Решаем методом разделения переменных [207, стр. 82]:

$$U = X(x)Y(y). \quad (2.236)$$

Находя производные, подставляя в уравнение и разделив на $X \cdot Y$, получаем:

$$\frac{X''}{X} + \alpha \frac{Y''}{Y} + \gamma \frac{X'Y'}{XY} = 0. \quad (2.237)$$

Можно видеть, что разделение уравнения на две части, каждая из которых зависит только от одной переменной, здесь не получается. То есть применение классического метода разделения переменных результата не дает.

Будем полагать, что задача касается распространения волны по определенной прямолинейной траектории. Положим, что такой траекторией является ось Oy и будем искать решение в виде:

$$U = X(x)e^{\vartheta y}, \quad (2.238)$$

где ϑ — волновое число волны, распространяющейся вдоль Oy .

Подставляя (2.238) в (2.235) и сокращая на $e^{\vartheta y}$, получаем уравнение для X :

$$X'' + \gamma\vartheta X' + \alpha\vartheta^2 X = 0. \quad (2.239)$$

Ищем решение этого уравнения в виде:

$$X = e^{\lambda x}, \quad (2.240)$$

откуда получаем уравнение для λ :

$$\lambda^2 + \gamma\vartheta\lambda + \alpha\vartheta^2 = 0. \quad (2.241)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\lambda_{1,2} = \vartheta \left(-\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha} \right), \quad (2.242)$$

откуда в соответствии с (2.238) получаем решение для U в виде:

$$U = e^{\vartheta \left(-\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha} \right) x} e^{\vartheta y}, \quad (2.243)$$

или:

$$U = e^{-\frac{\gamma\vartheta}{2}x} e^{\pm\vartheta\left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\alpha}\right)x} e^{\vartheta y}. \quad (2.244)$$

Из этого выражения видно, что в зависимости от соотношения величин α и γ , а также от действительного или мнимого значения параметра ϑ , вид решения по координате x может иметь характер спадающей или возрастающей экспоненты, в том числе промодулированной по той же координате периодической синусоидой.

Полное решение, с учетом двух возможных знаков показателя экспоненты для y , имеет вид:

$$U = e^{-\frac{\gamma\vartheta}{2}x} \left[A e^{\vartheta\left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\alpha}\right)x} + B e^{-\vartheta\left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\alpha}\right)x} \right] e^{\vartheta y} + e^{-\frac{\gamma\vartheta}{2}x} \left[C e^{\vartheta\left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\alpha}\right)x} + D e^{-\vartheta\left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\alpha}\right)x} \right] e^{-\vartheta y}, \quad (2.245)$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные, требующие определения из граничных или начальных условий.

Предположение о распространении волны вдоль оси Ox приводит к такому же виду решения с заменой x на y и y на x .

2.8.2. Классическое решение уравнения со смешанной производной

В предыдущем разделе изложен способ нахождения решения уравнения второго порядка, содержащего смешанную производную. Такой способ не является универсальным в том отношении, что содержит заведомо принятое предположение о том, что уравнение (2.235) имеет решение в виде волны, распространяющейся вдоль одной из осей координат, в данном случае вдоль Oy или Ox . Рассмотрим теперь наиболее универсальный классический способ решения уравнения со смешанными производными, в основном следуя идеологии [207].

Итак, пусть исходное уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0. \quad (2.246)$$

Введем новые переменные:

$$\xi = \xi(x, y); \quad (2.247)$$

$$\eta = \eta(x, y). \quad (2.248)$$

Находим производные:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad (2.249)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \\ &+ \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}; \end{aligned} \quad (2.250)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}; \quad (2.251)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \\ &+ \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}; \end{aligned} \quad (2.252)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (2.253)$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \alpha \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \right\} + \\ + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \gamma \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right\} + \\ + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \left\{ \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \alpha \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \gamma \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \right\} + \\ + \frac{\partial U}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \right) + \\ + \frac{\partial U}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.254)$$

Введем вспомогательные обозначения:

$$V_\xi = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \alpha \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y}; \quad (2.255)$$

$$W_{\xi\eta} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \gamma \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \right); \quad (2.256)$$

$$V_\eta = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \alpha \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \gamma \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}; \quad (2.257)$$

$$\Phi_\xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}; \quad (2.258)$$

$$\Phi_\eta = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}. \quad (2.259)$$

С этими обозначениями исходное уравнение принимает вид:

$$V_\xi \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + W_{\xi\eta} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + V_\eta \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \Phi_\xi \frac{\partial U}{\partial \xi} + \Phi_\eta \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0. \quad (2.260)$$

Можно видеть, что структура выражений V_ξ и V_η одинакова с точностью до замены ξ на η . Рассмотрим вспомогательную функцию $z(x, y)$, являющуюся решением уравнения:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \alpha \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \gamma \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (2.261)$$

Поскольку это уравнение второго порядка, то согласно общей теории дифференциальных уравнений, оно должно иметь два независимых друг от друга решения. Тогда, положив ξ равным одному из этих решений, а η — другому, можно одновременно обратить в нуль оба выражения V_ξ и V_η , что приведет к заметному упрощению уравнения (2.260).

Итак, рассмотрим решение уравнения (2.261). Прежде всего разделим все слагаемые на $(\partial z / \partial y)^2$. В результате получаем:

$$\left(\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}\right)^2 + \gamma \left(\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}\right) + \alpha = 0. \quad (2.262)$$

Это — квадратное уравнение относительно выражения в скобках. Решая его, получаем:

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha}. \quad (2.263)$$

Введем вспомогательное обозначение:

$$w_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha}. \quad (2.264)$$

С этим обозначением получаем уравнение для z вида:

$$\frac{\partial z}{\partial x} - w_{1,2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (2.265)$$

Согласно общей теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка [208, стр. 243] или [209, стр. 312], это уравнение является частным видом классического уравнения:

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z), \quad (2.266)$$

которое эквивалентно системе уравнений [208, стр. 246] или [209, стр. 300–301]:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \quad (2.267)$$

Учитывая, что в уравнении (2.266): $P(x, y, z) = 1$, $Q(x, y, z) = -w_{1,2}$, а также $R(x, y, z) = 0$, получаем эквивалентную систему в виде:

$$\frac{dx}{1} = -\frac{dy}{w_{1,2}} = \frac{dz}{0}. \quad (2.268)$$

Заметим, что деление на нуль в третьем члене здесь не должно вызывать неопределенности, так как умножение на нуль этого члена, в сочетании с таким же умножением любого другого, эту неопределенность снимает.

Из равенства первых двух составляющих системы (2.268) получаем:

$$w_{1,2} dx + dy = 0. \quad (2.269)$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$w_{1,2}x + y = C_1, \quad (2.270)$$

где C_1 — произвольная в рамках уравнения (2.269) постоянная.

Аналогично из равенства первого и третьего составляющих системы (2.268), получаем:

$$dz = 0, \quad (2.271)$$

откуда находим:

$$z = C_2, \quad (2.272)$$

где C_2 — также в рамках уравнения (2.271) — произвольная постоянная.

Поскольку x , y и z связаны функциональной зависимостью вида (2.265) или (2.266), то и постоянные C_1 и C_2 тоже должны быть как-то связаны. Следующая задача состоит в том, чтобы с помощью уравнения (2.271) исключить C_1 и C_2 из совокупности выражений (2.270) и (2.272).

Зададим одну из переменных равной произвольной постоянной величине, например пусть будет $x = x_0$. Это позволяет из (2.270) выразить y через C_1 в виде:

$$y = C_1 - w_{1,2}x_0. \quad (2.273)$$

Предположим далее, что при постоянной величине переменной x функция $z(x, y)$ зависит только от y , то есть:

$$z(x_0, y) = f(y), \quad (2.274)$$

где функцию $f(y)$ также зададим произвольно.

Подставляя это выражение в (2.272), а также учитывая (2.273), получаем:

$$f(C_1 - w_{1,2}x_0) = C_2. \quad (2.275)$$

Это соотношение дает функциональную связь между C_1 и C_2 , использование которой позволяет исключить C_1 и C_2 из совокупности полученных интегралов (2.270) и (2.272).

Таким образом, вместо задания двух произвольных постоянных C_1 и C_2 , здесь мы задаем произвольное значение одной из переменных и произвольную функциональную зависимость решения от другой переменной, то есть на место первоначальных двух фактов произвольности ставятся два других факта опять-таки произвольности. Корректное обоснование подобной замены можно найти в цитированных выше источниках.

В рассматриваемой здесь задаче удобно выбрать $x = 0$ и $z = y$. Подставляя эти значения в (2.270) и (2.272), получаем:

$$w_{1,2}0 + y = C_1, \text{ а также } y = C_2, \quad (2.276)$$

откуда можно видеть, что при произвольном y выполняется равенство:

$$C_1 = C_2. \quad (2.277)$$

Это соотношение задает семейство решений полной задачи, частным случаем которой является выбор $x = 0$ и $z = y$. Полное решение получаем, приравнявая (2.270) и (2.272) в соответствии с (2.277):

$$z = w_{1,2}x + y. \quad (2.278)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что полученное выражение является решением исходного уравнения (2.265).

Очевидно, в силу произвольности выбора, полученное решение не является единственным. Здесь действует то же правило, что и в операции интегрирования, когда неопределенный интеграл определяется с точностью до произвольной постоянной. Соответственно решение дифференциального уравнения первого порядка в обыкновенных производных содержит одну произвольную постоянную, второго — две и так далее. Значения этих постоянных могут быть определены из начальных или граничных условий. В дифференциальных уравнениях в частных производных место произвольных постоянных занимают произвольные функции, которые также определяются начальными или граничными условиями. Более подробно с этим вопросом также можно ознакомиться в соответствующих руководствах, например [207–209].

Применительно к рассматриваемой здесь задаче, можно например положить: $x = 0$, $z = y^2$, что дает $C_2 = C_1^2$, откуда получаем:

$$z = (w_{1,2}x + y)^2, \quad (2.279)$$

или $x = 2$, $z = 2y$, что дает $C_2 = 2C_1 - 4w_{1,2}$, откуда получаем:

$$z = 2w_{1,2}x + 2y - 4w_{1,2} \quad (2.280)$$

и так далее. Можно видеть, что (2.279) и (2.280) также являются решениями уравнения (2.265), что получается и при любом другом подобном выборе.

Итак, возвращаясь к уравнению (2.261), два решения которого получены в виде (2.278), можно положить:

$$\xi = w_1 x + y; \tag{2.281}$$

$$\eta = w_2 x + y, \tag{2.282}$$

где w_1 и w_2 — постоянные параметры, определяемые выражением (2.264).

Поскольку ξ и η являются решениями уравнения (2.261), являющего собой правую часть выражений (2.255) и (2.257), следует, что $V_\xi = 0$ и $V_\eta = 0$. Подставляя (2.281) и (2.282) в (2.258) и (2.259), убеждаемся также, что $\Phi_\xi = 0$ и $\Phi_\eta = 0$.

Аналогично, подставляя (2.281) и (2.282) в (2.256), получаем:

$$W_{\xi\eta} = w_1 w_2 + \alpha + \gamma(w_1 + w_2). \tag{2.283}$$

Подставляя w_1 и w_2 в соответствии с (2.264), находим:

$$W_{\xi\eta} = 2\alpha - \gamma^2. \tag{2.284}$$

С учетом полученных выражений, уравнение (2.260) принимает вид:

$$(2\alpha - \gamma^2) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \tag{2.285}$$

откуда, учитывая в общем случае отличие первого сомножителя от нуля, получаем:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{2.286}$$

Это — классическое волновое уравнение в его первой канонической форме [207, стр. 15, стр. 51]. Его решение имеет вид [207, стр. 51]:

$$U(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \tag{2.287}$$

где каждая из функций f_1 и f_2 зависит только от своей переменной ξ или η . Это решение удобно для описания волн, распространяющихся вдоль оси, неограниченно продолжающейся в обе стороны. В этом случае две функции f_1 и f_2 определяются двумя начальными условиями в какой-то одной точке оси.

Для рассматриваемых далее задач удобно привести это уравнение к виду, содержащему вторые производные по каждой из переменных. Для этого, подобно [207, стр. 16], выполним еще одну замену переменных:

$$\xi = r + v; \tag{2.288}$$

$$\eta = r - v, \tag{2.289}$$

так что:

$$r = \frac{\xi + \eta}{2}; \quad (2.290)$$

$$v = \frac{\xi - \eta}{2}. \quad (2.291)$$

Находим производные:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial v} \right); \quad (2.292)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial v} \right); \quad (2.293)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right), \quad (2.294)$$

Подставляя (2.294) в (2.286), получаем:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} = 0. \quad (2.295)$$

Это — классическое волновое уравнение в его второй канонической форме [207, стр. 15–16, стр. 83].

Такая форма удобна для описания волн, распространяющихся в ограниченном с обеих сторон отрезке оси. При этом на концах отрезка задаются граничные условия, а во времени получается совокупность стоячих волн, частоты которых имеют дискретный характер.

Решим это уравнение методом разделения переменных, полагая:

$$U = R(r) \cdot V(v). \quad (2.296)$$

Подставляя (2.296) в исходное уравнение (2.295) и следуя действиям, выполняемым при решении подобных уравнений в классике [207, стр. 82–88], получаем решение настоящего уравнения в виде, с точностью до обозначений совпадающим с приведенным в [4, стр. 65–67, форм. (4.21)]:

$$U = A \cdot Ce^{(\mu r + \nu v)} + A \cdot De^{(\mu r - \nu v)} + B \cdot Ce^{(-\mu r + \nu v)} + B \cdot De^{(-\mu r - \nu v)}, \quad (2.297)$$

где μ и ν — постоянные разделения. Благодаря симметрии уравнения (2.295), эти постоянные получаются равными друг другу: $\mu = \nu$, так что решение (2.297) принимает вид:

$$U = A \cdot Ce^{(\mu r + \mu v)} + A \cdot De^{(\mu r - \mu v)} + B \cdot Ce^{(-\mu r + \mu v)} + B \cdot De^{(-\mu r - \mu v)}, \quad (2.298)$$

Здесь r и v определяются формулами (2.290) и (2.291), откуда с учетом (2.281), (2.282) и (2.264), получаем:

$$r = \frac{1}{2}(-\lambda x + 2y); \quad (2.299)$$

$$v = \left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha} \right) x. \quad (2.300)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что решение (2.298) совпадает с полученным ранее (2.245). Рассмотрим например показатель первой экспоненты в (2.298):

$$\mu r + \mu v = \left(-\frac{\mu\gamma}{2} + \mu\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha} \right) x + \mu y. \quad (2.301)$$

Можно видеть, что этот показатель, с точностью до замены обозначения постоянной μ на ϑ , совпадает с таковым в первом слагаемом выражения (2.245). Остальные слагаемые могут быть проверены аналогичным образом.

Таким образом, полученное ранее решение (2.245), основанное на предварительном предположении о распространении волны вдоль одной из координатных осей, полностью согласуется с решением (2.298), полученным классическим методом. В обоих случаях приходится решать одинаковые по структуре квадратные уравнения (2.241) и (2.262), корни которых (2.242) и (2.263) отличаются друг от друга лишь на множитель, представляющий собой постоянную деления.

Замечание. Следует отметить, что решение, основанное на предположении о распространении волны вдоль координатной оси, приводит к конечному результату значительно скорее и проще, чем классическое. В самом деле, классическое решение требует вычисления промежуточных производных, нескольких замен переменных и сведения получающего уравнения второго порядка к системе двух уравнений первого порядка, то есть в совокупности является довольно громоздким. Укороченное же решение, кроме простоты вычислений, позволяет более наглядно проследить физическое содержание задачи, что также дает ему несомненное преимущество.

2.9. Методы решения уравнений высоких степеней

При расчете дисперсионных свойств волн, распространяющихся в магнитной среде, часто возникает потребность решения алгебраических уравнений третьей и четвертой степени. Кратко перечислим такие случаи, имеющие место в рамках настоящей монографии. Так, вычисление поперечного волнового числа при рассмотрении дисперсии магнитостатических волн с учетом размагничивания и обмена приводит к уравнению четвертой (точнее — восьмой с четными показателями)

степени. Вычисление ограничения волнового числа за счет диссипации требует решения подобного уравнения. Решение волнового уравнения с третьей производной для жесткой струны приводит к уравнению третьей степени. Решение уравнения прецессии для спиновой цепочки приводит к уравнению с четвертой производной, сводящегося к алгебраическому уравнению четвертой степени, к счастью, содержащему только четные степени, что, по-видимому, не будет иметь место при учете диссипации.

В большинстве случаев уравнения высоких степеней решаются численно, как правило, методом поиска нуля. Однако аналитическое решение, например реализованное в главе 8 для уравнения (8.116) в виде (8.143)–(8.145), позволяет получить окончательное решение полной задачи (8.174)–(8.176) в весьма удобном аналитическом виде.

Таким образом, потребность умения решать уравнения высоких степеней в рамках задач, рассматриваемых в настоящей монографии, является несомненной. С другой стороны, подробное освещение методов решения таких уравнений в известной авторам литературе встречается крайне редко. Чтобы ликвидировать подобный пробел, в третьей монографии настоящей серии [3] авторы ввели раздел 2.4, посвященный аналитическим методам решения уравнений третьей и четвертой степеней. Учитывая потребность решения таких уравнений в настоящей монографии, авторы также сочли возможным привести краткое описание этих методов, в основном следуя [3, раздел 2.4, стр. 61–76]. Как и в [3], авторы ограничивают рассмотрение лишь двумя методами: для уравнений третьей степени — методом Кардано, для уравнений четвертой — методом Феррари. Более подробную информацию читатель может почерпнуть в учебной монографии [210, стр. 195–205].

2.9.1. Уравнения третьей степени

Рассмотрим полное уравнение третьей степени вида:

$$a_0 \cdot x^3 + a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot x + a_3 = 0. \quad (2.302)$$

Согласно общепринятой практике [1, 210, 211], будем считать, что все коэффициенты a_0 , a_1 , a_2 и a_3 являются действительными (способ решения уравнения (2.302) при комплексных коэффициентах авторам настоящей монографии не известен).

В записанном в виде (2.302) уравнении присутствуют все степени неизвестного x . Покажем, что в любом случае (при $a_0 \neq 0$) из этого уравнения можно исключить вторую степень. Для этого заменим переменную, для чего представим x в виде:

$$x = y + \varepsilon, \quad (2.303)$$

где y — новая переменная, а ε — постоянная величина, требующая определения.

В этом случае получаем:

$$x^2 = y^2 + 2\varepsilon y + \varepsilon^2; \quad (2.304)$$

$$x^3 = y^3 + 3y^2\varepsilon + 3y\varepsilon^2 + \varepsilon^3. \quad (2.305)$$

Подставляя (2.303)–(2.305) в (2.302) и разделяя на a_0 , получаем:

$$y^3 + \frac{3a_0\varepsilon + a_1}{a_0} \cdot y^2 + \frac{3a_0\varepsilon + 2a_0\varepsilon + a_2}{a_0} \cdot y + \frac{a_0\varepsilon + a_1\varepsilon^2 + a_2\varepsilon + a_3}{a_0} = 0. \quad (2.306)$$

Потребуем выполнения равенства:

$$\frac{3a_0\varepsilon + a_1}{a_0} = 0, \quad (2.307)$$

откуда получаем:

$$\varepsilon = -\frac{a_1}{3a_0}. \quad (2.308)$$

То есть (2.303) принимает вид:

$$x = y - \frac{a_1}{3a_0}. \quad (2.309)$$

Подстановка (2.309) в (2.302), после приведения подобных членов, позволяет привести уравнение (2.302) к виду:

$$y^3 + a \cdot y + b = 0, \quad (2.310)$$

где введены обозначения:

$$a = \frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1^2}{3a_0^2}; \quad (2.311)$$

$$b = \frac{2a_1^3}{27a_0^3} - \frac{a_1a_2}{3a_0^2} + \frac{a_3}{a_0}. \quad (2.312)$$

Заметим, что поскольку все составляющие выражений a и b действительны, то и сами эти выражения тоже действительны.

Таким образом, полученное уравнение (2.310), будучи кубическим, второй степени неизвестной не содержит. Далее будем заниматься решением именно этого уравнения.

Замечание. Кроме непосредственного использования формул (2.311) и (2.312) возможна прямая подстановка (2.309) в (2.302), что часто является технически проще. Однако при этом, если второе слагаемое в (2.309) является дробным, то при попытке приведения подобных членов, в уравнении (2.302) появится общий множитель, который может быть вынесен за скобку. Однако сокращение на этот множитель может привести к появлению отличного от единицы коэффициента при y^3 в уравнении (2.310), что недопустимо, так как приводит к искажению величин a и b . Поэтому в случае появления такого коэффициента надо все члены полученного уравнения разделить на него, чтобы коэффициент при y^3 обязательно равнялся единице.

Представим теперь одно неизвестное y в виде суммы двух неизвестных u и v , то есть положим:

$$y = u + v. \quad (2.313)$$

Подставляя (2.313) в (2.310) получаем:

$$u^3 + v^3 + (u + v) \cdot (3uv + a) + b = 0. \quad (2.314)$$

Так как вместо одного неизвестного y введены два, u и v , то между ними, в дополнение к (2.313) можно ввести какую-то связь. То есть будет как бы система из двух уравнений, неизвестными в которой будут u и v , а y будет выступать в качестве параметра. Выберем эти неизвестные так, чтобы выполнялось соотношение:

$$3uv + a = 0, \quad (2.315)$$

или

$$uv = -\frac{a}{3}. \quad (2.316)$$

При этом уравнение (2.314) принимает вид:

$$u^3 + v^3 = -b. \quad (2.317)$$

В то же время, из (2.316) получаем:

$$u^3 \cdot v^3 = -\frac{a^3}{27}. \quad (2.318)$$

Таким образом, у нас имеется сумма величин u^3 и v^3 (2.317), а также их произведение (2.318). То есть эти неизвестные можно рассматривать как корни квадратного уравнения:

$$z^2 + bz - \frac{a^3}{27} = 0, \quad (2.319)$$

решение которого имеет вид:

$$z = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}, \quad (2.320)$$

так что:

$$u^3 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}; \quad (2.321)$$

$$v^3 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}, \quad (2.322)$$

откуда:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}; \quad (2.323)$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}. \quad (2.324)$$

Подставляя полученные выражения в (2.314), получаем решение уравнения (2.310) в виде известной формулы Кардано:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}. \quad (2.325)$$

Эта формула является основной при решении уравнения третьей степени в радикалах. В ее справедливости можно убедиться прямой подстановкой в уравнение (2.310).

В формулу (2.325) под знаком радикала третьей степени входит извлечение квадратного корня из выражения:

$$D = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}, \quad (2.326)$$

которое называется «дискриминантом» уравнения (2.310).

Замечание. В монографии [210, стр.197] рассматривается выражение (2.326) со знаком «минус», и именно оно названо «дискриминантом». Однако в [211, стр.45–50] рассматривается то же выражение со знаком «плюс». Тем не менее, в обоих случаях проводится, по существу, одинаковый анализ знака этого выражения. Авторы настоящей монографии затрудняются отдать предпочтение той или иной трактовке, однако далее, исходя из определенного удобства и учитывая тождественность получаемых окончательных результатов, используют в качестве «дискриминанта» именно выражение (2.326).

Итак, в зависимости от знака выражения (2.326), могут иметь место различные варианты решения, то есть может требоваться извлечение кубического корня как из действительного, так и из комплексного числа.

Рассмотрим возможные варианты решения, определяемые знаком параметра дискриминанта уравнения (2.310), по отдельности.

ВАРИАНТ № 1.

Пусть значения величин a и b таковы, что $D > 0$. При этом результат извлечения квадратного корня будет действительным. Если при извлечении кубических корней в формуле (2.325) ограничиться только их действительными значениями, то получаемое решение будет также действительным. При этом, если условия задачи требуют получения именно действительного решения, то этим можно и ограничиться.

Если же требуется получить также комплексные решения, то следует учесть, то кубический корень из любого числа имеет три значения — одно действительное и два комплексно сопряженных, то есть при действительном значении кубического корня $\xi = \sqrt[3]{a}$ имеются еще два комплексно сопряженных $\omega \cdot \xi$ и $\omega^2 \cdot \xi$, где ω и ω^2 — мнимые кубические корни из единицы (обозначения заимствованы из [210, стр. 196]):

$$\omega = \frac{-1 + i \cdot \sqrt{3}}{2}; \quad (2.327)$$

$$\omega^2 = \frac{-1 - i \cdot \sqrt{3}}{2}. \quad (2.328)$$

Формулы (2.327) и (2.328) получаются в предположении, что уравнение

$$x^3 - 1 = 0 \quad (2.329)$$

имеет один действительный корень $x = 1$, так что после деления (2.329) на $(x - 1)$ получаем квадратное уравнение:

$$x^2 + x + 1 = 0, \quad (2.330)$$

решением которого являются формулы (2.327) и (2.328). Путем непосредственной проверки можно убедиться, что $\omega^3 = 1$ и $(\omega^2)^3 = 1$, то есть уравнение (2.329) удовлетворяется.

Таким образом, при условии допущении мнимости, каждое из предлагаемых формулы (2.325) имеет три значения, возможные комбинации из которых дают девять решений. Однако при выборе надлежащих решений надо учитывать условие (2.316), которое допускает лишь три возможных комбинации значений u и v , то есть кубических корней в формуле (2.325). В этом можно убедиться непосредственной подстановкой девяти возможных комбинаций в условие (2.316). Таким образом, для y остаются только три возможности:

$$y_1 = u + v; \quad (2.331)$$

$$y_2 = \omega \cdot u + \omega^2 \cdot v; \quad (2.332)$$

$$y_3 = \omega^2 \cdot u + \omega \cdot v. \quad (2.333)$$

Путем непосредственной проверки можно убедиться, что все три выражения (2.331)–(2.333) являются корнями уравнения (2.310).

Соответственно получаются три решения исходного уравнения (2.302):

$$x_1 = -\frac{a_1}{3a_0} + u + v; \quad (2.334)$$

$$x_2 = -\frac{a_1}{3a_0} + \omega u + \omega^2 v; \quad (2.335)$$

$$x_3 = -\frac{a_1}{3a_0} + \omega^2 u + \omega v. \quad (2.336)$$

Подставляя в эти выражения формулы (2.323) и (2.324), с учетом (2.311) и (2.312), можно получить решение, записанное через параметры исходного уравнения (2.302). Здесь авторы настоящей монографии не приводят эти выражения ввиду их некоторой громоздкости в сочетании с очевидной тривиальностью.

ВАРИАНТ № 2.

Пусть теперь значения величин a и b таковы, что $D = 0$. При этом результат извлечения квадратного корня будет равен нулю, так что из формулы (2.325) получаем:

$$y = 2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{b}{2}}. \quad (2.337)$$

Учтем далее, что при $D = 0$ имеет место равенство:

$$\frac{b^2}{4} = -\frac{a^3}{27}, \quad (2.338)$$

из которого получаем:

$$\left(-\frac{b}{2}\right)^2 = -\frac{a^3}{27}. \quad (2.339)$$

Произведем далее следующую цепочку последовательных преобразований, выполняемых с учетом (2.339):

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-\frac{b}{2}} &= \sqrt[3]{\frac{\left(-\frac{b}{2}\right)^3}{\left(-\frac{b}{2}\right)^2}} = -\frac{b}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\left(-\frac{b}{2}\right)^2}} = \\ &= -\frac{b}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{-\frac{a^3}{27}}} = \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{\frac{a}{3}} = \frac{3b}{2a}. \end{aligned} \quad (2.340)$$

Подставляя полученное выражение в (2.337), получаем:

$$y_1 = \frac{3b}{a}. \quad (2.341)$$

Два других корня получаем с учетом комплексных корней из единицы, аналогично (2.332) и (2.333):

$$y_2 = \frac{3b}{a} \cdot (\omega + \omega^2) = -\frac{3b}{a}; \quad (2.342)$$

$$y_3 = \frac{3b}{a} \cdot (\omega^2 + \omega) = -\frac{3b}{a}. \quad (2.343)$$

При этом в соответствии с (2.309) получаем:

$$x_1 = -\frac{a_1}{3a_0} + \frac{3b}{a}; \quad (2.344)$$

$$x_2 = -\frac{a_1}{3a_0} - \frac{3b}{a}; \quad (2.345)$$

$$x_3 = -\frac{a_1}{3a_0} - \frac{3b}{a}. \quad (2.346)$$

Подстановка (2.323) и (2.324) с учетом (2.311) и (2.312) также позволяет получить решение, записанное через параметры исходного уравнения (2.302).

ВАРИАНТ № 3.

Пусть теперь значения величин a и b таковы, что $D < 0$. При этом результат извлечения квадратного корня будет мнимым, то есть:

$$\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} = i\sqrt{-\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}. \quad (2.347)$$

В этом случае применение формулы (2.325) требует вычисления кубического корня из комплексного числа, что, как показано в [257, стр. 199], эквивалентно решению кубического уравнения такого же вида, как (2.310). То есть получается как бы «порочный круг», выход из которого прямое применение алгебраической формулы (2.325) не дает [210, стр. 198].

Однако в этом случае можно воспользоваться удобным приемом (во времена Кардано еще не существовавшим), позволяющим заменить возведение в степень комплексного числа в тригонометрической форме умножением его аргумента на число, являющееся показателем степени.

Итак, запись комплексного числа z в тригонометрической форме (формула Эйлера) имеет вид [211, стр. 32]:

$$z = x + iy = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (2.348)$$

где:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad (2.349)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2.350)$$

Возведение в степень такого числа дается формулой Муавра [211, стр. 33]:

$$z^n = (x + iy)^n = r^n \cdot [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)], \quad (2.351)$$

где n — целое число.

Теперь вернемся к решению уравнения (2.310) в виде (2.325). При этом из (2.323) и (2.324) в соответствии с (2.347) получаем:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + i\sqrt{-\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}}; \quad (2.352)$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - i\sqrt{-\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}}. \quad (2.353)$$

Введем обозначения:

$$\alpha = -\frac{b}{2}; \quad (2.354)$$

$$\beta = \sqrt{-\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}. \quad (2.355)$$

С этими обозначениями (2.352) и (2.353) принимают вид:

$$u = \sqrt[3]{\alpha + i\beta}; \quad (2.356)$$

$$v = \sqrt[3]{\alpha - i\beta}. \quad (2.357)$$

В силу равенства действительных частей этих выражений, а также с учетом соотношения (2.316), правая часть которого является действительной, следует, что u и v являются комплексно сопряженными.

Возводя (2.356) в куб и представляя получающееся комплексное число в соответствии с формулой Эйлера (2.348), получаем:

$$u^3 = \alpha + i\beta = r \cdot (\cos \gamma + i \sin \gamma), \quad (2.358)$$

где:

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}; \quad (2.359)$$

$$\gamma = \arctg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right), \quad (2.360)$$

где величины r и γ являются известными, так как заведомо могут быть определены, исходя из соотношений (2.354) и (2.355).

Положим также:

$$u = \rho \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (2.361)$$

где ρ и φ — неизвестные величины, подлежащие определению.

Возводя (2.359) в куб в соответствии с формулой Муавра (2.351), получаем:

$$u^3 = \rho^3 \cdot (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi). \quad (2.362)$$

Полагая модули равных комплексных чисел (2.358) и (2.362) между собой также равными, получаем:

$$\rho^3 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (2.363)$$

Подставляя α и β в соответствии с (2.354) и (2.355), получаем:

$$\rho^3 = \sqrt{-\frac{a}{27}}. \quad (2.364)$$

извлекая кубический корень из обеих частей этого выражения, получаем:

$$\rho = \sqrt{-\frac{a}{3}}, \quad (2.365)$$

то есть величина ρ , входящая в (2.361), уже определена.

Обратимся теперь к определению величины φ . Сравнивая действительные части (2.358) и (2.362), получаем:

$$\alpha = \rho^3 \cdot \cos 3\varphi, \quad (2.366)$$

откуда получаем:

$$\cos 3\varphi = \frac{\alpha}{\rho^3}. \quad (2.367)$$

Подставляя в эту формулу (2.354) и (2.364), получаем:

$$\cos 3\varphi = \frac{-\frac{b}{2}}{\sqrt{-\frac{a^3}{27}}}, \quad (2.368)$$

то есть:

$$\varphi = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{-\frac{b}{2}}{\sqrt{-\frac{a^3}{27}}} \right). \quad (2.369)$$

Теперь оба параметра ρ и φ , входящие в формулу (2.361), определены, так что можно ее записать в виде:

$$u = \sqrt{-\frac{a}{3}} \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (2.370)$$

где величина φ , определяемая формулой (2.369) здесь не раскрыта, чтобы не создавать излишней громоздкости.

Учитывая отмеченную при рассмотрении формул (2.356) и (2.357) комплексную сопряженность u и v , можно записать величину v в виде:

$$v = \sqrt{-\frac{a}{3}} \cdot (\cos \varphi - i \sin \varphi). \quad (2.371)$$

Таким образом, с учетом (2.331), то есть, складывая (2.370) и (2.371), можно получить первое решение уравнения (2.310) в виде:

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \cos \varphi, \quad (2.372)$$

где φ определяется формулой (2.369).

Записывая два других решения в виде (2.333) и (2.334), с помощью (2.327) и (2.328), получаем:

$$y_2 = 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{3} \right); \quad (2.373)$$

$$y_3 = 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right), \quad (2.374)$$

где φ по-прежнему определяется формулой (2.369).

При этом в соответствии с (2.309) получаем:

$$x_1 = -\frac{a_1}{3a_0} + 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \cos \varphi; \quad (2.375)$$

$$x_2 = -\frac{a_1}{3a_0} + 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{3} \right); \quad (2.376)$$

$$x_3 = -\frac{a_1}{3a_0} + 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right). \quad (2.377)$$

Подстановка в эти выражения, а также во входящее в них выражение (2.369), формул (2.323) и (2.324) с учетом (2.311) и (2.312), также

позволяет получить решение, записанное через параметры исходного уравнения (2.302).

Заметим, что этот путь решения уравнения (2.310) в случае отрицательности его дискриминанта (2.326) обычно называют «тригонометрическим решением» [257, 258]. Однако из (2.352)–(2.355) можно видеть, что оно самостоятельным не является, а опирается на ту же основную формулу Кардано (2.325), «доработанную» с помощью не существовавших еще во времена Кардано формул Эйлера (2.348) и Муавра (2.351).

2.9.2. Уравнения четвертой степени

Обратимся теперь к аналитическому решению уравнения четвертой степени. Способов решения таких уравнений существует несколько [210, 211]. Исторически первым и идеологически наиболее близким к решению Кардано уравнения третьей степени, для уравнения четвертой степени, по-видимому, является способ Феррари (ученика Кардано), к рассмотрению которого и перейдем далее.

Рассмотрим полное уравнение четвертой степени вида:

$$a_0 \cdot x^4 + a_1 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x + a_4 = 0. \quad (2.378)$$

Аналогично уравнениям третьей степени, будем считать, что все коэффициенты a_0 , a_1 , a_2 , a_3 и a_4 являются действительными (способ решения уравнения (2.378) при комплексных коэффициентах авторам настоящей монографии не известен).

В записанном так уравнении присутствуют все степени неизвестного x . Покажем, что в любом случае (при $a_0 \neq 0$) из этого уравнения можно исключить третью степень.

Для этого заменим переменную, для чего представим x в виде:

$$x = y + \varepsilon, \quad (2.379)$$

где y — новая переменная, а ε — постоянная величина, требующая определения.

В этом случае получаем:

$$x^2 = y^2 + 2\varepsilon y + \varepsilon^2; \quad (2.380)$$

$$x^3 = y^3 + 3y^2\varepsilon + 3y\varepsilon^2 + \varepsilon^3; \quad (2.381)$$

$$x^4 = y^4 + 4y^3\varepsilon + 6y^2\varepsilon^2 + 4y\varepsilon^3 + \varepsilon^4. \quad (2.382)$$

Подставляя (2.379)–(2.382) в (2.378) и разделяя на a_0 , получаем:

$$y^4 + \frac{4a_0\varepsilon + a_1}{a_0}y^3 + \frac{6a_0\varepsilon^2 + 3a_1\varepsilon + a_2}{a_0}y^2 + \frac{4a_0\varepsilon^3 + 3a_1\varepsilon^2 + 2a_2\varepsilon + a_3}{a_0}y + \frac{a_0\varepsilon^4 + a_1\varepsilon^3 + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon + a_4}{a_0} = 0. \quad (2.383)$$

Потребуем выполнения равенства:

$$\frac{4a_0\varepsilon + a_1}{a_0} = 0, \quad (2.384)$$

откуда получаем:

$$\varepsilon = -\frac{a_1}{4a_0}. \quad (2.385)$$

То есть (2.379) принимает вид:

$$x = y - \frac{a_1}{4a_0}. \quad (2.386)$$

Подстановка (2.386) в (2.378), после приведения подобных членов, позволяет привести уравнение (2.378) к виду:

$$y^4 + a \cdot y^2 + b \cdot y + c = 0, \quad (2.387)$$

где введены обозначения:

$$a = \frac{a_2}{a_0} - \frac{3a_1^2}{8a_0^2}; \quad (2.388)$$

$$b = \frac{a_3}{a_0} - \frac{a_1 a_2}{2a_0^2} + \frac{a_1^3}{8a_0^3}; \quad (2.389)$$

$$c = \frac{a_4}{a_0} - \frac{a_1 a_3}{4a_0^2} + \frac{a_1^2 a_2}{16a_0^3} - \frac{3a_1^4}{256a_0^4}. \quad (2.390)$$

Заметим, что поскольку все составляющие выражений a , b и c действительны, то и сами эти выражения тоже действительны.

Таким образом, полученное уравнение (2.387), будучи уравнением четвертой степени, третьей степени неизвестной не содержит.

Далее будем заниматься решением именно этого уравнения.

Основная идея метода Феррари состоит в том, чтобы представить уравнение четвертой степени (2.387) в виде разности квадратов двух многочленов второй и первой степени относительно y , после чего разложить разность квадратов на сумму и разность таких многочленов, в результате чего уравнение (2.387) распадется на два квадратных уравнения относительно y , которые могут быть решены обычными средствами.

Выделим из уравнения (2.387) первый полный квадрат, для чего представим его в виде:

$$(y^2 + \delta + r)^2 + g = 0, \quad (2.391)$$

где величина δ полагается постоянной, а r будем считать вспомогательной переменной, которую требуется определить далее. Величину g пока считаем также вспомогательной, причем полагаем, что она во-брала в себя все, что остается от уравнения (2.387) после записи его в виде (2.308).

В выражении (2.391) раскроем скобки и запишем его по степеням y , а то, что остается — по степеням r :

$$y^4 + 2\delta y^2 + 2y^2 r + r^2 + 2\delta r + \delta^2 + g = 0. \quad (2.392)$$

Сравнивая первые два слагаемых этого уравнения с первыми двумя слагаемыми уравнения (2.387), получаем, что они являются тождественными при условии:

$$\delta = \frac{a}{2}. \quad (2.393)$$

Подставляя (2.393) в (2.392), выделим первые два слагаемых (2.392) в левую часть, а остальное — в правую:

$$y^4 + ay^2 = -2y^2 r - r^2 - ar - \frac{a^2}{4} - g. \quad (2.394)$$

Выполним подобное же разделение в уравнении (2.387):

$$y^4 + ay^2 = -by - c. \quad (2.395)$$

В этих выражениях левые части равны, то есть равны и правые. Приравняв правые части, получаем:

$$2y^2 r + r^2 + ar + \frac{a^2}{4} + g = b \cdot y + c. \quad (2.396)$$

Выразим из этого равенства величину g :

$$g = by + c - 2y^2 r - r^2 - ar - \frac{a^2}{4}. \quad (2.397)$$

Подставляя это выражение в (2.391), а также учитывая (2.393), приводим уравнение (2.391) к виду:

$$\left(y^2 + \frac{a}{2} + r\right)^2 + by + c - 2y^2 r - r^2 - ar - \frac{a^2}{4} = 0. \quad (2.398)$$

Это уравнение уже содержит один квадрат относительно y^2 , то есть для формирования разности квадратов надо всю остающуюся часть этого уравнения с обратным знаком представить в виде квадрата также относительно y уже в первой степени. Для этого надо так определить вспомогательную неизвестную r , чтобы из этой части получился именно полный квадрат относительно y .

Положим, что требуемый второй квадрат, в соответствии с (2.391) равный g , можно представить в виде:

$$g = -\alpha^2(y + \beta)^2, \quad (2.399)$$

где α и β — неизвестные пока параметры, которые определим из условия возможности записи g в виде (2.399).

Раскрывая в этом выражении скобки, получаем:

$$g = -\alpha^2 y^2 - 2\alpha^2 y \beta - \alpha^2 \beta^2. \quad (2.400)$$

Расположим содержащие y слагаемые (2.397) по степеням y , а те слагаемые, которые y не содержат — по степеням r :

$$g = -2y^2r + by - r^2 - ar - \frac{a^2}{4} + c. \quad (2.401)$$

В выражениях (2.400) и (2.401) от y^2 зависят только первые слагаемые. Другой зависимости от y^2 ни в том, ни в другом выражении нет, поэтому можно положить, что в обоих выражениях эти зависимости являются тождественными, откуда получаем условие:

$$\alpha^2 = 2r, \quad (2.402)$$

то есть

$$\alpha = \sqrt{2r}. \quad (2.403)$$

При этом (2.399) принимает вид:

$$g = -2ry^2 - 4ry\beta - 2r\beta^2. \quad (2.404)$$

Переносим в (2.401) и (2.404) первое слагаемое в левую часть, получаем:

$$g + 2y^2r = by - r^2 - ar - \frac{a^2}{4} + c; \quad (2.405)$$

$$g + 2ry^2 = -4ry\beta - 2r\beta^2. \quad (2.406)$$

В этих выражениях левые части равны, а следовательно равны и правые. Приравняв правые части, получаем:

$$by - r^2 - ar - \frac{a^2}{4} + c = -4ry\beta - 2r\beta^2. \quad (2.407)$$

Переносим все в левую часть, записывая по степеням β , y , r и разделяя все на $2r$, получаем:

$$\beta^2 + 2\beta y + \frac{b}{2r} \cdot y - \frac{r}{2} - \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8r} + \frac{c}{2r} = 0. \quad (2.408)$$

Это уравнение содержит две неизвестных величины: y и r , а также свободный пока параметр β . Поскольку неизвестных две, а уравнение всего одно, то за счет выбора этого параметра можно исключить одну из них, чтобы осталось всего одно уравнение с одной неизвестной. Поскольку главной неизвестной является y , а r — вспомогательной, то исключим именно главную неизвестную y , чтобы получить вспомогательное уравнение для вспомогательной же неизвестной r . Уравнение (2.408) содержит зависящие от y два слагаемых — второе и третье. Подберем свободный пока параметр β так, чтобы эти слагаемые взаимно компенсировали друг друга, то есть выполнялось условие:

$$2\beta y = -\frac{b}{2r} \cdot y. \quad (2.409)$$

Из этого выражения получаем необходимое значение для свободного параметра β , так что теперь он становится вполне определенным:

$$\beta = -\frac{b}{4r}. \quad (2.410)$$

Подставляя полученное так значение β в (2.408), получаем:

$$\frac{b^2}{16r^2} - \frac{r}{2} - \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8r} + \frac{c}{2r} = 0. \quad (2.411)$$

В это выражение в качестве неизвестного входит только величина r , то есть его можно рассматривать как уравнение для определения этой величины. Умножая (2.411) на $16r^2$ и записывая по степеням r , получаем:

$$8r^3 + 8ar^2 + 2(a^2 - 4c) \cdot r - b^2 = 0. \quad (2.412)$$

Это — уравнение, содержащее кроме неизвестной величины r только коэффициенты исходного уравнения (2.387), а именно: a , b и c , определяемые формулами (2.388)–(2.390). Разрешение этого уравнения, то есть выражение r через эти коэффициенты, можно рассматривать как предварительный этап для разрешения основного уравнения (2.387). Уравнение (2.412) является полным уравнением третьей степени, так что его можно разрешить методом Кардано, описанным в предыдущем разделе. В классике [210] это уравнение называется «разрешающим кубическим уравнением» или «кубической резольвентой» для уравнения четвертой степени (2.387).

Если уравнение (2.412) разрешено, то уравнение (2.391), с учетом (2.399), можно представить в виде искомой разности двух квадратов:

$$(y^2 + \delta + r)^2 - \alpha^2(y + \beta)^2 = 0. \quad (2.413)$$

В этом уравнении δ , α и β определяются через коэффициенты a , b , c уравнения (2.387) с помощью соотношений (2.393), (2.403) и (2.410) соответственно. Параметр r , будучи решением уравнения (2.412), тоже определяется через эти коэффициенты.

Итак, подставляя (2.393), (2.403), (2.410) в (2.413), приводим это уравнение к виду:

$$\left(y^2 + \frac{a}{2} + r\right)^2 - \left[\sqrt{2r} \left(y - \frac{b}{4r}\right)\right]^2 = 0. \quad (2.414)$$

Разлагая полученную разность квадратов на произведение суммы и разности входящих в них выражений и приравнивая каждый из полученных сомножителей к нулю, получаем два уравнения:

$$y^2 + \frac{a}{2} + r + \sqrt{2r} \left(y - \frac{b}{4r}\right) = 0; \quad (2.415)$$

$$y^2 + \frac{a}{2} + r - \sqrt{2r} \left(y - \frac{b}{4r}\right) = 0. \quad (2.416)$$

Располагая по степеням y получаем:

$$y^2 + \sqrt{2r}y + \frac{a}{2} + r - \frac{b}{2\sqrt{2r}} = 0; \quad (2.417)$$

$$y^2 - \sqrt{2r}y + \frac{a}{2} + r + \frac{b}{2\sqrt{2r}} = 0. \quad (2.418)$$

Это — два квадратных уравнения относительно y при условии, что r уже определено из решения уравнения (2.412).

Каждое из этих уравнений имеет по два решения следующего вида:

$$y_{1,2} = -\frac{\sqrt{2r}}{2} \pm \sqrt{-\frac{r}{2} - \frac{a}{2} + \frac{b}{2\sqrt{2r}}}; \quad (2.419)$$

$$y_{3,4} = \frac{\sqrt{2r}}{2} \pm \sqrt{-\frac{r}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2\sqrt{2r}}}. \quad (2.420)$$

Таким образом, уравнение (2.387) имеет четыре решения, как это и должно быть для уравнения четвертой степени.

Из решений (2.419) и (2.420) в соответствии с формулой (2.386) получаются четыре решения исходного уравнения (2.378), имеющие вид:

$$x_{1,2} = -\frac{\sqrt{2r}}{2} \pm \sqrt{-\frac{r}{2} - \frac{a}{2} + \frac{b}{2\sqrt{2r}}} - \frac{a_1}{4a_0}; \quad (2.421)$$

$$x_{3,4} = \frac{\sqrt{2r}}{2} \pm \sqrt{-\frac{r}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2\sqrt{2r}}} - \frac{a_1}{4a_0}, \quad (2.422)$$

где r является решением уравнения (2.412), а коэффициенты a и b определяются формулами (2.388), (2.389).

Таким образом, при надлежащем выборе решения уравнения (2.412), исходное уравнение четвертой степени (2.378) имеет четыре решения, определяемые формулами (2.421), (2.422).

Замечание. Вообще говоря, разрешающее кубическое уравнение (2.412) для r имеет не одно, а три решения, так что каждое из них при подстановке в (2.417), (2.418) дает свою четверку решений для y , то есть всего может быть двенадцать решений, тогда как уравнение (2.387), будучи четвертого порядка, должно иметь всего четыре решения. В известной авторам настоящей монографии литературе подробная трактовка выбора требуемых четырех решений из получающихся двенадцати отсутствует. Так, в [210, стр. 202] утверждается, что достаточно найти лишь один из корней уравнения (2.412), а в [211, стр. 44] говорится, что для подстановки в (2.417), (2.418) годится произвольный корень уравнения (2.412). Авторы настоящей монографии не прослеживали достоверность этих утверждений досконально, однако при практических вычислениях рекомендуют проверять корректность полученных решений вида (2.419), (2.420) непосредственно путем подстановки в исходное уравнение (2.387).

Выводы по главе 2

Данная глава посвящена описанию основного математического аппарата, используемого при расчете свойств электромагнитных, в первую очередь магнитостатических волн, распространяющихся в магнитной среде. Главное внимание уделено получению дисперсионного соотношения на основе тензора магнитной проницаемости и соответствующих граничных условий.

Основные вопросы, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Отмечены два основных вида волн, распространяющихся в магнитной среде — электромагнитные, имеющие кроме магнитной заметную электрическую составляющую, и магнитостатические, в которых электрическая составляющая настолько мала, что ее можно считать отсутствующей. Распространение электромагнитных волн рассчитывается классическим способом в рамках полной электродинамики с учетом как магнитного, так и электрического поля, а для распространения магнитостатических волн достаточно приближения магнитостатики с учетом дипольного взаимодействия. В обоих случаях в формировании поля распространяющейся волны отмечена ведущая роль динамической магнитной проницаемости.

2. Относительно распространения волны рассмотрено различие и соотношение между постоянной и переменной во времени магнитной проницаемостью. Отмечено влияние диссипации на формирование закона дисперсии волн в магнитной среде. Для случая гиротропной среды рассмотрен общий вид тензора магнитной проницаемости, являющегося основой для описания свойств магнитостатических и электромагнитных волн в среде, обладающей гиромангнитными свойствами. Приведена классическая схема получения тензора магнитной проницаемости путем линеаризации уравнений движения для компонент намагниченности. Отмечены особенности, налагаемые на вид тензора конкретными свойствами гиромангнитной среды, в первую очередь анизотропией, размагничиванием и обменом.

3. Приведен вывод уравнения Уокера, являющегося аналогом уравнения Лапласа для магнитной среды, намагниченной постоянным полем. Получено уравнение Уокера в декартовой системе координат, одна из осей которой ориентирована вдоль направления постоянного поля. Представлен вид уравнения Уокера, выраженного через компоненты тензора магнитной проницаемости для гиротропной среды.

4. Выявлена роль граничных условий, определяющих дисперсионные свойства волны, распространяющейся в пространственно ограниченной магнитной среде. Отмечен общий характер граничных условий, требующих сохранения на границе касательной составляющей магнитного поля и нормальной компоненты магнитной индукции. Получены граничные условия в геометрии безграничной ферритовой пластины конечной толщины, намагниченной постоянным полем в ее плоскости.

Рассмотрена структура таких условий, содержащих компоненты тензора магнитной проницаемости для гиротропной среды.

5. Рассмотрены последовательные действия, требуемые для получения дисперсионного соотношения для волны, распространяющейся в касательно намагниченной пластине со свободными поверхностями (задача Дэймона–Эшбаха). Приведена полная формулировка задачи в трех областях — по обе стороны от пластины и внутри самой пластины. Записаны уравнения Лапласа для обеих областей вне пластины и уравнение Уокера внутри пластины, а также граничные условия на обеих поверхностях пластины. Установлено, что полная задача содержит три уравнения в частных производных второго порядка и четыре граничных условия. Во всех трех областях выполнено решение уравнений методом разделения переменных. Показано, что решение представляет собой сумму экспонент, коэффициенты при которых являются произвольными постоянными, причем в общем случае число независимых постоянных равно четырем. Подстановка полученных решений в граничные условия привела к системе из четырех линейных однородных алгебраических уравнений для четырех неизвестных постоянных. Из равенства нулю детерминанта такой системы получено дисперсионное соотношение для распространяющейся волны.

6. Для дисперсионного соотношения выполнен переход к полярной системе координат. Отмечена важность выражения дисперсионного соотношения в полярных координатах для задач, в которых направление распространения волны может меняться, в том числе при распространении волны в пластине, намагниченной неоднородным полем. Отмечена возможность разрешения дисперсионного соотношения относительно волнового числа.

7. Для полученного закона дисперсии рассмотрены частотные области существования объемных и поверхностных волн. Показано, что характер волны определяется действительным или мнимым значением поперечного по толщине пластины волнового числа, которое, в свою очередь, определяется величиной диагональной компоненты тензора магнитной проницаемости. По частоте установлены три области, различающиеся характером волны. В нижней области распространение волны невозможно, так как эта область лежит ниже частоты ферромагнитного резонанса в безграничной среде. В средней области, лежащей между частотой ферромагнитного резонанса в безграничной среде и частотой резонанса в касательно намагниченной пластине, распространяющиеся волны имеют объемный характер, а выше верхней частоты этой области волны являются поверхностными.

8. Отмечены некоторые вопросы, которые предполагается рассмотреть в настоящей монографии, в частности роль электрического поля волны, свойства волнового числа магнитостатических волн при достаточно больших его значениях, а также влияние динамического размагничивания волны и неоднородного обменного взаимодействия на закон дисперсии распространяющейся волны.

9. Рассмотрено дифференциальное уравнение второго порядка с двумя переменными, содержащее смешанную производную, частным случаем которого является Уокера. Отмечено, что смешанная производная возникает тогда, когда тензор магнитной восприимчивости относительно главной диагонали не является антисимметричным. Приведены два способа решения: первый — в предположении распространения волны вдоль одной из координат и второй — без такого предположения. Показано, что в обоих случаях решение сводится к рассмотрению квадратного уравнения относительно постоянной распространения (типа волнового числа) вдоль одной из координат. При этом полное решение вдоль одной из координат имеет характер периодической незатухающей распространяющейся волны типа волны Даламбера, а вдоль второй координаты имеет характер произведения периодической синусоиды на спадающую или нарастающую экспоненту.

10. В качестве математического дополнения рассмотрено аналитическое решение алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней, встречающихся в рамках настоящей монографии. Решение уравнений третьей степени рассмотрено в соответствии с методом Кардано. Приведена методика сведения полного уравнения третьей степени к укороченному уравнению, в котором вторая степень отсутствует. Получено решение такого уравнения в виде классической формулы Кардано. Приведен дискриминант укороченного уравнения и в зависимости от его знака описаны три возможных варианта получения окончательного решения, в том числе его тригонометрический вид. На основе решения укороченного уравнения получено решение исходного полного уравнения третьей степени. Решение уравнения четвертой степени рассмотрено в соответствии с методом Феррари. Приведена методика сведения полного уравнения четвертой степени к укороченному уравнению, в котором третья степень отсутствует. Путем введения вспомогательной переменной показана возможность представления укороченного уравнения в виде разности квадратов двух выражений, включающих вторую и первую степень основной переменной. Установлено, что необходимым условием такого представления является разрешение уравнения третьей степени для вспомогательной переменной, для чего может быть использован метод Кардано. Показано, что в этом случае исходное укороченное уравнение распадается на произведение двух квадратных уравнений, которые дают четыре возможных его решения. Показано, что на основе полученных четырех решений укороченного уравнения может быть получено решение исходного полного уравнения четвертой степени.

Глава 3

ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА ГИРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В ПЛАСТИНЕ ФЕРРИТА С ДИССИПАЦИЕЙ

Настоящая глава посвящена рассмотрению дисперсионных свойства электромагнитных волн, распространяющихся в касательно намагниченной ферритовой пластине, обладающей бигиротропными свойствами. Рассмотрение проведено в рамках полной электродинамики с учетом как магнитного, так и электрического полей. Получены уравнения, описывающие гиромагнитную и гирозлектрическую волны. Для гиромагнитной волны получено дисперсионное соотношение, по структуре подобное классическому соотношению Дэймона–Эшбаха. Определены области существования поверхностных и объемных волн. Получены дисперсионные кривые для случая среды, обладающей диссипацией.

Основной ход изложения следует [9, 10], а необходимые дополнительные ссылки указываются в тексте.

3.1. Общий характер гиромагнитной волны в магнитной среде

Обратимся сначала к рассмотрению общих положений о свойствах электромагнитных волн, распространяющихся в магнитной среде без диссипации. Предметом рассмотрения большинства работ, кратко упомянутых в разд. 1.6–1.8 настоящей монографии, являются относительно короткие магнитостатические волны, длина которых на несколько порядков меньше длины электромагнитных волн той же частоты. Для рассмотрения таких волн используется приближение магнитостатики без учета диэлектрических свойств среды [1, 2, 114–116]. Однако в работах [212–215] показана важность рассмотрения волн в магнитных средах на основе полных уравнений электродинамики, в том числе с учетом не только чисто магнитных, но и диэлектрических параметров. Такое рассмотрение становится особенно актуальным для оценки потоков энергии распространяющихся волн [213].

Сложность требуемого математического аппарата ограничивает подобное рассмотрение только гиромагнитными волнами, характер которых задается свойствами магнитной гиротропии среды. Такая гиромагнитная волна рассматривается в касательно намагниченной ферритовой пластине, причем направление распространения волны перпендикуляр-

но направлению постоянного поля. При этом поперечные относительно направления намагничивания компоненты переменного поля волны определяются продольной компонентой электрического поля той же волны [2, стр. 46–52].

В работах [212–216] для гирромагнитной волны рассмотрен диапазон частот, характерный именно для магнитостатического приближения, причем волна предполагается преимущественно поверхностной.

Рассмотрим далее дисперсионные свойства гирромагнитной волны во всем диапазоне частот от нуля до бесконечности с учетом как поверхностного, так и объемного характера распространения.

3.2. Уравнения электродинамики для безграничной бигиротропной среды

Гиротропную среду можно считать частным случаем бигиротропной, в которой не только магнитная, но и диэлектрическая проницаемости имеют тензорный гиротропный характер. Более подробно вопрос о взаимном соотношении параметров бигиротропных сред обсуждается в [40–42]. Так, в работе [42, стр. 107] отмечено, что антисимметричные компоненты тензоров магнитной и диэлектрической проницаемостей могут иметь одинаковый порядок для ферритов в инфракрасном диапазоне, а для сильно проводящих ферромагнитных полупроводников – и в диапазоне СВЧ. Здесь же ограничимся принятой в этих работах трактовкой тензорного характера бигиротропной среды.

Сначала рассмотрим общие уравнения, описывающие распространение электромагнитных волн в безграничной бигиротропной среде. Итак, согласно [40–42], а также [2, стр. 47], электродинамические свойства бигиротропной среды можно описать двумя тензорами: диэлектрической и магнитной проницаемости, каждый из которых имеет гиротропный характер. В случае совпадения направлений осей гиротропии обоих тензоров, их можно записать в следующем виде:

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & i\varepsilon_a & 0 \\ -i\varepsilon_a & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{||} \end{pmatrix}; \quad (3.1)$$

$$\overleftrightarrow{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{||} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

В общем случае в декартовой системе координат электрическое и магнитное поля имеют вид:

$$\mathbf{E} = \{E_x, E_y, E_z\}; \quad (3.3)$$

$$\mathbf{H} = \{H_x, H_y, H_z\}. \quad (3.4)$$

С помощью (3.1) и (3.2) найдем электрическую и магнитную индукции:

$$\mathbf{D} = \overleftrightarrow{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon & i\varepsilon_a & 0 \\ -i\varepsilon_a & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \varepsilon E_x + i\varepsilon_a E_y \\ -i\varepsilon_a E_x + \varepsilon E_y \\ \varepsilon_{\parallel} E_z \end{pmatrix}; \quad (3.5)$$

$$\mathbf{B} = \overleftrightarrow{\mu} \cdot \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mu H_x + i\mu_a H_y \\ -i\mu_a H_x + \mu H_y \\ \mu_{\parallel} H_z \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Далее будут необходимы составляющие индукции в записи по компонентам:

$$D_x = \varepsilon E_x + i\varepsilon_a E_y; \quad (3.7)$$

$$D_y = -i\varepsilon_a E_x + \varepsilon E_y; \quad (3.8)$$

$$D_z = \varepsilon_{\parallel} E_z; \quad (3.9)$$

$$B_x = \mu H_x + i\mu_a H_y; \quad (3.10)$$

$$B_y = -i\mu_a H_x + \mu H_y; \quad (3.11)$$

$$B_z = \mu_{\parallel} H_z. \quad (3.12)$$

Общие уравнения электродинамики в системе СГС (Гаусса) имеют вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad (3.13)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (3.14)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0; \quad (3.15)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (3.16)$$

где c — скорость света в свободном пространстве.

Векторные функции, входящие в эти уравнения, имеют вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right); \quad (3.17)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (3.18)$$

Предполагаем зависимость от времени в виде $e^{i\omega t}$, то есть оператор дифференцирования по времени имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega. \quad (3.19)$$

Введем также вспомогательное обозначение:

$$k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad (3.20)$$

где k_0 — волновое число электромагнитной волны частоты ω в свободном пространстве.

Подставляя поля (3.3)–(3.4) и индукции (3.7)–(3.12) в уравнения электродинамики (3.13)–(3.16) с учетом (3.19)–(3.20), после чего выделяя компоненты векторных функций (3.17) и (3.18), получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + ik_0\mu H_x - k_0\mu_a H_y = 0; \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + k_0\mu_a H_x + ik_0\mu H_y = 0; \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + ik_0\mu_{||} H_z = 0; \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - ik_0\varepsilon E_x + k_0\varepsilon_a E_y = 0; \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - k_0\varepsilon_a E_x - ik_0\varepsilon E_y = 0; \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - ik_0\varepsilon_{||} E_z = 0; \quad (3.26)$$

$$\mu \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) + i\mu_a \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + \mu_{||} \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0; \quad (3.27)$$

$$\varepsilon \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) + i\varepsilon_a \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + \varepsilon_{||} \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (3.28)$$

Замечание. Это — система из восьми уравнений для шести компонент полей и для трех производных от каждой компоненты по трем координатам, то есть всего для восемнадцати производных. То есть решение должно представлять собой шесть значений пространственных частот (по одной для каждой компоненты поля) и восемнадцать произвольных постоянных (по одной для каждой производной). Эти постоянные должны определяться из каких-то граничных условий. Поскольку на одной поверхности могут быть заданы шесть граничных условий — для двух касательных компонент (для поля) и одной нормальной (для индукции) при том и другом сочетании полей, а пространство содержит три взаимно перпендикулярных плоскости, то эти три плоскости могут дать восемнадцать условий для определения восемнадцати произвольных постоянных. То есть в общем случае система может быть полностью определенной.

Исключим из системы (3.21)–(3.28) все поля, кроме E_z и H_z . Для этого проделаем следующий ряд вспомогательных преобразований.

Дифференцируем (3.21) по y :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial z} + ik_0 \mu \frac{\partial H_x}{\partial y} - k_0 \mu_a \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0. \quad (3.29)$$

Дифференцируем (3.22) по x :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + k_0 \mu_a \frac{\partial H_x}{\partial x} + ik_0 \mu \frac{\partial H_y}{\partial y} x = 0. \quad (3.30)$$

Вычитаем (3.30) из (3.29):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) + \\ + ik_0 \mu \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) - k_0 \mu_a \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Исключим из этого уравнения все круглые скобки с помощью (3.23), (3.26)–(3.28).

Так, из (3.28) получаем:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = -i \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) - \frac{\varepsilon_{||}}{\varepsilon} \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (3.32)$$

Входящую в это выражение круглую скобку находим из (3.23)

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -ik_0 \mu_{||} H_z. \quad (3.33)$$

Подставляя (3.33) в (3.32), находим первую круглую скобку выражения (3.31):

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{k_0 \varepsilon_a \mu_{||}}{\varepsilon} H_z - \frac{\varepsilon_{||}}{\varepsilon} \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (3.34)$$

Вторую круглую скобку выражения (3.31) находим из (3.26):

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = ik_0 \varepsilon_{||} E_z. \quad (3.35)$$

Третью круглую скобку выражения (3.31) находим из (3.27):

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = -i \frac{\mu_a}{\mu} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) - \frac{\mu_{||}}{\mu} \frac{\partial H_z}{\partial z}. \quad (3.36)$$

Круглую скобку в этом выражении находим из (3.26). Это выражение уже получено — (3.35). Подставляя (3.35) в (3.36), получаем:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = \frac{k_0 \varepsilon_{||} \mu_a}{\mu} E_z - \frac{\mu_{||}}{\mu} \frac{\partial H_z}{\partial z}. \quad (3.37)$$

Теперь все три круглые скобки в выражении (3.31) найдены. Это — выражения (3.34), (3.35) и (3.37). Подставляя их в выражение (3.31), получаем:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \frac{\varepsilon_{||}}{\varepsilon} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon_{||} \left(\mu - \frac{\mu_a^2}{\mu} \right) E_z + k_0 \mu_{||} \left(\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon} + \frac{\mu_a}{\mu} \right) \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0. \quad (3.38)$$

Это — основное уравнение, которое требовалось получить. В него входят только компоненты полей E_z и H_z .

Аналогичное уравнение можно получить из тех же уравнений (3.21)–(3.28), беря за исходные не (3.21) и (3.22), а (3.26) и (3.27). При этом получаем:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\mu_{||}}{\mu} \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k_0^2 \mu_{||} \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon_a^2}{\varepsilon} \right) H_z - k_0 \varepsilon_{||} \left(\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon} + \frac{\mu_a}{\mu} \right) \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (3.39)$$

Уравнения (3.38) и (3.39) составляют систему двух уравнений для E_z и H_z . Их можно удобно записать с помощью обозначений, подобных принятым в монографии [40, стр. 146–148]:

$$a_e = \frac{\varepsilon_{||}}{\varepsilon}; \quad (3.40)$$

$$b_e = k_0^2 \varepsilon_{||} \cdot \frac{\mu^2 - \mu_a^2}{\mu}; \quad (3.41)$$

$$c_e = k_0 \mu_{||} \cdot \left(\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon} + \frac{\mu_a}{\mu} \right); \quad (3.42)$$

$$a_m = \frac{\mu_{||}}{\mu}; \quad (3.43)$$

$$b_m = k_0^2 \mu_{||} \cdot \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_a^2}{\varepsilon}; \quad (3.44)$$

$$c_m = k_0 \varepsilon_{||} \cdot \left(\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon} + \frac{\mu_a}{\mu} \right). \quad (3.45)$$

С этими обозначениями уравнения (3.38), (3.39) принимают вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_e \frac{\partial^2}{\partial z^2} + b_e \right) E_z + c_e \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0; \quad (3.46)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_m \frac{\partial^2}{\partial z^2} + b_m \right) H_z - c_m \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (3.47)$$

Можно видеть, что полученные здесь уравнения (3.46) и (3.47), каждое, как то, так и другое, являются полевыми аналогами используемых в задаче Дэймона–Эшбаха [1, 2, 114] уравнений Лапласа и Уокера для потенциалов. Так, уравнение типа Лапласа получается,

если положить $\varepsilon_a = \mu_a = 0$ и $\varepsilon = \varepsilon_{||} = \mu = \mu_{||} = 1$. Уравнение типа Уокера получается, если учесть отличие от нуля μ_a или ε_a . Полная аналогия получается, если дополнительно положить $k_0 \rightarrow 0$, как того требует приближение магнитостатики. Так что далее уравнения (3.46) и (3.47) в случае решения для полной электродинамики играют ту же роль, что в магнитостатике играют уравнения Лапласа и Уокера.

Замечание. Вообще говоря, из двух уравнений (3.46) и (3.47) можно исключить одно из полей E_z или H_z , в результате чего получится одно уравнение четвертого порядка для одного из полей. Аналогичным образом можно получить подобное уравнение четвертого порядка для другого из полей. Однако предварительная проверка показывает, что получающиеся уравнения являются чрезвычайно громоздкими и содержат перекрестные (смешанные) производные по различным координатным переменным. Поэтому здесь пока этого делать не будем, а ограничимся далее случаем отсутствия зависимости полей от координаты z , что позволит выделить по отдельности гиромагнитную и гирозлектрическую волны, а также перейти к полевому аналогу задачи типа Дэймона–Эшбаха для волны, распространяющейся вдоль оси Oy .

3.3. Гиромагнитная и гирозлектрическая волны

Итак, имеется система связанных уравнений (3.46)–(3.47). Предположим, что распределение полей от координаты z не зависит. То есть в уравнениях (3.46), (3.47) положим:

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow 0. \quad (3.48)$$

При этом получаем:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + b_e \right) E_z = 0; \quad (3.49)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + b_m \right) H_z = 0, \quad (3.50)$$

где b_e и b_m определяются формулами (3.41) и (3.44).

Эти уравнения не связаны, каждое из них описывает отдельную волну, то есть эти волны могут распространяться независимо. Следуя традиции [2, стр. 49], назовем волну, описываемую первым уравнением — «гиромагнитной», а вторым — «гирозлектрической».

Главным отличительным свойством гиромагнитной волны является полное определение компонент ее магнитного поля H_x и H_y через задание электрического поля, направленного вдоль оси Oz , то есть E_z , а для гирозлектрической — полное определение компонент ее электрического поля E_x и E_y через задание компоненты магнитного поля вдоль оси Oz , то есть H_z . Подробный расчет этих полей приведен далее: формулы (3.61), (3.62), а также (3.68), (3.69).

Замечание. Из сравнения формул (3.49), (3.50) с приведенными в [2, стр. 49] формулами (2.173)–(2.178) можно видеть, что структура тех и других несколько различается. Так, в формулах (2.173)–(2.175) кроме поля E_z , присутствуют также поля H_x и H_y , а в формулах (2.176)–(2.178) кроме поля H_z присутствуют поля E_x и E_y . Такое различие обусловлено тем, что в [2] вместо одного уравнения (3.49) для описания гиромагнитной волны используются три уравнения (2.173)–(2.175), а вместо одного уравнения (3.50) для описания гироэлектрической волны используются три уравнения (2.176)–(2.178). При этом тройка уравнений (2.176)–(2.187) содержит в левых частях две компоненты полей H_x и H_y , которые здесь исключены в ходе преобразований (3.29)–(3.28), приводя к уравнению (3.46), которое в предположении (3.48) как раз дает (3.49). Аналогичная процедура исключения полей E_x и E_y из приведенной в [2] системы (2.176)–(2.178), дает уравнение (3.50). Еще раз вопрос о соотношении полей в обеих приведенных трактовках отмечен в замечании в конце разд. 3.4.

Для решения задачи типа Дэймона–Эшбаха надо найти решения уравнений (3.49), (3.50) и поля, которые затем подставляются в граничные условия.

Общий вид решения следующий:

$$e^{i(\omega t - \mathbf{kr})} = e^{i\omega t} \cdot e^{-ik_x x} \cdot e^{-ik_y y}. \quad (3.51)$$

В уравнениях (3.49) и (3.50) зависимость от времени уже учтена: она входит в b_e и b_m через $k_0 = \omega/c$.

Подставим (3.51) (без $e^{i\omega t}$) в (3.49) и (3.50). Из (3.49), получаем:

$$-k_x^2 - k_y^2 + b_e = 0, \quad (3.52)$$

откуда, вводя обозначение $k_y \rightarrow k_m$, получаем:

$$(k_x)_m = \sqrt{-k_m^2 + b_e}. \quad (3.53)$$

Аналогично из (3.50), получаем:

$$-k_x^2 - k_y^2 + b_m = 0, \quad (3.54)$$

откуда, вводя обозначение $k_y \rightarrow k_e$, получаем:

$$(k_x)_e = \sqrt{-k_e^2 + b_m}. \quad (3.55)$$

Требуемые для задачи типа Дэймона–Эшбаха поля можно найти из уравнений для ротора (3.13) и (3.14). При этом из них получаются уравнения (3.21)–(3.26). При отсутствии зависимости от координаты z , то есть при выполнении условия (3.48), из (3.21)–(3.26) получаются две независимые системы уравнений. Из (3.49) видно, что решение

для гиромагнитной волны сводится к нахождению поля E_z . Аналогично из (3.50) видно, что решение для giroэлектрической волны определяются заданием поля H_z . Рассмотрим эти системы по отдельности.

Первая система — ГИРОМАГНИТНАЯ. Задано E_z , определяются H_x и H_y . Из (3.21), (3.22) и (3.26) получаем систему:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -ik_0(\mu H_x + i\mu_a H_y); \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = -ik_0(i\mu_a H_x - \mu H_y); \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = ik_0\varepsilon_{||} E_z. \quad (3.58)$$

Запишем (3.56) и (3.57) в виде:

$$-ik_0\mu H_x + k_0\mu_a H_y = \frac{\partial E_z}{\partial y}; \quad (3.59)$$

$$k_0\mu_a H_x + ik_0\mu H_y = \frac{\partial E_z}{\partial x}. \quad (3.60)$$

Это — система двух алгебраических уравнений для двух неизвестных H_x и H_y . Решая ее, находим:

$$H_x = -\frac{\mu_a}{k_0(\mu^2 - \mu_a^2)} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{i\mu}{k_0(\mu^2 - \mu_a^2)} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y}; \quad (3.61)$$

$$H_y = -\frac{i\mu}{k_0(\mu^2 - \mu_a^2)} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\mu_a}{k_0(\mu^2 - \mu_a^2)} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y}. \quad (3.62)$$

При этом третье уравнение (3.58) удовлетворяется тождественно, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой в него выражений (3.61) и (3.62).

Вторая система — ГИРОЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ. Задано H_z , определяются E_x и E_y . Из (3.23), (3.24) и (3.25) получаем систему:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -ik_0\mu_{||} H_z; \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = ik_0(\varepsilon E_x + i\varepsilon_a E_y); \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = ik_0(i\varepsilon_a E_x - \varepsilon E_y). \quad (3.65)$$

Запишем (3.64) и (3.65) в виде:

$$ik_0\varepsilon E_x - k_0\varepsilon_a E_y = \frac{\partial H_z}{\partial y}; \quad (3.66)$$

$$-k_0\varepsilon_a E_x - i\varepsilon E_y = \frac{\partial H_z}{\partial x}. \quad (3.67)$$

Это — система двух алгебраических уравнений для двух неизвестных E_x и E_y . Решая ее, находим:

$$E_x = \frac{\varepsilon_a}{k_0(\varepsilon^2 - \varepsilon_a^2)} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{i\varepsilon}{k_0(\varepsilon^2 - \varepsilon_a^2)} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y}; \quad (3.68)$$

$$E_y = \frac{i\varepsilon}{k_0(\varepsilon^2 - \varepsilon_a^2)} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\varepsilon_a}{k_0(\varepsilon^2 - \varepsilon_a^2)} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y}. \quad (3.69)$$

При этом первое уравнение (3.63) удовлетворяется тождественно, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой в него выражений (3.68) и (3.69).

Введем обозначения:

$$g_m = \frac{1}{k_0(\mu^2 - \mu_a^2)}; \quad (3.70)$$

$$g_e = \frac{1}{k_0(\varepsilon^2 - \varepsilon_a^2)}. \quad (3.71)$$

В этих обозначениях поля (3.61), (3.62) и (3.68), (3.69) для обоих типов волн принимают следующий вид.

Поля гиромагнитной волны при заданном поле E_z :

$$H_x = g_m \left(-\mu_a \frac{\partial E_z}{\partial x} + i\mu \frac{\partial E_z}{\partial y} \right); \quad (3.72)$$

$$H_y = g_m \left(-i\mu \frac{\partial E_z}{\partial x} - \mu_a \frac{\partial E_z}{\partial y} \right). \quad (3.73)$$

При этом $E_x = E_y = H_z = 0$.

Поля гиروهлектрической волны при заданном поле H_z :

$$E_x = g_e \left(\varepsilon_a \frac{\partial H_z}{\partial x} - i\varepsilon \frac{\partial H_z}{\partial y} \right); \quad (3.74)$$

$$E_y = g_e \left(i\varepsilon \frac{\partial H_z}{\partial x} + \varepsilon_a \frac{\partial H_z}{\partial y} \right). \quad (3.75)$$

При этом $H_x = H_y = E_z = 0$.

Замечание. До этого места настоящей работы гиромагнитная и гиروهлектрическая волны рассматривались наравне друг с другом, так что не отдавалось предпочтения той или другой. Однако следует отметить, что в технике сверхвысоких частот [109–113, 217] в качестве волноведущей среды для устройств обработки информации главную роль играют ферриты, где волна имеет преимущественно гиромагнитный характер. Поэтому дальнейшее рассмотрение посвящено свойствам именно гиромагнитной волны.

3.4. Поля гиромагнитной волны

Определим полный набор полей для гиромагнитной волны. Так, полное решение волнового уравнения (3.49) имеет вид:

$$E_z = (Ae^{-ik_x x} + Be^{ik_x x})e^{-ik_y y}. \quad (3.76)$$

Находим производные $\partial E_z/\partial x$ и $\partial E_z/\partial y$. Подставляя (3.76) в (3.72), (3.73), с учетом равенства нулю остальных полей, получаем полный набор полей гиромангнитной волны в виде:

$$E_x = 0; \quad (3.77)$$

$$E_y = 0; \quad (3.78)$$

$$E_z = (Ae^{-ik_x x} + Be^{ik_x x})e^{-ik_y y}; \quad (3.79)$$

$$H_x = (A\nu_a e^{-ik_x x} + B\nu_b e^{ik_x x})e^{-ik_y y}; \quad (3.80)$$

$$H_y = (A\eta_a e^{-ik_x x} + B\eta_b e^{ik_x x})e^{-ik_y y}; \quad (3.81)$$

$$H_z = 0, \quad (3.82)$$

где введены обозначения:

$$\nu_a = g_m (ik_x \mu_a + k_y \mu); \quad (3.83)$$

$$\nu_b = g_m (-ik_x \mu_a + k_y \mu); \quad (3.84)$$

$$\eta_a = g_m (-k_x \mu + ik_y \mu_a); \quad (3.85)$$

$$\eta_b = g_m (k_x \mu + ik_y \mu_a), \quad (3.86)$$

а g_m определяется формулой (3.70).

Замечание. Из сравнения полученного решения с приведенным в [2, стр. 50] можно видеть, что формулы (3.80), (3.81) с точностью до обозначений и с учетом системы СГС вместо СИ, переходят в приведенные там формулы (2.186), (2.187) при условии учета только первого слагаемого в формуле (3.76). Такое совпадение происходит из-за того, что в обоих случаях рассматривается гиромангнитная волна в одной и той же геометрии. Отличие состоит в том, что здесь учитываются оба слагаемых выражения (3.76), так что приведенное здесь решение является более полным и дает возможность получить оба решения для волн, распространяющихся во встречных направлениях в рассматриваемой далее задаче Дэймона–Эшбаха.

3.5. Гиромангнитная волна в ферритовой пластине

Рассмотрим теперь гиромангнитную волну в ограниченной среде, а именно — в касательно намагниченной ферритовой пластине.

3.5.1. Общая геометрия задачи

Будем решать задачу в той же геометрии, что и классическая задача Дэймона–Эшбаха. Основу геометрии составляет пластина толщины d , намагниченная в плоскости полем \mathbf{H} . Введена декартова система координат $Oxyz$, такая, что плоскость Oxy совпадает с плоскостью пластины, а ось Ox ей перпендикулярна. Поле направлено вдоль оси Oz , волна, имеющая волновой вектор \mathbf{k} , распространяется вдоль оси Oy . На первом этапе не будем связывать себя требованием ограниченно-

сти пластины по координате x , что в первую очередь свойственно классической задаче Дэймона–Эшбаха [1, 2, 114], геометрия которой будет рассмотрена далее. Сначала обратимся к более общему случаю распространения электромагнитной волны в бигиротропной среде, безграничной по всем направлениям.

3.5.2. Поля гиромагнитной волны в принятой геометрии

Рассмотрим теперь поля гиромагнитной волны в геометрии, приведенной на рис. 3.1, аналогичной принятой в классической задаче Дэймона–Эшбаха [1, 2, 114]. Отличие от геометрии предыдущих разделов состоит в разграничении всего пространства двумя плоскостями, совпадающими с верхней и нижней поверхностями магнитной пластины. Получившиеся три области пронумерованы как №№ 1, 2, 3. Ограничимся распространением волны только в направлении, перпендикулярном постоянному полю, то есть вдоль оси Oy .

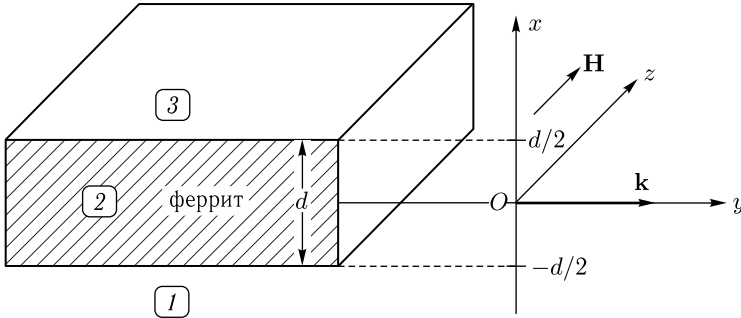


Рис. 3.1. Геометрия задачи Дэймона–Эшбаха [1, 2, 114] (подобна приведенной на рис. 2.1 при $\varphi = 0$ и $\psi = 0$)

В соответствии с формулой (3.76), определяющей поля по координате x , исходя из условия их ограниченности на бесконечности, а также полагая $k_x > 0$, получаем, что в области 1 следует зависимость от координаты x брать в виде $e^{-ik_x x}$, а в области 3 — в виде $e^{ik_x x}$.

С учетом этого обстоятельства запишем поля во всех трех областях.

ОБЛАСТЬ № 1 — интервал изменения координаты x : $-\infty \leq x \leq -\frac{d}{2}$.

Поля имеют вид:

$$E_x^{(1)} = 0; \quad (3.87)$$

$$E_y^{(1)} = 0; \quad (3.88)$$

$$E_z^{(1)} = A e^{-ik_x x} e^{-ik_y y}; \quad (3.89)$$

$$H_x^{(1)} = A \nu_a^{(1)} e^{-ik_x x} e^{-ik_y y}; \quad (3.90)$$

$$H_y^{(1)} = A \eta_a^{(1)} e^{-ik_x x} e^{-ik_y y}; \quad (3.91)$$

$$H_z^{(1)} = 0. \quad (3.92)$$

При этом:

$$g_m^{(1)} = \frac{1}{k_0}; \quad (3.93)$$

$$\nu_a^{(1)} = \frac{k_y}{k_0}; \quad (3.94)$$

$$\nu_b^{(1)} = \frac{k_y}{k_0}; \quad (3.95)$$

$$\eta_a^{(1)} = -\frac{k_x^e}{k_0}; \quad (3.96)$$

$$\eta_b^{(1)} = \frac{k_x^e}{k_0}. \quad (3.97)$$

ОБЛАСТЬ №2 — интервал изменения координаты x : $-\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2}$.

Поля имеют вид:

$$E_x^{(2)} = 0; \quad (3.98)$$

$$E_y^{(2)} = 0; \quad (3.99)$$

$$E_z^{(2)} = (A_2 e^{-ik_x^i x} + B_2 e^{ik_x^i x}) e^{-ik_y y}; \quad (3.100)$$

$$H_x^{(2)} = (A_2 \nu_a^{(2)} e^{-ik_x^i x} + B_2 \nu_b^{(2)} e^{ik_x^i x}) e^{-ik_y y}; \quad (3.101)$$

$$H_y^{(2)} = (A_2 \eta_a^{(2)} e^{-ik_x^i x} + B_2 \eta_b^{(2)} e^{ik_x^i x}) e^{-ik_y y}; \quad (3.102)$$

$$H_z^{(2)} = 0. \quad (3.103)$$

При этом:

$$g_m^{(2)} = \frac{1}{k_0(\mu^2 - \mu_a^2)}; \quad (3.104)$$

$$\nu_a^{(2)} = g_m^{(2)} (ik_x^i \mu_a + k_y \mu); \quad (3.105)$$

$$\nu_b^{(2)} = g_m^{(2)} (-ik_x^i \mu_a + k_y \mu); \quad (3.106)$$

$$\eta_a^{(2)} = g_m^{(2)} (-k_x^i \mu + ik_y \mu_a); \quad (3.107)$$

$$\eta_b^{(2)} = g_m^{(2)} (k_x^i \mu + ik_y \mu_a). \quad (3.108)$$

ОБЛАСТЬ №3 — интервал изменения координаты x : $\frac{d}{2} \leq x \leq +\infty$.

Поля имеют вид:

$$E_x^{(3)} = 0; \quad (3.109)$$

$$E_y^{(3)} = 0; \quad (3.110)$$

$$E_z^{(3)} = B \cdot e^{ik_x^e x} \cdot e^{-ik_y y}; \quad (3.111)$$

$$H_x^{(3)} = B \cdot \nu_b^{(3)} e^{ik_x^e x} \cdot e^{-ik_y y}; \quad (3.112)$$

$$H_y^{(3)} = B \cdot \eta_b^{(3)} e^{ik_x^e x} \cdot e^{-ik_y y}; \quad (3.113)$$

$$H_z^{(3)} = 0. \quad (3.114)$$

При этом:

$$g_m^{(3)} = \frac{1}{k_0}; \quad (3.115)$$

$$\nu_a^{(3)} = \frac{k_y}{k_0}; \quad (3.116)$$

$$\nu_b^{(3)} = \frac{k_y}{k_0}; \quad (3.117)$$

$$\eta_a^{(3)} = -\frac{k_x^e}{k_0}; \quad (3.118)$$

$$\eta_b^{(3)} = \frac{k_x^e}{k_0}. \quad (3.119)$$

3.5.3. Граничные условия

Граничные условия требуют непрерывности при $x = \pm d/2$ касательных составляющих полей E_z и H_y , в соответствии с (3.87)–(3.119), а также нормальной составляющей индукции B_x , определяемой формулой (3.10):

$$B_x = \mu H_x + i\mu_a H_y. \quad (3.120)$$

Исходя из таких требований, получаем граничные условия на поверхностях раздела областей 1 и 2, а также 2 и 3, в следующем виде:

$$E_z^{(1)}|_{x=-d/2} = E_z^{(2)}|_{x=-d/2}; \quad (3.121)$$

$$H_x^{(1)}|_{x=-d/2} = \mu H_x^{(2)} + i\mu_a H_y^{(2)}|_{x=-d/2}; \quad (3.122)$$

$$H_y^{(1)}|_{x=-d/2} = H_y^{(2)}|_{x=-d/2}; \quad (3.123)$$

$$E_z^{(2)}|_{x=d/2} = E_z^{(3)}|_{x=d/2}; \quad (3.124)$$

$$\mu H_x^{(2)} + i\mu_a H_y^{(2)}|_{x=d/2} = H_x^{(3)}|_{x=d/2}; \quad (3.125)$$

$$H_y^{(2)}|_{x=-d/2} = H_y^{(3)}|_{x=d/2}. \quad (3.126)$$

3.5.4. Дисперсионное соотношение в общем виде

Так как рассматривается гиромагнитная волна, то в граничные условия надо подставлять только те компоненты полей, которые отличны от нуля.

Подставляя решение (3.87)–(3.119) в граничные условия (3.121)–(3.126) и разделяя на общий множитель $e^{-ik_y y}$, получаем: из (3.121):

$$Ae^{i\delta} = A_2 e^{i\beta} + B_2 e^{-i\beta}; \quad (3.127)$$

из (3.122):

$$Ae^{i\delta} = A_2 e^{i\beta} + B_2 e^{-i\beta}; \quad (3.128)$$

из (3.123):

$$-A \frac{k_x^e}{k_0} e^{i\delta} = -A_2 i g_m \varepsilon_2 e^{i\beta} - B_2 i g_m \varepsilon_1 e^{-i\beta}; \quad (3.129)$$

из (3.124):

$$A_2 e^{-i\beta} + B_2 e^{i\beta} = B e^{i\delta}; \quad (3.130)$$

из (3.125):

$$A_2 e^{-i\beta} + B_2 e^{i\beta} = B e^{i\delta}; \quad (3.131)$$

из (3.126):

$$-A_2 i g_m \varepsilon_2 e^{-i\beta} - B_2 i g_m \varepsilon_1 e^{i\beta} = B \frac{k_x^e}{k_0} e^{i\delta}, \quad (3.132)$$

где введены обозначения:

$$\beta = \frac{k_x^i d}{2}; \quad (3.133)$$

$$\delta = \frac{k_x^e d}{2}. \quad (3.134)$$

При получении уравнений (3.127)–(3.132) использовались значения $\nu_{a,b}$ и $\eta_{a,b}$ в раскрытом виде (3.94)–(3.97), (3.105)–(3.108), (3.116)–(3.119).

Для $\varepsilon_{1,2}$ введены обозначения:

$$\varepsilon_1 = i k_x^i \mu - k_y \mu_a; \quad (3.135)$$

$$\varepsilon_2 = -i k_x^i \mu - k_y \mu_a; \quad (3.136)$$

Также у параметра $g_m^{(2)}$ опущен верхний индекс «2», так что величина g_m в этих уравнениях определяется формулой (3.104):

$$g_m = \frac{1}{k_0(\mu^2 - \mu_a^2)}. \quad (3.137)$$

Введем новые обозначения:

$$\eta_1 = \frac{-k_x^i \mu - i k_y \mu_a}{\mu^2 - \mu_a^2}; \quad (3.138)$$

$$\eta_2 = \frac{k_x^i \mu - i k_y \mu_a}{\mu^2 - \mu_a^2}. \quad (3.139)$$

С использованием этих обозначений получаем:

$$i g_m \varepsilon_1 = \frac{\eta_1}{k_0}; \quad (3.140)$$

$$i g_m \varepsilon_2 = \frac{\eta_2}{k_0}. \quad (3.141)$$

Введение этих обозначений позволяет освободиться от записи дробей в формулах (3.129) и (3.132).

Уравнения (3.127) и (3.128) совпадают, уравнения (3.130) и (3.131) также совпадают, поэтому из шести уравнений (3.127)–(3.132) оста-

ются только четыре. В результате система (3.127)–(3.132) сводится к следующей:

$$B_2\eta_1 e^{-i\beta} + A_2\eta_2 e^{i\beta} - Ak_x^e e^{i\delta} = 0; \quad (3.142)$$

$$B_2\eta_1 e^{i\beta} + A_2\eta_2 e^{-i\beta} + Bk_x^e e^{i\delta} = 0; \quad (3.143)$$

$$B_2 e^{-i\beta} + A_2 e^{i\beta} - Ae^{i\delta} = 0; \quad (3.144)$$

$$B_2 e^{i\beta} + A_2 e^{-i\beta} - Be^{i\delta} = 0. \quad (3.145)$$

Эта система уравнений по структуре совпадает с подобной системой, получаемой при решении классической задачи Дэймона–Эшбаха в приближении магнитостатики, имеющей вид [1, стр. 64, форм. (2.271)–(2.274)]:

$$A_2 \cdot \varepsilon_1 e^{-i\rho} + B_2 \cdot \varepsilon_2 e^{i\rho} - A \cdot k_x^e e^{-\delta} = 0; \quad (3.146)$$

$$A_2 \cdot \varepsilon_1 e^{i\rho} + B_2 \cdot \varepsilon_2 e^{-i\rho} + B \cdot k_x^e e^{-\delta} = 0; \quad (3.147)$$

$$A_2 \cdot e^{-i\rho} + B_2 \cdot e^{i\rho} - A \cdot e^{-\delta} = 0; \quad (3.148)$$

$$A_2 \cdot e^{i\rho} + B_2 \cdot e^{-i\rho} - B \cdot e^{-\delta} = 0. \quad (3.149)$$

По сравнению с классической системой здесь присутствуют замены $\varepsilon_{1,2}$ на $\eta_{1,2}$, а также $-\delta$ на $i\delta$. Замены ρ на β , а также A_2 на B_2 и B_2 на A_2 принципиальной важности не имеют, так как сводятся к обозначениям. Замена $-\delta$ на $i\delta$ дисперсионного соотношения не меняет, так как это — общий множитель 3 и 4 столбцов определителя системы, который выносится за знак определителя, то есть при приравнении определителя к нулю, пропадает.

Таким образом, определитель системы (3.142)–(3.145) имеет вид:

$$D_0 = e^{2i\delta} \cdot \begin{vmatrix} \eta_1 e^{-i\beta} & \eta_2 e^{i\beta} & -k_x^e & 0 \\ \eta_1 e^{i\beta} & \eta_2 e^{-i\beta} & 0 & k_x^e \\ e^{-i\beta} & e^{i\beta} & -1 & 0 \\ e^{i\beta} & e^{-i\beta} & 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (3.150)$$

Равенство нулю этого определителя дает дисперсионное соотношение:

$$\frac{e^{2i\beta} - e^{-2i\beta}}{e^{2i\beta} + e^{-2i\beta}} = \frac{k_x^e (\eta_2 - \eta_1)}{(k_x^e)^2 - \eta_1 \eta_2}. \quad (3.151)$$

Можно видеть, что по структуре это дисперсионное соотношение аналогично подобному соотношению в классической задаче Дэймона–Эшбаха [1, стр. 65, форм. (2.279)]. То есть здесь имеет место структурное соответствие базовому соотношению (2.207), приведенному в разделе 2.5.3.

Замечание. Следует заметить, что здесь k_x^e , несмотря на сходство обозначений, имеет не тот физический смысл, что в классической задаче

Дэймона–Эшбаха (2.279), а отличается на i , так как зависимость от x в классической задаче Дэймона–Эшбаха имеет вид $e^{k_x^e x}$, а здесь: $e^{-ik_x^e x}$. Поэтому k_x^e здесь соответствует ik_x^e задачи Дэймона–Эшбаха. По той же причине A_2 и B_2 меняются местами. Соотношения между этими параметрами можно более подробно проследить из сравнения приведенной здесь формулы (3.76) с формулами (2.161)–(2.163), соответствующими приведенным в работе [1, стр.60] формулам (2.223)–(2.225).

3.5.5. Дисперсионное соотношение, выраженное через волновое число вдоль направления распространения волны

В предыдущем разделе получено дисперсионное соотношение (3.151), по форме подобное таковому в задаче Дэймона–Эшбаха. Однако входящие в него промежуточные выражения зависят от волнового числа k (где $k \rightarrow k_y$), определяющего распространение волны вдоль оси Oy , неявным образом — через посредство волновых чисел k_x^e и k_x^i , входящих в параметры β , η_1 , η_2 . Поэтому главная задача настоящего раздела — освободить дисперсионное соотношение от вспомогательных волновых чисел k_x^e и k_x^i , чтобы оно определялось только единственным волновым числом k , соответствующим распространению волны вдоль оси Oy .

Будем исходить из дисперсионного соотношения (3.151), имеющего вид:

$$\frac{e^{2i\beta} - e^{-2i\beta}}{e^{2i\beta} + e^{-2i\beta}} = \frac{k_x^e (\eta_2 - \eta_1)}{(k_x^e)^2 - \eta_1 \eta_2}, \quad (3.152)$$

где, согласно (3.133), (3.138), (3.139):

$$\beta = \frac{k_x^i d}{2}; \quad (3.153)$$

$$\eta_1 = \frac{-k_x^i \mu - ik_y \mu_a}{\mu^2 - \mu_a^2}; \quad (3.154)$$

$$\eta_2 = \frac{k_x^i \mu - ik_y \mu_a}{\mu^2 - \mu_a^2}. \quad (3.155)$$

Рассмотрим входящие в эти выражение волновые числа k_y , k_x^e и k_x^i , а именно: выразим их через волновое число k вдоль направления распространения волны. Поскольку далее рассматриваются волны, распространяющиеся только вдоль оси Oy , то сразу заменяем обозначение волнового числа по этой оси k_y на k :

$$k_y = k. \quad (3.156)$$

Далее, аналогично с (3.53), получаем:

$$(k_x)_m = \sqrt{-k_m^2 + b_e}, \quad (3.157)$$

где индекс « m » означает, что рассматривается волновое число с учетом магнитных свойств среды.

В этой формуле, согласно (3.41), используется выражение:

$$b_e = k_0^2 \varepsilon_{\parallel} \frac{\mu^2 - \mu_a^2}{\mu}. \quad (3.158)$$

Вне магнитной пластины $\mu = 1$, $\mu_a = 0$, так что $b_e \rightarrow k_0^2 \varepsilon_{\parallel}$.

С учетом этого, из (3.157) получаем:

вне магнитной пластины:

$$k_x^e = i \sqrt{k^2 - k_0^2 \varepsilon_{\parallel}}; \quad (3.159)$$

внутри магнитной пластины:

$$k_x^i = i \sqrt{k^2 - b_e} = ik \sqrt{1 - \frac{b_e}{k^2}}. \quad (3.160)$$

Введем обозначение:

$$\alpha_0 = \sqrt{1 - \frac{b_e}{k^2}}. \quad (3.161)$$

С учетом (3.158) это выражение принимает вид:

$$\alpha_0 = \sqrt{1 - \frac{k_0^2}{k^2} \cdot \frac{\varepsilon_{\parallel} (\mu^2 - \mu_a^2)}{\mu}}. \quad (3.162)$$

С этим обозначением, из (3.160) получаем:

$$k_x^i = ik \alpha_0. \quad (3.163)$$

С учетом (3.153) и (3.163) показатель экспоненты в (3.152) принимает вид:

$$2i\beta = -kd\alpha_0. \quad (3.164)$$

Подставляя (3.164) в левую часть соотношения (3.152) и меняя порядок слагаемых в числителе, получаем:

$$\frac{e^{2i\beta} - e^{-2i\beta}}{e^{2i\beta} + e^{-2i\beta}} = -\frac{e^{kd\alpha_0} - e^{-kd\alpha_0}}{e^{kd\alpha_0} + e^{-kd\alpha_0}}. \quad (3.165)$$

Рассмотрим теперь правую часть соотношения (3.152), для чего условно обозначим ее через A :

$$A = \frac{k_x^e (\eta_2 - \eta_1)}{(k_x^e)^2 - \eta_1 \eta_2}. \quad (3.166)$$

Исходя из (3.154), (3.155), с учетом (3.156), (3.163), найдем входящие в это выражение комбинации параметров η_1 и η_2 :

$$\eta_2 - \eta_1 = \frac{2k_x^i \mu}{\mu^2 - \mu_a^2}; \quad (3.167)$$

$$\eta_1 \eta_2 = \frac{k^2 (\alpha_0^2 \mu^2 - \mu_a^2)}{(\mu^2 - \mu_a^2)^2}. \quad (3.168)$$

Числитель выражения (3.152), с учетом (3.159) и (3.167), принимает вид:

$$k_x^e (\eta_2 - \eta_1) = -\frac{2k\mu\alpha_0 \sqrt{k^2 - k_0^2 \varepsilon_{\parallel}}}{\mu^2 - \mu_a^2}. \quad (3.169)$$

Знаменатель выражения (3.152), с учетом (3.159) и (3.168), принимает вид:

$$(k_x^e)^2 - \eta_1 \eta_2 = -\frac{(k^2 - k_0^2 \varepsilon_{\parallel}) + k^2 (\alpha_0^2 \mu^2 - \mu_a^2)}{(\mu^2 - \mu_a^2)^2}. \quad (3.170)$$

Подставляя (3.169), (3.170) в (3.166), разделяя числитель и знаменатель получающейся дроби на $(\mu^2 - \mu_a^2)$, вынося в знаменателе за скобку корень $\sqrt{k^2 - k_0^2 \varepsilon_{\parallel}}$, после чего, вынося минус в знаменателе, получаем:

$$A = -\frac{2\mu\alpha_0 k}{\sqrt{k^2 - k_0^2 \varepsilon_{\parallel}} \left\{ \mu^2 - \mu_a^2 + \frac{k^2}{k^2 - k_0^2 \varepsilon_{\parallel}} \cdot \frac{\alpha_0^2 \mu^2 - \mu_a^2}{\mu^2 - \mu_a^2} \right\}}. \quad (3.171)$$

Введем обозначение:

$$\beta_0 = \frac{\sqrt{k^2 - k_0^2 \varepsilon_{\parallel}}}{k} \left\{ \mu_a^2 - \mu^2 - \frac{k^2}{k^2 - k_0^2 \varepsilon_{\parallel}} \cdot \frac{\alpha_0^2 \mu^2 - \mu_a^2}{\mu^2 - \mu_a^2} \right\}. \quad (3.172)$$

С этим обозначением (3.171) принимает вид:

$$A = -\frac{2\mu\alpha_0}{\beta_0}. \quad (3.173)$$

Подставляя это выражение в (3.152), учитывая (3.165) и умножая обе части на минус единицу, получаем:

$$\frac{e^{kd\alpha_0} - e^{-kd\alpha_0}}{e^{kd\alpha_0} + e^{-kd\alpha_0}} = \frac{2\mu\alpha_0}{\beta_0}, \quad (3.174)$$

где α_0 и β_0 определяются выражениями (3.162) и (3.172).

Это выражение и является искомым дисперсионным соотношением, содержащим волновое число k , которое определяет распространение волны вдоль оси Oy .

Можно видеть, что оно по форме совпадает с аналогичным соотношением в задаче Дэймона–Эшбаха [1, стр. 67, форм. (2.296), (2.297)], так что его можно выразить через котангенс.

При α_0 действительном, волновое число внутри пластины, согласно (3.163), будет мнимым, так что, с учетом того, что в соответствии с (3.76) зависимость поля волны от координаты x имеет вид $\exp(\pm ik_x x)$, показатель экспоненты будет действительным, так что поле волны будет спадать внутрь пластины от поверхности по экспоненциальному закону.

Заметим, что вне магнитной пластины, согласно (3.159), поле волны спадает при любом значении волнового числа k , достаточно лишь, чтобы скорость волны была меньше скорости света в среде, что соответствует спаду поля волны к нулю на бесконечности.

Итак, при действительном значении α_0 волна будет поверхностной и котангенс будет гиперболическим. В этом случае дисперсионное соотношение принимает вид:

$$\beta_0 - 2\mu\alpha_0 \operatorname{cth}(k d \alpha_0) = 0. \quad (3.175)$$

Аналогично можно видеть, что при мнимом значении α_0 волна будет объемной, а котангенс — тригонометрическим, так что дисперсионное соотношение принимает вид:

$$\beta_0 - 2\mu |\alpha_0| \operatorname{ctg}(k d |\alpha_0|) = 0. \quad (3.176)$$

Заметим, однако, что в отличие от классической задачи Дэймона–Эшбаха, соотношения (3.175), (3.176) нельзя аналитически разрешить относительно волнового числа k , как это сделано в работе [1, стр. 67, форм. (2.306)]. Причиной такой неразрешимости является тот факт, что волновое число k , кроме котангенса, входит также в выражения для α_0 и β_0 , определяемые формулами (3.162) и (3.172).

В этом случае для построения дисперсионной кривой, то есть зависимости частоты от волнового числа, где частота, в соответствии с (3.20), входит в параметр k_0 , можно воспользоваться численным решением уравнения (3.174), с помощью алгоритма поиска нуля с определенным шагом. При этом, поскольку при заданном волновом числе дисперсионная кривая может иметь несколько ветвей, расположенных друг над другом, то во избежание неоднозначности, удобнее задавать по шагам не волновое число, а частоту, после чего при каждом таком значении частоты путем поиска нуля определять волновое число.

3.6. Дисперсия гиромангнитной волны в пластине феррита без диссипации

Обратимся теперь к рассмотрению дисперсионных свойств гиромангнитной волны в пластине феррита. На данном этапе ограничимся случаем отсутствия диссипации.

3.6.1. Решение дисперсионного соотношения методом поиска нуля

Будем рассматривать распространение гиромагнитной волны в геометрии, показанной на рис. 3.1, в основе которой лежит ферритовая пластина, намагниченная в плоскости. Система координат — $Oxyz$, плоскость Oxy совпадает с плоскостью пластины, ось Ox ей перпендикулярна. Поле направлено вдоль оси Oz , волна распространяется вдоль оси Oy .

Будем исходить из дисперсионного соотношения (3.174), имеющего вид:

$$\frac{e^{kd\alpha_0} - e^{-kd\alpha_0}}{e^{kd\alpha_0} + e^{-kd\alpha_0}} = \frac{2\mu\alpha_0}{\beta_0}, \quad (3.177)$$

где α_0 и β_0 определяются выражениями (3.162) и (3.172):

$$\alpha_0 = \sqrt{1 - \frac{k_0^2}{k^2} \cdot \frac{\varepsilon_{\parallel}(\mu^2 - \mu_a^2)}{\mu}}; \quad (3.178)$$

$$\beta_0 = \frac{\sqrt{k^2 - k_0^2 \varepsilon_{\parallel}}}{k} \cdot \left\{ \mu_a^2 - \mu^2 - \frac{k^2}{k^2 - k_0^2 \varepsilon_{\parallel}} \cdot \frac{\alpha_0^2 \mu^2 - \mu_a^2}{\mu^2 - \mu_a^2} \right\}. \quad (3.179)$$

Это дисперсионное соотношение решается методом поиска нуля.

Рассмотрим процедуру поиска нуля, сначала на примере поверхностной волны. В соответствии с (3.175), введем вспомогательную функцию, нуль которой будем искать:

$$y_1 = \text{th}(kd\alpha_0) - \frac{2\mu\alpha_0}{\beta_0}. \quad (3.180)$$

Далее с этой функцией выполняются следующие действия. Задаётся какое-то значение частоты. При этом изменяется волновое число с определенным шагом в пределах требуемого диапазона. На каждом шаге вычисляется функция y_1 . При этом знаки двух следующих друг за другом значений y_1 сравниваются между собой. Если знак y_1 на шаге не меняется, то осуществляется переход к следующему шагу. Если знак меняется, то это является сигналом, что между этими шагами функция y_1 проходит через нуль. Полученное таким образом значение волнового числа и принимается за искомое, соответствующее решению дисперсионного соотношения. В случае необходимости повышения точности решения, после первой регистрации изменения знака осуществляется возвращение на шаг назад, после чего шаг уменьшается в несколько раз (обычно в десять) и интервал между двумя шагами проходит снова. Эта процедура повторяется до тех пор, пока требуемая точность не будет достигнута.

После того как значение волнового числа, удовлетворяющего уравнению (3.177), будет найдено, выполняется шаг по частоте, и для нового значения частоты вся процедура нахождения волнового числа повторяется снова. Прохождение частоты по шагам во всем требуемом

диапазоне позволяет найти зависимость волнового числа от частоты, которая и представляет собой искомую дисперсионную кривую.

Выше показано, что в зависимости от заданного значения частоты параметр α_0 может быть как действительным, так и мнимым (то есть знак выражения под корнем может быть как положительным, так и отрицательным). При этом действительному значению α_0 соответствует поверхностная волна, а мнимому — объемная. В случае объемных волн для поиска нуля вместо (3.180) должна использоваться следующая вспомогательная функция:

$$y_2 = \operatorname{tg}(kd|\alpha_0|) - \frac{2\mu|\alpha_0|}{\beta_0}. \quad (3.181)$$

В остальном процедура построения дисперсионной зависимости для объемных волн полностью совпадает с таковой для поверхностных волн.

3.6.2. Дисперсия в большом интервале волновых чисел

Приведем некоторые рисунки, полученные из решения дисперсионного соотношения (3.177) методом поиска нуля.

На рис. 3.2 приведены дисперсионные кривые в большом интервале волновых чисел. Кривая *1* построена по классической формуле

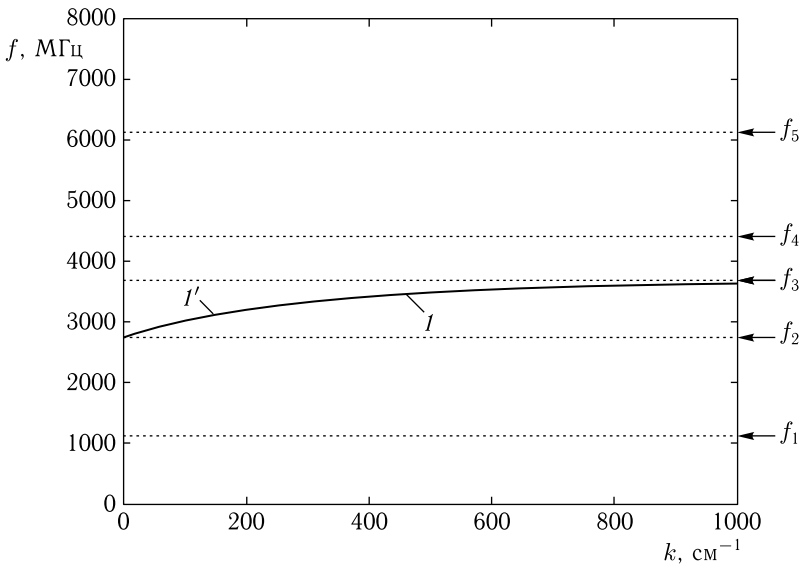


Рис. 3.2. Дисперсионная кривая для поверхностной волны Дэймона–Эшбаха *I* и для гиромангнитной волны *I'* (при $\varepsilon = 1$). Общие параметры построения:

$$4\pi M_0 = 1750 \text{ Гс}; d = 15 \text{ мкм}; H = 437,5 \text{ Э}$$

Дэймона–Эшбаха [1, стр. 72, с точностью до обозначения β , формула (2.370)]:

$$\beta - 2\mu\alpha \operatorname{cth}(k d \alpha) = 0. \quad (3.182)$$

Кривая I' построена по приведенному выше дисперсионному соотношению для гиромангнитной волны, где полагается, что параметр α_0 — действительный, то есть с помощью функции y_1 . При этом в обоих случаях волна является поверхностной.

Характерные частоты (показаны горизонтальными точечными линиями) получаются из анализа расходимостей выражений для магнитной восприимчивости. Примеры такого анализа можно найти в работах [1, 2]. При заданных на рис. 3.2 параметрах эти частоты следующие:

$$f_1 = \gamma H = 1125 \text{ Э}; \quad (3.183)$$

$$f_2 = \gamma \sqrt{H(H + 4\pi M_0)} = 2739 \text{ Э}; \quad (3.184)$$

$$f_3 = \gamma(H + 2\pi M_0) = 3675 \text{ Э}; \quad (3.185)$$

$$f_4 = \gamma \sqrt{(H + 2\pi M_0)^2 + (2\pi M_0)^2} = 4417 \text{ Э}; \quad (3.186)$$

$$f_5 = \gamma(H + 4\pi M_0) = 6125 \text{ Э}. \quad (3.187)$$

Интервал существования классической поверхностной волны Дэймона–Эшбаха, получаемой в магнитостатическом приближении, заключен между частотами f_2 и f_3 . В области между частотами f_3 и f_4 магнитостатическое приближение дает существование обратной поверхностной волны диссипативного типа, то есть существующее только в среде с затуханием [5–8]. Другие решения магнитостатического приближение получить не позволяет.

Из рисунка можно видеть, что обе дисперсионные кривые I и I' полностью совпадают. Это происходит потому, что полная электродинамика начинает работать отлично от магнитостатики только при малых значениях волнового числа, то есть когда длина магнитостатической волны на заданной частоте становится сравнимой с длиной электромагнитной волны на той же частоте.

Волновое число электромагнитной волны в свободном пространстве, определяется по формуле [218, 219] (подобной (3.20)):

$$k = \frac{2\pi f}{c}, \quad (3.188)$$

где c — скорость света.

Для частоты 3000 МГц волновое число равно $0,628 \text{ см}^{-1}$. То есть, в соответствии с масштабом, принятым на рис. 3.2, различие между той и другой дисперсионными кривыми может наблюдаться только вблизи левой вертикальной границы рисунка в пределах интервала, сравнимого с шириной линии чертежа. Очевидно, такое различие на рисунке представлено быть не может, что и находит свое выражение

в совпадении кривых I и I' . Более подробно вопрос о корректности и условиях применимости магнитостатического приближения можно найти в [1, стр. 63–68].

3.6.3. Дисперсия при малых значениях волнового числа

Перейдем теперь к рассмотрению дисперсии гиромагнитной волны в области малых значений волнового числа.

Предварительный анализ показывает, что параметр α_0 является действительным в интервале между частотами f_2 и f_4 , так что в этом интервале гиромагнитная волна является поверхностной. Вне этого интервала, то есть ниже f_2 и выше f_4 , параметр α_0 (по крайней мере, при $k \geq k_0$, то есть при фазовой скорости волны не больше скорости света), является мнимым, так что здесь волны являются объемными. В первом случае для поиска нуля следует пользоваться функцией y_1 , а во втором — функцией y_2 . Рассмотрим сначала первый случай.

На рис. 3.3 приведены дисперсионные кривые в малом интервале волновых чисел вблизи нуля. Обе кривые построены по дисперсионному соотношению (3.177) для гиромагнитной волны методом поиска нуля при задании шага по частоте.

Кривая I соответствует начальному участку кривой I' на рис. 3.2. В принятом на рис. 3.2 интервале изменения волнового числа этот начальный участок с высокой точностью представляет собой прямую

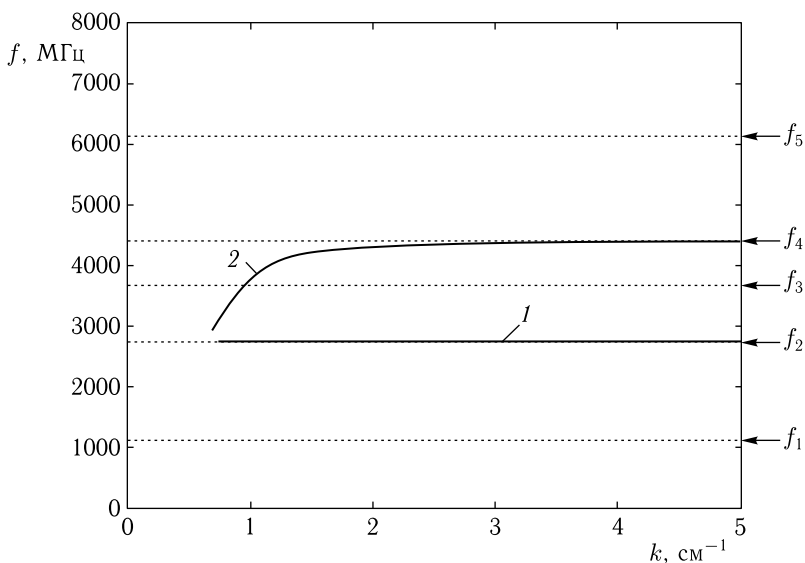


Рис. 3.3. Дисперсионные кривые для гиромагнитной волны при малых значениях волнового числа: I — основная ветвь, совпадающая с получаемой в рамках магнитостатики; 2 — дополнительная ветвь, в рамках магнитостатики отсутствующая. Параметры те же, что приняты при построении рис. 3.2

горизонтальную линию на частоте f_2 . Кривая 2 на рис. 3.2 не нанесена, так как там ее изогнутый участок, заметно отличающийся от горизонтальной прямой на частоте f_4 , совпадает с вертикальной осью на левой стороне рисунка.

Из рисунка можно видеть, что в полной электродинамике, кроме основной ветви поверхностной волны 1, существует также другая поверхностная ветвь 2, расположенная выше по частоте.

При учете диссипации в этой области существует диссипативная ветвь, имеющая обратный характер [5–8].

Больше никаких ветвей поверхностных волн соотношение (3.177) не дает, так как при выходе за пределы интервала частот между f_2 и f_4 выражение (3.178) для α_0 становится мнимым. Это означает, что вне интервала между f_2 и f_4 гиромагнитная волна является объемной. При этом надо пользоваться вспомогательной функцией y_2 (3.181).

В этом случае решение методом поиска нуля приводит к картине, показанной на рис. 3.4. Кривые на рисунке построены путем задания частоты с определенным шагом при изменении волнового числа от нуля до 5 см^{-1} . При этом регистрировался знак функции y_2 , задаваемой формулой (3.181). Таким образом, зачерненные и светлые области соответствуют различным знакам левой части соотношения (3.177). То есть в пределах областей того или другого цвета знак левой части сохраняется, а на границах — меняется на противоположный.

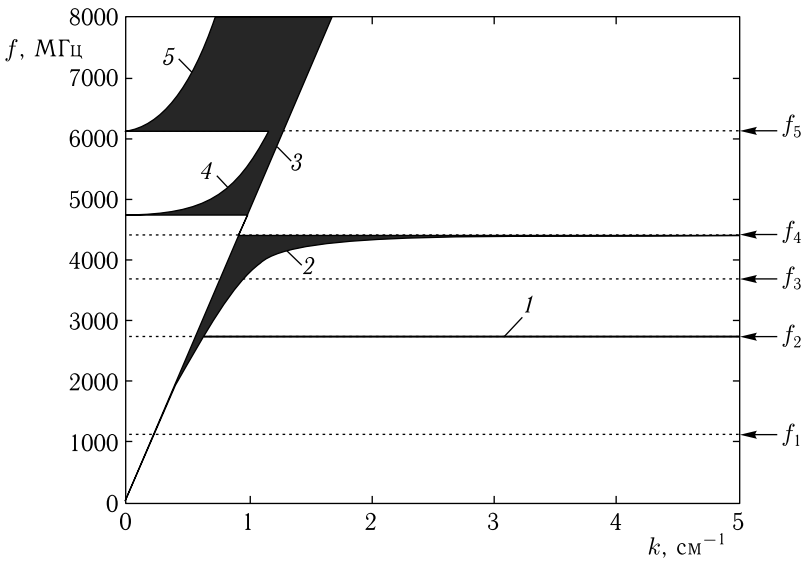


Рис. 3.4. Области различных знаков параметров y_1 и y_2 , получаемые при учете мнимого значения α_0 . Нумерация кривых пояснена в тексте. Параметры те же, что приняты при построении рис. 3.2 и рис. 3.3

Из рисунка можно видеть, что кривая 1, соответствующая классическому соотношению Дэймона–Эшбаха, полностью сохраняется (совпадает с таковой на рис. 3.2). Кривая 2, представляющая собой правую границу зачерненной области между частотами f_2 и f_4 , также полностью соответствует кривой 2 на рис. 3.4.

Однако на левой границе той же области левая часть дисперсионного соотношения также меняет знак. В области частот выше f_4 , кроме того еще и на правой границе зачерненных областей знак функции y_2 также изменяется.

В окрестности частоты f_1 , по-видимому, также имеет место изменение знака, связанное с особенностями μ и μ_a вблизи частоты ферромагнитного резонанса. Однако оно происходит здесь дважды в очень узком интервале изменения волнового числа, вследствие чего зачерненная область сливается в единую линию. Ввиду незначительности своего проявления, здесь тонкая структура этой линии более подробно не исследовалась.

Из всего представленного на рис. 3.4 интервала частот можно видеть, что вариации знака в ту или иную сторону имеют место на прямой линии 3, проходящей через нуль частоты и волнового числа. Такой закон дисперсии соответствует распространению волны в свободном пространстве со скоростью света.

Следует отметить, что слева от этой прямой также имеются линии 4 и 5, на которых y_2 также меняет знак. Эти линии соответствуют случаю, когда фазовая скорость волны превышает скорость света. Можно полагать, что с физической стороны эти линии являются нереализуемыми, так как согласно специальной теории относительности [220, 221], в свободном пространстве групповая скорость распространения волны, совпадающая в этом случае с ее фазовой скоростью, значения скорости света превышать не может. Несколько слов по этому вопросу будет сказано далее.

Здесь же вернемся к рассмотрению рис. 3.4 и выделим на нем те линии, которые соответствуют изменению знака параметров y_1 и y_2 . Полученные линии представлены на рис. 3.5. Эти линии как раз и представляют собой дисперсионные кривые, определяемые соотношением (3.177). Нумерация кривых сохранена той же, что на рис. 3.4.

Здесь кривые 1 и 2, как и ранее, соответствуют поверхностным волнам, а остальные — объемным. При этом кривая 3 (представляющая собой прямую линию) — соответствует дисперсии электромагнитной волны в свободном пространстве. Кривые 4 и 5 — нереализуемым ветвям объемных волн. Примечательно отметить, что в области выше f_5 прямая 3 имеет прямолинейное же продолжение 6, отмеченное пунктиром. На этой линии происходит изменение знака y_2 , однако несколько левее проходит другая линия изменения знака, являющаяся продолжением кривой 4 (отмечена сплошной линией). На этой линии также происходит изменение знака y_2 , то есть можно полагать, что между ней и линией 6 имеет место еще одно изменение знака, возвра-

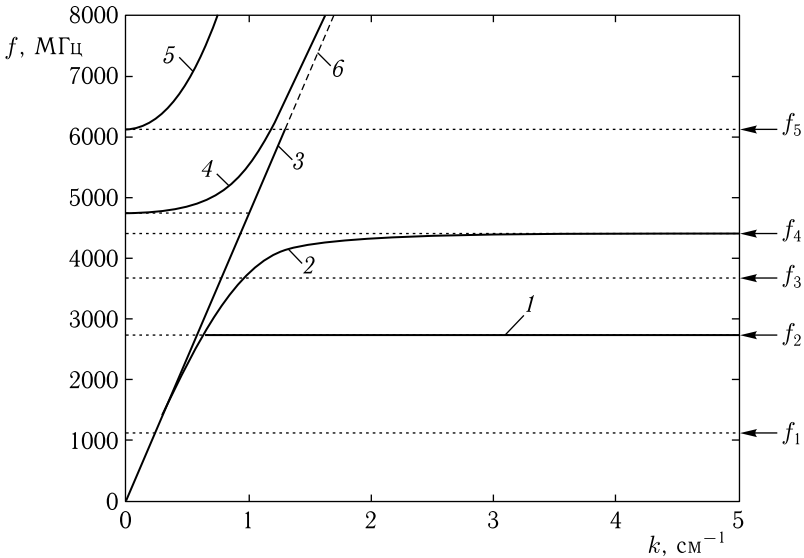


Рис. 3.5. Дисперсионные кривые для гиромагнитной волны, получаемые при учете мнимого значения α_0 . Нумерация кривых и параметры построения — те же, что приняты при построении рис. 3.4

щающее его к тому значению, которое было левее этой линии. Можно видеть, что область между кривой 6 и продолжением кривой 4 является довольно узкой и по мере увеличения частоты сужается. Ввиду узости этой области, а также ее расположения левее линии 3, соответствующей скорости света, более подробно ее структура в настоящей работе не исследовалась.

Следует отметить еще две особенности полученных кривых.

Первая состоит в том, что дисперсионная кривая 2 на частоте f_2 начинается не на кривой 3, а отстоит от нее на промежуток, приблизительно равный $0,03 \text{ см}^{-1}$. Ниже этой частоты кривые 2 и 3 также несколько расходятся, однако по мере снижения частоты промежуток между ними уменьшается, стремясь к нулю. Выше частоты f_2 волна, соответствующая кривой 2, является поверхностной, а ниже — объемной. Можно полагать, что наблюдаемый характер соотношения кривых 2 и 3 обусловлен особенностями конкретного вида зависимости компонент проницаемости μ и μ_a от частоты. Более подробно с характером такой зависимости μ и μ_a , в том числе с учетом затухания, можно познакомиться по монографии [2, стр. 56–63].

Вторая особенность состоит в наличии участка на кривой 3, начинающегося на частоте f_4 и заканчивающегося несколько выше в точке, соответствующей горизонтальной касательной к кривой 4 на линии начала координат. В этой области частот, шириной около 400 МГц, изменение знака y_2 хотя и происходит, но он очень быстро возвращается об-

ратно, так что точки изменения знака туда и обратно по волновому числу сливаются с одну сплошную линию. То есть в этом интервале частот гиромагнитная волна, будучи объемной, практически ничем не отличается от простой электромагнитной волны в среде, где магнитные свойства отсутствуют. Заметим, что и выше по частоте, благодаря нереализуемости левых ветвей кривых 4 и 5, волна имеет также чисто электромагнитный характер, соответствующий свободному пространству. Не так, однако, обстоит дело в случае отличной от единицы диэлектрической проницаемости среды, к рассмотрению чего и перейдем далее.

3.6.4. Влияние диэлектрической проницаемости среды

На рис. 3.6 показаны те же зависимости, что и на рис. 3.4, с тем отличием, что здесь диэлектрическая проницаемость среды отлична от единицы и в данном случае равна пяти.

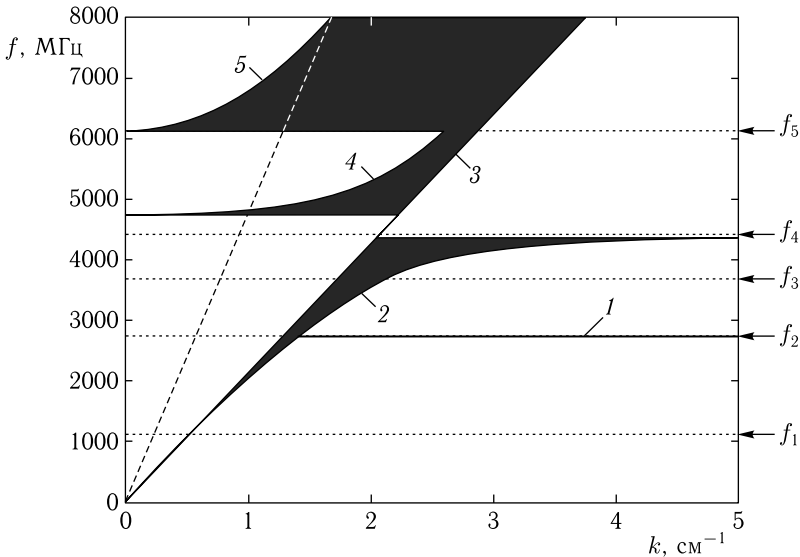


Рис. 3.6. Области различных знаков параметров y_1 и y_2 , получаемые при учете мнимого значения α_0 при диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\parallel} = 5$. Остальные параметры и нумерация кривых — те же, что на рис. 3.4

Из рисунка можно видеть, что вся картина, представленная на рис. 3.5, здесь подобным образом наклонена в направлении увеличения волнового числа (направо по рисунку). Такой наклон является строго пропорциональным параллельным переносом всех кривых направо с числовым коэффициентом равным $\sqrt{\varepsilon_{\parallel}} \approx 2,236$, что соответствует известному закону умножения волнового числа в среде, на коэффициент, равный $\sqrt{\varepsilon\mu}$ [218, 219]. Частотные особенности всех кривых, отмеченные применительно к рис. 3.4, полностью сохраняются. Однако

следует отметить, что здесь линия 3 проходит заметно правее аналогичной кривой на рис. 3.4 (линия, соответствующая 3 на рис. 3.4, здесь показана пунктиром), так что, по крайней мере, какие-то части кривых 4 и 5 располагаются правее кривой 3 рис. 3.4. То есть для таких кривых запрет превышения скорости света над таковой в свободном пространстве снимается, так что реализация объемных волн, соответствующих допустимым частям кривых 4 и 5, становится возможной, что соответствует появлению новых ветвей в спектре объемных гиромагнитных волн.

Заметим, однако, что такая реализация может сопровождаться явлениями релятивистского характера, подобными эффекту Черенкова–Вавилова [220, 221], так что этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

Вернемся еще раз к рассмотрению поверхностных гиромагнитных волн и в первую очередь установим, как сказывается на них влияние отличной от единицы диэлектрической проницаемости.

Выше отмечено, что отличие магнитостатического приближения от задачи полной электродинамики существенно может сказываться только в области малых волновых чисел, где длина магнитостатической волны становится того же порядка, что и длина электромагнитной. Однако на рис. 3.3 такое различие проявляется лишь в появлении новой ветви поверхностных волн (кривая 2), в магнитостатическом приближении отсутствующей.

С другой стороны, длина электромагнитной волны сильно зависит от диэлектрической проницаемости среды, в которой эта волна распространяется. Чтобы более наглядно выявить роль диэлектрической проницаемости, воспользуемся логарифмическим масштабом, что позволит как растянуть начальный участок, так и охватить значительный диапазон изменения волнового числа.

Соответствующие зависимости для двух случаев $\varepsilon_{\parallel} = 1$ (кривая 2) и $\varepsilon_{\parallel} = 5$ (кривая 3) показаны на рис. 3.7. Обе эти кривые соответствуют высокочастотной ветви поверхностной гиромагнитной волны. Здесь кривая 2 соответствует кривой 2 на рис. 3.3 (или кривой 2 на рис. 3.5), а кривая 3 — кривой 2 (нижнему краю зачерненной области) на рис. 3.6.

При построении кривой 1, соответствующей нижней ветви дисперсионной зависимости, использовались оба значения диэлектрической проницаемости. Подобное же построение было предпринято в магнитостатическом приближении (где учет диэлектрической проницаемости отсутствует). Однако во всех трех случаях какого-либо различия кривых, во всяком случае, в пределах ширины линии чертежа, обнаружено не было.

Из рисунка видно, что в области больших волновых чисел (при $k \geq 10 \text{ см}^{-1}$) низкочастотная ветвь дисперсионной зависимости поверхностных волн (кривая 1), во-первых, от значения диэлектрической

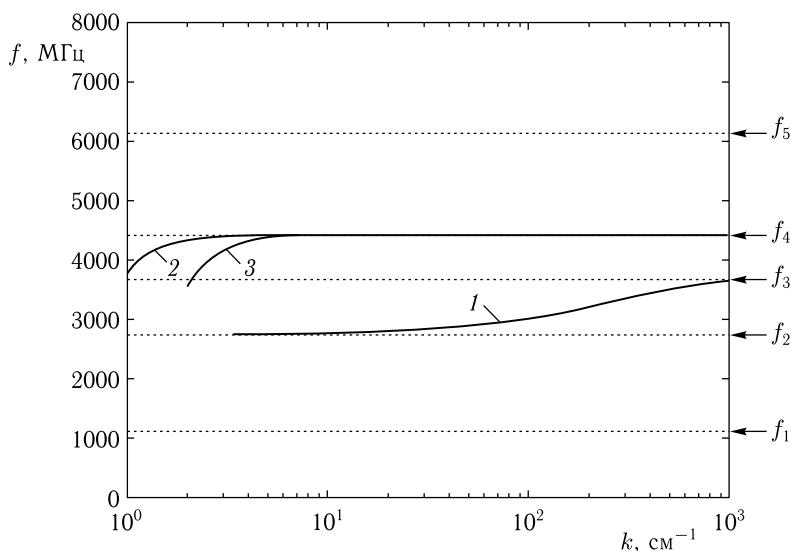


Рис. 3.7. Дисперсионные кривые для гиромагнитной волны при малых значениях волнового числа. Кривая 1 от значения диэлектрической проницаемости не зависит, кривая 2 соответствует $\varepsilon_{\parallel} = 1$, кривая 3 — $\varepsilon_{\parallel} = 5$. Остальные параметры те же, что приняты при построении рис. 3.4

проницаемости не зависит и, во-вторых, полностью соответствует подобной кривой, полученной в магнитостатическом приближении. В области малых волновых чисел (при $k \leq 10 \text{ см}^{-1}$) увеличение диэлектрической проницаемости приводит к смещению дисперсионной кривой (кривая 3) в область увеличения волнового числа с коэффициентом пропорциональности, равным $\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}$.

3.7. Общий характер дисперсии гиромагнитной волны в среде с диссипацией

Теперь, когда дисперсия гиромагнитной волны в среде без диссипации получена, рассмотрим, какие особенности в закон дисперсии вносит диссипация.

В предыдущих разделах дисперсия гиромагнитной волны рассматривается в среде, полностью бездиссипативной, то есть не обладающей какими-либо потерями. Однако в работах [222–224] было показано, что учет магнитной диссипации уже в магнитостатическом приближении приводит к ограничению допустимого диапазона волновых чисел, а также к появлению новых диссипативных ветвей, в среде без потерь отсутствующих. В работах [225, 226] отмечено ограничение сектора допустимых направлений распространения магнитостатических волн, а также получены изочастотные зависимости. В работах [5–8, 11, 12, 15, 16]

получены дисперсионные соотношения для действительной и мнимой частей волнового числа, подробно исследовано его ограничение как по частоте, так и по абсолютной величине, определены диапазоны существования диссипативных волн как по частоте, так и по волновому числу.

Однако все перечисленные работы, где выполнен учет диссипации в той или иной форме, сделаны в рамках магнитостатического приближения, то есть содержат все упомянутые выше ограничения, такому приближению свойственные. Теперь обратимся к рассмотрению влияния диссипации на дисперсионные свойства гиромагнитной волны.

3.8. Дисперсионное соотношение для гиромагнитной волны в среде с диссипацией

Будем исходить из общего вида дисперсионного соотношения:

$$\frac{e^{kd\alpha_0} - e^{-kd\alpha_0}}{e^{kd\alpha_0} + e^{-kd\alpha_0}} = \frac{2\mu\alpha_0}{\beta_0}, \quad (3.189)$$

где α_0 и β_0 определяются выражениями:

$$\alpha_0 = \frac{1}{k} \sqrt{k^2 - k_0^2 \varepsilon \left(\frac{\mu^2 - \mu_a^2}{\mu} \right)}; \quad (3.190)$$

$$\beta_0 = -\frac{\mu^2 - \mu_a^2 + 1}{k \sqrt{k^2 - k_0^2 \varepsilon}} \left\{ k^2 - k_0^2 \varepsilon \left(\frac{\mu^2 - \mu_a^2 + \mu}{\mu^2 - \mu_a^2 + 1} \right) \right\}. \quad (3.191)$$

В исходном виде оно приведено в разделе 3.6.1, формулы (3.177)–(3.179). Здесь выполнено некоторое упрощение, полезное для проводимых далее преобразований. Для простоты записи формул обозначение $\varepsilon_{||}$ заменено на ε .

В среде с диссипацией это соотношение содержит три комплексных величины: волновое число k и компоненты магнитной проницаемости μ и μ_a .

Выполним сначала небольшое преобразование, позволяющее отделить волновое число от компонент проницаемости в явном виде.

Введем вспомогательные обозначения для величин, не зависящих от k :

$$A = -k_0^2 \varepsilon \left(\frac{\mu^2 - \mu_a^2}{\mu} \right); \quad (3.192)$$

$$B = -(\mu^2 - \mu_a^2 + 1); \quad (3.193)$$

$$C = -k_0^2 \varepsilon; \quad (3.194)$$

$$D = -k_0^2 \varepsilon \left(\frac{\mu^2 - \mu_a^2 + \mu}{\mu^2 - \mu_a^2 + 1} \right). \quad (3.195)$$

С этими обозначениями α_0 и β_0 принимают вид:

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt{k^2 + A}}{k}, \quad (3.196)$$

$$\beta_0 = \frac{B(k^2 + D)}{k\sqrt{k^2 + C}}. \quad (3.197)$$

Показатель экспоненты принимает вид:

$$kd\alpha_0 = d\sqrt{k^2 + A}. \quad (3.198)$$

Правая часть дисперсионного соотношения принимает вид:

$$\frac{2\mu\alpha_0}{\beta_0} = \frac{2\mu}{B} \cdot \frac{\sqrt{k^2 + A}\sqrt{k^2 + C}}{k^2 + D}. \quad (3.199)$$

Подставляя показатель экспоненты и правую часть в исходное дисперсионное соотношение (3.189), после чего умножая числитель и знаменатель левой части на $e^{d\sqrt{k^2 + A}}$, получаем дисперсионное соотношение при наличии диссипации в окончательном виде:

$$\frac{e^{2d\sqrt{k^2 + A}} - 1}{e^{2d\sqrt{k^2 + A}} + 1} = \frac{2\mu}{B} \cdot \frac{\sqrt{k^2 + A}\sqrt{k^2 + C}}{k^2 + D}. \quad (3.200)$$

В этом соотношении комплексными являются как волновое число k , так и параметры A, B, C, D .

Представим параметры A, B, C, D в комплексном виде:

$$A = A' + iA''; \quad (3.201)$$

$$B = B' + iB''; \quad (3.202)$$

$$C = C' + iC''; \quad (3.203)$$

$$D = D' + iD'', \quad (3.204)$$

где $A', A'', B', B'', C', C'', D', D''$ — действительные.

Из (3.194) видно, что $C''' = 0$, однако для сохранения общности оставим пока запись параметра C в виде суммы действительной и мнимой частей.

Из (3.192)–(3.195) видно, что параметры A, B, C, D содержат компоненты проницаемости μ и μ_a , которые, в свою очередь, являются комплексными. Запишем эти компоненты в виде:

$$\mu = \mu' + i\mu''; \quad (3.205)$$

$$\mu_a = \mu'_a + i\mu''_a, \quad (3.206)$$

где $\mu', \mu'', \mu'_a, \mu''_a$ — действительные.

В таком виде компоненты тензора проницаемости будут использованы далее для получения действительных и мнимых частей параметров A, B, C, D по отдельности.

3.8.1. Получение компонент параметров A, B, C, D

Найдем некоторые промежуточные выражения, входящие в параметры A, B, C, D . Это будет в первую очередь $\mu^2 - \mu_a^2$, $\mu^2 - \mu_a^2 + 1$, а также $\mu^2 - \mu_a^2 + \mu$.

Введем вспомогательные выражения:

$$M_1 = (\mu')^2 - (\mu'')^2 + (\mu_a'')^2; \quad (3.207)$$

$$M_2 = 2(\mu'\mu'' - \mu_a'\mu_a''). \quad (3.208)$$

С использованием этих выражений получаем:

$$\mu^2 - \mu_a^2 = M_1 + iM_2; \quad (3.209)$$

$$\mu^2 - \mu_a^2 + 1 = (M_1 + 1) + iM_2; \quad (3.210)$$

$$\mu^2 - \mu_a^2 + \mu = (M_1 + \mu') + i(M_2 + \mu''). \quad (3.211)$$

Подставляя (3.209)–(3.211), а также (3.205) в (3.192)–(3.195) и выполняя разделение действительной и мнимой частей, получаем:

$$A' = -k_0^2 \varepsilon \frac{M_1 \mu' + M_2 \mu''}{(\mu')^2 + (\mu'')^2}; \quad (3.212)$$

$$A'' = -k_0^2 \varepsilon \frac{-M_1 \mu'' + M_2 \mu'}{(\mu')^2 + (\mu'')^2}; \quad (3.213)$$

$$B' = -(M_1 + 1); \quad (3.214)$$

$$B'' = -M_2; \quad (3.215)$$

$$C' = -k_0^2 \varepsilon; \quad (3.216)$$

$$C'' = 0; \quad (3.217)$$

$$D' = -k_0^2 \varepsilon \frac{(M_1 + \mu')(M_1 + 1) + M_2(M_2 + \mu'')}{(M_1 + 1)^2 + M_2^2}; \quad (3.218)$$

$$D'' = -k_0^2 \varepsilon \frac{-(M_1 + \mu')M_2 + (M_1 + 1)(M_2 + \mu'')}{(M_1 + 1)^2 + M_2^2}. \quad (3.219)$$

3.8.2. Преобразование квадратного корня

В дисперсионном соотношении (3.200), кроме дроби вида μ/B , комплексные составляющие присутствуют в виде квадратных корней из суммы квадрата волнового числа k и одного из параметров A, B, D . При этом выделение действительной и мнимой частей из этих корней можно сделать одинаковым образом. Покажем это на примере первого корня $\sqrt{k^2 + A}$.

Рассмотрим выделение действительной и мнимой частей из квадратного корня $\sqrt{k^2 + A}$ в предположении, что как волновое число k , так и параметр A являются комплексными.

Представим волновое число k в комплексном виде:

$$k = \eta - i\xi, \quad (3.220)$$

где η и ξ — действительные.

Квадрат волнового числа k равен:

$$k^2 = (\eta^2 - \xi^2) - i \cdot 2\eta\xi. \quad (3.221)$$

Согласно (3.201), параметр A определяется выражением:

$$A = A' + iA''; \quad (3.222)$$

Подставляя (3.221) и (3.222) в квадратный корень $\sqrt{k^2 + A}$, получаем:

$$\sqrt{k^2 + A} = \sqrt{a_A + ib_A}, \quad (3.223)$$

где введены обозначения:

$$a_A = \eta^2 - \xi^2 + A'; \quad (3.224)$$

$$b_A = -2\eta\xi + A''. \quad (3.225)$$

Здесь a_A и b_A — действительные.

Воспользуемся формулой для квадратного корня из комплексного числа [227, стр. 19, форм. (58.1)]:

$$\sqrt{a + ib} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}. \quad (3.226)$$

В соответствии с этой формулой, подставляя значения a и b в соответствии с (3.223) и (3.224), получаем:

$$\begin{aligned} \sqrt{k^2 + A} = & \sqrt{\frac{(\eta^2 - \xi^2 + A') + \sqrt{(\eta^2 - \xi^2 + A')^2 + (-2\eta\xi + A'')^2}}{2}} + \\ & + \sqrt{\frac{(\eta^2 - \xi^2 + A') + \sqrt{-(\eta^2 - \xi^2 + A')^2 + (-2\eta\xi + A'')^2}}{2}}. \end{aligned} \quad (3.227)$$

Введем обозначения:

$$g_A = \sqrt{\frac{(\eta^2 - \xi^2 + A') + \sqrt{(\eta^2 - \xi^2 + A')^2 + (-2\eta\xi + A'')^2}}{2}}; \quad (3.228)$$

$$h_A = \sqrt{\frac{-(\eta^2 - \xi^2 + A') + \sqrt{(\eta^2 - \xi^2 + A')^2 + (-2\eta\xi + A'')^2}}{2}}. \quad (3.229)$$

С этими обозначениями получаем:

$$\sqrt{k^2 + A} = g_A + ih_A. \quad (3.230)$$

Аналогично представим другой корень и знаменатель выражения (3.200):

$$\sqrt{k^2 + C} = g_C + ih_C; \quad (3.231)$$

$$k^2 + D = g_D + ih_D. \quad (3.232)$$

Здесь:

$$g_C = \sqrt{\frac{(\eta^2 - \xi^2 + C') + \sqrt{(\eta^2 - \xi^2 + C')^2 + (-2\eta\xi + C'')^2}}{2}}; \quad (3.233)$$

$$h_C = \sqrt{\frac{-(\eta^2 - \xi^2 + C') + \sqrt{(\eta^2 - \xi^2 + C')^2 + (-2\eta\xi + C'')^2}}{2}}, \quad (3.234)$$

а также:

$$g_D = \eta^2 - \xi^2 + D'; \quad (3.235)$$

$$h_D = -2\eta\xi + D''. \quad (3.236)$$

Выражения (3.228)–(3.229), а также (3.233)–(3.236) являются действительными.

3.8.3. Преобразование левой части дисперсионного соотношения

Левая часть дисперсионного соотношения (3.200) имеет вид:

$$F_1 = \frac{e^{2d\sqrt{k^2+A}} - 1}{e^{2d\sqrt{k^2+A}} + 1}. \quad (3.237)$$

Запишем корень в соответствии с (3.230):

$$\sqrt{k^2 + A} = g_A + ih_A. \quad (3.238)$$

Подставляя корень (3.238) в показатель экспоненты и выполняя преобразование с помощью формулы Эйлера, получаем:

$$e^{2d\sqrt{k^2+A}} = e^{2dg_A} e^{i2dh_A} = e^{2dg_A} \cos(2dh_A) + ie^{2dg_A} \sin(2dh_A). \quad (3.239)$$

Введем обозначения:

$$C_{1M} = e^{2dg_A} \cos(2dh_A) - 1; \quad (3.240)$$

$$C_{1P} = e^{2dg_A} \cos(2dh_A) + 1; \quad (3.241)$$

$$C_2 = e^{2dg_A} \sin(2dh_A). \quad (3.242)$$

С этими обозначениями левая часть дисперсионного соотношения (3.237) принимает вид:

$$F_1 = \frac{C_{1M} + iC_2}{C_{1P} + iC_2}. \quad (3.243)$$

Умножая числитель и знаменатель этой дроби на $(C_{1P} - iC_2)$ и выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$F_1 = F_{11} + iF_{12}, \quad (3.244)$$

где введены обозначения:

$$F_{11} = \frac{C_{1P}C_{1M} + C_2^2}{C_{1P}^2 + C_2^2}. \quad (3.245)$$

$$F_{12} = \frac{C_2(C_{1P} - C_{1M})}{C_{1P}^2 + C_2^2}. \quad (3.246)$$

3.8.4. Преобразование правой части дисперсионного соотношения

Согласно (3.200), правая часть дисперсионного соотношения имеет вид:

$$F_2 = \frac{2\mu}{B} \cdot \frac{\sqrt{k^2 + A} \sqrt{k^2 + C}}{k^2 + D}. \quad (3.247)$$

Выделим сначала действительную и мнимую части из первой дроби $2\mu/B$, корней не содержащей.

Запишем μ в комплексном виде:

$$\mu = \mu' + i\mu''. \quad (3.248)$$

Согласно (3.202), параметр B определяется соотношением:

$$B = B' + iB''. \quad (3.249)$$

Подставляя (3.248) и (3.249) в искомую дробь и выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\frac{2\mu}{B} = p + iq, \quad (3.250)$$

где введены обозначения:

$$p = \frac{2(\mu'B' + \mu''B'')}{(B')^2 + (B'')^2}; \quad (3.251)$$

$$q = \frac{2(-\mu'B'' + \mu''B')}{(B')^2 + (B'')^2}, \quad (3.252)$$

оба из которых являются действительными.

Рассмотрим теперь вторую дробь, входящую в (3.247) и содержащую корни, для которых воспользуемся соотношениями (3.230), (3.231), (3.232):

$$\sqrt{k^2 + A} = g_A + ih_A; \quad (3.253)$$

$$\sqrt{k^2 + C} = g_C + ih_C; \quad (3.254)$$

$$k^2 + D = g_D + ih_D. \quad (3.255)$$

Подставляя (3.250) и (3.253)–(3.255) в (3.247), получаем:

$$F_2 = (p + iq) \cdot \frac{(g_A + ih_A)(g_C + ih_C)}{(g_D + ih_D)}. \quad (3.256)$$

Найдем числитель дроби:

$$(g_A + ih_A)(g_C + ih_C) = r + is, \quad (3.257)$$

где введены обозначения:

$$r = g_A g_C - h_A h_C; \quad (3.258)$$

$$s = g_A h_C + g_C h_A. \quad (3.259)$$

С учетом (3.257), выражение (3.256) принимает вид:

$$F_2 = \frac{(p + iq)(r + is)}{(g_D + ih_D)}. \quad (3.260)$$

Выделим действительную и мнимую части в числителе полученной дроби:

$$(p + iq)(r + is) = u + iv, \quad (3.261)$$

где введены обозначения:

$$u = pr - qs; \quad (3.262)$$

$$v = ps + qr. \quad (3.263)$$

Подставляя (3.261) в (3.260) и выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$F_2 = F_{21} + iF_{22}, \quad (3.264)$$

где введены обозначения:

$$F_{21} = \frac{ug_D + vh_D}{(g_D)^2 + (h_D)^2}; \quad (3.265)$$

$$F_{22} = \frac{-uh_D + vg_D}{(g_D)^2 + (h_D)^2}. \quad (3.266)$$

3.8.5. Система уравнений для компонент волнового числа

Итак, получены обе части дисперсионного соотношения (3.200), позволяющие рассмотреть его в общем виде. При этом волновое число представлено в комплексном виде (3.220) с компонентами η и ξ , а все остальные составляющие дисперсионного соотношения выражены через эти компоненты.

Задачей решения дисперсионного соотношения является нахождение зависимостей компонент волнового числа η и ξ от частоты Ω , которая входит в компоненты тензора проницаемости μ и μ_a . Рассмотрим далее реализацию этой задачи.

Итак, исходное дисперсионное соотношение (3.200), записанное как равенство левой и правой частей F_1 и F_2 , имеет вид:

$$F_1 = F_2, \quad (3.267)$$

или:

$$F_1 - F_2 = 0, \quad (3.268)$$

где согласно (3.244) и (3.264):

$$F_1 = F_{11} + iF_{12}; \quad (3.269)$$

$$F_2 = F_{21} + iF_{22}. \quad (3.270)$$

С помощью этих обозначений записываем (3.268) в виде:

$$(F_{11} - F_{21}) + i(F_{12} - F_{22}) = 0. \quad (3.271)$$

Комплексное число равно нулю только в том случае, если его действительная и мнимая части по отдельности равны нулю. То есть из одного уравнения (3.271), получаем систему двух уравнений:

$$F_{11} - F_{21} = 0; \quad (3.272)$$

$$F_{12} - F_{22} = 0. \quad (3.273)$$

Это — система двух уравнений для действительной и мнимой компонент волнового числа η и ξ , которые, согласно (3.220), входят в эту систему через посредство выражений (3.230)–(3.232) с учетом (3.233)–(3.236), а также (3.212)–(3.219) с учетом (3.205)–(3.211). При этом компоненты проницаемости μ и μ_a содержатся в выражениях (3.192)–(3.195).

3.8.6. Структура полученной системы уравнений

Рассмотрим структуру полученных уравнений несколько более подробно. Так, с помощью (3.245), (3.246), (3.265), (3.266) запишем (3.272) и (3.273) в виде:

$$\frac{C_{1P}C_{1M} + C_2^2}{C_{1P}^2 + C_2^2} - \frac{ug_D + vh_D}{(g_D)^2 + (h_D)^2} = 0; \quad (3.274)$$

$$\frac{C_2(C_{1P} - C_{1M})}{C_{1P}^2 + C_2^2} - \frac{-uh_D + vg_D}{(g_D)^2 + (h_D)^2} = 0; \quad (3.275)$$

Здесь, согласно (3.240), (3.241), (3.242), параметры C_{1P} , C_{1M} , C_2 определяются через параметры g_A и h_A .

Согласно (3.262), (3.263), параметры u и v определяются через параметры p , q , r , s , которые, согласно (3.251), (3.252), (3.258), (3.259), определяются через параметры g_A , g_C , g_D , h_A , h_C , h_D , а также параметры μ' , μ'' и B' , B'' .

То есть все входящие в выражения в явном виде параметры, определяются через параметры g_A , g_C , g_D , h_A , h_C , h_D , определяемые формулами (3.228), (3.233), (3.235), (3.229), (3.234), (3.236), которые в свою очередь определяются через действительные A' , B' , C' , D' и мнимые A'' , B'' , C'' , D'' части параметров A , B , C , D , определяемые формулами (3.192), (3.193), (3.194), (3.195), которые выражены через компоненты тензора магнитной проницаемости μ и μ_a .

Таким образом, все входящие в уравнения (3.274) и (3.275) параметры, кроме искоемых компонент волнового числа η и ξ , могут быть выражены через компоненты тензора магнитной проницаемости μ и μ_a , которые в общем случае имеют комплексный характер:

$$\mu = \mu' + i\mu'', \quad (3.276)$$

$$\mu_a = \mu'_a + i\mu''_a. \quad (3.277)$$

Заметим, что комплексный характер μ в виде формулы (3.248) уже использовался ранее при вычислении правой части исходного дисперсионного соотношения (3.200).

Итак, совместное решение системы уравнений (3.274) и (3.275) относительно компонент волнового числа η и ξ позволяет найти эти компоненты выраженными через компоненты тензора проницаемости μ и μ_a , которые задаются частотой, параметрами материала, поля и параметром затухания прецессии намагниченности. Эти компоненты в рамках линейного приближения получены в разделе 2.2.2. Приведем здесь краткую сводку основных результатов.

3.8.7. Тензор магнитной проницаемости

В разделе 2.2.2 получен тензор магнитной проницаемости в виде (2.35):

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.278)$$

Компоненты этого тензора в линейном приближении имеют вид (2.36), (2.37):

$$\mu = \frac{(\Omega_H^2 - \Omega^2)(\Omega_H^2 - \Omega^2 + \Omega_H)}{RS} - i\alpha \frac{\Omega(\Omega_H^2 + \Omega^2)}{RS}. \quad (3.279)$$

$$\mu_a = \frac{\Omega(\Omega_H^2 - \Omega^2)}{RS} - i\alpha \frac{2\Omega^2\Omega_H}{RS}, \quad (3.280)$$

где RS определяется выражением (2.32):

$$RS = (\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + \alpha^2(2\Omega\Omega_H)^2, \quad (3.281)$$

а нормированные частоты определяются формулами (2.26), (2.27):

$$\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}; \quad (3.282)$$

$$\Omega_H = \frac{H_0}{4\pi M_0}. \quad (3.283)$$

При малом затухании на расстоянии от резонанса, соответствующего условию $\Omega = \Omega_H$, выражение RS может быть приведено к виду:

$$RS \rightarrow (\Omega_H^2 - \Omega^2)^2. \quad (3.284)$$

В таком приближении μ и μ_a удобно представить в виде суммы действительной и мнимой частей:

$$\mu = \mu' + i\mu''; \quad (3.285)$$

$$\mu_a = \mu'_a + i\mu''_a, \quad (3.286)$$

где:

$$\mu' = \frac{\Omega_H^2 - \Omega^2 + \Omega_H}{\Omega_H^2 - \Omega^2}; \quad (3.287)$$

$$\mu'' = -\alpha \frac{\Omega(\Omega_H^2 + \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2}; \quad (3.288)$$

$$\mu'_a = \frac{\Omega}{\Omega_H^2 - \Omega^2}; \quad (3.289)$$

$$\mu''_a = -\alpha \frac{2\Omega^2\Omega_H}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2}. \quad (3.290)$$

В дальнейшем рассмотрении для компонент проницаемости будем использовать эти выражения. При этом влияние диссипации будет реализовываться за счет мнимых компонент проницаемости (3.285), (3.286), содержащих действительные величины μ'' и μ''_a .

3.9. Универсальный характер полученного решения и его упрощенный вариант

Приведенный здесь вывод системы уравнений для действительной и мнимой частей волнового числа (3.274)–(3.275) является универсальным в том отношении, что он не зависит от того, рассматривается ли полная электродинамика или лишь магнитостатическое приближение.

Для перехода к магнитостатическому приближению в полученных уравнениях достаточно положить скорость света стремящейся к бесконечности, то есть $k_0 \rightarrow 0$.

Контрольная проверка еще на уровне соотношения (3.189) с параметрами (3.190), (3.191) показывает идентичность получаемых выражений приведенным в работах [6–8]. То же относится к выражениям (3.274)–(3.275), то есть приведенное здесь решение полностью переходит в закон дисперсии для магнитостатических волн в рамках классической задачи Дэймона–Эшбаха.

Приведенный в работах [6–8] вывод дисперсионного соотношения в магнитостатическом приближении, выполненный тем же путем решения граничной задачи, как и приведенный в работе [9] вывод в рамках полной электродинамики, позволяет полученную систему двух уравнений, подобную (3.274)–(3.275), разделить на два уравнения, каждое из которых зависит только от одной компоненты волнового числа η

или ξ . Выполняемое далее численное решение каждого из полученных независимых уравнений методом поиска нуля, позволяет по отдельности получить законы дисперсии для действительной и мнимой частей волнового числа.

В настоящей задаче в рамках полной электродинамики такое разделение простыми приемами, использованными в работах [6–8], по-видимому, не реализуемо, поэтому для получения законов дисперсии для действительной и мнимой частей волнового числа требуется численно решать систему (3.274)–(3.275) выполняя поиск нуля одновременно по двум параметрам η и ξ .

Поскольку за один проход можно варьировать только одну переменную η или ξ , то другая в этот момент должна быть задана постоянной. При этом последовательное варьирование сначала одной, а затем другой переменной при заданной частоте позволит найти две зависимости одной переменной от другой — первой от второй и второй от первой, точка пересечения которых и даст значения обеих переменных, соответствующие заданной частоте. Задание частоты в определенном диапазоне ее изменения позволит найти зависимости обеих переменных от частоты по отдельности, то есть законы дисперсии для действительной и мнимой частей волнового числа.

Можно полагать, что использование описанной процедуры будет крайне громоздким, поэтому в рамках настоящей работы ограничимся далее лишь вычислением закона дисперсии для действительной части волнового числа численным методом на основе поиска нуля, опираясь непосредственно на дисперсионное соотношение (3.189)–(3.191).

Для этого вычислим дисперсионное соотношение в рамках описанных процедур с учетом комплексного характера проницаемости, вплоть до разделения действительной и мнимой частей, после чего возьмем только одну действительную часть, нуль которой и будем искать. В результате будет получен закон дисперсии только для действительной части в пренебрежении добавок, вносимых мнимой частью. Очевидно, что такое приближение допустимо только в рамках достаточно малых значений диссипации, причем при стремлении затухания к нулю закон дисперсии должен переходить в закон дисперсии в магнитоэлектростатическом приближении, то есть стремиться к классическому решению задачи Дэймона–Эшбаха. К реализации подобной программы перейдем далее.

3.10. Общая схема решения дисперсионного соотношения

Рассмотрим теперь закон дисперсии более подробно. Прежде всего, следуя [9], отметим характерные частоты, следующие из анализа расходимостей выражений для магнитной восприимчивости. Пример тако-

го анализа можно найти в работах [1, 2]. При параметрах $H = 437,5 \text{ Э}$, $4\pi M_0 = 1750 \text{ Гс}$, $\gamma = 2,8 \text{ МГц} \cdot \text{Э}^{-1}$ эти частоты равны:

$$f_1 = \gamma H = 1225 \text{ МГц}; \tag{3.291}$$

$$f_2 = \gamma \sqrt{H(H + 4\pi M_0)} = 2739 \text{ МГц}; \tag{3.292}$$

$$f_3 = \gamma(H + 2\pi M_0) = 3675 \text{ МГц}; \tag{3.293}$$

$$f_4 = \gamma \sqrt{(H + 2\pi M_0)^2 + (2\pi M_0)^2} = 4417 \text{ МГц}; \tag{3.294}$$

$$f_5 = \gamma(H + 4\pi M_0) = 6125 \text{ МГц}. \tag{3.295}$$

Интервал существования классической поверхностной волны Дэймона–Эшбаха заключен между частотами f_2 и f_3 . В области между частотами f_3 и f_4 магнитостатическое приближение дает существование обратной поверхностной волны диссипативного типа, то есть существующее только в среде с затуханием [5–8]. Другие решения магнитостатическое приближение получить не позволяет.

Процедура поиска нуля состоит в определении изменения знака дисперсионного соотношения при изменении варьируемого параметра с последующим уточнением полученного значения путем уменьшения шага варьирования до величины, требуемой желаемой точностью.

Следуя такой процедуре, подобно [9], будем следить за изменением знака дисперсионного соотношения (3.189), то есть функции

$$W(k) = \frac{e^{kd\alpha_0} - e^{-kd\alpha_0}}{e^{kd\alpha_0} + e^{-kd\alpha_0}} - \frac{2\mu\alpha_0}{\beta_0}, \tag{3.296}$$

где под k будем подразумевать лишь действительную часть волнового числа. Как отмечено выше, такое приближение не позволит найти закон дисперсии для мнимой части волнового числа, однако даст возможность определить характерные свойства дисперсии действительной части волнового числа и значительно упростит вычисления, ограничивая их поиском нуля лишь по одной переменной.

3.11. Дисперсия для действительной части волнового числа

Обратимся сначала к получению закона дисперсии для действительной части волнового числа, причем случаи отсутствия и наличия диссипации рассмотрим отдельно.

3.11.1. Дисперсия в отсутствие диссипации

В этом случае решение методом поиска нуля в отсутствие диссипации ($\alpha = 0$) приводит к картине, показанной на рис. 3.8. Этот рисунок, с точностью до масштаба по горизонтальной оси, повторяет рис. 3.4, приведенный в разделе 3.6.3, причем нумерация кривых в этом случае — та же.

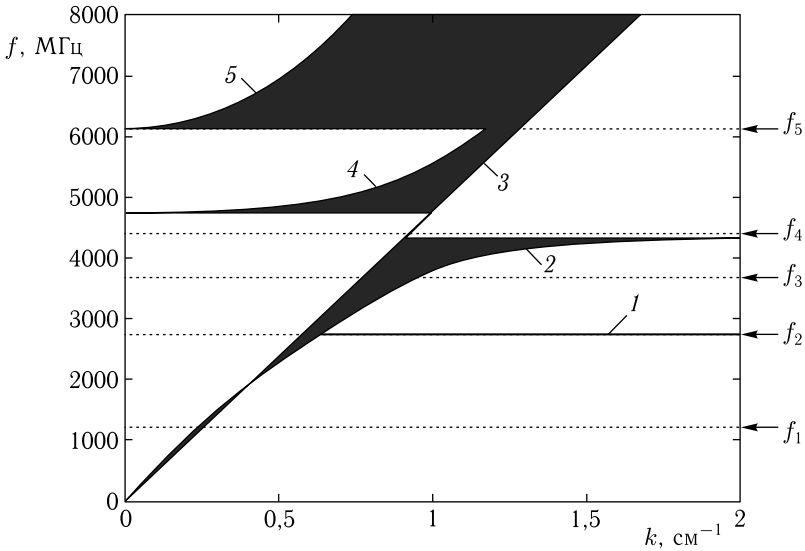


Рис. 3.8. Области различных знаков дисперсионного соотношения (3.198) в отсутствие диссипации. Здесь и далее нумерация кривых пояснена в тексте. Параметры: $H_0 = 437,5$ Э, $4\pi M_0 = 1750$ Гс, $d = 15$ мкм, $\varepsilon = 1$, $\alpha = 0$

Кривые на рисунке построены путем задания частоты с определенным шагом и изменения волнового числа от нуля до 2 см^{-1} . При этом регистрировался знак функции $W(k)$, задаваемой формулой (3.296). Таким образом, зачерненные и светлые области соответствуют различным знакам выражения (3.296), так что в пределах областей того или другого цвета знак этого выражения сохраняется, а на границах — меняется на противоположный.

Из рисунка можно видеть, что в полной электродинамике, кроме основной ветви поверхностной волны 1, существует также другая поверхностная ветвь 2, расположенная выше по частоте.

При учете диссипации в этой области существует диссипативная ветвь, имеющая обратный характер [5–8].

Кривая 2, представляющая собой правую границу зачерненной области между частотами f_2 и f_4 , также соответствует ветви прямых волн, лежащей выше классической ветви Дэймона–Эшбаха.

Однако на левой границе той же области дисперсионное соотношение также меняет знак. В области частот выше f_4 , кроме того еще и на правой границе зачерненных областей, знак функции $W(k)$ также изменяется.

В окрестности частоты f_1 , по-видимому, также имеет место изменение знака, связанное с особенностями μ и μ_a вблизи частоты ферромагнитного резонанса. Однако оно происходит здесь дважды в очень узком интервале изменения волнового числа, вследствие чего зачернен-

ная область сливается в единую линию. Ввиду незначительности своего проявления, здесь тонкая структура этой линии более подробно не исследовалась.

Во всем представленном на рис. 3.11 интервале частот можно видеть, что вариации знака в ту или иную сторону имеют место на прямой линии 3, проходящей через нуль частоты и волнового числа. Такой закон дисперсии соответствует распространению волны в свободном пространстве со скоростью света.

Следует отметить, что слева от этой прямой также имеются линии 4 и 5, на которых функция $W(k)$ меняет знак. Эти линии соответствуют случаю, когда фазовая скорость волны превышает скорость света. Можно полагать, что с физической стороны эти линии являются нереализуемыми, так как согласно специальной теории относительности [218–221] в свободном пространстве групповая скорость распространения волны, совпадающая в этом случае с ее фазовой скоростью, значения скорости света превышать не может. В работе [9] показано, что при увеличении диэлектрической проницаемости ϵ прямая 3 наклоняется в правую сторону, в результате чего ветви 4 и 5 частично выходят за границу, соответствующую скорости света в свободном пространстве, так что могут в какой-то степени реализоваться. Более подробно этот вопрос рассмотрен далее.

3.11.2. Влияние диссипации среды

Рассмотрим теперь, что происходит с приведенной картиной в случае среды, обладающей диссипацией. Обратимся к рис. 3.9, где изображены зависимости, подобные приведенным на рис. 3.8, с тем отличием, что здесь параметр затухания α задан равным 0,5.

Из рисунка видно, что здесь в основном сохранились те же ветви, что и в отсутствие затухания. Эти ветви пронумерованы теми же цифрами. Так, ветвь 1, отвечающая классической задаче Дэймона–Эшбаха, не изменилась совсем. Ветвь 2, соответствующая высокочастотной ветви поверхностных волн, лежащих по частоте выше ветви Дэймона–Эшбаха, если и изменилась, то в весьма малой степени. Ветвь 3, соответствующая электромагнитной волне в свободном пространстве, никаких изменений не претерпела. Однако ветви 4 и 5 деформировались в значительно большей степени. Так, ветвь 4 сохранила свой ход только в низкочастотной части, но выше по частоте, где-то посередине области своего первоначального существования, изогнулась вверх и затем пошла в обратную сторону, образуя ветвь обратных волн, подходящую высокочастотным концом к частоте f_5 , где в отсутствие затухания эта ветвь заканчивалась, оставаясь на всем своем протяжении ветвью прямых волн. Ветвь 5 перестала исходить от частоты f_5 , где она соответствовала нулевому волновому числу и теперь перенесла свое начало на той же частоте на волновое число, соответствующее волне в свободном пространстве (ветвь 3). Из этой точки ветвь 5 повернула в сторону меньших волновых чисел в сопровождении

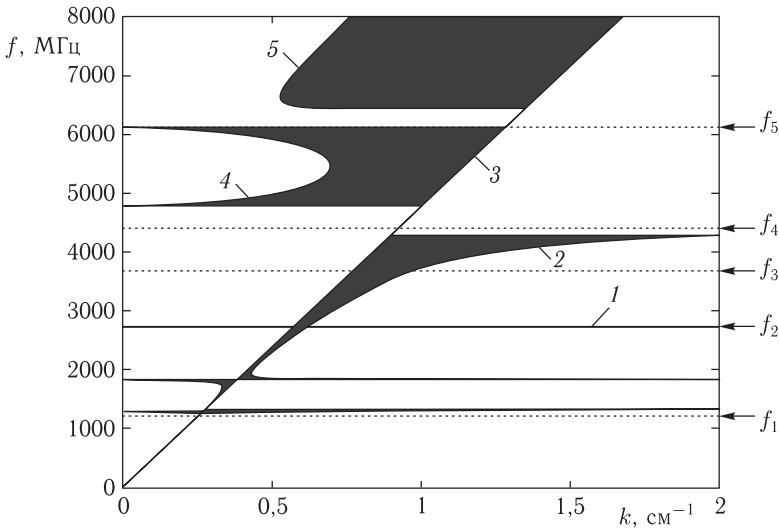


Рис. 3.9. Области различных знаков дисперсионного соотношения (3.189) при наличии диссипации с параметром затухания α , равном 0,5. Все остальные параметры совпадают с принятыми при построении рис. 3.8

роста по частоте, что придало обратный характер ее волне. Дойдя до волнового числа около $0,5 \text{ см}^{-1}$ и частоты около 6600 МГц , эта ветвь изменяет свое направление снова в сторону увеличения волновых чисел и далее продолжает свою высокочастотную часть подобно такой ветви в отсутствие затухания.

Таким образом, ветви 4 и 5, изменяя свое направление в окрестности частоты f_5 , образуют два участка обратных волн, разделенных запрещенным промежутком шириной порядка 200 МГц , начинающимся с частоты f_5 .

Кроме перечисленных ветвей в низкочастотной области образовались две дополнительные ветви, одна вблизи частоты ϵ и другая выше этой частоты примерно на 500 МГц . Низшая из этих ветвей соответствует расходимости выражений для компонент проницаемости α и ϵ вблизи частоты, соответствующей α . Причина второй ветви в явном виде из структуры обоих компонент проницаемости не просматривается, однако возможной причиной может быть прохождение через нуль выражения f_2 , присутствующего в знаменателе второго слагаемого выражения для f_4 вида (3.191). Точная причина появления и структуры этой второй ветви требует более подробного рассмотрения, выходящего за рамки настоящей работы.

3.11.3. Дисперсионные кривые

Рассмотрим теперь дисперсионные кривые, соответствующие границам областей, приведенных на рис. 3.8 и рис. 3.9.

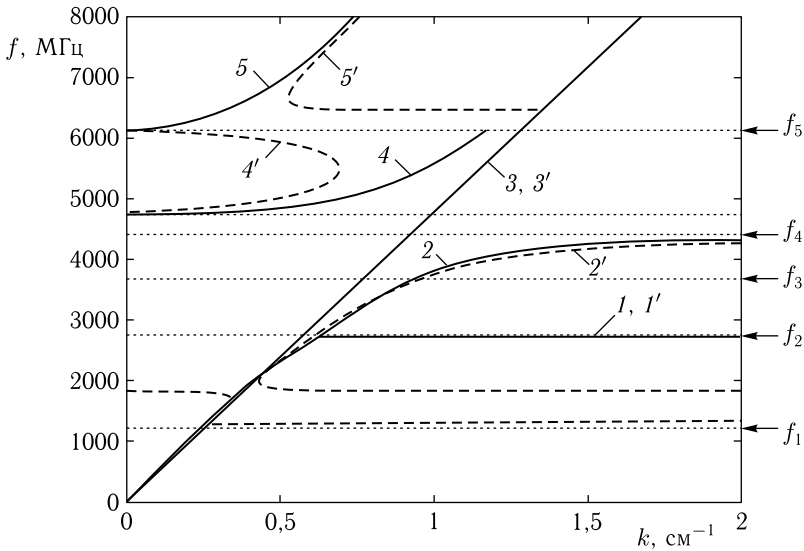


Рис. 3.10. Дисперсионные кривые для соотношения (3.189) в отсутствие диссипации (сплошные линии) и при параметре затухания, равном 0,5 (пунктирные линии)

Обратимся к рис. 3.10, где соответствующие кривые приведены вместе для наилучшей возможности сравнения. При этом сплошные линии и номера без штрихов соответствуют отсутствию диссипации, а пунктирные линии и номера со штрихами соответствуют параметру затухания ε , равному 0,5.

Параметры совпадают с принятыми при построении рис. 3.8 и рис. 3.9.

Из рисунка можно видеть, что сплошные и пунктирные линии для кривых 1 и 1' полностью совпадают, то есть при малых значениях волнового числа (по крайней мере, начиная со значения $0,7 \text{ см}^{-1}$, задаваемого кривой 3), решение задачи Дэймона–Эшбаха для поверхностных волн в рамках магнитостатики и полной электродинамики от величины диссипации не зависит. Сплошные и пунктирные линии для кривых 2 и 2' также, если и отличаются, то весьма незначительно, так что и для второй ветви поверхностных волн дисперсия от диссипации практически не зависит. Кривые 3 и 3' полностью совпадают, так как они описывают одну и ту же дисперсию электромагнитных волн в свободном пространстве. Кривые 4 и 4' более или менее близки только на низкочастотном участке, а кривые 5 и 5' близки на высокочастотном. Между этими участками кривые 4' и 5' сильно раздвигаются, образуя за счет диссипации значительную область аномальной дисперсии, подобную известной в оптике [153, 228]. В отсутствие затухания кривые 4 и 5 заканчиваются точно на частоте α , так что их концы,

соответствующие этой частоте, по волновому числу сильно различаются (нуль для кривой 5 и около $1,2 \text{ см}^{-1}$ для кривой 4). При увеличении параметра диссипации раздвижка по частоте между этими кривыми растет, но по волновому числу меняется мало, оставаясь довольно большой.

Низкочастотные ветви на частоте α и выше на 500 МГц, отмеченные ранее при рассмотрении рис. 3.9, имеют место только при наличии диссипации. Можно полагать, что, поскольку они вызваны расходимостью дисперсионного соотношения на этих частотах, то в отсутствие диссипации соответствующие им резонансные линии по частоте настолько узки, что примененный при расчете шаг по частоте (10 МГц) их разрешить не может, тогда как при наличии диссипации резонансная кривая расширяется и разрешение становится возможным. На более высокочастотной из этих кривых в области пересечения с кривой 3 наблюдается раздвижка ветвей, характерная для аномальной дисперсии.

3.12. Влияние диэлектрической проницаемости на дисперсию гиромагнитной волны

Рассмотрим теперь, что происходит с дисперсионными свойствами гиромагнитной волны в среде с диссипацией при изменении диэлектрической проницаемости.

Обратимся к рис. 3.11, где показаны дисперсионные кривые, подобные приведенным на рис. 3.10 (пунктирные линии), с тем отличием, что там диэлектрическая проницаемость ϵ равна единице, здесь же она положена равной 10.

Из рисунка видно, что общий характер кривых в основном сохранился, однако имеет место смещение всех кривых в направлении увеличения волнового числа. Кривая 3, соответствующая электромагнитной волне в отсутствие намагниченности, но при диэлектрической проницаемости, равной 10, сильно отклонена в правую сторону относительно кривой 3', соответствующей волне в свободном пространстве. Подобным образом смещены направо все остальные кривые. Для кривых 1 и 2 при сохранении подобия просто произошло смещение начала в сторону больших значений волнового числа: с $0,6 \text{ см}^{-1}$ на $2,0 \text{ см}^{-1}$.

Подобное смещение по горизонтали претерпели также кривые 4 и 5, однако здесь примечательно отметить, что теперь они выдвинулись за границу, определяемую кривой 3', причем кривая 5 выдвинулась вся целиком, а у кривой 4 выдвинулся участок, соответствующий ее повороту в сторону меньших значений волнового числа, то есть соответствующий обратным волнам.

Таким образом, в отличие от случая, соответствующего $\epsilon = 1$, где реализация кривых 4 и 5 не представлялась возможной (из-за нарушения общего постулата теории относительности), здесь, то есть при

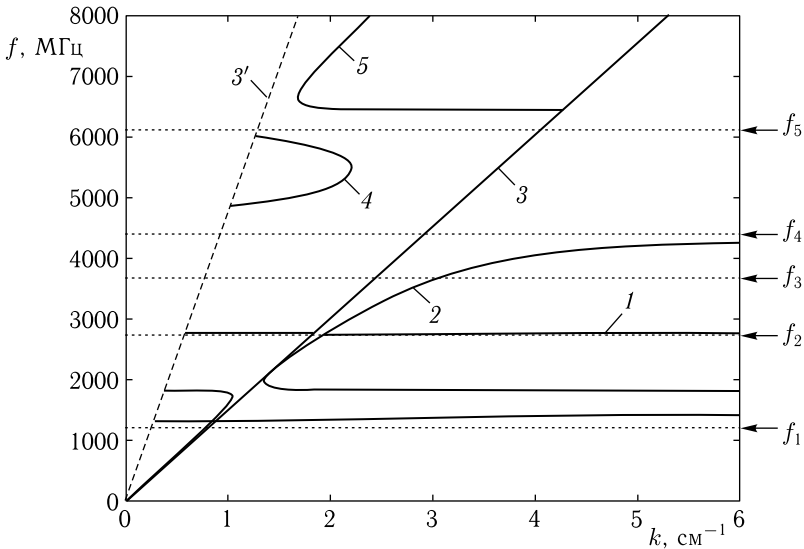


Рис. 3.11. Дисперсионные кривые для соотношения (3.189) при диэлектрической проницаемости $\epsilon = 10$ и параметре затухания $\alpha = 0,5$. Остальные параметры построения совпадают с принятыми при построении рис. 3.8 и рис. 3.9

$\epsilon = 10$, возможность реализации появляется. Очевидно, выход каких-то участков кривых 4 и 5 за пределы кривой 3', возможен только при достижении диэлектрической проницаемостью определенного критического значения, различного для этих кривых. Так, нижний участок кривой 5 выдвигается сразу, как только диэлектрическая проницаемость начинает превышать единицу, тогда как верхний ее участок и правая выпуклость кривой 4 требуют несколько больших конечных значений проницаемости. Поскольку характер кривых 4 и 5 сильно зависит от параметра затухания (как это видно из рис. 3.10), то критические значения диэлектрической проницаемости также будут сильно зависеть от параметра затухания. Более подробное рассмотрение этого вопроса авторы оставляют для будущих исследований.

3.13. Дисперсия гиромагнитной волны при больших волновых числах

Проведенное выше рассмотрение касается малых значений волновых чисел, где имеет место близость между длинами волн в магнитной среде и в свободном пространстве. Однако в работах [5–9, 11, 12, 15, 16, 222–226] показано, что при достаточно больших волновых числах диссипация приводит к ограничению предельного значения волнового числа и появлению ветви обратных диссипативных волн. Рассмотрим с той же точки зрения закон дисперсии гиромагнитной волны в среде

с диссипацией при волновых числах, значительно превышающих рассмотренные ранее, где длину волны в среде можно считать на несколько порядков меньше длины волны в свободном пространстве.

Обратимся к рис. 3.12, где показаны дисперсионные кривые для соотношения (3.189) при диэлектрической проницаемости $\varepsilon = 1$ и параметре затухания $\alpha = 0,5$ в интервале волновых чисел от нуля до 250 см^{-1} . Нумерация кривых — та же, что на предыдущих рисунках. Здесь кривая 1 соответствует ветви поверхностных волн типа Дэймона–Эшбаха, кривая 2 — дополнительной ветви поверхностной волны, лежащей выше по частоте, кривая 3 — электромагнитной волне в свободном пространстве (эта кривая совпадает с левым краем рисунка).

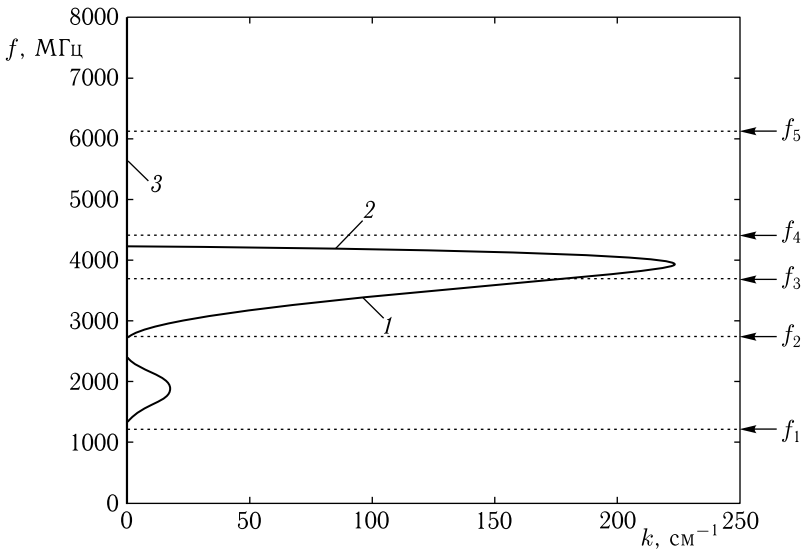


Рис. 3.12. Дисперсионные кривые для соотношения (3.189) при диэлектрической проницаемости $\varepsilon = 1$ и параметре затухания $\alpha = 0,5$. Остальные параметры построения совпадают с принятыми при построении на рис. 3.8 и рис. 3.9

Из рисунка можно видеть, что волна типа Дэймона–Эшбаха, начинаясь на частоте f_2 , претерпевает ограничение по волновому числу на уровне около 220 см^{-1} , причем с этого значения дисперсионная кривая загибается вверх и поворачивает обратно к частоте f_4 , вливаясь в продолжение кривой 2 на рис. 3.10. То есть здесь роль диссипативной ветви играет продолжение кривой 2, имеющее обратный характер.

Таким образом, можно полагать, что качественный характер поведения дисперсии гиромангнитной волны в диссипативной среде подобен таковому для волны типа Дэймона–Эшбаха в приближении магнито-статике.

Для более подробного количественного сравнения обратимся к рис. 3.13, где показаны дисперсионные кривые 1, 2, 3, построенные по соотношению (3.189) при тех же условиях, что на рис. 3.12, а также для сравнения приведены кривая $1'$, соответствующая соотношению Дэймона–Эшбаха без диссипации, и кривая $1''$, соответствующая соотношению Дэймона–Эшбаха, с диссипацией, полученному в магнитостатическом приближении.

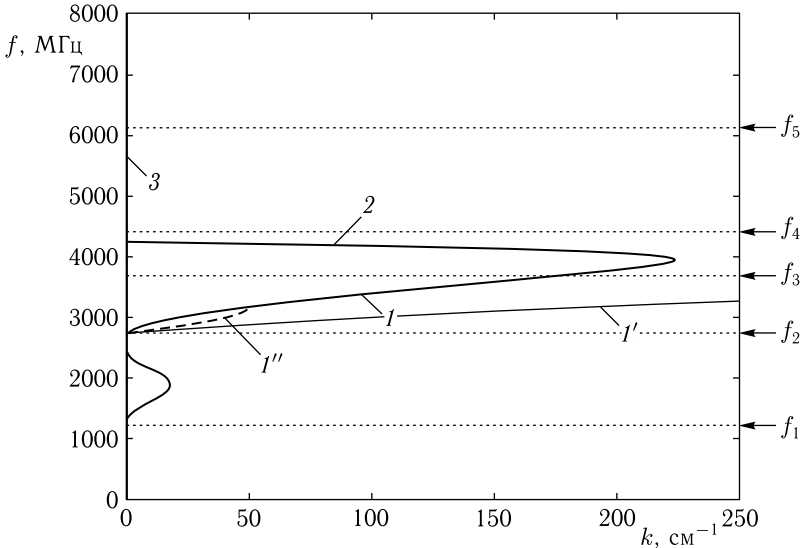


Рис. 3.13. Дисперсионные кривые для соотношения (3.189) при диэлектрической проницаемости $\varepsilon = 1$ и параметре затухания $\alpha = 0,5$ (кривые 1–3), а также кривые для соотношения Дэймона–Эшбаха в полном ($1'$) и магнитостатическом ($1''$) приближениях. Остальные параметры построения совпадают с принятыми при построении на рис. 3.8 и рис. 3.9

Из рисунка можно видеть, что соотношение (3.189), полученное в рамках полной электродинамики, в отсутствие диссипации дает ту же самую кривую $1'$, что и соотношение Дэймона–Эшбаха, полученное в магнитостатическом приближении также без диссипации. В обоих случаях получается одна и та же кривая $1'$, полностью совпадающая. То есть в отсутствие диссипации в области достаточно больших волновых чисел, как полная электродинамика, так и магнитостатическое приближение дают один и тот же закон дисперсии.

При наличии диссипации, то есть при $\alpha = 0,5$, полная электродинамика дает кривую 1, а магнитостатическое приближение — кривую $1''$ (показана пунктиром). Обе они на начальном участке до волнового числа порядка 50 см^{-1} близко совпадают, проходя несколько выше бездиссипативной кривой $1'$. Однако далее кривая $1''$ обрывается, давая

начало диссипативной ветви, которая здесь не реализуется из-за довольно большого затухания, тогда как кривая 1 продолжается вплоть до волнового числа порядка 220 см^{-1} , после чего переходит на диссипативную ветвь 2.

Отсутствие диссипативной ветви в магнитостатическом приближении, по-видимому, здесь связано с ограничением применимости магнитостатики на частотах выше предельной частоты кривой Дэймона–Эшбаха. Более подробно вопрос об условиях, когда диссипативная ветвь отсутствует, рассмотрен в работах [5–8], где определены области ее существования в зависимости от параметра затухания.

В качестве заметного расхождения следует отметить различие предельных значений волнового числа, даваемых в том и другом приближении. Так, приближение магнитостатики дает около 50 см^{-1} , тогда как полная электродинамика приводит к значению 220 см^{-1} , большему примерно в четыре раза.

Можно предположить две причины такого различия. Во-первых, оба приближения используют укороченные значения компонент тензора магнитной проницаемости вида (2.39), (2.40), что затрудняет точное определение ограничения в магнитостатическом приближении из-за разрыва дисперсионных кривых на частоте, соответствующей такому ограничению. При этом дисперсионная кривая асимптотически приближается к этой частоте, допуская определенный произвол определению точки обрыва. То есть в магнитостатическом приближении ограничение получается несколько заниженным. Во-вторых, задача в рамках полной электродинамики требует поиска нуля по обоим компонентам комплексного волнового числа, что, как отмечено выше, требует значительной затраты вычислительных ресурсов, поэтому в рамках настоящей работы выполнен поиск только по одной действительной компоненте. То есть такое приближение допустимо только при достаточно малых значениях параметра затухания. Можно полагать, что более подробный учет мнимой компоненты приведет к уточненным кривым и для действительной компоненты волнового числа. Более подробному выяснению этого вопроса авторы предполагают посвятить отдельную работу.

Выводы по главе 3

Данная глава посвящена рассмотрению дисперсионных свойства электромагнитных волн, распространяющихся в касательно намагниченной ферритовой пластине, обладающей гиротропными свойствами. Получены дисперсионные соотношения для действительной и мнимой частей волнового числа. Определены частотные области существования прямых и обратных волн, в том числе ограничение по волновому числу. Рассмотрена дисперсия волн при больших волновых числах.

Основные вопросы, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующим.

1. В рамках полной электродинамики рассмотрены дисперсионные свойства электромагнитных волн, распространяющихся в касательно намагниченной ферритовой пластине, обладающей бигиротропными свойствами. В декартовой системе координат записаны выражения для тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей в бигиротропной среде при условии совпадения осей гиротропии обоих тензоров. Приведены общие уравнения электродинамики для среды, обладающей гиромангнитными свойствами. Показано, что гиротропный характер тензоров проницаемостей позволяет сформировать из общих уравнений электродинамики единую систему, состоящую из двух связанных уравнений второго порядка волнового типа, содержащих компоненты электрического и магнитного полей, направленные вдоль оси гиротропии. Отмечено, что путем исключения одной из компонент того или другого поля полученную систему можно свести к одному уравнению четвертого порядка, содержащему смешанные производные по координатам, перпендикулярным оси гиротропии.

2. С целью упрощения задачи рассмотрен частный случай отсутствия зависимости полей от координаты, соответствующей оси гиротропии. Показано, что в этом случае полная система уравнений распадается на два независимых уравнения, каждое из которых содержит лишь одно из полей, параллельных оси гиротропии. Показано, что каждое из этих уравнений описывает волну, распространяющуюся перпендикулярно оси гиротропии, причем нормальные к оси гиротропии компоненты полей каждой из таких волн полностью определяются той из них, которая параллельна оси гиротропии.

3. Волна, для которой нормальные к оси гиротропии компоненты электрического поля определяются параллельной оси гиротропии компонентой магнитного поля, названа гирозлектрической. Волна, для которой нормальные к оси гиротропии компоненты магнитного поля определяются параллельной оси гиротропии компонентой электрического поля, названа гиромангнитной. В силу важнейшей роли ферритов в технике сверхвысоких частот, где волна имеет преимущественно гиромангнитный характер, дальнейшее рассмотрение посвящено свойствам именно гиромангнитных волн.

4. В геометрии задачи Дэймона–Эшбаха для касательно намагниченной ферритовой пластины рассмотрено общее волновое уравнение для гиромангнитной волны. Отмечено, что в такой геометрии ось гиротропии совпадает с направлением постоянного поля и также лежит в плоскости пластины. Получено полное решение волнового уравнения как внутри ферритовой пластины, так и в окружающих ее двух свободных полупространствах. Записаны граничные условия на поверхностях пластины, состоящие в равенстве касательных компонент полей и нормальных компонент индукции. Путем подстановки полученного решения в граничные условия получена система уравнений для амплитуд компонент полей волны во всех трех областях пространства. Из условия нетривиальности решения полученной системы найдено

дисперсионное соотношение для гиромангнитной волны, выраженное через компоненты волнового вектора, перпендикулярные к поверхностям пластины. На основе единства компонент волны внутри и вне ферритовой пластины, получены соотношения, связывающие эти компоненты волнового вектора с волновым числом волны, распространяющейся вдоль плоскости пластины перпендикулярно оси гиротропии. С помощью этих соотношений исходное дисперсионное соотношение приведено к виду, по структуре подобному соотношению Дэймона–Эшбаха, связывающему частоту магнитостатической волны с волновым числом в направлении ее распространения. Показано, что параметры полученного дисперсионного соотношения имеют специфический характер, отличающий их от соотношения Дэймона–Эшбаха наличием дополнительных слагаемых, отсутствующих в приближении магнитостатики.

5. На основе полученного дисперсионного соотношения численным методом поиска нуля построены дисперсионные кривые для гиромангнитной волны во всем диапазоне ее частот от нуля до бесконечности. Путем сравнения с классическим соотношением Дэймона–Эшбаха показано, что приближение магнитостатики совпадает с рассмотрением в рамках полной электродинамики только в области достаточно больших волновых чисел, соответствующих длине магнитостатической волны значительно меньшей, чем длина электромагнитной волны той же частоты.

6. Рассмотрены особенности дисперсии гиромангнитной волны в ферритовой пластине при малых значениях волнового числа, когда длина гиромангнитной волны имеет тот же порядок, что и длина электромагнитной волны в свободном пространстве. Показано, что в полном диапазоне частот от нуля до бесконечности имеется полоса, где гиромангнитная волна имеет поверхностный характер, а выше и ниже этой полосы — объемный характер. В пределах полосы поверхностного характера волны обнаружены две ветви — низкочастотная и высокочастотная, причем низкочастотная соответствует магнитостатической волне Дэймона–Эшбаха, а высокочастотная в магнитостатическом приближении отсутствует. В области объемных волн отмечен их предельный характер по волновому числу, ограниченный скоростью света в свободном пространстве.

7. Рассмотрена деформация дисперсионных кривых в случае отличного от единицы значения диэлектрической проницаемости среды. Показано, что дисперсионные кривые, сохраняя полосовой частотный характер, по волновому числу сдвигаются в сторону его увеличения с коэффициентом, пропорциональным квадратному корню из значения диэлектрической проницаемости. Отмечено, что при увеличении диэлектрической проницаемости ограничение волнового числа пределом скорости света частично преодолевается, что приводит к появлению дополнительных ветвей спектра объемных гиромангнитных волн, лежащих по частоте выше обеих ветвей поверхностных волн.

8. Рассмотрены особенности дисперсионного соотношения для среды, обладающей диссипацией. Диссипация введена через учет в уравнении Ландау–Лифшица диссипативного члена Гильберта с соответствующим параметром затухания. В линейном приближении получены компоненты тензора магнитной проницаемости, содержащие действительную и мнимую части. Показано, что компоненты проницаемости в первом приближении можно представить в виде, действительная часть которого от диссипации не зависит, а мнимая прямо пропорциональна параметру затухания.

9. Дисперсионное соотношение приведено к виду, содержащему квадрат волнового числа в сочетании с компонентами, от волнового числа не зависящими. Полное соотношение представлено в комплексном виде, содержащем действительную и мнимую части, сумма которых равна нулю. Равенство нулю каждой из этих частей позволило получить систему уравнений для действительной и мнимой частей волнового числа, содержащих компоненты тензора магнитной проницаемости.

10. Установлен универсальный вид полученной системы уравнений, означающий, что она в равной степени отвечает как полной электродинамике, так и магнитостатическому приближению. Отмечено, что в магнитостатическом приближении систему можно разделить на два уравнения, каждое из которых содержит только одну из компонент волнового числа — действительную или мнимую. Численное решение полученных независимых уравнений методом поиска нуля позволяет получить закон дисперсии для действительной и мнимой частей волнового числа по отдельности.

11. По причине высокой сложности поиска нуля по двум переменным, предложен упрощенный вариант, состоящий в выделении из полного дисперсионного соотношения действительной части, для которой осуществляется поиск нуля при варьировании только действительной части волнового числа.

12. Рассмотрены дисперсионные кривые в случаях отсутствия и наличия диссипации. Отмечено, что в отсутствие диссипации дисперсионные кривые, кроме обычной ветви поверхностной волны типа Дэймона–Эшбаха, имеют еще одну ветвь, лежащую выше по частоте. Рассмотрены особенности дисперсии гиромангнитной волны в ферритовой пластине при малых значениях волнового числа. Показано, что в полном диапазоне частот от нуля до бесконечности имеется полоса, где гиромангнитная волна имеет поверхностный характер, а выше и ниже этой полосы — объемный характер. В пределах полосы поверхностного характера волны обнаружены две ветви — низкочастотная и высокочастотная, причем низкочастотная соответствует магнитостатической волне Дэймона–Эшбаха, а высокочастотная в магнитостатическом приближении отсутствует. В области объемных волн, лежащей выше волны типа Дэймона–Эшбаха, отмечены две ветви прямых волн, имеющие по волновому числу предельный характер, ограниченный скоростью

света в свободном пространстве. Показано, что при наличии диссипации характер ветвей типа Дэймона–Эшбаха меняется мало, однако обе ветви прямых волн, лежащие выше частоты Дэймона–Эшбаха, поворачивают в сторону, противоположную первоначальному изменению, образуя участки обратных волн. Отмечено взаимное расталкивание ветвей этих волн, образующее запрещенную зону, характерную для аномальной дисперсии, известной в оптике.

13. Показано, что при диэлектрической проницаемости, равной единице, обе эти ветви целиком лежат в области волновых чисел, ограниченной скоростью света в свободном пространстве, то есть в физическом отношении не реализуются. При диэлектрической проницаемости большей единицы эти ветви смещаются в сторону больших волновых чисел, так что значительная часть их, в том числе участки обратных волн, становится реализуемой.

14. Рассмотрены дисперсионные кривые для гиромагнитной волны в среде с диссипацией в области больших значений волновых чисел. Показано, что ветвь типа Дэймона–Эшбаха имеет ограничение по волновому числу, подобное таковому, получаемому в магнитостатическом приближении. При увеличении частоты выше соответствующей предельному значению волнового числа, эта ветвь поворачивает в сторону меньших значений волнового числа, образуя участок волн обратного характера. По мере уменьшения волнового числа эта ветвь смыкается с высокочастотной ветвью, лежащей выше ветви Дэймона–Эшбаха. Отмечено некоторое различие между характером ограничения по волновому числу в магнитостатическом приближении и в рамках полной электродинамики. В качестве возможной причины такого различия отмечен недостаточный учет влияния мнимой составляющей волнового числа.

Глава 4

ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН В КАСАТЕЛЬНО НАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЕ ФЕРРИТА С ДИССИПАЦИЕЙ

Настоящая глава посвящена рассмотрению дисперсионных свойства магнитостатических волн, распространяющихся в касательно намагниченной ферритовой пластине, обладающей гиротропными свойствами и диссипацией. В приближении магнитостатики рассмотрены дипольные волны без учета обмена и динамического размагничивания. В отличие от предыдущей главы, где рассматриваются относительно длинные волны, требующие учета кроме магнитного также и электрического поля, здесь внимание сосредоточено на коротких волнах, в которых магнитное поле в сравнении с электрическим настолько велико, что электрическим полем можно пренебречь. Основное внимание уделено влиянию диссипации на закон дисперсии магнитостатической волны. Дисперсионное соотношение приведено к структуре, подобной классическому соотношению Дэймона–Эшбаха. Отмечено ограничение по максимальной величине волнового числа.

Основной ход изложения следует [5–8], а необходимые дополнительные ссылки указываются в тексте.

4.1. Общий характер дисперсии в среде с диссипацией

В главе 2 (раздел 2.8) в геометрии касательно намагниченной ферритовой пластины получено дисперсионное соотношение для магнитостатической волны, распространяющейся в отсутствие диссипации. Рассмотрим теперь, какие особенности в закон дисперсии вносит наличие диссипации. Прежде всего следует учесть, что в среде с диссипацией волновое число должно иметь комплексный характер, то есть кроме колебательного процесса с постоянной амплитудой должен присутствовать сомножитель, амплитуда которого по мере распространения волны будет падать. Далее, поскольку волновое число будет содержать действительную и мнимую компоненты, то и дисперсионных соотношений должно быть два, по одному для каждой компоненты. Рассмотрим эти особенности более подробно.

4.1.1. Общая геометрия задачи

Будем рассматривать задачу в той же геометрии, что и ранее. Общая схема геометрии, используемой далее, показана на рис. 4.1. Можно видеть, что она с точностью до обозначений совпадает с представленной на рис. 2.1. Здесь она приведена еще раз для удобства рассмотрения.

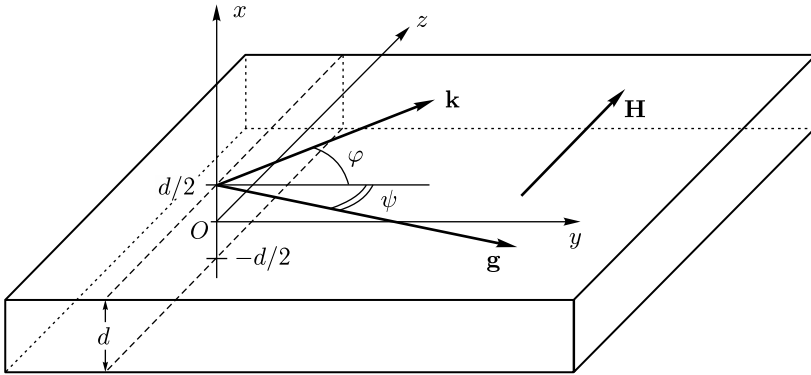


Рис. 4.1. Общая геометрия задачи

Ферритовая пластина толщины d намагничена в плоскости полем \mathbf{H} . Декартова система координат $Oxyz$ выбрана таким образом, что ее начало, точка O , находится на середине толщины пластины, плоскость Oyz параллельна плоскости пластины, а ось Ox ей перпендикулярна. При этом координаты плоскостей пластины по оси Ox равны $\pm d/2$. Ось Oz ориентирована вдоль поля \mathbf{H} . Далее рассматриваются поверхностные магнитостатические волны (ПМСВ), распространяющиеся вдоль верхней поверхности пластины при $x = d/2$. Волновой вектор \mathbf{k} лежит в плоскости Oyz и составляет угол φ с осью Oy , вектор групповой скорости \mathbf{g} лежит в той же плоскости и составляет угол ψ с осью Oy .

4.1.2. Дисперсионное соотношение в отсутствие диссипации

В разделе 2.5, посвященном решению классической задачи Дэймона–Эшбаха, показано, что основное дисперсионное соотношение для поверхностных магнитостатических волн в отсутствие затухания имеет вид (2.207):

$$\frac{e^{i2\rho} - e^{-i2\rho}}{e^{i2\rho} + e^{-i2\rho}} = \frac{k_x^e (\xi_2 - \xi_1)}{(k_x^e)^2 - \xi_1 \xi_2}, \quad (4.1)$$

где:

$$\rho = k_x^i \cdot \frac{d}{2}; \quad (4.2)$$

$$\xi_1 = i\mu k_x^i + \nu k_y; \quad (4.3)$$

$$\xi_2 = -i\mu k_x^i + \nu k_y, \quad (4.4)$$

причем:

$$k_x^e = k; \quad (4.5)$$

$$k_x^i = ik\vartheta, \quad (4.6)$$

а компоненты тензора проницаемости определяются формулами:

$$\mu = 1 + \frac{\Omega_H}{\Omega_H^2 - \Omega^2}; \quad (4.7)$$

$$\nu = \frac{\Omega}{\Omega_H^2 - \Omega^2}, \quad (4.8)$$

в которых Ω и Ω_H имеют вид (2.26), (2.27).

Входящий в (4.24) параметр ϑ при произвольном направлении распространения волны имеет вид (2.212):

$$\vartheta = \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{\mu}}. \quad (4.9)$$

Замечание. Из сравнения (4.9) с формулой (2.212) можно видеть, что введенный здесь параметр ϑ тождественен используемому в классической задаче Дэймона–Эшбаха параметру α . Здесь для него введено новое буквенное обозначение ϑ , чтобы не путать с параметром затухания Гильберта, который традиционно обозначается через α .

Приведенное здесь соотношение (4.1) является универсальным в том отношении, что оно получено без какого-либо предположения о структуре компонент тензора магнитной проницаемости μ и ν . В отсутствие диссипации они определяются формулами (4.7)–(4.8), а при наличии затухания следует использовать выражения

$$\mu = 1 + 4\pi\chi; \quad (4.10)$$

$$\nu = \chi_a, \quad (4.11)$$

где χ и χ_a определяются формулами (4.23) и (4.24), явный вид которых будет рассмотрен далее.

4.1.3. Магнитная восприимчивость в среде с затуханием

Для описания движения вектора намагниченности в среде с потерями будем пользоваться уравнением Ландау–Лифшица с диссипативным членом в форме Гильберта [40–42, 206]:

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma \cdot [\mathbf{m} \times \mathbf{H}_e] + \alpha \cdot \left[\mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \right], \quad (4.12)$$

где $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_0$ — нормированный вектор намагниченности, M_0 — намагниченность насыщения, γ — гиромагнитная постоянная ($\gamma > 0$), α — параметр затухания, \mathbf{H}_e — эффективное поле, равное:

$$\mathbf{H}_e = -\frac{1}{M_0} \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{m}}, \quad (4.13)$$

где U — плотность магнитной энергии, в рассматриваемой геометрии равная:

$$U = -M_0 h_x m_x - M_0 h_y m_y - M_0 H_0 m_z + 2\pi M_0^2 m_x^2. \quad (4.14)$$

Решение уравнения (4.1) в приближении малого затухания (то есть при $\alpha \ll 1$) дает компоненты тензора восприимчивости в виде, получаемом из (2.30), (2.31):

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \cdot \left\{ \frac{\Omega_H}{\Omega_H^2 - \Omega^2} - i \cdot \alpha \frac{\Omega(\Omega_H^2 + \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2} \right\}; \quad (4.15)$$

$$\chi_a = \frac{1}{4\pi} \cdot \left\{ \frac{\Omega}{\Omega_H^2 - \Omega^2} - i \cdot \alpha \frac{2\Omega^2\Omega_H}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2} \right\}, \quad (4.16)$$

где в соответствии с (2.26), (2.27) введены нормированные частоты:

$$\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}; \quad (4.17)$$

$$\Omega_H = \frac{H_0}{4\pi M_0}. \quad (4.18)$$

Запишем эти компоненты в укороченном виде, для чего, подобно [5, 28], введем вспомогательные обозначения:

$$A = \frac{\Omega_H}{\Omega_H^2 - \Omega^2}; \quad (4.19)$$

$$B = \frac{\Omega}{\Omega_H^2 - \Omega^2}; \quad (4.20)$$

$$C = \frac{\Omega(\Omega_H^2 + \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2}; \quad (4.21)$$

$$D = \frac{2\Omega^2\Omega_H}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2}. \quad (4.22)$$

В этом случае в обозначениях (4.19)–(4.22) компоненты восприимчивости (4.15)–(4.16) принимают вид:

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \cdot (A - i \cdot \alpha C); \quad (4.23)$$

$$\chi_a = \frac{1}{4\pi} \cdot (B - i \cdot \alpha D). \quad (4.24)$$

Таким образом, формулы (4.23)–(4.24) представляют собой искомую укороченную запись компонент восприимчивости, которая используется далее.

4.1.4. Упрощенное преобразование параметра ϑ в случае комплексного волнового числа

Будем полагать, что среда является изотропной, а волны возбуждаются пространственно локализованным источником, колеблющимся с заданной частотой ω . Пусть волновое число является комплексным:

$$k = \eta - i\xi, \quad (4.25)$$

где η и ξ — действительные постоянные ($\eta > 0$ и $\xi > 0$).

Приведем вариант упрощенной записи параметра ϑ в приближении малого затухания при учете комплексного характера волнового числа.

Согласно (4.9), при произвольном угле φ параметр ϑ в знаменателе подкоренной дроби содержит величину μ , в отсутствие затухания определяемую соотношением (4.7). Однако из сравнения (4.7) с (4.15) можно видеть, что при $\alpha = 0$ параметр μ принимает вид:

$$\mu = 1 + 4\pi\chi. \quad (4.26)$$

При учете затухания надо использовать полное выражение для χ , в укороченном виде определяемое соотношением (4.23). При этом получаем параметр ϑ в виде:

$$\vartheta = \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{(1+A) - i\alpha C}}. \quad (4.27)$$

В подкоренном выражении освободимся от мнимости в знаменателе дроби и выделим по отдельности действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{(1+A) - i\alpha C} = & \left[\cos^2 \varphi + \frac{(1+A)\sin^2 \varphi}{(1+A)^2 + \alpha^2 C^2} \right] + \\ & + i \cdot \frac{\alpha C \sin^2 \varphi}{(1+A)^2 + \alpha^2 C^2}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Из численных оценок величин A и C (4.19)–(4.21) видно, что на частотах выше Ω_H хотя бы на $\sim 10\%$ при $\alpha \ll 1$ второе слагаемое в знаменателе этих дробей всегда намного меньше первого, так что им по сравнению с первым можно пренебречь. При этом получаем:

$$\cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{(1+A) - i\alpha C} = \frac{1+A\cos^2 \varphi}{1+A} + i \cdot \frac{\alpha C \sin^2 \varphi}{(1+A)^2}. \quad (4.29)$$

Подставляя это выражение в (4.27), получаем:

$$\vartheta = \sqrt{\frac{1+A\cos^2 \varphi}{1+A} + i \cdot \frac{\alpha C \sin^2 \varphi}{(1+A)^2}}. \quad (4.30)$$

Для разделения действительной и мнимой частей этого выражения воспользуемся формулой квадратного корня из комплексного числа:

$$\sqrt{a+ib} = \pm \left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \right). \quad (4.31)$$

Параметр ϑ содержится в дисперсионном соотношении (2.222) только в виде произведения $\vartheta \cdot \text{cth}(kd\vartheta)$ подобно α в (2.212). Можно видеть, что при изменении знака ϑ это произведение не меняется, то есть

знак перед скобками в правой части (4.31) безразличен. Поэтому для простоты можно взять «плюс», в результате чего получаем:

$$\vartheta = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad (4.32)$$

где:

$$a = \frac{1 + A \cos^2 \varphi}{1 + A}; \quad (4.33)$$

$$b = \frac{\alpha C \sin^2 \varphi}{(1 + A)^2}. \quad (4.34)$$

Найдем подкоренное выражение внутреннего корня:

$$a^2 + b^2 = \frac{(1 + A \cos^2 \varphi)^2}{(1 + A)^2} + \frac{\alpha^2 C^2 \sin^4 \varphi}{(1 + A)^4}. \quad (4.35)$$

Здесь также при учете (4.19) и (4.21) можно видеть, что в случае $\alpha \ll 1$ при удалении от Ω_H хотя бы на $\sim 10\%$ второе слагаемое становится значительно меньше первого, так что им можно пренебречь. При этом получаем внутренний корень выражения (4.31) в виде:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1 + A \cos^2 \varphi}{1 + A}. \quad (4.36)$$

Здесь при извлечении корня оставлен знак «плюс», так как предельное значение ϑ (4.30) при $\varphi \rightarrow 0$ в случае плюса дает $\vartheta|_{\varphi=0} = 1$, как это получается при параллельно-перпендикулярной геометрии, принятой в работах [5, 28], тогда как в случае минуса $\vartheta|_{\varphi=0} = -i$, что случаю принятой там геометрии противоречит.

Подставляя (4.36) в (4.32) и выполняя сложение, можно видеть, что второе слагаемое в формуле (4.32) обращается в нуль, в результате чего получаем:

$$\vartheta = \sqrt{\frac{1 + A \cos^2 \varphi}{1 + A}}. \quad (4.37)$$

Здесь величина A , определяемая формулой (4.19), отрицательна и меньше единицы, а $\cos^2 \varphi$ также всегда меньше или равен единице, так что как числитель, так и знаменатель подкоренной дроби всегда положительны, то есть рассчитываемое по этой формуле значение ϑ всегда действительное.

Подставляя значение A в соответствии с (4.19), получаем

$$\vartheta = \sqrt{\frac{\Omega_H^2 - \Omega^2 + \Omega_H \cos^2 \varphi}{\Omega_H^2 - \Omega^2 + \Omega_H}}. \quad (4.38)$$

Напомним, что в соответствии с (4.28), такое представление ϑ достаточно справедливо лишь на частотах, которые выше $\sqrt{\Omega_H(\Omega_H + 1)}$ хотя бы на $\sim 10\%$. При этом значение ϑ является действительным

и при $\varphi = 0$ обращается в единицу [5, 28]. В то же время, наибольший интерес представляет рассмотрение дисперсии ПМСВ вблизи частоты, большей этого значения примерно в полтора раза, где ожидается ограничение предельного значения волнового числа, поэтому представление (4.37)–(4.38) в этом случае можно считать вполне правомерным.

4.1.5. Общий вид волновой функции и дисперсионного соотношения в случае комплексного волнового числа

Предположим, что волновая функция имеет вид:

$$u(\omega, r, t) = u_0|_{r=0} \cdot e^{-\xi r} \cdot e^{i(\omega t - \eta r)}, \tag{4.39}$$

то есть волна распространяется в положительном направлении координаты r , отсчитываемой от источника, причем в процессе распространения амплитуда волны уменьшается по экспоненте с показателем, пропорциональным мнимой части волнового числа ξ .

Длина волны λ определяется соотношением:

$$\eta\lambda = 2\pi, \tag{4.40}$$

то есть не меняется и задается действительной частью волнового числа η .

Аналогично [5, 28], примем определение «дисперсионного соотношения для действительной части волнового числа» в виде:

$$R(\omega, \eta) = 0, \tag{4.41}$$

где R — функция, определяемая параметрами среды, в том числе параметром затухания.

Кроме этого потребует рассмотрения соотношение между частотой ω и мнимой частью волнового числа ξ :

$$G(\omega, \xi) = 0, \tag{4.42}$$

которое будем называть «дисперсионным соотношением для мнимой части волнового числа».

4.2. Дисперсионное соотношение для действительной части волнового числа

Итак, будем исходить из дисперсионного соотношения в виде (4.1):

$$\frac{e^{i2\rho} - e^{-i2\rho}}{e^{i2\rho} + e^{-i2\rho}} = \frac{k_x^e(\xi_2 - \xi_1)}{(k_x^e)^2 - \xi_1\xi_2}, \tag{4.43}$$

где в соответствии с (4.2)–(4.6):

$$i2\rho = -kd\vartheta; \tag{4.44}$$

$$-i2\rho = kd\vartheta, \tag{4.45}$$

а параметры ξ_1 и ξ_2 , будучи записанными через компоненты восприимчивости χ и χ_a , согласно (4.3)–(4.4), имеют вид

$$\xi_1 = -k \cdot [(1 + 4\pi\chi)\vartheta - 4\pi\chi_a \cos \varphi]; \quad (4.46)$$

$$\xi_2 = k \cdot [(1 + 4\pi\chi)\vartheta + 4\pi\chi_a \cos \varphi]. \quad (4.47)$$

Входящие в (4.43) промежуточные соотношения, содержащие ξ_1 и ξ_2 , имеют вид:

$$\xi_2 - \xi_1 = 2k \cdot (1 + 4\pi\chi)\vartheta; \quad (4.48)$$

$$\xi_1 \xi_2 = -k^2 \left[\vartheta^2 + 8\pi\chi\vartheta^2 + 16\pi^2 (\chi^2 \vartheta^2 - \chi_a^2 \cos^2 \varphi) \right]. \quad (4.49)$$

В таком виде дисперсионное соотношение получено без какого-либо предположения о действительном или комплексном характере входящих в него величин, то есть имеет наиболее общий вид. Для учета затухания надо волновое число k , параметр ϑ и компоненты восприимчивости χ и χ_a записать в комплексном виде. С целью упрощения дальнейших вычислений, введем вспомогательные обозначения левой и правой частей дисперсионного соотношения (4.43):

$$V = \frac{e^{i2\rho} - e^{-i2\rho}}{e^{i2\rho} + e^{-i2\rho}}; \quad (4.50)$$

$$W = \frac{k_x^e (\xi_2 - \xi_1)}{(k_x^e)^2 - \xi_1 \xi_2}. \quad (4.51)$$

В этих обозначениях дисперсионное соотношение (4.43) имеет вид:

$$V = W. \quad (4.52)$$

Подставляя (4.44)–(4.49) в (4.50)–(4.51), получаем:

$$V = \frac{e^{-kd\vartheta} - e^{kd\vartheta}}{e^{-kd\vartheta} + e^{kd\vartheta}}; \quad (4.53)$$

$$W = \frac{2(1 + 4\pi\chi)\vartheta}{1 + \vartheta^2 + 8\pi\chi\vartheta^2 + 16\pi^2 (\chi^2 \vartheta^2 - \chi_a^2 \cos^2 \varphi)}. \quad (4.54)$$

Выполним преобразование этих частей по отдельности.

4.2.1. Преобразование левой части дисперсионного соотношения

Преобразуем сначала левую часть дисперсионного соотношения (4.52), имеющую вид (4.53). В этом выражении волновое число k является комплексным:

$$k = \eta - i \cdot \xi. \quad (4.55)$$

Подставляя в показатели экспонент комплексное волновое число в виде (4.55) и пользуясь формулой Эйлера, получаем:

$$e^{kd\vartheta} = e^{\eta d\vartheta} [\cos(\xi d\vartheta) - i \sin(\xi d\vartheta)]; \quad (4.56)$$

$$e^{-kd\vartheta} = e^{-\eta d\vartheta} [\cos(\xi d\vartheta) + i \sin(\xi d\vartheta)]. \quad (4.57)$$

Подставляя (4.55)–(4.57) в (4.53) и приводя подобные члены, получаем:

$$V = \frac{(e^{-\eta d\vartheta} - e^{\eta d\vartheta}) \cos(\xi d\vartheta) + i(e^{-\eta d\vartheta} + e^{\eta d\vartheta}) \sin(\xi d\vartheta)}{(e^{-\eta d\vartheta} + e^{\eta d\vartheta}) \cos(\xi d\vartheta) + i(e^{-\eta d\vartheta} - e^{\eta d\vartheta}) \sin(\xi d\vartheta)}. \quad (4.58)$$

Освобождаемся от мнимости в знаменателе:

$$V = \frac{e^{-2\eta d\vartheta} - e^{2\eta d\vartheta} + i4 \sin(\xi d\vartheta) \cos(\xi d\vartheta)}{e^{-2\eta d\vartheta} + e^{2\eta d\vartheta} + 2[\cos^2(\xi d\vartheta) - \sin^2(\xi d\vartheta)]}. \quad (4.59)$$

Пользуясь формулами двойного угла и выделяя действительную и мнимую части в явном виде, получаем:

$$V = \frac{e^{-2\eta d\vartheta} - e^{2\eta d\vartheta}}{e^{-2\eta d\vartheta} + e^{2\eta d\vartheta} + 2 \cos(2\xi d\vartheta)} + i \frac{2 \sin(2\xi d\vartheta)}{e^{-2\eta d\vartheta} + e^{2\eta d\vartheta} + 2 \cos(2\xi d\vartheta)}. \quad (4.60)$$

4.2.2. Преобразование правой части дисперсионного соотношения

Преобразуем теперь правую часть дисперсионного соотношения (4.52), имеющую вид (4.54):

$$W = \frac{2(1 + 4\pi\chi)\vartheta}{1 + \vartheta^2 + 8\pi\chi\vartheta^2 + 16\pi^2(\chi^2\vartheta^2 - \chi_a^2 \cos^2 \varphi)}. \quad (4.61)$$

В это выражение входят компоненты тензора восприимчивости, с точностью до первой степени параметра α , имеющие вид (4.23)–(4.24), с учетом обозначений (4.19)–(4.22), а параметр ϑ в том же приближении является действительным и определяется выражением (4.41).

Подставляя (4.23)–(4.24), выполняя действия и отбрасывая слагаемые, содержащие α^2 , получаем:

$$W = \frac{2(1 + A)\vartheta - i2\alpha C\vartheta}{[1 + (1 + A)^2\vartheta^2 - B^2 \cos^2 \varphi] - i2\alpha[C(1 + A)\vartheta^2 - BD \cos^2 \varphi]}. \quad (4.62)$$

Введем еще одну группу вспомогательных обозначений:

$$E = 2(1 + A)\vartheta; \quad (4.63)$$

$$F = 2C\vartheta; \quad (4.64)$$

$$G = 1 + (1 + A)^2\vartheta^2 - B^2 \cos^2 \varphi; \quad (4.65)$$

$$H = 2[C(1 + A)\vartheta^2 - BD \cos^2 \varphi]. \quad (4.66)$$

Можно видеть, что, согласно действительности ϑ , а также A, B, C, D , эти выражения также являются действительными.

В обозначениях (4.63)–(4.66) правая часть (4.62) принимает вид:

$$W = \frac{E - i\alpha F}{G - i\alpha H}. \quad (4.67)$$

Освобождаясь от мнимости в знаменателе, получаем:

$$W = \frac{E}{G} + i\alpha \frac{EH - FG}{G^2}. \quad (4.68)$$

Для упрощения дальнейших вычислений введем еще некоторые дополнительные обозначения:

$$F_1 = \frac{E}{G}; \quad (4.69)$$

$$F_2 = \frac{EH - FG}{G^2}, \quad (4.70)$$

причем в соответствии с действительностью E, F, G, H , выражения F_1 и F_2 также являются действительными.

В этих обозначениях (4.67) принимает вид:

$$W = F_1 + i\alpha F_2. \quad (4.71)$$

Итак, здесь F_1 и F_2 определяются выражениями (4.69) и (4.70), входящие в них величины E, F, G, H — выражениями (4.63)–(4.66), которые в свою очередь определяются через частоты посредством выражений (4.19)–(4.22) и (4.37)–(4.38). Таким образом, выражения F_1 и F_2 полностью определяются частотами Ω_H и Ω в сочетании с заданным значением угла φ .

4.2.3. Полное дисперсионное соотношение

Теперь, когда левая и правая части дисперсионного соотношения получены, запишем его полностью. Чтобы не создавать излишней громоздкости записи, выражения (4.69) и (4.70) оставим в сокращенном виде. Итак, подставляя (4.60) и (4.71) в (4.52), получаем:

$$\frac{e^{-2\eta d\vartheta} - e^{2\eta d\vartheta}}{e^{-2\eta d\vartheta} + e^{2\eta d\vartheta} + 2\cos(2\xi d\vartheta)} + i \frac{2\sin(2\xi d\vartheta)}{e^{-2\eta d\vartheta} + e^{2\eta d\vartheta} + 2\cos(2\xi d\vartheta)} = F_1 + i\alpha F_2. \quad (4.72)$$

Группируя действительную и мнимую части по отдельности, получаем:

$$\left\{ \frac{e^{-2\eta d\vartheta} - e^{2\eta d\vartheta}}{e^{-2\eta d\vartheta} + e^{2\eta d\vartheta} + 2\cos(2\xi d\vartheta)} - F_1 \right\} + i \left\{ \frac{2\sin(2\xi d\vartheta)}{e^{-2\eta d\vartheta} + e^{2\eta d\vartheta} + 2\cos(2\xi d\vartheta)} - \alpha F_2 \right\} = 0. \quad (4.73)$$

Приравнивая действительную и мнимую части этого выражения к нулю, получаем систему двух уравнений:

$$\frac{e^{-2\eta d\vartheta} - e^{2\eta d\vartheta}}{e^{-2\eta d\vartheta} + e^{2\eta d\vartheta} + 2\cos(2\xi d\vartheta)} = F_1; \quad (4.74)$$

$$\frac{2\sin(2\xi d\vartheta)}{e^{-2\eta d\vartheta} + e^{2\eta d\vartheta} + 2\cos(2\xi d\vartheta)} = \alpha F_2. \quad (4.75)$$

Правые части этих уравнений содержат только частоты Ω и Ω_H . В левые части входят только действительная и мнимая компоненты волнового числа η и ξ .

Поскольку частота Ω_H задана постоянным полем (как параметр среды), то есть неизменна, полученные уравнения можно рассматривать как систему, связывающую три переменных Ω , η и ξ . Поскольку переменных три, а уравнений всего два, то одна из переменных может быть задана произвольно. В соответствии с условием задачи (волна постоянной частоты спадает в пространстве), частоту Ω будем считать заданной. Тогда (4.74)–(4.75) обращается в систему двух уравнений относительно η и ξ .

Положим, что основу будущего дисперсионного соотношения, содержащего только действительную часть волнового числа η и частоту Ω , должно составить первое уравнение (4.74), которое, однако, содержит еще и ξ в виде $\cos(2\xi d\vartheta)$. Чтобы исключить из первого уравнения мнимую компоненту волнового числа ξ , надо выразить ее из второго уравнения (4.75) через действительную компоненту η и функцию F_2 . Это вполне можно сделать, так как F_2 зависит только от частоты и компонент волнового числа не содержит. Таким образом, из второго уравнения (4.75) надо найти $\cos(2\xi d\vartheta)$, который затем и будет подставлен в первое уравнение.

Введем еще некоторые вспомогательные обозначения:

$$a = \frac{e^{-2\eta d\vartheta} + e^{2\eta d\vartheta}}{2} = \text{ch}(2\eta d\vartheta); \tag{4.76}$$

$$b = \alpha \cdot F_2; \tag{4.77}$$

$$x = 2\xi d\vartheta. \tag{4.78}$$

С этими обозначениями уравнение (4.75) принимает вид:

$$\frac{\sin(x)}{a + \cos(x)} = b. \tag{4.79}$$

Выражая синус через косинус и возводя в квадрат, получаем уравнение для $\cos(x)$:

$$(1 + b^2) \cos^2(x) + 2ab^2 \cos(x) + (a^2b^2 - 1) = 0. \tag{4.80}$$

Это уравнение — квадратное. Его решение имеет вид:

$$\cos(x) = \frac{-ab^2 \pm \sqrt{b^2 - a^2b^2 + 1}}{1 + b^2}. \tag{4.81}$$

Подставляя обозначения (4.76)–(4.78) и учитывая соотношение:

$$\text{ch}^2(\psi) - \text{sh}^2(\psi) = 1, \tag{4.82}$$

где ψ — произвольное число, получаем:

$$\cos(2\xi d\vartheta) = \frac{-\alpha^2 F_2^2 \text{ch}(2\eta d\vartheta) \pm \sqrt{1 - \alpha^2 F_2^2 \text{sh}^2(2\eta d\vartheta)}}{1 + \alpha^2 F_2^2}. \tag{4.83}$$

Подставляя это выражение в (4.74), получаем искомое дисперсионное соотношение для действительной части волнового числа задачи Дэймона–Эшбаха в среде с затуханием в виде:

$$\frac{e^{-2\eta d\vartheta} - e^{2\eta d\vartheta}}{e^{-2\eta d\vartheta} + e^{2\eta d\vartheta} + 2 \frac{-\alpha^2 F_2^2 \operatorname{ch}(2\eta d\vartheta) \pm \sqrt{1 - \alpha^2 F_2^2 \operatorname{sh}^2(2\eta d\vartheta)}}{1 + \alpha^2 F_2^2}} - F_1 = 0. \quad (4.84)$$

Преобразуя первое слагаемое (4.84) с помощью определений гиперболических функций, это соотношение можно записать в несколько более компактном виде:

$$\frac{\operatorname{sh}(2\eta d\vartheta)(1 + \alpha^2 F_2^2)}{\operatorname{ch}(2\eta d\vartheta) \pm \sqrt{1 - \alpha^2 F_2^2 \operatorname{sh}^2(2\eta d\vartheta)}} + F_1 = 0. \quad (4.85)$$

Освобождаясь от дроби, получаем:

$$\operatorname{sh}(2\eta d\vartheta)(1 + \alpha^2 F_2^2) + F_1 \left[\operatorname{ch}(2\eta d\vartheta) \pm \sqrt{1 - \alpha^2 F_2^2 \operatorname{sh}^2(2\eta d\vartheta)} \right] = 0. \quad (4.86)$$

Это дисперсионное соотношение зависит только от η и Ω через функции F_1 и F_2 , которые определяются выражениями (4.69)–(4.70), куда Ω_H входит как параметр.

Как будет показано в следующем разделе, знак «плюс» здесь соответствует прямым ПМСВ, переходящим в отсутствие диссипации в классическое соотношение Дэймона–Эшбаха [1, 2, 114], а знак «минус» соответствует обратным диссипативным ПМСВ, классического аналога не имеющих.

В явном виде относительно η или Ω это уравнение, по-видимому, не разрешается. Чтобы построить зависимость Ω от η в численном виде, его можно разрешить, задавая с определенным шагом волновое число η и находя на каждом шаге частоту Ω с помощью алгоритма поиска нуля.

Замечание. Из структуры соотношений (4.84)–(4.86) можно видеть, что они содержат параметр α во второй степени. Следуя логике линейного приближения, слагаемые, содержащие α^2 , следовало бы опустить. Однако очевидно, что в этом случае затухание из задачи будет полностью исключено, так как какие-либо члены, содержащие α в первой степени, в выражениях (4.84)–(4.86) отсутствуют. Поэтому с целью учета затухания слагаемые с α^2 должны быть сохранены. Квадрат же получился из-за того, что в основе нахождения дисперсионного соотношения лежит система уравнений (4.74)–(4.75), в которую α входит в первой степени в составе сочетания (αF_2) . Далее эта система сводится к квадратному уравнению (4.80), решение которого и приводит к возведению упомянутого сочетания в квадрат без первой степени параметра α .

4.2.4. Оценка предельных значений частот при типичных параметрах эксперимента

Правомерность отбрасывания слагаемых, возникающих в (4.15)–(4.16) при освобождении от мнимости в знаменателе, требует количественной проверки.

Для проведения таковой рассмотрим сначала более простой случай отсутствия затухания, позволяющий разрешить соотношение (4.84)–(4.86) относительно частоты Ω в явном виде. Действительно, при $\alpha = 0$ дисперсионное соотношение (4.85) принимает вид:

$$\frac{\text{sh}(2\eta d)}{\text{ch}(2\eta d) \pm 1} + \frac{2(\Omega_H^2 - \Omega^2 + \Omega_H)}{2(\Omega_H^2 - \Omega^2 + \Omega_H) + 1} = 0. \quad (4.87)$$

Решение этого уравнения относительно частоты Ω имеет вид:

$$\Omega = \sqrt{\Omega_H^2 + \Omega_H + \frac{\beta^{(\pm)}}{2(1 + \beta^{(\pm)})}}, \quad (4.88)$$

где $\beta^{(\pm)}$ — вспомогательное обозначение, равное:

$$\beta^{(\pm)} = \frac{\text{sh}(2\eta d)}{\text{ch}(2\eta d) \pm 1}. \quad (4.89)$$

Из (4.88)–(4.89) видно, что зависимость нормированной частоты Ω от действительной части волнового числа η имеет две ветви, соответствующие знакам «плюс» и «минус».

Предельные значения частот обеих ветвей, определяемых этим дисперсионным соотношением при $\eta \rightarrow 0$ и $\eta \rightarrow \infty$ имеют вид:

Знак «ПЛЮС»:

$\eta \rightarrow 0$, при этом $\beta^{(+)} = 0$:

$$\Omega^{(+)}|_{\eta \rightarrow 0} = \sqrt{\Omega_H(\Omega_H + 1)}; \quad (4.90)$$

$$f^{(+)}|_{\eta \rightarrow 0} = \gamma_f \cdot \sqrt{H(H + 4\pi M_0)}; \quad (4.91)$$

$\eta \rightarrow \infty$, при этом $\beta^{(+)} = 1$:

$$\Omega^{(+)}|_{\eta \rightarrow \infty} = \sqrt{\Omega_H(\Omega_H + 1) + \frac{1}{4}}; \quad (4.92)$$

$$f^{(+)}|_{\eta \rightarrow \infty} = \gamma_f(H + 2\pi M_0); \quad (4.93)$$

Знак «МИНУС»:

$\eta \rightarrow 0$, при этом $\beta^{(-)} \rightarrow \infty$:

$$\Omega^{(-)}|_{\eta \rightarrow 0} = \sqrt{\Omega_H(\Omega_H + 1) + \frac{1}{2}}; \quad (4.94)$$

$$f^{(-)}|_{\eta \rightarrow 0} = \gamma_f \sqrt{(H + 2\pi M_0)^2 + (2\pi M_0)^2}; \quad (4.95)$$

$\eta \rightarrow \infty$, при этом $\beta^{(-)} = 1$:

$$\Omega^{(-)}|_{\eta \rightarrow \infty} = \sqrt{\Omega_H(\Omega_H + 1) + \frac{1}{4}}; \quad (4.96)$$

$$f^{(-)}|_{\eta \rightarrow \infty} = \gamma_f(H + 2\pi M_0). \quad (4.97)$$

Пользуясь этими формулами, вычислим значения частот при типичных параметрах эксперимента (см. напр. [1, стр. 125–135], [2, стр. 125–155] и др.): $H = 437,5$ Э, $4\pi M_0 = 1750$ Гс, так что $\Omega_H = 0,2500$. При этом характерные частоты границ областей существования прямых и обратных (диссипативных) ПМСВ [5, 28] получаются равными:

$$\Omega^{(+)}|_{\eta \rightarrow 0} = 0,5590, \quad f^{(+)}|_{\eta \rightarrow 0} = 2,7392 \text{ ГГц}; \quad (4.98)$$

$$\Omega^{(+)}|_{\eta \rightarrow \infty} = 0,7500, \quad f^{(+)}|_{\eta \rightarrow \infty} = 3,6750 \text{ ГГц}; \quad (4.99)$$

$$\Omega^{(-)}|_{\eta \rightarrow 0} = 0,9014, \quad f^{(-)}|_{\eta \rightarrow 0} = 4,4168 \text{ ГГц}; \quad (4.100)$$

$$\Omega^{(-)}|_{\eta \rightarrow \infty} = 0,7500, \quad f^{(-)}|_{\eta \rightarrow \infty} = 3,6750 \text{ ГГц}. \quad (4.101)$$

Можно видеть, что имеются всего три граничных значения нормированных частот:

$$\Omega_1 = \Omega^{(+)}|_{\eta \rightarrow 0} = 0,5590; \quad (4.102)$$

$$\Omega_2 = \Omega^{(+)}|_{\eta \rightarrow \infty} = \Omega^{(-)}|_{\eta \rightarrow \infty} = 0,7500; \quad (4.103)$$

$$\Omega_3 = \Omega^{(-)}|_{\eta \rightarrow 0} = 0,9014, \quad (4.104)$$

соответствующие линейным частотам:

$$f_1 = f^{(+)}|_{\eta \rightarrow 0} = 2,7392 \text{ ГГц}; \quad (4.105)$$

$$f_2 = f^{(\pm)}|_{\eta \rightarrow \infty} = 3,6750 \text{ ГГц}; \quad (4.106)$$

$$f_3 = f^{(-)}|_{\eta \rightarrow 0} = 4,4168 \text{ ГГц}. \quad (4.107)$$

При этих частотах получаем следующие значения параметров (4.19)–(4.22) (индексы параметров соответствуют индексам частот):

$$A_1 = -1,0000; \quad A_2 = -0,5000; \quad A_3 = -0,3333; \quad (4.108)$$

$$B_1 = -2,2362; \quad B_2 = -1,5000; \quad B_3 = -1,2018; \quad (4.109)$$

$$C_1 = 3,3543; \quad C_2 = 1,8750; \quad C_3 = 1,4021; \quad (4.110)$$

$$D_1 = 2,5000; \quad D_2 = 1,1250; \quad D_3 = 0,7222. \quad (4.111)$$

Из этих оценок видно, что при принятых типичных условиях эксперимента все параметры (4.108)–(4.111) имеют величину порядка единицы, поэтому слагаемые, получаемые при освобождении (4.15)–(4.16) от мнимости в знаменателе, пропорциональные α , где $\alpha \ll 1$, в любом случае будут превышать такие же слагаемые, пропорциональные α^2 .

Таким образом, отбрасывание слагаемых, пропорциональных α^2 , в рамках линейного приближения по α можно считать вполне допустимым.

4.2.5. Предельный переход к соотношению Дэймона–Эшбаха

Рассмотрим теперь, как полученное решение соотносится с классическим дисперсионным соотношением задачи Дэймона–Эшбаха [1, 2, 114].

В отсутствие затухания, то есть при $\alpha = 0$, из (4.86) получаем:

$$\operatorname{sh}(2\eta d\vartheta) + F_1 [\operatorname{ch}(2\eta d\vartheta) \pm 1] = 0. \quad (4.112)$$

Рассмотрим сначала знак «плюс». В этом случае с помощью формул для гиперболических функций двойного угла это соотношение можно привести к виду:

$$\operatorname{th}(\eta d\vartheta) = -F_1. \quad (4.113)$$

Здесь F_1 определяется формулой (4.69) с учетом (4.63), (4.65):

$$F_1 = \frac{2(1+A)\vartheta}{1+(1+A)^2\vartheta^2 - B^2 \cos^2 \varphi}, \quad (4.114)$$

где A и B определяются формулами (4.19), (4.20).

Полученное при решении задачи Дэймона–Эшбаха [1, 2, 114] дисперсионное соотношение без учета затухания для изотропной ферритовой пластины со свободными поверхностями, намагниченной в плоскости, с точностью до обозначений, имеет вид (2.222):

$$\beta - 1 - 2\mu\vartheta \operatorname{cth}(\eta d\vartheta) = 0. \quad (4.115)$$

или:

$$\operatorname{th}(\eta d\vartheta) = \frac{2\mu\vartheta}{\beta - 1}, \quad (4.116)$$

где входящие в это выражение параметры определяются формулами (2.212), (2.216).

Подстановка (2.212)–(2.216) в (4.116) показывает тождество выражений (4.113) и (4.116), что доказывает выполнение предельного перехода полученного решения (4.86) со знаком «плюс» при $\alpha \rightarrow 0$ к решению классической задачи Дэймона–Эшбаха, полученному без учета затухания.

Рассмотрим теперь в выражении (4.112) знак «минус». Выполняя аналогичные преобразования, получаем:

$$\operatorname{th}(\eta d\vartheta) = -\frac{1}{F_1}. \quad (4.117)$$

Можно видеть, что это выражение при $\alpha \rightarrow 0$ к соотношению Дэймона–Эшбаха (4.116) не сводится, то есть предельный переход не имеет места. С другой стороны, согласно работам [5, 28], посвященным случаю $\varphi = 0$, решение с минусом соответствует дисперсионному соотношению для обратных диссипативных волн.

Можно полагать, что в рассматриваемом здесь случае произвольного значения φ (в пределах угла отсечки), волны, описываемые

соотношением (4.117), также являются диссипативными. Как показано в тех же работах, диссипативные волны имеют место только при наличии затухания, тогда как в классической задаче Дэймона–Эшбаха затухание отсутствует, поэтому диссипативная ветвь не реализуется, что и проявляется в отсутствии соответствующего решения.

4.3. Дисперсионное соотношение для мнимой части волнового числа

В проводимом рассмотрении волновое число k предполагается комплексным в виде (4.25). Полученное в разделе 4.2.3 дисперсионное соотношение (4.86) связывает частоту Ω с действительной частью волнового числа η , которая определяет только длину распространяющейся волны, но не содержит информации о ее амплитуде. В среде с диссипацией амплитуда волны по мере распространения уменьшается, что определяется мнимой частью волнового числа ξ . Получим теперь связь между частотой Ω и мнимой частью волнового числа ξ , которую будем называть «дисперсионным соотношением для мнимой части волнового числа».

4.3.1. Выделение из полного дисперсионного соотношения части, соответствующей мнимой компоненте волнового числа

Получение дисперсионного соотношения в общем случае базируется на решении системы уравнений (4.74)–(4.75). Правые части этих уравнений содержат только частоты Ω и Ω_H . В левые части входят только действительная и мнимая компоненты волнового числа η и ξ .

При заданной частоте Ω эта система связывает две неизвестных — действительную и мнимую компоненты волнового числа η и ξ . В разделе 4.2.3 из этой системы была исключена неизвестная ξ , что позволило свести ее к одному уравнению с одной неизвестной η (4.86), представляющему собой дисперсионное соотношение для действительной части волнового числа, общий вид которого представлен формулой (4.41). Исключение из системы (4.74)–(4.75) другой неизвестной η позволяет получить одно уравнение относительно другой неизвестной ξ , что и даст дисперсионное соотношение для мнимой части волнового числа, которое будет иметь вид (4.42).

Выполним теперь такое исключение, для чего с целью упрощения выкладок сначала введем вспомогательные обозначения:

$$y = e^{2\eta d\vartheta}; \quad (4.118)$$

$$g = \sin(x); \quad (4.119)$$

$$h = \cos(x), \quad (4.120)$$

где x определяется соотношением:

$$x = 2\xi d\vartheta. \quad (4.121)$$

В этих обозначениях система (4.74)–(4.75) принимает вид:

$$\frac{\frac{1}{y} - y}{\frac{1}{y} - y + 2h} = F_1; \quad (4.122)$$

$$\frac{2g}{\frac{1}{y} - y + 2h} = \alpha F_2. \quad (4.123)$$

Освобождаясь в этих уравнениях от дробей, приведем ту же систему к виду:

$$(F_1 + 1)y^2 + 2hF_1y + (F_1 - 1) = 0; \quad (4.124)$$

$$\alpha F_2 y^2 + 2(\alpha F_2 h - g)y + \alpha F_2 = 0. \quad (4.125)$$

Совокупность выражений (4.124)–(4.125) представляет собой систему двух квадратных уравнений относительно y , содержащую кроме частоты Ω также η и ξ . Для того, чтобы получить соотношение между Ω и ξ типа (4.5), из полной системы надо исключить η . Из (4.118)–(4.120) можно видеть, что в уравнения (4.124)–(4.125) величина η входит только через посредство y , поэтому из системы (4.124)–(4.125) достаточно исключить y .

В отсутствие затухания, то есть при $\alpha = 0$, второе уравнение через посредство (4.119) и (4.121) дает: $\xi = 0$, то есть волновое число становится чисто действительным. При этом, в соответствии с (4.119), получаем $x = 0$, то есть $h = 1$, в результате чего первое уравнение при выражении экспонент через гиперболические функции переходит в классическое дисперсионное соотношение Дэймона–Эшбаха вида (4.112) со знаком «плюс» (раздел 4.8):

$$\operatorname{sh}(2\eta d\vartheta) + F_1 \cdot [\operatorname{ch}(2\eta d\vartheta) + 1] = 0. \quad (4.126)$$

Таким образом, поскольку закон дисперсии для действительной части волнового числа получается из первого уравнения системы (4.124)–(4.125), тогда как второе к волновому числу дает только мнимую добавку, примем за основу именно первое уравнение, а вторым воспользуемся только для того, чтобы исключить y из первого. Для такого исключения найдем из второго уравнения y и полученное выражение подставим в первое.

Разрешая (4.125) относительно y по формуле решения квадратного уравнения, получаем:

$$y_{1,2} = \frac{1}{\alpha F_2} \left[g - \alpha F_2 h \pm \sqrt{g^2 - 2\alpha F_2 g h + \alpha^2 F_2^2 (h^2 - 1)} \right]. \quad (4.127)$$

Заметим, что здесь параметр затухания α входит в знаменателе первой дроби, так что получаемые далее выражения будут сохранять корректность только при $\alpha \neq 0$. Однако общности проводимого рассмотрения это не ограничивает, так как рассмотрение затухания предполагает именно отличие параметра α от нуля.

Отметим далее, что под корнем присутствуют слагаемые, содержащие как α , так и α^2 . Полагая $\alpha \ll 1$ можно слагаемым с α^2 пренебречь, в результате чего получаем:

$$y_{1,2} = \frac{1}{\alpha F_2} \left[g - \alpha F_2 h \pm \sqrt{g^2 - 2\alpha F_2 g h} \right]. \quad (4.128)$$

Возводя это выражение в квадрат и пренебрегая слагаемыми второго порядка по α в сравнении с первым, получаем:

$$y_{1,2}^2 = \frac{2}{\alpha^2 F_2^2} \left[g^2 - 2\alpha F_2 g h \pm (g - \alpha F_2 h) \sqrt{g^2 - 2\alpha F_2 g h} \right]. \quad (4.129)$$

Подставляя (4.128)–(4.129) в (4.124) и приводя подобные члены, получаем уравнение, не содержащее y :

$$(F_1 + 1)g^2 - \alpha(F_1 + 2)F_2 g h \pm [(F_1 + 1)g - \alpha F_2 h] \cdot \sqrt{g(g - 2\alpha F_2 h)} = 0. \quad (4.130)$$

Предельный переход при $\alpha \rightarrow 0$ приводит к выражению:

$$(F_1 + 1)g^2(1 \pm 1) = 0, \quad (4.131)$$

из которого следует, что безусловное равенство нулю мнимой части комплексного волнового числа ξ , следующие из условия $g = 0$, имеет место только при знаке «плюс». Таким образом, соотношение (4.130) принимает вид:

$$(F_1 + 1)g^2 - \alpha(F_1 + 2)F_2 g h + [(F_1 + 1)g - \alpha F_2 h] \sqrt{g(g - 2\alpha F_2 h)} = 0. \quad (4.132)$$

Это — искоемое дисперсионное соотношение для мнимой части волнового числа, записанное через вспомогательные обозначения (4.119)–(4.121). Оно содержит мнимую часть волнового числа ξ , входящую в g и h в соответствии с (4.119)–(4.120), а также частоту Ω , входящую в F_1 и F_2 в соответствии с формулами (4.69) и (4.70) с учетом (4.63)–(4.66) и (4.37)–(4.38).

4.3.2. Дисперсионное соотношение для мнимой части волнового числа в явном виде

Подставляя (4.119)–(4.120) в (4.132) и учитывая (4.121), получаем дисперсионное соотношение, записанное в явном виде относительно ξ :

$$(F_1 + 1) \cdot \sin^2(2\xi d\vartheta) - \alpha(F_1 + 2)F_2 \cdot \sin(2\xi d\vartheta) \cdot \cos(2\xi d\vartheta) + [(F_1 + 1) \cdot \sin(2\xi d\vartheta) - \alpha F_2 \cdot \cos(2\xi d\vartheta)] \times \sqrt{\sin(2\xi d\vartheta) \cdot [\sin(2\xi d\vartheta) - 2\alpha F_2 \cos(2\xi d\vartheta)]} = 0, \quad (4.133)$$

где F_1 и F_2 определяются выражениями (4.69) и (4.70) с учетом (4.63)–(4.66) и (4.37)–(4.38), зависящими от Ω и содержащими Ω_H в качестве параметра.

В явном виде относительно ξ или Ω это уравнение не разрешается. Чтобы построить зависимость Ω от ξ в численном виде, его можно разрешить, задавая с определенным шагом мнимую часть волнового числа ξ и находя на каждом шаге частоту Ω с помощью алгоритма поиска нуля.

Таким образом, получены дисперсионные соотношения с учетом диссипации для действительной (4.85) и мнимой (4.133) частей волнового числа. Дальнейший анализ этих соотношений в случае параметров, близких к реальному эксперименту будет проведен в следующих частях настоящей работы.

4.4. Дисперсионные кривые при параметрах эксперимента

Теперь, когда основные дисперсионные соотношения для действительной и мнимой частей волнового числа при наличии диссипации получены, рассмотрим в общих чертах характер дисперсии волны в условиях, близких к типичному эксперименту для магнитостатических волн дипольного характера [1, 2].

4.4.1. Дисперсионные кривые для длины волны при параметрах эксперимента

Полное дисперсионное соотношение с учетом затухания (4.86) в аналитическом виде относительно частоты Ω , по-видимому, не разрешается. Поэтому его можно разрешить численно, задавая с определенным шагом волновое число η и находя на каждом шаге частоту Ω с помощью алгоритма поиска нуля. Результаты такого численного расчета приведены далее.

Для определенности рассмотрим вид дисперсионных кривых в условиях, близких к эксперименту [229–233], проводившемуся на пленках железоиттриевого граната (ЖИГ), имеющих намагниченность насыщения $4\pi M_0 = 1750$ Гс и толщину $d = 15$ мкм при поле $H_0 = 437,5$ Э (четверть от $4\pi M_0$). В принятой геометрии (рис. 4.1) в пластине вдоль оси Oy распространяются магнитостатические волны поверхностного характера (ПМСВ).

На рис. 4.2 приведены дисперсионные кривые, построенные по формуле (4.86) при различных значениях параметра затухания. Кривые 1–3 соответствуют знаку «плюс» перед корнем в выражении (4.86), кривая 4 соответствует знаку «минус». Горизонтальными пунктирными линиями показаны предельные значения частот в отсутствие затухания ($\alpha = 0$), равные:

$$f^{(+)}|_{\eta \rightarrow 0} = 2,7392 \text{ ГГц} \quad (\Omega^{(+)}|_{\eta \rightarrow 0} = 0,5590); \quad (4.134)$$

$$f^{(+)}|_{\eta \rightarrow \infty} = 3,6750 \text{ ГГц} \quad (\Omega^{(+)}|_{\eta \rightarrow \infty} = 0,7500); \quad (4.135)$$

$$f^{(-)}|_{\eta \rightarrow 0} = 4,4168 \text{ ГГц} \quad (\Omega^{(+)}|_{\eta \rightarrow 0} = 0,9014); \quad (4.136)$$

$$f^{(-)}|_{\eta \rightarrow \infty} = 3,6750 \text{ ГГц} \quad (\Omega^{(-)}|_{\eta \rightarrow \infty} = 0,7500). \quad (4.137)$$

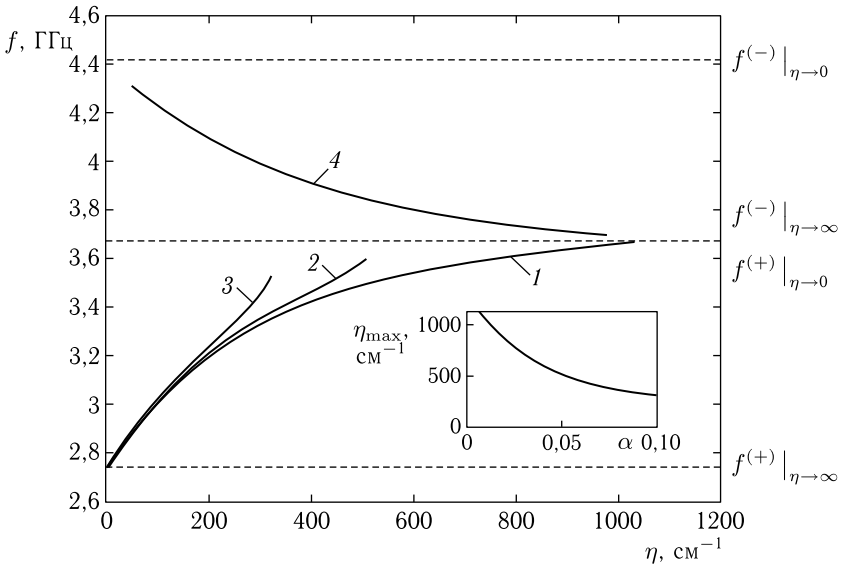


Рис. 4.2. Дисперсионные кривые для прямых (1, 2, 3) и обратных (4) ПМСВ при различных значениях параметра затухания α : 1 — 0,01, 2 — 0,05, 3 — 0,10, 4 — 0,01. Параметры: $H_0 = 437,5$ Э; $4\pi M_0 = 1750$ Гс; $d = 15$ мкм

Из рисунка видно, что волны, соответствующие знаку «плюс», являются прямыми, тогда как волны, соответствующие знаку «минус» являются обратными. Прямые волны существуют в области частот между $f^{(+)}|_{\eta \rightarrow 0}$ и $f^{(+)}|_{\eta \rightarrow \infty}$, тогда как обратные — выше этой области между частотами $f^{(-)}|_{\eta \rightarrow \infty}$ и $f^{(-)}|_{\eta \rightarrow 0}$.

Ветви прямых волн (1–3) являются аналогом классической волны Дэймона–Эшбаха [1, 2, 114] и отличаются от нее отклонением в сторону более высоких частот по мере возрастания волнового числа, а также ограничением в области больших волновых чисел, причем по мере возрастания затухания эти отличия увеличиваются.

Ветвь обратных волн (4) в отсутствие затухания при $\alpha = 0$ не существует, то есть ее наличие обусловлено именно затуханием. Вследствие этого, аналогично [222–224], эту ветвь можно назвать «диссипативной». Приведенная на рисунке ветвь обратных волн (4) соответствует $\alpha = 0,01$ и не является единственной, а лишь иллюстрирует пучок ветвей, расположенных в этой области.

Все дисперсионные кривые со стороны больших значений волнового числа ограничены предельным значением, которое обозначим далее через η_{\max} . Так, ветви 1–3 ограничиваются при $\eta_{\max} = 1031, 511$ и 321 см^{-1} соответственно, а ветвь 4 — при $\eta_{\max} = 980$ см^{-1} .

В математическом отношении ограничение действительной части волнового числа соответствует изменению знака подкоренного выраже-

ния в формуле (4.86), то есть условию:

$$1 - \alpha^2 F_2^2 \operatorname{sh}^2(2\eta d) = 0. \quad (4.138)$$

На врезке в рис. 4.2 показана зависимость η_{\max} от параметра затухания α , построенная в соответствии с этим условием при частоте $f = f^{(\pm)}|_{\eta \rightarrow \infty} = 3,6750$ ГГц. Можно видеть, что при увеличении затухания предельное значение волнового числа η_{\max} уменьшается, стремясь к нулю. С другой стороны, при стремлении α к нулю величина η_{\max} бесконечно увеличивается.

Условие (4.138) содержит ограничение не только по максимальной величине волнового числа, но также и при заданном значении $\eta < \eta_{\max}$ — ограничение по частоте. Вследствие такого ограничения ветви 1–3, стремясь при увеличении η вверх, не доходят до частоты $f^{(+)}|_{\eta \rightarrow \infty} = 3,6750$ ГГц, а ограничиваются при частотах 3,6677, 3,6057 и 3,5334 ГГц соответственно, а ветвь 4, стремясь при увеличении η вниз, также не доходит до $f^{(-)}|_{\eta \rightarrow \infty} = 3,6750$ ГГц, а ограничивается при частоте 3,6957 ГГц.

Подобное ограничение существует и по параметру затухания α со стороны его больших значений. Так, прямые волны отсутствуют при $\alpha > 0,1$, а обратные — при $\alpha > 0,01$. Именно по этой причине на рис. 4.2 ветвей прямых волн при приведенных там значениях параметра $\alpha = 0,01, 0,05$ и $0,10$ показано три, а ветвь обратных волн — всего одна.

Можно отметить, что ограничения, накладываемые соотношением (4.138), при заданных значениях частоты и параметра затухания, сводятся к балансу между действительной частью волнового числа η и толщиной пленки d . То есть при задаваемом этим соотношением значении $\operatorname{sh}^2(2\eta d)$ ограничение становится тем мягче, чем меньше толщина пленки d . Из этого следует, что при желании в эксперименте возбудить более короткие ПМСВ надо выбирать толщину пленки как можно меньше.

Из сопоставления с экспериментами, описанными в работах [229–234], можно видеть, что там уверенно наблюдались только прямые ПМСВ, тогда как сообщения об обратных (диссипативных) волнах отсутствуют. С другой стороны, задача наблюдения обратных волн, имеющих по сравнению с прямыми противоположно направленную групповую скорость, в этих работах, по-видимому, не ставилась, то есть обнаружение диссипативных волн требует дополнительных исследований.

4.4.2. Дисперсионные кривые для диссипации при параметрах эксперимента

Рассмотрим теперь вид дисперсионных кривых для диссипации в условиях, близких к эксперименту [229–234] на пленках ЖИГ, имеющих те же параметры, что и в предыдущем разделе.

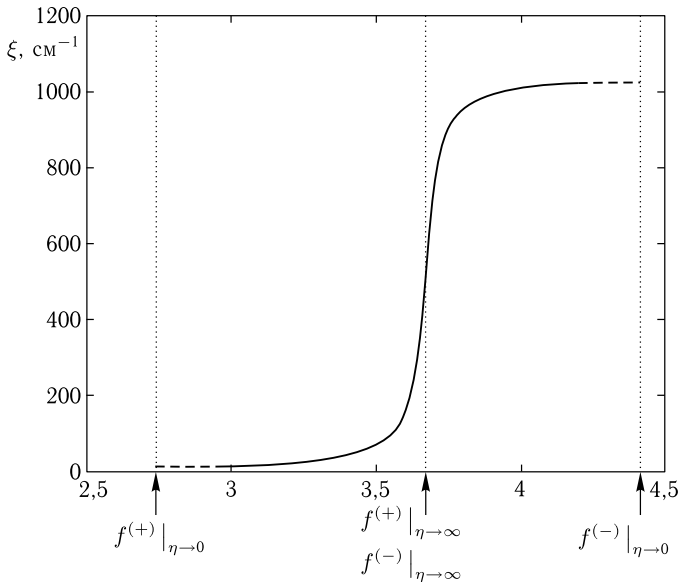


Рис. 4.3. Зависимость мнимой части волнового числа от частоты. Параметр затухания $\alpha = 0,01$, остальные параметры — те же, что приняты при построении рис. 4.2

На рис. 4.3 показана зависимость мнимой части волнового числа от частоты, построенная по формуле (4.86) при параметре затухания $\alpha = 0,01$. Вертикальными точечными линиями показаны значения характерных граничных частот спектра ПМСВ, определяемых соотношениями (4.134)–(4.137).

Из рисунка видно, что мнимая часть волнового числа ξ в области прямых волн между частотами $f^{(+)}|_{\eta \rightarrow 0}$ и $f^{(+)}|_{\eta \rightarrow \infty}$ возрастает, сначала плавно, но при приближении частоты к верхней границе спектра $f^{(+)}|_{\eta \rightarrow \infty}$ — весьма резко. Это означает, что по мере уменьшения длины волны прямых ПМСВ их затухание увеличивается, особенно резко вблизи верхней границы частотного диапазона.

В области обратных (диссипативных) волн между частотами $f^{(-)}|_{\eta \rightarrow \infty}$ и $f^{(-)}|_{\eta \rightarrow 0}$ мнимая часть волнового числа ξ также возрастает, причем особенно резко вблизи нижней границы спектра $f^{(-)}|_{\eta \rightarrow \infty}$, после чего возрастание замедляется. Это означает, что по мере уменьшения длины обратных (диссипативных) ПМСВ их затухание также возрастает, особенно резко вблизи нижней границы частотного диапазона.

Сопоставляя рис. 4.3 с рис. 4.2, можно видеть, что в обоих случаях затухание ПМСВ проявляется тем сильнее, чем действительная часть волнового числа больше то есть длина волны меньше. Другими словами, на одном и том же расстоянии пробега короткие волны затухают сильнее, чем длинные.

Из сравнения пологих участков кривой на рис. 4.3 можно видеть, что на частоте 3,0 ГГц мнимая часть волнового числа составляет около 20 см^{-1} , а на частоте 4,0 ГГц увеличивается до 1000 см^{-1} , то есть при переходе от прямых ПМСВ к обратным отрицательный показатель экспоненты в коэффициенте амплитуды ПМСВ увеличивается в 50 раз.

Следует заметить, что такое превышение затухания обратных волн над прямыми соответствует значению параметра затухания $\alpha = 0,01$, при котором амплитуда волны уменьшается на четыре порядка. В реальном эксперименте, например подобном описанному в [229–234], это означает падение амплитуды волны практически до уровня шума уже при прохождении волной расстояния в 0,5 см. Для эксперимента, однако, более типичным является расстояние порядка нескольких сантиметров, то есть полученное здесь значение ξ для прямых волн является несколько завышенным. Вообще говоря, использованное при построении кривой на рис. 4.3 значение $\alpha = 0,01$ выбрано только для удобства изображения с целью более наглядно представить общий ход зависимости ξ от частоты.

Более реальным для эксперимента значением параметра затухания является $\alpha = 0,001$ (типичное значение для хорошего монокристалла ЖИГ) [109–111, 214]. В этом случае на частоте 3,0 ГГц мнимая часть волнового числа составляет около $1,5 \text{ см}^{-1}$, а на частоте 4,0 ГГц увеличивается до 1040 см^{-1} , то есть при переходе от прямых ПМСВ к обратным отрицательный показатель экспоненты в коэффициенте амплитуды ПМСВ увеличивается почти в 700 раз, что говорит о крайне высоком затухании обратных ПМСВ по сравнению с прямыми.

С другой стороны при $\alpha = 0,001$ амплитуда прямой волны на частоте 3,0 ГГц при прохождении типичного для эксперимента расстояния в 2,0 см, в соответствии с коэффициентом показателя экспоненты $\xi = -1,5 \text{ см}^{-1}$, уменьшается примерно в 20 раз, что в пересчете на мощность составляет около 40 дБ, что вполне соответствует чувствительности реального измерительного тракта.

4.4.3. Зависимости амплитуды ПМСВ от частоты

На основе полученной частотной зависимости мнимой части волнового числа для прямых и обратных волн рассмотрим теперь частотную зависимость амплитуды ПМСВ.

На рис. 4.4 утолщенной сплошной линией показана зависимость амплитуды ПМСВ соответствующая:

$$U_0 = \exp(-\xi x), \quad (4.139)$$

в единицах, нормированных на значение амплитуды при $x = 0$.

Расстояние пробега ПМСВ выбрано равным $x = 0,003 \text{ см}$ для удобства построения рисунка.

Из рисунка видно, что амплитуда прямых ПМСВ от нижней границы своего частотного диапазона в значительной части (до 80 %) спадает незначительно, не более чем на 20 %, тогда как в оставшейся

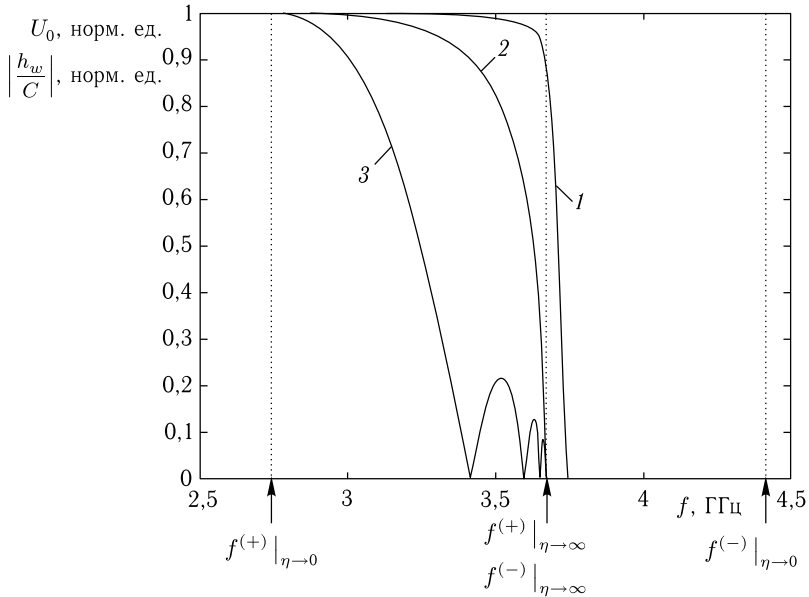


Рис. 4.4. Частотные зависимости амплитуды ПМСВ (сплошная линия) и амплитуды возбуждаемого преобразователем поля (пунктирные линии). Расстояние пробега ПМСВ $x = 0,003$ см. Ширина преобразователя: $b = 10$ мкм (кривая 1), 40 мкм (кривая 2), 160 мкм (кривая 3). Вертикальные точечные линии — характерные частоты спектра ПМСВ. Остальные параметры — те же, что приняты при построении рис. 4.2

части по мере приближения к верхней границе спадает резко до трех и более раз.

Амплитуда обратных (диссипативных) ПМСВ по мере удаления от нижней границы до 20% частотного интервала спадает резко, после чего спад замедляется и на остальной части частотного диапазона амплитуда составляет около 15% от начального низкочастотного значения.

Таким образом, амплитуда тех и других волн по мере увеличения частоты спадает, причем особенно сильно в области наиболее коротких ПМСВ. При этом амплитуда обратных (диссипативных) волн вблизи границы с прямыми волнами составляет не более 20% от максимальной амплитуды прямых волн, а в основной области составляет не более 5%.

4.5. Распространение волны перпендикулярно направлению поля

В разделе 4.4 приведен основной характер дисперсии магнитостатических волн при наличии диссипации в условиях, близких к экспери-

менту. Рассмотрим теперь те же свойства более подробно. Сначала остановимся на распространении волн перпендикулярно направлению поля. Геометрию и основные параметры задачи положим теми же самыми, что в предыдущих разделах. Параметр затухания будем менять в пределах от 0,01 до 0,15. При этом время релаксации (то есть спада амплитуды свободных колебаний в $e = 2,71828\dots$ раз) составляет порядка $(0,5-1,0) \cdot 10^{-8}$ с. Остальные значения параметров, используемые для построения кривых, указаны в подписях к рисункам и в тексте.

Отметим еще важные для дальнейшего рассмотрения характерные частотные границы областей существования прямых и обратных ПМСВ (разделы 2.9, 3.6.2, формулы (2.226)–(2.230), а также (3.183)–(3.187)):

$$\Omega_1 = 0,5590; \quad (4.140)$$

$$\Omega_2 = 0,7500; \quad (4.141)$$

$$\Omega_3 = 0,9014, \quad (4.142)$$

соответствующие линейным частотам:

$$f_1 = 2739,2 \text{ МГц}; \quad (4.143)$$

$$f_2 = 3675,0 \text{ МГц}; \quad (4.144)$$

$$f_3 = 4416,8 \text{ МГц}. \quad (4.145)$$

Согласно показанному в разделах 2.9 и 3.6.2, прямые ПМСВ существуют в интервале частот между f_1 и f_2 , а обратные — в интервале частот между f_2 и f_3 , то есть f_2 является разграничительной линией между областями прямых и обратных волн. Явные выражения для этих частот через значения намагниченности и поля имеют вид (3.184), (3.185), (3.186):

$$f_1 = \gamma_f \sqrt{H(H + 4\pi M_0)}; \quad (4.146)$$

$$f_2 = \gamma_f (H + 2\pi M_0); \quad (4.147)$$

$$f_3 = \gamma_f \sqrt{(H + 2\pi M_0)^2 + (2\pi M_0)^2}, \quad (4.148)$$

где γ_f — гиромагнитная постоянная, для линейной частоты равная 2,8 МГц/Э.

4.5.1. Основные алгоритмы расчета

Дисперсионные кривые в настоящей работе рассчитывались в соответствии с приведенными выше формулами (4.86) и (4.133). При заданном значении действительной η или мнимой ξ части волнового числа определялась частота f при помощи алгоритма поиска нуля. Шаг по волновому числу составлял 1 см^{-1} , заданная точность определения частоты равнялась 10^{-7} МГц.

Кроме законов дисперсии исследовалась групповая скорость ПМСВ, которая в соответствии с классическим определением [151, 153] имеет вид:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (4.149)$$

При численном расчете групповая скорость определялась как касательная к дисперсионной кривой для действительной части волнового числа, построенная по формуле:

$$v_g = \frac{2\pi[f(\eta_2) - f(\eta_1)]}{\eta_2 - \eta_1}, \quad (4.150)$$

где η_1 и η_2 — два последовательных значения волнового числа, расположенные на расстоянии одного шага.

Кроме классической групповой скорости волны v_g , определенной относительно действительной части волнового числа η , в настоящей работе исследовался также аналогичный параметр v_{gp} , определяемый как производная по ξ от дисперсионных кривых для мнимой части волнового числа, то есть по формуле:

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{d\xi}, \quad (4.151)$$

или при численном расчете по формуле:

$$v_{gp} = \frac{2\pi[f(\xi_2) - f(\xi_1)]}{\xi_2 - \xi_1}, \quad (4.152)$$

где ξ_1 и ξ_2 — два последовательных значения мнимой части волнового числа, расположенные на расстоянии одного шага.

Очевидно, эти формулы являются аналогом (4.149) и (4.150) для действительной части волнового числа, поэтому по аналогии с v_g , являющейся групповой скоростью распространения волны, величину v_{gp} можно назвать «групповой скоростью роста затухания волны».

Замечание. Благодаря гиротропным свойствам ферритовой среды, при углах вектора фазовой скорости φ , отличных от нуля, направление вектора групповой скорости определяется углом ψ , в общем случае не равном φ (рис. 4.1). То есть вместо формул (4.149) и (4.151) следует использовать формулы:

$$\mathbf{v}_g = \frac{d\omega}{d\boldsymbol{\eta}}; \quad (4.153)$$

$$\mathbf{v}_{gp} = \frac{d\omega}{d\boldsymbol{\xi}}. \quad (4.154)$$

В среде с диссипацией необходимо учитывать комплексный характер волнового числа, вследствие чего угол ψ по отношению к бездиссипативному случаю несколько изменится. Частично этот вопрос рассмотрен в работах [235, 236], а применительно к магнитным средам — в [225, 226]. В двух последних работах показано, что при принятых там параметрах (близких к принятым здесь) зависимость

угла ψ от угла φ по мере увеличения φ от нуля до 50° спадает от нуля до -35° . При малом затухании зависимость ψ от φ идет ниже кривой, соответствующей большому затуханию, а при большом — выше. Различие максимально при $\varphi = 106^\circ$ и меняется при переходе от малого затухания к большому с 15° до 5° . При $\varphi = 30^\circ$ различие имеет обратный знак и при переходе от малого затухания к большому меняется с 33° до 35° . К сожалению, конкретизация понятий «малого» и «большого» затухания в цитированных работах отсутствует, что не позволяет использовать приведенные там данные для более точных численных оценок, однако можно видеть, что роль диссипации сказывается в основном при углах φ в окрестности 10° , тогда как при $\varphi = 0^\circ$ влияние диссипации полностью отсутствует, а при удалении от 10° составляет не более 5%. Предметом рассмотрения настоящей работы является не направление вектора групповой скорости, а его абсолютная величина, поэтому для ее расчета здесь используется классическая формула (4.149). Для расчета групповой скорости роста затухания соответственно используется формула (4.151). Более точно вопрос о роли направления вектора групповой скорости предполагается рассмотреть далее.

4.5.2. Схема определения времени установления

Для интерпретации свойств дисперсии ПМСВ далее в качестве вспомогательного параметра будет использоваться время релаксации колебаний намагниченности, затухающих благодаря диссипативным свойствам среды. Рассмотрим схему определения этого параметра.

Время релаксации намагниченности τ_p определялось как время установления стационарной амплитуды вынужденных колебаний при линейном возбуждении переменным полем небольшой амплитуды ($\sim 0,01$ Э) в той же геометрии. Рассматривалась развертка колебаний во времени для одной из компонент намагниченности (в данном варианте — m_x , колебания m_y аналогичны с несколько меньшей амплитудой). Общий расчет развертки колебаний производился с помощью метода, предложенного в работе [237], многократно использовавшегося в статьях [238–244] и обобщенного в монографиях [1–4, 245], поэтому здесь подробно не рассматривается.

Схема определения времени установления стационарной амплитуды представлена на рис. 4.5. Показано развитие колебаний во времени для положительного полупериода компоненты m_x , происходящее после включения возбуждения. Постоянная затухания α установлена равной 0,01. Частота возбуждения соответствовала минимуму зависимости групповой скорости от волнового числа, представленной на рис. 4.4 кривой 1, то есть равнялась 3640 МГц.

Установление колебаний происходило путем биений между частотой возбуждения и частотой ферромагнитного резонанса в заданной геометрии при поле $H = 437,5$ Э. Огибающая биений имела характер спадающей экспоненты, показанной на рис. 2 утолщенной линией.

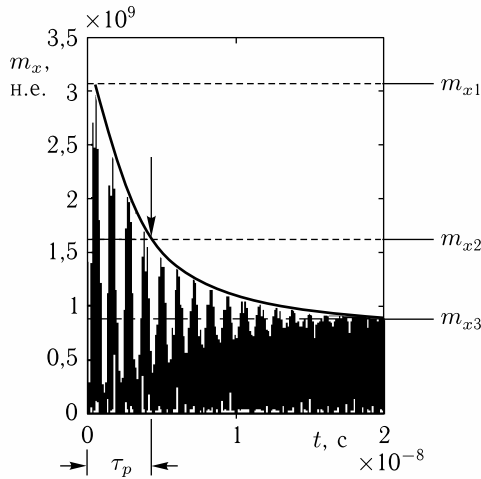


Рис. 4.5. Схема определения времени установления вынужденных колебаний намагниченности. Амплитуда переменного поля $h = 0,01$ Э. Остальные параметры совпадают с принятыми в разделе 4.4

На развертке колебаний регистрировались два уровня амплитуды намагниченности: m_{x1} , соответствующий началу возбуждения и m_{x2} , соответствующий установлению стационарного режима. Уровень m_{xS} определялся по времени спада амплитуды биений в $e = 2,71828 \dots$ раз, то есть по формуле:

$$m_{xS} = \frac{m_{x1} - m_{x2}}{e} + m_{x2}. \quad (4.155)$$

Время установления τ_p определялось как промежуток между началом возбуждения и моментом спада амплитуды биений до уровня m_{xS} (точка пересечения этого уровня с огибающей показана стрелкой).

4.6. Роль диссипации в формировании дисперсии действительной части волнового числа для прямых ПМСВ

Рассмотрим теперь роль диссипации в формировании дисперсионных свойств действительной и мнимой частей волнового числа. На данном этапе ограничимся случаем распространения волны перпендикулярно направлению поля, то есть будем полагать угол φ (рис. 4.1) равным нулю. В настоящем разделе рассмотрим действительную часть волнового числа, для чего обратимся к рис. 4.6.

На этом рисунке показаны дисперсионные кривые для действительной части волнового числа прямых ПМСВ, построенные в соответствии с формулой (4.86) со знаком «плюс» в случае $\varphi = 0^\circ$ при различных

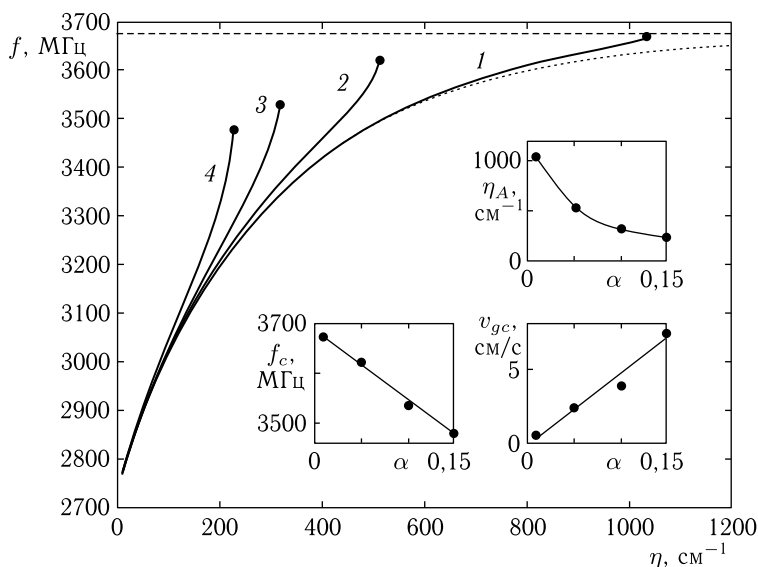


Рис. 4.6. Дисперсия действительной части волнового числа прямых ПМСВ в случае $\varphi = 0^\circ$ при различных уровнях диссипации. Параметр затухания α : 1 — 0,01; 2 — 0,05; 3 — 0,10; 4 — 0,15. Точечная кривая соответствует $\alpha = 0$. Остальные параметры совпадают с принятыми в разделе 4.4. На врезках показаны зависимости предельных значений η_A , f_c и v_{gc} от параметра α

уровнях диссипации. Горизонтальная пунктирная линия соответствует верхней частотной границе области существования прямых ПМСВ (согласно (4.144), при принятых параметрах равной 3675 МГц).

Можно видеть, что по мере увеличения диссипации дисперсионные кривые отклоняются вверх по частоте относительно бездиссипативной кривой, причем такое отклонение проявляется тем сильнее, чем диссипация выше. Однако кривые с диссипацией, в отличие от бездиссипативной кривой (точечная линия), обрываются при критическом значении волнового числа η_c , которому соответствует критическая частота f_c . На рис. 4.6 обрыв дисперсионных кривых при различных значениях диссипации показан укрупненными точками. Видно, что предельные волновое число и частота становятся тем меньше, чем величина диссипации больше.

Из общего хода дисперсионных кривых видно, что вблизи предельного значения волнового числа все они изгибаются вверх, подходя к граничной частоте почти с вертикальной касательной. Такое их поведение соответствует увеличению групповой скорости ПМСВ, определяемой по формуле (4.150).

На врезках показаны зависимости η_A , f_c и v_{gc} от параметра α в предельных точках кривых $f(\eta)$.

Замечание. При построении использовались значения этих параметров, полученные из окончания кривых $f(\eta)$, рассчитанных с шагом по η равным 1 см^{-1} . Уменьшение этого шага до $0,01 \text{ см}^{-1}$ привело к незначительному (доли процента) уточнению предельных значений η_c , f_c и v_{gc} , однако время расчета существенно (на два порядка) увеличилось, поэтому, с учетом приближенного характера аналитической формулы (4.86), в рамках настоящей работы такое уточнение было признано нецелесообразным.

Из первой врезки на рис. 4.6 можно видеть, что зависимость η_c от α близка к обратной пропорциональности. Действительно, при $\alpha \rightarrow 0$ ограничение зависимостей $f(\eta)$ пропадает, то есть $\eta_c \rightarrow \infty$. В то же время, при $\alpha \rightarrow \infty$ величина $\eta_c \rightarrow 0$, так что приближение зависимости $\eta_c(\alpha)$ обратной пропорциональностью является вполне правдоподобным. Из двух других врезок видно, что зависимости f_c и v_{gc} от параметра α довольно точно описываются прямыми линиями.

Замечание. Из рис. 4.6 можно видеть, что по мере увеличения параметра α дисперсионные кривые от 1 до 4 в целом укорачиваются и приближаются к левому краю рисунка, где волновое число стремится к нулю. С пределе они как бы вырождаются к начальной точке вблизи $k \rightarrow 0$ и $f \rightarrow f_1 = 2739,2 \text{ МГц}$ (4.143), (4.146). Такое их поведение говорит о существовании предельного значения параметра затухания, выше которого существование ПМСВ становится вообще невозможным. Проверка показывает, что такое предельное значение соответствует α около 0,20, поэтому интервал изменения α при построении рис. 4.6 и всех последующих ограничен на уровне 0,15. Более подробно вопрос о предельном значении α и соотношении его с остальными параметрами задачи требует отдельного рассмотрения, выходящего за рамки настоящей работы.

Возвращаясь опять к рассмотрению рис. 4.6, следует отметить, что наблюдаемое из общего хода кривых 1–4, а также из последней врезки с зависимостью v_{gc} от параметра α , возрастание групповой скорости волны при увеличении затухания, с точки зрения классической электродинамики, является определенным парадоксом. Так, в классике принято считать, что при фиксированной частоте групповая скорость с увеличением диссипации уменьшается. Такое положение, например, имеет место при распространении электромагнитных волн в передающих линиях с потерями [246, стр. 254, форм. (51.16)].

Заметим? однако, что классическое рассмотрение предполагает бездисперсионный либо слабо дисперсионный характер распространения волн, когда фазовая скорость при изменении частоты остается постоянной или меняется в незначительной степени.

Предметом же рассмотрения настоящей работы являются поверхностные магнитостатические волны (ПМСВ), дисперсионная зависимость которых вблизи верхней границы области существования (горизонтальная пунктирная линия на рис. 4.6) имеет весьма сильную осо-

бенность. При приближении частоты волны к этой границе снизу как фазовая, так и групповая скорости ПМСВ стремятся к нулю, то есть волна по мере увеличения частоты как бы «зацепляется» за прецессию намагниченности, в результате чего почти останавливается. Вообще говоря, магнитостатические волны являются частным случаем электромагнитных волн, для которых дисперсионная зависимость имеет вид прямой линии, причем наклон этой линии значительно превышает наклон ПМСВ во всем интервале их существования, то есть такая прямая располагается значительно левее кривых 1–4, приведенных на рис. 4.6 (в принятом на рис. 4.6 масштабе эта прямая практически совпадает с вертикальной осью: так при частоте 3600 МГц волновое число равно всего $0,754 \text{ см}^{-1}$, поэтому упомянутая прямая отдельно не отмечена). В отсутствие затухания дисперсионная кривая для ПМСВ (точечная линия на рис. 4.6) располагается значительно правее упомянутой прямой, что обусловлено именно «зацеплением» электромагнитной волны за прецессию намагниченности. В случае увеличения затухания взаимодействие магнитного поля ПМСВ с прецессирующей намагниченностью уменьшается, то есть электромагнитная волна в какой-то степени высвобождается от «зацепления», в результате чего бездиссипативная кривая (точечная линия на рис. 4.6) отклоняется в сторону дисперсионной кривой для электромагнитных волн, то есть по рисунку налево. При этом групповая скорость волны, определяемая по углу касательной к кривой дисперсии, соответственно увеличивается, что и является причиной разрешения упомянутого парадокса с классикой.

4.6.1. Групповая скорость волны

Рассмотрим теперь групповую скорость прямых ПМСВ несколько более подробно. Поскольку ограничение зависимостей $f(\eta)$ (кривых 1–4 на рис. 4.6) сопровождается изгибом их вверх, то есть ростом групповой скорости, обратимся теперь к рис. 4.7, где показано, как меняется групповая скорость ПМСВ v_g при изменении действительной части волнового числа η для различных уровней диссипации (параметра α).

Можно видеть, что все кривые по мере увеличения η сначала спадают, после чего, проходя через минимум (обозначенный открытыми точками), нарастают до значительных величин. Как и на рис. 4.6, все кривые обрываются при тех же, что и там? значениях $\eta = \eta_c$, однако здесь обрыв сопровождается значительным ростом v_g , тем более выраженным, чем параметр затухания α больше. При увеличении параметра α положение минимума смещается к меньшим значениям η , причем абсолютная глубина его повышается.

На врезках показаны зависимости η_m , f_m и v_{gm} от параметра α в точках минимумов кривых $v_g(\eta)$. Можно видеть, что эти зависимости ведут себя подобно таковым на врезках рис. 4.6, то есть зависимость $\eta_m(\alpha)$ соответствует обратной пропорциональности, а зависимости $f_m(\alpha)$ и $v_{gm}(\alpha)$ приближаются прямыми. Здесь, однако,

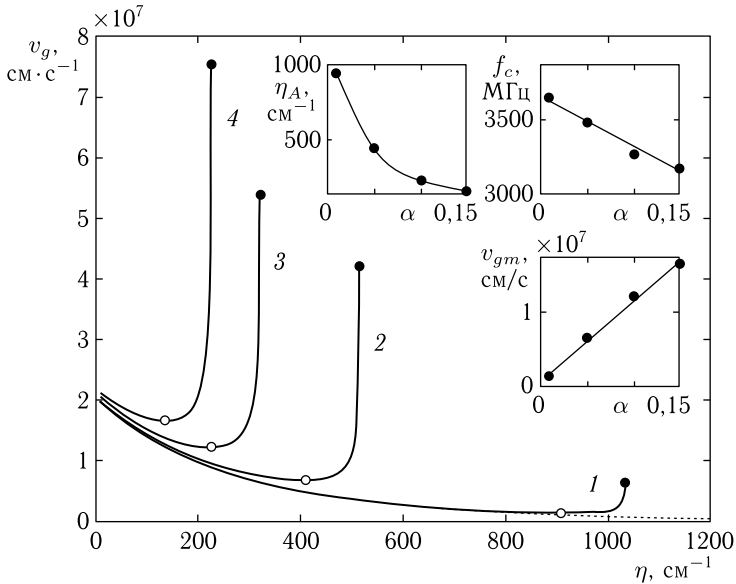


Рис. 4.7. Зависимости групповой скорости прямых ПМСВ от действительной части волнового числа в случае $\varphi = 0_0$ при различных уровнях диссипации. Параметр затухания α : 1 — 0,01; 2 — 0,05; 3 — 0,10; 4 — 0,15. Точечная кривая соответствует $\alpha = 0$. Остальные параметры совпадают с принятыми в разделе 4.4. На врезках показаны соответствующие минимумы кривых зависимости значений η_A , f_c и v_{gc} от параметра α

эти зависимости располагаются значительно ниже зависимостей на рис. 4.6, что определяется тем, что кривые на рис. 4.6 соответствуют предельным значениям действительной части волнового числа, тогда как кривые на рис. 4.7 — промежуточным значениям тех же зависимостей.

Таким образом, главным результатом настоящего раздела можно считать определяемое диссипацией ограничение дисперсионных кривых при критическом значении действительной части волнового числа, сопровождающееся прохождением групповой скорости через минимум с последующим ее возрастанием.

4.6.2. Механизм ограничения дисперсионных кривых для прямых ПМСВ

Рассмотрим теперь возможные механизмы ограничения дисперсионных кривых за счет диссипации.

С математической стороны, обрыв дисперсионных кривых соответствует изменению знака подкоренного выражения в дисперсионном соотношении (4.86) с положительного на отрицательный. При этом в диапазоне частот существования ПМСВ оба сомножителя перед α , благодаря своей квадратичности, остаются положительными, так что

второе слагаемое при увеличении α возрастает, а когда оно становится равным единице, дисперсионные кривые обрываются. Таким образом, расчет предельного значения действительной части волнового числа сводится к решению уравнения:

$$1 - \alpha^2 F_2^2 \operatorname{sh}^2(2\eta d \vartheta) = 0, \quad (4.156)$$

где параметры F_2 и ϑ зависят только от частоты и определяются соответственно формулами (4.70) и (4.38), с учетом входящих в эти формулы промежуточных обозначений.

Замечание. Это уравнение при заданном значении параметра α связывает предельную частоту f_c с предельным волновым числом η_c , то есть содержит две независимых переменных, вследствие чего не может быть однозначно разрешено в отсутствие зависимости f от η . То есть для того, чтобы найти зависимость f_c и η_c от α , надо сначала определить зависимость f от η , которая в свою очередь может быть получена только из решения полного уравнения (4.86). Таким образом, решение уравнения (4.156) сводится к «порочному кругу» и не может быть осуществлено независимо от решения полного уравнения (4.86). В этом случае алгоритм нахождения зависимости f_c и η_c от α можно свести к последовательному вычислению с определенным шагом по α предельных значений f_c и η_c по уравнению (4.156) с учетом (4.86), после чего по полученным значениям f_c и η_c построить их зависимости от α , как это и было сделано при построении первых двух врезок на рис. 4.6. В первом же приближении для решения уравнения (4.156) можно воспользоваться зависимостью f от η для бездиссипативной среды [6, формула (116) со знаком «плюс»], сохраняя, однако, зависимость от диссипации в виде коэффициента перед вторым слагаемым в (4.86). Такое решение, хотя и возможно, но является чрезвычайно громоздким, поэтому в рамках настоящей работы не проводилось.

Рассмотрим теперь качественную физическую причину ограничения дисперсионных кривых. Вспомогательный расчет времени релаксации (или установления постоянного уровня) вынужденных колебаний намагниченности τ_p , выполненный по методике, описанной в разделе 4.5.2, показывает, что при неизменном параметре α по мере увеличения частоты время релаксации уменьшается. То есть, чем выше частота возбуждаемой волны, тем на меньшем расстоянии она затухает. Можно полагать, что при увеличении η , сопровождающемся увеличением f , когда расстояние затухания волны сравнивается с ее длиной, волна переходит к аperiodическому режиму и дальше не распространяется.

В подтверждение такого предположения рассмотрим табл. 4.1, в первом столбце которой приведены значения параметра α , а в следующих — параметры распространяющейся волны.

При построении таблицы во втором и четвертом столбцах использованы значения волнового числа η_m и групповой скорости v_{gm} , соответствующие минимумам кривых 1–4 на рис. 4.7. В третьем столбце

Таблица 4.1. Параметры волны при различных значениях параметра затухания

α	η_m (см ⁻¹)	τ_p (с)	v_{gm} (см · с ⁻¹)	S_m (см)	λ_m (см)
0,01	937	$0,45 \cdot 10^{-8}$	$0,1387 \cdot 10^7$	0,0062	0,0067
0,05	416	$0,28 \cdot 10^{-8}$	$0,6682 \cdot 10^7$	0,0187	0,0151
0,10	214	$0,15 \cdot 10^{-8}$	$1,2220 \cdot 10^7$	0,0183	0,0294
0,15	144	$0,12 \cdot 10^{-8}$	$1,6590 \cdot 10^7$	0,0192	0,0436

приведено время релаксации τ_p , рассчитанное по алгоритму, описанному в разделе 4.5.2.

В пятом столбце приведена величина пути, проходимого волной за время своей релаксации, определяемого как:

$$S_m = \tau_p \cdot v_{gm}. \quad (4.157)$$

В последнем шестом столбце приведена длина волны, рассчитываемая из значения действительной части волнового числа по формуле:

$$\lambda_m = 2\pi/\eta_m. \quad (4.158)$$

Можно видеть, что значения пробега волны за время релаксации S_m и ее длины λ_m , приведенные в двух последних столбцах таблицы, довольно близки между собой. Для $\alpha = 0,01$ совпадение можно считать хорошим (около 7%), хотя по мере увеличения α различие постепенно увеличивается, достигая при $\alpha = 0,15$ примерно двух раз. Однако, учитывая невысокую точность определения времени релаксации (раздел 4.5.2), падающую при увеличении частоты за счет того, что колебания до полного затухания успевают пройти всего несколько периодов (при $\alpha = 0,15$ не более 5–7), можно полагать, что соответствие данных, приведенных в пятом и шестом столбцах таблицы, является вполне приемлемым.

Такое их совпадение подтверждает высказанное предположение о том, что рост волнового числа приводит к затуханию волны на расстоянии своей длины, то есть к аperiodическому режиму, дальнейшему распространению волны препятствующему.

Переход к такому режиму происходит в области минимумов кривых 1–4 на рис. 4.7, для чего в табл. 4.1 и были использованы значения параметров волны, соответствующие этим минимумам. После установления аperiodического режима колебания волны как таковые прекращаются, то есть намагниченность своего нулевого значения не переходит, а плавно стремится к нулю на расстоянии, могущем значительно превышать длину волны. Такое плавное стремление уже не ограничивается переколебаниями намагниченности с изменением знака, происходящими при периодическом волновом процессе, что и приводит в результате к кажущемуся увеличению групповой скорости до больших значений, отражаемых ростом кривых 1–4 на рис. 4.7.

4.7. Роль диссипации в формировании дисперсии волнового числа для обратных ПМСВ

Рассмотрим теперь роль диссипации в формировании дисперсии волнового числа в случае обратных (диссипативных) ПМСВ, для чего обратимся к рис. 4.8.

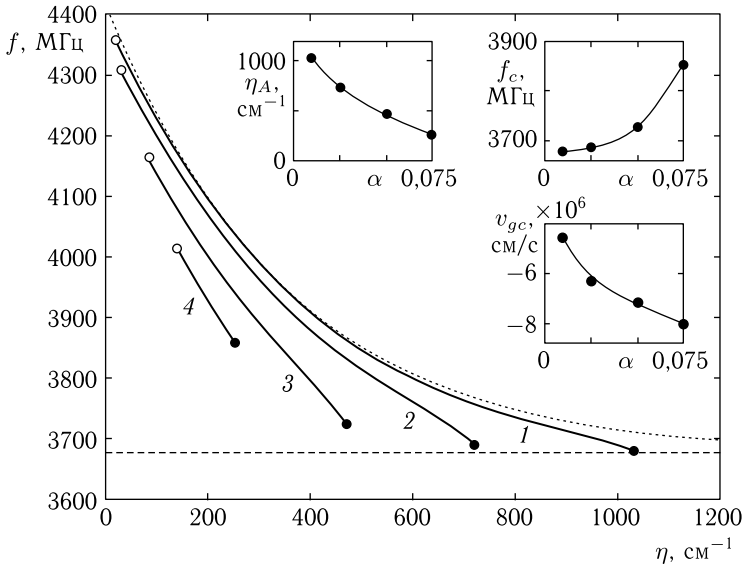


Рис. 4.8. Дисперсия действительной части волнового числа обратных ПМСВ в случае $\varphi = 0^\circ$ при различных уровнях диссипации. Параметр затухания α : 1 — 0,010; 2 — 0,025; 3 — 0,050; 4 — 0,075. Точечная кривая соответствует $\alpha \rightarrow 0$. Остальные параметры совпадают с принятыми в разд. 4.4. На врезках показаны зависимости предельных значений η_A , f_c и v_{gc} от параметра α

На этом рисунке показаны дисперсионные кривые для действительной части волнового числа обратных ПМСВ, построенные в соответствии с формулой (4.86) со знаком «минус» в случае $\varphi = 0^\circ$ при различных уровнях диссипации. Горизонтальная пунктирная линия соответствует нижней частотной границе области существования обратных ПМСВ, совпадающей с верхней границей для прямых ПМСВ (согласно (4.144)), при принятых параметрах равной 3675 МГц).

В отличие от подобных зависимостей для прямых волн (рис. 4.6), здесь при увеличении волнового числа кривые спадают, что соответствует отрицательной групповой скорости, то есть отражает обратный характер распространяющихся волн.

Можно видеть, что по мере увеличения диссипации дисперсионные кривые отклоняются вниз по частоте относительно бездиссипативной

кривой, причем такое отклонение проявляется тем сильнее, чем диссипация выше.

Кривые с диссипацией, в отличие от бездиссипативной кривой (точечная линия), обрываются по волновому числу как снизу, так и сверху. Верхний обрыв (при больших η) является аналогом такового для прямых волн, тогда как нижний обрыв (при меньших η) для прямых волн отсутствует.

Нижнее критическое значение волнового числа η_a по мере увеличения затухания увеличивается, соответствующие ему частота f_a и групповая скорость v_{ga} уменьшаются. Так, при $\alpha = 0,050$ (кривая 3) эти величины составляют: $\eta_a = 86 \text{ см}^{-1}$, $f_a = 4161 \text{ МГц}$, $v_{ga} = -10,068 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$, а при увеличении α до 0,075 (кривая 4) равны соответственно: $\eta_a = 174 \text{ см}^{-1}$, $f_a = 4017 \text{ МГц}$, $v_{ga} = -8,929 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$.

Верхнее критическое значение η_c , являющееся аналогом такового для прямых волн, при увеличении затухания также уменьшается, а соответствующие ему частота f_c и групповая скорость v_{gc} увеличиваются. Так, при $\alpha = 0,050$, (кривая 3) эти величины составляют: $\eta_c = 472 \text{ см}^{-1}$, $f_c = 3792 \text{ МГц}$, $v_{gc} = -7,174 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$, а при увеличении α до 0,075 (кривая 4) равны соответственно: $\eta_c = 255 \text{ см}^{-1}$, $f_c = 3856 \text{ МГц}$, $v_{gc} = -8,098 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$.

Поскольку ограничение зависимостей $f(\eta)$ (кривых 1–4 на рис. 4.8) сопровождается изгибом их вниз, то есть ростом групповой скорости, обратимся теперь к рис. 4.9, где показано, как меняется групповая скорость обратных ПМСВ v_g при изменении действительной части волнового числа η для различных уровней диссипации (параметра α).

Можно видеть, что все кривые с качественной стороны по структуре представляют собой как бы «зеркальное» отражение подобных кривых, приведенных на рис. 4.7, то есть по мере увеличения η сначала возрастают, после чего, проходя через максимум (обозначенный открытыми точками), спадают до величин, однако меньших, чем начальные точки, соответствующие стремлению η к нулю.

Как и на рис. 4.8, все кривые обрываются при тех же, что и там значениях $\eta = \eta_c$, причем здесь обрыв сопровождается ростом v_g , однако тем менее выраженным, чем параметр затухания α больше. Для кривой 4 максимум и следующий за ним спадающий участок вообще отсутствует.

На врезках показаны зависимости η_m , f_m и v_{gm} от параметра α в точках максимумов кривых $v_g(\eta)$. Можно видеть, что зависимость $\eta_m(\alpha)$ ведет себя подобно таковой, приведенной на первой врезке на рис. 4.8, однако здесь, как и в случае прямых волн, она проходит несколько ниже. Зависимости $f_m(\alpha)$ и $v_{gm}(\alpha)$ имеют ход, подобный таковым на рис. 4.8, причем в этом случае уже довольно близко приближаются прямыми. Здесь эти зависимости располагаются также ниже зависимостей на рис. 4.8, что определяется тем, что кривые

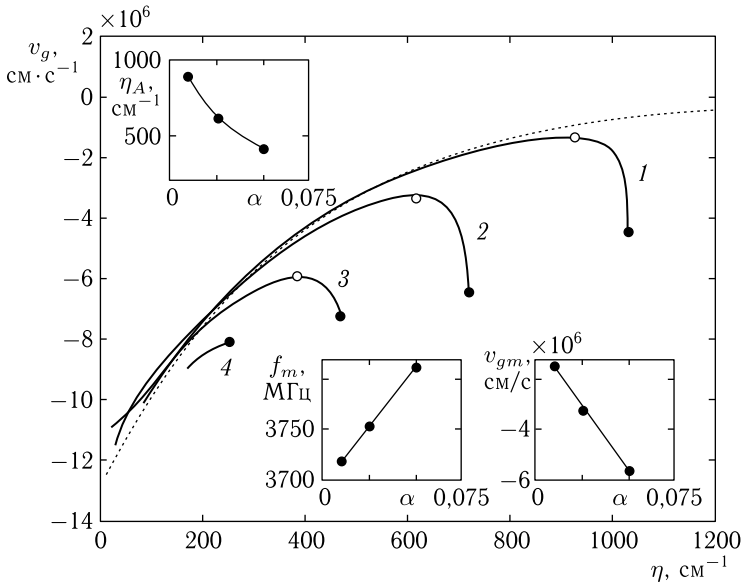


Рис. 4.9. Зависимости групповой скорости обратных ПМСВ от действительной части волнового числа в случае $\varphi = 0^\circ$ при различных уровнях диссипации. Параметр затухания α : 1 — 0,010; 2 — 0,025; 3 — 0,050; 4 — 0,075. Точечная кривая соответствует $\alpha \rightarrow 0$. Остальные параметры совпадают с принятыми в разд. 4.4

на рис. 4.8 соответствуют предельным значениям действительной части волнового числа, а кривые на рис. 4.9 — промежуточным значениям тех же зависимостей.

4.7.1. Механизм ограничения дисперсионных кривых для обратных ПМСВ

Причина обрыва дисперсионных кривых сверху для обратных волн — та же, что и для прямых и состоит в приближении пути, проходимого волной за время релаксации, к длине самой волны, в результате чего волны приобретают аперидический характер. Более подробно этот вопрос рассмотрен в разд. 4.6.2, так что здесь его обсуждение является излишним.

Обрыв снизу для прямых волн отсутствует и связан, по-видимому, с обратным характером волн. Возможной причиной нижнего обрыва является следующая. Из обратного характера волн следует, что при уменьшении волнового числа частота волны увеличивается, так что время ее релаксации уменьшается и путь, проходимый волной за это время, также уменьшается. С другой стороны, уменьшение волнового числа соответствует увеличению длины волны, то есть тенденции уменьшения пути и увеличения длины волны действуют навстречу

друг другу, поэтому волна приходит в аperiodическое состояние даже быстрее, чем в случае прямых волн. Так, для прямой волны время релаксации вынуждено «догонять» длину волны, для обратной же волны они «стремятся навстречу» друг другу. Таким образом, причина обрыва для обратных волн — та же самая, что для прямых, однако здесь она проявляется не только для коротких волн, но и для длинных. Заметим, однако, что этот вопрос требует более подробного количественного рассмотрения, в данный момент за рамки настоящей работы выходящего.

Таким образом, в результате совместного действия обоих упомянутых ограничений, рассматриваемые здесь обратные диссипативные волны по параметру затухания существуют только в области, ограниченной сверху предельным значением $\alpha_{\max} \approx 0,080$. На существование такого ограничения указывалось ранее в работах [5, 28], однако природа его не была рассмотрена.

Можно полагать, что причина ограничения кроется в сужении области существования обратных ПМСВ по мере увеличения α , происходящем как сверху, так и снизу благодаря механизму перехода к аperiodическому состоянию. Такое сужение в конце концов приводит к смыканию обеих встречных тенденций, что и определяет предельное значение α . Получающиеся при этом границы областей существования ПМСВ рассматриваются далее в разд. 4.8.

На рис. 4.8 верхний обрыв дисперсионных кривых при различных значениях диссипации показан укрупненными точками. Видно, что с увеличением диссипации предельное волновое число уменьшается, а частота, ему соответствующая, увеличивается. Подобный обрыв по волновому числу наблюдался и в случае прямых волн (рис. 4.6), однако здесь при тех же значениях параметра затухания критическое волновое число η_c несколько меньше, причем это различие по мере увеличения параметра затухания также увеличивается.

Так, например, при $\alpha = 0,010$ критическое волновое число η_c для прямых волн равно 1034 см^{-1} , а для обратных — 1032 см^{-1} , так что различие составляет всего 2 см^{-1} , тогда как при $\alpha = 0,050$ соответствующие значения равны 515 см^{-1} и 472 см^{-1} , то есть различие достигает 43 см^{-1} .

Замечание. При сравнении приведенных данных на рис. 4.8, 4.9 с кривыми на рис. 4.6 следует обращать внимание на то, что здесь шаг по параметру α между следующими друг за другом кривыми вдвое меньше, чем на рис. 4.6. Это сделано из стремления авторов настоящей работы уместить на рисунке большее число кривых в ограниченной по α области.

Можно видеть, что вблизи предельного значения волнового числа дисперсионные кривые слегка изгибаются вниз, что соответствует увеличению групповой скорости ПМСВ, подобно случаю прямых волн, однако здесь эта скорость является отрицательной.

На врезках показаны зависимости η_c , f_c и от параметра α в предельных точках кривых $f(\eta)$. Можно видеть, что приведенная на первой врезке зависимость η_c от α близка к подобной зависимости на рис. 4.6 и также близка к обратной пропорциональности. Однако приведенные на двух других врезках зависимости f_c и v_{gc} от α , будучи несколько отличными от прямых, имеют наклон, обратный таковому на рис. 4.6. Можно полагать, что такое изменение наклона определяется именно обратным характером рассматриваемых здесь волн.

Таким образом, главным результатом настоящего раздела, как и для случая прямых волн, можно считать определяемое диссипацией ограничение дисперсионных кривых при критическом значении действительной части волнового числа, сопровождающееся прохождением групповой скорости через максимум с последующим ее убыванием. Главное отличие от прямых волн состоит в качественной симметрии всех зависимостей относительно горизонтальной оси, соответствующей предельному значению частоты или групповой скорости, однако количественные характеристики прямых и обратных волн в этих случаях различаются. Дополнительное отличие состоит в ограничении сверху области допустимых значений параметра затухания.

4.8. Области существования прямых и обратных волн по параметру затухания

Из рис. 4.6 и рис. 4.8 можно видеть, что в диссипативной среде, как прямые, так и обратные ПМСВ существуют только в ограниченных областях, как по частоте, так и по параметру затухания. Причина ограничения по α , состоящая в сближении времени релаксации волны с ее периодом, рассмотрена в разд. 4.6.2. Здесь же приведем общий вид областей существования в непрерывных пределах изменения параметра затухания, для чего обратимся к рис. 4.10.

На этом рисунке штриховкой показаны области, где возможно существование прямых и обратных ПМСВ. Вне этих областей ПМСВ отсутствуют. Пунктирные горизонтальные линии соответствуют граничным частотам спектра ПМСВ, определяемым формулами (4.142)–(4.144), и равным соответственно: $f_1 = 2739,2$ МГц, $f_2 = 3675,0$ МГц, $f_3 = 4416,8$ МГц.

Можно видеть, что при стремлении α к нулю прямые ПМСВ существуют во всей области частот от f_1 до f_2 , тогда как область существования обратных ПМСВ при этом, хотя и расширяется, стремясь в пределе к интервалу между f_2 и f_3 , однако до вертикальной оси, соответствующей $\alpha = 0$, не доходит (как это для наглядности отмечено свободным от штриховки промежутком), что обусловлено их исключительно диссипативной природой.

Область прямых ПМСВ при увеличении α сужается сверху, тогда как область обратных сужается сверху и снизу, ограничиваясь при

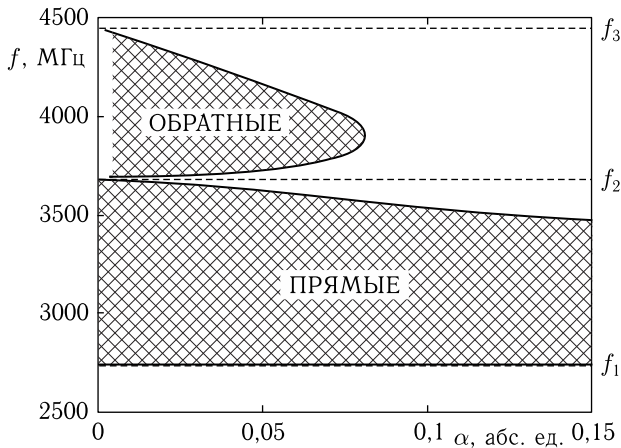


Рис. 4.10. Области существования прямых и обратных ПМСВ. Параметры соответствуют принятым при построении рис. 4.6–4.9

значении α 0,079 на частоте 3916,5 МГц. Такое сужение соответствует верхнему и нижнему ограничениям по частоте кривых 1–4 на рис. 4.8, а также границам пунктирных участков кривых 1–4 на приведенных в следующем разделе рис. 4.11 и рис. 4.12.

4.9. Роль диссипации в формировании дисперсии мнимой части волнового числа

Рассмотрим теперь роль диссипации в формировании дисперсионных свойств мнимой части волнового числа, для чего обратимся к рис. 4.11.

На рис. 4.11 показаны дисперсионные кривые для мнимой части волнового числа ПМСВ в случае $\varphi = 0^\circ$ при различных уровнях диссипации. Кривые построены путем полного решения уравнения (4.133) без каких-либо ограничений, заключенных в самом этом уравнении. Однако из рис. 4.6 и рис. 4.8 можно видеть, что области существования как прямых, так и обратных ПМСВ по частоте ограничиваются, не доходя до граничных частот, определяемых формулами (4.143)–(4.145). Поэтому на рис. 4.11 участки кривых, выходящие за пределы таких частотных ограничений, хотя и получаются из решения уравнения (4.133), но в силу условности их существования отмечены пунктиром. Более подробно области ограничения рассмотрены в разд. 4.6–4.7, здесь же для сохранения общности обсудим полные кривые, получаемые непосредственно из решения уравнения (4.133).

Из рис. 4.11 можно видеть, что по мере увеличения частоты мнимая часть волнового числа всегда монотонно возрастает, то есть затухание волн при этом увеличивается. Вблизи среднего участка кривые имеют

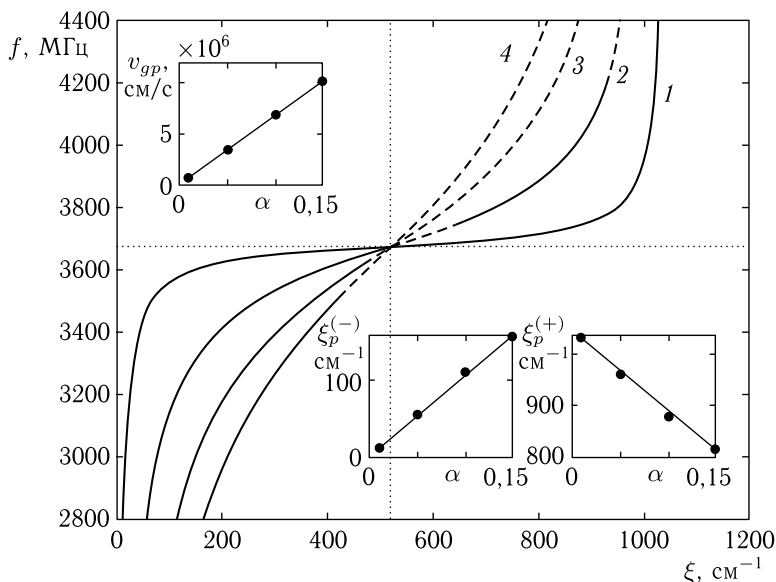


Рис. 4.11. Дисперсия мнимой части волнового числа ПМСВ в случае $\varphi = 0^\circ$ при различных уровнях диссипации. Параметр затухания α : 1 — 0,01; 2 — 0,05; 3 — 0,10; 4 — 0,15. Горизонтальная точечная кривая соответствует $\alpha = 0$. Остальные параметры совпадают с принятыми в разд. 4.4. На врезках показаны зависимости предельных значений $\xi_p^{(\pm)}$ и v_{gp} от параметра α

перегиб, соответствующий резкому росту затухания при переходе от прямых волн к обратным. По мере увеличения параметра α перегиб становится более плавным, причем его сглаживание проявляется тем сильнее, чем параметр затухания больше. Так, для кривой 1, соответствующей $\alpha = 0,01$, по краям области существования ПМСВ дисперсионные кривые идут почти вертикально, а вблизи середины этой области близки к горизонтали, тогда как для кривой 4, соответствующей $\alpha = 0,15$, наклон дисперсионной зависимости по всей области ПМСВ значительно превышает таковой для кривой 1 и сохраняется почти постоянным.

Все кривые начинаются вблизи нижней границы существования прямых ПМСВ $f_1 = 2739,2$ МГц и заканчиваются вблизи верхней границы существования обратных (диссипативных) ПМСВ $f_3 = 4416,8$ МГц, частоты которых определяются формулами (4.143) и (4.145) соответственно. Перегиб кривых происходит на частоте, соответствующей границе между областями существования прямых и обратных ПМСВ, равной 3675,0 МГц и определяемой формулой (4.144). При этом мнимая часть волнового числа единая для всех кривых равна 509 см^{-1} .

Наименьшее значение мнимой части волнового числа при $\alpha = 0,01$ на частоте 2739,2 МГц (кривая 1) составляет 12 см^{-1} , а наибольшее значение для той же кривой на частоте 4416,8 МГц равно 1029 см^{-1} . Такие же числа для кривой 4, то есть при $\alpha = 0,15$ равны соответственно 158 см^{-1} и 810 см^{-1} .

В правой нижней части рис. 4.11 на врезках показаны зависимости низшего $\xi_p^{(-)}$ и высшего $\xi_p^{(+)}$ значений волнового числа от параметра α . Можно видеть, что обе зависимости близки к прямым линиям. Общий их ход отражает сужение области существования ПМСВ по мнимому волновому числу, происходящее по мере увеличения затухания.

Из врезки в левом верхнем углу рис. 4.11 можно видеть, что по мере увеличения параметра α групповая скорость роста затухания в общей точке пересечения кривых возрастает, то есть волна затухает тем быстрее, чем параметр α больше, причем зависимость v_{gp} от α является практически линейной.

Обратимся теперь к рис. 4.12, где показаны зависимости групповой скорости роста затухания ПМСВ от мнимой части волнового числа в случае $\varphi = 0^\circ$ при различных уровнях диссипации. Пунктир-

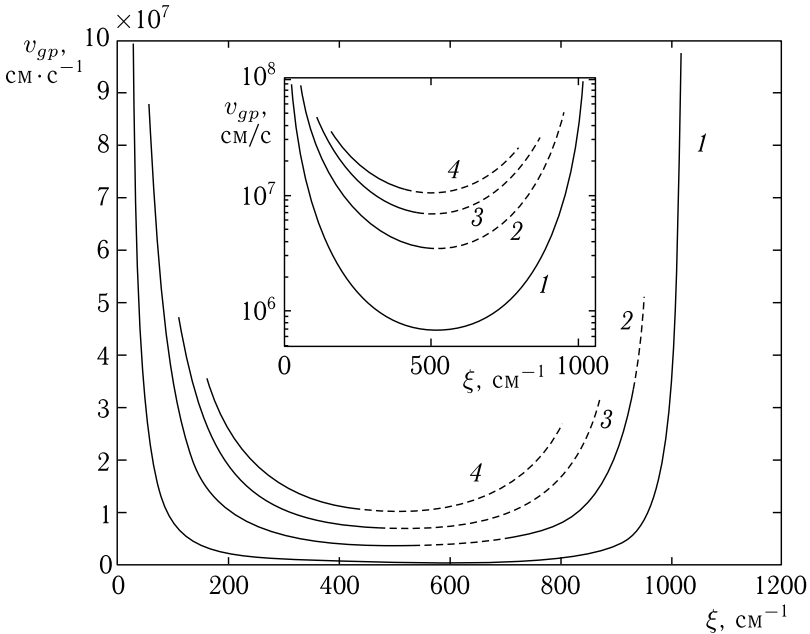


Рис. 4.12. Зависимости групповой скорости затухания ПМСВ от мнимой части волнового числа в случае $\varphi = 0^\circ$ при различных уровнях диссипации. Параметр затухания α : 1 — 0,01; 2 — 0,05; 3 — 0,10; 4 — 0,15. Остальные параметры совпадают с принятыми в разд. 4.4. На врезке показаны те же кривые в логарифмическом масштабе

ный характер отдельных участков кривых имеет то же значение, что на рис. 4.11.

Можно видеть, что все кривые по мере приближения к краям области существования ПМСВ возрастают тем более резко, чем параметр затухания α меньше. Минимумы кривых приходятся на общую точку перегиба кривых на рис. 4.11, соответствующую $\xi_p = 509 \text{ см}^{-1}$ и $f_p = 3675 \text{ МГц}$. Рост противоположных ветвей кривых заканчивается при тех значениях ξ , при которых кривые на рис. 4.8 выходят на верхний и нижний пределы по частоте.

На врезке показаны те же зависимости в логарифмическом масштабе, несколько более наглядно иллюстрирующие ход кривых в области минимумов.

Таким образом, основным результатом настоящего раздела можно считать монотонный рост дисперсионной кривой для мнимой части волнового числа, быстрый вблизи нижней и верхней границ объединенной области существования прямых и обратных ПМСВ и медленный в окрестности частотной границы между этими областями. При этом групповая скорость роста затухания на противоположных границах области существования ПМСВ велика, а вблизи границы, разделяющей области прямых и обратных волн — минимальна.

4.10. Аналогия со случаем электромагнитных волн

Магнитостатические волны являются частным случаем электромагнитных волн (ЭМВ), распространяющихся в магнитной среде в условиях настолько большой магнитной проницаемости, что электрическое поле волны по сравнению с магнитным становится исчезающе малым. В волне любой природы волновой процесс обеспечивается задержанным во времени взаимодействием локальных элементов волны, расположенных в пространственно отстоящих друг от друга точках. В электромагнитной волне такое взаимодействие обеспечивается за счет превращения друг в друга электрического и магнитного полей. В магнитостатической волне, благодаря условиям ферромагнитного резонанса, главную роль играют дипольные поля, создаваемые отдельными намагниченными участками магнитной среды.

Для электромагнитной волны сильное взаимодействие со средой при ферромагнитном резонансе имеет характер известной в оптике аномальной дисперсии [153, стр. 430, стр. 541–546], при которой волна испытывает значительное затухание.

Сравним с качественной стороны дисперсионные свойства прямых и обратных ПМСВ со свойствами ЭМВ в условиях аномальной дисперсии, для чего обратимся к рис. 4.13, где показаны дисперсионные кривые для магнитостатических (*а*) и электромагнитных (*б*) волн.

На рис. 4.13, *а* участок дисперсионной кривой $A_m B_m$ соответствует кривой 1 на рис. 4.6, а участок $B_m C_m$ — кривой 1 на рис. 4.8.

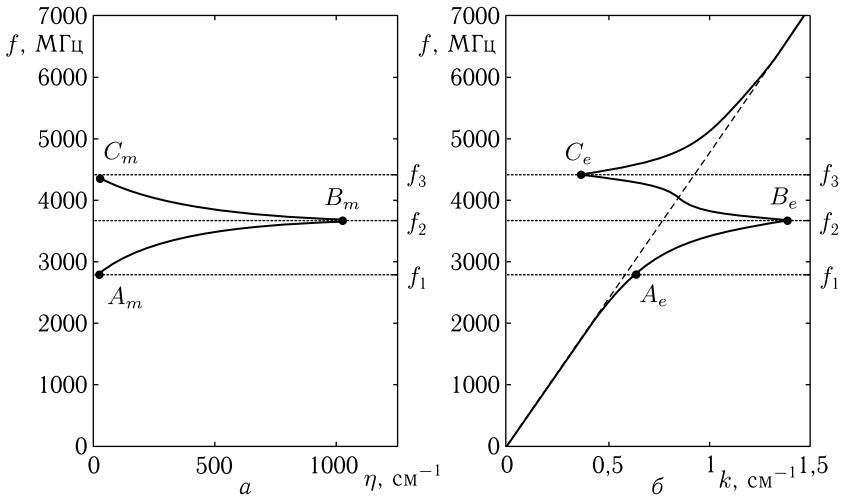


Рис. 4.13. Иллюстрация аналогии между магнитоэлектрическими (а) и электромагнитными (б) волнами. Параметры соответствуют принятым при построении рис. 4.6 и рис. 4.8 при $\alpha = 0,01$. Частоты: $f_1 = 2793$ МГц, $f_2 = 3675$ МГц, $f_3 = 4417$ МГц

Характерные частоты, показанные горизонтальными точечными линиями, соответствуют границам областей существования прямых и обратных ПМСВ, определяемым формулами (4.143)–(4.145).

На рис. 4.13, б показана дисперсионная кривая для электромагнитных волн в области аномальной дисперсии между частотами f_2 и f_3 . Точки A_e , B_e и C_e соответствуют пересечению дисперсионной кривой с горизонтальными линиями характерных частот. Наклонная пунктирная линия — закон дисперсии ЭМВ в отсутствие взаимодействия волны со средой.

Из сравнения рис. 4.13, а с рис. 4.13, б можно видеть, что дисперсионная кривая для прямых ПМСВ на участке $A_m B_m$ подобна таковой для ЭМВ на участке $A_e B_e$, то есть на подходе снизу по частоте к области аномальной дисперсии.

Дисперсионная кривая для обратных ПМСВ на участке $B_m C_m$ подобна таковой для ЭМВ на участке $B_e C_e$, то есть внутри области аномальной дисперсии. Именно в этой области ПМСВ испытывают значительное затухание (разд. 4.7), что характерно и для ЭМВ в области аномальной дисперсии.

Ниже частоты f_1 и выше частоты f_3 ПМСВ отсутствуют, хотя ЭМВ имеют место. Такое различие обусловлено тем, что вне области между частотами f_1 и f_3 магнитная проницаемость падает и условия существования дипольных волн, каковыми являются ПМСВ, не реализуются.

Таким образом, можно полагать, что дисперсионные свойства ПМСВ в общем случае аналогичны подобным свойствам ЭМВ в среде со значительной магнитной проницаемостью, за счет чего дисперсия ЭМВ становится аномальной.

4.11. Распространение волны в произвольном направлении относительно поля

В разд. 4.5 приведены свойства дисперсии магнитоэлектростатических волн при наличии диссипации при распространении волн перпендикулярно направлению поля. Теперь обратимся к случаю распространения волн относительно поля в произвольном направлении. Геометрию и основные параметры задачи положим теми же самыми, что в предыдущих разделах.

Величину угла φ будем менять в пределах от 0° до 60° (при максимальном угле отсечки на низшей частоте спектра ПМСВ, равном 61°). Параметр затухания α возьмем в пределах от 0,01 до 0,15. Время релаксации будем определять по методике, описанной в разд. 4.5.2. В рассматриваемых ситуациях это время будет составлять порядка $(0,5-1,0) \cdot 10^{-8}$ с. Остальные значения параметров, используемые для построения кривых, указаны в подписях к рисункам и в тексте.

Замечание. Как будет видно из дальнейшего изложения, рассматриваются два уровня затухания: малое и большое. Четкого критерия, разделяющего эти уровни, не установлено, однако «малое» затухание соответствует небольшому изменению основных зависимостей (в пределах не более 10%), а «большое» — приближению к предельному значению затухания, при котором распространение ПМСВ еще возможно. Так, малое затухание будет соответствовать $\alpha = 0,01$, а большое $\alpha = 0,05$ или $\alpha = 0,15$ (в зависимости от конкретных случаев). Несколько более подробно смысл значения «большого» затухания отмечен ранее в замечании к разд. 4.6.

4.11.1. Волновое число и дисперсионные соотношения

Как и ранее, волновое число будем считать комплексным:

$$k = \eta - i\xi, \quad (4.159)$$

где η и ξ — действительные постоянные ($\eta > 0$ и $\xi > 0$).

Согласно показанному в разд. 4.8, прямые ПМСВ существуют в интервале частот между f_1 и f_2 , а обратные — в интервале частот между f_2 и f_3 , то есть f_2 является разграничительной линией между областями прямых и обратных волн.

При расчете будем использовать те же алгоритмы, что в разд. 4.5.

4.12. Дисперсия прямых ПМСВ при изменении действительной части волнового числа

Рассмотрим сначала дисперсию прямых ПМСВ при изменении действительной части волнового числа. Вследствие сильного различия случаев малого и большого затухания, рассмотрим эти случаи по отдельности.

4.12.1. Малое затухание

Рассмотрим сначала дисперсионные кривые прямых ПМСВ при изменении действительной части волнового числа при сравнительно малом затухании, для чего положим $\alpha = 0,01$. Обратимся к рис. 4.14, где представлены дисперсионные кривые прямых ПМСВ для действительной части волнового числа η при различных значениях угла φ между волновым вектором и направлением поля.

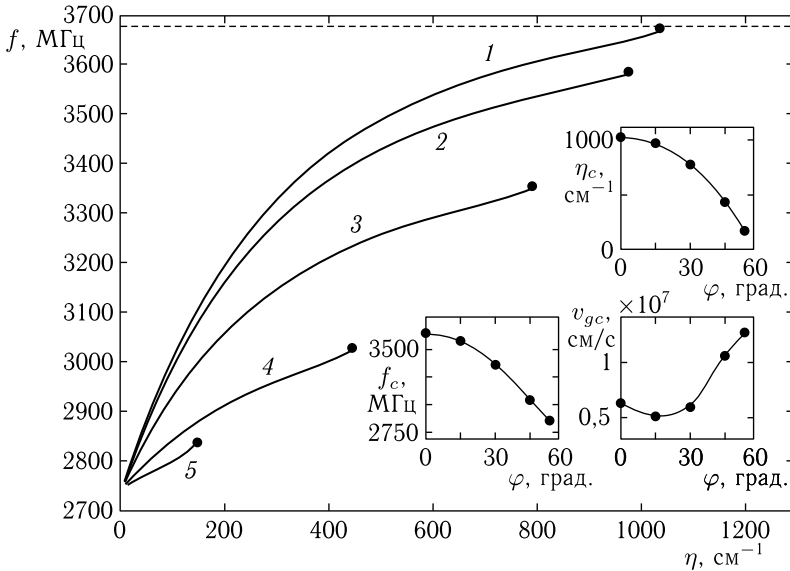


Рис. 4.14. Дисперсионные кривые прямых ПМСВ для действительной части волнового числа при различных значениях угла φ . Затухание малое: $\alpha = 0,01$. Угол φ : 1 — 0° , 2 — 15° , 3 — 30° , 4 — 45° , 5 — 55° . Остальные параметры совпадают с принятыми в разд. 4.4. На врезках — зависимости предельных значений η_c , f_c и v_{gc} от угла φ

Можно видеть, что по мере увеличения угла φ дисперсионные кривые отклоняются вниз по частоте, а их предельная длина уменьшается. Отклонение дисперсионных кривых вниз является следствием сужения дисперсионной поверхности ПМСВ в пространстве трех измерений: f , η_y , η_z , где эта поверхность относительно плоскости $O\eta_y\eta_z$

имеет вид выгнутой кверху «полуконической крыши», сечение горизонтальной плоскостью которой сужается по мере увеличения частоты (см. напр. [159, стр. 81–82, рис. 4.6, рис. 4.7]). Ограничение длины дисперсионных кривых на рис. 4.14 связано с ролью затухания и подробно рассмотрено в разд. 4.5. Уменьшение такой ограниченной длины по мере увеличения φ опять-таки является следствием имеющего место при этом сужения дисперсионной поверхности ПМСВ.

Интересно сопоставить этот рисунок с приведенным в разд. 4.6 рис. 4.6. Здесь кривая *1* построена при тех же параметрах, что и кривая *1* на рис. 4.6, так что обе кривые полностью совпадают. Однако там увеличение затухания приводит к приближению кривых к вертикальной оси, тогда как здесь — тенденция обратная. С точки зрения формирования дисперсионных поверхностей, в разд. 4.6, такая поверхность по мере увеличения затухания поднимается кверху, в результате чего линия пересечения этой поверхности с плоскостью, перпендикулярной направлению поля, также стремится кверху. В настоящей работе затухание не меняется, то есть поверхность в целом остается неизменной, тогда как частота повышается, в результате чего ветви линии пересечения поверхности с горизонтальной плоскостью сближаются, что и приводит к стремлению дисперсионных кривых на рис. 4.14 к горизонтальной оси.

Приведенные на врезках в рис. 4.14 зависимости предельных значений η_c , f_c и v_{gc} от угла φ дополнительно характеризуют тенденции изменений этих параметров в точке обрыва дисперсионных кривых. Уменьшение предельной частоты является свойством уменьшения верхней границы спектра ПМСВ при увеличении угла φ , также наглядно следующим из формы дисперсионной поверхности [159]. Так что дисперсионные кривые обрываются по волновому числу тогда, когда дисперсионная кривая достаточно близко подходит к своему верхнему пределу, соответствующему заданному значению угла φ . Некоторое увеличение групповой скорости вблизи точки обрыва, по-видимому, отражает ту же тенденцию сближения времени релаксации с периодом волны, что и в разделе 4.6.2, проявляющуюся там подобным образом на врезке для v_{gc} в рис. 4.6.

Обратимся теперь к рис. 4.15, где в тех же условиях показаны зависимости групповой скорости прямых ПМСВ от действительной части волнового числа. Кривая *1* здесь также совпадает с кривой *1* на рис. 4.7, остальные кривые 2–5 соответствуют постепенному увеличению угла φ в тех же пределах, что на рис. 4.14.

Можно видеть, что характер всех кривых — тот же, что и для кривой *1*: все они по мере увеличения η сначала несколько спадают, после чего, пройдя через минимум, устремляются к плюс бесконечности. Согласно интерпретации, приведенной в разд. 4.6.2, минимум кривых соответствует затуханию волны на расстоянии своей длины, то есть переходу к аperiodическому режиму. После такого перехода происходит плавное стремление намагниченности к нулю на расстоянии,

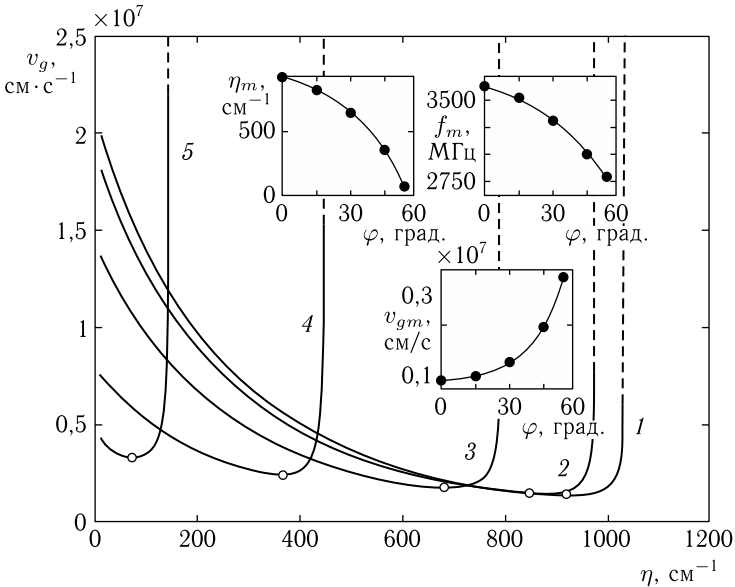


Рис. 4.15. Зависимости групповой скорости прямых ПМСВ от действительной части волнового числа при различных значениях угла φ . Все параметры совпадают с принятыми при построении рис. 4.14. На врезках — зависимости значений η_m , f_m и v_{gm} от угла φ , соответствующие минимумам основных кривых

значительно превышающем длину волны, что и дает кажущееся увеличение групповой скорости, проявляющееся в росте кривых правее минимума.

Смещение минимума в сторону меньших значений η при увеличении φ обусловлен той же причиной, что и укорочение кривых на рис. 4.14, то есть происходящим при этом уменьшением предельной частоты спектра ПМСВ.

Приведенные на врезках в рис. 4.15 зависимости значений η_c , f_c и v_{gc} от угла φ , соответствующие минимумам основных кривых, в общем, ведут себя аналогично подобным зависимостям на рис. 4.7, хотя там меняется параметр затухания, а здесь — угол.

Таким образом, хотя увеличение затухания соответствует росту крутизны дисперсионной поверхности, а увеличение угла — смещению по этой поверхности в сторону, можно заметить, что характер кривых на рис. 4.7 и на рис. 4.15 качественно сходен, что связано с уменьшением по мере увеличения η максимально достижимой частоты ПМСВ в обоих этих случаях.

4.12.2. Большое затухание

Рассмотрим теперь те же дисперсионные кривые прямых ПМСВ при изменении действительной части волнового числа при довольно

большом параметре затухания $\alpha = 0,15$, величина которого, согласно показанному в разд. 4.6 близка к предельно допустимому значению (около 0,20), выше которого распространение ПМСВ отсутствует. Обратимся к рис. 4.16, где представлены те же кривые, что на рис. 4.14, но при $\alpha = 0,15$. Здесь кривая 1 (с точностью до масштаба по горизонтали) совпадает с кривой 4 на рис. 4.6 в разд. 4.6, а остальные кривые соответствуют постепенному увеличению угла φ .

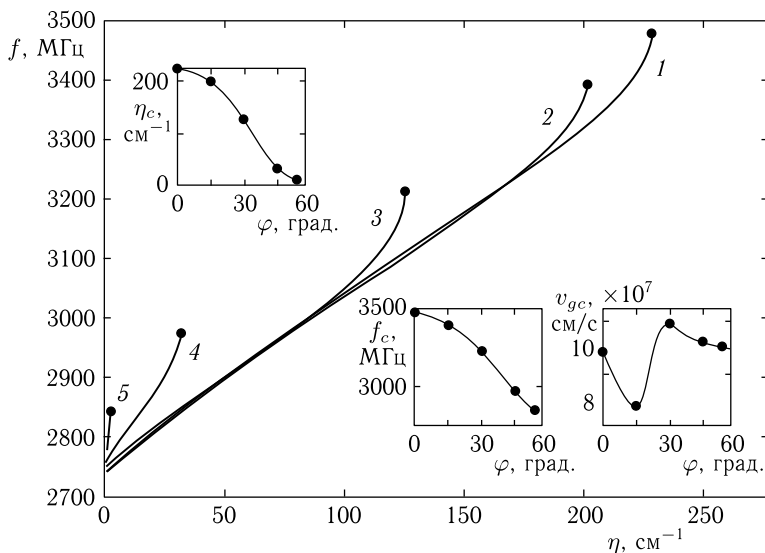


Рис. 4.16. Дисперсионные кривые прямых ПМСВ для действительной части волнового числа при различных значениях угла φ . Затухание большое: $\alpha = 0,15$. Угол φ : 1 — 0° , 2 — 15° , 3 — 30° , 4 — 45° , 5 — 55° . Остальные параметры совпадают с принятыми в разд. 4.4. На врезках — зависимости предельных значений η_c , f_c и v_{gc} от угла φ

Главным отличием от кривых, приведенных на рис. 4.14, здесь является изменение знака выпуклости кривых: там их выпуклость направлена вверх, тогда как здесь — вниз. Однако, как можно видеть из рис. 4.6, такое изменение знака выпуклости связано не с изменением угла φ , а обусловлено увеличением затухания. Так, на том же рис. 4.6 кривая 1, соответствующая $\alpha = 0,01$, имеет выпуклость вверх, тогда как кривая 4 на том же рисунке, соответствующая $\alpha = 0,15$, имеет выпуклость вниз. Поскольку кривые на рис. 4.16 здесь только начинаются с такой кривой, то все они имеют тоже выпуклость вниз. Согласно показанному в разд. 4.6.2, трансформация знака выпуклости с положительного на отрицательный при увеличении затухания связана с приближением времени релаксации волны к величине ее периода, приводящим в конце концов к обрыву кривых.

По остальным свойствам, таким как ограничение по частоте и волновому числу, кривые при большом затухании (рис. 4.16) ведут себя подобно таковым при малом (рис. 4.14). Зависимости на врезках в рис. 4.16 также подобны таковым на рис. 4.14, что говорит о полном единстве механизмов, связанных с увеличением угла φ , в обоих случаях как малого, так и большого затухания.

Рассмотрим теперь зависимости групповой скорости прямых ПМСВ от действительной части волнового числа при различных значениях угла φ в случае большого затухания, для чего обратимся к рис. 4.17, где представлены те же зависимости, что и на рис. 4.15, но при $\alpha=0,15$.

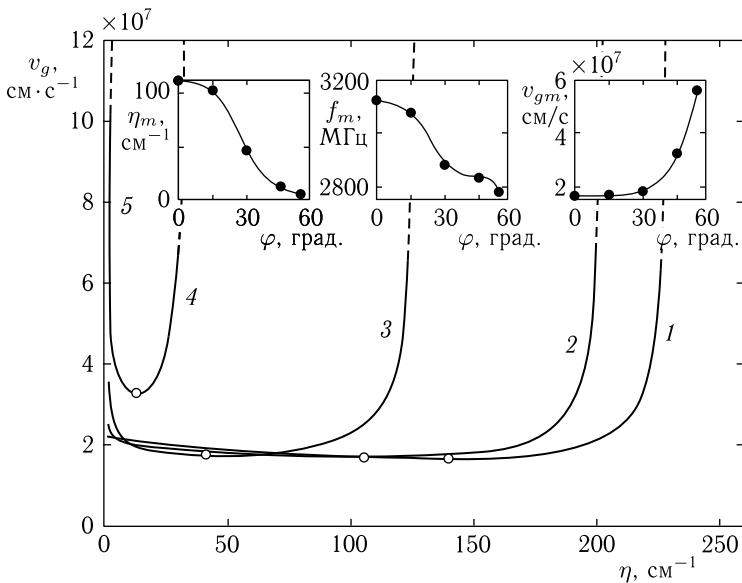


Рис. 4.17. Зависимости групповой скорости прямых ПМСВ от действительной части волнового числа при различных значениях угла φ . Параметр затухания $\alpha = 0,15$. Остальные параметры совпадают с принятыми при построении рис. 4.15. На врезках — зависимости значений η_m , f_m и v_{gm} от угла φ , соответствующие минимумам основных кривых

Можно видеть, что приведенные здесь кривые ведут себя подобно таковым на рис. 4.15. Интервал волновых чисел соответствует такому на рис. 4.16. Резким отличием является значительно большая (примерно в пять раз) групповая скорость для кривых на всем их протяжении по сравнению с кривыми на рис. 4.15. Из сравнения с рис. 4.6, можно видеть, что такой рост групповой скорости обусловлен именно увеличением затухания: так кривые 2, 3, 4 на рис. 4.6 идут тем круче, чем затухание больше.

В остальном поведение кривых на рис. 4.17, в том числе на врезках, подобно таковому на рис. 4.15 с учетом изменения масштаба по горизонтальной оси, причина чего отмечена выше.

4.13. Дисперсия обратных ПМСВ при изменении действительной части волнового числа

Обратимся теперь к рассмотрению дисперсии обратных ПМСВ при тех же условиях.

4.13.1. Малое затухание

Рассмотрим теперь дисперсионные кривые обратных диссипативных ПМСВ при изменении действительной части волнового числа. Сначала обратимся к случаю малого затухания, то есть положим $\alpha = 0,01$. Рассмотрим рис. 4.18, где представлены дисперсионные кривые обратных ПМСВ для действительной части волнового числа η при различных значения угла φ между волновым вектором и направлением поля.

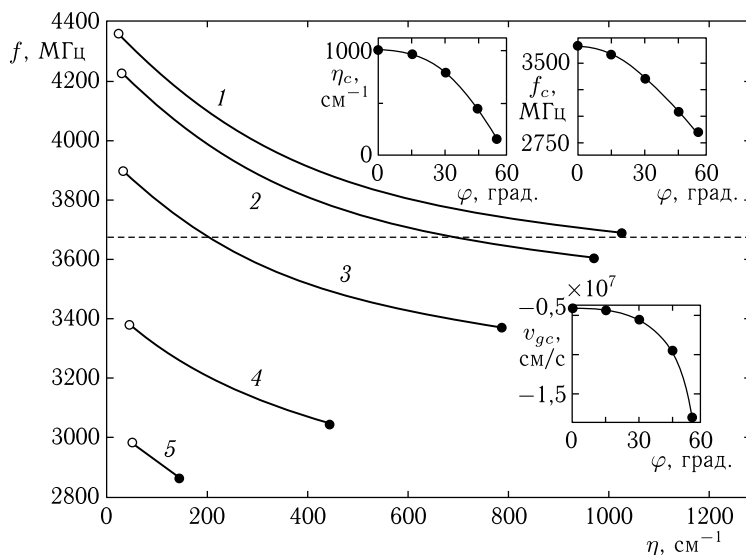


Рис. 4.18. Дисперсионные кривые обратных ПМСВ для действительной части волнового числа при различных значениях угла φ . Затухание малое: $\alpha = 0,01$. Угол φ : 1 — 0°, 2 — 15°, 3 — 30°, 4 — 45°, 5 — 55°. Остальные параметры совпадают с принятыми в разд. 4.4. На врезках — зависимости предельных значений η_c , f_c и v_{gc} от угла φ

На этом рисунке кривая 1 совпадает с кривой 1 на рис. 4.8 в разд. 4.7, как построенная при тех же параметрах, тогда как остальные кривые, соответствующие увеличению угла φ , смещаются вниз

как по частоте, так и по волновому числу, причем их полная длина уменьшается.

Можно видеть, что ограничение дисперсионных кривых по волновому числу имеет место как сверху, так и снизу. Ограничение сверху (сплошные точки на концах кривых) связано с ролью затухания и подробно рассмотрено в предыдущих частях настоящей работы. Ограничение снизу (открытые точки) выражено значительно слабее, чем сверху и связано со снижением верхней частотной границы области существования обратных ПМСВ, как это видно из рис. 4.10 в разд. 4.8. Следует отметить, что на ограничении снизу увеличение угла φ , сказывается значительно слабее, чем увеличение затухания, как это можно видеть из сравнения с рис. 4.8. Там увеличение затухания в почти полном интервале допустимых значений параметра α (от 0,010 до 0,075) приводит к изменению нижней границы кривых по волновому числу с 20 см^{-1} до 160 см^{-1} , тогда как здесь при изменении угла φ от нуля до 55° (то есть почти в полном интервале отсечки, соответствующем на низшей частоте спектра 61°), нижняя граница дисперсионных кривых увеличивается с 20 см^{-1} до всего 40 см^{-1} . Следует полагать, что наблюдаемое уменьшение полной длины дисперсионных кривых по мере увеличения φ обусловлено сужением дисперсионной поверхности обратных ПМСВ.

Приведенные на врезках зависимости предельных значений η_c , f_c и v_{gc} при увеличении угла φ имеют те же тенденции изменения, что и при увеличении затухания, иллюстрируемые врезками в рис. 4.8. Однако здесь по мере увеличения φ изменение этих зависимостей ускоряется, тогда как там при увеличении затухания, по крайней мере для η_c и v_{gc} — замедляется. Можно полагать, что такое различие обусловлено тем фактом, что увеличение затухания приводит к увеличению крутизны дисперсионной поверхности, тогда как увеличение угла φ сводится только к изменению сечения поверхности, общего ее вида не меняя.

Замечание. Представленный на рис. 4.18 ход дисперсионных кривых для обратных волн, так же как и для прямых, отражает характер сечения дисперсионной поверхности в пространстве трех измерений f , η_y , η_z вертикальной плоскостью, соответствующей заданному углу φ , однако вид этой поверхности здесь более сложен и в известной авторам литературе до настоящего времени не был исследован, поэтому авторы предполагают посвятить анализу такой поверхности отдельную работу.

Обратимся теперь к рис. 4.19, где в тех же условиях показаны зависимости групповой скорости обратных ПМСВ от действительной части волнового числа. Кривая 1 здесь также совпадает с кривой 1 на рис. 4.9 в разд. 4.7, остальные кривые 2–5 соответствуют постепенному увеличению угла φ в тех же пределах, что на рис. 4.18.

Можно видеть, что характер всех кривых — тот же, что и для кривой 1: все они по мере увеличения η сначала возрастают, после чего, пройдя через максимум, устремляются к минус бесконечности.

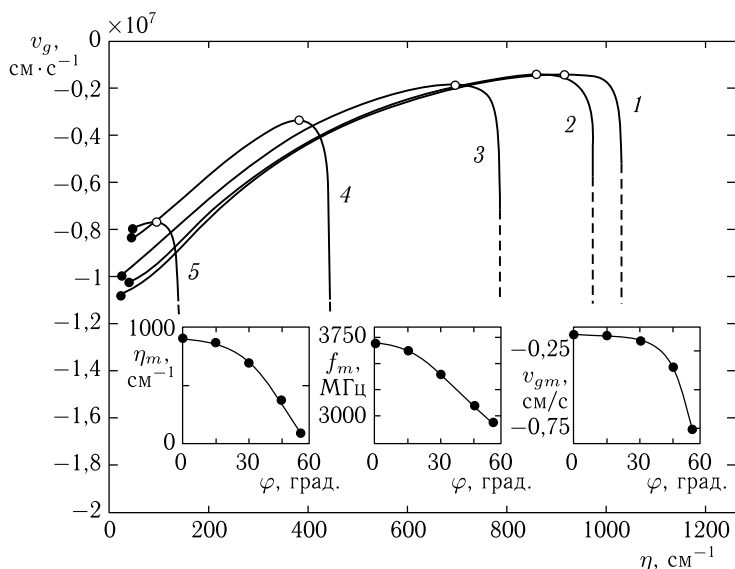


Рис. 4.19. Зависимости групповой скорости обратных ПМСВ от действительной части волнового числа при различных значениях угла φ . Все параметры совпадают с принятыми при построении рис. 4.18. На врезках — зависимости значений η_m , f_m и v_{gm} от угла φ , соответствующие максимумам основных кривых

Как и в разд. 4.7, общий характер кривых здесь представляет собой как бы «отражение» в горизонтальной оси подобных кривых для прямых ПМСВ, приведенных на рис. 4.15. Интерпретация их хода также аналогична.

Приведенные на врезках зависимости значений η_m и v_{gm} от угла φ , соответствующие максимумам основных кривых, в общем ведут себя аналогично подобным зависимостям на рис. 4.9, однако ход зависимости для f_m — обратный, то есть частота максимума при увеличении φ увеличивается от случая зависимости от α , где частота максимума уменьшается. Такое различие, по-видимому, связано с тем обстоятельством, что увеличение затухания приводит к увеличению крутизны дисперсионной поверхности, тогда как увеличение угла такой поверхности не меняет.

4.13.2. Большое затухание

Рассмотрим теперь характер дисперсионных кривых обратных диссипативных ПМСВ при большом уровне затухания, то есть положим $\alpha = 0,05$. Заметим, что это значение затухания является близким к предельному для обратных волн, как это можно видеть из рис. 4.10, то есть с точки зрения области существования ПМСВ такое затухание можно считать большим. Соответствующие зависимости для различных значений угла φ показаны на рис. 4.20. Кривая 1 здесь совпадает

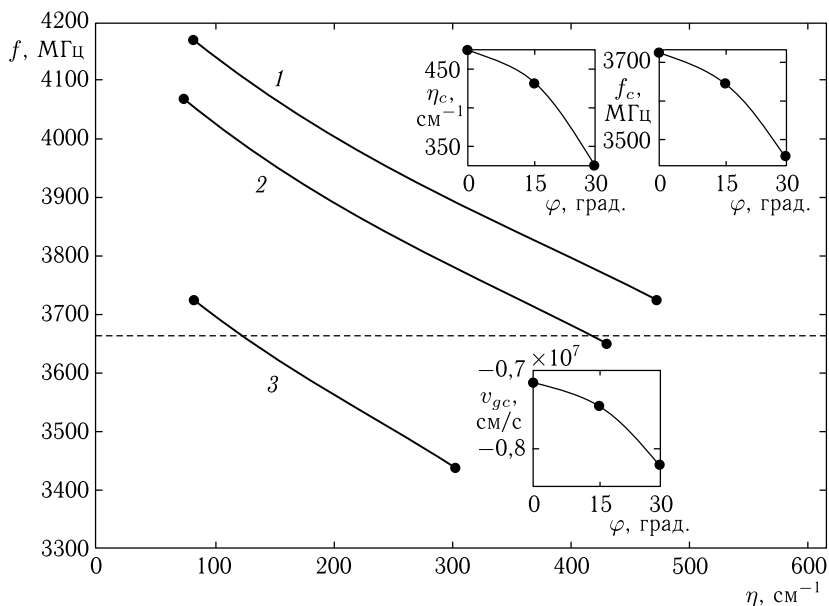


Рис. 4.20. Дисперсионные кривые обратных ПМСВ для действительной части волнового числа при различных значениях угла φ . Затухание большое: $\alpha = 0,05$. Угол φ : 1 — 0° , 2 — 15° , 3 — 30° . Остальные параметры совпадают с принятыми в разд. 4.4. На врезках — зависимости предельных значений η_c , f_c и v_{gc} от угла φ

с кривой 3 на рис. 4.8 в разд. 4.7, как соответствующие одинаковому уровню затухания.

Можно видеть, что здесь, по сравнению со случаем малого затухания, представленным на рис. 4.18, допустимый интервал изменения угла φ значительно сужен. Контрольная проверка показывает, что он ограничен сверху величиной $\varphi = 35^\circ$. Общий ход кривых — примерно тот же, что на рис. 4.18, но здесь они заключены в значительно более узком интервале как по частоте, так и по волновому числу. Так, на рис. 4.18 этот интервал по частоте составляет от 2850 МГц до 4350 МГц, тогда как здесь он простирается от 3450 МГц до 4170 МГц, то есть сужается с 1500 МГц до 720 МГц, то есть более чем вдвое. По волновому числу такие же цифры на рис. 4.18 составляют 20 см⁻¹ и 1030 см⁻¹, а на рис. 4.19 — 80 см⁻¹ и 490 см⁻¹, так что интервал сужается с 1010 см⁻¹ до 410 см⁻¹, то есть в два с половиной раза. При этом, однако, по частоте интервал между кривыми, соответствующими соседним значениям угла φ , примерно сохраняется. Так, на рис. 4.19 интервал между серединами кривых 2 и 3 составляет около 300 МГц (от 3550 до 3850 МГц), а на рис. 4.20 интервал между такими же кривыми примерно равен 270 МГц (от 3580 до 3850 МГц). Следствием

такой близости величины интервалов при разных уровнях затухания является значительное сужение области допустимых значений угла φ : с 60° при малом затухании до 35° при большом, в результате чего при шаге в 15° на рис. 4.20 умещается пять кривых, тогда как на рис. 4.20 — всего три.

Приведенные на врезках зависимости предельных значений η_c , f_c и v_{gc} от угла φ , отмеченных по концам кривых со стороны больших значений η , имеют тот же характер, что и на рис. 4.18, отражая, однако, сужение интервала существования ПМСВ, наблюдаемое для основных дисперсионных кривых.

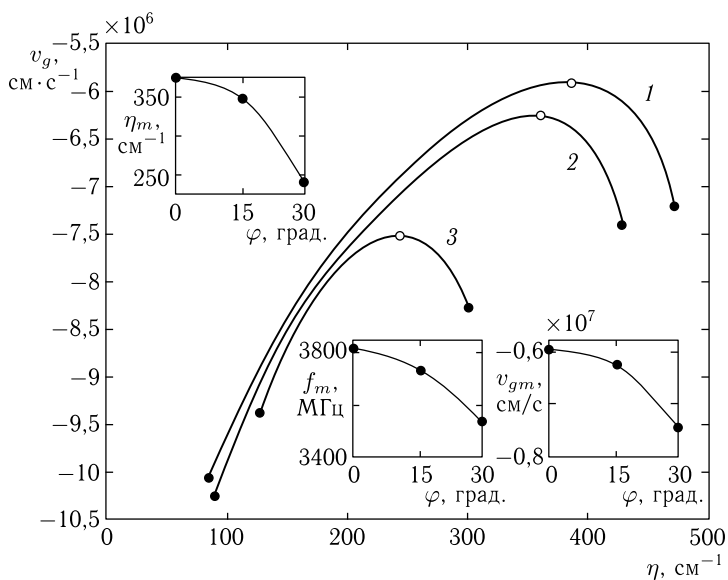


Рис. 4.21. Зависимости групповой скорости обратных ПМСВ от действительной части волнового числа при различных значениях угла φ . Все параметры совпадают с принятыми при построении рис. 4.20. На врезках — зависимости значений η_m , f_m и v_{gm} от угла φ , соответствующие максимумам основных кривых

Обратимся теперь к рис. 4.21, где в тех же условиях показаны зависимости групповой скорости обратных ПМСВ от действительной части волнового числа. Кривая 1 здесь совпадает с кривой 3 на рис. 4.9, остальные кривые 2 и 3 соответствуют увеличению угла φ в тех же пределах, что на рис. 4.20.

Можно видеть, что характер зависимостей совпадает с таковым для кривых, приведенных на рис. 4.19, с тем различием, что здесь интервал кривых по волновому числу сужен в той же степени, что и на рис. 4.20, тогда как абсолютные величины групповых скоростей заметно увеличены. Так, на рис. 4.19 максимумы кривых группируются

вокруг $-0,2 \cdot 10^7 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$, тогда как здесь подобным максимумам соответствуют скорости от $-0,6 \cdot 10^7 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ до $-0,8 \cdot 10^7 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$. Можно полагать, что такое увеличение связано с более крутым характером дисперсионной поверхности, соответствующей рис. 4.21, обусловленным большей величиной параметра затухания.

Зависимости на врезках аналогичны подобным на рис. 4.19 с учетом сужения интервалов существования ПМСВ, отмеченного при рассмотрении рис. 4.20.

4.14. Дисперсия ПМСВ при изменении мнимой части волнового числа

Рассмотрим теперь влияние на дисперсию ПМСВ изменения мнимой части волнового числа.

4.14.1. Малое затухание

Рассмотрим теперь роль направления волнового вектора ПМСВ в формировании дисперсии мнимой части волнового числа, для чего обратимся к рис. 4.22. На этом рисунке показаны дисперсионные кривые ПМСВ для мнимой части волнового числа при различных значениях

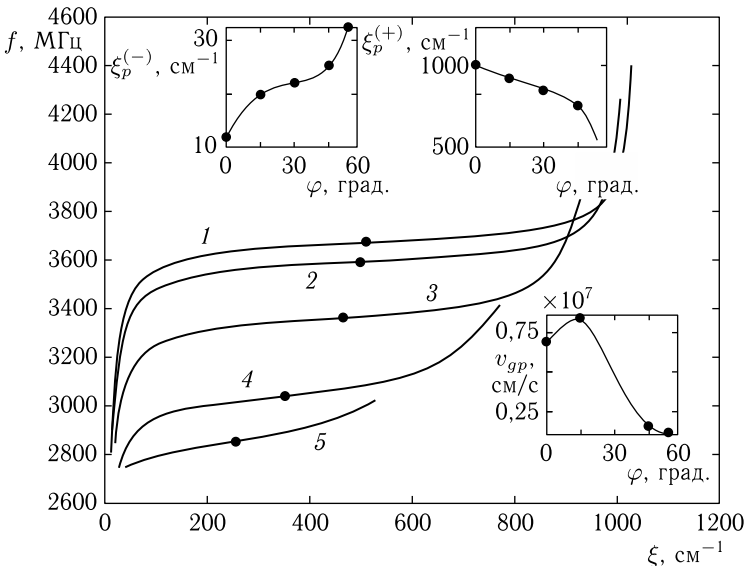


Рис. 4.22. Дисперсионные кривые ПМСВ для мнимой части волнового числа при различных значениях угла φ . Затухание малое: $\alpha = 0,01$. Угол φ : 1 — 0° , 2 — 15° , 3 — 30° , 4 — 45° , 5 — 55° . Остальные параметры совпадают с принятыми в разд. 4.4. На врезках показаны зависимости предельных значений $\xi_p^{(\pm)}$ и v_{gp} в точке перегиба от угла φ

угла φ в случае малого затухания: $\alpha = 0,01$. Кривая 1 соответствует кривой 1 на рис. 4.11, как построенная при тех же значениях всех параметров.

Замечание. Кривые на следующих далее рис. 4.22–4.25 построены путем полного решения уравнения (4.133) без каких-либо ограничений, заключенных в самом этом уравнении. Следует заметить, что в общем случае области существования как прямых, так и обратных ПМСВ по частоте имеют ограничения как сверху, так и снизу, зависимость которых от параметра затухания иллюстрируется рис. 4.10. В настоящем рассмотрении, как можно видеть из предыдущих рисунков, подобные ограничения также имеют место, однако на данном этапе ограничимся общим случаем полного решения уравнения (4.133), без их подробного учета.

Из рис. 4.22 можно видеть, что по мере увеличения частоты мнимая часть волнового числа всегда монотонно возрастает, то есть затухание волн при этом увеличивается. Вблизи среднего участка кривые имеют перегиб, соответствующий резкому росту затухания при переходе от прямых волн к обратным. По мере увеличения угла φ ход кривых в точке перегиба становится более крутым, то есть перегиб становится более плавным. Такое сглаживание перегиба проявляется тем сильнее, чем угол φ больше.

Все кривые начинаются вблизи нижней границы существования прямых ПМСВ $f_1 = 2739,2$ МГц. Концы кривых приходятся на верхние границы существования обратных (диссипативных) ПМСВ, соответствующих заданному углу φ . Так, для кривой 1, где $\varphi = 0$, эта частота близка к $f_3 = 4416,8$ МГц, а для других — соответственно тем ниже, чем угол φ больше. Частота перегиба может быть определена как соответствующая верхней границе существования прямых ПМСВ и для кривой 1 равна $f_2 = 3575$ МГц.

Из рис. 4.11 можно видеть, что там точки перегиба для всех кривых совпадают и соответствуют $\xi = 509$ см⁻¹ и $f = 3675$ МГц, то есть кривые по мере увеличения затухания как бы поворачиваются вокруг этой точки в направлении против часовой стрелки. Здесь же по мере увеличения угла φ кривые практически без поворота смещаются по частоте и волновому числу к меньшим значениям, при этом полная длина кривых соответственно уменьшается. Можно полагать, что подобная трансформация кривых отражает характер конфигурации сечения дисперсионной поверхности для мнимой части волнового числа, которая здесь для прямых и обратных волн является единой.

На первых двух врезках показаны зависимости предельных значений мнимой части волнового числа $\xi_p^{(-)}$ и $\xi_p^{(+)}$ от угла φ . Такой их ход отражает сужение области существования ПМСВ по мере увеличения φ . На третьей врезке показана зависимость групповой скорости роста затухания ПМСВ в точке перегиба от угла φ . Можно видеть, что несмотря на визуально кажущуюся из вида кривых 1–5 неизменность

этой скорости, она после небольшого увеличения при $\varphi = 15^\circ$ претерпевает некоторое уменьшение, при $\varphi = 55^\circ$ достигающее почти трех раз.

Обратимся теперь к рис. 4.23, где показаны зависимости групповой скорости роста затухания ПМСВ от мнимой части волнового числа при $\alpha = 0,01$ и различных значениях угла φ . Кривая 1 здесь совпадает с кривой 1 на рис. 4.12, как построенная при тех же параметрах. Остальные кривые соответствуют увеличению угла φ во всей области существования ПМСВ.

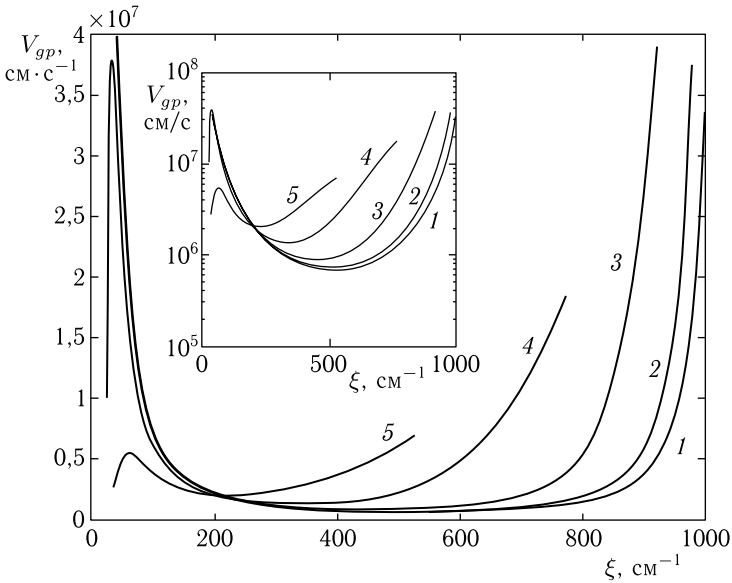


Рис. 4.23. Зависимости групповой скорости затухания ПМСВ от мнимой части волнового числа при различных значениях угла φ . Все параметры совпадают с принятыми при построении рис. 4.12. На врезке показаны те же кривые в логарифмическом масштабе

Можно видеть, что все кривые по мере приближения к краям области существования ПМСВ возрастают тем более резко, чем угол φ меньше. Минимумы кривых приходятся на точки перегиба соответствующих зависимостей на рис. 4.12. Рост взаимно противоположных ветвей кривых заканчивается при тех значениях ξ , при которых кривые на рис. 4.12 выходят на верхний и нижний пределы по частоте.

Отличие от кривых, соответствующих росту затухания (рис. 4.12), состоит в том, что там все кривые были как бы симметрично вложены друг в друга, что было вызвано совпадением точек перегиба, тогда как здесь по мере увеличения угла φ кривые как целое смещаются в сто-

рону меньших значений ξ , что соответствует аналогичному смещению точек перегиба кривых на рис. 4.22.

Можно отметить участок аномального максимума зависимостей v_{gp} от ξ , имеющий место для кривых 4 и 5 в окрестности $\xi = 70 \text{ см}^{-1}$. Наличие такого участка говорит об аномальной деформации дисперсионной поверхности вблизи малых значений волновых чисел.

На врезке показаны те же зависимости в логарифмическом масштабе, несколько более наглядно иллюстрирующие ход кривых в области минимумов.

4.14.2. Большое затухание

Рассмотрим теперь роль направления волнового вектора ПМСВ в формировании дисперсии мнимой части волнового числа в случае большого затухания, для чего обратимся к рис. 4.24, где показаны дисперсионные кривые ПМСВ для мнимой части волнового числа при различных значениях угла φ в случае $\alpha = 0,15$. Здесь кривая 1 с точностью до масштаба по осям совпадает с кривой 4 на рис. 4.11, как построенная при тех же значениях параметров.

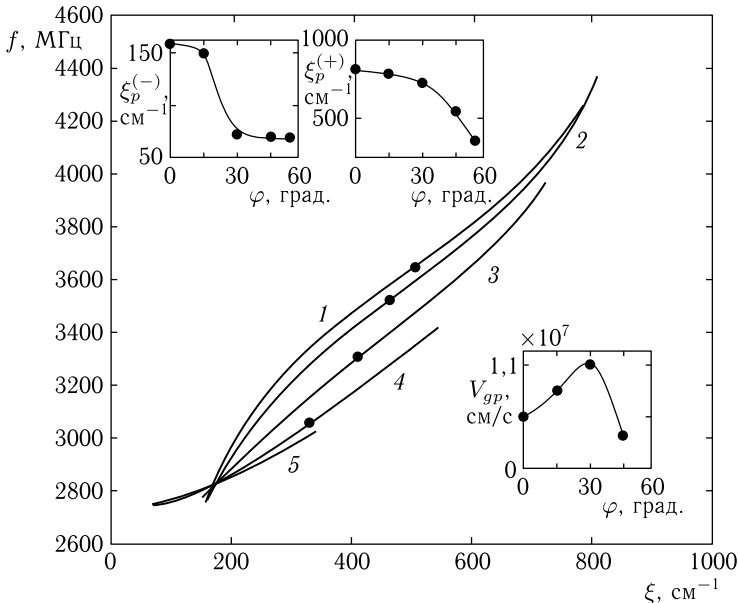


Рис. 4.24. Дисперсионные кривые ПМСВ для мнимой части волнового числа при различных значениях угла φ в случае большого затухания: $\alpha = 0,01$. Угол φ : 1 — 0° , 2 — 15° , 3 — 30° , 4 — 45° , 5 — 55° . Остальные параметры совпадают с принятыми в разд. 4.4. На врезках показаны зависимости реальных значений $\xi_p^{(\pm)}$ и v_{gp} в точке перегиба от угла φ

Можно видеть, что здесь кривые по мере увеличения угла φ проявляют те же тенденции, что и на рис. 4.12, с тем, однако, отличием, что в рассматриваемом случае, в соответствии с увеличением затухания, крутизна всех кривых значительно возрастает, в результате чего по значению волнового числа они располагаются заметно теснее. Кривые 1–4 имеют более или менее заметно выраженный перегиб, тогда как на кривой 5, соответствующей максимально допустимому значению угла φ , перегиб уже отсутствует. Показанные на врезках зависимости $\xi_p^{(\pm)}$ и v_{gp} от угла φ подобны таковым, приведенным на рис. 4.22, отличаясь лишь более узкими диапазонами изменения параметров.

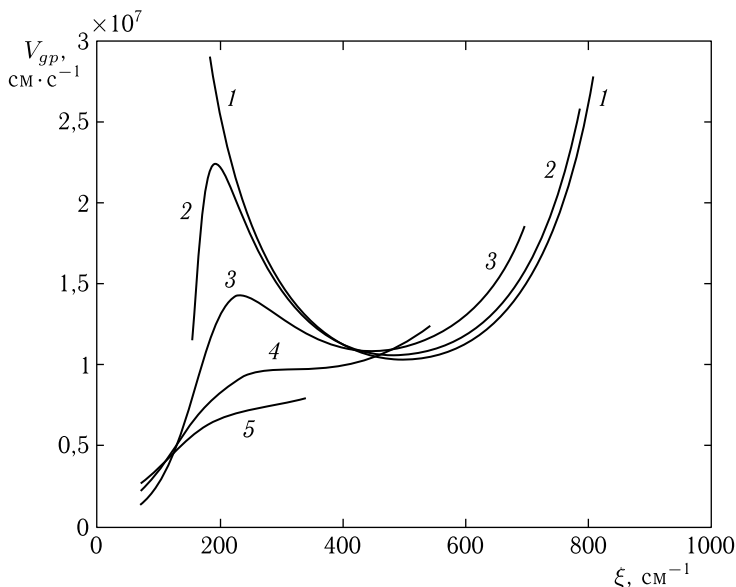


Рис. 4.25. Зависимости групповой скорости затухания ПМСВ от мнимой части волнового числа при различных значениях угла φ в случае большого затухания: $\alpha = 0,15$. Все параметры совпадают с принятыми при построении рис. 4.24

Обратимся теперь к рис. 4.25, где показаны зависимости групповой скорости роста затухания ПМСВ от мнимой части волнового числа при различных значениях угла φ и большом затухании $\alpha = 0,15$. Кривая 1 здесь с точностью до масштаба совпадает с кривой 4 на рис. 4.12, как построенная при тех же параметрах. Остальные кривые соответствуют увеличению угла φ во всей области существования ПМСВ.

Можно видеть, что здесь общий характер кривых подобен таковому на рис. 4.23, однако в рассматриваемом случае кривые в области малых волновых чисел при тех же углах φ отличаются значительно большим относительным разнесением по значениям v_{gp} , что отражает большее влияние затухания.

Аномальный максимум впервые проявляется на кривой 2, соответствующей $\varphi = 15^\circ$, причем по мере увеличения φ до 45° (кривая 4) переходит в перегиб, после чего на его месте при $\varphi = 55^\circ$ появляется полого возрастающий участок (кривая 5), отражающий отсутствие точки перегиба на кривой 5 на рис. 4.25. Такой ход кривых дополнительно свидетельствует в пользу сложного характера дисперсионных поверхностей при малых значениях мнимой части волнового числа.

4.15. Возбуждение ПМСВ линейным преобразователем

Рассмотрим теперь прикладные аспекты проделанного исследования, в первую очередь обратимся к эффективности возбуждения прямых ПМСВ, наблюдавшихся в экспериментах [229–234].

Поле магнитостатической волны в ферритовой пластине, возбуждаемое преобразователем, представляющим собой одиночный линейный проводник ширины b , имеет вид [40–42]:

$$h_w = |C| \frac{\sin(kb/2)}{kb/2}, \quad (4.160)$$

где k — волновое число, C — комплексная постоянная, определяемая параметрами материала проводника и ферритовой пластины.

На рис. 4.26 показана функция $\frac{\sin(kb/2)}{kb/2}$. Ширина основного лепестка на уровне половины высоты близка к π , то есть:

$$\frac{kb}{2} = \pi. \quad (4.161)$$

Полагая, что для наиболее эффективного возбуждения ширина лепестка должно равняться половине длины волны, получаем полную длину волны:

$$\lambda_c = 2b. \quad (4.162)$$

Из рис. 4.26 видно, что функция h_w/C является знакопеременной. Однако амплитуда возбуждаемых ПМСВ от фазы возбуждения не зависит, поэтому для оценки эффективности возбуждения надо брать модуль этой функции $|h_w/C|$, зависимость которого от частоты имеет вид:

$$\left| \frac{h_w}{C} \right| = \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi b f}{c}\right)}{\frac{\pi b f}{c}} \right|, \quad (4.163)$$

где c — скорость электромагнитной волны, в свободном пространстве (над плоскостью магнитной пластины) равная скорости света.

На рис. 4.4, приведенном в разд. 4.4.3, пунктирными линиями 1–3 показаны частотные зависимости функции поля $|h_w/C|$, возбуждаемого преобразователями различной ширины. Кривые построены по формуле (4.163), с нормировкой на значение, соответствующее низшей

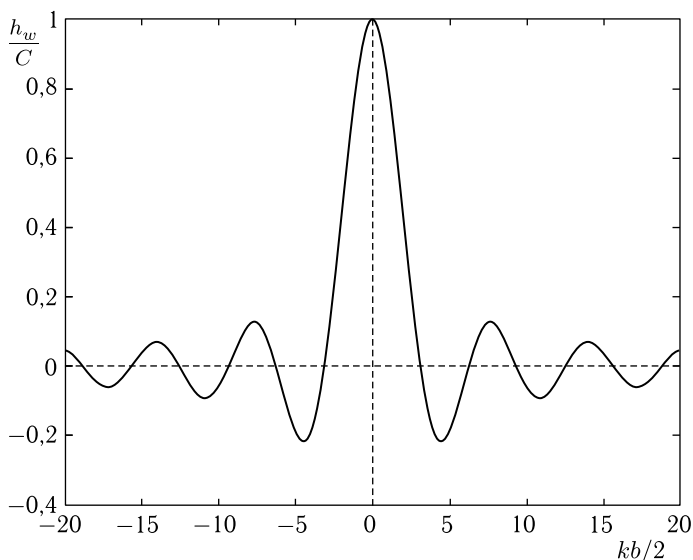


Рис. 4.26. Функция, описывающая поле в ферритовой пластине, возбуждаемое одиночным линейным преобразователем

частоте спектра. Из рисунка видно, что поле, создаваемое преобразователем шириной 10 мкм (кривая 1) на уровне 0,5 от максимума, по частоте перекрывает практически весь диапазон прямых ПМСВ, тогда как для преобразователя шириной 40 мкм (кривая 2) перекрытие уменьшается до 90%, а для преобразователя шириной 160 мкм (кривая 3) составляет всего 50%.

Таким образом, можно полагать, что для эффективного возбуждения ПМСВ в 90% диапазона прямых волн, ширина преобразователя должна быть не более 14 мкм.

4.16. Замечание о наблюдении прямых ПМСВ в эксперименте

В экспериментах [229–234] наблюдались прямые ПМСВ, для возбуждения которых использовался одиночный линейный преобразователь из проволоки цилиндрического сечения с толщиной 12 мкм. При этом крайние частоты спектра прямых ПМСВ равнялись: $f_b = 2739,2$ МГц, $f_s = 3675,0$ МГц.

Если считать, что толщина цилиндрической проволоки эквивалентна ширине плоского преобразователя, то получаем, что в этом случае полная длина волны равна 24 мкм. Этой длине волны соответствует частота $f_c = 3674,7$ МГц, которая весьма близка к верхней частоте спектра f_s .

Однако в экспериментах [229–234] минимальная длина волны, которую удавалось возбудить упомянутым преобразователем, составляла всего $\lambda_e = 70$ мкм при частоте 3619,0 МГц.

Таким образом, преобразователь толщиной 12 мкм возбуждал волну, которую должен был бы возбуждать преобразователь толщиной 35 мкм.

Такое несоответствие, по-видимому, является следствием ограничения спектра прямых ПМСВ из-за затухания.

Действительно, из рис. 4.4 можно видеть, что амплитуда ПМСВ на частоте 3619,0 МГц составляет примерно 0,6 от амплитуды на начальном участке спектра. При этом поле на той же частоте составляет около 0,95 от максимума. Если полагать, что амплитуда возбуждаемой ПМСВ пропорциональна произведению этих величин, то получаем коэффициент 0,57.

В экспериментах обычно измеряется не амплитуда сигнала, а его мощность, пропорциональная квадрату амплитуды, равная 0,32. Далее надо учесть, что в экспериментах ПМСВ не только возбуждались, но и принимались подобным же преобразователем, то есть величину 0,32 надо возвести в квадрат, что дает $\sim 0,10$. Таким образом, получаем, что даже без учета затухания волны при распространении, на частоте 3619,0 МГц наблюдаемый сигнал составлял около 10% от величины сигнала на начальной частоте спектра, то есть претерпевал ослабление порядка 10 дБ.

В экспериментах расстояние между преобразователями составляло порядка единиц сантиметров, что давало возможность наблюдать сигнал, соответствующий началу спектра, на уровне не более 10–20 дБ выше уровня шума. Поэтому добавка к затуханию еще 10 дБ, обусловленных ограничением спектра прямых ПМСВ из-за затухания, вполне могла приводить к снижению уровня сигнала ниже уровня шума, что и не позволило наблюдать ПМСВ длиной менее 70 мкм.

4.17. Некоторые рекомендации для наблюдения диссипативных ПМСВ в эксперименте

Предыдущее замечание касалось реально наблюдавшихся во множестве экспериментов прямых ПМСВ. Однако какие-либо сообщения о наблюдении диссипативных ПМСВ в литературе, известной авторам настоящей работы, отсутствуют. Из проведенного рассмотрения можно дать некоторые рекомендации для такого наблюдения.

Во-первых, благодаря обратному характеру диссипативных ПМСВ, направление их групповой скорости противоположно направлению групповой скорости прямых ПМСВ, то есть распространение надо наблюдать в направлении, противоположном направлению распространения прямых ПМСВ, для чего в простейшем случае излучающий и приемный преобразователи должны поменяться местами.

Очевидной рекомендацией является выбор для эксперимента пленок ЖИГ с как можно меньшим значением параметра затухания.

В то же время, исходя из общей крутизны дисперсионных кривых, показанных на рис. 4.2, приведенном в разд. 4.4.1, можно сделать вывод, что использование пленок большей толщины (десятки мкм) позволяет эффективнее возбуждать более длинные волны, обладающие, однако, большей скоростью, а в тонких пленках (единицы мкм) могут быть возбуждены более короткие волны, скорость которых значительно меньше.

Далее, благодаря чрезвычайно большому затуханию диссипативных волн при распространении, расстояние между преобразователями должно составлять не более нескольких десятков микрометров, что делает его сравнимым с толщиной используемых проволочных преобразователей. В этом случае возникает опасность сильного прямого просачивания электромагнитного сигнала с излучающего преобразователя на приемный, так что для предотвращения прямой наводки должны быть приняты специальные меры. По-видимому, в этом случае можно рекомендовать в качестве преобразователей использование микрополосковых проводников на достаточно широком основании [247, 248]. Для таких структур, благодаря весьма высокой концентрации поля в области между полосковым проводником и подложкой, прямое излучение и связанная с ним наводка практически отсутствует, что позволяет их эффективно использовать при построении интегральных схем на СВЧ [249, 250], в том числе с магнитными компонентами [251, 252].

Другим возможным вариантом предотвращения опасности прямой наводки можно считать использование импульсного режима, издавна применяемого для исследования ферритовых линий задержки [147, 253–256], что позволило бы разделить мешающий пролетающий и полезный задержанный сигналы во времени. Однако для наблюдения диссипативных волн, учитывая близость между излучающим и приемным преобразователями, время задержки, по-видимому, будет составлять не более десятков или в лучшем случае сотен наносекунд, что потребует использования импульсов еще меньшей длительности. Такие сверхкороткие импульсы потребуют значительного расширения полосы приемного тракта с вытекающим отсюда повышением уровня шумов и ослаблением чувствительности тракта в целом. Таким образом, использование импульсного режима требует компромиссной оценки между длительностью импульсов и чувствительностью тракта с учетом весьма большого затухания диссипативных волн.

Выводы по главе 4

Данная глава посвящена рассмотрению дисперсионных свойства магнитоэлектрических волн, распространяющихся в касательно намагниченной ферритовой пластине, обладающей гиротропными свойствами.

Получены дисперсионные соотношения для действительной и мнимой частей волнового числа. Основное внимание уделено влиянию диссипации на закон дисперсии магнитостатической волны. Отмечено ограничение по максимальной величине волнового числа. Приведены данные для сравнения с экспериментом.

Основные вопросы, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. В геометрии плоскопараллельной намагниченной в плоскости ферритовой пластины получено дисперсионное соотношение для поверхностных магнитостатических волн, записанное через экспоненциальные функции от комплексного волнового числа и действительной частоты. Подстановка в полученное соотношение комплексной магнитной восприимчивости, найденной из решения уравнения движения для намагниченности Ландау–Лифшица с диссипативным членом в форме Гильберта, позволила в явном виде выделить компоненты, определяющие действительную и мнимую части комплексного волнового числа. Приведены основные алгоритмы численного расчета обеих компонент волнового числа, групповой скорости и времени установления стационарной амплитуды колебаний намагниченности.

2. На основе анализа общего характера волновой функции введены определения дисперсионного соотношения для действительной и мнимой частей волнового числа. Получено уравнение, определяющее частотные границы областей существования прямых и обратных поверхностных магнитостатических волн, найдены характерные значения частот.

3. Рассмотрено приближение малого затухания. Для случая типичных значений параметров материала и частоты возбуждения выполнена оценка его применимости. В таком приближении получены компоненты динамической магнитной восприимчивости в среде с диссипацией.

4. Для общего случая распространения волны в плоскости пластины в произвольном направлении относительно постоянной поля получено общее дисперсионное соотношение, в полярной системе координат выражаемое через экспоненты, показатели которых зависят от комплексного волнового числа. На основе анализа такого соотношения выявлены две его ветви, разделенные по частоте граничным значением, соответствующим стремлению действительной части волнового числа к бесконечности. Показано, что волны, лежащие по частоте ниже критического значения, являются прямыми и в пределе отсутствия затухания переходят в классические волны типа Дэймона–Эшбаха, тогда как волны, лежащие по частоте выше предельного значения, являются обратными, классического аналога не имеют и в отсутствие затухания также отсутствуют.

5. Построены дисперсионные кривые при параметрах задачи, близких к условиям реального эксперимента. Продемонстрировано ограничение дисперсионных кривых со стороны максимального значе-

ния действительной части волнового числа. Выявлена математическая природа такого ограничения, получено математическое соотношение, являющееся условием существования обеих ветвей поверхностных магнитоэлектрических волн, включающее в себя кроме волнового числа также параметр затухания и толщину магнитной пластины, по которым в свою очередь также имеются ограничения.

6. При параметрах, близких к условиям эксперимента, построена дисперсионная кривая для диссипации. На ее основе показано, что затухание при распространении обратных диссипативных ПМСВ может превышать подобное затухание для прямых ПМСВ по показателю экспоненты в сотни раз.

7. В геометрии плоскопараллельной, намагниченной в плоскости ферритовой пластины с использованием дисперсионных соотношений для компонент комплексного волнового числа в диссипативной среде, исследована дисперсия прямых и обратных ПМСВ при распространении волны в направлении, перпендикулярном направлению подмагничивающего поля.

8. Рассмотрена качественная физическая причина ограничения дисперсионных кривых. На основе анализа соотношения между временем релаксации колебаний намагниченности и периодом распространяющейся волны показано, что рост волнового числа приводит к затуханию волны на расстоянии своей длины, то есть к аperiodическому режиму, что и является препятствием для дальнейшего распространения волны.

9. Выявлены две ветви дисперсионных кривых, соответствующие прямым и обратным волнам. Для прямых волн выявлен возрастающий характер дисперсионных кривых по мере увеличения действительной части волнового числа. Показано, что по мере увеличения диссипации дисперсионные кривые отклоняются вверх по частоте относительно бездиссипативной кривой, причем такое отклонение проявляется тем сильнее, чем диссипация выше. Отмечено, что вблизи предельного значения волнового числа дисперсионные кривые изгибаются вверх, подходя к граничной частоте с близкой к вертикали касательной. Определена групповая скорость распространяющейся волны. Показано, что по мере увеличения действительной части волнового числа групповая скорость сначала убывает, а после прохождения через минимум переходит к возрастанию.

10. Для обратных волн выявлен убывающий характер дисперсионных кривых по мере увеличения действительной части волнового числа. Показано, что по мере увеличения диссипации дисперсионные кривые отклоняются вниз по частоте относительно бездиссипативной кривой, причем такое отклонение проявляется тем сильнее, чем диссипация выше. Отмечено, что вблизи предельного значения волнового числа дисперсионные кривые изгибаются вниз, подходя к граничной частоте с близкой к вертикали касательной. Определена групповая скорость распространяющейся волны. Показано, что по мере увеличе-

ния действительной части волнового числа групповая скорость сначала возрастает, а после прохождения через максимум убывает.

11. Отмечена качественная симметрия дисперсионных зависимостей для обратных волн таковой для прямых волн относительно горизонтальной оси, соответствующей граничному значению частоты между ними, однако количественные характеристики прямых и обратных волн в этих случаях различаются. Дополнительное отличие состоит в ограничении сверху по частоте области допустимых значений параметра затухания, эквивалентное ограничению снизу допустимых значений волновых чисел. В качестве предполагаемой причины такого ограничения отмечен тот же механизм сближения времени релаксации с периодом волны, что и для прямых волн, однако здесь действующий в обратном порядке, что обусловлено встречным направлением фазовой и групповой скоростей для обратных волн.

12. Определены частотные границы областей существования прямых и обратных волн в зависимости от параметра затухания. Показано, что эти области при увеличении затухания сужаются, причем для обратных волн сужение выражено значительно сильнее, чем для прямых. Для обратных волн выявлено предельное значение параметра затухания, выше которого их существование полностью прекращается.

13. При тех же параметрах, близких к эксперименту, построены дисперсионные кривые для мнимой части волнового числа. По мере увеличения мнимой части выявлен монотонный рост дисперсионной кривой, быстрый вблизи нижней и верхней границ объединенной области существования прямых и обратных ПМСВ и медленный в окрестности частотной границы между этими областями, причем скорость роста дисперсионной кривой с увеличением затухания увеличивается. Выполнен анализ групповой скорости роста затухания, показано, что эта скорость на противоположных границах области существования ПМСВ велика, а вблизи границы, разделяющей области прямых и обратных волн — минимальна.

14. Проведено качественное сравнение законов дисперсии для магнитостатических волн с таковыми для электромагнитных волн. Показано, что дисперсионные свойства магнитостатических волн в общем случае аналогичны подобным свойствам электромагнитных волн, распространяющихся в среде со значительной магнитной проницаемостью, за счет чего дисперсия электромагнитных волн приобретает аномальный характер.

15. В геометрии плоскопараллельной намагниченной в плоскости ферритовой пластины с использованием дисперсионных соотношений для компонент комплексного волнового числа в диссипативной среде, исследована дисперсия прямых и обратных ПМСВ при распространении волны в произвольном направлении относительно поля. Приведены алгоритмы численного расчета дисперсионных зависимостей для дей-

ствительной и мнимой частей волнового числа, а также групповых скоростей распространения и роста затухания волны.

16. Построены дисперсионные кривые прямых ПМСВ при изменении действительной части волнового числа в случае малого затухания. Показано, что по мере увеличения угла между волновым вектором ПМСВ и направлением поля, дисперсионные кривые отклоняются вниз по частоте, а их предельная длина уменьшается. Полученные результаты интерпретированы на основе представления о сечении плоскостью дисперсионной поверхности ПМСВ в пространстве трех измерений: частоты и двух координатных компонент действительной части волнового числа. Проведено сравнение с характером дисперсионных кривых при изменении затухания. Показано, что различный вид дисперсионных зависимостей, соответствующих изменению затухания и направления распространения, обусловлен тем фактом, что рост затухания приводит к увеличению крутизны дисперсионной поверхности, тогда как отклонение волнового вектора от нормали к направлению поля вида дисперсионной поверхности не меняет, а лишь приводит к повороту секущей плоскости вокруг нормали к поверхности магнитной пластины.

17. Те же дисперсионные кривые прямых ПМСВ при изменении действительной части волнового числа проанализированы в случае большого затухания. Выявлено, что отличие от случая малого затухания состоит в отклонении дисперсионных кривых по мере увеличения угла не вниз, а вверх по частоте. Показано, что такое различие обусловлено общей тенденцией отклонения дисперсионных кривых при увеличении затухания по частоте вверх, причина которого состоит в приближении времени установления стационарной амплитуды волны к ее временному периоду и связанным с этим переходом к аperiodическому режиму.

18. Рассмотрены зависимости групповой скорости прямых ПМСВ от действительной части волнового числа в условиях малого и большого затухания. Показано, что при малых значениях волнового числа групповая скорость уменьшается, после чего, пройдя через минимум, при достаточно больших волновых числах увеличивается, стремясь к бесконечности. Выявлено, что причиной минимума является затухание волны на расстоянии своей длины, то есть переход к аperiodическому режиму, после чего происходит плавное стремление намагнитченности к нулю на расстоянии, значительно превышающем длину волны, что и дает кажущееся увеличение групповой скорости.

19. Построены дисперсионные кривые обратных диссипативных ПМСВ при изменении действительной части волнового числа в случае малого и большого затухания. Показано, что по мере увеличения угла отклонения волнового вектора ПМСВ от нормали к направлению поля дисперсионные кривые для обратных волн смещаются вниз как по частоте, так и по волновому числу, причем их полная длина уменьша-

ется, так что ограничение дисперсионных кривых по волновому числу происходит как сверху, так и снизу, что отражает сложный характер соответствующей дисперсионной поверхности.

20. Рассмотрены зависимости групповой скорости обратных ПМСВ от действительной части волнового числа в условиях малого и большого затухания. Показано, что соответствующие кривые при малых значениях волнового числа сначала возрастают, после чего, пройдя через максимум, при достаточно больших волновых числах спадают, стремясь к бесконечности, то есть являются как бы «зеркальным отражением» в горизонтальной оси подобных кривых для прямых ПМСВ, причем интерпретация хода кривых является той же самой. Различие между случаями малого и большого затухания состоит в том, что при большом затухании интервал допустимых отклонений волнового вектора волны от нормали к направлению поля значительно сужается, однако интервал по частоте между зависимостями, соответствующими равноотстоящим друг от друга значениям угла сохраняется, что приводит к усилению ограничения кривых как по частоте, так и по волновому числу.

21. Построены дисперсионные кривые прямых и обратных ПМСВ при изменении мнимой части волнового числа в случае малого и большого затухания. Показано, что по мере увеличения частоты мнимая часть волнового числа всегда монотонно возрастает, то есть затухание волн при этом увеличивается. Вблизи среднего участка кривые имеют перегиб, соответствующий резкому росту затухания при переходе от прямых волн к обратным. По мере увеличения угла между волновым вектором и направлением поля кривые практически без поворота смещаются по частоте и волновому числу к меньшим значениям, при этом полная длина кривых соответственно уменьшается.

22. Исследованы зависимости групповой скорости роста затухания ПМСВ от мнимой части волнового числа при малом и большом затухании. Показано, что все кривые, имея вблизи середины области существования ПМСВ минимум, по мере приближения к ее краям возрастают тем более резко, чем угол между волновым вектором и направлением поля меньше, причем положение минимума по мере увеличения этого угла смещается в сторону меньших значений мнимой части волнового числа. Различие между случаями малого и большого затухания состоит в том, что при большом затухании крутизна дисперсионных кривых в точке перегиба увеличивается тем сильнее, чем затухание больше, причем интервал существования ПМСВ по волновому числу и частоте сужается. Рост зависимостей групповой скорости в области малых значений мнимой части волнового числа сменяется спадом, отделенным от области роста локальным максимумом, величина которого по мере увеличения угла спадает вплоть до полного исчезновения.

23. Рассмотрен вопрос о возможности возбуждения прямых и обратных ПМСВ линейным преобразователем в условиях, соответствующих экспериментальным. Показано, что для эффективного возбуждения прямых ПМСВ длиной в десятки микрометров необходимы преобразователи, ширина которых не превышает 10–40 мкм. На основе анализа конфигурации поля преобразователя объяснена величина предельно малой достигнутой в эксперименте длины ПМСВ, равной 70 мкм.

24. Приведены некоторые рекомендации для наблюдения обратных диссипативных волн в эксперименте, состоящие в использовании микрополосковых преобразователей, а также импульсного режима возбуждения, требующего компромисса между длительностью импульса и шириной полосы пропускания приемного тракта в сочетании с ожидаемым высоким затуханием диссипативных волн.

Глава 5

ВЛИЯНИЕ ПОЛЯ РАЗМАГНИЧИВАНИЯ НА ДИСПЕРСИЮ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ ДЭЙМОНА–ЭШБАХА

Настоящая глава посвящена рассмотрению магнитостатических волн, распространяющихся в касательно намагниченной ферритовой пластине, обладающей гиротропными свойствами. Для простоты рассмотрения диссипация не учитывается. Главное внимание уделено влиянию размагничивающего поля магнитостатической волны на ее дисперсионные свойства. Получены действительная и мнимая части дисперсионного соотношения. Приведены данные, касающиеся необходимости учета размагничивания волны в реальных экспериментах.

Основной ход изложения следует [31, 35], а необходимые дополнительные ссылки указываются в тексте.

5.1. Обоснование необходимости рассмотрения влияния размагничивания на дисперсию магнитостатической волны

В связи с освоением нанометрового диапазона размеров устройств обработки информации представляет интерес разработка подобных устройств, использующих магнитные явления. Широкие функциональные возможности открывает здесь использование магнитных кристаллов [193, 194]. Другую перспективу дают устройства на спиновом токе, лежащие в основе спинтроники [195–198]. Важнейшим направлением является исследование сверхбыстрых процессов в магнетиках, в том числе обладающих магнитоупругостью, обусловленных воздействием мощных импульсов света от фемтосекундного лазера [178, 179, 179, 180, 184–188, 199]. Большие перспективы открываются перед использованием спиновых волн в тонких магнитных пленках и спиновых волноводах на их основе [193, 194, 200–203]. Впервые на возможность использования спиновых волн в устройствах обработки информации указывалось еще в 60-х годах 20 века [114, 117, 146–148, 150, 250]. Ряд таких устройств описан в обзорах [109–111, 257]. Те устройства использовали сравнительно длинные дипольные спиновые волны с характерными длинами порядка 10–100 мкм, что обуславливало низкую функциональность (одно устройство осуществляло только одну функцию) и значительные размеры устройств (единицы кубических

сантиметров). Современное развитие нанотехнологий позволило обратиться к освоению спиновых волн длиной в единицы нанометров, физика которых существенно отличается от освоенных ранее длинных магнитостатических волн. Так, малые длины волн вызывают к действию как дипольные силы между сравнительно крупными неоднородностями распределения намагниченности, так и мощные обменные силы между соседствующими спинами.

Однако следует отметить, что несмотря на значительные успехи в освоении столь коротких спиновых волн [202–205], теоретическое обоснование наблюдаемых явлений развито недостаточно. Так, в подавляющем большинстве работ обменное взаимодействие учитывается лишь в виде квадратичной по волновому числу добавки к эффективному магнитному полю, а дипольное поле размагничивания вообще не учитывается. Можно полагать, что такое однобокое рассмотрение связано с высокой сложностью требуемого здесь математического аппарата. Некоторые вопросы распространения дипольных волн, в том числе в неоднородных полях и сложных структурах, а также в условиях ориентационных переходов, рассмотрены в монографиях [1–4]. Однако учет обменного взаимодействия там выполнен весьма поверхностно, а размагничивание вообще не учитывалось. Таким образом, продвижение в область наноразмеров требует более подробного учета как обменного взаимодействия, так и размагничивания. Важнейшей задачей при этом становится освоение диапазона волн длиной в единицы нанометров, имеющих волновые числа порядка 10^5 – 10^6 см⁻¹.

Настоящая глава посвящена частичному заполнению имеющегося пробела, в первую очередь рассмотрению роли поля размагничивания распространяющейся волны. Для более легкого установления «мостика» с работами по дипольным волнам предлагаемый математический аппарат развит на основе классического аппарата Дэймона–Эшбаха [114], в достаточных подробностях рассмотренного в работах [1, стр. 50–76], [2, стр. 29–36], а также в разд. 2.5 настоящей монографии. Для простоты рассмотрения обменное взаимодействие в настоящей главе не учитывается, его роли будет посвящена следующая глава.

5.2. Общий характер влияния динамического размагничивания на распространение магнитостатической волны

Распространение магнитостатической волны сопровождается периодическим изменением намагниченности в пространстве, то есть распределение намагниченности становится неоднородным, что порождает размагничивающие поля, как бы стремящиеся убрать такую неоднородность. То есть каждый период волны, представляющий собой сгущение или разрежение намагниченности, порождает соответствующее размагничивающее поле того или иного знака, причем периодичность

такого поля повторяет периодичность распределения намагниченности в распространяющейся волне. То есть волна как бы «тащит за собой» размагничивающее поле, чем ее распространение в известной степени замедляется, что находит свое отражение в изменении закона дисперсии волны. При заданной частоте размагничивающее поле стремится как бы «выпрямить» неоднородность намагниченности, в результате чего волна становится длиннее, так что дисперсионная кривая отклоняется в сторону более длинных волн. При этом, чем короче волна, тем создаваемая ею неоднородность распределения намагниченности больше, так что влияние размагничивающего поля на закон дисперсии для коротких волн проявляется сильнее, чем для длинных. Рассмотрим далее эту качественную картину более подробно. При рассмотрении в основном будем следовать [4, гл. 7].

5.3. Эффективные поля магнитоэлектростатической волны

Геометрия задачи, аналогичная рассматривавшейся в классической задаче Дэймона–Эшбаха [1, 2, 114], приведена на рис. 5.1, подобном рис. 2.1 и повторена здесь для удобства изложения.

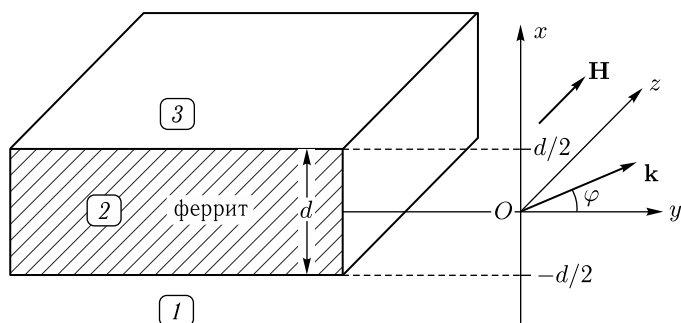


Рис. 5.1. Общая геометрия задачи

Структура представляет собой безграничную ферритовую пластину 2 толщиной d , по обе стороны от которой находятся свободные полупространства 1 и 3. Система координат $Oxyz$ выбрана таким образом, что ее плоскость Oyz параллельна плоскостям ферритовой пластины, а ось Ox — перпендикулярна. При этом ось Oz ориентирована вдоль направления внешнего поля. Начало координат O находится посередине между поверхностными плоскостями пластины, координаты которых равны $\pm d/2$.

Распространение магнитоэлектростатической волны сопровождается полем, создаваемым локализованным в точке пространства вектором намагниченности в другой точке того же пространства. Это поле имеет дипольное происхождение, то есть описывает взаимодействие двух магнитных диполей друг с другом и спадает в пространстве подобно

полю магнитного диполя. Это поле будем называть «дипольным полем магнитостатической волны», к рассмотрению которого перейдем далее.

5.3.1. Дипольное поле магнитостатической волны

Найдем дипольное поле, создаваемое намагниченностью магнитостатической волны при ее распространении в магнитной среде.

Уравнения магнитостатики имеют вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0; \quad (5.1)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}) = 0. \quad (5.2)$$

Запишем их в виде:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0; \quad (5.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = -4\pi\operatorname{div} \mathbf{M}. \quad (5.4)$$

Эту систему можно рассматривать как описание того факта, что намагниченность \mathbf{M} создает поле \mathbf{H} .

Первым этапом является нахождение этого поля при произвольной конфигурации намагниченности. Для решения этой задачи возьмем ротор от обеих частей первого уравнения:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H}. \quad (5.5)$$

Учитывая (5.3) и (5.4), получаем уравнение для определения \mathbf{H} через \mathbf{M} в виде:

$$\Delta \mathbf{H} = -4\pi \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{M}. \quad (5.6)$$

Записывая векторные функции через производные, получаем:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = -4\pi \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial x \partial z} \right); \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = -4\pi \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y \partial z} \right); \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} = -4\pi \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} \right). \quad (5.9)$$

Это — совокупность трех независимых уравнений Пуассона с заданной правой частью, решение которых позволяет определить поле, создаваемое любой заданной конфигурацией намагниченности.

Предположим теперь, что переменная часть конфигурации намагниченности имеет вид распространяющейся волны:

$$\mathbf{M} = \mathbf{m}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{kr})} = \mathbf{m}_0 e^{i\omega t} e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}. \quad (5.10)$$

Переменную часть поля будем искать в виде такой же волны:

$$\mathbf{H} = \mathbf{h}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{kr})} = \mathbf{h}_0 e^{i\omega t} e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}. \quad (5.11)$$

Выполняя дифференцирование экспонент, подставляя полученные выражения в (5.7)–(5.9) и приводя подобные члены, получаем:

$$h_{0x}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = -4\pi k_x(m_{0x}k_x + m_{0y}k_y + m_{0z}k_z); \quad (5.12)$$

$$h_{0y}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = -4\pi k_y(m_{0x}k_x + m_{0y}k_y + m_{0z}k_z); \quad (5.13)$$

$$h_{0z}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = -4\pi k_z(m_{0x}k_x + m_{0y}k_y + m_{0z}k_z). \quad (5.14)$$

Учтем, что:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2, \quad (5.15)$$

а также:

$$m_{0x}k_x + m_{0y}k_y + m_{0z}k_z = \mathbf{m}_0\mathbf{k}, \quad (5.16)$$

после чего запишем (5.12)–(5.14) в виде единого векторного выражения:

$$\mathbf{h}_0 = -\frac{4\pi}{k^2}\mathbf{k}(\mathbf{m}_0\mathbf{k}). \quad (5.17)$$

Это и есть искомое выражение для магнитного поля, создаваемого распространяющейся дипольной магнитостатической волной («размагничивающее» поле дипольной магнитостатической волны). В таком виде оно совпадает с приведенным без вывода (со словами «как нетрудно убедиться») аналогичным выражением в работе [42, стр. 200, форм. (7.11)].

Выражение (5.17) дает амплитуду поля, выраженную через амплитуду намагниченности. Для получения волновой зависимости поля от намагниченности надо обе стороны равенства умножить на волновой множитель $\exp[i(\omega t - \mathbf{kr})]$.

Отметим далее, что выражение (5.17) получено в предположении безграничной протяженности волнового фронта в плоскости, перпендикулярной волновому вектору \mathbf{k} . Такое «размагничивающее» поле обусловлено «размагничивающим фактором» безграничной плоскости равным 4π и от расстояния до такой плоскости не зависит. Это можно видеть из (5.17), где числитель и знаменатель пропорциональны квадрату волнового числа, так что поле в целом по абсолютной величине просто пропорционально $4\pi m_0$ и от волнового числа не зависит. Не так, однако, обстоит дело для волны, распространяющейся в плоскости тонкой пластины, так что размагничивающее поле, создаваемое компонентой динамической намагниченности, ориентированной вдоль направления распространения волны, спадает вдоль того же направления по экспоненте с показателем, пропорциональным толщине пластины. То есть, если длина волны значительно превышает толщину пластины, то размагничивающее поле такой волны спадает практически до нуля на расстоянии толщины, что значительно меньше длины волны. Поэтому в формировании дисперсии дипольной волны в пластине поле размагничивания участвует в тем меньшей степени, чем длина волны больше.

Ситуация полностью аналогична задаче об отражении электромагнитных волн от гранулированных пленок [258, разд. 21, рис. 5.7]. Различие состоит в том, что там рассматривается спад амплитуды отраженной волны, а здесь — спад поля распространяющейся волны, тогда как формирование постоянной спада в обоих случаях полностью совпадает.

Таким образом, поле вида (5.17) участвует в формировании дисперсии дипольных волн только в случае, когда длина этих волн сравнима или меньше толщины пластины. В реальных экспериментах по распространению дипольных волн в пленках железиттриевого граната, например в описанных в [1–4], толщина пленки обычно составляет единицы (редко десятки) микрон, тогда как длина волны — сотни и тысячи микрон. То есть при интерпретации этих экспериментов поля вида (5.17) можно не учитывать. Однако когда длина волны становится порядка одного микрона и меньше, что имеет место для обменных волн, учет поля (5.17) становится принципиально необходимым.

5.3.2. Размагничивающее поле дипольной волны в тонкой пластине

Рассмотрим формирование размагничивающих полей дипольной магнитостатической волны более подробно, для чего обратимся к рис. 5.2.

В верхней части рисунка показан вид с торца тонкой магнитной пластины, в плоскости которой вдоль оси Ox распространяется магнитостатическая волна. Вертикальными линиями показана плотность распределения x -компоненты намагниченности. Точками M и N отмечены два мгновенных положения максимальных значений намагниченности, отстоящих друг от друга на длину волны, равную λ , то есть как бы двух соседних «гребней» волны, распространяющейся вдоль оси Ox . Каждый такой «гребень» можно рассматривать как образуемый вектором намагниченности относительно тонкий слой магнитных зарядов, движущихся со скоростью волны в том же направлении.

В средней части рисунка показаны поля, создаваемые такими слоями зарядов. Проекция гребней волн на плоскость рисунка обозначены буквами A и B , вектор намагниченности — \mathbf{M} , заряды показаны плюсами. Силовые линии полей, исходящих из слоев зарядов, показаны изогнутыми стрелками. В силу собственной симметрии, каждый слой создает два поля, симметричных относительно плоскости слоя, направленных в противоположные стороны. Это и есть «поля размагничивания» дипольной волны.

В нижней части рисунка показана зависимость этих полей от координаты x . Можно видеть, что в силу ограниченности пластины по толщине, поля спадают на расстоянии того же порядка, что и толщина пластины d . Заметим, что на рисунке показаны только положительные заряды, соответствующие одному из полюсов вектора намагниченности. Заряды, соответствующие другому полюсу (отрицательные) находятся посередине между положительными и образуют поля, спадающие

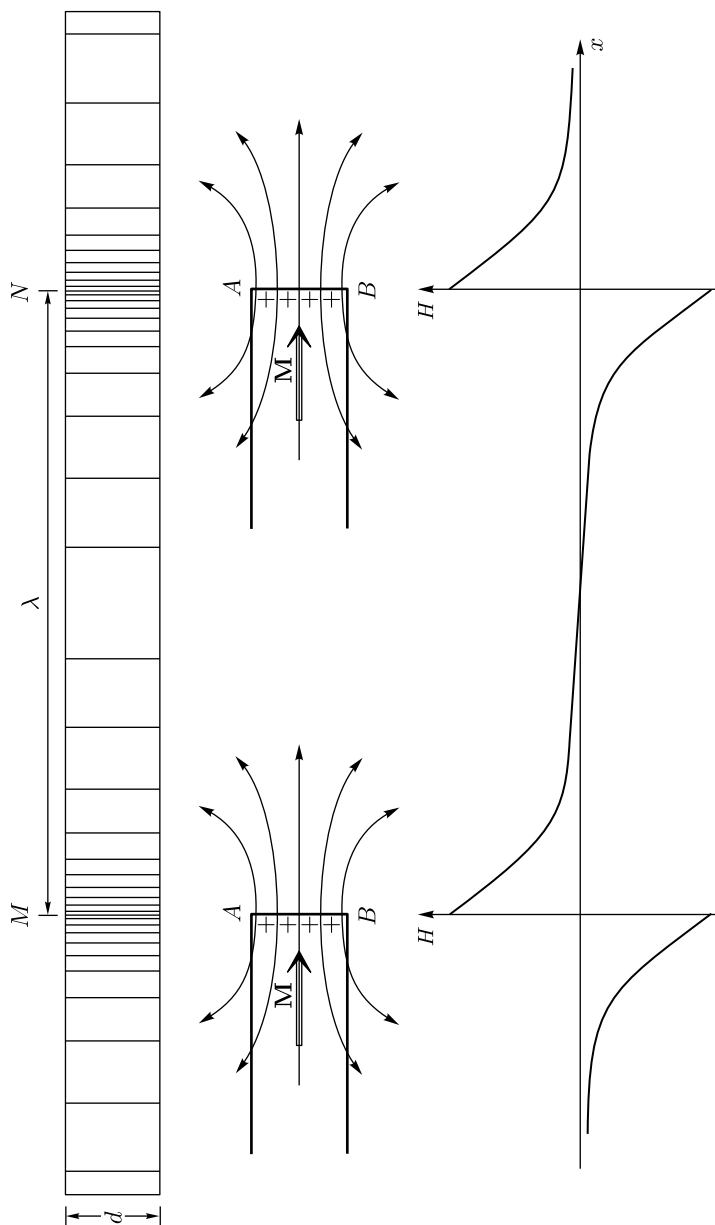


Рис. 5.2. Схема формирования размагничивающего поля дипольной волны в тонкой пластине

таким же образом, как и положительные. На рисунке эти заряды и образуемые ими поля не показаны во избежание затемнения картины.

Итак, если длина волны λ значительно больше толщины пластины d , то почти на всем расстоянии между гребнями волн эти поля размагничивания локализуются в небольших пространствах вблизи этих гребней, а на всем расстоянии между гребнями практически отсутствуют, то есть их влиянием на параметры волны можно пренебречь. Именно такая ситуация имеет место в экспериментах по распространению магнитостатических волн в тонких пленках железиттриевого граната (ЖИГ) [1–4]. Толщина пленки при этом обычно составляет единицы (редко десятки) микрон, а длина волны — сотни и тысячи микрон. То есть поля размагничивания присутствуют только на расстояниях тех же единиц микрон, а на сотнях и тысячах микрон — практически отсутствуют. Однако если длина волны λ имеет тот же порядок или меньше толщины пластины d , то поля размагничивания между гребнями волны не успевают сильно уменьшиться, так что присутствуют на всем протяжении распространения волны примерно в одинаковой степени. То есть в этом случае они могут внести в свойства распространяющейся волны значительный вклад и их влияние обязательно надо учитывать. Именно такая ситуация имеет место для волн, длина которых составляет от единиц микрон и менее вплоть до расстояний порядка межатомных.

5.3.3. Параметр размагничивания дипольной волны

Исходя из общей картины формирования полей размагничивания, образуемых плавно распределенными в пространстве магнитными зарядами, частично сосредоточенными в местах гребней волны, можно заключить, что подробный расчет конфигурации этих полей представляет собой довольно трудную и громоздкую задачу. Поэтому обратимся далее к упрощенному модельному приему, позволяющему получить результат, с качественной стороны представляющийся довольно правдоподобным.

Будем полагать, что для описания рассматриваемых явлений можно ввести постоянный коэффициент, умножение которого на размагничивающее поле, соответствующее бесконечно протяженному фронту, даст характеристику поля при ограниченной протяженности фронта. Назовем такой коэффициент «параметром размагничивания дипольной волны» и предположим, что в бесконечно тонкой пластине этот параметр равен нулю, а в безграничной среде равен единице. Такое предположение эквивалентно тому факту, что при длине волны значительно большей толщины пластины параметр размагничивания равен нулю, а при длине волны значительно меньшей толщины пластины этот параметр равен единице.

Предположим, что влияние этого параметра на общее поле волны сказывается, начиная со случая, когда половина длины волны стано-

вится меньше толщины пластины, то есть критическая длина волны и толщина пластины связаны соотношением:

$$d = \lambda_c/2. \quad (5.18)$$

или критическое значение волнового числа равно:

$$k_c = \pi/d. \quad (5.19)$$

В качестве эмпирического приближения положим параметр размагничивания равным гиперболическому тангенсу, аргумент которого будет определяться произведением волнового числа на толщину пластины, а прохождение через нуль — критическим значением волнового числа k_c . Таким образом, будем полагать параметр размагничивания пропорциональным величине:

$$\beta_0 = \frac{1}{2} \left\{ \text{th} \left[d \left(k - \frac{\pi}{d} \right) \right] + 1 \right\}. \quad (5.20)$$

Можно видеть, что введенный так параметр β_0 при $k \rightarrow -\infty$ стремится к нулю, при $k \rightarrow \infty$ стремится к единице, а при $k = \pi/d$ (то есть при равенстве половины длины волны толщине пластины) равен $1/2$. При $k = 0$ параметр β_0 равен 0,0019, то есть величине по сравнению с единицей весьма малой, близкой к нулю. То есть этот параметр с высокой точностью удовлетворяет введенным выше условиям поведения при малом и большом соотношении между длиной волны и толщиной пластины, а при близости между собой этих величин принимает среднее значение.

5.3.4. Нормировка параметра размагничивания

В соответствии с формулой (5.20) при $\beta_0 = 1$ поле размагничивания волны (учитывая, что произведение \mathbf{k} на \mathbf{k} имеет тот же порядок, что k^2) по величине близко к $4\pi m_0$ или, отвлекаясь от нормировки по намагниченности, к величине $4\pi M_0$. Однако такое поле размагничивания соответствует полному повороту вектора намагниченности вдоль направления распространения волны, чего в поверхностной волне никогда не бывает. В самом деле, в подавляющем большинстве реальных экспериментов рассматривается линейный режим, при котором вектор намагниченности отклоняется от своего равновесного положения не более чем на единицы градусов.

В геометрии рассматриваемой задачи (рис. 5.1) декартова система координат $Oxyz$ ориентирована таким образом, что плоскость пластины соответствует координатной плоскости Oyz , причем постоянное поле направлено вдоль оси Oz , а волна распространяется вдоль оси Oy . При этом вектор намагниченности в равновесном состоянии ориентирован вдоль поля, то есть вдоль оси Oz , а в процессе распространения волны он отклоняется от этой оси, обретая поперечные компоненты вдоль осей Ox и Oy , которые в свою очередь и формируют поле размагничивания волны. В линейном режиме эти компоненты значительно

меньше основной компоненты вдоль оси Oz , так что в первом приближении их можно считать пропорциональными синусу угла отклонения вектора намагниченности от оси Oz .

При отклонении на один градус величина поперечного поля размагничивания, равная синусу этого угла, составляет 0,0175 от величины $4\pi M_0$. При отклонении на пять градусов такая величина равна 0,0875 от $4\pi M_0$. То есть реальная величина поля размагничивания волны должна быть умножена на нормировочный коэффициент, составляющий не более 0,1 от максимальной величины β_0 . Обозначая этот коэффициент через α_p , в соответствии с (5.20), получаем:

$$\beta = \alpha_p \beta_0 = \frac{\alpha_p}{2} \left\{ \text{th} \left[d \left(k - \frac{\pi}{d} \right) \right] + 1 \right\}, \quad (5.21)$$

где:

$$0 \leq \alpha_p \leq 0,1. \quad (5.22)$$

5.3.5. Зависимость поля размагничивания от волнового числа

Таким образом, вместо \mathbf{H}_M теперь будет фигурировать поле $\mathbf{H}_M^{(\infty)} \beta$, где $\mathbf{H}_M^{(\infty)}$ определяется формулой (5.17), так что размагничивающее поле дипольной волны в тонкой пластине принимает вид:

$$\mathbf{H}_M = -\frac{4\pi\beta}{k^2} \mathbf{k}(\mathbf{mk}), \quad (5.23)$$

где β определяется формулой (5.21), то есть:

$$\mathbf{H}_M = -\frac{2\pi\alpha_p}{k^2} \left\{ \text{th} \left[d \left(k - \frac{\pi}{d} \right) \right] + 1 \right\} \mathbf{k}(\mathbf{mk}). \quad (5.24)$$

В качестве иллюстрации на рис. 5.3 показаны зависимости параметра размагничивания от волнового числа в широком диапазоне значений толщины пластины. Для наглядности вместо полной величины β приведена ненормированная величина β_0 (нормировка проведена на значение β при $k \rightarrow \infty$, то есть при стремлении гиперболического тангенса к единице).

Из рисунка видно, что точки перегиба всех зависимостей (то есть такие точки, где чистый гиперболический тангенс проходит через нуль) по мере уменьшения толщины пластины смещаются в сторону больших значений волновых чисел. Наблюдаемое подобие всех кривых с равномерным смещением по волновому числу в большую сторону обусловлено логарифмическим масштабом рисунка по горизонтальной оси. Для наиболее типичной в экспериментах по дипольным волнам толщины пленки 10 мкм (кривая 3) [1–4] значение волнового числа, начиная с которого размагничивание проявляется достаточно сильно, составляет около $(2-3) \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$. В то же время, большинство описанных в цитированных работах экспериментах выполнялось при значении волнового числа не более нескольких сотен (например, рис. 3.8 на стр. 134 в [1], где предельно достигнутое волновое число равно 400 см^{-1}). Такое ограничение было обусловлено использовавшейся в этих работах

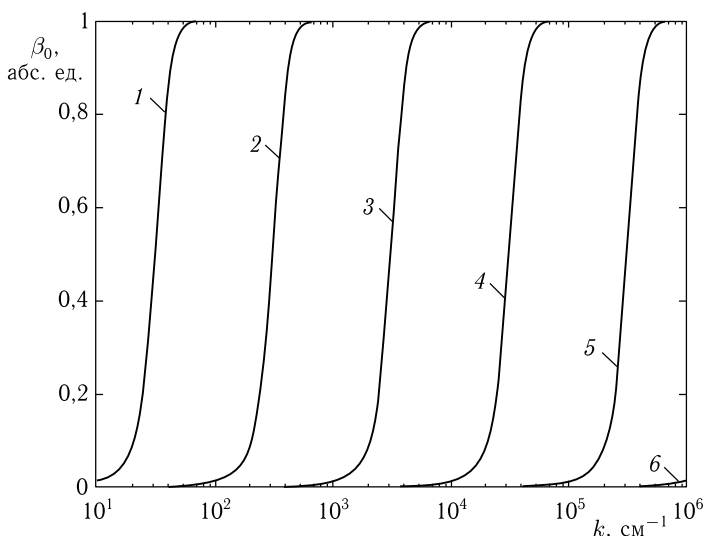


Рис. 5.3. Зависимость параметра размагничивания β_0 (приведенного к единице при $k \rightarrow \infty$) от волнового числа при различной толщине пластины. 1 — 1000 мкм, 2 — 100 мкм, 3 — 10 мкм, 4 — 1 мкм, 5 — 0,1 мкм, 6 — 0,01 мкм

экспериментальной техникой, основу которой составляли подвижные зонды с толщиной антенны порядка 12–15 мкм [1, стр. 127], что позволяло возбуждать ПМСВ длиной не менее 70–100 мкм, то есть с волновым числом не более 1000 см^{-1} .

Для такой экспериментальной ситуации сравнение экспериментальных данных с теорией, построенной в рамках классической задачи Дэймона–Эшбаха [1, 2, 114], оказалось достаточным, так что размагничивание волны в достаточной степени не проявлялось и отмечено не было.

Не так, однако, обстоит дело в безграничной среде, особенно при возбуждении волн обменного характера, волновое число для которых может составлять 10^5 – 10^6 см^{-1} и более. Учет размагничивающего поля волны приводит здесь к существенному изменению закона дисперсии, проявляющемуся в различии дисперсионных кривых для обменных волн, распространяющихся вдоль и поперек направления постоянного поля [42, стр. 201, рис. 5.7.1].

Как видно из рис. 5.3, с уменьшением толщины пленок значение волнового числа, начиная с которого учет размагничивания поля волны становится необходимым, постепенно увеличивается. Так, для пленок толщиной в 0,1 мкм проявление поля размагничивания начинается с волнового числа порядка 10^5 см^{-1} . Из подобия кривых 3 и 5 видно, что здесь ситуация та же, что и для пленок толщиной 10 мкм при волновом числе порядка 10^3 см^{-1} . То есть влияние размагничивающего поля волны еще незначительно. Однако при волновых числах

порядка 10^6 см^{-1} и более, чему посвящено значительное количество современных работ по магнитостатическим волнам [178–180, 184–188, 193–203], учет размагничивающего поля волны может оказаться принципиально необходимым.

5.4. Тензор магнитной восприимчивости с учетом размагничивания

В задаче расчета закона дисперсии магнитостатической волны ключевым моментом является получение тензора динамической магнитной восприимчивости, связывающего динамическую намагниченность с переменным полем. Классический способ получения такого тензора для однородного распределения намагниченности описан в разд. 2.2 настоящей монографии, а также подробно разобран в первой монографии настоящей серии [1, стр. 41–46]. Рассмотрим здесь получение такого тензора с учетом размагничивания в предложенном выше виде.

Как и в классике, будем исходить из уравнения движения намагниченности Ландау–Лифшица, в отсутствие затухания имеющего вид [1, 42, 43]:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}]. \quad (5.25)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде магнитостатической волны, переменная намагниченность \mathbf{m} которой имеет пространственно-временную зависимость вида

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{m}_0 \exp [i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})]. \quad (5.26)$$

Пусть при этом входящее в (5.25) поле \mathbf{H} определяется выражением:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h} + \mathbf{H}_M. \quad (5.27)$$

Слагаемые этого поля представляют собой: постоянное подмагничивающее поле:

$$\mathbf{H}_0 = \text{const}; \quad (5.28)$$

переменное магнитное поле:

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 \exp [i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})]; \quad (5.29)$$

поле, создаваемое динамической намагниченностью при распространении в среде дипольной магнитостатической волны, то есть «размагничивающее» поле волны, определяемое выражением (5.23):

$$\mathbf{H}_M = -\frac{4\pi\beta}{k^2} \mathbf{k}(\mathbf{m}\mathbf{k}) = -\frac{4\pi\beta}{k^2} \mathbf{k}(\mathbf{m}_0\mathbf{k}) \exp [i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})]; \quad (5.30)$$

Таким образом, полное поле имеет вид:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h} - \frac{4\pi\beta}{k^2} \mathbf{k}(\mathbf{m}\mathbf{k}), \quad (5.31)$$

где последние два слагаемых содержат множитель вида $\exp [i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})]$, который далее для краткости записи опускаем.

Выберем систему координат, ось Oz которой параллельна направлению постоянного поля \mathbf{H}_0 . При этом (5.31) принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \mathbf{i} \left[h_x - \frac{4\pi\beta}{k^2} k_x (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) \right] + \\ + \mathbf{j} \left[h_y - \frac{4\pi\beta}{k^2} k_y (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) \right] + \\ + \mathbf{k} \left[H_0 + h_z - \frac{4\pi\beta}{k^2} k_z (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) \right]. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Положим далее, что намагниченность имеет вид:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m} = \mathbf{i}m_x + \mathbf{j}m_y + \mathbf{k}(M_0 + m_z), \quad (5.33)$$

где M_0 — намагниченность насыщения среды, вектор которой в равновесном состоянии ориентирован вдоль постоянного поля \mathbf{H}_0 (то есть вдоль оси Oz).

Раскрывая в (5.25) векторное произведение, записывая уравнение по компонентам и подставляя (5.26) и (5.32), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma \left\{ m_y \left[H_0 + h_z - \frac{4\pi\beta}{k^2} k_z (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) \right] - \right. \\ \left. - (M_0 + m_z) \left[h_y - \frac{4\pi\beta}{k^2} k_y (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) \right] \right\}; \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_y}{\partial t} = -\gamma \left\{ (M_0 + m_z) \left[h_x - \frac{4\pi\beta}{k^2} k_x (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) \right] - \right. \\ \left. - m_x \left[H_0 + h_z - \frac{4\pi\beta}{k^2} k_z (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) \right] \right\}; \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_z}{\partial t} = -\gamma \left\{ m_x \left[-\frac{4\pi\beta}{k^2} k_y (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) \right] - \right. \\ \left. - m_y \left[-\frac{4\pi\beta}{k^2} k_x (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Выполним линеаризацию, для чего предположим, что: $m_{x,y} \ll M_0 \sim H_0$, $h_{x,y,z} \ll H_0$, а также $m_z \approx 0$. В результате получаем:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma \left\{ m_y H_0 - M_0 \left[h_y - \frac{4\pi\beta}{k^2} k_y (m_x k_x + m_y k_y) \right] \right\}; \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\gamma \left\{ M_0 \left[h_x - \frac{4\pi\beta}{k^2} k_x (m_x k_x + m_y k_y) \right] - m_x H_0 \right\}. \quad (5.38)$$

Обе стороны этих выражений имеют координатно-временную зависимость вида $\exp(i\omega t - \mathbf{kr})$. Выполняя дифференцирование по времени, разделяя обе части на этот множитель и опуская индекс «0» у амплитуд компонент намагниченности и переменного поля, получаем:

$$i\omega m_x = -\gamma \left\{ m_y H_0 - M_0 \left[h_y - \frac{4\pi\beta}{k^2} k_y (m_x k_x + m_y k_y) \right] \right\}; \quad (5.39)$$

$$i\omega m_y = -\gamma \left\{ M_0 \left[h_x - \frac{4\pi\beta}{k^2} k_x (m_x k_x + m_y k_y) \right] - m_x H_0 \right\}. \quad (5.40)$$

Раскрываем скобки, приводим подобные члены и записываем слагаемые в порядке следования индексов:

$$\left(i\omega + \frac{4\pi\gamma M_0\beta}{k^2}k_x k_y\right) m_x + \left(\gamma H_0 + \frac{4\pi\gamma M_0\beta}{k^2}k_y^2\right) m_y = \gamma M_0 h_y; \quad (5.41)$$

$$\left(\gamma H_0 + \frac{4\pi\gamma M_0\beta}{k^2}k_x^2\right) m_x - \left(i\omega - \frac{4\pi\gamma M_0\beta}{k^2}k_x k_y\right) m_y = \gamma M_0 h_x. \quad (5.42)$$

Подобно (2.26), (2.27), а также [1, стр. 45, форм. (2.68), (2.69)], введем обозначения:

$$\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}; \quad (5.43)$$

$$\Omega_H = \frac{H_0}{4\pi M_0}. \quad (5.44)$$

Разделяя (5.41), (5.42) на $4\pi\gamma M_0$ и используя обозначения (5.43), (5.44), получаем:

$$\left(i\Omega + \beta \frac{k_x k_y}{k^2}\right) m_x + \left(\Omega_H + \beta \frac{k_y^2}{k^2}\right) m_y = \frac{1}{4\pi} h_y; \quad (5.45)$$

$$\left(\Omega_H + \beta \frac{k_x^2}{k^2}\right) m_x - \left(i\Omega - \beta \frac{k_x k_y}{k^2}\right) m_y = \frac{1}{4\pi} h_x. \quad (5.46)$$

Уравнения (5.45)–(5.46) представляют собой систему, связывающую компоненты динамической намагничённости m_x и m_y с параметрами среды, распространяющейся волны и компонентами переменного поля.

Определитель этой системы равен:

$$D_0 = \begin{vmatrix} \left(i\Omega + \beta \frac{k_x k_y}{k^2}\right) & \left(\Omega_H + \beta \frac{k_y^2}{k^2}\right) \\ \left(\Omega_H + \beta \frac{k_x^2}{k^2}\right) & -\left(i\Omega - \beta \frac{k_x k_y}{k^2}\right) \end{vmatrix} = \\ = \Omega^2 - \Omega_H \left(\Omega_H + \beta \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2}\right). \quad (5.47)$$

Решая систему (5.45)–(5.46), находим амплитуды компонент намагничённости:

$$m_x = -\frac{1}{4\pi D_0} \left\{ \left(\Omega_H + \beta \frac{k_y^2}{k^2}\right) h_x + \left(i\Omega - \beta \frac{k_x k_y}{k^2}\right) h_y \right\}; \quad (5.48)$$

$$m_y = \frac{1}{4\pi D_0} \left\{ \left(i\Omega_H + \beta \frac{k_x k_y}{k^2}\right) h_x - \left(\Omega + \beta \frac{k_x^2}{k^2}\right) h_y \right\}, \quad (5.49)$$

где D_0 определяется выражением (5.47), а обе части полученных равенств имеют пространственно-временную зависимость вида $\exp[i(\omega t - \mathbf{kr})]$.

Введем обозначения:

$$\kappa_1 = \frac{\Omega_H + \beta \frac{k_y^2}{k^2}}{\Omega_H \left(\Omega_H + \beta \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \Omega^2}; \quad (5.50)$$

$$\kappa_2 = \frac{\Omega_H + \beta \frac{k_x^2}{k^2}}{\Omega_H \left(\Omega_H + \beta \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \Omega^2}; \quad (5.51)$$

$$\nu_1 = \frac{i\Omega - \beta \frac{k_x k_y}{k^2}}{\Omega_H \left(\Omega_H + \beta \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \Omega^2}; \quad (5.52)$$

$$\nu_2 = \frac{i\Omega + \beta \frac{k_x k_y}{k^2}}{\Omega_H \left(\Omega_H + \beta \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \Omega^2}. \quad (5.53)$$

При этом уравнения (5.48)–(5.49) после умножения на 4π принимают вид:

$$4\pi m_x = \kappa_1 h_x + \nu_1 h_y; \quad (5.54)$$

$$4\pi m_y = -\nu_2 h_x + \kappa_2 h_y, \quad (5.55)$$

то есть искомый тензор восприимчивости имеет вид:

$$\vec{\chi} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \kappa_1 & \nu_1 & 0 \\ -\nu_2 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.56)$$

Замечание. Из структуры выражений (5.50)–(5.53) можно видеть, что в отсутствие размагничивания, то есть при $\beta = 0$ тензор (5.56) с точностью до обозначений принимает классический вид (2.24) или [1, стр. 44, форм. (2.53)], а его компоненты (5.50)–(5.53) переходят в классические выражения (2.74), (2.75) или в приведенные в [1, стр. 46] выражения (2.76), (2.77). Не так, однако, обстоит дело при параметре β , отличном от нуля. Так, компоненты χ_{12} и χ_{21} перестают быть одинаковыми с точностью до знака, то есть тензор $\vec{\chi}$ перестает быть антисимметричным, так как компоненты ν_1 и ν_2 согласно (5.52) и (5.53) теперь различаются. Такое различие порождает новый параметр ν , равный разности между ν_1 и ν_2 , в отсутствие размагничивания равный нулю. В явном виде этот параметр определяется формулами (5.73), (5.77) и следующими далее с учетом двойственного характера поперечного волнового числа.

Итак — получены компоненты намагниченности (5.54), (5.55), выраженные через компоненты действующего эффективного поля (5.29) в случае распространения дипольных магнитостатических волн в безграничной среде. Перейдем теперь к выводу уравнения Уокера для потенциала этого поля.

5.5. Уравнение Уокера с учетом размагничивания

Как и в классике, будем исходить из уравнений магнитостатики:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0; \quad (5.57)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (5.58)$$

где:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}. \quad (5.59)$$

Из уравнения (5.57) следует возможность введения потенциала переменного поля ψ такого, что:

$$\mathbf{h} = \operatorname{grad} \psi = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\}, \quad (5.60)$$

то есть:

$$h_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (5.61)$$

$$h_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad (5.62)$$

$$h_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (5.63)$$

При этом уравнение (5.58) принимает вид:

$$\operatorname{div} (\operatorname{grad} \psi + 4\pi\mathbf{m}) = 0, \quad (5.64)$$

или:

$$\Delta \psi + 4\pi \operatorname{div} \mathbf{m} = 0. \quad (5.65)$$

Здесь:

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}; \quad (5.66)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{m} = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_z}{\partial z}. \quad (5.67)$$

Дифференцируя (5.54) и (5.55), получаем:

$$4\pi \frac{\partial m_x}{\partial x} = \kappa_1 \frac{\partial h_x}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial h_y}{\partial x}; \quad (5.68)$$

$$4\pi \frac{\partial m_y}{\partial y} = -\nu_2 \frac{\partial h_x}{\partial y} + \kappa_2 \frac{\partial h_y}{\partial y}. \quad (5.69)$$

Подставляя (5.68)–(5.69) в (5.65) и приводя подобные члены, получаем:

$$(1 + \kappa_1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (1 + \kappa_2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + (\nu_1 - \nu_2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (5.70)$$

Это — уравнение Уокера для магнитостатических волн с учетом размагничивания. Для сокращения дальнейшей записи введем обозначения:

$$\mu_1 = 1 + \kappa_1; \quad (5.71)$$

$$\mu_2 = 1 + \kappa_2; \quad (5.72)$$

$$\nu = \nu_1 - \nu_2. \quad (5.73)$$

С этими обозначениями уравнение (5.70) принимает вид:

$$\mu_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (5.74)$$

где в соответствии с (5.50)–(5.53):

$$\mu_1 = 1 + \frac{\Omega_H + \beta \frac{k_y^2}{k^2}}{\Omega_H \left(\Omega_H + \beta \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \Omega^2}; \quad (5.75)$$

$$\mu_2 = 1 + \frac{\Omega_H + \beta \frac{k_x^2}{k^2}}{\Omega_H \left(\Omega_H + \beta \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \Omega^2}; \quad (5.76)$$

$$\nu = \frac{-2\beta \frac{k_x k_y}{k^2}}{\Omega_H \left(\Omega_H + \beta \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \Omega^2}. \quad (5.77)$$

Главное отличие полученного уравнения Уокера (5.74) от классического [1, стр. 50, форм. (2.115)] состоит в различии между собой параметров μ_1 и μ_2 , а также в появлении смешанной производной с параметром ν .

5.5.1. Решение уравнения Уокера

Уравнение Уокера имеет вид (5.74). Решим его методом разделения переменных. Полагаем решение в виде:

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (5.78)$$

Подставим (5.78) в уравнение (5.74) и разделим на XYZ :

$$\mu_1 \frac{X''}{X} + \mu_2 \frac{Y''}{Y} + \nu \frac{X'Y'}{XY} + \frac{Z''}{Z} = 0. \quad (5.79)$$

Отделим часть, зависящую только от Z , и введем постоянную разделения λ^2 :

$$\mu_1 \frac{X''}{X} + \mu_2 \frac{Y''}{Y} + \nu \frac{X'Y'}{XY} = -\frac{Z''}{Z} = \lambda^2. \quad (5.80)$$

Получаем уравнение для Z :

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0. \quad (5.81)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$Z = Ge^{i\lambda z} + He^{-i\lambda z}. \quad (5.82)$$

Из (5.80) выделим уравнение для X и Y :

$$\mu_1 \frac{X''}{X} + \mu_2 \frac{Y''}{Y} + \nu \frac{X'Y'}{XY} - \lambda^2 = 0. \quad (5.83)$$

Можно видеть, что вследствие наличия смешанной производной, обычная схема метода разделения переменных, используемая при решении классической задачи Дэймона–Эшбаха [1, стр. 56–57], здесь не проходит (так как уравнение (5.83) содержит две переменных и разнести их в отдельности по разные стороны от знака равенства не представляется возможным), поэтому воспользуемся приемом, специально предназначенным для решения уравнений подобного типа со смешанной производной, подробно описанным в [4, гл. 4, разд. 4.1.6]. Здесь этот прием в конспективном виде приведен в разд. 2.8.

Итак, заведомо предполагаем, что волна распространяется вдоль оси Oy , так что функция Y имеет вид:

$$Y = e^{-i\xi y}. \quad (5.84)$$

При $\xi > 0$ это решение соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении оси Oy . Волну, распространяющуюся в отрицательном направлении (то есть с другим знаком в показателе экспоненты) надо рассматривать отдельно (решение будет похожим, но знаки будут другие, так что этот вопрос во всей его полноте оставляем до отдельной работы).

Подставляя (5.84) в (5.83) и умножая на XY , получаем уравнение для X :

$$\mu_1 X'' - i\nu\xi X' - (\lambda^2 + \mu_2\xi^2)X = 0. \quad (5.85)$$

Будем искать решение в виде:

$$X = e^{\eta x}. \quad (5.86)$$

Подставляя (5.86) в (5.85), разделяя на X и приводя подобные члены, получаем уравнение для η :

$$\mu_1 \eta^2 - i\nu\xi\eta - (\lambda^2 + \mu_2\xi^2) = 0. \quad (5.87)$$

Это уравнение относительно η — квадратное, его решение имеет вид:

$$\eta^{(1,2)} = \frac{i\nu\xi \pm \sqrt{-\nu^2\xi^2 + 4\mu_1(\lambda^2 + \mu_2\xi^2)}}{2\mu_1}. \quad (5.88)$$

Представим его в виде:

$$\eta^{(1,2)} = \eta_1 \pm \eta_2, \quad (5.89)$$

где:

$$\eta_1 = i \frac{\nu\xi}{2\mu_1}; \quad (5.90)$$

$$\eta_2 = \frac{\sqrt{4\mu_1\lambda^2 + (4\mu_1\mu_2 - \nu^2)\xi^2}}{2\mu_1}. \quad (5.91)$$

Заменяем постоянные разделения λ и ξ обозначениями волновых чисел:

$$\lambda \rightarrow k_z; \quad (5.92)$$

$$\xi \rightarrow k_y, \quad (5.93)$$

где полагаем $k_z \geq 0$, $k_y \geq 0$.

При этих обозначениях (5.90) и (5.91) принимают вид:

$$\eta_1 = i \frac{\nu k_y}{2\mu_1}; \quad (5.94)$$

$$\eta_2 = \frac{\sqrt{4\mu_1 k_z^2 + (4\mu_1\mu_2 - \nu^2)k_y^2}}{2\mu_1}. \quad (5.95)$$

Таким образом, решение для X принимает вид:

$$X = Ae^{(\eta_1 + \eta_2)x} + Be^{(\eta_1 - \eta_2)x}, \quad (5.96)$$

то есть вдоль оси Ox возможны два волновых числа $\eta_1 + \eta_2$ и $\eta_1 - \eta_2$.

Введем обозначения:

$$k_x^{(+)} = \eta_1 + \eta_2; \quad (5.97)$$

$$k_x^{(-)} = \eta_1 - \eta_2. \quad (5.98)$$

С этими обозначениями решение (5.96) принимает вид:

$$X = Ae^{k_x^{(+)}x} + Be^{k_x^{(-)}x}. \quad (5.99)$$

При этом, согласно (5.97) и (5.98), получаем:

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(k_x^{(+)} + k_x^{(-)}); \quad (5.100)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2}(k_x^{(+)} - k_x^{(-)}). \quad (5.101)$$

Таким образом, с учетом (5.99), (5.84) и (5.82), полное решение уравнения Уокера (5.74) принимает вид:

$$\psi = XYZ, \quad (5.102)$$

где:

$$X = Ae^{k_x^{(+)}x} + Be^{k_x^{(-)}x}; \quad (5.103)$$

$$Y = e^{-ik_y y}; \quad (5.104)$$

$$Z = Ge^{ik_z z} + He^{-ik_z z}, \quad (5.105)$$

причем $k_z \geq 0$, $k_y \geq 0$, а $k_x^{(+)}$ и $k_x^{(-)}$ определяются соотношениями (5.97) и (5.98) через (5.94) и (5.95).

Для дальнейшего рассмотрения ограничимся распространением волны вдоль оси Oy , то есть положим $k_z = 0$. При этом (5.94) и (5.95) принимают вид:

$$\eta_1 = i \frac{\nu}{2\mu_1} k_y; \quad (5.106)$$

$$\eta_2 = \frac{\sqrt{4\mu_1\mu_2 - \nu^2}}{2\mu_1} k_y, \quad (5.107)$$

то есть, согласно (5.97)–(5.98) получаем:

$$k_x^{(+)} = \left(i \frac{\nu}{2\mu_1} + \frac{\sqrt{4\mu_1\mu_2 - \nu^2}}{2\mu_1} \right) k_y; \quad (5.108)$$

$$k_x^{(-)} = \left(i \frac{\nu}{2\mu_1} - \frac{\sqrt{4\mu_1\mu_2 - \nu^2}}{2\mu_1} \right) k_y. \quad (5.109)$$

Здесь параметры μ_1 , μ_2 , ν имеют вид (5.75)–(5.77).

Так как $k_z = 0$, то имеем:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2. \quad (5.110)$$

В выражениях (5.75)–(5.77) поменяем местами слагаемые в знаменателях и соответственно изменим знаки перед дробями. В результате таких преобразований эти выражения принимают вид:

$$\mu_1 = 1 - \frac{\Omega_H + \beta \frac{k_y^2}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta)}; \quad (5.111)$$

$$\mu_2 = 1 - \frac{\Omega_H + \beta \frac{k_x^2}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta)}; \quad (5.112)$$

$$\nu = \frac{2\beta \frac{k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta)}. \quad (5.113)$$

Выполняя сложение, получаем:

$$\mu_1 = \frac{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1) - \beta \frac{k_y^2}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta)}; \quad (5.114)$$

$$\mu_2 = \frac{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1) - \beta \frac{k_x^2}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta)}; \quad (5.115)$$

$$\nu = \frac{2\beta \frac{k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta)}. \quad (5.116)$$

Введем два вспомогательных обозначения:

$$\Omega_0^2 = \Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta). \quad (5.117)$$

$$\Omega_1^2 = \Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1). \quad (5.118)$$

В результате запись (5.114)–(5.116) значительно упрощается:

$$\mu_1 = \frac{\Omega_1^2 - \beta \frac{k_y^2}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega_0^2}; \quad (5.119)$$

$$\mu_2 = \frac{\Omega_1^2 - \beta \frac{k_x^2}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega_0^2}; \quad (5.120)$$

$$\nu = \frac{2\beta \frac{k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega_0^2}. \quad (5.121)$$

Можно видеть, что во все эти параметры входит волновое число k_x , которое, согласно (5.97) и (5.98) имеет два вида, обозначенные индексами (+) и (-). То есть и (5.119)–(5.121) должны иметь два вида, соответствующие этим индексам. То есть вместо (5.119)–(5.121) получаем:

$$\mu_1^{(+)} = \frac{\Omega_1^2 - \beta \frac{k_y^2}{(k_x^{(+)})^2 + k_y^2}}{\Omega_0^2}; \quad (5.122)$$

$$\mu_2^{(+)} = \frac{\Omega_1^2 - \beta \frac{(k_x^{(+)})^2}{(k_x^{(+)})^2 + k_y^2}}{\Omega_0^2}; \quad (5.123)$$

$$\nu^{(+)} = \frac{2\beta \frac{k_x^{(+)} k_y}{(k_x^{(+)})^2 + k_y^2}}{\Omega_0^2}. \quad (5.124)$$

а также:

$$\mu_1^{(-)} = \frac{\Omega_1^2 - \beta \frac{k_y^2}{(k_x^{(-)})^2 + k_y^2}}{\Omega_0^2}; \quad (5.125)$$

$$\mu_2^{(-)} = \frac{\Omega_1^2 - \beta \frac{(k_x^{(-)})^2}{(k_x^{(-)})^2 + k_y^2}}{\Omega_0^2}; \quad (5.126)$$

$$\nu^{(-)} = \frac{2\beta \frac{k_x^{(-)} k_y}{(k_x^{(-)})^2 + k_y^2}}{\Omega_0^2}. \quad (5.127)$$

Соответственно выражения (5.108) и (5.109) принимают вид:

$$k_x^{(+)} = \left(i \frac{\nu^{(+)}}{2\mu_1^{(+)}} + \frac{\sqrt{4\mu_1^{(+)}\mu_2^{(+)} - (\nu^{(+)})^2}}{2\mu_1^{(+)}} \right) k_y; \quad (5.128)$$

$$k_x^{(-)} = \left(i \frac{\nu^{(-)}}{2\mu_1^{(-)}} + \frac{\sqrt{4\mu_1^{(-)}\mu_2^{(-)} - (\nu^{(-)})^2}}{2\mu_1^{(-)}} \right) k_y; \quad (5.129)$$

где $\mu_{1,2}^{(\pm)}$ и $\nu^{(\pm)}$ определяются формулами (5.122)–(5.127).

Таким образом, выражения (5.128) и (5.129) можно рассматривать как уравнения для определения $k_x^{(+)}$ и $k_x^{(-)}$. Рассмотрим их по отдельности.

Обратимся сначала к уравнению для $k_x^{(+)}$ вида (5.128). Раскроем скобки, умножим обе части на $2\mu_1^{(+)}/k_y$ и перенесем первое слагаемое в левую часть. Для упрощения формы записи индекс (+) пока опустим. В результате получаем:

$$\frac{2\mu_1 k_x}{k_y} - i\nu = -\sqrt{4\mu_1\mu_2 - \nu^2}. \quad (5.130)$$

Возведем обе части в квадрат, раскроем скобки, умножим обе части на k_y^2 и разделим на $4\mu_1$. В результате получим уравнение для k_x вида:

$$\mu_1 k_x^2 - i\nu k_x k_y - \mu_2 k_y^2 = 0. \quad (5.131)$$

Здесь параметры μ_1 , μ_2 , ν определяются формулами (5.122)–(5.124), содержащими $k_x^{(+)}$. Подставляя эти формулы, умножая на Ω_0^2 и приводя подобные члены, получаем уравнение:

$$\Omega_1^2 k_x^4 - i2\beta k_y^2 k_x^2 - \Omega_1^2 k_y^4 = 0. \quad (5.132)$$

Это уравнение является биквадратным относительно k_x . Решая его относительно квадрата k_x , получаем:

$$(k_x^{(+)})^2 = \frac{i\beta \pm \sqrt{\Omega_1^4 - \beta^2}}{\Omega_1^2} k_y^2. \quad (5.133)$$

Переход к классической задаче Дэймона–Эшбаха соответствует $\beta \rightarrow 0$. При этом должно выполняться соотношение:

$$k_x^{(+)} = \pm k_y, \quad (5.134)$$

следующее из формулы (2.222) в [1, стр. 60, при $k_z = 0$], с учетом того, что там $X \rightarrow e^{ik_x x}$ (формула (2.224)), а здесь $X \rightarrow e^{k_x^{(+)} x}$ (формула (5.99)), в силу чего мнимая единица в формуле (2.222) здесь переходит в действительную единицу.

Из формулы (5.134) видно, что для перехода к задаче Дэймона–Эшбаха (то есть при $\beta \rightarrow 0$) должно быть:

$$(k_x^{(+)})^2 \rightarrow k_y^2, \quad (5.135)$$

откуда видно, что перед корнем в выражении (5.133) должен быть знак плюс.

Таким образом, выражение (5.133) принимает вид:

$$(k_x^{(+)})^2 = \frac{i\beta + \sqrt{\Omega_1^4 - \beta^2}}{\Omega_1^2} k_y^2, \quad (5.136)$$

откуда находим $k_x^{(+)}$

$$k_x^{(+)} = \pm \sqrt{\frac{i\beta + \sqrt{\Omega_1^4 - \beta^2}}{\Omega_1^2}} \cdot k_y. \quad (5.137)$$

Рассмотрим теперь уравнение для $k_x^{(-)}$ вида (5.129). Подобно предыдущему случаю, раскроем скобки, умножим обе части на $2\mu_1^{(-)}/k_y$ и перенесем первое слагаемое в левую часть. Для упрощения формы записи индекс $(-)$ также опустим. В результате получаем:

$$\frac{2\mu_1 k_x}{k_y} - i\nu = -\sqrt{4\mu_1 \mu_2 - \nu^2}. \quad (5.138)$$

Возведем обе части в квадрат, раскроем скобки, умножим обе части на k_y^2 и разделим на $4\mu_1$. В результате получим уравнение для k_x вида:

$$\mu_1 k_x^2 - i\nu k_x k_y - \mu_2 k_y^2 = 0. \quad (5.139)$$

Это уравнение по форме полностью совпадает с аналогичным уравнением (5.131), полученным для $k_x^{(+)}$. При этом параметры μ_1 , μ_2 , ν определяются формулами (5.125)–(5.127), содержащими $k_x^{(-)}$. Подставляя

эти формулы, умножая на Ω_0^2 и приводя подобные члены, получаем уравнение:

$$\Omega_1^2 k_x^4 - i2\beta k_y^2 k_x^2 - \Omega_1^2 k_y^4 = 0. \quad (5.140)$$

Это уравнение по форме также полностью совпадает с уравнением (5.132), однако здесь под k_x подразумевается $k_x^{(-)}$. Решая это уравнение относительно квадрата k_x и учитывая, что при $\beta \rightarrow 0$ знак перед получающимся корнем должен быть положительным, подобно (5.137), получаем:

$$k_x^{(+)} = \pm \sqrt{\frac{i\beta + \sqrt{\Omega_1^4 - \beta^2}}{\Omega_1^2}} \cdot k_y^2. \quad (5.141)$$

Поскольку выражения (5.137) и (5.141) не отличаются ничем, кроме знака перед внешним корнем, то естественно полагать, что один из этих знаков соответствует $k_x^{(+)}$, а другой соответствует $k_x^{(-)}$. Поскольку относительно уравнений (5.132) и (5.140) оба знака эквивалентны, то это означает, что их можно распределить произвольно. Исходя из соответствия между знаками и индексами, выберем следующие знаки:

$$k_x^{(+)} = + \sqrt{\frac{i\beta + \sqrt{\Omega_1^4 - \beta^2}}{\Omega_1^2}} \cdot k_y^2; \quad (5.142)$$

$$k_x^{(-)} = - \sqrt{\frac{i\beta + \sqrt{\Omega_1^4 - \beta^2}}{\Omega_1^2}} \cdot k_y^2. \quad (5.143)$$

При этом, исходя из (5.100) и (5.101), получаем:

$$\eta_1 = 0; \quad (5.144)$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{i\beta + \sqrt{\Omega_1^4 - \beta^2}}{\Omega_1^2}} k_y. \quad (5.145)$$

Можно видеть, что при $\beta \rightarrow 0$ параметр η_1 остается равным нулю, а параметр η_2 становится равным k_y , то есть выполняется равенство $k_x = k_y$, как и в классической задаче Дэймона–Эшбаха при $k_z = 0$ [1, стр. 60, форм. (2.222)].

В выражениях (5.142) и (5.143) под корнем выделим действительную и мнимую части:

$$k_x^{(+)} = + \sqrt{\frac{\sqrt{\Omega_1^4 - \beta^2}}{\Omega_1^2} + i \frac{\beta}{\Omega_1^2}} k_y; \quad (5.146)$$

$$k_x^{(-)} = - \sqrt{\frac{\sqrt{\Omega_1^4 - \beta^2}}{\Omega_1^2} + i \frac{\beta}{\Omega_1^2}} k_y; \quad (5.147)$$

Введем обозначения:

$$a = \frac{\sqrt{\Omega_1^4 - \beta^2}}{\Omega_1^2}; \quad (5.148)$$

$$b = \frac{\beta}{\Omega_1^2}. \quad (5.149)$$

С этими обозначениями (5.146) и (5.147) принимают вид:

$$k_x^{(+)} = +\sqrt{a + ib} k_y; \quad (5.150)$$

$$k_x^{(-)} = -\sqrt{a + ib} k_y; \quad (5.151)$$

Для вычисления квадратного корня воспользуемся формулой [227, стр. 19, форм. (58.1)]:

$$\sqrt{a + ib} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right). \quad (5.152)$$

Пользуясь этой формулой и оставляя знак плюс, получаем:

$$\sqrt{a + ib} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\Omega_1^2}\right)^2}} + i \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\Omega_1^2}\right)^2}} \right\}. \quad (5.153)$$

Введем обозначения:

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\Omega_1^2}\right)^2}} \cdot k_y; \quad (5.154)$$

$$k_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\Omega_1^2}\right)^2}} \cdot k_y, \quad (5.155)$$

где Ω_1^2 определяется формулой (5.118).

С этими обозначениями (5.150)–(5.151) принимают вид:

$$k_x^{(+)} = k_d + ik_m; \quad (5.156)$$

$$k_x^{(-)} = -k_d - ik_m. \quad (5.157)$$

5.5.2. Критическая частота волны

В предыдущем разделе показано, что волновые числа $k_x^{(+)}$ и $k_x^{(-)}$ можно представить в виде суммы действительной и мнимой частей k_d и k_m , каждая из которых является действительной. При этом, согласно (5.154), (5.155), выражения для k_d и k_m содержат два корня, внутренний и внешний, подкоренные выражения для которых должны быть положительными. Из структуры выражений для k_d и k_m можно видеть, что главным требованием здесь является положительность

подкоренного выражения внутреннего корня, так как оно при $\beta \neq 0$ заведомо меньше единицы, так что подкоренное выражение внешнего корня всегда остается положительным.

Исходя из положительности подкоренного выражения внутреннего корня, найдем условия на частоту, при которых величины k_d и k_m являются действительными. С целью общности рассмотрим полный интервал изменения параметра размагничивания β от нуля до единицы, то есть на данном этапе принимать во внимание нормирующий коэффициент α_p не будем.

Итак, из требования положительности подкоренного выражения внутреннего корня в (5.154), (5.155), получаем:

$$1 - \left(\frac{\beta}{\Omega_1^2} \right)^2 \geq 0, \quad (5.158)$$

где, согласно (5.118):

$$\Omega_1^2 = \Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1). \quad (5.159)$$

Из структуры выражения (5.158) с учетом (5.159) можно видеть, что увеличение частоты Ω может привести только к усилению неравенства, то есть имеется наименьшее критическое значение частоты Ω_A , начиная с которого это неравенство выполняется, то есть k_d и k_m становятся действительными. Так, полагая левую часть выражения (5.158) равной нулю и подставляя (5.159), получаем:

$$\left(\frac{\beta}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)} \right)^2 = 1. \quad (5.160)$$

Извлечение корня из обеих частей дает два возможных варианта, отличающихся знаком. Рассмотрим эти варианты по отдельности.

Вариант № 1:

$$\frac{\beta}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)} = 1. \quad (5.161)$$

Разрешая это уравнение относительно частоты, находим:

$$\Omega_c^{(1)} = \sqrt{(\Omega_H + 1)(\Omega_H + \beta)}. \quad (5.162)$$

Вариант № 2:

$$\frac{\beta}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)} = -1. \quad (5.163)$$

Разрешая это уравнение относительно частоты, находим:

$$\Omega_c^{(2)} = \sqrt{(\Omega_H + 1)\Omega_H + (\Omega_H - 1)\beta}. \quad (5.164)$$

Обратимся к рис. 5.4, где приведены зависимости критических частот $\Omega_c^{(1)}$ (кривая 1) и $\Omega_c^{(2)}$ (кривая 2) от параметра размагничивания β .

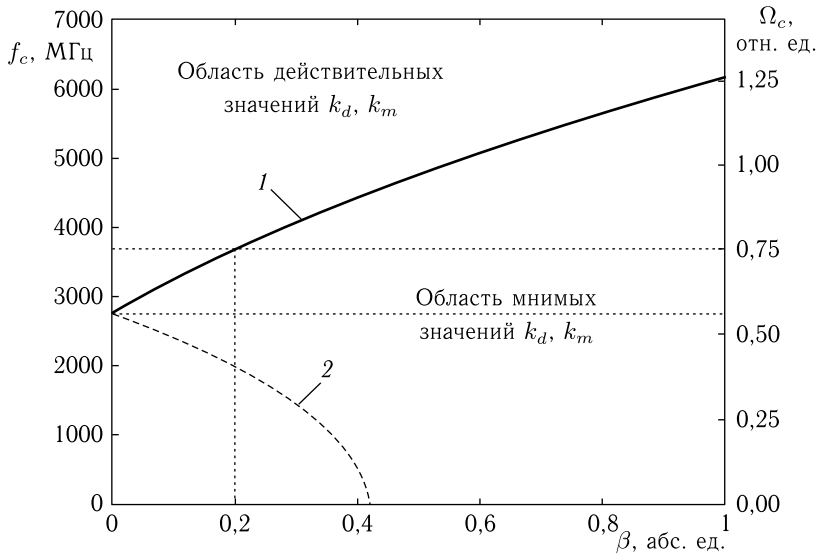


Рис. 5.4. Зависимость критической частоты волны от параметра размагничивания. Кривая 1 построена по формуле (5.162), кривая 2 — по формуле (5.164). Горизонтальные точечные линии соответствуют частотным границам существования поверхностной волны Дэймона-Эшбаха (2739 и 3675 МГц). Параметр поля: $\Omega_H = 0,25$.

В соответствии с неравенством (5.158) область действительных значений k_d и k_m лежит выше сплошной кривой 1, построенной по формуле (5.162). Кривая 2, показанная пунктиром, лежит целиком в области мнимых значений k_d и k_m , так что физического смысла не имеет (по крайней мере, в рамках решаемой в данный момент задачи). Таким образом, если задано значение параметра размагничивания β , то поверхностные магнитоэлектрические волны существуют только в области частот, лежащих выше сплошной кривой 1 на рис. 5.4.

Если параметр размагничивания равен нулю, то низшая допустимая частота f_c равна 2739 МГц или $\Omega_c = 0,559$, что соответствует нижней границе спектра ПМСВ в классической задаче Дэймона-Эшбаха [1, стр. 61, форм. (2.232)]:

$$f_c = \gamma_f \sqrt{H(H + 4\pi M_0)}, \quad (5.165)$$

или:

$$\Omega_c = \sqrt{\Omega_H(\Omega_H + 1)}, \quad (5.166)$$

где: $\gamma_f = 2,8 \text{ МГц} \cdot \text{Э}^{-1}$.

Если параметр размагничивания равен 0,2, то низшая допустимая частота f_c равна 3675 МГц или $\Omega_c = 0,750$, что соответствует верхней границе спектра ПМСВ в классической задаче Дэймона-Эшбаха

для пленки со свободной поверхностью [1, стр. 91, форм. (2.551)] (или для структуры феррит–диэлектрик–металл при бесконечно большой величине зазора между ферритом и металлом [1, стр. 120, рис. 3.1, кривая 8]):

$$f_c = \gamma_f(H + 2\pi M_0), \quad (5.167)$$

или:

$$\Omega_c = \Omega_H + 1/2. \quad (5.168)$$

Если параметр размагничивания равен единице, то низшая допустимая частота f_c равна 6125 МГц или $\Omega_c = 1,250$, что соответствует верхней границе спектра ПМСВ в классической задаче для структуры феррит–металл (или феррит–диэлектрик–металл при отсутствии зазора между ферритом и металлом) [1, стр. 120, рис. 3.1, кривая 1]:

$$f_c = \gamma_f(H + 4\pi M_0), \quad (5.169)$$

или:

$$\Omega_c = \Omega_H + 1. \quad (5.170)$$

Для удобства численных оценок, характерные значения параметра размагничивания и соответствующие критические частоты приведены в табл. 5.1.

Важным моментом является тот факт, что по мере роста параметра размагничивания низшая частота спектра ПМСВ повышается довольно

Таблица 5.1. Критические частоты для параметра β

β	Ω_c	f_c (МГц)
0	0,5590	2739
0,2	0,7500	3675
0,4	0,9014	4417
0,6	1,0308	5051
0,8	1,1456	5614
1,0	1,2500	6125

значительным образом. При этом уже при $\beta = 0,2$ низшая частота спектра ПМСВ при учете размагничивания достигает верхней частоты того же спектра без учета размагничивания, а при $\beta = 1$ эта же частота достигает верхней границы спектра ПМСВ в структуре феррит–металл без учета размагничивания. То есть во всем возможном интервале существования ПМСВ в структуре феррит–диэлектрик–металл влияние размагничивания сказывается решающим образом.

Отметим, однако, что проведенное рассмотрение выполнено без учета нормировки параметра размагничивания α_p , величина которого, как отмечено в разд. 5.3.3, в линейном режиме не должна заметно превышать величины 0,1, то есть значительная часть кривой 1 на рис. 5.4 (по крайней мере, правее вертикальной точечной кривой, соответствующей $\beta = 0,2$) лежит в области нелинейных колебаний. Здесь эта область рассмотрена для полноты картины изменения параметра β , однако прецессия намагниченности в этой области может принимать существенно нелинейный характер [42, 66], что необходимо учитывать при более подробном рассмотрении, выходящем за рамки настоящей работы.

5.6. Полная формулировка задачи о распространении поверхностной волны

Обратимся теперь к решению полной задачи о распространении поверхностной волны типа Дэймона–Эшбаха в геометрии, представленной на рис. 5.1, то есть, когда плоскость пластины параллельна координатной плоскости Oyz , постоянное поле приложено в плоскости пластины вдоль оси Oz , а волна распространяется вдоль оси Oy . Рассмотрим сначала граничные условия на поверхностях пластины — непрерывность нормальной компоненты индукции \mathbf{B} и тангенциальной компоненты поля \mathbf{H} :

$$B_x^i|_{x=\pm\frac{d}{2}} = B_x^e|_{x=\pm\frac{d}{2}}, \quad (5.171)$$

$$H_{y,z}^i|_{x=\pm\frac{d}{2}} = H_{y,z}^e|_{x=\pm\frac{d}{2}}, \quad (5.172)$$

где верхний индекс « i » относится к области пространства внутри пластины, то есть 2 на рис. 5.1, а индекс « e » к области пространства вне пластины, то есть 1 и 3 на рис. 5.1. В этих выражениях индукция \mathbf{B} определяется формулой (5.59), в которой компоненты поля \mathbf{h} и намагниченности \mathbf{m} внутри пластины определяются через потенциал ψ^i по формулам (5.61)–(5.62) и (5.54)–(5.55), а компоненты поля вне пластины — через потенциал ψ^e по тем же формулам (5.61)–(5.62).

В результате получаем:

$$B_x^i = h_x^i + 4\pi m_x = \mu_1 \frac{\partial \psi^i}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial \psi^i}{\partial y}; \quad (5.173)$$

$$B_x^e = h_x^e = \frac{\partial \psi^e}{\partial x}; \quad (5.174)$$

$$H_y^i = h_y^i = \frac{\partial \psi^i}{\partial x}; \quad (5.175)$$

$$H_y^e = h_y^e = \frac{\partial \psi^e}{\partial x}; \quad (5.176)$$

$$H_z^i = h_z^i = \frac{\partial \psi^i}{\partial z}; \quad (5.177)$$

$$H_z^e = h_z^e = \frac{\partial \psi^e}{\partial z}. \quad (5.178)$$

Граничные условия принимают вид (всего 4 граничных условия):

$$\mu_1 \frac{\partial \psi^i}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial \psi^i}{\partial y} \Big|_{x=\pm\frac{d}{2}} = \frac{\partial \psi^e}{\partial x} \Big|_{x=\pm\frac{d}{2}}; \quad (5.179)$$

$$\psi^i \Big|_{x=\pm\frac{d}{2}} = \psi^e \Big|_{x=\pm\frac{d}{2}}. \quad (5.180)$$

Замечание. Вторая пара граничных условий получена из равенства производных, то есть выполняется с точностью до произвольной

постоянной, прибавляемой к потенциалу (что является результатом интегрирования). В работе Дэймона–Эшбаха [114], а также далее в [1, 2, 42] эта постоянная полагается равной нулю, так как все поля вычисляются через производные от потенциала, а производная от постоянной величины равняется нулю.

Таким образом, получаем формулировку полной задачи в виде: Уравнения:

область 1 — вне феррита (уравнение Пуассона):

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = 0; \quad (5.181)$$

область 2 — внутри феррита (уравнение Уокера):

$$\mu_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0; \quad (5.182)$$

область 3 — вне феррита (уравнение Пуассона):

$$\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} = 0. \quad (5.183)$$

Граничные условия на нижней $\left(x = -\frac{d}{2}\right)$ и верхней $\left(x = \frac{d}{2}\right)$ поверхностях:

$$\mu_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \Big|_{x=-\frac{d}{2}} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{d}{2}}; \quad (5.184)$$

$$\mu_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \Big|_{x=\frac{d}{2}} = \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \Big|_{x=\frac{d}{2}}; \quad (5.185)$$

$$\psi_2 \Big|_{x=-\frac{d}{2}} = \psi_1 \Big|_{x=-\frac{d}{2}}; \quad (5.186)$$

$$\psi_2 \Big|_{x=\frac{d}{2}} = \psi_3 \Big|_{x=\frac{d}{2}}. \quad (5.187)$$

5.7. Решение в трех областях

Решения во внешних относительно пластины областях 1 и 3 полностью аналогичны таковым в классической задаче Дэймона–Эшбаха, поэтому не будем проводить их здесь, а возьмем готовыми, например из [1, стр. 55–61].

Рассмотрение области 2 внутри пластины сводится к решению уравнения Уокера и приведено в разд. 5.5.1, поэтому воспользуемся полученными там выражениями, отмечая их индексом «2» (по номеру области).

Таким образом, решения уравнений во всех трех областях имеют вид:

область 1:

$$X_1 = A_1 e^{\chi_1 x} + B_1 e^{-\chi_1 x}; \quad (5.188)$$

$$Y_1 = C_1 e^{i\sqrt{\chi_1^2 - \lambda_1^2} y} + D_1 e^{-i\sqrt{\chi_1^2 - \lambda_1^2} y}; \quad (5.189)$$

$$Z_1 = G_1 e^{i\lambda_1 z} + H_1 e^{-i\lambda_1 z}; \quad (5.190)$$

область 2:

$$X_2 = A_2 e^{(\eta_1 + \eta_2)x} + B_2 e^{(\eta_1 - \eta_2)x}; \quad (5.191)$$

$$Y_2 = D_2 e^{-i\xi y}; \quad (5.192)$$

$$Z_2 = G_2 e^{i\lambda_2 z} + H_2 e^{-i\lambda_2 z}; \quad (5.193)$$

область 3:

$$X_3 = A_3 e^{\chi_3 x} + B_3 e^{-\chi_3 x}; \quad (5.194)$$

$$Y_3 = C_3 e^{i\sqrt{\chi_3^2 - \lambda_3^2} y} + D_3 e^{-i\sqrt{\chi_3^2 - \lambda_3^2} y}; \quad (5.195)$$

$$Z_3 = G_3 e^{i\lambda_3 z} + H_3 e^{-i\lambda_3 z}; \quad (5.196)$$

где $A_{1,2,3}$, $B_{1,2,3}$, $C_{1,2,3}$, $D_{1,2,3}$, $G_{1,2,3}$, $H_{1,2,3}$ — произвольные постоянные, которые должны быть определены из граничных условий.

Рассмотрим сначала некоторые особенности задачи, позволяющие определить входящие в (5.188)–(5.196) постоянные коэффициенты, не прибегая к граничным условиям.

Поскольку волна распространяется в плоскости Oyz , то зависимости всех трех решений от y и z должны совпадать. Из зависимостей по z получаем:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3. \quad (5.197)$$

Введем для этого параметра единое обозначение λ_0 , так что:

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3. \quad (5.198)$$

Зависимости по y в областях 1 и 3 соответствуют двум встречным направлениям распространения волны вдоль оси Oy , тогда как в области 2 рассматривается только одно направление, поэтому положим постоянные при первых слагаемых в областях 1 и 3 равными нулю, то есть:

$$C_1 = C_3 = 0, \quad (5.199)$$

так что Y_1 и Y_3 принимают вид:

$$Y_1 = D_1 e^{-i\sqrt{\chi_1^2 - \lambda_1^2} y}; \quad (5.200)$$

$$Y_3 = D_3 e^{-i\sqrt{\chi_3^2 - \lambda_3^2} y}. \quad (5.201)$$

При этом из совпадения зависимостей по y во всех трех областях получаем:

$$\sqrt{\chi_1^2 - \lambda_0^2} = \xi = \sqrt{\chi_3^2 - \lambda_0^2}. \quad (5.202)$$

Из крайних членов этой цепочки равенств следует, что:

$$\chi_1 = \chi_3. \quad (5.203)$$

Введем здесь также единое обозначение χ_0 , так что:

$$\chi_0 = \chi_1 = \chi_3. \quad (5.204)$$

При этом два равенства (5.202) сводятся к одному:

$$\sqrt{\chi_0^2 - \lambda_0^2} = \xi. \quad (5.205)$$

Отсюда находим χ_0 :

$$\chi_0 = \sqrt{\lambda_0^2 + \xi^2}. \quad (5.206)$$

Будем считать, что решение в области 1 спадает до нуля при $x \rightarrow -\infty$, а в области 3 — при $x \rightarrow +\infty$. При этом, учитывая, что, согласно (5.206), должно быть $\chi_0 > 0$, получаем, что: $B_1 = 0$ и $A_3 = 0$. Для удобства обозначений индексы у оставшихся коэффициентов опустим, то есть положим: $A_1 = A$ и $B_3 = B$.

Из условия совпадения решений по y и z следует, что постоянные коэффициенты этих решений равны, так что введем единые обозначения D, G, H :

$$D = D_1 = D_2 = D_3; \quad (5.207)$$

$$G = G_1 = G_2 = G_3; \quad (5.208)$$

$$H = H_1 = H_2 = H_3. \quad (5.209)$$

В результате проделанных манипуляций, полное решение принимает вид:

часть решения, зависящая только от x :

$$X_1 = Ae^{\chi_0 x}; \quad (5.210)$$

$$X_2 = A_2 e^{(\eta_1 + \eta_2)x} + B_2 e^{(\eta_1 - \eta_2)x}; \quad (5.211)$$

$$X_3 = Be^{-\chi_0 x}; \quad (5.212)$$

часть решения, зависящая только от y и z , одинаковая во всех областях:

$$Y = De^{-i\xi y}; \quad (5.213)$$

$$Z = Ge^{i\lambda_0 z} + He^{-i\lambda_0 z}, \quad (5.214)$$

причем выполняется соотношение (5.206).

В этом решении 7 постоянных коэффициентов, а граничных условий, по которым их предстоит определять, имеется только 4. Поэтому 3 коэффициента можно задать произвольно. Предположим, что волны

распространяются только в положительном направлении оси Oz , так что, полагая $\lambda_0 > 0$, получаем $G = 0$. Поскольку можно задать еще два коэффициента, то положим $D = 1$ и $H = 1$. При этом часть решения, зависящая только от y и z , принимает вид:

$$Y = e^{-i\xi y}; \quad (5.215)$$

$$Z = e^{-i\lambda_0 z}. \quad (5.216)$$

Таким образом, в полном решении остаются только 4 коэффициента A , A_2 , B_2 , B , для определения которых имеются 4 граничных условия (5.184)–(5.187).

Введем теперь в решение волновые числа в явном виде с помощью обозначений:

волновое число по координате x вне пластины:

$$k_x^e = \chi_0; \quad (5.217)$$

волновое число по координате x внутри пластины (два числа, соответствующие двум решениям уравнения Уокера):

$$k_x^{(+)} = \eta_1 + \eta_2; \quad (5.218)$$

$$k_x^{(-)} = \eta_1 - \eta_2; \quad (5.219)$$

волновое число по координате y во всем пространстве:

$$k_y = \xi; \quad (5.220)$$

волновое число по координате z во всем пространстве:

$$k_z = \lambda_0. \quad (5.221)$$

Итак, полное решение принимает вид:

часть решения, зависящая только от x :

$$X_1 = Ae^{k_x^e x}; \quad (5.222)$$

$$X_2 = A_2 e^{k_x^{(+)} x} + B_2 e^{k_x^{(-)} x}; \quad (5.223)$$

$$X_3 = Be^{-k_x^e x}; \quad (5.224)$$

часть решения, зависящая только от y и z , одинаковая во всех областях:

$$Y = e^{-ik_y y}; \quad (5.225)$$

$$Z = e^{-ik_z z}, \quad (5.226)$$

причем выполняется соотношение, соответствующее (5.206):

$$(k_x^e)^2 = k_y^2 + k_z^2. \quad (5.227)$$

Таким образом, решение системы уравнений (5.181)–(5.184) для потенциалов в трех областях имеет вид:

$$\psi_1 = X_1 Y Z; \quad (5.228)$$

$$\psi_2 = X_2 Y Z; \quad (5.229)$$

$$\psi_3 = X_3 Y Z, \quad (5.230)$$

где $X_{1,2,3}$, Y и Z определяются формулами (5.222)–(5.226).

5.8. Вывод дисперсионного соотношения из решения и граничных условий

Для получения дисперсионного соотношения следует решение системы (5.181)–(5.183) подставить в граничные условия (5.184)–(5.187). Однако решение (5.222)–(5.226) получено для координатных компонент потенциала, а граничные условия (5.184)–(5.187) записаны для потенциалов в целом. Преобразуем граничные условия таким образом, чтобы они были выражены также через координатные компоненты потенциалов. Для этого подставим решение (5.228)–(5.230) в граничные условия (5.184)–(5.187) и разделим первые два уравнения на Z , а вторые два уравнения на YZ , в результате чего получим граничные условия для компонент потенциалов:

$$\mu_1 \frac{\partial X_2}{\partial x} Y + \nu_1 \frac{\partial Y}{\partial y} X_2 \Big|_{x=-\frac{d}{2}} = \frac{\partial X_1}{\partial x} Y \Big|_{x=-\frac{d}{2}}; \quad (5.231)$$

$$\mu_1 \frac{\partial X_2}{\partial x} Y + \nu_1 \frac{\partial Y}{\partial y} X_2 \Big|_{x=\frac{d}{2}} = \frac{\partial X_3}{\partial x} Y \Big|_{x=\frac{d}{2}}; \quad (5.232)$$

$$X_2 \Big|_{x=-\frac{d}{2}} = X_1 \Big|_{x=-\frac{d}{2}}; \quad (5.233)$$

$$X_2 \Big|_{x=\frac{d}{2}} = X_3 \Big|_{x=\frac{d}{2}}. \quad (5.234)$$

Из структуры этих условий можно видеть, что требуются производные $\frac{\partial X_1}{\partial x}$, $\frac{\partial X_2}{\partial x}$, $\frac{\partial X_3}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$. Запишем эти производные, исходя из (5.222)–(5.226):

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} = k_x^e A e^{k_x^e x}; \quad (5.235)$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial x} = k_x^{(+)} A_2 e^{k_x^{(+)} x} + k_x^{(-)} B_2 e^{k_x^{(-)} x}; \quad (5.236)$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial x} = -k_x^e B e^{-k_x^e x}; \quad (5.237)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = -i k_y e^{-i k_y y}. \quad (5.238)$$

Подставляя значения координаты x , соответствующие граничным условиям, а также вводя обозначения:

$$\rho^{(+)} = \frac{k_x^{(+)}d}{2}; \quad (5.239)$$

$$\rho^{(-)} = \frac{k_x^{(-)}d}{2}; \quad (5.240)$$

$$\delta = \frac{k_x^e d}{2}, \quad (5.241)$$

получаем необходимые производные в виде:

$$\left. \frac{\partial X_1}{\partial x} \right|_{x=-d/2} = k_x^e A e^{-\delta}; \quad (5.242)$$

$$\left. \frac{\partial X_2}{\partial x} \right|_{x=-d/2} = k_x^{(+)} A_2 e^{-\rho^{(+)}} + k_x^{(-)} B_2 e^{-\rho^{(-)}}; \quad (5.243)$$

$$\left. \frac{\partial X_2}{\partial x} \right|_{x=d/2} = k_x^{(+)} A_2 e^{\rho^{(+)}} + k_x^{(-)} B_2 e^{\rho^{(-)}}; \quad (5.244)$$

$$\left. \frac{\partial X_3}{\partial x} \right|_{x=d/2} = -k_x^e B e^{-\delta}; \quad (5.245)$$

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial y} X_2 \right|_{x=-d/2} = -ik_y (A_2 e^{-\rho^{(+)}} + B_2 e^{-\rho^{(-)}}) Y; \quad (5.246)$$

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial y} X_2 \right|_{x=d/2} = -ik_y (A_2 e^{\rho^{(+)}} + B_2 e^{\rho^{(-)}}) Y. \quad (5.247)$$

Запишем также необходимые значения компонент потенциалов на границах:

$$X_1|_{x=-d/2} = A e^{-\delta}; \quad (5.248)$$

$$X_2|_{x=-d/2} = A_2 e^{-\rho^{(+)}} + B_2 e^{-\rho^{(-)}}; \quad (5.249)$$

$$X_2|_{x=d/2} = A_2 e^{\rho^{(+)}} + B_2 e^{\rho^{(-)}}; \quad (5.250)$$

$$X_3|_{x=d/2} = B e^{-\delta}. \quad (5.251)$$

Подставим эти выражения в граничные условия (5.231)–(5.234) и введем вспомогательные обозначения:

$$\varepsilon^{(+)} = \mu_1 k_x^{(+)} - i\nu_1 k_y; \quad (5.252)$$

$$\varepsilon^{(-)} = \mu_1 k_x^{(-)} - i\nu_1 k_y, \quad (5.253)$$

после чего приведем подобные члены и запишем полученные уравнения в порядке следования постоянных A , A_2 , B_2 , B :

$$-A k_x^e e^{-\delta} + A_2 \varepsilon^{(+)} e^{-\rho^{(-)}} + B_2 \varepsilon^{(-)} e^{-\rho^{(-)}} = 0; \quad (5.254)$$

$$A_2 \varepsilon^{(+)} e^{\rho^{(+)}} + B_2 \varepsilon^{(-)} e^{\rho^{(-)}} + B k_x^e e^{-\delta} = 0; \quad (5.255)$$

$$-A e^{-\delta} + A_2 e^{-\rho^{(+)}} + B_2 e^{-\rho^{(-)}} = 0; \quad (5.256)$$

$$A_2 e^{\rho^{(+)}} + B_2 e^{\rho^{(-)}} - B e^{-\delta} = 0. \quad (5.257)$$

Это — система 4 уравнений с 4 неизвестными A , A_2 , B_2 , B . Условием существования ненулевого решения является равенство нулю ее определителя: $D_0 = 0$, что и дает дисперсионное соотношение. Этот определитель имеет вид:

$$D_0 = \begin{vmatrix} -k_x^e e^{-\delta} & \varepsilon^{(+)} e^{-\rho^{(-)}} & \varepsilon^{(-)} e^{-\rho^{(-)}} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{(+)} e^{\rho^{(+)}} & \varepsilon^{(-)} e^{\rho^{(+)}} & k_x^e e^{-\delta} \\ -e^{-\delta} & e^{-\rho^{(+)}} & e^{-\rho^{(-)}} & 0 \\ 0 & e^{\rho^{(+)}} & e^{\rho^{(-)}} & -e^{-\delta} \end{vmatrix}. \quad (5.258)$$

Для преобразования этого определителя выполним следующие действия. Умножим первый столбец на -1 . Вынесем из первого и четвертого столбцов $e^{-\delta}$ и сократим $D_0 = 0$ на эту величину. Умножим третью строку на $-k_x^e$ и прибавим ее к первой, умножим четвертую строку на $A = e^{dk_d} - e^{-dk_d}$ и прибавим ко второй. Вынесем из третьей строки $-k_x^e$, из четвертой k_x^e и сократим на эти величины. Разложим получившийся определитель по четвертому столбцу, а тот, что останется — по первому столбцу. В результате получим определитель:

$$D_0 = \left| \begin{array}{c|c} (\varepsilon^{(+)} - k_x^e) e^{-\rho^{(+)}} & (\varepsilon^{(-)} - k_x^e) e^{-\rho^{(-)}} \\ \hline (\varepsilon^{(+)} + k_x^e) e^{\rho^{(+)}} & (\varepsilon^{(-)} + k_x^e) e^{\rho^{(-)}} \end{array} \right|. \quad (5.259)$$

Раскрывая это определитель и приравнявая его к нулю, получаем:

$$(\varepsilon^{(+)} - k_x^e) e^{-\rho^{(+)}} (\varepsilon^{(-)} + k_x^e) e^{\rho^{(-)}} - (\varepsilon^{(-)} - k_x^e) e^{-\rho^{(-)}} (\varepsilon^{(+)} + k_x^e) e^{\rho^{(+)}} = 0. \quad (5.260)$$

Преобразуя это выражение, получаем дисперсионное соотношение в окончательном виде:

$$\frac{e^{(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})} - e^{-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})}}{e^{(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})} + e^{-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})}} = \frac{k_x^e (\varepsilon^{(-)} - \varepsilon^{(+)})}{(k_x^e)^2 - \varepsilon^{(+)} \varepsilon^{(-)}}, \quad (5.261)$$

где входящие в это выражение величины $\rho^{(\pm)}$ и $\varepsilon^{(\pm)}$ определяются формулами (5.239), (5.240), (5.252), (5.253).

Можно видеть, что по структуре полученное выражение (5.261) с точностью до обозначений совпадает с дисперсионным соотношением для классической задачи Дэймона–Эшбаха [1, стр. 65, форм. (2.279)].

Контрольная проверка показывает, что при $k_m = 0$, то есть в отсутствие учета размагничивания волны, выражение (5.261) с учетом перенормировки обозначений тождественно переходит в классическое дисперсионное соотношение Дэймона–Эшбаха.

В отличие от классической задачи Дэймона–Эшбаха дисперсионное соотношение (5.261) имеет значительно более сложную внутреннюю структуру. Поэтому обратимся к вычислению его правой и левой частей по отдельности.

5.8.1. Левая часть дисперсионного соотношения

Рассмотрим сначала левую часть дисперсионного соотношения (5.261):

$$U = \frac{e^{(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})} - e^{-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})}}{e^{(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})} + e^{-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})}}. \quad (5.262)$$

Здесь параметры $\rho^{(+)}$ и $\rho^{(-)}$ определяются формулами (5.239), (5.240), в которых $k_x^{(+)}$ и $k_x^{(-)}$ определяются формулами (5.156), (5.157), в которых действительная и мнимая части k_d и k_m определяются формулами (5.154), (5.155) с учетом (5.118). Пользуясь перечисленными формулами, находим показатели экспонент в выражении (5.262):

$$(\rho^{(+)} - \rho^{(-)}) = (k_d + ik_m)d; \quad (5.263)$$

$$-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)}) = -(k_d + ik_m)d, \quad (5.264)$$

так что экспоненты принимают вид:

$$e^{(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})} = e^{dk_d} \cos(dk_m) + ie^{dk_d} \sin(dk_m); \quad (5.265)$$

$$e^{-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})} = e^{-dk_d} \cos(dk_m) - ie^{-dk_d} \sin(dk_m). \quad (5.266)$$

Числитель дроби выражения (5.262) принимает вид:

$$\begin{aligned} e^{(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})} - e^{-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})} &= \\ &= (e^{dk_d} - e^{-dk_d}) \cos(dk_m) + i(e^{dk_d} + e^{-dk_d}) \sin(dk_m). \end{aligned} \quad (5.267)$$

Знаменатель той же дроби принимает вид:

$$\begin{aligned} e^{(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})} + e^{-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})} &= \\ &= (e^{dk_d} + e^{-dk_d}) \cos(dk_m) + i(e^{dk_d} - e^{-dk_d}) \sin(dk_m). \end{aligned} \quad (5.268)$$

Введем обозначения:

$$A = e^{dk_d} - e^{-dk_d}; \quad (5.269)$$

$$B = e^{dk_d} + e^{-dk_d}. \quad (5.270)$$

С этими обозначениями (5.267) и (5.268) записываем в виде:

$$e^{(\rho^{(+)}-\rho^{(-)})} - e^{-(\rho^{(+)}-\rho^{(-)})} = A \cos(dk_m) + iB \sin(dk_m); \quad (5.271)$$

$$e^{(\rho^{(+)}-\rho^{(-)})} + e^{-(\rho^{(+)}-\rho^{(-)})} = B \cos(dk_m) + iA \sin(dk_m). \quad (5.272)$$

Подставляя (5.271) и (5.272) в (5.262), освобождаясь от мнимости в знаменателе и приводя подобные члены, получаем левую часть дисперсионного соотношения:

$$U = \frac{AB}{A^2 \sin^2(dk_m) + B^2 \cos^2(dk_m)} - i \frac{(A^2 - B^2) \sin(dk_m) \cos(dk_m)}{A^2 \sin^2(dk_m) + B^2 \cos^2(dk_m)}, \quad (5.273)$$

где обе дроби являются действительными, A и B определяются формулами (5.269), (5.270), k_d и k_m — формулами (5.154), (5.155), а входящий в них параметр Ω_1^2 — формулой (5.118).

5.8.2. Последовательность расчета левой части

С целью удобства алгоритмизации при машинном расчете приведем последовательность шагов вычисления выражения (5.273).

Шаг № 1.

Задание начальных параметров Ω , Ω_H , β , d , k_y .

Шаг № 2.

Вычисление параметра Ω_1^2 по формуле (5.118).

Шаг № 3.

Вычисление параметров k_d и k_m по формулам (5.154), (5.155).

Шаг № 4.

Вычисление параметров A и B по формулам (5.269), (5.270).

Шаг № 5.

Вычисление действительной части параметра U по формуле (5.273).

Шаг № 6.

Вычисление мнимой части параметра U по формуле (5.273).

5.8.3. Правая часть дисперсионного соотношения

Рассмотрим теперь правую часть дисперсионного соотношения (5.261):

$$V = \frac{k_x^e (\varepsilon^{(-)} - \varepsilon^{(+)})}{(k_x^e)^2 - \varepsilon^{(+)} \varepsilon^{(-)}}. \quad (5.274)$$

Здесь параметры $\varepsilon^{(+)}$ и $\varepsilon^{(-)}$ определяются формулами (5.252), (5.253), а входящие в них выражения $\mu_1^{(+)}$, $\nu_1^{(+)}$, а также $\mu_1^{(-)}$, $\nu_1^{(-)}$ определяются формулами (5.122), (5.125), а также (5.52) с учетом индексов (+) и (-):

$$\varepsilon^{(+)} = \mu_1^{(+)} k_x^{(+)} - i \nu_1^{(+)} k_y; \quad (5.275)$$

$$\varepsilon^{(-)} = \mu_1^{(-)} k_x^{(-)} - i \nu_1^{(-)} k_y. \quad (5.276)$$

Рассмотрим сначала параметр $\varepsilon^{(+)}$, для которого, в соответствии с приведенными выше ссылками, получаем:

$$\mu_1^{(+)} = \frac{\Omega_1^2 - \beta \frac{k_y^2}{(k_x^{(+)})^2 + k_y^2}}{\Omega_0^2}; \quad (5.277)$$

$$\nu_1^{(+)} = \frac{-i\Omega + \beta \frac{k_x^{(+)} k_y}{(k_x^{(+)})^2 + k_y^2}}{\Omega_0^2}, \quad (5.278)$$

где для Ω_0^2 и Ω_1^2 использованы обозначения (5.117) и (5.118).

Учтем также, что в соответствии с (5.156):

$$k_x^{(+)} = k_d + ik_m, \quad (5.279)$$

где k_d и k_m — действительны и определяются формулами (5.154), (5.155).

Найдем промежуточное выражение:

$$(k_x^{(+)})^2 + k_y^2 = k_p^2 + i2k_d k_m, \quad (5.280)$$

где введено вспомогательное обозначение:

$$k_p^2 = k_d^2 - k_m^2 + k_y^2. \quad (5.281)$$

Соответственно получаем:

$$\frac{1}{(k_x^{(+)})^2 + k_y^2} = \frac{k_p^2 - i2k_d k_m}{k_p^4 + 4k_d^2 k_m^2}. \quad (5.282)$$

Подставляя это выражение в (5.277), разделяя действительную и мнимую части, а также вводя обозначения:

$$\mu_{1d}^{(+)} = \frac{\Omega_1^2 (k_p^4 + 4k_d^2 k_m^2) - \beta k_p^2 k_y^2}{\Omega_0^2 (k_p^4 + 4k_d^2 k_m^2)}, \quad (5.283)$$

$$\mu_{1m}^{(+)} = \frac{2\beta k_d k_m k_y^2}{\Omega_0^2 (k_p^4 + 4k_d^2 k_m^2)}, \quad (5.284)$$

приводим (5.277) к виду:

$$\mu_1^{(+)} = \mu_{1d}^{(+)} + i\mu_{1m}^{(+)}. \quad (5.285)$$

Рассмотрим теперь $\nu_1^{(+)}$ в соответствии с (5.278). С учетом (5.281), (5.282), а также (5.279) найдем промежуточное выражение:

$$\frac{k_x^{(+)} k_y}{(k_x^{(+)})^2 + k_y^2} = \frac{k_d (k_p^2 + 2k_m^2) k_y}{k_p^4 + 4k_d^2 k_m^2} + i \frac{k_m (k_p^2 - 2k_d^2) k_y}{k_p^4 + 4k_d^2 k_m^2}. \quad (5.286)$$

Введем обозначения:

$$q_d^{(+)} = \frac{k_d(k_p^2 + 2k_m^2)k_y}{k_p^4 + 4k_d^2k_m^2}; \quad (5.287)$$

$$q_m^{(+)} = \frac{k_m(k_p^2 - 2k_d^2)k_y}{k_p^4 + 4k_d^2k_m^2}. \quad (5.288)$$

С этими обозначениями (5.286) принимает вид:

$$\frac{k_x^{(+)}k_y}{(k_x^{(+)})^2 + k_y^2} = q_d^{(+)} + iq_m^{(+)}. \quad (5.289)$$

Подставим (5.289) в (5.278) и разделим действительную и мнимую части:

$$\nu_1^{(+)} = \frac{\beta q_d^{(+)}}{\Omega_0^2} - i \frac{\Omega - \beta q_m^{(+)}}{\Omega_0^2}. \quad (5.290)$$

Подставим теперь (5.286), (5.280) и (5.279) в (5.275) и приведем подобные члены:

$$\varepsilon^{(+)} = p_d^{(+)} + ip_m^{(+)}, \quad (5.291)$$

где введены обозначения:

$$p_d^{(+)} = (\mu_{1d}^{(+)}k_d - \mu_{1m}^{(+)}k_m) - \frac{(\Omega - \beta q_m^{(+)})k_y}{\Omega_0^2}; \quad (5.292)$$

$$p_m^{(+)} = (\mu_{1d}^{(+)}k_m + \mu_{1m}^{(+)}k_d) - \frac{\beta q_d^{(+)}}{\Omega_0^2}k_y. \quad (5.293)$$

Рассмотрим теперь выражение для $\varepsilon^{(-)}$, определяемое формулой (5.276):

$$\varepsilon^{(-)} = \mu_1^{(-)}k_x^{(-)} - i\nu_1^{(-)}k_y. \quad (5.294)$$

При этом, аналогично (5.277), (5.278), имеем:

$$\mu_1^{(-)} = \frac{\Omega_1^2 - \beta \frac{k_y^2}{(k_x^{(-)})^2 + k_y^2}}{\Omega_0^2}; \quad (5.295)$$

$$\nu_1^{(-)} = \frac{-i\Omega + \beta \frac{k_x^{(-)}k_y}{(k_x^{(-)})^2 + k_y^2}}{\Omega_0^2}, \quad (5.296)$$

где для Ω_0^2 и Ω_1^2 используются те же вспомогательные обозначения (5.117) и (5.118), а также, в соответствии с (5.157):

$$k_x^{(-)} = -k_d - ik_m, \quad (5.297)$$

где k_d и k_m определяются теми же выражениями (5.154) и (5.155).

Будем следовать тому же порядку вычислений, что и при получении $\varepsilon^{(+)}$.

Находим промежуточное выражение:

$$(k_x^{(-)})^2 + k_y^2 = k_p^2 + i2k_d k_m, \quad (5.298)$$

где введено вспомогательное обозначение, совпадающее с (5.281):

$$k_p^2 = k_d^2 - k_m^2 + k_y^2. \quad (5.299)$$

Соответственно, подобно (5.282), получаем:

$$\frac{1}{(k_x^{(-)})^2 + k_y^2} = \frac{k_p^2 - i2k_d k_m}{k_p^4 + 4k_d^2 k_m^2}. \quad (5.300)$$

Подставляя это выражение в (5.295), разделяя действительную и мнимую части, а также вводя обозначения:

$$\mu_{1d}^{(-)} = \frac{\Omega_1^2(k_p^4 + 4k_d^2 k_m^2) - \beta k_p^2 k_y^2}{\Omega_0^2(k_p^4 + 4k_d^2 k_m^2)}, \quad (5.301)$$

$$\mu_{1m}^{(-)} = \frac{2\beta k_d k_m k_y^2}{\Omega_0^2(k_p^4 + 4k_d^2 k_m^2)}, \quad (5.302)$$

приводим (5.295) к виду:

$$\mu_1^{(-)} = \mu_{1d}^{(-)} + i\mu_{1m}^{(-)}. \quad (5.303)$$

Можно видеть, что полученные здесь выражения $\mu_{1d}^{(-)}$ и $\mu_{1m}^{(-)}$, а также $\mu_1^{(-)}$ совпадают с полученными выше формулами (5.283), (5.284), (5.285), соответствующими выражениям $\mu_{1d}^{(+)}$, $\mu_{1m}^{(+)}$, $\mu_1^{(+)}$.

Рассмотрим теперь $\nu_1^{(-)}$ в соответствии с (5.296). С учетом (5.300), (5.281), а также (5.297) найдем промежуточное выражение:

$$\frac{k_x^{(-)} k_y}{(k_x^{(-)})^2 + k_y^2} = -\frac{k_d(k_p^2 + 2k_m^2)k_y}{k_p^4 + 4k_d^2 k_m^2} - i\frac{k_m(k_p^2 - 2k_d^2)k_y}{k_p^4 + 4k_d^2 k_m^2}. \quad (5.304)$$

Введем обозначения:

$$q_d^{(-)} = -\frac{k_d(k_p^2 + 2k_m^2)k_y}{k_p^4 + 4k_d^2 k_m^2}, \quad (5.305)$$

$$q_m^{(-)} = -\frac{k_m(k_p^2 - 2k_d^2)k_y}{k_p^4 + 4k_d^2 k_m^2}. \quad (5.306)$$

Эти обозначения отличаются от (5.287) и (5.288) знаками, так как при их выводе использовалось значение $k_x^{(-)}$ (5.297), имеющее по сравнению с $k_x^{(+)}$ (5.279) противоположный знак.

С этими обозначениями (5.304) принимает вид:

$$\frac{k_x^{(-)} k_y}{(k_x^{(-)})^2 + k_y^2} = q_d^{(-)} + iq_m^{(-)}. \quad (5.307)$$

Можно видеть, что это выражение по форме совпадает с (5.289) с заменой индекса (+) на (-).

Подставляя (5.307) в (5.296) и разделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\nu_1^{(-)} = \frac{\beta q_d^{(-)}}{\Omega_0^2} - i \frac{\Omega - \beta q_m^{(-)}}{\Omega_0^2}. \quad (5.308)$$

Подставляя теперь (5.303) и (5.308), а также (5.297) в (5.294) и приводя подобные члены, получаем:

$$\varepsilon^{(-)} = p_d^{(-)} + ip_m^{(-)}, \quad (5.309)$$

где введены обозначения:

$$p_d^{(-)} = -(\mu_{1d}^{(-)} k_d - \mu_{1m}^{(-)} k_m) - \frac{(\Omega - \beta q_m^{(-)}) k_y}{\Omega_0^2}; \quad (5.310)$$

$$p_m^{(-)} = -(\mu_{1d}^{(-)} k_m + \mu_{1m}^{(-)} k_d) - \frac{\beta q_d^{(-)} k_y}{\Omega_0^2}. \quad (5.311)$$

Можно видеть, что структура этих выражений также совпадает с (5.292) и (5.293) с точностью до изменения знака перед первым слагаемым.

Рассмотрим теперь правую часть дисперсионного соотношения в целом, имеющую вид (5.274):

$$V = \frac{k_x^e (\varepsilon^{(-)} - \varepsilon^{(+)})}{(k_x^e)^2 - \varepsilon^{(+)} \varepsilon^{(-)}}, \quad (5.312)$$

где, в соответствии с (5.291), (5.309):

$$\varepsilon^{(+)} = p_d^{(+)} + ip_m^{(+)}; \quad (5.313)$$

$$\varepsilon^{(-)} = p_d^{(-)} + ip_m^{(-)}, \quad (5.314)$$

причем из условия предельного перехода к классической задаче Дэймона-Эшбаха [1, стр. 60, форм. (2.221)], соответствующего $\beta \rightarrow 0$, подобно (5.134), (5.135), выполняется соотношение:

$$k_x^e = k_y. \quad (5.315)$$

Подставляя (5.313), (5.314) и (5.315) в (5.312), выполняя в числителе сложение и в знаменателе умножение, получаем:

$$V = \frac{k_y [(p_d^{(-)} - p_d^{(+)}) + i(p_m^{(-)} - p_m^{(+)})]}{k_y^2 - (p_d^{(+)} p_d^{(-)} - p_m^{(+)} p_m^{(-)}) - i(p_d^{(+)} p_m^{(-)} + p_d^{(-)} p_m^{(+)})}. \quad (5.316)$$

Введем обозначения:

$$u_d = k_y (p_d^{(-)} - p_d^{(+)}); \quad (5.317)$$

$$u_m = k_y (p_m^{(-)} - p_m^{(+)}); \quad (5.318)$$

$$v_d = k_y^2 - (p_d^{(+)} p_d^{(-)} - p_m^{(+)} p_m^{(-)}); \quad (5.319)$$

$$v_m = -(p_d^{(+)} p_m^{(-)} + p_d^{(-)} p_m^{(+)}). \quad (5.320)$$

Подставляя (5.317)–(5.320) в (5.316) и разделяя действительную и мнимую части, получаем правую часть дисперсионного соотношения в виде:

$$V = \frac{u_d v_d + u_m v_m}{v_d^2 + v_m^2} + i \frac{-u_d v_m + u_m v_d}{v_d^2 + v_m^2}, \quad (5.321)$$

где обе дроби являются действительными, а входящие в них параметры $u_{d,m}$ и $v_{d,m}$ определяются формулами (5.317)–(5.320).

5.8.4. Последовательность расчета правой части

С целью удобства алгоритмизации при машинном расчете приведем последовательность шагов вычисления выражения (5.321).

Шаг № 1.

Задание начальных параметров Ω , Ω_H , β , d , k_y .

Шаг № 2.

Вычисление параметров Ω_0^2 и Ω_1^2 по формулам (5.117), (5.118).

Шаг № 3.

Вычисление параметров k_d и k_m по формулам (5.154), (5.155).

Шаг № 4.

Вычисление параметра k_p^2 по формуле (5.281).

Шаг № 5.

Вычисление параметров $\mu_{1d}^{(+)}$ и $\mu_{1m}^{(+)}$ по формулам (5.283), (5.284).

Шаг № 6.

Вычисление параметров $q_d^{(+)}$, $q_m^{(+)}$ по формулам (5.287), (5.288).

Шаг № 7.

Вычисление параметров $p_d^{(+)}$, $p_m^{(+)}$ по формулам (5.292), (5.293).

Шаг № 8.

Вычисление параметров $\mu_{1d}^{(-)}$ и $\mu_{1m}^{(-)}$ по формулам (5.301), (5.302).

Шаг № 9.

Вычисление параметров $q_d^{(-)}$, $q_m^{(-)}$ по формулам (5.305), (5.306).

Шаг № 10.

Вычисление параметров $p_d^{(-)}$, $p_m^{(-)}$ по формулам (5.310), (5.311).

Шаг № 11.

Вычисление параметров u_d , u_m , v_d , v_m по формулам (5.317)–(5.320).

Шаг № 12.

Вычисление действительной части параметра V по формуле (5.321).

Шаг № 13.

Вычисление мнимой части параметра V по формуле (5.321).

5.9. Действительная и мнимая части дисперсионного соотношения

В предыдущих разделах получены левая и правая части дисперсионного соотношения (5.261), обе из которых имеют комплексный характер. Теперь перейдем к рассмотрению дисперсионного соотношения в целом.

Переносим обе части соотношения (5.261) в левую сторону и приравнивая получающуюся сумму к нулю, выделим отдельно действительную и мнимую части полного соотношения. Левая часть дисперсионного соотношения (5.261), обозначенная через U , определяется формулой (5.262) или в развернутом виде (5.273). Правая часть дисперсионного соотношения (5.262), обозначенная через V , определяется формулой (5.274) или в развернутом виде (5.321). Таким образом, действительная и мнимая части выражения U имеют вид:

$$\operatorname{Re}(U) = \frac{AB}{A^2 \sin^2(dk_m) + B^2 \cos^2(dk_m)}; \quad (5.322)$$

$$\operatorname{Im}(U) = -\frac{(A^2 - B^2) \sin(dk_m) \cos(dk_m)}{A^2 \sin^2(dk_m) + B^2 \cos^2(dk_m)}. \quad (5.323)$$

Действительная и мнимая части выражения V имеют вид:

$$\operatorname{Re}(V) = \frac{u_d v_d + u_m v_m}{v_d^2 + v_m^2}; \quad (5.324)$$

$$\operatorname{Im}(V) = \frac{-u_d v_m + u_m v_d}{v_d^2 + v_m^2}. \quad (5.325)$$

После перенесения обеих частей на левую сторону, действительная часть дисперсионного соотношения приобретает вид:

$$W_d = \operatorname{Re}(U) - \operatorname{Re}(V), \quad (5.326)$$

или:

$$W_d = \frac{AB}{A^2 \sin^2(dk_m) + B^2 \cos^2(dk_m)} - \frac{u_d v_d + u_m v_m}{v_d^2 + v_m^2}; \quad (5.327)$$

Соответственно мнимая часть дисперсионного соотношения принимает вид:

$$W_m = \operatorname{Im}(U) - \operatorname{Im}(V), \quad (5.328)$$

или:

$$W_m = -\frac{(A^2 - B^2) \sin(dk_m) \cos(dk_m)}{A^2 \sin^2(dk_m) + B^2 \cos^2(dk_m)} - \frac{-u_d v_m + u_m v_d}{v_d^2 + v_m^2}. \quad (5.329)$$

Полное дисперсионное соотношение имеет вид:

$$W_d + iW_m = 0. \quad (5.330)$$

Равенство нулю такого комплексного выражения означает, что его действительная и мнимая части по отдельности тоже равны нулю, то есть:

$$W_d = 0; \quad (5.331)$$

$$W_m = 0, \quad (5.332)$$

или в развернутом виде:

$$\frac{AB}{A^2 \sin^2(dk_m) + B^2 \cos^2(dk_m)} - \frac{u_d v_d + u_m v_m}{v_d^2 + v_m^2} = 0; \quad (5.333)$$

$$\frac{(A^2 - B^2) \sin(dk_m) \cos(dk_m)}{A^2 \sin^2(dk_m) + B^2 \cos^2(dk_m)} + \frac{-u_d v_m + u_m v_d}{v_d^2 + v_m^2} = 0. \quad (5.334)$$

Эти выражения дают два уравнения, каждое из которых по отдельности позволяет найти зависимость частоты Ω от волнового числа k_y .

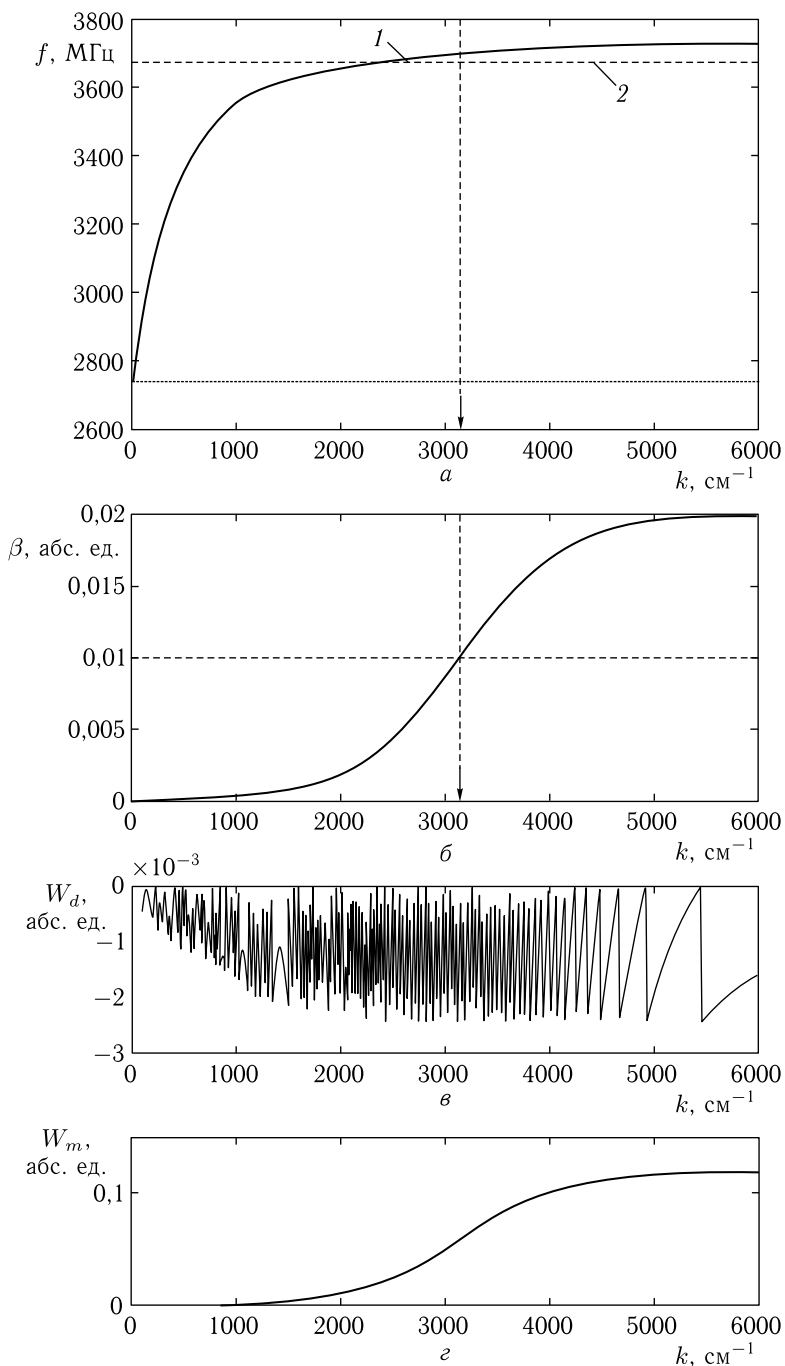
Замечание. Контрольная проверка, выполненная численным методом, показывает, что выражение (5.330) при $\beta \rightarrow 0$ переходит в классический закон дисперсии, соответствующий поверхностной волне Дэймона-Эшбаха [1, стр. 65, форм. (2.279)]. Естественно полагать, что при $\beta \rightarrow 0$ выражение (5.334) должно обращаться в нуль. Однако обращение в нуль этого выражения имеет место только при значениях волнового числа меньших необходимого для учета размагничивания (меньших соответствующего перегибу гиперболического тангенса в выражении для β (5.20) или (5.21)). Если волновое число превышает эту величину, то выражение (5.334) приобретает хотя и малое, но все же отличное от нуля значение. Этот вопрос обсуждается в следующем разделе (рис. 5.5, *г*).

Схема алгоритмизации при машинном расчете составляющих частей уравнений (5.333) и (5.334) приведена выше в разделах 5.8.2 и 5.8.4. Решение этих уравнений в настоящей работе проводилось с использованием метода поиска нуля. Некоторые результаты расчетов приведены в следующих разделах.

5.10. Дисперсия поверхностной волны с учетом размагничивания

В соответствии со структурой полученного выше дисперсионного соотношения, точнее — его действительной части (5.327), можно видеть, что дисперсионные свойства поверхностной волны существенным образом зависят от ее поля размагничивания. Рассмотрим некоторые общие особенности такой зависимости, для чего обратимся к рис. 5.5.

На рис. 5.5, *а* утолщенной сплошной линией показана дисперсионная кривая, полученная с учетом размагничивания (кривая 1). Для сравнения утолщенным пунктиром показана дисперсионная кривая,



полученная в соответствии с классической задачей Дэймона–Эшбаха без учета размагничивания (кривая 2).

На рис. 5.5, б показана зависимость нормированной величины параметра размагничивания β от того же волнового числа. В соответствии с формулой (5.21) этот параметр имеет вид гиперболического тангенса. Точка перегиба соответствует критическому значению волнового числа, равному 3142 см^{-1} в соответствии с формулой $k_c = \pi/d$, где $d = 10 \text{ мкм}$.

Из рис. 5.5, а видно, что учет размагничивания приводит к повышению частоты дисперсионной кривой, причем такое повышение становится заметным только начиная с волнового числа порядка 3000 см^{-1} , где параметр размагничивания β (рис. 5.5, б) претерпевает перегиб и далее стремится к постоянному значению 0,02, соответствующему стремлению параметра β_0 к единице.

Дополнительные особенности решения, иллюстрируются рис. 5.5, в и рис. 5.5, г.

На рис. 5.5, в приведена зависимость действительной части дисперсионного соотношения W_d от волнового числа. Поскольку построение дисперсионной кривой на рис. 5.5, а произведено методом поиска нуля действительной части с шагом по частоте при задании волнового числа, то и кривая на рис. 5.5, в, несмотря на ее изрезанный характер, обусловленный дискретным шагом машинного алгоритма, проходит вблизи нуля, отклоняясь не более чем на $2 \cdot 10^{-3}$ абсолютной величины, что задается параметром точности поиска, заданным в расчетной программе (в расчете брался шаг по частоте в 1 МГц). При увеличении точности поиска нуля, то есть при уменьшении шага по частоте, размах кривой на рис. 5.5, в уменьшается прямо пропорционально величине шага.

На рис. 5.5, г приведена полученная в том же цикле расчета зависимость мнимой части дисперсионного соотношения W_m от того же волнового числа. Можно видеть, что по мере увеличения параметра размагничивания мнимая часть дисперсионного соотношения также растет подобным образом в пропорции примерно в 0,1 от β_0 . Важно отметить, что эта зависимость от величины шага по частоте не зависит

←
 Рис. 5.5. Дисперсия поверхностной волны с учетом размагничивания. а — дисперсионная кривая без размагничивания (1) и с его учетом (2); горизонтальные точечные линии соответствуют нижней и верхней границам спектра ПМСВ в классической задаче Дэймона–Эшбаха (2739 и 3675 МГц); вертикальная точечная линия (отмеченная стрелкой на горизонтальной оси) соответствует такой же линии на следующем рисунке (б); б — зависимость нормированного параметра размагничивания от волнового числа; горизонтальная точечная линия соответствует уровню перегиба зависимости параметра размагничивания от волнового числа, вертикальная точечная линия (отмеченная стрелкой на горизонтальной оси) отвечает волновому числу, соответствующему точке перегиба; в — зависимость действительной части дисперсионного соотношения от волнового числа; г — зависимость мнимой части дисперсионного соотношения от волнового числа. Параметры: $H_0 = 437,5 \text{ Э}$; $4\pi M_0 = 1750 \text{ Гс}$; $d = 10 \text{ мкм}$; $\alpha_p = 0,02$

(начиная со значения, достаточного для получения приемлемой плавности кривой, то есть, в рассматриваемом случае с шага в 1 МГц). Абсолютная величина мнимой части примерно на два порядка больше отклонения действительной части от нуля (рис. 5.5, в), так что составляет реальную физическую величину. Вопрос о ее конкретном физическом смысле требует более подробного рассмотрения, выходящего за рамки настоящей работы.

5.10.1. Степень деформации дисперсионной кривой

Главной особенностью рассматриваемой дисперсионной кривой является ее сдвиг вверх по частоте при достаточно большой величине поля размагничивания. На рис. 5.6 сплошной линией (кривая 1) показана зависимость частоты дисперсионной кривой от нормирующего коэффициента параметра размагничивания при фиксированном значении волнового числа, равном 6000 см^{-1} . Для сравнения пунктиром показана частота, соответствующая отсутствию размагничивания (то есть от коэффициента параметра размагничивания не зависящая).

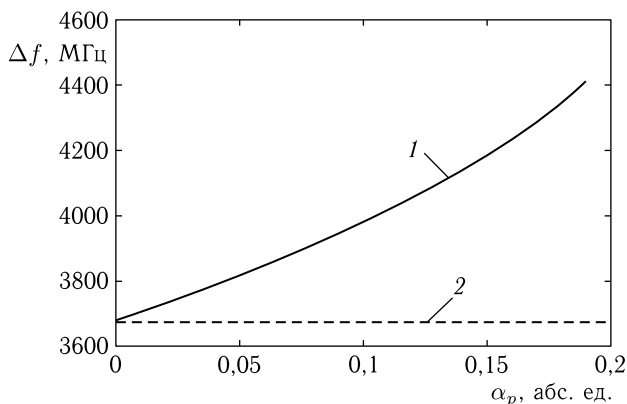


Рис. 5.6. Зависимость частоты дисперсионной кривой от нормирующего коэффициента параметра размагничивания при волновом числе 6000 см^{-1} . Параметры — те же, что приняты при построении рис. 5.5. 1 — величина сдвига дисперсионной кривой; 2 — частота, соответствующая отсутствию размагничивания (3675 МГц)

Из рисунка видно, что по мере увеличения поля размагничивания (то есть параметра α_p) частота дисперсионной кривой растет сначала по закону, близкому к линейному, после чего рост ее ускоряется. Обрыв кривой при $\alpha_p > 0,19$ происходит из-за превышения критического значения параметра размагничивания в выражениях для параметров k_d и k_m , определяемых формулами (5.154), (5.155), в результате чего знак подкоренного выражения внутреннего корня в этих формулах становится отрицательным.

Замечание. Положение в какой-то степени исправляется при повышении начального значения частоты, с которого начинается поиск нуля, так что кривая 1 на рис. 5.6 может быть несколько продолжена. Заметим, однако, что при таком продолжении колебания намагниченности становятся уже нелинейными (угол раскрыва конуса прецессии значительно превышает 5 градусов), так что возможность такого продолжения требует более подробного отдельного рассмотрения, выходящего за рамки настоящей работы.

Качественной физической причиной увеличения частоты волны, по-видимому, является увеличение жесткости системы за счет проявления поля размагничивания. Действительно, при достаточной величине параметра размагничивания вектор намагниченности кроме внешнего поля подвержен еще воздействию поля размагничивания, которое в общем случае препятствует его отклонению от равновесного положения. То есть на этот вектор, кроме постоянного поля, стремящегося установить его в равновесное положение, действует дополнительная сила, также препятствующая отклонению вектора от положения равновесия, так что в результате действия этой дополнительной силы установление вектора намагниченности в равновесном положении становится более жестким, что и приводит к повышению частоты его прецессии, то есть к повышению частоты распространяющейся волны.

5.11. Дисперсионная кривая при изменении параметра размагничивания

Рассмотрим характер деформации дисперсионной кривой при изменении параметра размагничивания более подробно.

На рис. 5.7 представлены зависимости параметра размагничивания (*a*) и дисперсионных кривых (*б*) от волнового числа при различных значениях нормирующего коэффициента параметра размагничивания α_p .

В обеих частях рисунка кривые 1 соответствуют отсутствию размагничивания, то есть $\beta = 0$. На рис. 5.7, *a* эта кривая совпадает с горизонтальной осью рисунка, а на рис. 5.7, *б* является собою классическую дисперсионную кривую Дэймона–Эшбаха. Кривые 2–5 на рис. 5.7, *a* представляют зависимость параметра размагничивания β от волнового числа при постепенном увеличении нормирующего коэффициента. Можно видеть, что во всех случаях эти кривые имеют вид гиперболического тангенса, размах по вертикали которого равен нормирующему коэффициенту. Заметное отклонение от горизонтальной оси, соответствующее величине β порядка 0,01 (то есть 1%), имеет место при волновом числе порядка 2000 см^{-1} . Кривые 2–5 на рис. 5.7, *б* характеризуют закон дисперсии при различных значениях параметра размагничивания.

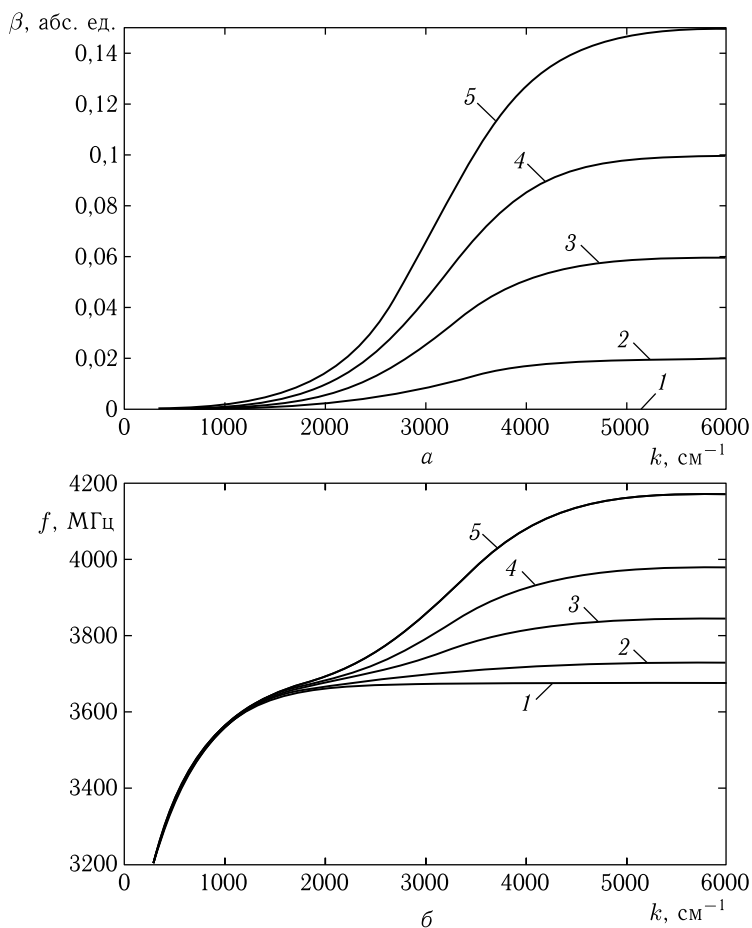


Рис. 5.7. Зависимости параметра размагничивания (*a*) и дисперсионных кривых (*б*) от волнового числа при различных значениях нормирующего коэффициента параметра размагничивания α_p : 1 — 0,00; 2 — 0,02; 3 — 0,06; 4 — 0,10; 5 — 0,15. Параметры: $H_0 = 437,5$ Э; $4\pi M_0 = 1750$ Гс; $d = 10$ мкм

Можно видеть, что деформация дисперсионных кривых 2–5 в сравнении с классической кривой 1 наблюдается только при превышении волновым числом значения порядка 2000 см^{-1} , то есть как раз в тот момент, когда параметр размагничивания β становится достаточно заметным (как это наглядно видно из сравнения с рис. 5.7, *a*). Кривая 2 еще остается довольно близкой к классической кривой Дэймона–Эшбаха 1, отличаясь лишь некоторым повышением частоты при волновом числе больше 2000 см^{-1} . Остальные же кривые 3–5 в этой области, после некоторого замедления своего роста, испытывают вторичный

подъем, тем больший, чем больше значение нормирующего коэффициента параметра размагничивания. Этот подъем как раз соответствует росту параметра размагничивания β на рис. 5.7, а. Вторичный подъем для всех кривых при увеличении волнового числа выше 5000 см^{-1} заканчивается выходом на горизонтальный участок, тем более высоким, чем больше значение нормирующего коэффициента α_p . Такой выход как раз соответствует насыщению зависимостей параметра размагничивания β от волнового числа, наблюдаемому на рис. 5.7, а.

То есть все кривые имеют как бы «двухступенчатый» характер, повторяющий рост параметра размагничивания по мере увеличения волнового числа.

5.12. Структура распределения намагниченности внутри пластины

В классической поверхностной волне Дэймона–Эшбаха переменная намагниченность спадает по толщине пластины (то есть по оси Ox внутрь от поверхности) по экспоненциальному закону. При этом показатель экспоненты является чисто действительным. В рассматриваемой здесь задаче распределение x -компоненты намагниченности также определяется экспонентой, но теперь имеющий комплексный характер. При этом x -компонента решения уравнения Уокера (5.223) имеет вид:

$$X = Ae^{k_x^{(+)}x} + Be^{k_x^{(-)}x}. \quad (5.335)$$

где, согласно (5.156), (5.157):

$$k_x^{(+)} = k_d + ik_m; \quad (5.336)$$

$$k_x^{(-)} = -k_d - ik_m, \quad (5.337)$$

где k_d и k_m — действительны и определяются формулами (5.154), (5.155).

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\Omega_1^2}\right)^2}} \cdot k_y; \quad (5.338)$$

$$k_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\Omega_1^2}\right)^2}} \cdot k_y, \quad (5.339)$$

где используются обозначения (5.117) и (5.118):

$$\Omega_0^2 = \Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta). \quad (5.340)$$

$$\Omega_1^2 = \Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1). \quad (5.341)$$

Рассмотрим теперь распределение динамической намагниченности по толщине пластины более подробно. Для удобства терминологии

будем называть волновое число по оси Oy , то есть вдоль направления распространения волны, «продольным» волновым числом, а волновое число по оси Ox , то есть перпендикулярно направлению распространения волны — «поперечным» волновым числом.

Обратимся к рис. 5.8, где показаны зависимости действительной (a) и мнимой (b) частей поперечного волнового числа от значения продольного волнового числа (индекс « y » в обозначении последнего для простоты рисунка опущен). Там же в качестве опорного параметра приведены зависимости параметра размагничивания (ϑ), от того же продольного волнового числа.

Из рис. 5.8 a видно, что действительная часть поперечного волнового числа k_d зависит от продольного волнового числа полностью линейно с угловым коэффициентом порядка единицы, причем наклон соответствующей прямой линии от величины параметра размагничивания практически не зависит. Такая линейная зависимость легко просматривается из структуры формулы (5.338), где в пределах принятого интервала изменения параметра β (от нуля до 0,02) второе слагаемое внутреннего подкоренного выражения значительно меньше первого, так что весь внешний корень стремится к величине $\sqrt{2}$, что делает в результате коэффициент при k_y близким к единице.

Таким образом, в пределах принятого интервала размагничивания (то есть в пределах линейности задачи в целом), действительная часть поперечного волнового числа близка к таковой в классической задаче Дэймона–Эшбах и равняется продольной части волнового числа.

Не так, однако, обстоит дело с мнимой частью того же волнового числа. Обратимся к рис. 5.8, b , где приведены зависимости мнимой части поперечного волнового числа k_m от того же продольного волнового числа при различных значениях параметра размагничивания. Здесь кривая 1 соответствует отсутствию размагничивания, так что совпадает с горизонтальной осью рисунка, на которой $k_m = 0$. Остальные кривые 2–5, соответствующие отличным от нуля значениям параметра β , испытывают подъем вверх, сначала медленный до значения продольного волнового числа порядка 2000 см^{-1} , затем более быстрый до продольного волнового числа порядка 5000 см^{-1} , после чего замедляется и стремящийся далее к линейному. Подъем кривых происходит тем сильнее, чем величина параметра размагничивания больше. Из сравнения с приведенным ниже рис. 5.8, ϑ можно видеть, что наиболее быстрый подъем кривых k_m происходит в интервале наибольшей крутизны зависимости параметра размагничивания от продольного волнового числа, то есть между 2000 см^{-1} и 5000 см^{-1} . Далее, то есть после 5000 см^{-1} зависимости k_m стремятся к проходящим через начало координат прямым линиям с угловыми коэффициентами тем большими, чем параметр размагничивания больше. Такая прямая линия для кривой 5, соответствующей $\beta = 0,15$, показана пунктиром и обозначена 5'. Угловым коэффициентом этой прямой равен 0,202. Угловые коэффициенты для кривых 4, 3 и 2 равны соответственно 0,158, 0,105, 0,037.

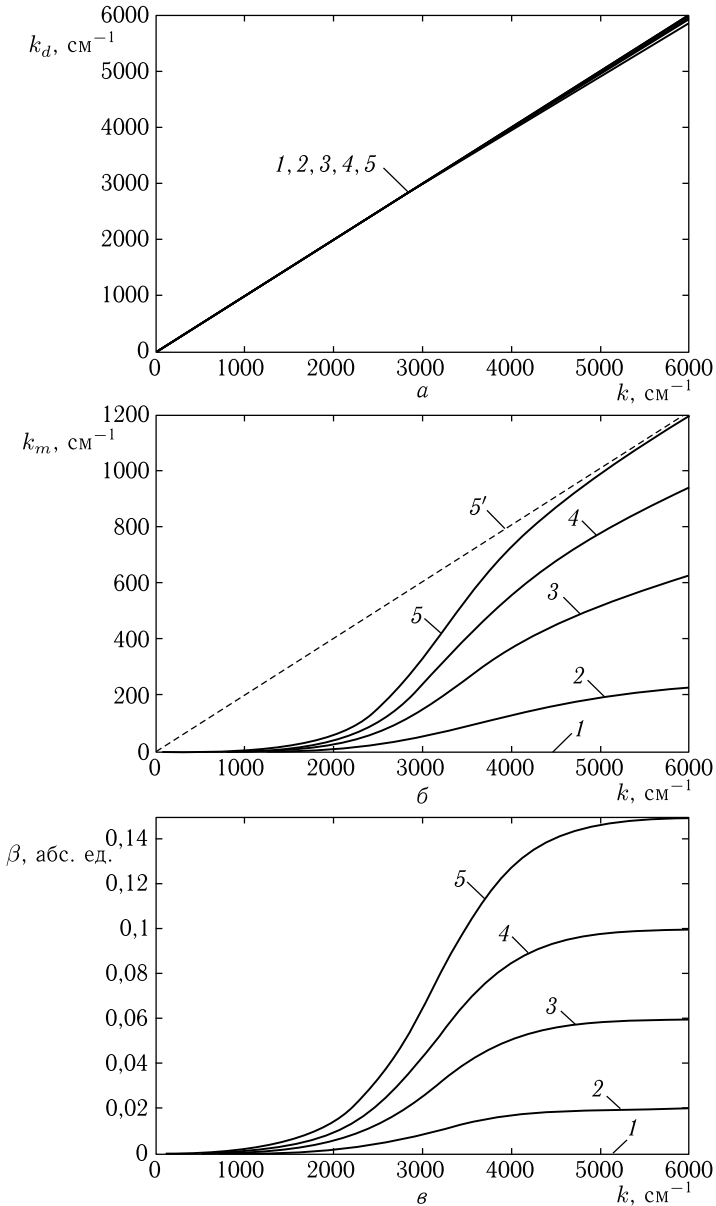


Рис. 5.8. Зависимости действительной (а) и мнимой (б) частей поперечного волнового числа, а также параметра размагничивания (в), от значения продольного волнового числа при различных значениях нормирующего коэффициента параметра размагничивания α_p : 1 — 0,00; 2 — 0,02; 3 — 0,06; 4 — 0,10; 5 — 0,15. Параметры — те же, что приняты при построении рис. 5.7

Отмеченный ход зависимостей мнимой части поперечного волнового числа хорошо просматривается из структуры формулы (5.339). Так, в принятом интервале изменения β второе слагаемое под внутренним корнем получается значительно меньше первого, в результате чего внутренний корень становится близким к единице. При этом выражение под внешним корнем становится заметно меньшим единицы, что и обеспечивает для k_m сравнительно небольшой в сравнении с единицей коэффициент при волновом числе k_y , то есть меньший единицы угловой коэффициент аппроксимирующей прямой.

5.13. Динамический потенциал внутри пластины

В предыдущем разделе выявлено существование довольно значительной мнимой составляющей поперечного волнового числа. Рассмотрим теперь, как эта составляющая проявляется в распределении динамической намагниченности внутри пластины. Согласно общему виду решения для X -сомножителя потенциала (5.335), показатели экспонент должны содержать действительную и мнимую составляющую. При этом действительная часть обеспечивает плавный спад амплитуды потенциала внутрь пластины, а мнимая составляющая – периодическое изменение потенциала по синусоидальному закону с постоянной амплитудой. Произведение двух таких сомножителей дает синусоиду, амплитуда которой по направлению внутрь пластины плавно спадает. Раскрывая в (5.335) экспоненту с мнимым показателем по формуле Эйлера, оставляя только действительную часть и полагая A и B равными единице, получаем:

$$X = e^{k_d x} \cos(k_m x) + e^{-k_d x} \cos(k_m x). \quad (5.342)$$

Возможный пример такого распределения показан на рис. 5.9. С целью наглядности, параметры построения выбраны несколько отличными от рассматривавшихся выше. Так, толщина пластины взята равной 20 мкм, действительная составляющая поперечного волнового числа принята равной $10\,000\text{ см}^{-1}$, а мнимая — равной 5000 см^{-1} . Величина мнимой составляющей по сравнению со значением, соответствующим линейному режиму (рис. 5.8, б), несколько завышена (в два-три раза) для лучшего выявления синусоидального вклада в поперечное волновое число, обусловленного его мнимой частью.

На рисунке кривая 1 соответствует распределению потенциала без учета размагничивания, то есть в соответствии с классической задачей Дэймона–Эшбаха. Эта кривая построена по формуле (5.342), где положено $k_m = 0$. Кривая 2 построена по полной формуле (5.342) при $k_m = 5000\text{ см}^{-1}$. Можно видеть, что синусоидальная составляющая вызывает провалы значений поперечного волнового числа вблизи каждой из поверхностей пластины. При заданных здесь параметрах по толщине пластины укладывается чуть менее трех периодов синусоиды,

в результате чего провалы имеют аperiodический характер. Если бы по толщине пластины укладывалось большее число периодов, можно было бы наблюдать полную синусоиду со спадающей амплитудой. Заметим, однако, что число периодов не может быть большим двух-трех, так как действительная k_d и мнимая k_m части поперечного волнового числа связаны соотношениями (5.338) и (5.339), так что при любых допустимых значениях параметра размагничивания β составляющая k_m всегда меньше k_d , то есть по координате x амплитуда успевает упасть почти до нуля раньше, чем синусоида совершит несколько полных колебаний.

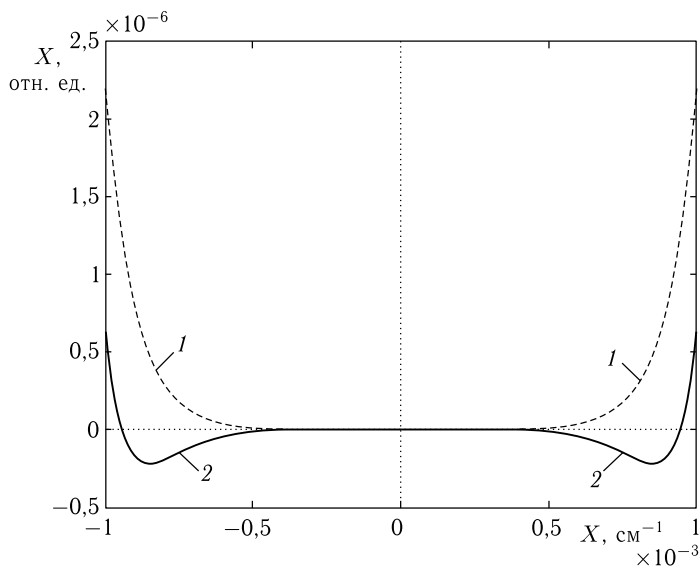


Рис. 5.9. Распределение потенциала динамической намагниченности внутри пластины вдоль оси Ox . 1 — без учета размагничивания; 2 — с учетом размагничивания. Параметры: толщина пластины — 20 мкм, составляющие поперечного волнового числа: $k_d = 10\,000\text{ см}^{-1}$, $k_m = 5\,000\text{ см}^{-1}$. Остальные параметры — те же, что приняты при построении рис. 5.7

Следует особо отметить, что приведенные на рис. 5.9 кривые имеют вид, полностью симметричный относительно вертикальной оси (то есть $x = 0$) или середины пластины. Однако классическая волна Дэймона–Эшбаха является невзаимной в том смысле, что при распространении в положительном или отрицательном направлении оси Oy динамическая намагниченность локализуется вдоль одной поверхности пластины, тогда как вдоль другой ее поверхности амплитуда волны резко падает. Это можно видеть, например, из рассмотрения решения задачи для потенциалов, приведенного в [1, стр. 68–70]. Характеристикой такой невзаимности является параметр g , определяемый приведенными там же формулами (2.324) или (2.342). При этом

решение, локализуемое вблизи одной из поверхностей, имеет вид просто спадающей экспоненты, а вблизи другой еще умножается на этот параметр и экспоненту с отрицательным показателем, пропорциональным толщине пластины (формулы (2.332), (2.345)). В рассматриваемой здесь задаче также может быть введен соответствующий параметр g и такая же экспонента, отражающие невзаимность распространяющейся волны. Однако вопрос о невзаимности выходит за рамки настоящей работы, так что выполнение подобного математического упражнения предоставляем любознательному читателю.

Замечание. Все сказанное выше относится к задаче с параллельно-перпендикулярной геометрией в изотропной среде. Можно полагать, что в случаях другой геометрии, другой ориентации поля или направления распространения волны, другой волноведущей структуры соотношение между действительной и мнимой частями поперечного волнового числа будет другим и по толщине пластины уложится большее количество периодов синусоиды, то есть синусоидальный спад потенциала выявится в большей степени. То же может иметь место в среде с анизотропией и магнитоупругим взаимодействием. Можно полагать, что более подробное рассмотрение этого вопроса могло бы составить интерес для отдельных исследований.

5.14. Степень влияния поля размагничивания на дисперсию волн при различной толщине пластины

В предыдущих разделах на примере пленок толщиной 10 мкм было выявлено существенное влияние поля размагничивания волны на характер дисперсии поверхностной волны Дэймона–Эшбаха. При этом было отмечено, что поле размагничивания волны в пластинах различной толщины проявляется по-разному. Представляет интерес выяснить, насколько влияние поля размагничивания важно в реализуемых на сегодняшний день экспериментах, в том числе проводимых на образцах нанометровых размеров. С этой целью обратимся к рис. 5.10, где на двумерной карте показано распределение областей реализуемых в эксперименте волновых чисел при различной толщине образцов.

Рисунок построен в двойном логарифмическом масштабе. Наклонная прямая линии соответствует точке перегиба гиперболического тангенса (5.20), в которой выполняется условие $k_c = \pi/d$. Ниже этой линии поле размагничивания волны мало и в расчетах дисперсии волн его можно не учитывать (как это и было сделано в пионерской работе Дэймона–Эшбаха [114]). Выше этой линии поле размагничивания волны достаточно велико и заметно сказывается на дисперсионных свойствах волн. Штриховкой и буквами обозначены области типичных соотношений между толщиной пластины и волновым числом волны, реализуемых в большинстве экспериментов.

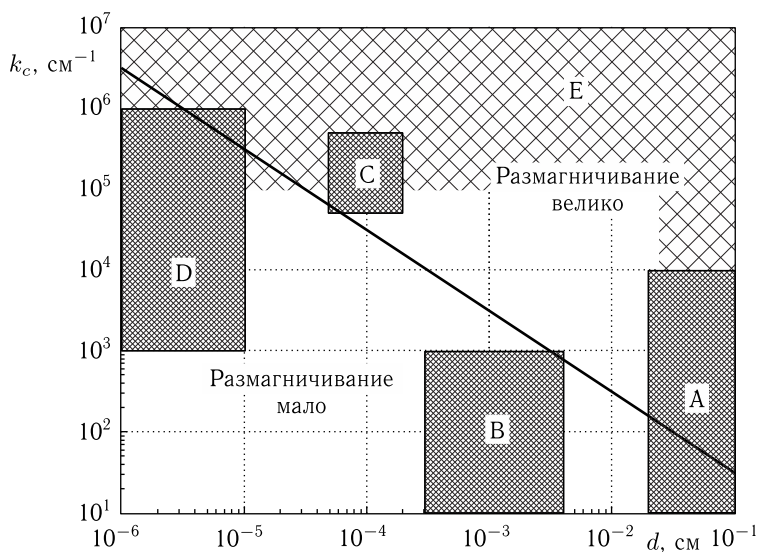


Рис. 5.10. Распределение областей реализуемых в эксперименте волновых чисел при различной толщине образцов

Буквенные обозначения областей следующие.

А — дипольные магнитостатические волны в пластинах и стержнях железоиттриевого граната толщиной в единицы и доли миллиметра [42, 109–111, 114, 117, 145–148, 150, 257]. Возбуждение осуществляется проволочной антенной диаметром порядка долей миллиметра. При этом возбуждаются сравнительно длинные волны (в сотни и тысячи мкм) с волновым числом порядка 10^2 см^{-1} . Далее такие волны распространяются в условиях плавно возрастающего (или убывающего) внутреннего поля образца, за счет чего длина волны уменьшается и волновое число может достигать величины порядка 10^4 см^{-1} .

В — дипольные магнитостатические волны в пленках железоиттриевого граната толщиной от 2 до 40 мкм [1–4, 42, 66]. Возбуждение, как правило, осуществляется проволочными антеннами, диаметр проводника которых составляет более 10 мкм. Столь малая толщина проводника используется для того, чтобы возбудить как можно более короткие волны. При этом наименьшая достижимая длина волны составляет порядка 100 мкм, что соответствует волновым числам не более 10^3 см^{-1} . Благодаря малой толщине пленок внутреннее поле в них довольно однородно, так что рост волнового числа за счет неоднородности поля не реализуется.

С — обменные магнитостатические волны в металлических пленках толщиной от 0,5 до 2 мкм [42]. Возбуждение осуществляется однородным СВЧ-полем (как правило, в резонаторе), причем возбуждаются стоячие волны по толщине пленки. Обычно по толщине пленки

укладывается от одной до нескольких десятков полувольт, что соответствует длинам волн в единицы и доли мкм, а волновым числам — от 10^4 до 10^6 см $^{-1}$.

D — дипольные магнитостатические волны в особо тонких металлических, ферритовых, галфеноловых и других пленках толщиной в десятки и сотни нанометров (десятые и сотые доли мкм) [178–187, 199]. Возбуждение осуществляется ударным образом за счет воздействия мощного импульса света от фемтосекундного лазера. Требуемый для возбуждения магнитостатической волны перепад намагниченности происходит за счет магнитоупругого взаимодействия при термическом расширении пленки под действием мощного импульса света или непосредственно за счет света через обратный эффект Фарадея. Реализуемые на сегодня длины волн составляют сотни и десятки нанометров, причем стремятся к единицам нанометров, что соответствует волновым числам от 10^3 до 10^6 см $^{-1}$.

E — обменные магнитостатические волны в ферритовых пленках и объемных образцах, возбуждаемые параметрическим путем на частоте, равной половине (или целой величине) частоты накачки [42, 66]. Эти волны возбуждаются однородным СВЧ-полем, необходимым условием их возбуждения является лишь достаточная величина амплитуды прецессии намагниченности, при которой раскрытие конуса прецессии составляет единицы градусов. Эти волны имеют длину, как правило, менее сотен и десятков нанометров, их волновое число составляет от 10^4 до 10^7 см $^{-1}$.

Из расположения областей реализуемых в эксперименте волн можно видеть, что учет размагничивания поля волны необходим в случае волн в толстых образцах (область A), и весьма полезен в случае тонких металлических пленок (область C). В случае тонких пленок железитриевого граната (область B) такой учет полезен при достаточно коротких волнах. В случае особо тонких металлических и ферритовых пленок (область D) на уровне сегодняшней экспериментальной техники размагничивание волны можно не принимать во внимание, однако учитывая, что техника стремится к освоению как можно более коротких волн, в недалеком будущем можно ожидать уверенного достижения волновых чисел порядка 10^6 см $^{-1}$ и более, когда роль размагничивания станет достаточно важной.

Что же касается обменных волн, возбуждаемых параметрическим путем (область E), то здесь учет поля размагничивания становится принципиально необходимым. Следует заметить, что, хотя на сегодня такие волны возбуждаются лишь через посредство параметрики, что не позволяет использовать их для обработки информации из-за стохастичности процесса возбуждения, можно ожидать, что в недалеком будущем работы по особо тонким пленкам (область D), ориентированным на когерентное возбуждение, продвинуется в область волновых чисел более 10^6 см $^{-1}$, когда учет поля размагничивания волны приобретает достаточно большое значение.

Выводы по главе 5

Данная глава посвящена рассмотрению дисперсионных свойства магнитостатических волн, распространяющихся в касательно намагниченной ферритовой пластине (пленке), обладающей гиротропными свойствами. Введено в рассмотрение размагничивающее поле распространяющейся волны. Получено дисперсионное соотношение, выявлен его комплексный характер. Приведены данные, касающиеся необходимости учета размагничивания волны в реальных экспериментах.

Основные вопросы, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрено влияние поля размагничивания на дисперсионные свойства поверхностной волны Дэймона–Эшбаха. Выполнен краткий обзор сегодняшнего состояния работ по исследованию магнитостатических волн применительно к устройствам обработки информации. Отмечено недостаточное внимание к учету поля размагничивания распространяющейся волны, особенно заметно проявляющегося для коротких волн длиной в единицы нанометров.

2. В геометрии задачи Дэймона–Эшбаха предложена модель формирования поля размагничивания волны, распространяющейся в тонкой пластине, образованного сгущениями магнитных зарядов в областях гребней волны. Отмечено, что в случае, когда длина волны значительно превышает толщину пластины, поле размагничивания стремится к нулю. В случае, когда длина волны становится значительно меньше толщины пластины, поле размагничивания, будучи нормированным на намагниченность, стремится к единице. Для количественного описания поля размагничивания предложено представление амплитуды такого поля в виде гиперболического тангенса, аргумент которого в точке перегиба обращается в нуль. Критическое значение волнового числа в этой точке равняется частному от деления числа π на толщину пластины. Отмечено, что нормирующей величиной для гиперболического тангенса является величина динамической намагниченности. В случае поверхностной волны Дэймона–Эшбаха такая намагниченность перпендикулярна направлению постоянного поля и в линейном режиме составляет не более 0,1 от полного значения намагниченности материала пластины. Для отражения такой ситуации введен нормирующий коэффициент поля размагничивания, составляющий от нуля (в отсутствие размагничивания) до 0,1 (при максимуме поля в линейном режиме).

3. Рассмотрена зависимость поля размагничивания от волнового числа. Показано, что с уменьшением толщины пластины значение волнового числа, начиная с которого учет размагничивания поля волны становится необходимым, постепенно увеличивается. Отмечено, что при волновых числах порядка 10^6 см^{-1} и более, чему посвящено значительное количество современных работ по магнитостатическим волнам, учет размагничивающего поля волны является принципиально необходимым.

4. Получен тензор магнитной восприимчивости с учетом периодического характера поля размагничивания распространяющейся волны. В геометрии поверхностной волны Дэймона–Эшбаха получены компоненты динамической намагниченности, выраженные через компоненты действующего эффективного поля. Для потенциала поля распространяющейся волны получено уравнение Уокера, учитывающее влияние размагничивания. Главным отличием полученного уравнения от классического его варианта в задаче Дэймона–Эшбаха, является различие коэффициентов при вторых производных по координатам, перпендикулярным постоянному полю, а также появление смешанной производной второго порядка по этим координатам.

5. Выполнено решение уравнения Уокера методом разделения переменных. Показано, что наличие в уравнении смешанной производной приводит к комплексному виду компоненты волнового числа перпендикулярной плоскости пластины. В случае поверхностной волны полное решение для компоненты потенциала по этой координате представляет собой произведение экспоненциально спадающего коэффициента на периодический множитель синусоидального характера. Показано, что полное распределение компоненты потенциала по координате, нормальной к плоскости пластины, описывается двумя комплексными волновыми числами, имеющими разные знаки, но одинаковые по абсолютной величине действительные и мнимые части. Из требования действительности той и другой частей получена критическая частота волны, определяющая нижнюю границу области возможного существования распространяющейся поверхностной волны.

6. Получена зависимость критической частоты от ненормированного параметра размагничивания, имеющая вид плавно возрастающей кривой с легким выгибом вверх. Нижний край этой кривой приходится на нижнюю границу спектра поверхностной волны Дэймона–Эшбаха в свободной пластине, а верхний на верхнюю границу спектра поверхностной волны в структуре феррит-металл. Отмечено, что в области параметра размагничивания, соответствующей линейному режиму, критическая частота, то есть нижняя граница реализуемого спектра поверхностной волны плавно возрастает. При значении параметра размагничивания около 0,2 критическая частота достигает верхней границы спектра поверхностной волны Дэймона–Эшбаха.

7. Приведена полная формулировка задачи о распространении поверхностной волны типа Дэймона–Эшбаха в принятой геометрии с учетом поля размагничивания волны. При этом вне пластины потенциал динамической намагниченности подчиняется уравнению Пуассона, а внутри пластины — уравнению Уокера со смешанной производной. Граничные условия представляют собой равенство касательных составляющих магнитной индукции и нормальных составляющих поля.

8. В результате решения граничной задачи получено дисперсионное соотношение, по форме с точностью до обозначений подобное дисперсионному соотношению в классической задаче Дэймона–Эшбаха.

Ввиду высокой сложности внутренней структуры входящих в дисперсионное соотношение составляющих, выполнен анализ его правой и левой частей по отдельности, в результате которого в каждой из частей выделены действительная и мнимая части. Приведена пошаговая схема машинного алгоритма численного расчета той и другой частей. Сформированы полные выражения действительной и мнимой частей дисперсионного соотношения в целом. Из равенства нулю действительной и мнимой частей по отдельности получены два уравнения, связывающие волновое число и частоту. Показано, что уравнение для действительной части в отсутствие размагничивания переходит в классическое дисперсионное соотношение Дэймона–Эшбаха. Отмечено, что уравнение для мнимой части в отсутствие размагничивания обращается в нуль, а при учете размагничивания составляет весьма малую величину, стремящуюся к нулю.

9. На основе полученного дисперсионного соотношения для пленки с толщиной в 10 мкм исследована дисперсия поверхностной волны с учетом размагничивания. Показано, что учет размагничивания приводит к повышению частоты дисперсионной кривой в области высоких значений волнового числа. Такое повышение становится заметным, начиная с волнового числа, соответствующего перегибу гиперболического тангенса параметра размагничивания. После перегиба повышение стремится к постоянной величине, соответствующей максимальному значению параметра размагничивания. Зависимость степени деформации или роста частоты дисперсионной кривой от нормирующего коэффициента параметра размагничивания представляет собой плавно возрастающую кривую, близкую к прямой линии. В виде качественной причины увеличения частоты волны высказано предположение об увеличении эффективной жесткости системы, обусловленной дополнительным воздействием на вектор намагниченности кроме внешнего поля также еще и поля размагничивания, стремящегося не допустить отклонения вектора от равновесного положения.

10. Выполнено исследование характера деформации дисперсионной кривой при изменении параметра размагничивания. Показано, что с увеличением параметра размагничивания рост дисперсионной кривой увеличивается, причем при величине параметра размагничивания более 0,02 возрастание приобретает двухступенчатый характер. При этом первая ступень, соответствует значениям волнового числа меньшим, чем перегиб гиперболического тангенса и отражает дисперсию поверхностной волны, обусловленную размагничивающим фактором пластины в целом (аналогично ступени возрастания классической волны Дэймона–Эшбаха). Вторая ступень имеет место при значениях волнового числа, больших, чем перегиб гиперболического тангенса и отражает влияние поля размагничивания самой волны. При увеличении параметра размагничивания первая ступень меняется мало, тогда как вторая растет примерно пропорционально величине этого параметра.

11. Исследована структура распределения динамической намагниченности внутри пластины, определяемая комплексным характером поперечного волнового числа. Показано, что действительная часть поперечного волнового числа зависит от продольного волнового числа полностью линейно с угловым коэффициентом порядка единицы, причем наклон соответствующей прямой линии от величины параметра размагничивания практически не зависит. Мнимая часть того же волнового числа при увеличении параметра размагничивания испытывает подъем вверх, сначала медленный до значения продольного волнового числа, соответствующего перегибу гиперболического тангенса, затем более быстрый, но постепенно замедляющийся и стремящийся далее к линейному. При увеличении параметра размагничивания наклон линейной асимптоты такой зависимости увеличивается. Отмеченный ход зависимостей мнимой части поперечного волнового числа полностью интерпретирован на основе структуры аналитического выражения зависимости такого числа от продольного волнового числа и параметра размагничивания.

12. Исследована структура динамического потенциала внутри пластины. Показано, что в результате произведения экспоненциальной и синусоидальной составляющих поперечного волнового числа результирующая структура потенциала приобретает спад более быстрый, чем простой экспоненциальный, так что вблизи каждой из поверхностей пластины потенциал образует провалы, имеющие аperiodический характер. Кратко отмечены особенности полученного распределения, налагаемые невязанностью распространения волны.

13. Применительно к использованию магнитостатических волн в устройствах обработки информации рассмотрена степень влияния поля размагничивания на дисперсию волн при различной толщине пластины. На плоскости в координатах толщина пластины — волновое число в двойном логарифмическом масштабе приведена зависимость критического значения волнового числа, соответствующего перегибу гиперболического тангенса параметра размагничивания, от толщины пластины. Показано, что эта зависимость имеет вид прямой линии, ниже которой размагничивание волны сказывается мало, а выше — меняет дисперсию существенным образом. Рассмотрены различные длины волн, применяемых в устройствах. В свете наиболее актуального на сегодня диапазона длин волн порядка единиц нанометров, отмечена необходимость учета размагничивания, начиная с волновых чисел порядка 10^5 см^{-1} , причем такой учет становится особенно актуальным для волновых чисел порядка 10^6 см^{-1} и более.

Глава 6

ВЛИЯНИЕ ОБМЕННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ДИНАМИЧЕСКОГО РАЗМАГНИЧИВАНИЯ НА ДИСПЕРСИЮ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ ДЭЙМОНА–ЭШБАХА

Настоящая глава посвящена рассмотрению магнитостатических волн, распространяющихся в касательно намагниченной ферритовой пластине, обладающей гиротропными свойствами. Геометрия задачи соответствует классической геометрии Дэймона–Эшбаха. Для простоты рассмотрения диссипация не учитывается. Главное внимание уделено влиянию неоднородного обменного взаимодействия, размагничивающее поле учитывается лишь в качестве второстепенного фактора. Выявлены характеристики поперечного волнового числа, отмечена его решающая роль в формировании закона дисперсии. Получено дисперсионное соотношение с учетом обмена и размагничивания, отмечены особенности квадратичного закона дисперсии, в том числе его отклонение от классики. Рассмотрены особые случаи дисперсии, в первую очередь касающиеся значений волнового числа до пятого–седьмого порядков в обратных сантиметрах, а также высоких частот вплоть до терагерцового диапазона.

Основной ход изложения следует [32–34, 36], а необходимые дополнительные ссылки указываются в тексте.

6.1. Обоснование необходимости рассмотрения влияния неоднородного обменного взаимодействия на дисперсию магнитостатической волны

Важнейшей тенденцией сегодняшнего дня является стремление к нанометровому масштабу размеров устройств обработки информации. Для волн длиной в единицы нанометров существенными оказываются не только сравнительно дальнедействующие дипольные силы, рассмотренные в предыдущей главе, но и мощные силы неоднородного обменного взаимодействия, проявляющиеся на расстояниях менее 1 мкм.

Несмотря на значительные успехи в освоении таких волн [199–205], теоретическое обоснование наблюдаемых явлений развито недостаточно, что, по-видимому, связано с высокой сложностью требуемого

здесь математического аппарата. Так, в подавляющем большинстве работ обменное взаимодействие учитывается лишь в виде квадратичной по волновому числу добавки к эффективному магнитному полю, а дипольное поле размагничивания вообще не учитывается.

Для некоторых видов геометрии распространение обменных волн рассматривалось с помощью функций Грина [84, 88], однако используемый там аппарат крайне громоздок и для воспроизведения весьма труден. Одновременный учет обменного взаимодействия и размагничивания был выполнен только для безграничной среды [42, стр. 198–202], в первую очередь применительно к нелинейным процессам параметрического возбуждения спиновых волн [42, гл. 10, 66]. Некоторые вопросы распространения дипольных волн, в том числе в неоднородных полях и сложных структурах, а также в условиях ориентационных переходов, рассмотрены в монографиях [1–4]. Однако учет обменного взаимодействия там выполнен весьма поверхностно, а размагничивание вообще не учитывалось.

В работе [31], явившейся главным предметом рассмотрения предыдущей главы, для случая поверхностной волны Дэймона–Эшбаха выполнен подробный учет поля динамического размагничивания, для описания которого предложен параметр размагничивания, зависящий от волнового числа. Получен тензор магнитной восприимчивости и уравнение Уокера, за счет размагничивания содержащее смешанную производную второго порядка. В результате решения граничной задачи получено дисперсионное соотношение для поверхностной волны. Выявлено повышение частоты и двухступенчатый характер дисперсионной кривой в области высоких значений волнового числа. Исследована структура динамического потенциала внутри пластины и показано, что в результате размагничивания вблизи каждой из поверхностей пластины потенциал содержит провалы, имеющие аperiодический характер.

Однако в этой работе влияние обменного взаимодействия не рассмотрено, что обеспечивает корректность полученных результатов только для волн длиннее 0,1 мкм.

Настоящая глава является продолжением предыдущей, в том числе работы [31], в первую очередь отличающимся введением в рассмотрение неоднородного обменного взаимодействия. Главное внимание уделено волнам, имеющим волновое число более 10^4 см^{-1} , то есть длину волны короче 6 мкм, для которых обменное взаимодействие уже должно сказываться заметным образом.

Как и в предыдущей главе и в работе [31], предлагаемый математический аппарат развит на основе классического аппарата Дэймона–Эшбаха [114], в достаточных подробностях рассмотренного в работах [1, стр. 50–76], [2, стр. 29–36], а также в гл. 2 настоящей монографии. В основу описания обменного взаимодействия положена трактовка, приведенная в работе [4, стр. 144–166].

6.2. Общий характер влияния обменного взаимодействия на распространение магнитостатической волны

В предыдущей главе рассмотрено влияние динамического размагничивания на характер дисперсии магнитостатической волны. Было отмечено, что с качественной стороны влияние размагничивания проявляется в стремлении размагничивающего поля уменьшить неоднородность распределения намагниченности, создаваемого распространяющейся волной. С другой стороны, магнитная среда представляет собой совокупность спинов, выстроенных в одном направлении за счет обменного взаимодействия. При этом обменное взаимодействие также стремится устранить неоднородное распределение спинов, вызванное распространяющейся волной. То есть, как динамическое размагничивание, так и неоднородное обменное взаимодействие работают в одну сторону, а именно — стремятся уменьшить создаваемую волной неоднородность распределения намагниченности. Различие в действии этих двух факторов состоит в том, что размагничивающее поле действует на довольно больших расстояниях, тогда как обменное взаимодействие проявляется на расстояниях, значительно меньших. Таким образом, обмен влияет на дисперсию волны примерно таким же образом, как и размагничивание, то есть смещает дисперсионную кривую в сторону более длинных волн и более высоких частот, однако такое влияние проявляется только для волн, значительно более коротких, чем те, для которых заметно влияние размагничивания. В настоящей главе такая качественная картина будет рассмотрена более подробно.

6.3. Эффективные поля магнитостатической волны

Геометрия задачи полностью аналогична приведенной в предыдущей главе, в том числе в работах [1, 2, 114], а также представленной на рис. 2.1 и рис. 5.1, то есть плоскость Oyz декартовой системы координат $Oxyz$ совпадает с плоскостью пластины, а ось Ox ей перпендикулярна. Волновой вектор \mathbf{k} распространяющейся волны лежит в плоскости Oyz .

Распространение магнитостатической волны в среде, обладающей обменным взаимодействием, сопровождается полями двух видов.

Первое — магнитное поле, создаваемое в данной точке пространства вектором намагниченности, расположенным в другой достаточно удаленной точке того же пространства. Это поле имеет дипольное происхождение, то есть описывает взаимодействие двух магнитных диполей друг с другом и спадает в пространстве подобно полю магнитного диполя. Такое поле называется «дипольным полем магнитостатической волны».

Второе — «эффективное» поле, стремящееся ориентировать локализованный в пространстве вектор намагниченности параллельно

вектору, локализованному в другой близлежащей точке пространства. Это поле имеет обменную природу и спадает в пространстве подобно полю обменного взаимодействия, то есть значительно более резко, чем дипольное поле. Такое поле называется «обменным полем магнитостатической волны».

Предположим, что действующее в магнитной среде поле имеет вид:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h} + \mathbf{H}_M + \mathbf{H}_E. \quad (6.1)$$

Слагаемые этого поля представляют собой:

постоянное подмагничивающее поле:

$$\mathbf{H}_0 = \text{const}; \quad (6.2)$$

переменное магнитное поле:

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 \exp [i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})]; \quad (6.3)$$

поле, создаваемое динамической намагниченностью при распространении в среде дипольной магнитостатической волны («размагничивающее» поле дипольной магнитостатической волны [42, стр. 200, форм. (7.11)], [4, стр. 144–147, форм. (7.17)]:

$$\mathbf{H}_M = -\frac{4\pi\beta}{k^2} \mathbf{k}(\mathbf{m}\mathbf{k}) = -\frac{4\pi\beta}{k^2} \mathbf{k}(\mathbf{m}_0\mathbf{k}) \exp [i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})], \quad (6.4)$$

где β — параметр размагничивания, введенный в работе [258, форм. (21)].

Эффективное поле, создаваемое динамической намагниченностью при распространении в среде обменной магнитостатической волны («обменное» поле обменной магнитостатической волны [42, стр. 199, форм. (7.6)], [4, стр. 147–151, форм. (7.49)]:

$$\mathbf{H}_E = -qk^2 \mathbf{m} = -qk^2 \mathbf{m}_0 \exp [i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})]. \quad (6.5)$$

Таким образом, полное поле имеет вид:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h} - \frac{4\pi\beta}{k^2} \mathbf{k}(\mathbf{m}\mathbf{k}) - qk^2 \mathbf{m}, \quad (6.6)$$

где последние три слагаемые содержат множитель вида $\exp [i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})]$, который далее для краткости записи опускаем.

Выберем систему координат, ось Oz которой параллельна направлению постоянного поля \mathbf{H}_0 . При этом (6.6) принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \mathbf{i} \left[h_x - \frac{4\pi\beta}{k^2} k_x (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_x \right] + \\ & + \mathbf{j} \left[h_y - \frac{4\pi\beta}{k^2} k_y (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_y \right] + \\ & + \mathbf{k} \left[H_0 + h_z - \frac{4\pi\beta}{k^2} k_z (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_z \right]. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Прежде всего обратимся к получению тензора магнитной восприимчивости на основе классического уравнения Ландау–Лифшица с учетом обоих упомянутых выше эффективных полей.

6.4. Тензор восприимчивости с учетом размагничивания и обмена

Обратимся теперь к нахождению тензора восприимчивости с учетом размагничивания и обмена.

6.4.1. Уравнения движения для компонент намагниченности

Уравнение движения для вектора намагниченности (Ландау–Лифшица) позволяет, наряду со свободными, найти также вынужденные колебания намагниченности, возбуждаемые внешним полем.

Будем искать решение этого уравнения в виде магнитостатической волны, переменная намагниченность \mathbf{m} которой имеет пространственно-временную зависимость вида

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{m}_0 \exp [i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})]. \quad (6.8)$$

Положим далее, что полная намагниченность имеет вид:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m} = \mathbf{i}m_x + \mathbf{j}m_y + \mathbf{k}(M_0 + m_z), \quad (6.9)$$

где M_0 — постоянная намагниченность (намагниченность насыщения среды), вектор которой в равновесном состоянии ориентирован вдоль постоянного поля \mathbf{H}_0 (то есть вдоль оси Oz).

Уравнение движения для намагниченности (уравнение Ландау–Лифшица) в отсутствие затухания имеет вид (2.1):

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}]. \quad (6.10)$$

Записывая (6.10) по компонентам, получаем:

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = -\gamma (M_y H_z - M_z H_y); \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = -\gamma (M_z H_x - M_x H_z); \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial t} = -\gamma (M_x H_y - M_y H_x). \quad (6.13)$$

Подставляя (6.8) и (6.9) в (6.11)–(6.13), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma \left\{ m_y \left[H_0 + h_z - \frac{4\pi\beta}{k^2} k_z (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_z \right] - \right. \\ \left. - (M_0 + m_z) \left[h_y - \frac{4\pi\beta}{k^2} k_y (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_y \right] \right\}; \quad (6.14) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\gamma \left\{ (M_0 + m_z) \left[h_x - \frac{4\pi\beta}{k^2} k_x (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_x \right] - m_x \left[H_0 + h_z - \frac{4\pi\beta}{k^2} k_z (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_z \right] \right\}; \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial m_z}{\partial t} = -\gamma \left\{ m_x \left[-\frac{4\pi\beta}{k^2} k_y (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_y \right] - m_y \left[-\frac{4\pi\beta}{k^2} k_x (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_x \right] \right\}. \quad (6.16)$$

6.4.2. Линеаризация уравнений движения

Выполним линеаризацию уравнений (6.14)–(6.16), для чего предположим, что: $m_{x,y} \ll M_0 \sim H_0$, $h_{x,y,z} \ll H_0$, а также $m_z \approx 0$. В результате получаем:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma \left\{ m_y H_0 - M_0 \left[h_y - \frac{4\pi\beta}{k^2} k_y (m_x k_x + m_y k_y) - qk^2 m_y \right] \right\}; \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\gamma \left\{ M_0 \left[h_x - \frac{4\pi\beta}{k^2} k_x (m_x k_x + m_y k_y) - qk^2 m_x \right] - m_x H_0 \right\}. \quad (6.18)$$

Обе стороны этих выражений имеют координатно-временную зависимость вида $\exp(i\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})$.

Выполняя дифференцирование по времени, разделяя обе части на этот множитель и опуская индекс «0» у амплитуд компонент намагниченности и переменного поля, получаем:

$$i\omega m_x = -\gamma \left\{ m_y H_0 - M_0 \left[h_y - \frac{4\pi\beta}{k^2} k_y (m_x k_x + m_y k_y) - qk^2 m_y \right] \right\}; \quad (6.19)$$

$$i\omega m_y = -\gamma \left\{ M_0 \left[h_x - \frac{4\pi\beta}{k^2} k_x (m_x k_x + m_y k_y) - qk^2 m_x \right] - m_x H_0 \right\}. \quad (6.20)$$

Эти уравнения с точностью до параметра β совпадают с приведенными в [4, стр. 158, форм. (7.102)–(7.103)].

Будем исходить из уравнений (6.19) и (6.20), в которых временно положим $\beta = 1$, раскроем скобки, приведем подобные члены и запишем слагаемые в порядке следования индексов:

$$\left(i\omega + \frac{4\pi\gamma M_0}{k^2} k_x k_y \right) m_x + \left(\gamma H_0 + \gamma M_0 q k^2 + \frac{4\pi\gamma M_0}{k^2} k_y^2 \right) m_y = \gamma M_0 h_y \quad (6.21)$$

$$\left(\gamma H_0 + \gamma M_0 q k^2 + \frac{4\pi\gamma M_0}{k^2} k_x^2 \right) m_x - \left(i\omega - \frac{4\pi\gamma M_0}{k^2} k_x k_y \right) m_y = \gamma M_0 h_x. \quad (6.22)$$

Введем обозначения для нормированных частот (2.26), (2.27):

$$\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}; \quad (6.23)$$

$$\Omega_H = \frac{H_0}{4\pi M_0}, \quad (6.24)$$

а также для нормированной константы обменного взаимодействия:

$$Q = \frac{q}{4\pi}. \quad (6.25)$$

Разделяя (6.21), (6.22) на $4\pi\gamma M_0$ и используя обозначения (6.23)–(6.25), получаем:

$$(i\Omega + k_x k_y) m_x + \left(\Omega_H + Qk^2 + \frac{k_y^2}{k^2} \right) m_y = \frac{1}{4\pi} h_y; \quad (6.26)$$

$$\left(\Omega_H + Qk^2 + \frac{k_x^2}{k^2} \right) m_x - (i\Omega - k_x k_y) m_y = \frac{1}{4\pi} h_x. \quad (6.27)$$

Уравнения (6.26)–(6.27) представляют собой систему, связывающую компоненты динамической намагниченности m_x и m_y с параметрами среды, распространяющейся волны и компонентами переменного поля.

Определитель этой системы равен:

$$D_0 = \begin{vmatrix} \left(i\Omega + \frac{k_x k_y}{k^2} \right) & \left(\Omega_H + Qk^2 + \frac{k_y^2}{k^2} \right) \\ \left(\Omega_H + Qk^2 + \frac{k_x^2}{k^2} \right) & - \left(i\Omega - \frac{k_x k_y}{k^2} \right) \end{vmatrix} = \\ = \Omega^2 - (\Omega_H + Qk^2) \left(\Omega_H + Qk^2 + \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right). \quad (6.28)$$

Решая систему (6.26)–(6.27), находим амплитуды компонент намагниченности:

$$m_x = -\frac{1}{4\pi D_0} \left\{ \left(\Omega_H + Qk^2 + \frac{k_y^2}{k^2} \right) h_x + \left(i\Omega - \frac{k_x k_y}{k^2} \right) h_y \right\}; \quad (6.29)$$

$$m_y = \frac{1}{4\pi D_0} \left\{ \left(i\Omega + \frac{k_x k_y}{k^2} \right) h_x - \left(\Omega_H + Qk^2 + \frac{k_x^2}{k^2} \right) h_y \right\}, \quad (6.30)$$

где D_0 определяется выражением (6.28).

При этом обе части полученных равенств имеют пространственно-временную зависимость вида $\exp[i(\omega t - \mathbf{kr})]$.

6.4.3. Тензор динамической восприимчивости

Формально можно ввести динамическую восприимчивость $\overleftrightarrow{\chi}_e$, такую, что выражения (6.29)–(6.30) допускают запись в виде:

$$\mathbf{m} = \overleftrightarrow{\chi}_e \mathbf{h}, \quad (6.31)$$

или:

$$\begin{pmatrix} \frac{m_x}{m_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{e11} & \chi_{e12} \\ \chi_{e21} & \chi_{e22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}, \quad (6.32)$$

где тензор восприимчивости имеет вид:

$$\vec{\chi}_e = -\frac{1}{4\pi D_0} \begin{pmatrix} \left(\Omega_H + Qk^2 + \frac{k_y^2}{k^2} \right) & \left(i\Omega - \frac{k_x k_y}{k^2} \right) \\ -\left(i\Omega + \frac{k_x k_y}{k^2} \right) & \left(\Omega_H + Qk^2 + \frac{k_x^2}{k^2} \right) \end{pmatrix}, \quad (6.33)$$

причем D_0 определяется выражением (6.28).

Меняя порядок следования слагаемых внутри D_0 , с соответствующим изменением знака перед дробью, получаем компоненты этого тензора в виде:

$$\chi_{e11} = \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega_H + Qk^2 + \frac{k_y^2}{k^2}}{(\Omega_H + Qk^2) \left(\Omega_H + Qk^2 + \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \Omega^2}; \quad (6.34)$$

$$\chi_{e12} = \frac{1}{4\pi} \frac{i\Omega - \frac{k_x k_y}{k^2}}{(\Omega_H + Qk^2) \left(\Omega_H + Qk^2 + \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \Omega^2}; \quad (6.35)$$

$$\chi_{e21} = -\frac{1}{4\pi} \frac{i\Omega + \frac{k_x k_y}{k^2}}{(\Omega_H + Qk^2) \left(\Omega_H + Qk^2 + \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \Omega^2}; \quad (6.36)$$

$$\chi_{e22} = \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega_H + Qk^2 + \frac{k_x^2}{k^2}}{(\Omega_H + Qk^2) \left(\Omega_H + Qk^2 + \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \Omega^2}. \quad (6.37)$$

Можно видеть, что с точностью до обозначений эти формулы совпадают с полученными ранее в [4, стр. 160, форм. (7.117)–(7.120)].

При заданных компонентах волнового вектора компоненты тензора имеют резонансную расходимость на частоте [4, стр. 160, форм. (7.121)]:

$$\Omega = \sqrt{(\Omega_H + Qk^2) \left(\Omega_H + Qk^2 + \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right)}. \quad (6.38)$$

Справедливо и обратное положение, то есть задание частоты накладывает ограничения на резонансные компоненты волнового вектора.

Введем обозначения:

$$\kappa_1 = \frac{\Omega_H + Qk^2 + \frac{k_y^2}{k^2}}{(\Omega_H + Qk^2) \left(\Omega_H + Qk^2 + \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \Omega^2}; \quad (6.39)$$

$$\kappa_2 = \frac{\Omega_H + Qk^2 + \frac{k_x^2}{k^2}}{(\Omega_H + Qk^2) \left(\Omega_H + Qk^2 + \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \Omega^2}; \quad (6.40)$$

$$\nu_1 = \frac{i\Omega - \frac{k_x k_y}{k^2}}{(\Omega_H + Qk^2) \left(\Omega_H + Qk^2 + \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \Omega^2}; \quad (6.41)$$

$$\nu_2 = \frac{i\Omega + \frac{k_x k_y}{k^2}}{(\Omega_H + Qk^2) \left(\Omega_H + Qk^2 + \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \Omega^2}. \quad (6.42)$$

С этими обозначениями уравнения (6.29)–(6.30) после умножения на 4π принимают вид:

$$4\pi m_x = \kappa_1 h_x + \nu_1 h_y; \quad (6.43)$$

$$4\pi m_y = -\nu_2 h_x + \kappa_2 h_y. \quad (6.44)$$

Аналогично подобным выражениям (75)–(77) в работе [31], здесь можно ввести в рассмотрение нормированный параметр размагничивания β , определяемый в той же работе формулой (21), а здесь в разд. 5.3.4 формулой (5.21):

$$\beta = \frac{\alpha_p}{2} \left\{ th \left[d \left(k - \frac{\pi}{d} \right) \right] + 1 \right\}, \quad (6.45)$$

где α_p — нормировочный коэффициент, учитывающий малость отклонения вектора намагниченности от своего равновесного положения, удовлетворяющий условию:

$$0 \leq \alpha_p \leq 0,1. \quad (6.46)$$

С учетом параметра размагничивания β выражения (6.39)–(6.42) принимают вид:

$$\kappa_1 = \frac{\Omega_H + Qk^2 + \beta \frac{k_y^2}{k^2}}{(\Omega_H + Qk^2) \left(\Omega_H + Qk^2 + \beta \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \Omega^2}; \quad (6.47)$$

$$\kappa_2 = \frac{\Omega_H + Qk^2 + \beta \frac{k_x^2}{k^2}}{(\Omega_H + Qk^2) \left(\Omega_H + Qk^2 + \beta \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \Omega^2}; \quad (6.48)$$

$$\nu_1 = \frac{i\Omega - \beta \frac{k_x k_y}{k^2}}{(\Omega_H + Qk^2) \left(\Omega_H + Qk^2 + \beta \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \Omega^2}; \quad (6.49)$$

$$\nu_2 = \frac{i\Omega + \beta \frac{k_x k_y}{k^2}}{(\Omega_H + Qk^2) \left(\Omega_H + Qk^2 + \beta \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \Omega^2}. \quad (6.50)$$

Таким образом, тензор восприимчивости (6.33) принимает вид:

$$\overleftrightarrow{\chi}_e = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \kappa_1 & \nu_1 \\ -\nu_2 & \kappa_2 \end{pmatrix}, \quad (6.51)$$

где компоненты κ_1 , κ_2 , ν_1 , ν_2 определяются формулами (6.47)–(6.50).

Резонансная частота (6.38) при этом имеет вид:

$$\Omega = \sqrt{(\Omega_H + Qk^2) \left(\Omega_H + Qk^2 + \beta \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right)}, \quad (6.52)$$

где β определяется формулой (6.45).

Замечание. Из структуры формул (6.49) и (6.50) можно видеть, что компоненты этого тензора относительно главной диагонали, по частоте Ω являются антисимметричными, а по компонентам волнового числа в сочетании с размагничиванием $\beta k_x k_y / k^2$ — симметричными. Формула (6.51) по структуре полностью аналогична формуле (5.56), приведенной в разд. 5.4, так что к ней полностью относится замечание, приведенное в том же разделе после формулы (5.56). Отличие здесь состоит в конкретном виде выражений κ_1 , κ_2 , ν_1 , ν_2 , определяемых формулами (6.47)–(6.50), отличающихся от подобных формул (5.50)–(5.53) учетом обменного взаимодействия.

6.5. Уравнение Уокера для обменных волн

Будем исходить из уравнений магнитостатики, для переменных составляющих поля \mathbf{h} , индукции \mathbf{b} и намагниченности \mathbf{m} , имеющих вид [1, стр. 47, форм. (2.80)–(2.82)]:

$$\text{rot } \mathbf{h} = 0; \quad (6.53)$$

$$\text{div } \mathbf{b} = 0, \quad (6.54)$$

где:

$$\mathbf{b} = \mathbf{h} + 4\pi\mathbf{m}. \quad (6.55)$$

Из уравнения (6.53) следует возможность введения потенциала ψ переменного поля h :

$$\mathbf{h} = \text{grad } \psi = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\}, \quad (6.56)$$

то есть:

$$h_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (6.57)$$

$$h_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad (6.58)$$

$$h_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (6.59)$$

При этом уравнение (6.54) принимает вид:

$$\text{div}(\text{grad } \psi + 4\pi \mathbf{m}) = 0, \quad (6.60)$$

или:

$$\Delta \psi + 4\pi \text{div } m = 0. \quad (6.61)$$

Здесь:

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}; \quad (6.62)$$

$$\text{div } \mathbf{m} = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_z}{\partial z}. \quad (6.63)$$

Согласно (6.43), (6.44) имеем:

$$4\pi m_x = \kappa_1 h_x + \nu_1 h_y; \quad (6.64)$$

$$4\pi m_y = -\nu_2 h_x + \kappa_2 h_y, \quad (6.65)$$

где κ_1 , κ_2 , ν_1 , ν_2 определяются формулами (6.39)–(6.42) или с учетом размагничивания — формулами (6.47)–(6.50).

Дифференцируя (6.64) и (6.65), получаем:

$$4\pi \frac{\partial m_x}{\partial x} = \kappa_1 \frac{\partial h_x}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial h_y}{\partial x}; \quad (6.66)$$

$$4\pi \frac{\partial m_y}{\partial y} = -\nu_2 \frac{\partial h_x}{\partial y} + \kappa_2 \frac{\partial h_y}{\partial y}. \quad (6.67)$$

Подставляя (6.66)–(6.67) в (6.63), получаем:

$$4\pi \text{div } \mathbf{m} = \kappa_1 \frac{\partial h_x}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial h_y}{\partial x} - \nu_2 \frac{\partial h_x}{\partial y} + \kappa_2 \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial m_z}{\partial z}. \quad (6.68)$$

С помощью (6.57)–(6.59), получаем:

$$4\pi \text{div } \mathbf{m} = \kappa_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \nu_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + \kappa_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (6.69)$$

Подставляя (6.62), (6.69) в (6.61) и приводя подобные члены, получаем:

$$(1 + \kappa_1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (1 + \kappa_2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + (\nu_1 - \nu_2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (6.70)$$

Это — уравнение Уокера для обменных волн.

Введем обозначения:

$$\mu_1 = 1 + \kappa_1; \quad (6.71)$$

$$\mu_2 = 1 + \kappa_2; \quad (6.72)$$

$$\nu = \nu_1 - \nu_2. \quad (6.73)$$

С этими обозначениями уравнение Уокера (6.70) принимает вид:

$$\mu_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (6.74)$$

Можно видеть, что по форме это уравнение отличается от традиционного уравнения Уокера слагаемым со смешанной производной. При этом параметры $\mu_{1,2}$ и ν учитывают специфику, налагаемую учетом обменного взаимодействия и размагничивания.

Учет (6.47)–(6.50) позволяет записать выражения (6.71)–(6.73) в более подробном виде:

$$\mu_1 = 1 + \frac{\Omega_H + Qk^2 + \beta \frac{k_y^2}{k^2}}{(\Omega_H + Qk^2) \left(\Omega_H + Qk^2 + \beta \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \Omega^2}; \quad (6.75)$$

$$\mu_2 = 1 + \frac{\Omega_H + Qk^2 + \beta \frac{k_x^2}{k^2}}{(\Omega_H + Qk^2) \left(\Omega_H + Qk^2 + \beta \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \Omega^2}; \quad (6.76)$$

$$\nu = \frac{-2\beta \frac{k_x k_y}{k^2}}{(\Omega_H + Qk^2) \left(\Omega_H + Qk^2 + \beta \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \Omega^2}. \quad (6.77)$$

Можно видеть, что учет обменного взаимодействия приводит к квадратичной зависимости коэффициентов уравнения Уокера от волнового числа.

6.5.1. Решение уравнения Уокера

Итак, уравнение Уокера имеет вид (6.74):

$$\mu_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (6.78)$$

Решим его методом разделения переменных, пользуясь приемом, предложенным в работе [4, стр. 73–75, стр. 357–360], а также приведенным здесь в разд. 2.8.1.

Для дальнейшего рассмотрения предположим, что волна распространяется вдоль оси Oy (более конкретно это отмечено в следующей далее формуле (6.107)). В этом случае для решения уравнения (6.78) можно воспользоваться приемом, рассмотренным в разд. 2.8. Но сначала выделим часть, зависящую только от координаты z .

Итак, положим решение в виде:

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (6.79)$$

Подставим (6.79) в уравнение (6.74) и разделим на XYZ :

$$\mu_1 \frac{X''}{X} + \mu_2 \frac{Y''}{Y} + \nu \frac{X'Y'}{XY} + \frac{Z''}{Z} = 0. \quad (6.80)$$

Отделим часть, зависящую только от Z и введем постоянную разделения λ^2 :

$$\mu_1 \frac{X''}{X} + \mu_2 \frac{Y''}{Y} + \nu \frac{X'Y'}{XY} = -\frac{Z''}{Z} = \lambda^2. \quad (6.81)$$

Получаем уравнение для Z :

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0. \quad (6.82)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$Z = Ge^{i\lambda z} + He^{-i\lambda z}. \quad (6.83)$$

Из (6.81) выделим уравнение для X и Y :

$$\mu_1 \frac{X''}{X} + \mu_2 \frac{Y''}{Y} + \nu \frac{X'Y'}{XY} - \lambda^2 = 0. \quad (6.84)$$

Это уравнение содержит только две переменные x и y , а также произведение производных первого порядка от функций X и Y по этим переменным. Переменные не разделены, однако можно видеть, что произведение производных первого порядка получено из смешанной производной, присутствующей в качестве третьего слагаемого в уравнении (6.78). При этом, как положено выше, волна распространяется точно вдоль оси Oy . Так что теперь наступает очередь воспользоваться приемом решения уравнений со смешанной производной, приведенным в разд. 2.8.

Итак, предположим, что Y имеет вид:

$$Y = e^{-i\xi y}. \quad (6.85)$$

При $\xi > 0$ это решение соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении оси Oy .

Подставляя (6.85) в (6.84) и умножая на XY , получаем уравнение для X :

$$\mu_1 X'' - i\nu\xi X' - (\lambda^2 + \mu_2\xi^2)X = 0. \quad (6.86)$$

Будем искать решение в виде:

$$X = e^{\eta x}. \quad (6.87)$$

Подставляя (6.87) в (6.86), разделяя на X и приводя подобные члены, получаем уравнение для η :

$$\mu_1 \eta^2 - i\nu \xi \eta - (\lambda^2 + \mu_2 \xi^2) = 0. \quad (6.88)$$

Это уравнение относительно η — квадратное, его решение имеет вид:

$$\eta^{(1,2)} = \frac{i\nu \xi \pm \sqrt{-\nu^2 \xi^2 + 4\mu_1(\lambda^2 + \mu_2 \xi^2)}}{2\mu_1}. \quad (6.89)$$

Представим его в виде:

$$\eta^{(1,2)} = \eta_1 \pm \eta_2, \quad (6.90)$$

где:

$$\eta_1 = i \frac{\nu \xi}{2\mu_1}; \quad (6.91)$$

$$\eta_2 = \frac{\sqrt{4\mu_1 \lambda^2 + (4\mu_1 \mu_2 - \nu^2) \xi^2}}{2\mu_1}. \quad (6.92)$$

Заменяем постоянные разделения λ и ξ обозначениями волновых чисел:

$$\lambda \rightarrow k_z; \quad (6.93)$$

$$\xi \rightarrow k_y, \quad (6.94)$$

где полагаем $k_z \geq 0$, $k_y \geq 0$.

При этих обозначениях (6.91) и (6.92) принимают вид:

$$\eta_1 = i \frac{\nu k_y}{2\mu_1}; \quad (6.95)$$

$$\eta_2 = \frac{\sqrt{4\mu_1 k_z^2 + (4\mu_1 \mu_2 - \nu^2) k_y^2}}{2\mu_1}. \quad (6.96)$$

Таким образом, решение для X принимает вид:

$$X = A e^{(\eta_1 + \eta_2)x} + B e^{(\eta_1 - \eta_2)x}, \quad (6.97)$$

то есть вдоль оси Ox возможны два волновых числа $\eta_1 + \eta_2$ и $\eta_1 - \eta_2$.

Введем обозначения:

$$k_x^{(+)} = \eta_1 + \eta_2; \quad (6.98)$$

$$k_x^{(-)} = \eta_1 - \eta_2. \quad (6.99)$$

С этими обозначениями решение (6.97) принимает вид:

$$X = A e^{k_x^{(+)} x} + B e^{k_x^{(-)} x}. \quad (6.100)$$

При этом, согласно (6.98) и (6.99), получаем:

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(k_x^{(+)} + k_x^{(-)}); \quad (6.101)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2}(k_x^{(+)} - k_x^{(-)}). \quad (6.102)$$

Таким образом, с учетом (6.100), (6.85) и (6.86), полное решение уравнения Уокера (6.78) принимает вид:

$$\psi = XYZ, \quad (6.103)$$

где:

$$X = Ae^{k_x^{(+)}x} + Be^{k_x^{(-)}x}; \quad (6.104)$$

$$Y = e^{-ik_y y}; \quad (6.105)$$

$$Z = Ge^{ik_z z} + He^{-ik_z z}, \quad (6.106)$$

причем $k_z \geq 0$, $k_y \geq 0$, а $k_x^{(+)}$ и $k_x^{(-)}$ определяются соотношениями (6.98) и (6.99) через (6.95) и (6.96).

Для дальнейшего рассмотрения ограничимся случаем распространения волны точно вдоль оси Oy , то есть положим

$$k_z = 0. \quad (6.107)$$

При этом остаются только две компоненты волнового числа k_x и k_y , из которых первая ориентирована перпендикулярно направлению распространения волны (то есть оси Oy), а вторая — параллельно. В соответствии с этим для простоты терминологии будем называть k_x поперечным волновым числом, а k_y — продольным волновым числом.

При этом поперечное волновое число будет иметь два значения $k_x^{(+)}$ и $k_x^{(-)}$, соответствующие двум взаимно противоположным направлениям распространения поперечной компоненты волны.

Таким образом, с учетом (6.107), выражения (6.95) и (6.96) принимают вид:

$$\eta_1 = i \frac{\nu}{2\mu_1} k_y; \quad (6.108)$$

$$\eta_2 = \frac{\sqrt{4\mu_1\mu_2 - \nu^2}}{2\mu_1} k_y. \quad (6.109)$$

то есть, согласно (6.98)–(6.99) получаем:

$$k_x^{(+)} = \left(i \frac{\nu}{2\mu_1} + \frac{\sqrt{4\mu_1\mu_2 - \nu^2}}{2\mu_1} \right) k_y; \quad (6.110)$$

$$k_x^{(-)} = \left(i \frac{\nu}{2\mu_1} - \frac{\sqrt{4\mu_1\mu_2 - \nu^2}}{2\mu_1} \right) k_y. \quad (6.111)$$

Здесь параметры μ_1 , μ_2 , ν имеют вид (6.75)–(6.77).

6.5.2. Упрощение коэффициентов уравнения Уокера

Для дальнейшего рассмотрения удобно выполнить некоторые преобразования коэффициентов уравнения Уокера, чтобы привести их к виду, допускающему простой по форме предельный переход к случаям отсутствия как размагничивания, так и обмена.

В выражениях (6.75)–(6.77) поменяем местами слагаемые в знаменателях и соответственно изменим знаки перед дробями. В результате таких преобразований эти выражения принимают вид:

$$\mu_1 = 1 - \frac{\Omega_H + Qk^2 + \beta \frac{k_y^2}{k^2}}{\Omega^2 - (\Omega_H + Qk^2) \left(\Omega_H + Qk^2 + \beta \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right)}; \quad (6.112)$$

$$\mu_2 = 1 - \frac{\Omega_H + Qk^2 + \beta \frac{k_x^2}{k^2}}{\Omega^2 - (\Omega_H + Qk^2) \left(\Omega_H + Qk^2 + \beta \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right)}; \quad (6.113)$$

$$\nu = \frac{2\beta \frac{k_x k_y}{k^2}}{\Omega^2 - (\Omega_H + Qk^2) \left(\Omega_H + Qk^2 + \beta \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right)}. \quad (6.114)$$

Поскольку рассматривается случай распространения волны вдоль оси Oy , то есть в соответствии с (6.107) $k_z = 0$, то получаем:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2. \quad (6.115)$$

Подставляя (6.115) в (6.112)–(6.114), получаем:

$$\mu_1 = 1 - \frac{\Omega_H + Q(k_x^2 + k_y^2) + \beta \frac{k_y^2}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega^2 - [\Omega_H + Q(k_x^2 + k_y^2)] [\Omega_H + Q(k_x^2 + k_y^2) + \beta]}; \quad (6.116)$$

$$\mu_2 = 1 - \frac{\Omega_H + Q(k_x^2 + k_y^2) + \beta \frac{k_x^2}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega^2 - [\Omega_H + Q(k_x^2 + k_y^2)] [\Omega_H + Q(k_x^2 + k_y^2) + \beta]}; \quad (6.117)$$

$$\nu = \frac{2\beta \frac{k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega^2 - [\Omega_H + Q(k_x^2 + k_y^2)] [\Omega_H + Q(k_x^2 + k_y^2) + \beta]}. \quad (6.118)$$

Введем обозначение:

$$\Omega_{Hk} = \Omega_H + Q(k_x^2 + k_y^2). \quad (6.119)$$

С этим обозначением (6.116)–(6.118) принимают вид:

$$\mu_1 = 1 - \frac{\Omega_{Hk} + \beta \frac{k_y^2}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega^2 - \Omega_{Hk}(\Omega_{Hk} + \beta)}; \quad (6.120)$$

$$\mu_2 = 1 - \frac{\Omega_{Hk} + \beta \frac{k_x^2}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega^2 - \Omega_{Hk}(\Omega_{Hk} + \beta)}; \quad (6.121)$$

$$\nu = \frac{2\beta \frac{k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega^2 - \Omega_{Hk}(\Omega_{Hk} + \beta)}. \quad (6.122)$$

Выполняя в (6.120), (6.121) сложение, получаем:

$$\mu_1 = \frac{\Omega^2 - \Omega_{Hk}(\Omega_{Hk} + \beta + 1) - \beta \frac{k_y^2}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega^2 - \Omega_{Hk}(\Omega_{Hk} + \beta)}; \quad (6.123)$$

$$\mu_2 = \frac{\Omega^2 - \Omega_{Hk}(\Omega_{Hk} + \beta + 1) - \beta \frac{k_x^2}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega^2 - \Omega_{Hk}(\Omega_{Hk} + \beta)}; \quad (6.124)$$

$$\nu = \frac{2\beta \frac{k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega^2 - \Omega_{Hk}(\Omega_{Hk} + \beta)}, \quad (6.125)$$

где Ω_{Hk} определяется формулой (6.119).

Введем два вспомогательных обозначения:

$$\Omega_{0k}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}(\Omega_{Hk} + \beta); \quad (6.126)$$

$$\Omega_{1k}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}(\Omega_{Hk} + \beta + 1). \quad (6.127)$$

С этими обозначениями запись формул (6.123)–(6.125) значительно упрощается:

$$\mu_1 = \frac{\Omega_{1k}^2 - \beta \frac{k_y^2}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega_{0k}^2}; \quad (6.128)$$

$$\mu_2 = \frac{\Omega_{1k}^2 - \beta \frac{k_x^2}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega_{0k}^2}; \quad (6.129)$$

$$\nu = \frac{2\beta \frac{k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega_{0k}^2}. \quad (6.130)$$

Приведем также записанные в принятых обозначениях полезные для дальнейшего рассмотрения выражения для компонент тензора восприимчивости ν_1 и ν_2 , определяемые формулами (6.49) и (6.50):

$$\nu_1 = \frac{-i\Omega + \beta \frac{k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega_{0k}^2}; \quad (6.131)$$

$$\nu_2 = \frac{-i\Omega - \beta \frac{k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega_{0k}^2}. \quad (6.132)$$

Можно видеть, что в отсутствие обмена, то есть при $Q = 0$, из формулы (6.119) следует:

$$\Omega_{Hk} \rightarrow \Omega_H, \quad (6.133)$$

а формулы (6.128)–(6.130) при учете обозначений (5.117), (5.118), а также (6.119), (6.126) и (6.127), переходят в формулы (5.119)–(5.121) разд. 5.5.1 предыдущей главы. Также можно убедиться, что в отсутствие обмена формулы (6.131) и (6.132) с учетом тех же обозначений соответствуют формулам (5.52) и (5.53) той же главы.

6.6. Двойственный характер поперечного волнового числа

Можно видеть, что во все параметры (6.126)–(6.132) входит поперечное волновое число k_x , которое, согласно (6.98) и (6.99), имеет два вида, обозначенные верхними индексами (+) и (–). То есть и (6.126)–(6.132), а также (6.119) должны иметь два вида, соответствующие этим индексам. Таким образом, вместо одного выражения (6.119) получаем два:

$$\Omega_{Hk}^{(+)} = \Omega_H + Q \left[(k_x^{(+)})^2 + k_y^2 \right], \quad (6.134)$$

а также:

$$\Omega_{Hk}^{(-)} = \Omega_H + Q \left[(k_x^{(-)})^2 + k_y^2 \right]. \quad (6.135)$$

Аналогично вместо (6.126)–(6.127) получаем:

$$(\Omega_{0k}^{(+)})^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}^{(+)} (\Omega_{Hk}^{(+)} + \beta); \quad (6.136)$$

$$(\Omega_{1k}^{(+)})^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}^{(+)} (\Omega_{Hk}^{(+)} + \beta + 1), \quad (6.137)$$

а также:

$$(\Omega_{0k}^{(-)})^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}^{(-)} (\Omega_{Hk}^{(-)} + \beta); \quad (6.138)$$

$$(\Omega_{1k}^{(-)})^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}^{(-)} (\Omega_{Hk}^{(-)} + \beta + 1). \quad (6.139)$$

При этом вместо трех выражений (6.128)–(6.130) получаем шесть:

$$\mu_1^{(+)} = \frac{(\Omega_{1k}^{(+)})^2 - \beta \frac{k_y^2}{(k_x^{(+)})^2 + k_y^2}}{(\Omega_{0k}^{(+)})^2}; \quad (6.140)$$

$$\mu_2^{(+)} = \frac{(\Omega_{1k}^{(+)})^2 - \beta \frac{(k_x^{(+)})^2}{(k_x^{(+)})^2 + k_y^2}}{(\Omega_{0k}^{(+)})^2}; \quad (6.141)$$

$$\nu^{(+)} = \frac{2\beta \frac{k_x^{(+)} k_y}{(k_x^{(+)})^2 + k_y^2}}{(\Omega_{0k}^{(+)})^2}, \quad (6.142)$$

а также:

$$\mu_1^{(-)} = \frac{(\Omega_{1k}^{(-)})^2 - \beta \frac{k_y^2}{(k_x^{(-)})^2 + k_y^2}}{(\Omega_{0k}^{(-)})^2}; \quad (6.143)$$

$$\mu_2^{(-)} = \frac{(\Omega_{1k}^{(-)})^2 - \beta \frac{(k_x^{(-)})^2}{(k_x^{(-)})^2 + k_y^2}}{(\Omega_{0k}^{(-)})^2}; \quad (6.144)$$

$$\nu^{(-)} = \frac{2\beta \frac{k_x^{(-)} k_y}{(k_x^{(-)})^2 + k_y^2}}{(\Omega_{0k}^{(-)})^2}. \quad (6.145)$$

Аналогично для $\nu_{1,2}^{(\pm)}$ вместо (6.49)–(6.50) получаем:

$$\nu_1^{(+)} = \frac{-i\Omega + \beta \frac{k_x^{(+)} k_y}{(k_x^{(+)})^2 + k_y^2}}{(\Omega_{0k}^{(+)})^2}; \quad (6.146)$$

$$\nu_2^{(+)} = \frac{-i\Omega - \beta \frac{k_x^{(+)} k_y}{(k_x^{(+)})^2 + k_y^2}}{(\Omega_{0k}^{(+)})^2}, \quad (6.147)$$

а также:

$$\nu_1^{(-)} = \frac{-i\Omega + \beta \frac{k_x^{(-)} k_y}{(k_x^{(-)})^2 + k_y^2}}{(\Omega_{0k}^{(-)})^2}; \quad (6.148)$$

$$\nu_2^{(-)} = \frac{-i\Omega - \beta \frac{k_x^{(-)} k_y}{(k_x^{(-)})^2 + k_y^2}}{(\Omega_{0k}^{(-)})^2}. \quad (6.149)$$

Соответственно выражения (6.109) и (6.110) принимают вид:

$$k_x^{(+)} = \left(i \frac{\nu^{(+)}}{2\mu_1^{(+)}} + \frac{\sqrt{4\mu_1^{(+)}\mu_2^{(+)} - (\nu^{(+)})^2}}{2\mu_1^{(+)}} \right) k_y, \quad (6.150)$$

а также:

$$k_x^{(-)} = \left(i \frac{\nu^{(-)}}{2\mu_1^{(-)}} - \frac{\sqrt{4\mu_1^{(-)}\mu_2^{(-)} - (\nu^{(-)})^2}}{2\mu_1^{(-)}} \right) k_y, \quad (6.151)$$

где $\mu_{1,2}^{(\pm)}$ и $\nu^{(\pm)}$ определяются формулами (6.140)–(6.145).

6.7. Действительная и мнимая части поперечного волнового числа в отсутствие обмена

В предыдущем разделе с учетом двойственности получены два выражения (6.150) и (6.151) для поперечных волновых чисел $k_x^{(+)}$ и $k_x^{(-)}$, где $\mu_{1,2}^{(\pm)}$ и $\nu^{(\pm)}$ определяются формулами (6.140)–(6.145), которые содержат в своем составе те же волновые числа $k_x^{(+)}$ и $k_x^{(-)}$.

Таким образом, выражения (6.150) и (6.151) можно рассматривать как уравнения для определения $k_x^{(+)}$ и $k_x^{(-)}$. Рассмотрим их по отдельности.

Обратимся сначала к более простому случаю, когда обменное взаимодействие отсутствует, так что поперечное волновое число определяется только размагничиванием. При этом в основном будем следовать работе [31], однако выполним преобразования более простым путем.

Без учета обмена формулы (6.126)–(6.130) принимают вид (везде опущен индекс « k »):

$$\Omega_0^2 = \Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta); \quad (6.152)$$

$$\Omega_1^2 = \Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1), \quad (6.153)$$

так что вид формул (6.123)–(6.125) значительно упрощается:

$$\mu_1 = \frac{\Omega_1^2 - \beta \frac{k_y^2}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega_0^2}; \quad (6.154)$$

$$\mu_2 = \frac{\Omega_1^2 - \beta \frac{k_x^2}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega_0^2}; \quad (6.155)$$

$$\nu = \frac{2\beta \frac{k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega_0^2}. \quad (6.156)$$

Рассмотрим сначала уравнение для $k_x^{(+)}$ вида (6.150). Раскроем скобки, умножим обе части на $2\mu_1^{(+)}/k_y$ и перенесем первое слагаемое в левую часть. Для упрощения формы записи индекс (+) пока опустим. В результате получаем:

$$\frac{2\mu_1 k_x}{k_y} - i\nu = -\sqrt{4\mu_1\mu_2 - \nu^2}. \quad (6.157)$$

Возведем обе части в квадрат, раскроем скобки, умножим обе части на k_y^2 и разделим на $4\mu_1$. В результате получим уравнение для k_x вида:

$$\mu_1 k_x^2 - i\nu k_x k_y - \mu_2 k_y^2 = 0. \quad (6.158)$$

Здесь параметры μ_1 , μ_2 , ν определяются формулами (6.154)–(6.156), содержащими $k_x^{(+)}$. Подставляя эти формулы, умножая на Ω_0^2 и приводя подобные члены, получаем уравнение:

$$\Omega_1^2 k_x^4 - i2\beta k_y^2 k_x^2 - \Omega_1^2 k_y^4 = 0, \quad (6.159)$$

где Ω_1^2 определяется формулой (6.153).

Решая это уравнение относительно квадрата k_x , получаем:

$$(k_x^{(+)})^2 = \frac{i\beta \pm \sqrt{\Omega_1^4 - \beta^2}}{\Omega_1^2} k_y^2. \quad (6.160)$$

Переход к классической задаче Дэймона–Эшбаха соответствует $\beta \rightarrow 0$. При этом должно выполняться соотношение:

$$k_x^{(+)} = \pm k_y, \quad (6.161)$$

следующее из формулы (2.160) с учетом того, что там $X \rightarrow e^{ik_x x}$ (формула (2.162)), а здесь $X \rightarrow e^{k_x^{(+)} x}$ (формула (6.104)), в силу чего мнимая единица в формуле (2.160) здесь переходит в действительную единицу.

Из формулы (6.161) видно, что для перехода к задаче Дэймона–Эшбаха (то есть при $\beta \rightarrow 0$) должно быть:

$$(k_x^{(+)})^2 \rightarrow k_y^2, \quad (6.162)$$

откуда видно, что перед корнем в выражении (6.160) должен быть знак плюс.

Таким образом, выражение (6.161) принимает вид:

$$(k_x^{(+)})^2 = \frac{i\beta + \sqrt{\Omega_1^4 - \beta^2}}{\Omega_1^2} k_y^2, \quad (6.163)$$

откуда находим $k_x^{(+)}$

$$k_x^{(+)} = \pm \sqrt{\frac{i\beta + \sqrt{\Omega_1^4 - \beta^2}}{\Omega_1^2}} k_y. \quad (6.164)$$

Рассмотрим теперь уравнение для $k_x^{(-)}$ вида (6.151). Подобно предыдущему случаю, раскроем скобки, умножим обе части на $2\mu_1^{(-)}/k_y$ и перенесем первое слагаемое в левую часть. Для упрощения формы записи индекс $(-)$ также опустим. В результате получаем:

$$\frac{2\mu_1 k_x}{k_y} - i\nu = -\sqrt{4\mu_1\mu_2 - \nu^2}. \quad (6.165)$$

Возведем обе части в квадрат, раскроем скобки, умножим обе части на k_y^2 и разделим на $4\mu_1$. В результате получим уравнение для k_x :

$$\mu_1 k_x^2 - i\nu k_x k_y - \mu_2 k_y^2 = 0. \quad (6.166)$$

Это уравнение по форме полностью совпадает с аналогичным уравнением (6.158), полученным для $k_x^{(+)}$. При этом параметры μ_1 , μ_2 , ν определяются формулами (6.154)–(6.156), содержащими $k_x^{(-)}$. Подставляя эти формулы, умножая на Ω_0^2 и приводя подобные члены, получаем уравнение:

$$\Omega_1^2 k_x^4 - i2\beta k_y^2 k_x^2 - \Omega_1^2 k_y^4 = 0. \quad (6.167)$$

Это уравнение по форме также полностью совпадает с уравнением (6.159), однако здесь под k_x подразумевается $k_x^{(-)}$. Решая это уравнение относительно квадрата k_x и учитывая, что при $\beta \rightarrow 0$ знак перед получающимся корнем должен быть положительным, подобно (6.164), получаем:

$$k_x^{(-)} = \pm \sqrt{\frac{i\beta + \sqrt{\Omega_1^4 - \beta^2}}{\Omega_1^2}} k_y. \quad (6.168)$$

Поскольку выражения (6.164) и (6.168) не отличаются ничем, кроме знака перед внешним корнем, то естественно полагать, что один из этих знаков соответствует $k_x^{(+)}$, а другой соответствует $k_x^{(-)}$. Поскольку относительно уравнений (6.164) и (6.168) оба знака эквивалентны, то это означает, что их можно распределить произвольно. Исходя из соответствия между знаками и индексами, выберем следующие знаки:

$$k_x^{(+)} = + \sqrt{\frac{i\beta + \sqrt{\Omega_1^4 - \beta^2}}{\Omega_1^2}} k_y; \quad (6.169)$$

$$k_x^{(-)} = - \sqrt{\frac{i\beta + \sqrt{\Omega_1^4 - \beta^2}}{\Omega_1^2}} k_y. \quad (6.170)$$

При этом, исходя из (6.101) и (6.102), получаем:

$$\eta_1 = 0; \quad (6.171)$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{i\beta + \sqrt{\Omega_1^4 - \beta^2}}{\Omega_1^2}} k_y. \quad (6.172)$$

Можно видеть, что при $\beta \rightarrow 0$ параметр η_1 остается равным нулю, а параметр η_2 становится равным k_y , то есть выполняется равенство $k_x = k_y$, как и в классической задаче Дэймона–Эшбаха при $k_z = 0$ (формула (2.160) с учетом замечания относительно формулы (6.161)).

В выражениях (6.169) и (6.170) под корнем выделим действительную и мнимую части:

$$k_x^{(+)} = +\sqrt{\frac{\sqrt{\Omega_1^4 - \beta^2}}{\Omega_1^2} + i\frac{\beta}{\Omega_1^2} k_y}; \quad (6.173)$$

$$k_x^{(-)} = -\sqrt{\frac{\sqrt{\Omega_1^4 - \beta^2}}{\Omega_1^2} + i\frac{\beta}{\Omega_1^2} k_y}. \quad (6.174)$$

Введем обозначения:

$$a = \frac{\sqrt{\Omega_1^4 - \beta^2}}{\Omega_1^2}; \quad (6.175)$$

$$b = \frac{\beta}{\Omega_1^2}. \quad (6.176)$$

С этими обозначениями (6.173) и (6.174) принимают вид:

$$k_x^{(+)} = +\sqrt{a + ib} k_y; \quad (6.177)$$

$$k_x^{(-)} = -\sqrt{a + ib} k_y. \quad (6.178)$$

Для вычисления квадратного корня воспользуемся формулой [227, стр. 19, форм. 58.1]:

$$\sqrt{a + ib} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right). \quad (6.179)$$

Пользуясь этой формулой и оставляя знак плюс, получаем:

$$\sqrt{a + ib} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\Omega_1^2}\right)^2}} + i\sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\Omega_1^2}\right)^2}} \right\}. \quad (6.180)$$

Введем обозначения:

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\Omega_1^2}\right)^2}} k_y; \quad (6.181)$$

$$k_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\Omega_1^2}\right)^2}} k_y, \quad (6.182)$$

где Ω_1^2 определяется формулой (6.153). Можно видеть, что эти формулы совпадают с полученными в работе [31] формулами (150), (151), однако здесь они имеют вид значительно более компактный.

С обозначениями (6.181), (6.182) формулы (6.169)-(6.170) принимают вид:

$$k_x^{(+)} = k_d + ik_m; \quad (6.183)$$

$$k_x^{(-)} = -k_d - ik_m k_x^{(-)} = -k_d - ik_m. \quad (6.184)$$

Замечание. Полученные здесь выражения (6.183) и (6.184) отличаются от приведенных в работе [31] формул (152), (153) знаком перед вторым слагаемым. Такое различие обусловлено изменением знака перед вторым слагаемым под корнем в формулах (142), (143) при переходе к этим формулам от формул (138), (139) той же работы, что нельзя считать достаточно правильным. Контрольная проверка показывает, что такое изменение знака на конечных результатах, полученных в работе [31], практически не сказывается, однако здесь авторы считают необходимым использовать представление поперечного волнового числа в более корректном виде (6.183) и (6.184).

6.8. Влияние размагничивания на поперечное волновое число

В предыдущем разделе показано, что в отсутствие обмена, действительная и мнимая компоненты поперечного волнового числа k_d и k_m связаны с продольным волновым числом k_y соотношениями (формулы (6.181), (6.182) с учетом (6.153)):

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)}\right)^2}} \cdot k_y; \quad (6.185)$$

$$k_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)}\right)^2}} \cdot k_y, \quad (6.186)$$

где параметр размагничивания β связан с волновым числом k_y и толщиной пластины d соотношением (6.45):

$$\beta = \frac{\alpha_p}{2} \left\{ \operatorname{th} \left[d \left(k_y - \frac{\pi}{d} \right) \right] + 1 \right\}, \quad (6.187)$$

где α_p — нормирующий коэффициент, в большинстве случаев лежащий в пределах $0 \leq \alpha_p \leq 0,1$ ([31, форм. (21), (22)]).

В работе [31] основное внимание было уделено дисперсионным свойствам поверхностной волны Дэймона–Эшбаха, тогда как влияние размагничивания на поперечное волновое число рассмотрено недостаточно. Поэтому, прежде чем углубиться в изучение влияния обмена, остановимся несколько более подробно на свойствах поперечного волнового числа в условиях динамического размагничивания без влияния обмена.

Согласно определению k_d и k_m , эти величины являются действительными, так что выражение под внутренним корнем в формулах (6.185) и (6.186) должно быть положительным. В работе [31, разд. 11, форм. (158)], исходя из равенства нулю этого подкоренного выражения, для частоты Ω определено критическое значение:

$$\Omega_c = \sqrt{(\Omega_H + 1)(\Omega_H + \beta)}, \quad (6.188)$$

выше которого условие действительности k_d и k_m выполняется. Как видно из сравнения структуры формул (6.185) и (6.186), при $\Omega = \Omega_c$ имеет место равенство:

$$k_d|_{\Omega=\Omega_c} = k_m|_{\Omega=\Omega_c}. \quad (6.189)$$

С другой стороны, если частота Ω задана, то условие (6.189) можно рассматривать как определение критического значения β_c , выше которого подкоренное выражение становится отрицательным, то есть определяет верхний допустимый предел величины β . Из формулы (6.188) при замене $\Omega_c \rightarrow \Omega$ получаем:

$$\beta_c = \frac{\Omega^2 - \Omega_H^2 - \Omega_H}{\Omega_H + 1}. \quad (6.190)$$

Поскольку основная часть формулы (6.187) представляет собой гиперболический тангенс, на бесконечности равный единице, то условие критичности β_c можно принимать на счет параметра α_p , то есть считать:

$$\alpha_{pc} = \frac{\Omega^2 - \Omega_H^2 - \Omega_H}{\Omega_H + 1}, \quad (6.191)$$

так что зависимость параметра β_c от продольного волнового числа k_y в общем случае принимает вид:

$$\beta_c = \frac{\alpha_{pc}}{2} \left\{ \operatorname{th} \left[d \left(k_y - \frac{\pi}{d} \right) \right] + 1 \right\}. \quad (6.192)$$

Приведем важный для дальнейшего рассмотрения численный пример. При поле $H = 437,5$ Э и намагниченности насыщения $4\pi M_0 = 1750$ Гс, учитывая, что гиромагнитная постоянная γ равна $2,8$ МГц \times Э^{-1} , для частоты $f = 3000$ МГц, в соответствии с формулами (6.23)–(6.24), из (6.188) получаем: $\beta_c = 0,0498$ или, полагая β в виде (6.192), согласно (6.171), получаем: $\alpha_{pc} = 0,0498$.

Рассмотрим теперь, как зависят компоненты поперечного волнового числа k_d и k_m от продольного волнового числа k_y при различных значениях нормирующего коэффициента параметра размагничивания α_p . Воспользуемся приведенными выше значениями параметров, добавив к ним толщину пластины $d = 10$ мкм. Обратимся к рис. 6.1, где такие зависимости показаны в интервале изменения α_p от нуля до $\alpha_{pc} = 0,0498$.

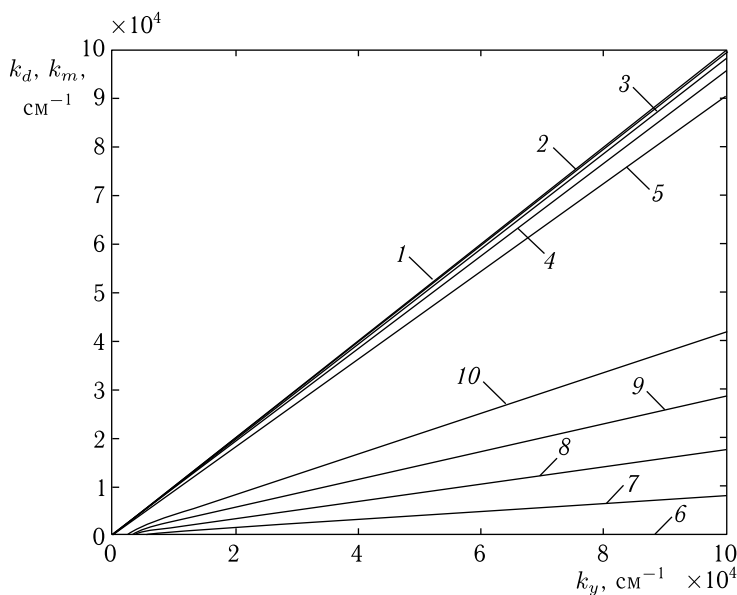


Рис. 6.1. Зависимости составляющих поперечного волнового числа k_d (кривые 1–5) и k_m (кривые 6–10) от продольного волнового числа k_y при различных значениях нормирующего коэффициента параметра размагничивания α_p . Кривые 1–5 построены по формуле (6.185), кривые 6–10 построены по формуле (6.186). Параметр размагничивания β учитывается по формуле (6.187). Значения коэффициента α_p параметра размагничивания: 1, 6 – $\alpha_p = 0$; 2, 7 – $\alpha_p = 0,01$; 3, 8 – $\alpha_p = 0,02$; 4, 9 – $\alpha_p = 0,03$; 5, 10 – $\alpha_p = 0,04$. Параметры: $4\pi M_0 = 1750$ Гс; $H = 437,5$ Э; $d = 10$ мкм; $f = 3000$ МГц

Из рисунка видно, что все зависимости, всюду, кроме начального интервала k_y до приблизительно 5000 см^{-1} , являются прямыми, исходящими из начала координат. При $\alpha_p = 0$, то есть в отсутствие раз-

магничивания, зависимость k_d от k_y (кривая 1) соответствует $k_d = k_y$, как это можно видеть из формулы (6.185). При этом зависимость k_m от k_y (кривая 6) совпадает с горизонтальной осью координат, то есть $k_m = 0$, как это также можно видеть из формулы (6.186).

По мере увеличения α_p зависимости для k_d , оставаясь прямыми, постепенно снижаются, а зависимости для k_m повышаются, причем скорость повышения кривых для k_m значительно превышает скорость спада кривых для k_d . В пределе при $\alpha_p \rightarrow \alpha_{pc}$ обе зависимости должны сойтись в какой-то точке, что соответствовало бы равенству $k_d = k_m$, после чего оборваться в силу недопустимости превышения α_p над α_{pc} . Однако в области прямолинейных зависимостей k_d и k_m от k_y такое «схлопывание» кривых, сопровождаемое их обрывом, наблюдать не удается из-за высокой критичности расположения точки «схлопывания», когда кривые, оставаясь прямыми, становятся почти параллельными.

Не так, однако, обстоит дело в области сравнительно малых значений волнового числа k_y (менее 5000 см^{-1}), где кривые на рис. 6.1 претерпевают некоторый изгиб. Более подробно эта область показана на рис. 6.2, построенном при тех же параметрах, что и рис. 6.1, но в более крупном масштабе.

Из рисунка видно, что, несмотря на некоторое искривление, зависимости k_d и k_m от k_y , по мере увеличения α_p сохраняют ту же тенденцию, что и на рис. 6.1, то есть кривые для k_d снижаются, а кривые для k_m повышаются. Здесь четко видно, что при превышении $\alpha_p = 0,0500$ над критическим значением $\alpha_{pc} = 0,0498$ всего на $0,0002$ (то есть на $0,02\%$) кривая 4 для k_d сходится с кривой 8 для k_m , так что они имеют общую точку, соответствующую $k_y = 6940 \text{ см}^{-1}$. При этом численный расчет с шагом по k_y , равным 10 см^{-1} , дает значения $k_d = 4913 \text{ см}^{-1}$ и $k_m = 4902 \text{ см}^{-1}$, что можно считать совпадением вполне хорошим. Далее этой точки обе кривые обрываются, что соответствует возникновению отрицательности внутреннего корня в формулах (6.185) и (6.186).

Проведенное выше рассмотрение относится к толщине пластины, равной 10 мкм . В то же время, представляет интерес выяснить, что происходит при меньших значениях такой толщины. Некоторым пояснением к такому вопросу является рис. 6.3, где показаны зависимости, подобные приведенным на предыдущих рисунках, но при толщине пластины, равной 1 мкм . Кривые 1 и 4 (пунктирные) на этом рисунке соответствуют толщине 10 мкм и приведены для сравнения.

Из рисунка можно видеть, что участки прямолинейности зависимостей k_d и k_m переместились в сторону увеличения волнового числа k_y . Так, при толщине 10 мкм эти зависимости выравниваются уже при k_y больше 5000 см^{-1} , тогда как при толщине 1 мкм линейность начинается только при k_y больше $60\,000 \text{ см}^{-1}$, то есть выше примерно в 10 раз. Такой сдвиг хорошо соответствует началу сильного влияния

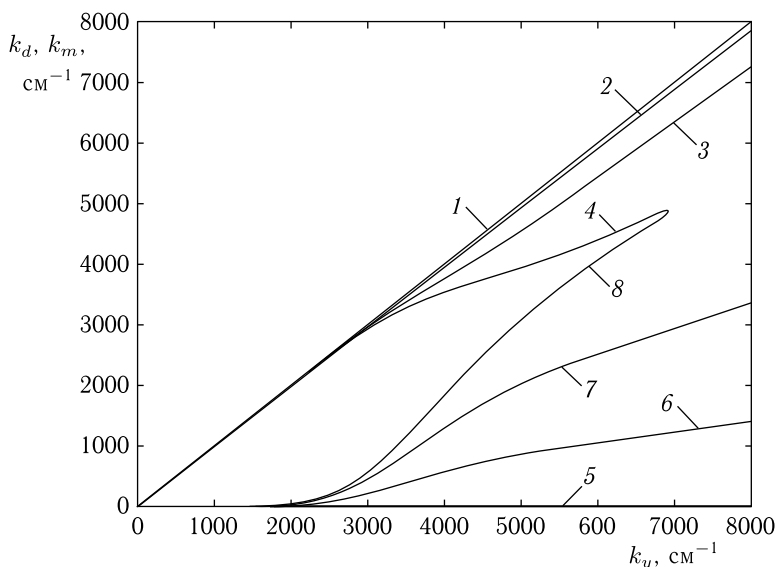


Рис. 6.2. Зависимости составляющих поперечного волнового числа k_d (кривые 1–4) и k_m (кривые 5–8) от продольного волнового числа k_y при различных значениях нормирующего коэффициента параметра размагничивания α_p в области малых значений волнового числа k_y . Кривые 1–4 построены по формуле (6.185), кривые 5–8 построены по формуле (6.186). Параметр размагничивания β учитывается по формуле (6.187). Значения коэффициента α_p параметра размагничивания: 1, 5 — $\alpha_p = 0$; 2, 6 — $\alpha_p = 0,02$; 3, 7 — $\alpha_p = 0,04$; 4, 8 — $\alpha_p = 0,05$. При этом $\alpha_{pc} = 0,0498$. Параметры: $4\pi M_0 = 1750$ Гс; $H = 437,5$ Э; $d = 10$ мкм; $f = 3000$ МГц

размагничивания, то есть перегибу гиперболического тангенса в формуле (6.187), имеющему место при $k_y = \pi/d$, то есть для толщины 10 мкм при $k_y = 3142$ см⁻¹, а для толщины 1 мкм при $k_y = 31416$ см⁻¹ соответственно. Можно видеть, что эти величины по порядку как раз соответствуют началу выпрямления зависимостей k_d и k_m от k_y . До этого момента кривые 2 и 5 ведут себя примерно таким же образом, как кривые 3 и 7 на рис. 6.2.

Кривые 3 и 6, соответствующие превышению параметра $\alpha_p = 0,0500$ над критическим значением, равным по-прежнему $\alpha_{pc} = 0,0498$ (так как выражение (6.191) от толщины не зависит), подобно кривым 4 и 8 на рис. 6.2, тоже «схлопываются», однако теперь координаты точки «схлопывания» равны: $k_y = 61360$ см⁻¹, $k_d = 43431$ см⁻¹, $k_m = 43345$ см⁻¹. Таким образом, при уменьшении толщины в 10 раз эта точка смещается по оси k_y примерно в такое же число раз, что опять-таки связано со сдвигом точки перегиба тангенса в формуле (6.187).

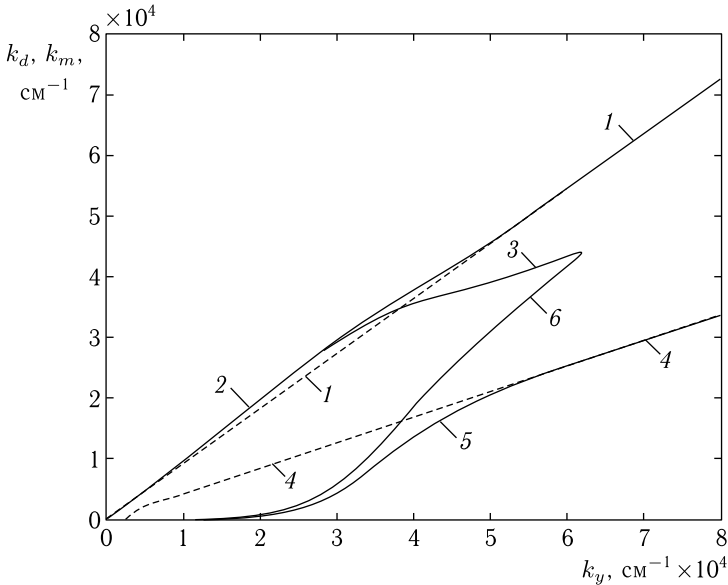


Рис. 6.3. Зависимости составляющих поперечного волнового числа k_d (кривые 1–3) и k_m (кривые 4–6) от продольного волнового числа k_y при различных значениях нормирующего коэффициента параметра размагничивания α_p при малой толщине пластины. Кривые 1–3 построены по формуле (6.185), кривые 4–6 построены по формуле (6.186). Параметр размагничивания β учитывается по формуле (6.187). Кривые 1, 4 (пунктирные) соответствуют толщине пластины $d = 10$ мкм, при этом $\alpha_p = 0,04$. Кривые 2, 3, 5, 6 (сплошные) соответствуют толщине пластины $d = 1$ мкм. Кривые 2, 5 соответствуют $\alpha_p = 0,04$; кривые 3, 4 соответствуют — $\alpha_p = 0,05$ (при этом $\alpha_{pc} = 0,0498$). Параметры: $4\pi M_0 = 1750$ Гс; $H = 437,5$ Э; $f = 3000$ МГц

6.9. Уравнение для определения поперечного волнового числа при заданном продольном волновом числе с учетом обменного взаимодействия

Обратимся теперь к рассмотрению поперечного волнового числа при учете обменного взаимодействия. При этом параметр Ω_1^2 в формулах (6.154)–(6.156) заменяется на Ω_{1k}^2 , в соответствии с формулой (6.127), которая через посредство (6.119) содержит теперь k_x^2 , так что уравнения (6.159) и (6.167) относительно k_x^2 теряют биквадратный характер и не могут быть разрешены относительно простыми средствами. Рассмотрим теперь решение этих уравнений более подробно.

Итак, выше получены соотношения (6.150) и (6.151), представляющие собой формулы для определения $k_x^{(+)}$ и $k_x^{(-)}$, выраженные через $\mu_{1,2}^{(\pm)}$ и $\nu^{(\pm)}$, которые, согласно (6.140)–(6.161), сами зависят от $k_x^{(+)}$

и $k_x^{(-)}$. Поэтому (6.150) и (6.151) в общем случае можно рассматривать, как уравнения для определения $k_x^{(+)}$ и $k_x^{(-)}$ соответственно.

Рассмотрим эти уравнения по отдельности.

Обратимся сначала к уравнению для $k_x^{(+)}$ вида (6.150):

$$k_x^{(+)} = \left(i \frac{\nu^{(+)}}{2\mu_1^{(+)}} + \frac{\sqrt{4\mu_1^{(+)}\mu_2^{(+)} - (\nu^{(+)})^2}}{2\mu_1^{(+)}} \right) k_y. \quad (6.193)$$

Раскроем скобки, умножим обе части на $2\mu_1^{(+)}/k_y$ и перенесем первое слагаемое в левую часть. Для упрощения формы записи индекс (+) пока опустим. В результате получаем:

$$\frac{2\mu_1 k_x}{k_y} - i\nu = \sqrt{4\mu_1\mu_2 - \nu^2}. \quad (6.194)$$

Возведем обе части в квадрат, раскроем скобки, умножим обе части на k_y^2 и разделим на $4\mu_1$. В результате получим уравнение для k_x вида:

$$\mu_1 k_x^2 - i\nu k_x k_y - \mu_2 k_y^2 = 0. \quad (6.195)$$

Здесь параметры μ_1 , μ_2 , ν определяются формулами (6.140)–(6.142), а также (6.136), (6.137) и (6.134), содержащими $k_x^{(+)}$.

Подставляя (6.140)–(6.142), умножая на (6.136) с учетом (6.134) и приводя подобные члены, получаем:

$$\left(\Omega_{1k}^2 - \beta \frac{k_y^2}{k_x^2 + k_y^2} \right) k_x^2 - i \cdot 2\beta \frac{k_x^2 k_y^2}{k_x^2 + k_y^2} - \left(\Omega_{1k}^2 - \beta \frac{k_x^2}{k_x^2 + k_y^2} \right) k_y^2 = 0. \quad (6.196)$$

Раскрывая скобки, приводя подобные члены и умножая все на $(k_x^2 + k_y^2)$, получаем:

$$\Omega_{1k}^2 (k_x^4 - k_y^4) - i \cdot 2\beta k_x^2 k_y^2 = 0. \quad (6.197)$$

Пользуясь (6.137) и (6.134), преобразуем Ω_{1k}^2 :

$$\Omega_{1k}^2 = -Q^2 (k_x^2 + k_y^2)^2 - Q(2\Omega_H + \beta + 1)(k_x^2 + k_y^2) + [\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)]. \quad (6.198)$$

Подставляя это выражение в (6.197) и раскрывая скобки, получаем:

$$-Q^2 (k_x^2 + k_y^2)^2 (k_x^4 - k_y^4) - Q(2\Omega_H + \beta + 1)(k_x^2 + k_y^2)(k_x^4 - k_y^4) + [\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)](k_x^4 - k_y^4) - i \cdot 2\beta k_x^2 k_y^2 = 0. \quad (6.199)$$

Найдем промежуточные выражения:

$$(k_x^2 + k_y^2)^2 (k_x^4 - k_y^4) = k_x^8 + 2k_x^6 k_y^2 - 2k_x^2 k_y^6 - k_y^8; \quad (6.200)$$

$$(k_x^2 + k_y^2)(k_x^4 - k_y^4) = k_x^6 + k_x^4 k_y^2 - k_x^2 k_y^4 - k_y^6. \quad (6.201)$$

Подставляя эти выражения в (6.199), раскрывая скобки и выполняя группировку слагаемых в порядке убывания степени k_x , получаем:

$$\begin{aligned}
 & -Q^2 k_x^8 - Q[2Qk_y^2 + (2\Omega_H + \beta + 1)]k_x^6 + \\
 & \quad + \{-Q(2\Omega_H + \beta + 1)k_y^2 + [\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)]\}k_x^4 + \\
 & \quad + [2Q^2 k_y^4 + Q(2\Omega_H + \beta + 1)k_y^2 - i \cdot 2\beta]k_y^2 k_x^2 + \\
 & \quad + \{Q^2 k_y^4 + Q(2\Omega_H + \beta + 1)k_y^2 - [\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)]\}k_y^4 = 0.
 \end{aligned} \tag{6.202}$$

Это — уравнение для определения k_x при заданном значении k_y и известных нормированных параметрах обмена Q , поля Ω_H и частоты Ω . Параметр β определяется в соответствии с приближением, принятым в разд. 6.8 (формула (6.192)).

Это уравнение имеет восьмой порядок, однако содержит только четные степени k_x , то есть соответствует уравнению четвертой степени относительно k_x^2 .

Можно видеть, что в отсутствие обмена, то есть при $Q = 0$ уравнение (6.202) переходит в полученное в работе [31] уравнение (128) с учетом введенного там же обозначения (114).

Структура полученного уравнения (6.202) крайне громоздка. Упростим ее путем введения вспомогательных обозначений.

Введем обозначения:

$$g_8 = -Q^2; \tag{6.203}$$

$$g_6 = -Q[2Qk_y^2 + (2\Omega_H + \beta + 1)]; \tag{6.204}$$

$$g_4 = -Q(2\Omega_H + \beta + 1)k_y^2 + [\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)]; \tag{6.205}$$

$$g_{2a} = Q[2Qk_y^2 + (2\Omega_H + \beta + 1)]k_y^4; \tag{6.206}$$

$$g_{2b} = -2\beta k_y^2; \tag{6.207}$$

$$g_0 = \{Q^2 k_y^4 + Q(2\Omega_H + \beta + 1)k_y^2 - [\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)]\}k_y^4. \tag{6.208}$$

С этими обозначениями уравнение (6.202) принимает вид:

$$g_8 k_x^8 + g_6 k_x^6 + g_4 k_x^4 + (g_{2a} + i g_{2b}) k_x^2 + g_0 = 0. \tag{6.209}$$

Можно видеть, что относительно k_x^2 это уравнение является полным уравнением четвертой степени, так что оно, в принципе, может быть разрешено аналитически, например с помощью метода Феррари (разд. 2.9.2) или другого эквивалентного [3, 207, 208] с последующим извлечением квадратного корня для получения непосредственно k_x . Однако, учитывая обусловленный влиянием размагничивания комплексный характер волнового числа k_x [31], можно полагать, что получаемое при этом аналитическое выражение будет крайне громоздким.

Поэтому рассмотрим возможность численного нахождения действительной и мнимой частей числа k_x , для чего, подобно работе [31, форм. (152)], представим его в виде:

$$k_x = k_d + ik_m, \quad (6.210)$$

где k_d и k_m являются действительными.

Поскольку уравнение (6.202) записано в порядке убывания степени k_x , будем располагать степени k_x и вводимые далее вспомогательные обозначения, руководствуясь тем же порядком.

Возводя (6.210) в четные степени (технически, начиная с меньших степеней), приводя подобные члены и выделяя действительную и мнимую части, после чего, располагая найденные выражения в порядке убывания степени k_x , получаем:

$$k_x^8 = (k_d^8 - 28k_d^6k_m^2 + 70k_d^4k_m^4 - 28k_d^2k_m^6 + k_m^8) + i \cdot 8k_dk_m(k_d^6 - 7k_d^4k_m^2 + 7k_d^2k_m^4 - k_m^6). \quad (6.211)$$

$$k_x^6 = (k_d^6 - 15k_d^4k_m^2 + 15k_d^2k_m^4 - k_m^6) + i \cdot 2k_dk_m(3k_d^4 - 10k_d^2k_m^2 + 3k_m^4); \quad (6.212)$$

$$k_x^4 = (k_d^4 - 6k_d^2k_m^2 + k_m^4) + i \cdot 4k_dk_m(k_d^2 - k_m^2); \quad (6.213)$$

$$k_x^2 = (k_d^2 - k_m^2) + i \cdot 2k_dk_m. \quad (6.214)$$

Обозначая слагаемые в выражениях (6.211)–(6.214) через «с» с индексами, цифровая часть которых соответствует степени k_x , а буквенная «а» или «b», соответственно, действительной или мнимой части степени k_x , получаем:

$$c_{8a} = k_d^8 - 28k_d^6k_m^2 + 70k_d^4k_m^4 - 28k_d^2k_m^6 + k_m^8; \quad (6.215)$$

$$c_{8b} = 8k_dk_m(k_d^6 - 7k_d^4k_m^2 + 7k_d^2k_m^4 - k_m^6); \quad (6.216)$$

$$c_{6a} = k_d^6 - 15k_d^4k_m^2 + 15k_d^2k_m^4 - k_m^6; \quad (6.217)$$

$$c_{6b} = 2k_dk_m(3k_d^4 - 10k_d^2k_m^2 + 3k_m^4); \quad (6.218)$$

$$c_{4a} = k_d^4 - 6k_d^2k_m^2 + k_m^4; \quad (6.219)$$

$$c_{4b} = 4k_dk_m(k_d^2 - k_m^2); \quad (6.220)$$

$$c_{2a} = k_d^2 - k_m^2; \quad (6.221)$$

$$c_{2b} = 2k_dk_m; \quad (6.222)$$

С этими обозначениями (6.211)–(6.214) принимают вид:

$$k_x^8 = c_{8a} + ic_{8b}. \quad (6.223)$$

$$k_x^6 = c_{6a} + ic_{6b}; \quad (6.224)$$

$$k_x^4 = c_{4a} + ic_{4b}; \quad (6.225)$$

$$k_x^2 = c_{2a} + ic_{2b}; \quad (6.226)$$

Подставляя (6.203)–(6.208) и (6.223)–(6.224) в (6.209), получаем:

$$g_8(c_{8a} + ic_{8b}) + g_6(c_{6a} + ic_{6b}) + g_4(c_{4a} + ic_{4b}) + (g_{2a} + ig_{2b})(c_{2a} + ic_{2b}) + g_0 = 0. \quad (6.227)$$

Раскрывая скобки и выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$(g_8c_{8a} + g_6c_{6a} + g_4c_{4a} + g_{2a}c_{2a} - g_{2b}c_{2b} + g_0) + i(g_8c_{8b} + g_6c_{6b} + g_4c_{4b} + g_{2a}c_{2b} + g_{2b}c_{2a}) = 0. \quad (6.228)$$

Равенство нулю этого уравнения требует, чтобы его действительная и мнимая части по отдельности тоже равнялись нулю. Из этого условия получаем два уравнения:

$$g_8c_{8a} + g_6c_{6a} + g_4c_{4a} + g_{2a}c_{2a} - g_{2b}c_{2b} + g_0 = 0; \quad (6.229)$$

$$g_8c_{8b} + g_6c_{6b} + g_4c_{4b} + g_{2a}c_{2b} + g_{2b}c_{2a} = 0. \quad (6.230)$$

Это — система уравнений относительно k_d и k_m при условии заданного k_y . Параметрами являются Q , Ω_H , β , а также Ω . При этом параметр размагничивания β зависит от волнового числа k_y в соответствии с формулой (6.187). Нормирующим параметром для Q , Ω_H , Ω является намагниченность M_0 .

Введем два вспомогательных выражения:

$$w1 = g_8c_{8a} + g_6c_{6a} + g_4c_{4a} + g_{2a}c_{2a} - g_{2b}c_{2b} + g_0; \quad (6.231)$$

$$w2 = g_8c_{8b} + g_6c_{6b} + g_4c_{4b} + g_{2a}c_{2b} + g_{2b}c_{2a}. \quad (6.232)$$

При этих обозначениях система (6.229)–(6.230) принимает вид:

$$w_1 = 0; \quad (6.233)$$

$$w_2 = 0. \quad (6.234)$$

Система (6.233)–(6.234) содержит два уравнения для двух неизвестных k_d и k_m , в которую, кроме постоянных Ω_H , d и Q , входит один меняющийся (текущий) параметр — частота Ω . То есть эта частота должна быть задана изначально одновременно с постоянными параметрами задачи Ω_H , d и Q .

Аналитическое решение системы (6.233)–(6.234) на данном этапе рассмотрения (то есть без каких-либо упрощающих приближений) представляется вряд ли возможным. С другой стороны, здесь имеются два уравнения с двумя неизвестными, поэтому простой метод поиска нуля, пригодный для одного уравнения с одним неизвестным, здесь неприменим.

Для численного решения подобных систем традиционно применяется метод итераций [259, стр. 148], базирующийся на предварительном графическом рассмотрении общего вида решения.

Воспользуемся здесь несколько иной процедурой, подобной графической, но реализуемой в аналитическом виде. Будем полагать, что, согласно [31], величина k_d мало отличается от k_y , то есть k_d можно считать известным параметром. Такое предположение позволяет рассматривать каждое из уравнений (6.233) и (6.234) как независимое относительно k_m , так что решение каждого из них методом поиска нуля по одной переменной позволяет найти два значения k_{m1} и k_{m2} . Далее, варьируя k_d , определим его значение, при котором получаемые значения k_{m1} и k_{m2} будут близкими друг другу с заданной точностью. Таким образом, в результате будут найдены значения k_d и k_m , одновременно удовлетворяющие обоим уравнениям (6.233) и (6.234). Рассматривая далее частоту Ω , как параметр, можно будет найти искомую зависимость $k_x^{(+)}$ от Ω , то есть первую из необходимых для получения дисперсионного соотношения (второй является зависимость $k_x^{(-)}$ от Ω , которая будет рассмотрена далее).

6.9.1. Алгоритмизация решения системы уравнений для компонент поперечного волнового числа

С целью удобства алгоритмизации при машинном расчете приведем последовательность шагов решения системы (6.233)–(6.234).

Шаг № 1.

Задание начальных параметров Q , Ω_H , d , Ω , а также значения заданной точности Δk_m .

Шаг № 2.

Задание значения k_y .

Шаг № 3.

Вычисление параметра β по формуле (6.187).

Шаг № 4.

Задание начального значения k_d , например в виде $k_d = k_y$ или более точно — с использованием формулы (6.185).

Шаг № 5.

Нахождение значения k_{m1} из уравнения (6.229) путем поиска нуля при изменении k_m .

Шаг № 6.

Нахождение значения k_{m2} из уравнения (6.230) путем поиска нуля при изменении k_m .

Шаг № 7.

Нахождение разности $k_{m1} - k_{m2}$ и сравнение со значением заданной точности Δk_m .

Если разность больше заданной точности, то делается шаг по k_d (подобный шагу № 4), после чего повторяется нахождение k_{m1} и k_{m2} (шаги № 5 и № 6).

Если разность меньше заданной точности, то полученное значение k_{m1} (или k_{m2}) принимается за искомое значение k_m .

Таким образом, при заданном значении k_d получается значение k_m . Эта пара значений соответствует частоте Ω (при условии, что задана частота Ω_H). По полученной паре находится значение

$$k_x^{(+)} = k_d + ik_m, \quad (6.235)$$

которое используется далее при вычислении дисперсионного соотношения.

6.10. Соотношение между компонентами волнового числа в реальных условиях

При расчете в соответствии с алгоритмом, приведенным в разд. 6.9.1, первичное значение k_d является как бы известным заранее, то есть полагается равным k_y .

Для обоснования сделанного предположения о равенстве $k_d = k_y$, выполним численную оценку для реальных условий. Обратимся к формуле (6.185) и прежде всего отметим, что в отсутствие размагничивания (то есть при $\beta = 0$) значение k_d просто равно k_y . При β отличном от нуля, имеется критическое значение частоты, выше которого k_d и k_m являются действительными (как того требует физический смысл задачи, отмеченный при введении формулы (6.210)).

Критическая частота, определяемая условием действительности внутреннего корня в формулах (6.185), (6.186), имеет вид (5.162):

$$\Omega_c = \sqrt{(\Omega_H + 1)(\Omega_H + \beta)}. \quad (6.236)$$

Возьмем поле $H = 437,5$ Э и намагниченность $4\pi M_0 = 1750$ Гс (типичные значения для экспериментов с магнитостатическими волнами в железиттриевом гранате [1, гл. 3, 4, 7]).

Положим $\beta = 0,2$. В табл. 5.1 разд. 5.5.2 показано, что при этом критическая частота равна 3675 МГц. Зададим частоту, заведомо выше критической — 4000 МГц. При этих значениях, в соответствии с (6.23), (6.24), получаем: $\Omega_c = 0,7500$, $\Omega = 0,8163$, $\Omega_H = 0,2500$.

Подстановка этих значений в формулу (6.185) дает $k_d = 0,9362 \cdot k_y$. Аналогичным образом при $\beta = 0,1$ получаем $k_d = 0,9881 \cdot k_y$, а при $\beta = 0,01$ находим: $k_d = 0,9999 \cdot k_y$.

Таким образом, можно видеть, что в реальной ситуации k_d отличается от k_y не более чем на единицы процентов.

Из структуры формулы (6.185) видно, что отличие возрастает при приближении частоты Ω к критическому значению Ω_c . При этом внутренний корень в формуле (6.185) становится равным нулю, так что k_d отличается от k_y на $1/\sqrt{2}$ и становится равным 0,7071 от k_y . То есть даже в таком критическом случае отличие составляет всего 30%. Однако уже при частоте 3800 МГц (то есть при превышении критической на 3,4%) при $\beta = 0,2$ величина k_d составляет 0,8795 от k_y , то есть

отличие падает до 12%, а при $\beta = 0,1$ та же величина равна 0,9812, то есть теперь отличие составляет всего 2%.

Итак, принятое выше предположение $k_d = k_y$, с учетом того, что оно упрощает расчет в весьма существенной степени, можно считать вполне приемлемым.

Приведем также для справки величину k_m , определяемую формулой (6.186). При тех же значениях $\Omega = 0,8163$ и $\Omega_H = 0,2500$, а также при $\beta = 0,2$, из формулы (6.186) получаем: $k_m = 0,3516 \cdot k_y$. Аналогичным образом при $\beta = 0,1$ находим: $k_m = 0,1539 \cdot k_y$. При $\beta = 0,01$ эта же величина равна: $k_m = 0,0142 \cdot k_y$. В отсутствие размагничивания, то есть при $\beta = 0$ всегда k_m равно нулю. Важно отметить, что при любых значениях β (при условии действительности внутреннего корня в формулах (6.185) и (6.186)), величина k_m всегда значительно меньше, чем k_d .

Возвращаясь к определению величины k_d , заметим, что, несмотря на вполне приемлемую точность, демонстрируемую приведенными оценками, более точный учет отличия k_d от k_y в условиях как размагничивания, так и обмена, требующий, как отмечено выше, поиска нуля по двум переменным, может составить заслуживающий внимания предмет для отдельной работы.

6.11. Проявление двойственности поперечного волнового числа

Прделанное в разд. 6.9–6.10 рассмотрение касается компоненты волнового числа $k_x^{(+)}$, определяемой формулой (6.150). Обратимся теперь к другой компоненте $k_x^{(-)}$, определяемой формулой (6.151):

$$k_x^{(-)} = \left(i \frac{\nu^{(-)}}{2\mu_1^{(-)}} - \frac{\sqrt{4\mu_1^{(-)}\mu_2^{(-)} - (\nu^{(-)})^2}}{2\mu_1^{(-)}} \right) k_y, \quad (6.237)$$

где $\mu_{1,2}^{(-)}$ и $\nu^{(-)}$ определяются формулами (6.118)–(6.120), а также (6.138), (6.139) и (6.135), содержащими $k_x^{(+)}$.

Раскроем скобки, умножим обе части на $2\mu_1^{(-)}/k_y$ и перенесем первое слагаемое в левую часть. Для упрощения формы записи индекс $(-)$ пока опустим. В результате получаем:

$$\frac{2\mu_1 k_x}{k_y} - i\nu = -\sqrt{4\mu_1\mu_2 - \nu^2}. \quad (6.238)$$

Возведем обе части в квадрат, раскроем скобки, умножим обе части на k_y^2 и разделим на $4\mu_1$. В результате получим уравнение для k_x вида:

$$\mu_1 k_x^2 - i\nu k_x k_y - \mu_2 k_y^2 = 0. \quad (6.239)$$

Можно видеть, что это уравнение полностью совпадает с уравнением (6.195), полученным в разд. 6.9 для $k_x^{(+)}$, с учетом замены формул (6.140)–(6.142), а также (6.136), (6.137) и (6.134), на формулы (6.143)–(6.145), а также (6.138), (6.139) и (6.135). Поскольку перечисленные предварительные формулы отличаются друг от друга только значением верхнего индекса (+) или (–), а по структуре полностью совпадают, то и решение уравнения (6.239) его будет тем же самым, что и уравнения (6.195), то есть будет определяться решением уравнений (6.233)–(6.234). С учетом противоположности знаков между $k_x^{(+)}$ и $k_x^{(-)}$ (подобно формулам (6.183)–(6.184)), решение будет иметь вид:

$$k_x^{(-)} = -k_d - ik_m, \quad (6.240)$$

где k_d и k_m в отсутствие обмена, определяются теми же, что и для (6.183) формулами (6.185), (6.186), а с учетом обмена — решениями системы уравнений (6.233)–(6.234).

6.12. Расчет компонент поперечного волнового числа по полной системе уравнений методом поиска нуля

Рассмотрим теперь зависимости компонент поперечного волнового числа от величины продольного путем решения полной системы (6.233)–(6.234) в соответствии с алгоритмом, приведенном в разд. 6.9.1. На данном этапе ограничимся рассмотрением влияния только размагничивания, то есть положим константу обмена q равной нулю. Для простоты записи индекс « x » в обозначениях поперечных компонент волнового числа k_{xd} , k_{xm} , k_{xm1} , k_{xm2} опустим, то есть будем использовать обозначения k_d , k_m , k_{m1} , k_{m2} .

Обратимся к рис. 6.4, где показаны зависимости составляющих поперечного волнового числа k_d , k_m , k_{m1} , k_{m2} от продольного волнового числа k_y . Компоненты k_d , k_m соответствуют решению задачи без учета обмена, когда их нахождение сводится к решению биквадратных уравнений (6.159) и (6.167), что можно сделать аналитически точно. В то же время, компоненты k_{m1} , k_{m2} находятся из решения приведенных выше уравнений (6.233) и (6.234), которые решаются методом поиска нуля в соответствии с алгоритмом, приведенном в разд. 6.9.1 при установлении k_d по формуле (6.185) (то есть по первым шести шагам алгоритма).

Замечание. На рис. 6.4 все кривые приведены в полном интервале значений k_y от нуля до $7 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$. Следует отметить, что такое представление является несколько идеализированным, ибо реализованный в рамках настоящей работы численный расчет имел с обеих сторон ограничения. Так, максимально достижимое значение волнового числа k_y составляло $6,4 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$, по превышении которого происходило переполнение разрядной сетки машины (10^{38}), делавшее дальнейший

расчет недопустимым. Контрольная проверка показала, что переполнения можно избежать путем введения нормировки волнового числа на толщину пластины, однако получаемые при этом формулы отличаются заметной громоздкостью, поэтому в настоящей работе нормировка не проводилась. Ограничение снизу по волновому числу происходит из-за сложного комплексного характера уравнения (6.202), приводящего к скачкообразной зависимости исследуемых параметров от k_y . В настоящей работе оптимальным признано минимальное значение $k_y = 1200 \text{ см}^{-1}$, выше которого кривые на рис. 6.4 принимали упорядоченный вид. Таким образом, выше и ниже приведенных ограничений кривые на рис. 6.4 продолжены линейным образом, вполне

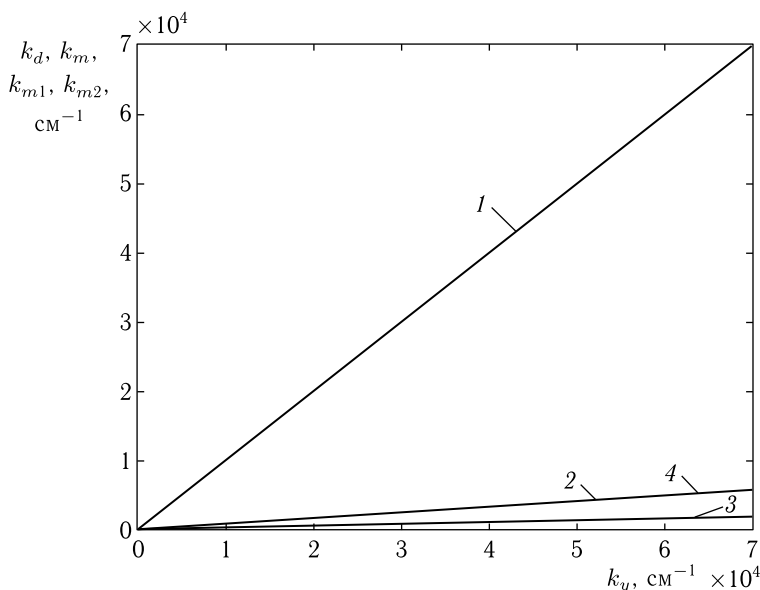


Рис. 6.4. Зависимости составляющих поперечного волнового числа k_d , k_m , k_{m1} , k_{m2} от продольного волнового числа k_y : 1 — компонента k_d по формуле (6.185); 2 — компонента k_m по формуле (6.186); 3 — компонента k_{m1} по уравнению (6.233) при k_d по формуле (6.185); 4 — компонента k_{m2} по уравнению (6.234) при k_d по формуле (6.185). Параметры: $4\pi M_0 = 1750 \text{ Гс}$; $H = 437,5 \text{ Э}$; $d = 10 \text{ мкм}$; $f = 3000 \text{ МГц}$; $\beta = 0,01$

соответствующим линейному характеру основных частей этих кривых. Можно полагать, что более подробное рассмотрение выхода за рамки приведенных ограничений, особенно в сторону увеличения волнового числа, может составить предмет для отдельной работы.

Из рисунка можно видеть, что при принятых параметрах (в том числе малости k_d) все приведенные зависимости компонент волновых чисел k_d , k_m , k_{m1} , k_{m2} от k_y представляют собой прямые линии, выходящие

из начала координат. При этом зависимость k_d от k_y (кривая 1) с высокой точностью соответствует прямой с угловым коэффициентом, равным единице, то есть влияние величины β , ввиду ее малости, сказывается весьма незначительно. Зависимость k_m от k_y (кривая 2), оставаясь прямой, проходит значительно ниже зависимости k_d от k_y (кривая 1), что получается благодаря знаку «минус» перед внутренним корнем в формуле (6.186). Зависимость k_{m2} от k_y (кривая 4), определяемая равенством нулю мнимой части уравнения (6.228) (то есть уравнением (6.230) или (6.234)), с высокой точностью совпадает с зависимостью k_m от k_y (кривая 2). Однако зависимость k_{m1} от k_y (кривая 3), определяемая равенством нулю действительной части уравнения (6.228) (то есть уравнением (6.229) или (6.233)), проходит значительно ниже зависимости k_m от k_y (ниже кривой 2).

Таким образом, можно видеть, что между зависимостями k_{m1} (кривая 3) и k_{m2} (кривая 4) от k_y имеется заметное различие, причем по мере увеличения k_y это различие возрастает.

Согласно приведенному выше алгоритму (разд. 6.9.1), необходимым условием совместности системы (6.233)–(6.234) является равенство значений k_{m1} и k_{m2} , для достижения чего следует варьировать величину k_d (то есть несколько отступать в обе стороны от формулы (6.185)).

Однако проверка показала, что прямое последовательное изменение k_d с постоянным (в том числе весьма малым) шагом вблизи единицы, где ожидается максимальная близость между значениями k_{m1} и k_{m2} , приводит к сильному разбросу значений k_{m1} из-за скачкообразного изменения получаемой зависимости в этой области. Поэтому в качестве способа вариации k_d было принято умножения этой величины на вспомогательный параметр ξ , близкий к единице, с последующей вариацией этого параметра.

Полученные зависимости k_{m1} и k_{m2} от параметра ξ представлены на рис. 6.5. При построении опорное значение волнового числа k_y было выбрано равным 6000 см^{-1} , где, согласно рис. 6.4, расхождение между k_{m1} и k_{m2} являлось заведомо довольно значительным.

Из рисунка видно, что зависимость k_{m2} от k_y (кривая 2) представляет собой горизонтальную прямую линию на уровне 5040 см^{-1} , совпадающую с зависимостью k_m от k_y , что соответствует совпадению кривых 2 и 4 на рис. 6.4. Однако зависимость k_{m1} от k_y (кривая 1) испытывает два сильных скачка вблизи значений ξ равных 0,9988 и 1,0034. При значении $\xi = 1$ величина k_{m1} принимает значение около 1900 см^{-1} (точка А), что отличается от значения 5040 см^{-1} , соответствующего величине k_{m2} , довольно сильно.

Замечание. Можно полагать, что появление скачков обусловлено весьма сложным характером комплексного уравнения (6.202), в общем случае по переменной имеющего восьмую степень. Поэтому на данном этапе поиском способа ликвидации скачков заниматься не будем, а примем их как должное и рассмотрим, что из их наличия следует.

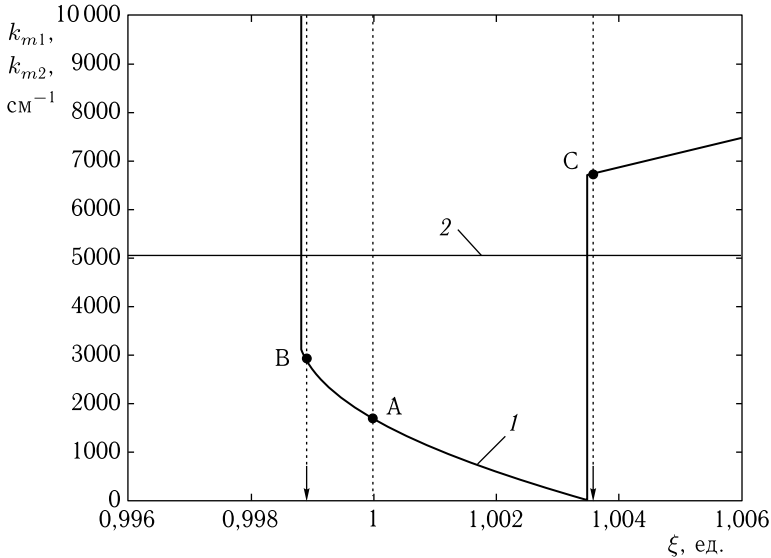


Рис. 6.5. Зависимости мнимых составляющих поперечного волнового числа k_{m1} и k_{m2} от коэффициента ξ при действительной части k_d . 1 — компонента k_{m1} по уравнению (6.233); 2 — компонента k_{m2} по уравнению (6.234). Параметры — те же, что приняты при построении рис. 6.4

Таким образом, из характера кривой 1 можно видеть, что она нигде не приближается вплотную к кривой 2, разве что в точках разрыва, что нельзя считать физически реализуемым.

В такой ситуации, по-видимому, можно считать наиболее рациональным положением значений параметра ξ тем точкам, где кривая 1 наиболее близко подходит к кривой 2. Таких точек две — при $\xi = 0,9989$ (точка В) и при $\xi = 1,0036$ (точка С). Эти значения на оси k_m отмечены стрелками. При этом значение k_{m1} в первой из этих точек соответствует 3000 см^{-1} , то есть отличается от значения 5040 см^{-1} на 40 % вниз, а во второй соответствует 6800 см^{-1} , то есть отличается от 5040 см^{-1} на 35 % вверх.

Таким образом, можно считать, что совместность системы (6.233)–(6.234) выполняется с точностью до 40 %.

Как отмечено выше, рис. 6.5 построен при $k_y = 6000 \text{ см}^{-1}$, однако из рис. 6.4 видно, что расхождение между k_{m1} и k_{m2} сильно зависит от величины k_y . Поэтому представляет интерес рассмотреть зависимости k_{m1} и k_{m2} от k_y в широком диапазоне изменения этой величины. Обратимся к рис. 6.6, где показаны такие зависимости при различных значениях коэффициента ξ . Кривая 1 соответствует компоненте k_{m2} , совпадающей с компонентой k_m (как это видно из совпадения кривых 2 и 4 на рис. 6.4). Кривая 2 соответствует $\xi = 1$, то есть зависимости

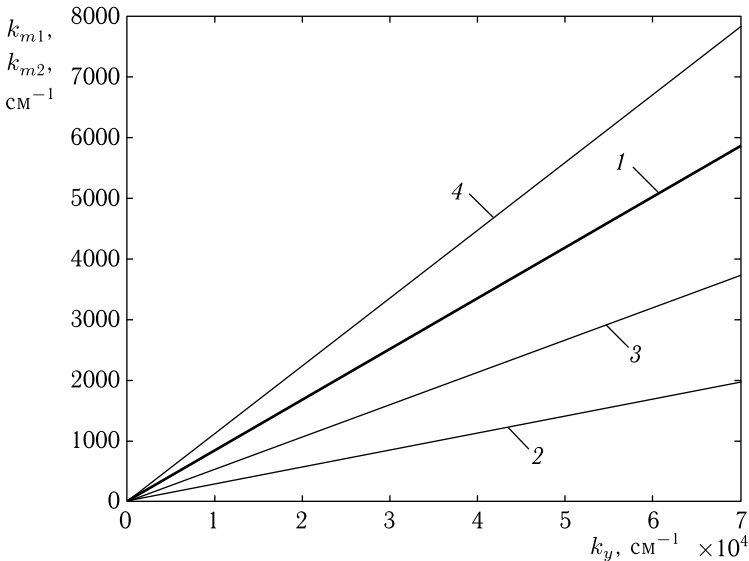


Рис. 6.6. Зависимости составляющих поперечного волнового числа k_{m1} , k_{m2} от продольного волнового числа k_y при различных значениях коэффициента ξ при компоненте k_d . 1 — компонента k_{m2} по уравнению (6.234); 2, 3, 4 — компонента k_{m1} по уравнению (6.233); 2 — при $\xi = 1$; 3 — при $\xi = 0,9989$; 4 — при $\xi = 1,0036$. Параметры — те же, что приняты при построении рис. 6.4.

k_{m1} от k_y без какой-либо коррекции (кривая 3 на рис. 6.4). Кривые 3 и 4 соответствуют зависимостям k_{m1} от k_y с коррекцией, вносимой коэффициентом ξ при значениях 0,9989 и 1,0036, соответствующих точкам В и С на рис. 6.5.

Из рисунка видно, что кривые 3 и 4 располагаются по обе стороны от кривой 1, но ближе не приближаются, так как приближение запрещено скачками кривой 1 на рис. 6.5. Тем не менее, видно, что отклонение кривых 3 и 4 от кривой 1 происходит при изменении параметра ξ , то есть продольного волнового числа, всего на 0,3%. В то же время, отличие зависимости k_{m2} от k_y от зависимости k_m от k_y вообще отсутствует, так что даже если взять среднюю величину от k_{m1} и k_{m2} , то ее отличие от величины k_m будет составлять всего 0,15%, то есть величину весьма малую.

6.12.1. Замечание о предпочтительном выборе мнимой компоненты поперечного волнового числа

Как показано в предыдущем разделе, решение уравнений (6.233) и (6.234) при заданном значении k_d приводит к двум значениям мнимой компоненты поперечного волнового числа k_{m1} и k_{m2} , различие между которыми весьма мало и составляет всего доли процента.

Поэтому «в нулевом приближении» можно не заниматься подробным вычислением компонент k_{m1} и k_{m2} путем решения уравнений (6.233) и (6.234) методом поиска нуля, а просто положить, что в отсутствие обмена компоненты поперечного волнового числа k_d и k_m определяются формулами (6.185) и (6.186).

Не так, однако, обстоит дело при учете обменного взаимодействия, введение которого на формулах (6.185) и (6.186) никак не сказывается, то есть определяемые по ним величины k_d и k_m остаются теми же самыми. Разумное предположение говорит, что зависимость этих величин от обменного взаимодействия все же должна иметь место. Поэтому при рассмотрении обмена обе компоненты поперечного волнового числа k_d и k_m должны вычисляться путем решения полного уравнения (6.202) с учетом структуры входящих в него выражений, то есть системы (6.233)–(6.234), методом поиска нуля.

Как видно из рис. 6.4, а также будет отмечено далее, зависимость k_{m2} от k_y практически точно соответствует зависимости k_m от k_y , тогда как зависимость k_{m1} от k_y от этой зависимости заметно отклоняется. В то же время, одновременное вычисление обеих зависимостей k_{m1} и k_{m2} от k_y с последующим нахождением среднего, существенно усложняет аппарат численного расчета, приводя, по меньшей мере, к его удвоению. Поэтому для начала пройдем по более легкому пути, то есть ограничимся решением только одного уравнения (6.234), дающего величину k_{m2} , в отсутствие обмена совпадающую с величиной k_m .

Замечание. В качестве оправдания выбора для нахождения мнимой составляющей волнового числа k_m при задании $k_d = k_y$ именно уравнения (6.234), можно считать тот факт, что это уравнение, получается из равенства нулю как раз мнимой части полного уравнения (6.228). Тогда естественно было бы ожидать, что уравнение (6.233) при задании $k_d = k_y$ должно дать действительную часть волнового числа, то есть то же значение k_d . Однако контрольная проверка показывает, что это не так, а именно: решение уравнения (6.233) при задании $k_d = k_y$ получается завышенным относительно величины k_d более чем в два раза. Разрешение такого парадокса требует более подробного исследования, возможность выполнения которого автор предоставляет любознательному читателю.

6.12.2. Нули функции, определяющей компоненты поперечного волнового числа

В разд. 6.9 получена система из двух уравнений (6.233)–(6.234) для двух неизвестных k_d и k_m . В разд. 6.9.1 предложен алгоритм нахождения величины k_m при заданном значении k_d . Однако в разд. 6.12.1 показано, что более правдоподобное решение для k_m дает лишь уравнение (6.234). В то же время, это уравнение содержит обе исходные переменные k_d и k_m . Можно полагать, что выбор этого уравнения в качестве основного для определения k_m , наложит также определенные условия на выбор k_d .

Решение уравнения (6.234) проведено методом поиска нуля при переборе значений k_m . Однако из структуры функции (6.232), лежащей в основе уравнения (6.234) можно видеть, что входящие в нее выражения c_{8a} , c_{8b} , c_{6a} , c_{6b} , c_{4a} , c_{2b} (формулы (6.215)–(6.219), (6.222)) полностью симметричны относительно входящих в них переменных k_d и k_m , то есть не меняются при их замене друг на друга, а выражения c_{4b} , c_{2a} (формулы (6.220)–(6.221)) при этом только меняют знак. То есть можно полагать, что функция w^2 с точностью до знака равна относительно обеих переменных k_d и k_m . То есть при поиске нуля можно фиксировать k_d и варьировать k_m или фиксировать k_m и варьировать k_d . При этом нули должны приходиться на оба значения той и другой переменной.

Для обоснования такого положения обратимся к рис. 6.7, где показаны зависимости функции w^2 от переменных k_d и k_m при постоянном значении одной из них и варьировании другой. Постоянной переменной зададим значение, определяемое формулой (6.185) при $k_y = 3 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$. Варьируемую переменную будем менять в пределах, заведомо перекрывающих возможные значения k_d и k_m , определяемые рис. 6.4 при $k_y = 3 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$.

Из рисунка видно, что кривая 1 имеет два нуля в точках А и В, которые соответствуют значениям k_m и k_d при $k_y = 3 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$, как это можно видеть из сравнения с кривыми 1 и 2 на рис. 6.4 при том же значении k_d . Кривая 2 имеет один нуль в точке С, зеркально симметричной относительно нуля с точкой А, а также второй нуль в той же точке С, что и кривая 1.

Таким образом, нули кривой 1 обеспечивают оба требуемых значения переменных k_d и k_m , а кривая 2 — то же значение k_d и значение k_m с обратным знаком. То есть можно полагать, что информация, обеспечиваемая кривой 2, является избыточной, а для получения обоих значений k_d и k_m достаточен поиск нуля при заданном значении k_d и варьировании k_m .

Следует заметить, что в разд. 6.12 такой вариант решения уравнения (6.234) обеспечивал нахождение только одной переменной k_m . Это произошло по той причине, что там варьирование k_m начиналось с нуля и продолжалось в сторону увеличения k_m . При этом программа находила первый попавшийся нуль, который соответствует точке А на рис. 6.7, после чего переходила к выводу данных. Для нахождения второго нуля, соответствующего точке В на рис. 6.7, варьирование k_m следует начинать с точки, заведомо превышающей первый уже найденный нуль, то есть по рис. 6.7 — правее точки А. Проверка показывает, что для оптимального нахождения второго нуля, соответствующего величине k_d , достаточно взять значение k_m , рассчитанное по формуле (6.186) и превысить его хотя бы на несколько процентов.

Таким образом, можно считать, что применение процедуры поиска нуля к функции w^2 , определяемой формулой (6.232), позволяет найти обе компоненты поперечного волнового числа — как k_d , так и k_m .

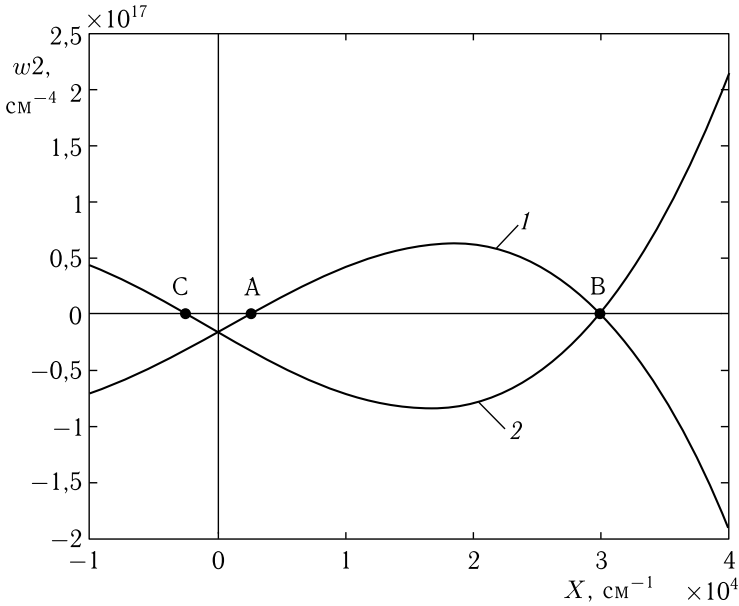


Рис. 6.7. Зависимости функции w_2 от переменных k_d и k_m при постоянном значении одной из них и варьировании другой. Переменная q имеет обобщенный характер. 1 — постоянно k_d , варьируется k_m (то есть $x \rightarrow k_m$); 2 — постоянно k_m , варьируется k_d (то есть $x \rightarrow k_d$). Параметры: $4\pi M_0 = 1750$ Гс; $H = 437,5$ Э; $d = 10$ мкм; $f = 3000$ МГц; $\beta = 0,01$; $k_y = 3 \cdot 10^4$ см $^{-1}$. Координаты точек: А — $x = -0,256 \cdot 10^4$ см $^{-1}$; В — $x = 0,256 \cdot 10^4$ см $^{-1}$; С — $x = 3,000 \cdot 10^4$ см $^{-1}$

6.12.3. Влияние обменного взаимодействия на компоненты поперечного волнового числа

Напомним, что выполненное до этого момента рассмотрение относится к случаю отсутствия обменного взаимодействия, так что теперь перейдем к его учету.

Обратимся к рис. 6.8, где показаны зависимости действительной k_d и мнимой k_m компонент поперечного волнового числа от продольного волнового числа k_y при различных значениях константы обменного взаимодействия q , построенные путем решения уравнения (6.234). Кривые 1 и 7 соответствуют отсутствию обмена, то есть совпадают с кривыми 1 и 2 на рис. 6.4, которые построены по формулам (6.185) и (6.186).

Из рисунка можно видеть, что обменное взаимодействие приводит к повышению зависимостей k_d и k_m от k_y по сравнению с зависимостями 1 и 7, соответствующими отсутствию обмена. Относительное повышение кривых для k_m (8–12) превышает таковое для кривых, соответствующих k_d , примерно в 3–4 раза. При этом мнимая компонента

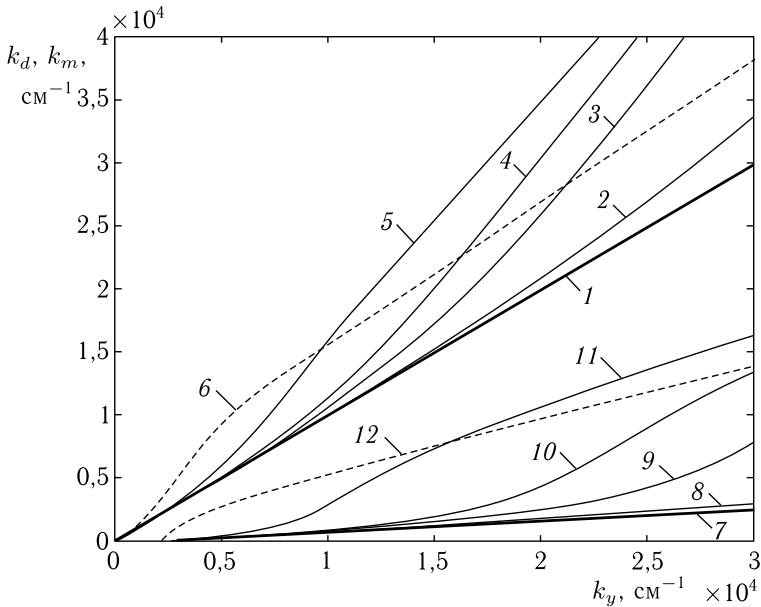


Рис. 6.8. Зависимости действительной k_d и мнимой k_m компонент поперечного волнового числа от продольного волнового числа k_y при различных значениях константы обменного взаимодействия q относительно константы, соответствующей ЖИГ: $q_0 = 4,23 \cdot 10^{-11} \text{ см}^2$. 1-6 — компонента k_d , 7-12 — компонента k_m . Значения константы обмена: 1, 7 — $q = 0$; 2, 8 — $q = q_0$; 3, 9 — $q = 5q_0$; 4, 10 — $q = 10q_0$; 5, 11 — $q = 50q_0$; 6, 12 — $q = 1000q_0$. Параметры: $4\pi M_0 = 1750 \text{ Гс}$; $H = 437,5 \text{ Э}$; $d = 10 \text{ мкм}$; $f = 3000 \text{ МГц}$; $\beta = 0,01$

поперечного волнового числа k_m всегда остается меньше действительной компоненты k_d , однако по мере увеличения обмена их относительное различие уменьшается. Так, например, при $k_y = 2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$, отношение k_d к k_m в отсутствие обмена (кривые 1 и 7) составляет около 6 раз, а при константе $q = 50q_0$ (кривые 5 и 11) падает до 3 раз. Все кривые растут тем быстрее, чем k_y больше, однако их рост не соответствует какому-либо простому закону типа степенного с постоянным показателем. Так, при сравнительно малых значениях k_y рост кривых по мере увеличения k_y близок к квадратичному, однако далее замедляется. Такое замедление особенно хорошо видно при большом значении константы обмена, то есть для кривых 5 и особенно 11. По мере увеличения константы обмена повышение кривых 2-5 и 8-11 относительно исходных 1 и 7 происходит примерно пропорционально росту константы, однако при дальнейшем ее увеличении такое повышение замедляется, а при стремлении константы обмена к бесконечности (кривые 6 и 12, пунктир) при k_y больше $(1,0-1,5) \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ вообще сменяется спадом.

Тем не менее, в любом случае, то есть при любом значении константы обмена, зависимости k_d и k_m от k_y всегда проходят выше таких зависимостей, соответствующих отсутствию обмена, что является их общим свойством, требующим интерпретации в первую очередь.

6.13. Качественная интерпретация наблюдаемых явлений

В проделанном рассмотрении (а также частично в работе [31]) выявлены следующие три положения:

- 1) учет размагничивания приводит к формированию мнимой части поперечного волнового числа k_m ;
- 2) по мере увеличения размагничивания абсолютная величина мнимой части поперечного волнового числа k_m увеличивается;
- 3) по мере увеличения обменного взаимодействия абсолютная величина мнимой части поперечного волнового числа k_m также увеличивается.

Рассмотрим кратко качественные причины таких явлений. Для простоты отвлечемся от поверхностного характера волны и предположим, что распределение динамической намагниченности по толщине пластины более или менее однородно.

6.13.1. Роль динамического размагничивания

Сначала обратимся к рассмотрению роли динамического размагничивания, то есть к первым двум приведенным выше положениям.

Для интерпретации первого положения, то есть образования мнимой части волнового числа, обратимся к рис. 6.9, где показана схема образования внешних полей размагничивания и обусловленной ими деформации фронта волны в толстой (а, б) и тонкой (в, г) пластине.

На этом рисунке представлен вид с торца магнитной пластины при условии распространения волны в плоскости рисунка. Рисунок построен в геометрии классической задачи Дэймона–Эшбаха (рис. 2.1), где плоскость Oyz декартовой системы координат $Oxyz$ совпадает с плоскостью пластины, а ось Ox ей перпендикулярна. Волновой вектор \mathbf{k} распространяющейся в плоскости пластины магнитостатической волны направлен вдоль оси Oy . Благодаря изотропному характеру среды, направление распространения волны совпадает с направлением волнового вектора. Линиями АВ и CD обозначены поверхности пластины, линиями MN и PQ обозначены поверхности, до которых проникает динамическое поле размагничивания внутрь магнитной пластины. Глубина проникновения поля размагничивания внутрь пластины p имеет тот же порядок величины, что и длина волны λ .

В отсутствие волны намагниченность во всем объеме пластины ориентирована вдоль направления постоянного поля, то есть вдоль оси Oz . Волна, распространяющаяся в плоскости пластины вдоль оси Oy , представляет собой периодическое чередование отклонений

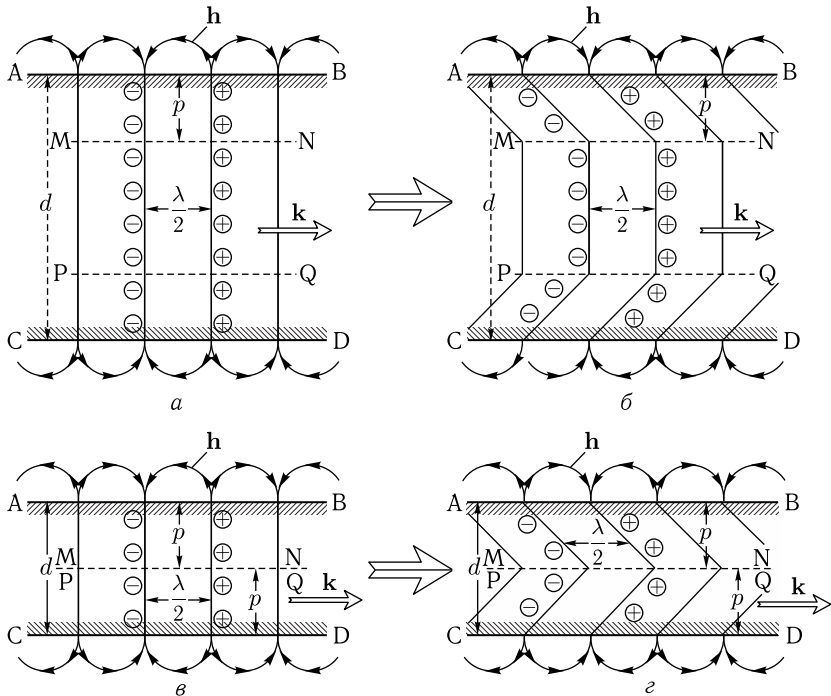


Рис. 6.9. Схема образования внешних полей размагничивания \mathbf{h} и деформации фронта волны в толстой ($a, б$) и тонкой ($в, г$) пластине. $a, в$ — классическая волна Дэймона–Эшбаха (учет размагничивания отсутствует); $б, г$ — волна Дэймона–Эшбаха с учетом динамического размагничивания. Сплошные вертикальные линии — поверхности максимального отклонения намагниченности. Плюсы и минусы в кругах — магнитные заряды того и другого знака. d — толщина пластины; p — глубина проникновения поля размагничивания внутрь пластины; λ — длина волны

намагниченности того и другого знака от оси Oz . Поверхности, на которых отклонение намагниченности максимально, перпендикулярны направлению распространения волны (оси Oy), то есть ориентированы в плоскости Oxz . Эти поверхности чередуются вдоль оси Oy с периодичностью, равной длине волны λ .

Рассмотрим два случая толщины пластины — толстую пластину, толщина которой значительно превышает длину волны $d \gg \lambda$ и тонкую пластину, толщина которой того же порядка или меньше длины волны $d \leq \lambda$. Первому случаю соответствует рис. 6.9, a и рис. 6.9, $б$, второму — рис. 6.9, $в$ и рис. 6.9, $г$.

Поверхности максимального отклонения намагниченности можно рассматривать как поверхности, на которых располагаются магнитные заряды того или другого знака. На рисунке такие поверхности

показаны вертикальными линиями с расположенными рядом с ними магнитными зарядами (плюсы и минусы в кругах).

В толстой пластине большая часть поверхностей максимального отклонения представляет собой плоскости, расстояние между которыми значительно меньше толщины пластины. То есть относительно длины волны можно считать такие поверхности в их плоскостях (параллельных плоскости Oxz) протяженными до бесконечности. В силу противоположности знаков зарядов между соседствующими бесконечно протяженными плоскостями, поля, создаваемые этими зарядами, взаимно компенсируются [218, 219].

Вблизи поверхностей пластины, благодаря геометрическому ограничению поверхностей максимального отклонения, такая компенсация нарушается. Расположенные на этих поверхностях магнитные заряды образуют динамические поля размагничивания \mathbf{h} (фактически в этом случае представляющие собой «вылезавшие» за пределы пластины поля рассеяния), силовые линии которых показаны на рисунке за пределами плоскостей пластины. Такие же поля располагаются симметрично относительно плоскостей пластины, проникая в ее глубину на расстояние p , однако здесь для простоты рисунка они не показаны.

Итак, распространение волны вдоль оси Oy сопровождается образованием динамических полей размагничивания вдоль обеих плоскостей пластины, причем на достаточной глубине внутри пластины поля рассеяния не образуются. Таким образом, внутренняя и близкая к поверхности части распространяющейся волны находятся в неодинаковых условиях. При этом часть волны, близкая к поверхности, «тащит за собой» динамические поля размагничивания, тогда как удаленная от поверхности часть волны от подобного «груза» освобождена. Можно полагать, что формирование такого «груза» приводит в определенному сопротивлению движения волны, вследствие чего внешние части волны в своем движении несколько отстают от внутренних. То есть, поверхности максимального отклонения намагниченности, без учета влияния поверхностей пластины, являющиеся плоскими от одной поверхности пластины до другой, за счет влияния поверхностей пластины приобретают вблизи них наклонные участки, тем более выраженные, чем поле размагничивания больше.

Глубина проникновения p таких наклонных участков внутрь пластины имеет тот же порядок величины, что и расстояние между поверхностями максимального отклонения намагниченности, то есть что и длина волны. При одной и той же длине волны в толстой пластине, толщина которой значительно превышает длину волны, влияние наклонных участков невелико, тогда как в тонкой пластине, толщина которой меньше длины волны, влияние наклонных участков может стать преобладающим.

Таким образом, при рассмотрении распространения волны в толстой пластине влияние полей размагничивания можно не учитывать (что и реализуется в классической задаче Дэймона–Эшбаха [1, 2, 114]),

тогда как в тонкой пластине учет влияния этих полей становится принципиально необходимым.

Рассмотрим теперь формирование мнимой части поперечного волнового числа (то есть образование k_m), для чего обратимся к рис. 6.10, где показана схема такого формирования за счет деформации фронта волны при учете размагничивания в толстой (а) и тонкой (б) пластине.

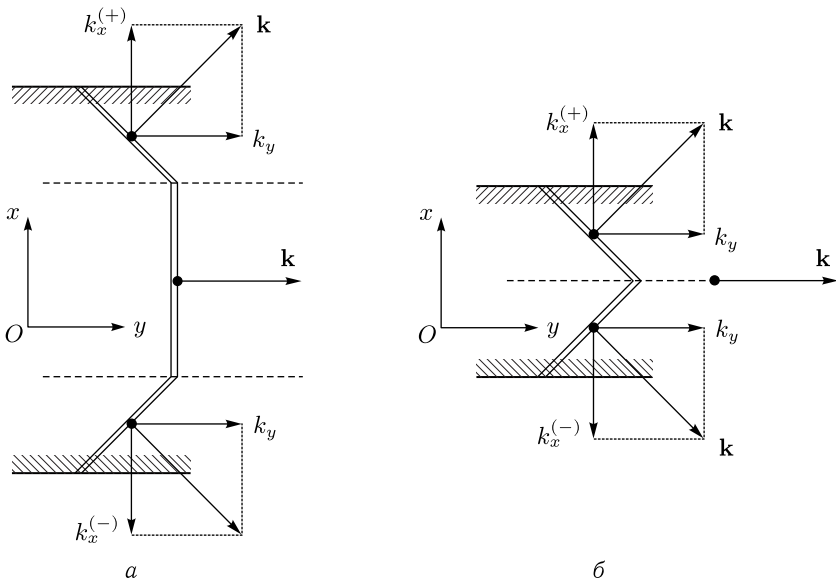


Рис. 6.10. Схема формирования поперечной составляющей волнового вектора за счет деформации фронта волны при наличии размагничивания в толстой (а) и тонкой (б) пластине

На рисунке показано формирование полного поперечного волнового числа $k_x^{(\pm)}$, то есть не проведено различие между его действительной и мнимой частями, поскольку, как можно видеть из формул (6.235) и (6.240), их вклад в полное значение $k_x^{(\pm)}$, может различаться лишь по величине и комплексному характеру, а по формальной структуре полностью одинаков.

Из рисунка можно видеть, что формирование $k_x^{(\pm)}$ происходит за счет отклонения полного волнового вектора распространяющейся волны \mathbf{k} от оси Oy вблизи той и другой поверхностей пластины, в силу наклона прилегающих к поверхности пластины поверхностей постоянного отклонения намагнитченности. То есть, образование $k_x^{(\pm)}$ происходит за счет того, что в наклоненных участках вектор \mathbf{k} по-прежнему продолжает сохранять перпендикулярность поверхности постоянного отклонения намагнитченности.

Таким образом, формирование $k_x^{(\pm)}$ в случаях как малой, так и большой толщины, происходит исключительно за счет наклонных участков поверхностей максимального отклонения намагниченности. При этом, при сохранении длины волны, в силу равенства протяженности таких участков в обоих случаях (так как глубина проникновения поля размагничивания одна и та же), величины $k_x^{(\pm)}$ также остаются одними и теми же. Влияние же их на характер распространения волны, в первую очередь на скорость распространения и величину переносимой энергии, в случае толстой пластины незначительно, а в случае тонкой является преобладающим.

Итак, первое положение, приведенное в разд. 6.13, качественно интерпретировано.

Обратимся теперь к интерпретации второго положения, то есть увеличению мнимой части волнового числа по мере увеличения размагничивания. В силу обратной пропорциональности между волновым числом и длиной волны, удобнее будет рассмотреть не волновое число, а длину волны, которая с увеличением размагничивания должна уменьшаться.

Рассмотрим рис. 6.11, где представлена схема изменения поперечной компоненты длины волны λ_x при изменении величины размагничивания. Рис. 6.11, *а* соответствует малой величине размагничивания, рис. 6.11, *б* — средней и рис. 6.11, *в* — большой. Относительные вели-

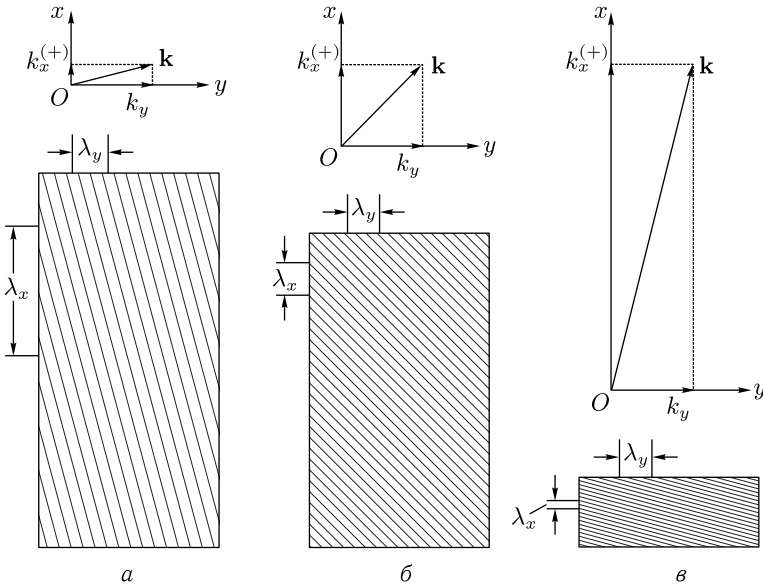


Рис. 6.11. Схема уменьшения поперечной длины волны при увеличении размагничивания: *а* — размагничивание малое, *б* — размагничивание среднее, *в* — размагничивание большое

чины размагничивания здесь заданы условно и преследуют цель только увеличения наглядности изображения.

В верхней части рисунка представлены разложения на компоненты полного волнового вектора \mathbf{k} в области верхнего наклонного участка поверхности максимального отклонения намагниченности (на нижнем участке происходит то же самое с точностью до зеркального отражения). Ниже показаны схемы расположения поверхностей максимального отклонения намагниченности в пределах тех же участков.

В рамках предложенного выше тормозящего влияния поля размагничивания на движение волны, можно считать, что увеличение размагничивания приводит к увеличению торможения, так что наклон отклоненных участков поверхности максимального отклонения увеличивается. При этом, как видно из последовательного рассмотрения верхнего ряда рисунков, при сохранении длины волны λ_y в направлении оси Oy , то есть при сохранении длины компоненты вектора k_y , компонента $k_x^{(+)}$ возрастает. Такое возрастание соответствует увеличению наклона поверхностей максимального отклонения, то есть уменьшению длины волны λ_x вдоль оси Ox . То есть по мере увеличения размагничивания мнимая часть волнового числа $(k_m)_x$, что и требовалось показать.

Таким образом, второе положение, приведенное в разд. 6.13, также качественно интерпретировано.

6.13.2. Роль обменного взаимодействия

Рассмотрим теперь роль обменного взаимодействия, соответствующую третьему из приведенных в разд. 6.13 положений.

Для интерпретации этой роли обратимся к рис. 6.12, где показана схема изменения поперечного волнового числа или соответствующей длины волны при увеличении обменного взаимодействия.

В верхней части рисунка представлен вид с торца магнитной пластины, подобный таковому, изображенному на рис. 6.9. Здесь рис. 6.12, *a* соответствует малой величине обменного взаимодействия, а рис. 6.12, *b* — большой его величине.

Важным свойством обменного взаимодействия при неоднородном распределении намагниченности является стремление эту неоднородность убрать или, во всяком случае, максимально уменьшить. Это можно видеть из общей формы записи плотности энергии обменного взаимодействия [4, стр. 108, форм. (5.58)–(5.60)], которая прямо пропорциональна квадрату производной от намагниченности по координате. Условие минимизации энергии требует уменьшения этой производной, то есть более равномерного распределения намагниченности.

Будем полагать, что имеет место динамическое размагничивание, то есть поверхность максимального отклонения намагниченности не является плоской, а имеет два наклонных участка, прилегающие к поверхностям магнитной пластины. Из формы такой поверхности, показанной в верхней части рис. 6.12, *a*, можно видеть, что намагниченность распределена равномерно только в промежутке между точками R

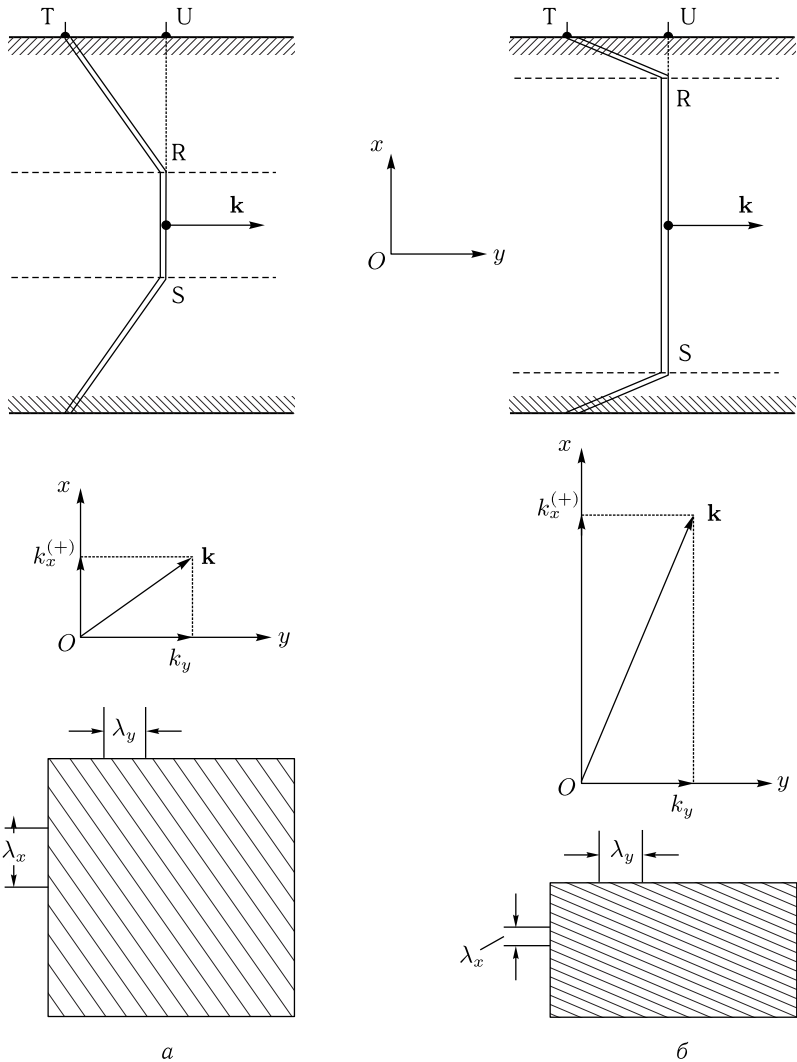


Рис. 6.12. Схема уменьшения поперечной длины волны при увеличении обменного взаимодействия: а — обменное взаимодействие малое, б — обменное взаимодействие большое

и S (то есть между плоскостями MN и PQ на рис. 6.9), а вне этих точек имеются наклонные участки, относительно распределения намагниченности представляющие собой неоднородности. Обменное взаимодействие стремится уменьшить эти неоднородности, то есть расширить участок между точками R и S за счет уменьшения относительной высоты наклонных участков, как это показано на рис. 6.12, б.

Можно полагать, что протяженность наклонных участков по оси Oy не меняется, так как она определяется длиной волны вдоль этой оси. В этом случае сжатие таких участков вдоль оси Ox означает увеличение их наклона. При этом, как видно из представленного несколько ниже на рисунке разложения вектора \mathbf{k} по координатам, поперечная составляющая волнового числа $k_x^{(+)}$ увеличивается. Такое увеличение $k_x^{(+)}$ соответствует уменьшению поперечной составляющей длины волны λ_x , как это показано в нижней части рисунка.

Таким образом, увеличение обменного взаимодействия приводит к увеличению поперечного волнового числа, что и требовалось показать в соответствии с третьим положением разд. 6.13.

Замечание. Следует заметить, что приведенное выше предположение о неизменности протяженности наклонных участков вдоль оси Oy , не является бесспорным. Можно полагать, что значительное увеличение обменного взаимодействия может пересилить действие размагничивания настолько, что такие участки вообще исчезнут и поверхность максимального отклонения намагниченности примет вид, показанный на рис. 6.9, а. Предварительная проверка, однако, показывает, что даже при увеличении константы обменного взаимодействия на порядок по сравнению с таковой для ЖИГ, влияние размагничивания остается достаточно сильным, то есть можно полагать, что наклонные участки все равно остаются, хотя и сильно прижимаясь к поверхностям пластины. По-видимому, здесь борьба между обменом и размагничиванием подобна таковой в пленках смешанных ферритов-гранатов, где доменная граница при выходе на поверхность пленки испытывает «скручивание» [168, стр. 124–126, рис. 8.9, рис. 8.10]. Более подробное рассмотрение этого вопроса может явиться темой для отдельной задачи.

6.13.3. Роль жесткости системы

В предыдущих разделах показана возможность изменения поперечного волнового числа за счет изменения формы поверхности максимального отклонения намагниченности.

Рассмотрим теперь другую возможность изменения поперечного волнового числа, происходящую из аналогии с механическими колебаниями.

В основе волнового процесса в общем случае лежат колебания намагниченности вокруг равновесного положения. Проводя аналогию с механикой, можно считать, что любые колебания представляют собой периодический переход энергии колеблющейся системы от потенциального состояния к кинетическому, причем в основе первого лежит возвращающая (противодействующая смещению) сила, а в основе второго — инертная масса.

В магнитном случае равновесное положение состоит в полностью однородной ориентации намагниченности. В отсутствие обмена это положение задается внешним полем, полем анизотропии формы или

магнитной кристаллографической анизотропии. При отклонении намагниченности от этого равновесного состояния возникает поле размагничивания, стремящееся вернуть ее в это состояние. То есть имеет место возвращающая сила.

При наличии обменного взаимодействия однородное равновесное состояние обеспечивается силами обмена, стремящимися выстроить намагниченность во всем пространстве в одном направлении. При локальном отклонении намагниченности от этого равновесного состояния, возникает сила обменного взаимодействия, стремящаяся вернуть намагниченность в это состояние.

Таким образом, в обоих случаях, как в случае размагничивания, так и в случае обменного взаимодействия, при отклонении намагниченности от равновесного состояния возникает возвращающая сила, стремящаяся вернуть ее в это состояние. При этом, чем больше размагничивание или обмен, тем возвращающая сила больше.

Можно образно считать, что увеличение как размагничивания, так и обмена приводит к «стеснению» отклонения намагниченности от равновесного состояния. В случае однородных колебаний такое «стеснение» должно приводить к увеличению частоты собственных колебаний системы как целого. Однако для протяженного объекта, например типа струны, можно полагать, что «стеснение» отклонения намагниченности эквивалентно увеличению продольной жесткости системы. В более жесткой системе скорость распространения волны увеличивается, то есть длина волны растет, так что волновое число уменьшается. То есть увеличение размагничивания или обмена должно приводить к уменьшению продольного волнового числа. При этом, в силу определенной пропорциональности (например, для размагничивания определяемой формулами (6.185), (6.186)), поперечное волновое число также должно уменьшаться.

С учетом данных, приведенных в разделах 6.13.1, 6.13.2, а также в настоящем, можно полагать, что изменение поперечного волнового числа при изменении как размагничивания, так и обмена подвержено влиянию двух факторов, а именно: изменению конфигурации поверхности максимального отклонения намагниченности и изменению жесткости системы, действующих в противоположных направлениях. То есть результирующее изменение волнового числа должно определяться компромиссом между этими факторами. Из рассмотрения зависимостей поперечного волнового числа от величины параметров размагничивания и обмена можно полагать, что преобладающим является первый фактор, то есть изменение конфигурации поверхности максимального отклонения намагниченности.

Следует отметить, что более подробное рассмотрение вопроса о взаимном соотношении обоих факторов, в том числе на модельном уровне, может явиться предметом для отдельной задачи.

6.14. Дисперсионное соотношение

Настоящий раздел является непосредственным продолжением предыдущего, направленным на получение дисперсионного соотношения для поверхностной волны типа Дэймона–Эшбаха с учетом как размагничивания, так и неоднородного обмена. Расчет дисперсионного соотношения в большей части аналогичен выполненному в гл. 5 для случая размагничивания без обмена, однако учет обменного взаимодействия накладывает ряд особенностей, поэтому приведем его здесь достаточно подробно.

6.14.1. Общая структура компонент тензора магнитной проницаемости

Главной средой для распространения волны является пластина, обладающая магнитными свойствами, поэтому начнем рассмотрение с получения тензора магнитной проницаемости ее материала.

Следуя работе [32], будем полагать тензор магнитной проницаемости в виде:

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \nu_1 & 0 \\ -\nu_2 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.241)$$

В работе [32] показано, что для частного случая распространения волны вдоль оси Oy , то есть при условии:

$$k_z = 0, \quad (6.242)$$

компоненты μ_1 , μ_2 , ν_1 , ν_2 тензора (6.241), а также необходимый далее параметр ν , с учетом размагничивания и обмена, определяются выражениями (6.128)–(6.132) с учетом (6.126) (6.127), (6.119), а также (6.23)–(6.25) и (6.21).

В силу двойственности поперечного волнового числа $k_x^{(\pm)}$, компоненты тензора μ_1 , μ_2 , ν_1 , ν_2 также будут иметь двойственный характер. В разделах 6.17–6.19 будет выполнен их подробный расчет сначала при $k_x \rightarrow k_x^{(+)}$, а затем при $k_x \rightarrow k_x^{(-)}$.

6.14.2. Общая постановка задачи о распространении поверхностной волны

Обратимся теперь к общей постановке задачи о распространении поверхностной волны в геометрии, представленной на рис. 5.1.

Условия магнитостатики, имеющие вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0; \quad (6.243)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (6.244)$$

где:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}, \quad (6.245)$$

позволяют ввести, подобно (2.53), потенциал ψ для переменного поля такой, что:

$$\mathbf{h} = \text{grad } \psi = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\}. \quad (6.246)$$

Подобно (5.181)–(5.187), запишем систему уравнений и граничных условий для потенциалов в трех областях, показанных на рис. 5.1, а также на границах между ними.

Уравнения:

область 1 — вне феррита (уравнение Пуассона):

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = 0; \quad (6.247)$$

область 2 — внутри феррита (уравнение Уокера):

$$\mu_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0; \quad (6.248)$$

область 3 — вне феррита (уравнение Пуассона):

$$\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} = 0. \quad (6.249)$$

Граничные условия:

$$\mu_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \Big|_{x=-\frac{d}{2}} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{d}{2}}; \quad (6.250)$$

$$\mu_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \Big|_{x=\frac{d}{2}} = \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \Big|_{x=\frac{d}{2}}; \quad (6.251)$$

$$\psi_2 \Big|_{x=-\frac{d}{2}} = \psi_1 \Big|_{x=-\frac{d}{2}}; \quad (6.252)$$

$$\psi_2 \Big|_{x=\frac{d}{2}} = \psi_3 \Big|_{x=\frac{d}{2}}. \quad (6.253)$$

В этих выражениях параметры μ_1 , μ_2 , ν_1 , ν_2 , а также ν , представляющие собой компоненты тензора магнитной проницаемости (6.241) при наличии размагничивания и обмена, определяются выражениями (6.128)–(6.132) с учетом (6.126) (6.127), (6.119), а также (6.23)–(6.25) и (6.21).

6.14.3. Решение общей задачи методом разделения переменных

Согласно методу разделения переменных, потенциалы могут быть представлены в виде:

$$\psi_1 = X_1 Y Z; \quad (6.254)$$

$$\psi_2 = X_2 Y Z; \quad (6.255)$$

$$\psi_3 = X_3 Y Z, \quad (6.256)$$

где $X_{1,2,3}$ зависят только от x , Y — только от y и Z — только от z .

Замечание. Следует заметить, что применение метода разделения переменных к уравнениям типа Пуассона (6.247) и (6.249) является классическим приемом решения подобных уравнений, подробно разобранном, например, в учебной монографии [207]. Некоторые особенности имеет лишь уравнение Уокера (6.248), содержащее смешанную производную по x и y , затрудняющую разделение переменных по классике. Метод решения уравнения такого типа, использованный в работе [31], подробно описан в монографии [4, на стр. 73–75]. Учитывая определенную ограниченность использованного в работе [31] приема, в той же монографии [4, на стр. 75–84] приведена подробная методология более универсального и полного решения подобных уравнений. Здесь методика решения таких уравнений в конспективном виде приведена в разд. 2.8.

Полное решение задачи для потенциалов во всех трех областях имеет вид (5.222)–(5.226):

часть решения, зависящая только от x :

$$X_1 = Ae^{k_x^e x}; \quad (6.257)$$

$$X_2 = A_2 e^{k_x^{(+)} x} + B_2 e^{k_x^{(-)} x}; \quad (6.258)$$

$$X_3 = Be^{-k_x^e x}; \quad (6.259)$$

часть решения, зависящая только от B_2 и B , одинаковая во всех областях:

$$Y = e^{-ik_y y}; \quad (6.260)$$

$$Z = e^{-ik_z z}; \quad (6.261)$$

причем выполняется соотношение (5.227):

$$(k_x^e)^2 = k_y^2 + k_z^2. \quad (6.262)$$

Произвольные коэффициенты A , A_2 , B_2 , B можно определить путем подстановки решения (6.254)–(6.256) с учетом (6.257)–(6.262) в граничные условия (6.250)–(6.253). Требование нетривиальности решения получаемой при этом системы уравнений и даст искомое дисперсионное соотношение.

6.14.4. Вывод дисперсионного соотношения из решения и граничных условий

Итак, для вычисления дисперсионного соотношения все подготовительные действия выполнены. Решение исходной задачи представлено в виде потенциалов (6.254)–(6.256), явный вид которых определяется формулами (6.257)–(6.261). Для получения дисперсионного соотношения это решение следует подставить в граничные условия (6.250)–(6.253).

Такая подстановка приводит к системе уравнений для коэффициентов A , A_2 , B_2 , B :

$$-Ak_x^e e^{-\delta} + A_2 \varepsilon^{(+)} e^{-\rho^{(-)}} + B_2 \varepsilon^{(-)} e^{-\rho^{(-)}} = 0; \quad (6.263)$$

$$A_2 \varepsilon^{(+)} e^{\rho^{(+)}} + B_2 \varepsilon^{(-)} e^{\rho^{(-)}} + B k_x^e e^{-\delta} = 0; \quad (6.264)$$

$$-A e^{-\delta} + A_2 e^{-\rho^{(+)}} + B_2 e^{-\rho^{(-)}} = 0; \quad (6.265)$$

$$A_2 e^{\rho^{(+)}} + B_2 e^{\rho^{(-)}} - B e^{-\delta} = 0, \quad (6.266)$$

где введены вспомогательные обозначения:

$$\rho^{(+)} = \frac{k_x^{(+)} d}{2}; \quad (6.267)$$

$$\rho^{(-)} = \frac{k_x^{(-)} d}{2}; \quad (6.268)$$

$$\delta = \frac{k_x^e d}{2}, \quad (6.269)$$

а также:

$$\varepsilon^{(+)} = \mu_1 k_x^{(+)} - i\nu_1 k_y; \quad (6.270)$$

$$\varepsilon^{(-)} = \mu_1 k_x^{(-)} - i\nu_1 k_y. \quad (6.271)$$

При этом величины $k_x^{(+)}$ и $k_x^{(-)}$ определяются по методике, описанной далее в разд. 6.15–6.15.3.

Условием существования ненулевого решения системы (6.263)–(6.266) является равенство нулю ее определителя, имеющего вид:

$$D_0 = \begin{vmatrix} -k_x^e e^{-\delta} & \varepsilon^{(+)} e^{-\rho^{(+)}} & \varepsilon^{(-)} e^{-\rho^{(-)}} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{(+)} e^{\rho^{(+)}} & \varepsilon^{(-)} e^{\rho^{(-)}} & k_x^e e^{-\delta} \\ -e^{-\delta} & e^{-\rho^{(+)}} & e^{-\rho^{(-)}} & 0 \\ 0 & e^{\rho^{(+)}} & e^{\rho^{(-)}} & -e^{-\delta} \end{vmatrix}. \quad (6.272)$$

Раскрывая этот определитель и приравнявая его к нулю, получаем: дисперсионное соотношение в окончательном виде:

$$\frac{e^{(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})} - e^{-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})}}{e^{(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})} + e^{-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})}} = \frac{k_x^e (\varepsilon^{(-)} - \varepsilon^{(+)})}{(k_x^e)^2 - \varepsilon^{(+)} \varepsilon^{(-)}}, \quad (6.273)$$

где входящие в это выражение величины $\rho^{(\pm)}$ и $\varepsilon^{(\pm)}$ определяются формулами (6.267)–(6.271).

Можно видеть, что это выражение по форме совпадает с полученным в разд. 5.8 соотношением (5.261), однако отличие состоит в том, что там дисперсионное соотношение получено с учетом только размагничивания, тогда как здесь, кроме размагничивания, учтено также

неоднородное обменное взаимодействие, приводящее к существенно отличающимся от полученных в разд. 5.8 составляющих этого соотношения.

6.15. Общая структура компонент поперечного волнового числа

Главной особенностью, отличающей полученное решение (6.269)–(6.273) от классического, приведенного в работах [114, 1, стр. 50–76], [2, стр. 29–36], является потенциал X_2 внутри ферритовой пластины (6.258), представляющий собой сумму экспонент с комплексными показателями $k_x^{(+)}$ и $k_x^{(-)}$. Показатели этих экспонент получаются, как два возможных решения уравнения Уокера (6.248), содержащего упомянутую выше смешанную производную, а их комплексный характер обусловлен именно смешанным видом этой производной.

Компоненты поперечного волнового числа $k_x^{(+)}$ и $k_x^{(-)}$, будучи комплексными и отличаясь лишь знаком, содержат одинаковые по абсолютной величине действительную и мнимую части, так что имеют вид (6.183), (6.184):

$$k_x^{(+)} = k_d + ik_m; \quad (6.274)$$

$$k_x^{(-)} = -k_d - ik_m, \quad (6.275)$$

где k_d и k_m — действительные.

Получение действительной и мнимой компонент поперечного волнового числа k_d и k_m в случае отсутствия обменного взаимодействия и при его наличии, осуществляется принципиально различными методами. Этот вопрос подробно рассмотрен в предыдущих разделах, поэтому здесь приведем лишь краткую сводку полученных там результатов.

6.15.1. Компоненты поперечного волнового числа в отсутствие обмена

Согласно разд. 6.8, в отсутствие обмена разрешение уравнения Уокера приводит к биквадратному уравнению, которое может быть решено аналитически. Получающиеся решения для k_d и k_m имеют вид (6.185), (6.186):

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)} \right)^2}} \cdot k_y; \quad (6.276)$$

$$k_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)} \right)^2}} \cdot k_y, \quad (6.277)$$

где параметр размагничивания β определяется формулой (6.187), а нормированные частоты Ω и Ω_H — формулами (6.23), (6.24).

6.15.2. Компоненты поперечного волнового числа при наличии обменного взаимодействия

Согласно разд. 6.9, при наличии обмена разрешение уравнения Уокера приводит к комплексному уравнению восьмой степени, которое допускает представление в виде системы двух уравнений восьмой степени, имеющих действительный характер. Анализ предельных переходов к случаю отсутствия обмена и реализуемому в эксперименте классическому решению задачи Дэймона–Эшбаха позволяет выбрать из двух уравнений системы одно, допускающее два решения, одно из которых дает значение k_d , а другое — значение k_m , выраженные через постоянные параметры Ω , Ω_H , β с текущим параметром k_y . То есть появляется возможность выражения обеих, действительной и мнимой составляющих поперечного волнового числа $k_x^{(+)}$ (или $k_x^{(-)}$), что эквивалентно, согласно (6.274) и (6.275)).

Такое «разрешающее» уравнение, полученное в разд. 6.9, имеет вид (6.230):

$$g_8 c_{8b} + g_6 c_{6b} + g_4 c_{4b} + g_{2a} c_{2b} + g_{2b} c_{2a} = 0, \quad (6.278)$$

где коэффициенты g , определяемые параметрами материала и продольным волновым числом k_y , имеют вид (6.203)–(6.207), с учетом (6.216), (6.218), (6.220)–(6.222).

Поиск нуля этой функции приводит к двум значениям неизвестной ξ , как раз соответствующим значениям компонент поперечного волнового числа k_d и k_m . Эти два значения представлены точками А и В прохождения через нуль кривой 1 на рис. 6.7. Более подробно процедура поиска нуля рассмотрена выше в разд. 6.9 с помощью алгоритма, приведенного в разд. 6.9.1.

Таким образом, требуемые решением (6.258) значения $k_x^{(+)}$ и $k_x^{(-)}$ могут быть выражены в виде функций от k_y в соответствии с выражениями (6.274) и (6.275), где в отсутствие обмена значения k_d и k_m определяются по формулам (6.276) и (6.277), а при наличии обмена — из численного решения уравнения (6.278) методом поиска нуля по обобщенной переменной ξ , роль которой выполняет k_m в случае задания k_m и установления k_d через k_y по формуле (6.276).

6.15.3. Последовательность расчета компонент поперечного волнового числа при наличии обмена

С целью удобства алгоритмизации при машинном расчете приведем последовательность шагов решения уравнения (6.278).

Шаг № 1.

Задание начальных параметров Q , Ω_H , d , Ω а также a_p .

Шаг № 2.

Задание значения k_y .

Шаг № 3.

Вычисление параметра β по формуле (6.187).

Шаг № 4.

Вычисление значения k_d в соответствии с формулой (6.276).

Шаг № 5.

Путем пошагового увеличения переменной x от нуля определение значения ξ , при котором знак функции (6.278) изменяется. Это значение ξ соответствует искомой величине k_m .

Шаг № 6.

Путем пошагового увеличения переменной ξ от значения, найденного на шаге № 5, определение значения ξ , при котором знак функции (6.278) изменяется. Это значение ξ соответствует искомой величине k_d .

Шаг № 7.

Вывод полученных значений k_m и k_d .

Таким образом, при заданном значении k_y получается пара значений k_m и k_d . Эта пара значений соответствует частоте Ω (при условии, что задана частота Ω_H). По полученной паре в соответствии с формулами (6.274), (6.275) находятся значения $k_x^{(+)}$ и $k_x^{(-)}$, которые используются далее при вычислении дисперсионного соотношения.

6.16. Общая схема получения закона дисперсии

Нахождение закона дисперсии предполагает определение функциональной зависимости частоты Ω от продольного волнового числа k_y . При этом такие параметры как Q , Ω_H , d предполагаются заданными изначально как определяемые материалом и геометрией пластины, а также приложенным постоянным полем. Параметр α_p (при условии $0 \leq \alpha_p \leq 0,1$) в известной степени остается свободным, то есть может быть использован как подгоночный параметр при сравнении с экспериментом, однако при конкретном решении задачи его также следует считать заданным.

В разд. 6.15.1–6.15.3 показано, что входящие в (6.276), (6.277) действительная и мнимая компоненты поперечного волнового числа k_d и k_m однозначно определяются исходными параметрами задачи в сочетании с заданной величиной продольного волнового числа k_y . То есть при условии задания k_y величины k_d и k_m также можно считать заданными.

Таким образом, выражение (6.273) представляет собой уравнение, содержащее две остающиеся не определенными заранее величины: Ω и k_y . То есть задание k_y превращает его в уравнение относительно только одной неизвестной величины — частоты Ω .

Решение такого уравнения относительно Ω при варьировании величины k_y в пределах, требуемых условиями задачи, даст функциональную зависимость Ω от k_y . Именно такая зависимость и будет представлять собой искомый закон дисперсии поверхностной волны типа Дэймона–Эшбаха с учетом размагничивания и обмена.

Итак, при нахождении закона дисперсии будем полагать изначально заданными исходные параметры задачи, такие как Q , Ω_H , d , а также α_p . При этом действительную и мнимую компоненты поперечного волнового числа k_d и k_m при условии задания величины k_y также будем считать известными. Таким образом, важнейшей задачей становится выражение дисперсионного соотношения (6.273) через эти компоненты k_d и k_x .

Из структуры соотношения (6.273) видно, что оно определяется через параметры (6.267)–(6.271), содержащие в свою очередь компоненты поперечного волнового числа $k_x^{(+)}$ и $k_x^{(-)}$, а также компоненты тензора магнитной проницаемости μ_1 и ν_1 . Эти компоненты тензора за счет двойственности поперечного волнового числа, также имеют двойственный характер, то есть должны записываться в виде: $\mu_1^{(\pm)}$ и $\nu_1^{(\pm)}$.

Относительно $k_x^{(+)}$ и $k_x^{(-)}$ можно видеть, что их выражение через k_d и k_m тривиально просто и дается формулами (6.275), (6.276). Однако выражение $\mu_1^{(\pm)}$ и $\nu_1^{(\pm)}$ через те же k_d и k_m является значительно более сложной задачей, которой и займемся в первую очередь.

6.17. Получение компонент тензора проницаемости и промежуточных параметров

Из предыдущего рассмотрения следует, что закон дисперсии требует учета двойственности поперечного волнового числа. То есть все компоненты тензора проницаемости и промежуточных параметров также будут иметь двойственный характер. Поэтому сначала обратимся к вычислению этих величин с учетом двойственности волнового числа.

6.17.1. Компоненты тензора проницаемости при $k_x \rightarrow k_x^{(+)}$

В качестве первого этапа получим $\mu_1^{(+)}$ и $\nu_1^{(+)}$ при $k_x \rightarrow k_x^{(+)}$, определяемом выражением (6.274), причем для упрощения записи верхний индекс (+) опустим.

Найдем сначала некоторые промежуточные выражения:

$$k_x^2 = (k_d^2 - k_m^2) + i2k_d k_m. \quad (6.279)$$

При этом:

$$k_x^2 + k_y^2 = (k_d^2 - k_m^2 + k_y^2) + i2k_d k_m. \quad (6.280)$$

Введем обозначения:

$$k_p^2 = k_d^2 - k_m^2 + k_y^2, \quad (6.281)$$

$$k_r^2 = 2k_d k_m. \quad (6.282)$$

С этими обозначениями выражение (6.280) принимает вид:

$$k_x^2 + k_y^2 = k_p^2 + i k_r^2. \quad (6.283)$$

Найдем дробь, входящую в числитель выражения (6.128), подставляя (6.283) и выделяя действительную и мнимую части. Для удобства алгоритмизации дадим этой дроби вспомогательное обозначение a_μ . То есть получаем:

$$a_\mu = \frac{k_y^2}{k_x^2 + k_y^2} = g_{\mu d} + i g_{\mu m}, \quad (6.284)$$

где введены обозначения:

$$g_{\mu d} = \frac{k_p^2 k_y^2}{k_p^4 + k_r^4}; \quad (6.285)$$

$$g_{\mu m} = -\frac{k_r^2 k_y^2}{k_p^4 + k_r^4}. \quad (6.286)$$

Аналогично найдем дробь, входящую в числитель выражения (6.130), которой дадим вспомогательное обозначение a_ν :

$$a_\nu = \frac{k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2} = g_{\nu d} + i g_{\nu m}, \quad (6.287)$$

где введены обозначения:

$$g_{\nu d} = \frac{(k_d k_p^2 + k_m k_r^2) k_y}{k_p^4 + k_r^4}; \quad (6.288)$$

$$g_{\nu m} = \frac{(-k_d k_r^2 + k_m k_p^2) k_y}{k_p^4 + k_r^4}. \quad (6.289)$$

Таким образом, выражение дробей, входящих в числители μ_1 и ν_1 , через k_d , k_m и k_y , выполнено, так что перейдем к выражению Ω_{1k}^2 и Ω_{0k}^2 через те же параметры.

Согласно (6.126) и (6.127):

$$\Omega_{0k}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}(\Omega_{Hk} + \beta); \quad (6.290)$$

$$\Omega_{1k}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}(\Omega_{Hk} + \beta + 1). \quad (6.291)$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$\Omega_{0k}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}^2 - \Omega_{Hk}\beta; \quad (6.292)$$

$$\Omega_{1k}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}^2 - \Omega_{Hk}(\beta + 1). \quad (6.293)$$

Здесь, согласно (6.119):

$$\Omega_{Hk} = \Omega_H + Q(k_x^2 + k_y^2). \quad (6.294)$$

С помощью формулы (6.283), опять выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\Omega_{Hk} = \Omega_{Hkd} + i\Omega_{Hkm}, \quad (6.295)$$

где введены обозначения:

$$\Omega_{Hkd} = \Omega_H + Qk_p^2; \quad (6.296)$$

$$\Omega_{Hkm} = Qk_r^2. \quad (6.297)$$

Возводя (6.295) в квадрат, получаем:

$$\Omega_{Hk}^2 = (\Omega_{Hkd}^2 - \Omega_{Hkm}^2) + i2\Omega_{Hkd}\Omega_{Hkm}. \quad (6.298)$$

Подставляя (6.295) и (6.298) в (6.292), после чего выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\Omega_{0k}^2 = \Omega_{0kd}^2 + i\Omega_{0km}^2, \quad (6.299)$$

где введены обозначения:

$$\Omega_{0kd}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hkd}^2 + \Omega_{0km}^2 - \beta\Omega_{Hkd}; \quad (6.300)$$

$$\Omega_{0km}^2 = -\Omega_{Hkm}(2\Omega_{Hkd} + \beta). \quad (6.301)$$

Аналогично, подставляя (6.295) и (6.298) в (6.293), после чего выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\Omega_{1k}^2 = \Omega_{1kd}^2 + i\Omega_{1km}^2, \quad (6.302)$$

где введены обозначения:

$$\Omega_{1kd}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hkd}^2 + \Omega_{Hkm}^2 - (\beta + 1)\Omega_{Hkd}; \quad (6.303)$$

$$\Omega_{1km}^2 = -\Omega_{Hkm}(2\Omega_{Hkd} + \beta + 1). \quad (6.304)$$

В формулы (6.128) и (6.131) для μ_1 и ν_1 величина Ω_{0k}^2 входит в знаменателе. Найдем обратную ей величину, пользуясь (6.299) и выделяя действительную и мнимую части:

$$\frac{1}{\Omega_{0k}^2} = z_d + iz_m, \quad (6.305)$$

где введены обозначения:

$$z_d = \frac{\Omega_{0kd}^2}{\Omega_{0kd}^4 + \Omega_{0km}^4}; \quad (6.306)$$

$$z_m = \frac{\Omega_{0km}^2}{\Omega_{0kd}^4 + \Omega_{0km}^4}. \quad (6.307)$$

Итак, все входящие в (6.128) и (6.131) величины при $k_x \rightarrow k_x^{(+)}$ получены через k_d , k_m и k_y , так что перейдем непосредственно к вычислению компонент тензора проницаемости $\mu_1^{(+)}$ и $\nu_1^{(+)}$. Здесь и далее при μ_1 и ν_1 веден верхний индекс (+) чтобы подчеркнуть, что эти компоненты получены при значении поперечного волнового числа $k_x^{(+)}$.

Подставляя (6.302), (6.305) и (6.284) в (6.128), после чего также выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\mu_1^{(+)} = \mu_{1d}^{(+)} + i\mu_{1m}^{(+)}, \quad (6.308)$$

где введены обозначения:

$$\mu_{1d}^{(+)} = (\Omega_{1kd}^2 - \beta g_{\mu d})z_d - (\Omega_{1km}^2 - \beta g_{\mu m})z_m; \quad (6.309)$$

$$\mu_{1m}^{(+)} = (\Omega_{1kd}^2 - \beta g_{\mu d})z_m - (\Omega_{1km}^2 - \beta g_{\mu m})z_d, \quad (6.310)$$

а входящие в эти формулы величины $g_{\mu d}$ и $g_{\mu m}$ определяются формулами (6.285) и (6.286).

Аналогично, подставляя (6.295) и (6.287) в (6.131), получаем:

$$\nu_1^{(+)} = \nu_{1d}^{(+)} + i\nu_{1m}^{(+)}, \quad (6.311)$$

где введены обозначения:

$$\nu_{1d}^{(+)} = \Omega z_m + \beta(g_{\nu d}z_d - g_{\nu m}z_m); \quad (6.312)$$

$$\nu_{1m}^{(+)} = -\Omega z_d + \beta(g_{\nu m}z_d + g_{\nu d}z_m), \quad (6.313)$$

а входящие в эти формулы величины $g_{\nu d}$ и $g_{\nu m}$ определяются формулами (6.288) и (6.289).

Таким образом, компоненты тензора проницаемости $\mu_1^{(+)}$ и $\nu_1^{(+)}$ определены через k_d , k_m и k_y , что и требуется для вычисления искомого дисперсионного соотношения.

6.17.2. Последовательность расчета компонент тензора проницаемости при $k_x \rightarrow k_x^{(+)}$

С целью удобства алгоритмизации при машинном расчете приведем последовательность шагов вычисления компонент тензора проницаемости $\mu_1^{(+)}$ и $\nu_1^{(+)}$.

Шаг № 1.

Задание начальных параметров Q , Ω , Ω_H , d , а также α_p .

Шаг № 2.

Задание значения k_y .

Шаг № 3.

Вычисление параметра β по формуле (6.187).

Шаг № 4.

Вычисление параметров k_d и k_m в соответствии с методиками, приведенными в разд. 6.15.1–6.15.3.

Шаг № 5.

Вычисление параметров k_p^2 и k_r^2 по формулам (6.281) и (6.282).

Шаг № 6.

Вычисление параметров $g_{\mu d}$ и $g_{\mu m}$ по формулам (6.285), (6.286).

Шаг № 7.

Вычисление параметров $g_{\nu d}$ и $g_{\nu m}$ по формулам (6.288), (6.289).

Шаг № 8.

Вычисление параметров Ω_{Hkd} и Ω_{Hkm} по формулам (6.296) и (6.297).

Шаг № 9.

Вычисление параметров Ω_{0kd}^2 и Ω_{0km}^2 по формулам (6.300), (6.301).

Шаг № 10.

Вычисление параметров Ω_{1kd}^2 и Ω_{1km}^2 по формулам (6.303), (6.304).

Шаг № 11.

Вычисление параметров z_d и z_m по формулам (6.306), (6.307).

Шаг № 12.

Вычисление параметров $\mu_{1d}^{(+)}$, $\mu_{1m}^{(+)}$ по формулам (6.309), (6.310).

Шаг № 13.

Вычисление параметров $\nu_{1d}^{(+)}$, $\nu_{1m}^{(+)}$ по формулам (6.312), (6.313).

6.17.3. Компоненты тензора проницаемости при $k_x \rightarrow k_x^{(-)}$

В качестве следующего этапа получим $\mu_1^{(-)}$ и $\nu_1^{(-)}$ при $k_x \rightarrow k_x^{(-)}$, определяемом выражением (6.275). Для этого повторим все выкладки разд. 6.17.2, учитывая изменение знака k_x при замене $k_x^{(+)}$ на $k_x^{(-)}$. Индекс $(-)$ также опустим.

Найдем сначала некоторые промежуточные выражения:

$$k_x^2 = (k_d^2 - k_m^2) + i2k_d k_m. \quad (6.314)$$

При этом:

$$k_x^2 + k_y^2 = (k_d^2 - k_m^2 + k_y^2) + i2k_d k_m. \quad (6.315)$$

Введем обозначения:

$$k_p^2 = k_d^2 - k_m^2 + k_y^2; \quad (6.316)$$

$$k_r^2 = 2k_d k_m. \quad (6.317)$$

С этими обозначениями выражение (6.315) принимает вид:

$$k_x^2 + k_y^2 = k_p^2 + i k_r^2. \quad (6.318)$$

Найдем дробь, входящую в числитель выражения (6.128), подставляя (6.318) и выделяя действительную и мнимую части. Для удобства алгоритмизации дадим этой дроби вспомогательное обозначение a_μ . То есть получаем:

$$a_\mu = \frac{k_y^2}{k_x^2 + k_y^2} = g_{\mu d} + i g_{\mu m}, \quad (6.319)$$

где введены обозначения:

$$g_{\mu d} = \frac{k_p^2 k_y^2}{k_p^4 + k_r^4}; \quad (6.320)$$

$$g_{\mu m} = -\frac{k_r^2 k_y^2}{k_p^4 + k_r^4}. \quad (6.321)$$

Аналогично найдем дробь, входящую в числитель выражения (6.131), которой дадим вспомогательное обозначение a_ν :

$$a_\nu = \frac{k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2} = g_{\nu d} + i g_{\nu m}, \quad (6.322)$$

где введены обозначения:

$$g_{\nu d} = -\frac{(k_d k_p^2 + k_m k_r^2) k_y}{k_p^4 + k_r^4}; \quad (6.323)$$

$$g_{\nu m} = -\frac{(-k_d k_r^2 + k_m k_p^2) k_y}{k_p^4 + k_r^4}. \quad (6.324)$$

Таким образом, выражение дробей, входящих в числители μ_1 и ν_1 , через k_d , k_m и k_y , выполнено, так что перейдем к выражению Ω_{1k}^2 и Ω_{0k}^2 через те же параметры.

Согласно (6.126) и (6.127) имеем:

$$\Omega_{0k}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}(\Omega_{Hk} + \beta); \quad (6.325)$$

$$\Omega_{1k}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}(\Omega_{Hk} + \beta + 1). \quad (6.326)$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$\Omega_{0k}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}^2 - \Omega_{Hk}\beta; \quad (6.327)$$

$$\Omega_{1k}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}^2 - \Omega_{Hk}(\beta + 1). \quad (6.328)$$

Здесь, согласно (6.119):

$$\Omega_{Hk} = \Omega_H + Q(k_x^2 + k_y^2). \quad (6.329)$$

С помощью формулы (6.318), опять выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\Omega_{Hk} = \Omega_{Hkd} + i\Omega_{Hkm}, \quad (6.330)$$

где введены обозначения:

$$\Omega_{Hkd} = \Omega_H + Qk_p^2; \quad (6.331)$$

$$\Omega_{Hkm} = Qk_r^2. \quad (6.332)$$

Возводя (6.330) в квадрат, получаем:

$$\Omega_{Hk}^2 = (\Omega_{Hkd}^2 - \Omega_{Hkm}^2) + i2\Omega_{Hkd}\Omega_{Hkm}. \quad (6.333)$$

Подставляя (6.330) и (6.333) в (6.327), после чего, выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\Omega_{0k}^2 = \Omega_{0kd}^2 + i\Omega_{0km}^2, \quad (6.334)$$

где введены обозначения:

$$\Omega_{0kd}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hkd}^2 + \Omega_{0km}^2 - \beta\Omega_{Hkd}; \quad (6.335)$$

$$\Omega_{0km}^2 = -\Omega_{Hkm}(2\Omega_{Hkd} + \beta). \quad (6.336)$$

Аналогично, подставляя (6.330) и (6.333) в (6.328), после чего выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\Omega_{1k}^2 = \Omega_{1kd}^2 + i\Omega_{1km}^2, \quad (6.337)$$

где введены обозначения:

$$\Omega_{1kd}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hkd}^2 + \Omega_{Hkm}^2 - (\beta + 1)\Omega_{Hkd}; \quad (6.338)$$

$$\Omega_{1km}^2 = -\Omega_{Hkm}(2\Omega_{Hkd} + \beta + 1). \quad (6.339)$$

В формулы (6.128) и (6.131) для μ_1 и ν_1 величина Ω_{0k}^2 входит в знаменателе. Найдем обратную ей величину, пользуясь (6.334) и выделяя действительную и мнимую части:

$$\frac{1}{\Omega_{0k}^2} = z_d + iz_m, \quad (6.340)$$

где введены обозначения:

$$z_d = \frac{\Omega_{0kd}^2}{\Omega_{0kd}^4 + \Omega_{0km}^4}; \quad (6.341)$$

$$z_m = \frac{\Omega_{0km}^2}{\Omega_{0kd}^4 + \Omega_{0km}^4}. \quad (6.342)$$

Итак, все входящие в (6.128) и (6.131) величины при $k_x \rightarrow k_x^{(-)}$ получены через k_d , k_m и k_y , так что перейдем непосредственно к вычислению компонент тензора проницаемости $\mu_1^{(-)}$ и $\nu_1^{(-)}$. Здесь и далее при μ_1 и ν_1 введён верхний индекс $(-)$ чтобы подчеркнуть, что эти компоненты получены при значении поперечного волнового числа $k_x^{(-)}$.

Подставляя (6.337), (6.340) и (6.319) в (6.128), после чего выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\mu_1^{(-)} = \mu_{1d}^{(-)} + i\mu_{1m}^{(-)}, \quad (6.343)$$

где введены обозначения:

$$\mu_{1d}^{(-)} = (\Omega_{1kd}^2 - \beta g_{\mu d})z_d - (\Omega_{1km}^2 - \beta g_{\mu m})z_m; \quad (6.344)$$

$$\mu_{1m}^{(-)} = (\Omega_{1kd}^2 - \beta g_{\mu d})z_m - (\Omega_{1km}^2 - \beta g_{\mu m})z_d, \quad (6.345)$$

а входящие в эти формулы величины $g_{\mu d}$ и $g_{\mu m}$ определяются формулами (6.285) и (6.286).

Аналогично, подставляя (6.340) и (6.322) в (6.131), получаем:

$$\nu_1^{(-)} = \nu_{1d}^{(-)} + i\nu_{1m}^{(-)}, \quad (6.346)$$

где введены обозначения:

$$\nu_{1d}^{(-)} = \Omega z_m + \beta(g_{\nu d} z_d - g_{\nu m} z_m); \quad (6.347)$$

$$\nu_{1m}^{(-)} = -\Omega z_d + \beta(g_{\nu m} z_d + g_{\nu d} z_m), \quad (6.348)$$

а входящие в эти формулы величины $g_{\nu d}$ и $g_{\nu m}$ определяются формулами (6.323) и (6.324).

Таким образом, компоненты тензора проницаемости $\mu_1^{(-)}$ и $\nu_1^{(-)}$ определены через k_d , k_m и k_y , что и требуется для вычисления искомого дисперсионного соотношения.

6.17.4. Последовательность расчета компонент тензора проницаемости при $k_x \rightarrow k_x^{(-)}$

С целью удобства алгоритмизации при машинном расчете приведем последовательность шагов вычисления компонент тензора проницаемости $\mu_1^{(-)}$ и $\nu_1^{(-)}$.

Шаг № 1.

Задание начальных параметров Q , Ω , Ω_H , d , а также α_p .

Шаг № 2.

Задание значения k_y .

Шаг № 3.

Вычисление параметра β по формуле (6.187).

Шаг № 4.

Вычисление параметров k_d и k_m в соответствии с методиками, приведенными в разд. 6.15.1–6.15.3.

Шаг № 5.

Вычисление параметров k_p^2 и k_r^2 по формулам (6.316) и (6.317).

Шаг № 6.

Вычисление параметров $g_{\mu d}$ и $g_{\mu m}$ по формулам (6.320), (6.321).

Шаг № 7.

Вычисление параметров $g_{\nu d}$ и $g_{\nu m}$ по формулам (6.323), (6.324).

Шаг № 8.

Вычисление параметров Ω_{Hkd} и Ω_{Hkm} по формулам (6.331) и (6.332).

Шаг № 9.

Вычисление параметров Ω_{0kd}^2 и Ω_{0km}^2 по формулам (6.335), (6.336).

Шаг № 10.

Вычисление параметров Ω_{1kd}^2 и Ω_{1km}^2 по формулам (6.338), (6.339).

Шаг № 11.

Вычисление параметров z_d и z_m по формулам (6.341), (6.342).

Шаг № 12.

Вычисление параметров $\mu_{1d}^{(-)}$, $\mu_{1m}^{(-)}$ по формулам (6.344), (6.345).

Шаг № 13.

Вычисление параметров $\nu_{1d}^{(-)}$, $\nu_{1m}^{(-)}$ по формулам (6.347), (6.348).

6.17.5. Промежуточные параметры $\varepsilon^{(+)}$ и $\varepsilon^{(-)}$

Дисперсионное соотношение (6.273) содержит промежуточные параметры $\varepsilon^{(+)}$ и $\varepsilon^{(-)}$, в которые в качестве составляющих частей входят компоненты тензора проницаемости $\mu_1^{(\pm)}$ и $\nu_1^{(\pm)}$. Обратимся теперь к нахождению этих параметров.

Сначала обратимся к вычислению выражения $\varepsilon^{(+)}$, согласно (6.270), имеющему вид:

$$\varepsilon^{(+)} = \mu_1^{(+)} k_x^{(+)} - i\nu_1^{(+)} k_y. \quad (6.349)$$

Для этого (6.308), (6.311), а также (6.274) следует подставить в (6.349). Выполняя подстановку и выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\varepsilon^{(+)} = \varepsilon_d^{(+)} + i\varepsilon_m^{(+)}, \quad (6.350)$$

где введены обозначения:

$$\varepsilon_d^{(+)} = \mu_{1d}^{(+)} k_d - \mu_{1m}^{(+)} k_m + \nu_{1m}^{(+)} k_y; \quad (6.351)$$

$$\varepsilon_m^{(+)} = \mu_{1d}^{(+)} k_m + \mu_{1m}^{(+)} k_d - \nu_{1d}^{(+)} k_y. \quad (6.352)$$

Здесь веден верхний индекс «(+)» чтобы подчеркнуть, что величина $\varepsilon^{(+)}$ получена при значении поперечного волнового числа $k_x^{(+)}$, определяемом формулой (6.274).

Теперь обратимся к вычислению выражения $\varepsilon^{(-)}$, согласно (6.271), имеющему вид:

$$\varepsilon^{(-)} = \mu_1^{(-)} k_x^{(-)} - i\nu_1^{(-)} k_y. \quad (6.353)$$

Для этого (6.343), (6.346), а также (6.315) следует подставить в (6.353). Выполняя подстановку и выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\varepsilon^{(-)} = \varepsilon_d^{(-)} + i\varepsilon_m^{(-)}, \quad (6.354)$$

где введены обозначения:

$$\varepsilon_d^{(-)} = -\mu_{1d}^{(-)} k_d + \mu_{1m}^{(-)} k_m + \nu_{1m}^{(-)} k_y; \quad (6.355)$$

$$\varepsilon_m^{(-)} = -\mu_{1d}^{(-)} k_m - \mu_{1m}^{(-)} k_d - \nu_{1d}^{(-)} k_y. \quad (6.356)$$

Здесь веден верхний индекс «(-)» чтобы подчеркнуть, что величина $\varepsilon^{(-)}$ получена при значении поперечного волнового числа $k_x^{(-)}$, определяемом формулой (6.275).

Поскольку компоненты тензора проницаемости $\mu_1^{(+)}$ и $\nu_1^{(+)}$, согласно данным разд. 6.17.1–6.17.4, определены через компоненты волновых

чисел k_d , k_m и k_y , то и здесь параметры $\varepsilon^{(+)}$ и $\varepsilon^{(-)}$, а также соответственно их действительные и мнимые части, определены через те же компоненты волновых чисел k_d , k_m и k_y .

6.17.6. Последовательность расчета промежуточных параметров $\varepsilon^{(+)}$ и $\varepsilon^{(-)}$

С целью удобства алгоритмизации при машинном расчете приведем последовательность шагов вычисления промежуточных параметров $\varepsilon^{(+)}$ и $\varepsilon^{(-)}$.

Шаг № 1.

Задание начальных параметров Q , Ω , Ω_H , d , а также α_p .

Шаг № 2.

Задание значения k_y .

Шаг № 3.

Вычисление параметра β по формуле (6.187).

Шаг № 4.

Вычисление параметров k_d и k_m в соответствии с методиками, приведенными в разд. 6.15.1–6.15.3.

Шаг № 5.

Вычисление параметров $\mu_{1d}^{(+)}$, $\mu_{1m}^{(+)}$, $\nu_{1d}^{(+)}$, $\nu_{1m}^{(+)}$ по методике, приведенной в разд. 6.17.1, 6.17.2.

Шаг № 6

Вычисление параметров $\varepsilon_d^{(+)}$, $\varepsilon_m^{(+)}$ по формулам (6.351), (6.352).

Шаг № 7.

Вычисление параметров $\mu_{1d}^{(-)}$, $\mu_{1m}^{(-)}$, $\nu_{1d}^{(-)}$, $\nu_{1m}^{(-)}$ по методике, приведенной в разд. 6.17.3, 6.17.4.

Шаг № 8

Вычисление параметров $\varepsilon_d^{(-)}$, $\varepsilon_m^{(-)}$ по формулам (6.355), (6.356).

6.18. Схема структуры дисперсионного соотношения

Теперь, когда промежуточные параметры получены, обратимся непосредственно к вычислению дисперсионного соотношения.

Полученное в разд. 6.14.4 дисперсионное соотношение (6.273), имеет общий вид:

$$\frac{e^{(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})big} - e^{-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})}}{e^{(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})} + e^{-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})}} = \frac{k_x^e (\varepsilon^{(-)} - \varepsilon^{(+)})}{(k_x^e)^2 - \varepsilon^{(+)} \varepsilon^{(-)}}. \quad (6.357)$$

Можно видеть, что в него входят требующие определения параметры $\rho^{(\pm)}$, k_x^e и $\varepsilon^{(\pm)}$.

При принятом в разд. 6.14.1 условии $k_z = 0$ (формула (6.242)) внешнее волновое число k_x^e равно k_y (формула (2.159) при $k_z = 0$). Величины $\rho^{(\pm)}$ определяются формулами (6.267), (6.268) через волновые числа $k_x^{(\pm)}$, которые, в соответствии с формулами (6.274), (6.275),

определяются через компоненты поперечного волнового числа k_d и k_m , являющиеся действительными. Параметры $\varepsilon^{(\pm)}$, в соответствии с данными разделов 6.17.5, 6.17.6, а также разделов 6.17.1–6.17.4 определяются теми же компонентами k_d и k_m . Параметр размагничивания β определяется величиной k_y в соответствии с формулой (6.187), содержащей свободный параметр α_p , который является постоянным. Действительная и мнимая компоненты поперечного волнового числа k_d и k_m в соответствии с разд. 6.15.1–6.15.3, при заданных параметрах материала, геометрии и поля также выражаются через k_y .

Таким образом, все входящие в соотношение (6.357) (или (6.273)) величины теперь определены двумя видами параметров: постоянными, задаваемыми материалом пластины, внешним полем и геометрией задачи, каковыми являются Q , Ω_H , d , а также переменными, такими как частота Ω и продольное волновое число k_y . То есть дисперсионное соотношение теперь обеспечивает связь между двумя переменными параметрами: частотой Ω и продольным волновым числом k_y , что и дает искомый закон дисперсии, к выводу которого и обратимся далее.

Ввиду высокой сложности полученного соотношения (6.357), выполним рассмотрение его левой и правой частей по отдельности.

6.18.1. Левая часть дисперсионного соотношения

Рассмотрим сначала левую часть дисперсионного соотношения (6.357):

$$U = \frac{e^{(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})} - e^{-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})}}{e^{(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})} + e^{-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})}}. \quad (6.358)$$

Здесь параметры $\rho^{(+)}$ и $\rho^{(-)}$ определяются формулами (6.267) и (6.268)

$$\rho^{(+)} = \frac{k_x^{(+)} d}{2}; \quad (6.359)$$

$$\rho^{(-)} = \frac{k_x^{(-)} d}{2}, \quad (6.360)$$

где входящие в них величины $k_x^{(+)}$ и $k_x^{(-)}$ определяются в соответствии с формулами (6.274) и (6.275):

$$k_x^{(+)} = k_d + ik_m; \quad (6.361)$$

$$k_x^{(-)} = -k_d - ik_m, \quad (6.362)$$

где k_d и k_m — действительные.

Пользуясь (6.359) и (6.360) с учетом (6.361) и (6.362), находим показатели экспонент в выражении (6.358):

$$(\rho^{(+)} - \rho^{(-)}) = (k_d + ik_m)d; \quad (6.363)$$

$$-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)}) = -(k_d + ik_m)d, \quad (6.364)$$

так что экспоненты принимают вид:

$$e^{(\rho^{(+)}-\rho^{(-)})} = e^{dk_d} \cos(dk_m) + ie^{dk_d} \sin(dk_m); \quad (6.365)$$

$$e^{-(\rho^{(+)}-\rho^{(-)})} = e^{-dk_d} \cos(dk_m) - ie^{-dk_d} \sin(dk_m). \quad (6.366)$$

Числитель дроби выражения (6.358) принимает вид:

$$\begin{aligned} e^{(\rho^{(+)}-\rho^{(-)})} - e^{-(\rho^{(+)}-\rho^{(-)})} &= \\ &= (e^{dk_d} - e^{-dk_d}) \cos(dk_m) + i(e^{dk_d} + e^{-dk_d}) \sin(dk_m). \end{aligned} \quad (6.367)$$

Знаменатель той же дроби принимает вид:

$$\begin{aligned} e^{(\rho^{(+)}-\rho^{(-)})} + e^{-(\rho^{(+)}-\rho^{(-)})} &= \\ &= (e^{dk_d} + e^{-dk_d}) \cos(dk_m) + i(e^{dk_d} - e^{-dk_d}) \sin(dk_m). \end{aligned} \quad (6.368)$$

Введем обозначения:

$$A = e^{dk_d} - e^{-dk_d}; \quad (6.369)$$

$$B = e^{dk_d} + e^{-dk_d}. \quad (6.370)$$

С этими обозначениями (6.367) и (6.368) записываем в виде:

$$e^{(\rho^{(+)}-\rho^{(-)})} - e^{-(\rho^{(+)}-\rho^{(-)})} = A \cos(dk_m) + iB \sin(dk_m); \quad (6.371)$$

$$e^{(\rho^{(+)}-\rho^{(-)})} + e^{-(\rho^{(+)}-\rho^{(-)})} = B \cos(dk_m) + iA \sin(dk_m). \quad (6.372)$$

Подставляя (6.371) и (6.372) в (6.358), освобождаясь от мнимости в знаменателе и приводя подобные члены, получаем левую часть дисперсионного соотношения в виде:

$$U = \frac{AB}{A^2 \sin^2(dk_m) + B^2 \cos^2(dk_m)} - i \frac{(A^2 - B^2) \sin(dk_m) \cos(dk_m)}{A^2 \sin^2(dk_m) + B^2 \cos^2(dk_m)}, \quad (6.373)$$

где обе дроби являются действительными, A и B определяются формулами (6.369), (6.370), а k_d и k_m определяются в соответствии с методиками, описанными в разд. 6.15.1–6.15.3.

Таким образом, левая часть дисперсионного соотношения (6.358), то есть параметр U , в выражении через k_d и k_m получен в комплексном виде (6.373) с выделенными отдельно действительной и мнимой частями.

6.18.2. Последовательность расчета левой части

С целью удобства алгоритмизации при машинном расчете приведем последовательность шагов вычисления выражения (6.373).

Шаг № 1.

Задание начальных параметров Q , Ω , Ω_H , d .

Шаг № 2.

Задание значения k_y .

Шаг № 3.

Вычисление параметров k_d и k_m в соответствии с методиками, приведенными в разд. 6.15.1–6.15.3.

Шаг № 4.

Вычисление параметров A и B по формулам (6.369) и (6.370).

Шаг № 5.

Вычисление параметра U , представление его в комплексном виде по формуле (6.373) с выделенными явно действительной и мнимой частями.

Замечание. Здесь на шаге № 1 предусмотрено задание частоты Ω , которая, как отмечено в разд. 6.16, в конечном счете, должна быть определена из решения полного дисперсионного уравнения (6.357) (или (6.273)). Однако следует учитывать, что решение уравнения (6.357) будет выполняться методом поиска нуля при задании величины k_y и пошаговом варьировании частоты Ω . Алгоритм такого поиска предполагает на каждом шаге задание частоты Ω , выполнение шагов № 3–№ 6 приведенного выше алгоритма, после чего определение знака выражения (6.357). То есть именно момент изменения такого знака и будет определять искомое значение частоты Ω .

6.18.3. Правая часть дисперсионного соотношения

Рассмотрим теперь правую часть дисперсионного соотношения (6.357), имеющую вид:

$$V = \frac{k_x^e (\varepsilon^{(-)} - \varepsilon^{(+)})}{(k_x^e)^2 - \varepsilon^{(+)} \varepsilon^{(-)}}, \quad (6.374)$$

где, в соответствии с (6.350) и (6.354):

$$\varepsilon^{(+)} = \varepsilon_d^{(+)} + i\varepsilon_m^{(+)}; \quad (6.375)$$

$$\varepsilon^{(-)} = \varepsilon_d^{(-)} + i\varepsilon_m^{(-)}, \quad (6.376)$$

а $\varepsilon_d^{(+)}$, $\varepsilon_m^{(+)}$, $\varepsilon_d^{(-)}$, $\varepsilon_m^{(-)}$ определяются формулами (6.351), (6.352), (6.355), (6.356) соответственно.

При этом из условия предельного перехода к классической задаче Дэймона–Эшбаха, соответствующего $\beta \rightarrow 0$, при принятом условии $k_z = 0$ (формула (6.242)), выполняется соотношение:

$$k_x^e = k_y, \quad (6.377)$$

Подставляя (6.375), (6.376) и (6.377) в (6.374), выполняя в числителе сложение и в знаменателе умножение, получаем:

$$V = \frac{k_y \left[(\varepsilon_d^{(-)} - \varepsilon_d^{(+)}) + i(\varepsilon_m^{(-)} - \varepsilon_m^{(+)}) \right]}{k_y^2 - (\varepsilon_d^{(+)} \varepsilon_d^{(-)} - \varepsilon_m^{(+)} \varepsilon_m^{(-)}) - i(\varepsilon_d^{(+)} \varepsilon_m^{(-)} + \varepsilon_d^{(-)} \varepsilon_m^{(+)})}. \quad (6.378)$$

Введем обозначения:

$$u_d = k_y (\varepsilon_d^{(-)} - \varepsilon_d^{(+)}); \quad (6.379)$$

$$u_m = k_y (\varepsilon_m^{(-)} - \varepsilon_m^{(+)}); \quad (6.380)$$

$$v_d = k_y^2 - (\varepsilon_d^{(+)} \varepsilon_d^{(-)} - \varepsilon_m^{(+)} \varepsilon_m^{(-)}); \quad (6.381)$$

$$v_m = -(\varepsilon_d^{(+)} \varepsilon_m^{(-)} + \varepsilon_d^{(-)} \varepsilon_m^{(+)}). \quad (6.382)$$

Подставляя (6.379)–(6.382) в (6.378) и разделяя действительную и мнимую части, получаем правую часть дисперсионного соотношения в виде:

$$V = \frac{u_d v_d + u_m v_m}{v_d^2 + v_m^2} + i \frac{-u_d v_m + u_m v_d}{v_d^2 + v_m^2}, \quad (6.383)$$

где обе дроби являются действительными, а входящие в них параметры $u_{d,m}$ и $v_{d,m}$ определяются формулами (6.379)–(6.382).

Таким образом, правая часть дисперсионного соотношения (6.357), то есть параметр V , в выражении через k_d и k_m , получен в комплексном виде (6.383) с выделенными отдельно действительной и мнимой частями.

6.18.4. Последовательность расчета правой части

С целью удобства алгоритмизации при машинном расчете приведем последовательность шагов вычисления выражения (6.383).

Шаг № 1.

Задание начальных параметров Q , Ω , Ω_H , d , а также α_p .

Шаг № 2.

Задание значения k_y .

Шаг № 3.

Вычисление параметров k_d и k_m в соответствии с методиками, приведенными в разд. 6.15.1–6.15.3.

Шаг № 4.

Вычисление параметра k_x^e по формуле (6.377).

Шаг № 5.

Вычисление параметров $\varepsilon^{(+)}$ и $\varepsilon^{(-)}$ в соответствии с методикой, приведенной в разд. 6.17.5–6.17.6.

Шаг № 6.

Вычисление параметров u_d , u_m , v_d , v_m по формулам (6.379)–(6.382).

Шаг № 7.

Вычисление параметра V , представление его в комплексном виде по формуле (6.383) с выделенными явно действительной и мнимой частями.

6.19. Действительная и мнимая части дисперсионного соотношения

В предыдущих разделах получены левая и правая части дисперсионного соотношения (6.357) (или (6.273)), обе из которых имеют комплексный характер.

Из полученных формул (6.373) и (6.383) можно видеть, что их структура с точностью до обозначений совпадает со структурой подобных формул (5.273) и (5.321). Это сделано намеренно для обеспечения единства структуры приведенных здесь выкладок с выкладками в предыдущей главе, однако не следует забывать, что формулы (6.373) и (6.383) отличаются от формул (5.273) и (5.321) введением в рассмотрение неоднородного обменного взаимодействия.

Таким образом, учитывая внешнее сходство формул (6.373) и (6.383) с подобными формулами гл. 5, выкладки, требуемые для получения дисперсионного соотношения в целом, также получаются весьма похожими. Приведем их в несколько сжатом конспективном виде.

В соответствии с формулой (6.373), действительная и мнимая части выражения U имеют вид:

$$\operatorname{Re}(U) = \frac{AB}{A^2 \sin^2(dk_m) + B^2 \cos^2(dk_m)}; \quad (6.384)$$

$$\operatorname{Im}(U) = \frac{(A^2 - B^2) \sin(dk_m) \cos(dk_m)}{A^2 \sin^2(dk_m) + B^2 \cos^2(dk_m)}. \quad (6.385)$$

В соответствии с формулой (6.383), действительная и мнимая части выражения V имеют вид:

$$\operatorname{Re}(V) = \frac{u_d v_d + u_m v_m}{v_d^2 + v_m^2}; \quad (6.386)$$

$$\operatorname{Im}(V) = \frac{-u_d v_m + u_m v_d}{v_d^2 + v_m^2}. \quad (6.387)$$

После перенесения обеих частей выражения (6.357) на левую сторону, действительная часть дисперсионного соотношения приобретает вид:

$$W_d = \operatorname{Re}(U) - \operatorname{Re}(V), \quad (6.388)$$

или:

$$W_d = \frac{AB}{A^2 \sin^2(dk_m) + B^2 \cos^2(dk_m)} - \frac{u_d v_d + u_m v_m}{v_d^2 + v_m^2}; \quad (6.389)$$

Соответственно мнимая часть дисперсионного соотношения принимает вид:

$$W_m = \operatorname{Im}(U) - \operatorname{Im}(V), \quad (6.390)$$

или:

$$W_m = \frac{(A^2 - B^2) \sin(dk_m) \cos(dk_m)}{A^2 \sin^2(dk_m) + B^2 \cos^2(dk_m)} - \frac{-u_d v_m + u_m v_d}{v_d^2 + v_m^2}. \quad (6.391)$$

Полное дисперсионное соотношение имеет вид:

$$W_d + iW_m = 0. \quad (6.392)$$

Равенство нулю такого комплексного выражения означает, что его действительная и мнимая части по отдельности тоже равны нулю, то есть:

$$W_d = 0; \quad (6.393)$$

$$W_m = 0, \quad (6.394)$$

или в развернутом виде:

$$\frac{AB}{A^2 \sin^2(dk_m) + B^2 \cos^2(dk_m)} - \frac{u_d v_d + u_m v_m}{v_d^2 + v_m^2} = 0; \quad (6.395)$$

$$\frac{(A^2 - B^2) \sin(dk_m) \cos(dk_m)}{A^2 \sin^2(dk_m) + B^2 \cos^2(dk_m)} - \frac{-u_d v_m + u_m v_d}{v_d^2 + v_m^2} = 0. \quad (6.396)$$

Эти выражения дают два уравнения, каждое из которых по отдельности позволяет найти зависимость частоты Ω от волнового числа k_y .

Замечание. Контрольная проверка, выполненная численным методом, показывает, что выражение (6.395) при $\beta \rightarrow 0$ переходит в классический закон дисперсии, соответствующий поверхностной волне Дэймона–Эшбаха (2.207). Естественно полагать, что при $\beta \rightarrow 0$ выражение (6.396) должно обращаться в нуль. Однако обращение в нуль этого выражения имеет место только при значениях волнового числа, меньших необходимого для учета размагничивания (меньших соответствующего перегибу гиперболического тангенса в выражении (6.187) для β). Если волновое число превышает эту величину, то выражение (6.396) приобретает хотя и малое, но все же отличное от нуля значение. Для случая отсутствия обмена этот вопрос обсуждался в разд. 5.10 (рис. 5.5), однако контрольная проверка показала, что введение обмена ничего нового к сказанному там не добавляет.

6.19.1. Последовательность расчета действительной и мнимой частей дисперсионного соотношения

Шаг № 1.

Задание начальных параметров Q , Ω , Ω_H , d .

Шаг № 2.

Задание значения k_y .

Шаг № 3.

Вычисление параметров k_d и k_m в соответствии с методиками, приведенными в разд. 6.15.1–6.15.3.

Шаг № 4.

Вычисление левой U и правой V частей дисперсионного соотношения, получаемых в соответствии с методиками, приведенными в разд. 6.18.1–6.18.4.

Шаг № 5.

Вычисление действительной $\text{Re}(U)$ и мнимой $\text{Im}(U)$ частей выражения для U в соответствии с формулами (6.384) и (6.385).

Шаг № 6.

Вычисление действительной $\text{Re}(V)$ и мнимой $\text{Im}(V)$ частей выражения для V в соответствии с формулами (6.386) и (6.387).

Шаг № 7.

Вычисление действительной W_d и мнимой W_m частей дисперсионного соотношения в соответствии с формулами (6.388) и (6.390), а также (6.389) и (6.391).

Шаг № 8.

Получение уравнений для действительной W_d и мнимой W_m частей дисперсионного соотношения в соответствии с формулами (6.393) и (6.394), а также (6.395) и (6.396).

6.20. Общая схема получения закона дисперсии

Закон дисперсии представляет собой функциональную зависимость между частотой Ω и продольным волновым числом k_y , задаваемую соотношением (6.357) (или (6.273)), определяемую решением уравнений (6.395) и (6.396). В соответствии с данными разд. 5.10 (рис. 5.5), закон дисперсии в области действительных, достаточно плавно меняющихся значений частоты при плавном изменении волнового числа (рис. 5.5, *a*) обеспечивает решение именно уравнения (6.395), в основе которого лежит равенство нулю выражения W_d , определяемого формулой (6.389).

В настоящей главе, подобно предыдущей, такое решение выполнялось методом поиска нуля при пошаговом изменении продольного волнового числа k_y . При этом на каждом шаге по k_y выполнялся пошаговый проход по частоте Ω от нуля вверх с вычислением на каждом шаге частоты знака выражения W_d до момента, когда знак этого выражения менялся на противоположный. Получаемое при этом значение частоты Ω принималось за искомое, соответствующее заданному значению волнового числа k_y . После этого выполнялся шаг по волновому числу k_y и снова осуществлялся поиск частоты, соответствующей изменению знака W_d . Такой пошаговый проход по волновому числу давал функциональную зависимость частоты от волнового числа, то есть искомый закон дисперсии.

6.21. Примеры расчета закона дисперсии в реальных ситуациях

Для того, чтобы продемонстрировать рассмотренные выше свойства дисперсии магнитостатической волны с учетом обмена и размагничивания, обратимся теперь к расчету законов дисперсии в ситуациях реального эксперимента.

6.21.1. Классическая обменная волна в безграничном пространстве и в тонкой пластине

Для того, чтобы иметь опорную точку, с которой будем сравнивать результаты проделанного в предыдущих разделах рассмотрения, приведем сначала закон дисперсии для классической обменной волны, традиционно рассматриваемой в безграничном пространстве.

Еще в пионерской работе Блоха 1930 года был установлен квадратичный закон дисперсии обменных волн в свободном пространстве.

Замечание. Оригинальная работа Блоха в настоящее время является библиографической редкостью, однако ссылку на нее под номером [254] можно найти в работе [42]. Краткое изложение теории Блоха на квантовом языке содержится в фундаментальной монографии [39, стр. 115–124]. В приведенной в этой монографии формуле (20.17) на стр. 121 с точностью до обозначений просматривается квадратичная зависимость частоты обменной спиновой волны от ее волнового числа. При этом также указывается на аналогию с волной де-Бройля, по-видимому, наиболее доступное описание которой можно найти в учебной монографии [261, стр. 143–145, форм. (141.6)]. Следует заметить, однако, что такая аналогия достаточно хорошо проходит только при сравнительно небольшой величине волнового числа в сочетании с условием наличия массы покоя у спиновой волны, что требует дополнительного обоснования.

В настоящей работе будем опираться на классический закон дисперсии обменных волн в свободном пространстве, имеющий вид [42, стр. 200, форм. (7.13)]:

$$\omega = \eta k^2, \quad (6.397)$$

где η — константа неоднородного обменного взаимодействия, связанная с введенной выше константой q соотношением [42, стр. 199, форм. (7.5)]:

$$\eta = \gamma_\omega M_0 q. \quad (6.398)$$

В этих формулах, согласно [40, стр. 15, форм. (1.3)], положено $\gamma_\omega = = 1,7653 \cdot 10^7 \text{ Э}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$, где под ω подразумевается круговая частота. Чтобы получить линейную частоту f надо ω разделить на 2π . При этом, разделяя γ_ω на 2π , получаем традиционно используемое при сравнении с экспериментом [1, гл. 3, 7] значение $\gamma_f = 2,8 \text{ МГц} \cdot \text{Э}^{-1}$.

В соответствии с [40, стр. 38, 39, форм. (3.7), (3.11)], поле, действующее на намагниченность в безграничной среде, имеет вид:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h} - \frac{4\pi}{k^2} \mathbf{k}(\mathbf{m}\mathbf{k}) - qk^2 \mathbf{m}, \quad (6.399)$$

где первое слагаемое — внешнее постоянное поле, второе — внешнее переменное поле, третье — поле размагничивания и четвертое — поле обменного взаимодействия.

В этом случае решение уравнения Ландау–Лифшица для волны, распространяющейся перпендикулярно к направлению внешнего постоянного поля, дает частоту [40, стр. 39, форм. (3.1.6)]:

$$\omega^2 = (\omega_H + \omega_E)(\omega_H + \omega_E + \omega_M), \quad (6.400)$$

где используются обозначения:

$$\omega_H = \gamma H_0; \quad (6.401)$$

$$\omega_E = \gamma q k^2 M_0; \quad (6.402)$$

$$\omega_M = 4\pi\gamma M_0. \quad (6.403)$$

Разделяя (6.400) на $4\pi\gamma M_0$ и вводя в соответствии с (6.23)–(6.24) нормированные частоты Ω , Ω_H и нормированную константу обмена Q , из (6.25) получаем:

$$\Omega = \sqrt{(\Omega_H + Qk^2)(\Omega_H + Qk^2 + 1)}. \quad (6.404)$$

Это выражение получено для безграничного пространства. Как показано в разд. 5.3.2, где рассматривается распространение волны в тонкой пластине, последнее слагаемое во втором сомножителе под корнем должно быть умножено на параметр размагничивания β , величина которого значительно меньше единицы. Поскольку в реальной экспериментальной ситуации обычно Ω_H порядка единицы, то в первом приближении этим слагаемым можно пренебречь, так что из (6.404) получаем:

$$\Omega = \Omega_H + Qk^2. \quad (6.405)$$

Частота поверхностной волны Дэймона–Эшбаха при стремлении волнового числа к бесконечности, в соответствии с [1, стр. 120, форм. (3.1), рис. 3.1], определяется формулой:

$$\Omega_{HT} = \Omega_H + \frac{1}{2}. \quad (6.406)$$

Это значение частоты определяется размагничивающим фактором поверхности пластины при $k \rightarrow \infty$, так что в формуле (6.405) следует вместо частоты Ω_H использовать частоту Ω_{HT} . В результате таких преобразований классическая модель обменной волны в касательно намагниченной тонкой пластине приводит к дисперсионному соотношению в виде:

$$\Omega = \Omega_H + \frac{1}{2} + Qk^2. \quad (6.407)$$

Это соотношение примем за эталонное и будем сравнивать с действительной частью дисперсионного соотношения (6.423), полученной выше в разд. 6.19.

6.21.2. Дисперсия с размагничиванием и обменом

Обратимся теперь к рассмотрению закона дисперсии в соответствии с соотношением, полученным в разд. 6.19 (формула (6.395)). То есть рассмотрим дисперсию поверхностной волны типа Дэймона–Эшбаха в тонкой пластине с учетом размагничивания и обмена. Соответствующие дисперсионные кривые приведены на рис. 6.13.

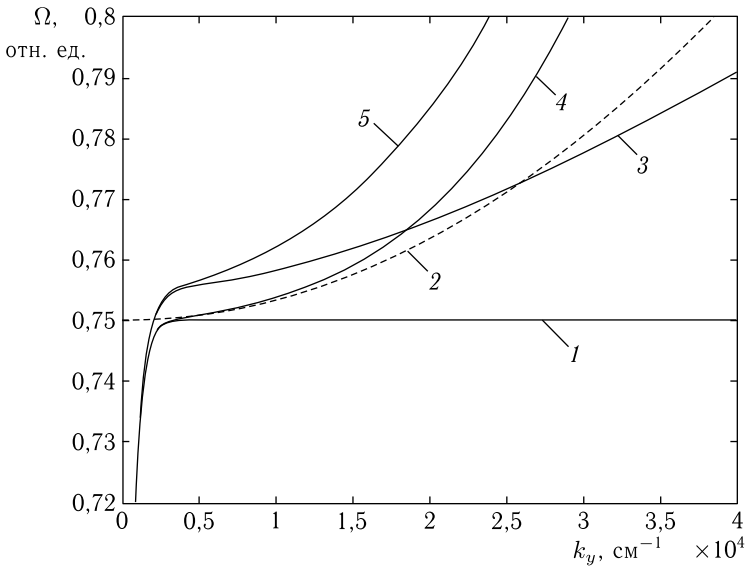


Рис. 6.13. Дисперсионные кривые с размагничиванием и обменом: 1 — задача Дэймона–Эшбаха классическая; 2 — дисперсия в безграничной среде (построена по формуле (6.407)); 3 — дисперсия с размагничиванием без обмена; 4 — дисперсия с обменом без размагничивания; 5 — дисперсия с размагничиванием и обменом одновременно. Параметры: $d = 10$ мкм; $\alpha_p = 0,01$; $Q = 3,37 \cdot 10^{-11}$ см²; $H_0 = 437,5$ Э; $4\pi M_0 = 1750$ Гс

На этом рисунке кривая 1 соответствует классическому соотношению Дэймона–Эшбаха (2.207). Начинается она при $k_y = 0$ на частоте:

$$\Omega_B = \sqrt{\Omega_H(\Omega_H + 1)}, \tag{6.408}$$

при принятых параметрах равной 0,5590 отн. ед. Кривые 3, 4, 5 также начинаются на этой частоте. С целью более наглядного выявления формы кривых при достаточно больших значениях k_y , начальная точка Ω_B вынесена за нижний край рисунка.

При значениях волнового числа k_y , меньших $0,2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$, кривая 1 резко возрастает, после чего выходит на горизонтальную асимптоту, соответствующую частоте:

$$\Omega_{HT} = \Omega_H + \frac{1}{2}, \quad (6.409)$$

отмеченную выше формулой (6.406) в качестве верхнего предела частоты волны Дэймона–Эшбаха при $k \rightarrow \infty$.

Заметим, что подавляющее большинство работ, касающихся рассмотрения свойств дипольных поверхностных волн (краткий обзор которых, включая библиографию, приведен, например, в [1, 2]), ограничиваются именно этим интервалом волнового числа (то есть не более $0,2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$). Из рисунка можно видеть, что в этой области все кривые 1, 3, 4, 5 практически совпадают, что оправдывает отсутствие учета размагничивания и обмена в этих работах.

Примечательным является характер кривой 2, соответствующей классическому рассмотрению дисперсии обменной волны в безграничной среде. Начинаясь на частоте Ω_{HT} , определяемой формулой (6.406) (здесь равной 0,75 отн. ед.), эта кривая идет далее вверх в соответствии с квадратичным законом, определяемым последним слагаемым в формуле (6.407). Следует заметить, что характера кривых в области малых значений волнового числа (менее $0,2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$) эта кривая не отражает, то есть для описания дисперсии волн дипольного характера, широко рассматриваемых в экспериментах [1, гл. 3, 7], эта зависимость не пригодна.

Возвращаясь к насыщению кривой 1 на частоте Ω_{HT} , отметим, что далее, то есть при волновом числе k_y , превышающем $0,2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$, в отличие от этой кривой, все остальные кривые 3–5 стремятся вверх и друг от друга заметно расходятся.

Так, кривая 3, соответствующая учету только размагничивания, сразу около $k_y \sim 0,3 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ совершает резкий скачок вверх на 0,05 отн. ед., после чего рост ее замедляется, но с дальнейшим увеличением волнового числа снова постепенно нарастает. Такая смена нарастания с резкого на более плавный соответствует переходу параметра размагничивания β через точку перегиба гиперболического тангенса, которая при принятых параметрах (толщине 10 мкм) приходится как раз на $k_y \sim 0,3 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$, как это можно видеть из кривой 3 на рис. 5.3 в разд. 5.3.5.

Кривая 4, соответствующая учету только обмена, все время, начиная с $k_y \sim 0,3 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$, возрастает по закону, близкому к квадратичному, что отражает классический квадратичный характер дисперсии обменных волн, определяемый формулой (6.397).

Кривая 5, соответствующая одновременному учету как размагничивания, так и обмена, имеет примерно такой же квадратичный характер, как и кривая 4, однако проходит значительно выше, благодаря добавлению к воздействию обмена дополнительного воздействия от размагничивания, которое по мере увеличения k_y постепенно увеличивается.

Важным фактом является значительное превышение кривых 4 и 5 над кривой 2, причем такое превышение имеет место даже в отсутствие размагничивания (кривая 4), а при наличии размагничивания (кривая 5) заметно усиливается, причем тем сильнее, чем волновое число больше.

6.21.3. Зависимость дисперсии от толщины пластины

Теперь, после общего ознакомления с характером дисперсии обменных спиновых волн, рассмотрим влияние на их дисперсию толщины пластины.

Обратимся к рис. 6.14, где показаны дисперсионные кривые (а) и параметр размагничивания (б) при различной толщине пластины.

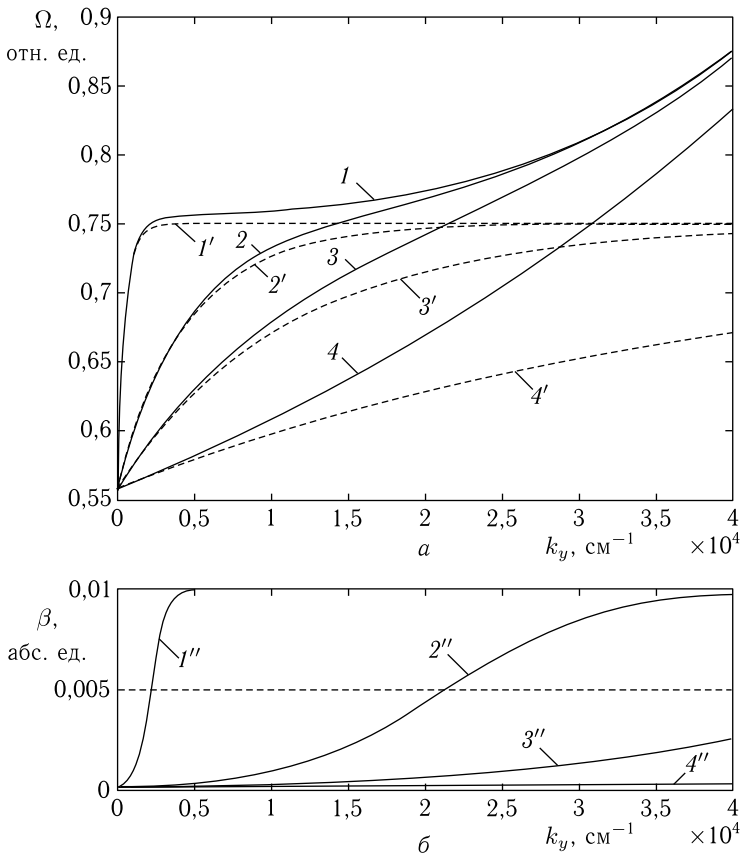


Рис. 6.14. Дисперсионные кривые (а) и параметр размагничивания (б) при различной толщине пластины d : 1, 1', 1'' — 10 мкм; 2, 2', 2'' — 1 мкм; 3, 3', 3'' — 0,4 мкм; 4, 4', 4'' — 0,1 мкм. Параметры: $\alpha_p = 0,01$; $Q = 3,37 \times 10^{-11} \text{ см}^2$; $H_0 = 437,5 \text{ Э}$; $4\pi M_0 = 1750 \text{ Гс}$

В качестве контрольного параметра для дисперсии выбран параметр размагничивания, так как именно он в первую очередь определяется толщиной пластины, оказывая влияние и на дисперсию. На обеих частях рисунка одни и те же цифры соответствуют одной и той же толщине. При этом цифры без штрихов относятся к полным дисперсионным кривым с учетом размагничивания и обмена, цифры с одним штрихом отражают дисперсию без размагничивания и обмена, то есть случай классической задачи Дэймона–Эшбаха, а цифры с двумя штрихами относятся к вспомогательной зависимости параметра размагничивания от волнового числа.

Из рисунка можно видеть, что все дисперсионные кривые по мере роста волнового числа также возрастают по закону, близкому к квадратичному. При этом крутизна кривых от 2 до 4 увеличивается, то есть рост проявляется тем сильнее, чем толщина пластины меньше.

На начальных участках, то есть до k_y менее $(0,1-0,4) \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$, все кривые 1–4 следуют кривым 1'–4', то есть соответствуют дисперсии классической волны Дэймона–Эшбаха. В самом деле, из рис. 6.14, б видно, что в этой области параметр размагничивания β везде близок к нулю, так что размагничивание на дисперсии никак не сказывается. Однако при k_y больше этого интервала, все кривые 1–4 уже отклоняются вверх от кривых 1'–4', причем тем сильнее, чем толщина пластины меньше.

Для кривой 1 отклонение начинается уже при $k_y = 0,2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$, так как именно при таком значении волнового числа гиперболический тангенс кривой 1'' на рис. 6.14, б претерпевает перегиб, начиная с которого влияние размагничивания становится заметным.

Однако уже для кривой 2 отклонение начинается при $k_y = 0,4 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$, хотя перегиб гиперболического тангенса на кривой 2'' еще значительно не достигается (как видно из рис. 6.14, б, имеет место только при $k_y = 2,1 \cdot 10^4$). То есть здесь в отклонении кривых вверх главную роль играет уже не размагничивание, а обменное взаимодействие.

Еще сильнее такое отклонение проявляется для кривых 3 и 4, для которых перегиб тангенса находится за правым краем рисунка, то есть в дисперсии волн при толщине менее 0,5 мкм размагничивание вообще не участвует, а квадратичный рост дисперсионных кривых определяется исключительно обменом (по крайней мере, в диапазоне волновых чисел, представленном на рисунке).

Более того, из рис. 6.14, а отчетливо можно видеть, что если кривая 3, соответствующая толщине в 0,04 мкм, на участке от нуля до $k_y = 2,5 \cdot 10^4$ имеет выпуклость вверх (то есть, как того требует классика Дэймона–Эшбаха), то на кривой 4, соответствующей толщине 0,01 мкм, такая выпуклость уже полностью отсутствует и кривая сразу с самых малых значений волнового числа стремится вверх по закону, подобному квадратичному.

То есть можно сделать вывод, что обменное взаимодействие проявляется тем сильнее, чем толщина пластины меньше, причем с толщины порядка 0,5 мкм становится преобладающим над размагничиванием.

Интересным моментом является тот факт, что при увеличении волнового числа сверх $3,0 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$, все кривые имеют тенденцию сближаться, подтягиваясь вверх к кривой 1. Так, кривые 1 и 2 слились уже при $k_y = 2,1 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$, что как раз соответствует перегибу тангенса кривой 2'' на рис. 6.14, в. Кривая 3 вблизи правого края рисунка также близко подтягивается к кривой 1, а кривая 4 тоже стремится туда же.

Замечание. Можно полагать, что при достаточном увеличении волнового числа, то есть после перехода через точку перегиба тангенса, соответствующего заданной толщине, любая кривая подтягивается к кривой 1, стремясь к ней асимптотически. Однако заметим, что это предположение требует дополнительной проверки, в настоящее время выходящей за рамки данной работы.

6.21.4. Зависимость дисперсии от величины обменного взаимодействия

Проделанное выше рассмотрение касается зависимости закона дисперсии обменных спиновых волн от толщины пластины. Рассмотрим теперь, как меняется характер дисперсии при изменении степени обменного взаимодействия. В качестве эталона возьмем значение константы обмена для железиттриевого граната, равное $Q_{YIG} = 3,37 \times 10^{-11} \text{ см}^2$, и будем умножать это число на коэффициент g , меняющийся от 1 до 100. С целью удобства сравнения с предыдущими результатами возьмем коэффициент параметра размагничивания α_p тем же, что в предыдущем разделе, то есть равным 0,01. Толщину пластины выберем из условия, чтобы перегиб гиперболического тангенса параметра β приходился примерно на середину исследуемого диапазона волновых чисел. Из рис. 6.14, б видно, что такому условию удовлетворяет толщина, равная 1 мкм (кривая 2'' на рис. 6.14, б). Заметим, что при такой толщине влияние размагничивания может заметно сказываться только на верхнем конце исследуемого диапазона волновых чисел, поэтому на данном этапе особенного значения размагничиванию придавать не будем. При этих условиях построен рис. 6.15, к рассмотрению которого обратимся далее.

На этом рисунке кривая 1 построена в отсутствие как обменного взаимодействия, так и размагничивания, то есть соответствует решению классической задачи Дэймона–Эшбаха. Из общего рассмотрения рисунка можно видеть, что по мере увеличения параметра обмена дисперсионные кривые располагаются по частоте тем выше, чем этот параметр больше.

Кривая 2, соответствующая константе обмена, свойственной железиттриевому гранату, уже проходит несколько выше кривой 1, однако квадратичный характер ее еще не проявляется. Можно полагать, что в этом случае для проявления квадратичности максимальное принятое

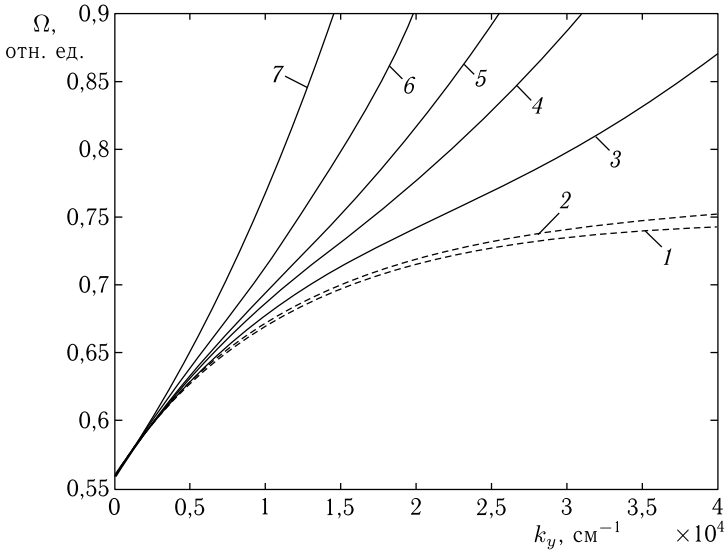


Рис. 6.15. Дисперсионные кривые при различной величине параметра обменного взаимодействия $Q = g \cdot Q_{YIG}$, где $Q_{YIG} = 3,37 \cdot 10^{-11} \text{ см}^2$. Номера кривых соответствуют следующим значениям коэффициента g : 1 — 0; 2 — 1; 3 — 10; 7 — 20; 5 — 30; 6 — 50; 7 — 100. Параметры: $d = 1 \text{ мкм}$; $\alpha_p = 0,01$; $H_0 = 437,5 \text{ Э}$; $4\pi M_0 = 1750 \text{ Гс}$

в настоящем рассмотрении значение волнового числа $4 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ еще недостаточно.

Однако на кривой 3, соответствующей десятикратному превышению значения константы обмена над таковым для железиттриевого граната, при волновых числах выше $2,5 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ уже заметен некоторый выгиб вниз, сменяющийся хотя и слабо, но четко выраженным подъемом вверх. То есть квадратичность уже начинает сказываться, хотя еще и в слабой мере.

Но для кривой 4, соответствующей всего двукратному превышению по обмену над кривой 3, возрастающий квадратичным образом участок начинается уже с $1,5 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$, а для кривых 5, 6 и 7, соответствующих еще большему росту константы обмена, близкий к квадратичному рост наблюдается уже с самых малых значений волнового числа.

Таким образом, можно сделать вывод, что по мере увеличения константы обменного взаимодействия, квадратичный характер дисперсионных кривых проявляется тем сильнее, чем величина этой константы больше.

Заметим, что такой вывод неожиданным не является и с очевидностью просматривается из классики, то есть из формулы (6.407) и даже (6.397). Однако здесь при небольших значениях константы обмена (кривые 2, 3 и частично 4) на начальном участке роста все

же достаточное влияние оказывает размагничивание формы пластины, свойственное классической задаче Дэймона–Эшбаха, проявляющееся в определенном выгибе упомянутых кривых вверх. Однако при достаточной величине этой константы (здесь больше $30 \cdot Q_{YIG}$, то есть для кривых 5–7) выгнутый вверх участок практически отсутствует, то есть размагничивание пластины уже не сказывается (кроме начального сдвига вверх частоты Ω в точке $k_y = 0$, равного 0,5592 отн. ед.), так что квадратичный характер дисперсии полностью преобладает.

6.22. Замечание об ограничении диапазона по волновому числу

Следует заметить, что все исследования, описанные в разд. 6.21.2–6.21.4, выполнены в интервале изменения продольного волнового числа от нуля до $4 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$. Такое ограничение вызвано в первую очередь переполнением разрядной стеки имеющейся в распоряжении авторов вычислительной машины (10^{38}), что происходит при возведении поперечного волнового числа в восьмую степень (уравнение (6.278)). Кроме того, переполнение сетки наступает также при вычислении гиперболического тангенса и экспонент в формулах (6.187), а также (6.369), (6.370), когда показатель экспоненты превышает число 88. Устранение переполнения первого типа в достаточной степени достигается нормировкой, то есть умножением волнового числа на толщину пластины, а второго типа — путем задания верхнего предела показателя экспоненты.

Однако в настоящей работе такая нормировка и ограничение не проводились из-за того, что приведенное предельное значение волнового числа $4 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ и без того превышает традиционно реализуемый диапазон в экспериментах по дипольным магнитостатическим волнам примерно на два порядка [1, гл. 3, 7]. То есть, можно полагать, что проделанное рассмотрение позволяет выявить основные особенности поставленной задачи в достаточно наглядном свете.

Однако следует заметить, что, как отмечено в работе [31], потребности современной техники требуют освоения диапазона волновых чисел, по крайней мере, на порядок, а то и на два больше рассмотренного здесь. Такое рассмотрение авторы предлагают в качестве отдельной задачи для следующих разделов настоящей работы.

6.23. Особые случаи дисперсии

Настоящий раздел является логическим продолжением предыдущих разделов и направлен на выявление предельных возможностей увеличения волнового числа вплоть до его физического предела, определяемого равенством длины волны межатомному расстоянию магнитной

среды. В основу рассмотрения положено дисперсионное соотношение, полученное в разд. 6.14, поэтому, ввиду его важности, сначала представим конечный результат этого раздела в конспективном виде.

6.23.1. Дисперсионное соотношение

Решение приведенной задачи методом разделения переменных (разд. 6.14) позволяет получить дисперсионное соотношение в виде (6.273):

$$\frac{e^{(\rho^{(+)}-\rho^{(-)})} - e^{-(\rho^{(+)}-\rho^{(-)})}}{e^{(\rho^{(+)}-\rho^{(-)})} + e^{-(\rho^{(+)}-\rho^{(-)})}} = \frac{k_x^e(\varepsilon^{(-)} - \varepsilon^{(+)})}{(k_x^e)^2 - \varepsilon^{(+)}\varepsilon^{(-)}}. \quad (6.410)$$

где величины $\rho^{(\pm)}$ и $\varepsilon^{(\pm)}$ определяются формулами (6.267)–(6.271):

$$\rho^{(+)} = \frac{k_x^{(+)}d}{2}; \quad (6.411)$$

$$\rho^{(-)} = \frac{k_x^{(-)}d}{2}; \quad (6.412)$$

а также:

$$\varepsilon^{(+)} = \mu_1 k_x^{(+)} - i\nu_1 k_y; \quad (6.413)$$

$$\varepsilon^{(-)} = \mu_1 k_x^{(-)} - i\nu_1 k_y, \quad (6.414)$$

где оба варианта комплексного поперечного волнового числа имеют вид (6.274), (6.275):

$$k_x^{(+)} = k_d + ik_m; \quad (6.415)$$

$$k_x^{(-)} = -k_d - ik_m, \quad (6.416)$$

где k_d и k_m — действительные.

Компоненты поперечного волнового числа при заданном значении продольного волнового числа k_y в отсутствие обмена имеют вид (6.276), (6.277):

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)} \right)^2}} \cdot k_y; \quad (6.417)$$

$$k_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)} \right)^2}} \cdot k_y. \quad (6.418)$$

При наличии обмена эти компоненты определяются путем решениями уравнения относительно неизвестной величины ξ , имеющего вид (6.278):

$$g_8 c_{8b} + g_6 c_{6b} + g_4 c_{4b} + g_{2a} c_{2b} + g_{2b} c_{2a} = 0. \quad (6.419)$$

В этом уравнении заданные параметры g , не содержащие ξ , определяются формулами (6.203)–(6.207):

$$g_8 = -Q^2; \quad (6.420)$$

$$g_6 = -Q[2Qk_y^2 + (2\Omega_H + \beta + 1)]; \quad (6.421)$$

$$g_4 = -Q(2\Omega_H + \beta + 1)k_y^2 + [\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)]; \quad (6.422)$$

$$g_{2a} = Q[2Qk_y^2 + (2\Omega_H + \beta + 1)]k_y^4; \quad (6.423)$$

$$g_{2b} = -2\beta k_y^2; \quad (6.424)$$

а параметры c , содержащие искомую неизвестную ξ , имеют вид (6.416)–(6.422):

$$c_{8b} = 8k_d k_m (k_d^6 - 7k_d^4 k_m^2 + 7k_d^2 k_m^4 - k_m^6); \quad (6.425)$$

$$c_{6b} = 2k_d k_m (3k_d^4 - 10k_d^2 k_m^2 + 3k_m^4); \quad (6.426)$$

$$c_{4b} = 4k_d k_m (k_d^2 - k_m^2); \quad (6.427)$$

$$c_{2a} = k_d^2 - k_m^2; \quad (6.428)$$

$$c_{2b} = 2k_d k_m; \quad (6.429)$$

где k_d определяется через k_y по формуле (6.417).

Решение уравнения (6.419) методом поиска нуля приводит к двум значениям неизвестной ξ , как раз соответствующим значениям компонент поперечного волнового числа k_d и k_m .

Подстановка перечисленных параметров в дисперсионное соотношение (6.410), а также учет равенства (6.107):

$$k_x^e = k_y, \quad (6.430)$$

следующего из (2.159) при $k_z = 0$, позволяет привести его к виду, содержащему только частоту Ω и продольное волновое число k_y . Комплексный характер поперечного волнового числа (6.415)–(6.416) приводит к комплексному виду дисперсионного соотношения. В разд. 5.10 показано, что для получения действительной зависимости частоты Ω от продольного волнового числа k_y достаточно рассмотреть равенство нулю только действительной части полного дисперсионного соотношения, то есть согласно (6.389), решить уравнение вида:

$$\frac{AB}{A^2 \sin^2(dk_m) + B^2 \cos^2(dk_m)} - \frac{u_d v_d + u_m v_m}{v_d^2 + v_m^2} = 0, \quad (6.431)$$

где введены обозначения (6.369), (6.370), (6.379)–(6.382), (6.351), (6.352), (6.355), (6.356):

$$A = e^{dk_d} - e^{-dk_d}; \quad (6.432)$$

$$B = e^{dk_d} + e^{-dk_d}. \quad (6.433)$$

а также:

$$u_d = k_y (\varepsilon_d^{(-)} - \varepsilon_d^{(+)}); \quad (6.434)$$

$$u_m = k_y (\varepsilon_m^{(-)} - \varepsilon_m^{(+)}); \quad (6.435)$$

$$v_d = k_y^2 - (\varepsilon_d^{(+)} \varepsilon_d^{(-)} - \varepsilon_m^{(+)} \varepsilon_m^{(-)}); \quad (6.436)$$

$$v_m = -(\varepsilon_d^{(+)} \varepsilon_m^{(-)} + \varepsilon_d^{(-)} \varepsilon_m^{(+)}). \quad (6.437)$$

в которых:

$$\varepsilon_d^{(+)} = \mu_1 d^{(+)} k_d - \mu_{1m}^{(+)} k_m + \nu_{1m}^{(+)} k_y; \quad (6.438)$$

$$\varepsilon_m^{(+)} = \mu_{1d}^{(+)} k_m + \mu_{1m}^{(+)} k_d - \nu_{1d}^{(+)} k_y. \quad (6.439)$$

$$\varepsilon_d^{(-)} = -\mu_{1d}^{(-)} k_d + \mu_{1m}^{(-)} k_m + \nu_{1m}^{(-)} k_y; \quad (6.440)$$

$$\varepsilon_m^{(-)} = -\mu_{1d}^{(-)} k_m - \mu_{1m}^{(-)} k_d - \nu_{1d}^{(-)} k_y. \quad (6.441)$$

где $\mu_{1d}^{(\pm)}$, $\mu_{1m}^{(\pm)}$, $\nu_{1d}^{(\pm)}$, $\nu_{1m}^{(\pm)}$ — действительные и мнимые части компонент тензора проницаемости (6.309)–(6.313), (6.344)–(6.348), взятые при значениях волнового числа (6.415) и (6.416) соответственно.

6.23.2. Дисперсия при больших волновых числах

Рассмотрим дисперсию обменных волн при больших волновых числах. В расчете будем использовать традиционное значение константы обмена для ЖИГ: $q = 4,23 \cdot 10^{-11} \text{ см}^2$. При этом нормированное значение

$$Q = \frac{q}{4\pi} \quad (6.442)$$

равно: $Q(YIG) = 3,37 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2$.

На рис. 6.16 приведены полученные в соответствии с дисперсионным соотношением (6.431) дисперсионные кривые при различных значениях константы обменного взаимодействия в пропорции относительно константы для ЖИГ. Утолщенной линией 2 выделена кривая, соответствующая константе для ЖИГ в чистом виде.

Из рисунка видно, что все дисперсионные зависимости имеют возрастающий квадратичный характер. По мере увеличения константы относительная степень возрастания уменьшается, то есть рост, хотя и сохраняется, но постепенно замедляется.

Видно, что при единичной константе для ЖИГ волновому числу 10^7 см^{-1} , то есть длине волны в 6,28 нм (примерно около десятка межатомных расстояний), соответствует частота около 4 ТГц. Тому же волновому числу при константе $10,0 \cdot Q(YIG)$ соответствует частота около 40 ТГц (за пределами рисунка). Таким образом, волновым числам порядка 10^7 см^{-1} , то есть длинам обменных волн порядка межатомных расстояний, соответствуют частоты порядка десятков и небольших сотен ТГц.

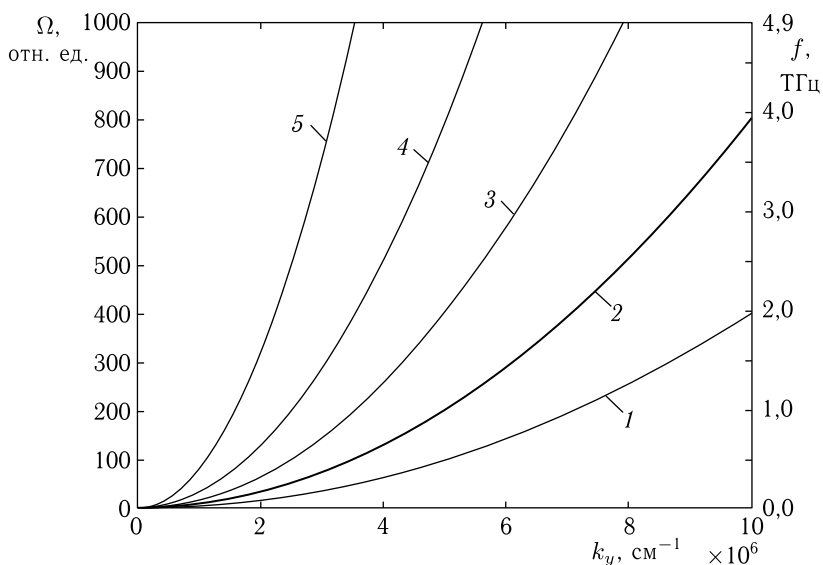


Рис. 6.16. Дисперсионные кривые при различных значениях константы обменного взаимодействия в пропорции относительно константы для ЖИГ: $Q(YIG) = 3,37 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2$: 1 — $0,5 \cdot Q(YIG)$; 2 — $1,0 \cdot Q(YIG)$; 3 — $2,0 \cdot Q(YIG)$; 4 — $4,0 \cdot Q(YIG)$; 5 — $10,0 \cdot Q(YIG)$. Параметры: $H_0 = 437,5 \text{ Э}$; $4\pi M_0 = 1750 \text{ Гс}$; $d = 1 \text{ мкм}$

Для электромагнитных волн этим же волновым числам и длинам волн соответствуют частоты порядка 10^{16} Гц (или 10^4 ТГц), то есть лежащие далеко выше видимого оптического спектра, уже в ультрафиолетовой и частично в рентгеновской области.

Рассмотрим теперь, как соотносятся полученные дисперсионные кривые с их классической трактовкой [42, стр. 200, форм. (7.13)] в соответствии с формулой:

$$\omega = \eta k^2. \quad (6.443)$$

Здесь:

$$\omega = 2\pi f, \quad (6.444)$$

то есть:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (6.445)$$

а константа η связана с принятой здесь константой q соотношением:

$$q = \frac{\eta}{\gamma_\omega M_0}, \quad (6.446)$$

где $\eta = 0,1$ [41, стр. 379, строка 1 абзаца после рис. 8.1.1 и подпись к рис. 8.1.1, где приведено значение для ЖИГ: $\eta = 0,1$], $\gamma_\omega = 1,76 \times 10^7 \text{ Э}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ [40, стр. 15, при этом $\gamma_f = \gamma_\omega / 2\pi = 2,8 \text{ МГц} \cdot \text{Э}^{-1}$],

$M_0 = 140$ Гс (см. напр. [52, стр. 421, 435, где для ЖИГ приведена величина $4\pi M_0 = 1750$ Гс, откуда $M_0 = 140$ Гс]).

Нормированная константа Q , определяемая формулой (6.25), согласно (6.446), имеет вид:

$$Q = \frac{q}{4\pi} = \frac{\eta}{4\pi\gamma_\omega M_0}, \quad (6.447)$$

откуда получаем:

$$\eta = 4\pi\gamma_\omega M_0 \cdot Q. \quad (6.448)$$

Подставляя это выражение в (6.443), а также учитывая (6.445), получаем:

$$f = 2\gamma_\omega M_0 Q k^2, \quad (6.449)$$

или:

$$f = 4\pi\gamma_f M_0 Q k^2. \quad (6.450)$$

Вводя нормированную частоту Ω в соответствии с (2.26) (где $\gamma \rightarrow \gamma_\omega = 2\pi\gamma_f$):

$$\Omega = \frac{f}{4\pi\gamma_f M_0}, \quad (6.451)$$

получаем:

$$\Omega = Q k^2. \quad (6.452)$$

Эту формулу будем считать классической и использовать для дальнейших построений.

Обратимся теперь к рис. 6.17, где показаны дисперсионные кривые, построенные по различным формулам. Кривая 1 соответствует дисперсионному соотношению (6.459) для рассматриваемой здесь задачи Дэймона–Эшбаха, эта кривая совпадает с кривой 2 на рис. 6.16. Кривая 2 построена по классической формуле (6.452) для безграничного пространства.

Из рисунка можно видеть, что все кривые имеют квадратичный характер, то есть геометрически подобны, однако кривая 1 проходит выше кривой 2 с коэффициентом пропорциональности около 2,37.

В качестве возможной причины различия можно предположить влияние поперечного волнового числа k_d . В самом деле, согласно (6.276), (6.417), действительная часть поперечного волнового числа определяется формулой:

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)} \right)^2}} \cdot k_y. \quad (6.453)$$

При достаточном удалении по частоте от начала дисперсионной кривой для поверхностной волны Дэймона–Эшбаха, то есть при

$$\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + 1) \gg 1, \quad (6.454)$$

а также с учетом того, что типичная величина параметра размагничивания β составляет порядка 0,1–0,2, второе слагаемое под внутренним

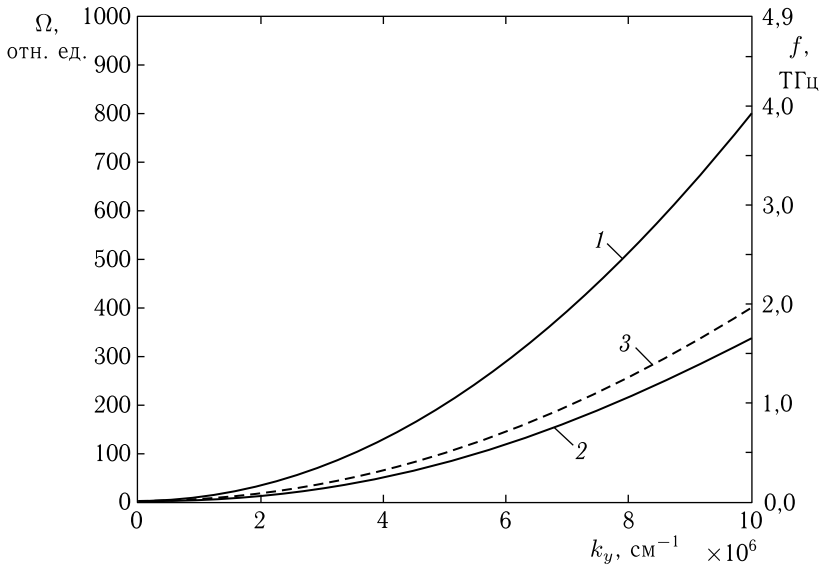


Рис. 6.17. Дисперсионные кривые, построенные по различным формулам: 1 — формула (6.431); 2 — формула (6.452); 3 — формула (6.456). Параметры: $Q = 3,37 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2$, остальные — те же, что приняты при построении рис. 6.16

корнем будет значительно меньше первого. В этом случае с достаточной точностью можно считать, что $k_d = k_y$, как это видно из (6.453). Таким образом, с учетом поперечного волнового числа, перпендикулярного k_y , полное волновое число будет определяться формулой:

$$k_S = \sqrt{k_y^2 + k_d^2} \approx k_y \sqrt{2}, \quad (6.455)$$

то есть при любой заданной частоте полное волновое число k_S будет больше приведенного на рис. 6.17 значения k_y в $\sqrt{2}$ раз. При этом, если по горизонтальной оси вместо k_y откладывать полное волновое число k_S , то вся кривая 1 растягивается в правую сторону, так что частота определяется формулой:

$$\Omega = Qk_y^2/2. \quad (6.456)$$

Такая «растянутая» кривая, построенная по формуле (6.456), приведена на рис. 6.17 под номером 3 и выделена пунктиром. Можно видеть, что эта кривая 3 значительно лучше, чем кривая 1, согласуется с кривой 2, соответствующей свободному пространству.

Таким образом, в формировании дисперсионной кривой для поверхностной волны типа Дэймона–Эшбаха в области волновых чисел, где обменное взаимодействие сказывается достаточно сильно (то есть

при волновых числах больше 10^4 см^{-1}) поперечное волновое число (точнее — его действительная часть) имеет принципиальное значение.

В качестве дополнения рассмотрим теперь, как меняется классическая дисперсия при различных значениях константы обмена, для чего обратимся к рис. 6.18, где приведены дисперсионные кривые для свободного пространства, построенные по формуле (6.452) при различных значениях константы обменного взаимодействия Q . Кривые, представленные на рис. 6.17 под номерами 1 и 2, приведены здесь же в виде утолщенных пунктирных линий.

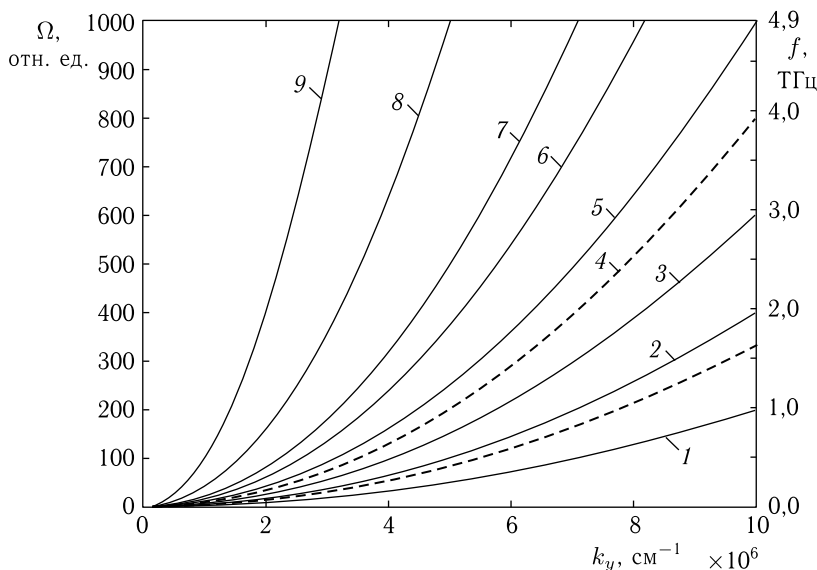


Рис. 6.18. Дисперсионные кривые для свободного пространства при различных значениях константы обменного взаимодействия Q : 1 — $2 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2$; 2 — $4 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2$; 3 — $6 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2$; 4 — $8 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2$; 5 — $10 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2$; 6 — $15 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2$; 7 — $20 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2$; 8 — $40 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2$; 9 — $100 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2$.

Остальные параметры — те же, что приняты при построении рис. 6.16

Из рисунка можно видеть, что все кривые имеют возрастающий квадратичный характер, причем по мере увеличения константы степень возрастания уменьшается, то есть рост, хотя и сохраняется, но постепенно замедляется. В этом отношении кривые аналогичны приведенным на рис. 6.16.

Кривая 4 здесь практически совпадает с кривой 1 на рис. 6.17, так что константа обмена при ее построении принята равной $8 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2$, что соотносится с константой $3,37 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2$, принятой при построении кривой 1 на рис. 6.17, в 2,37 раз, как это уже отмечалось при обсуждении рис. 6.17.

Кривая, соответствующая свободному пространству при константе $3,37 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2$ (нижний пунктир), расположена как раз между кривыми 1 и 2, соответствующими значениям константы по обе стороны от приведенного значения.

Таким образом, можно полагать, что надлежащий выбор константы ($8 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2$) позволяет формально согласовать между собой кривые для безграничного пространства и для тонкой пленки без учета роли поперечного волнового числа. В то же время, из рис. 6.17 можно видеть, что кривая 3 на этом рисунке почти точно совпадает с кривой 2 на рис. 6.18. При построении этих кривых приняты несколько различные значения константы обменного взаимодействия. Так, для кривой 3 на рис. 6.17 принято значение $3 \cdot 10^6 \text{ см}^2$, а для кривой 2 на рис. 6.18 — значение $6 \cdot 10^4 \text{ см}^2$. Различие составляет менее 1%, однако оно может ставить вопрос о более точном определении константы неоднородного обменного взаимодействия, а сам факт близости этих значений требует более глубокой физической разработки роли поперечного волнового числа.

6.23.3. Дополнительное решение дисперсионного соотношения

Рассмотренное выше дисперсионное соотношение (6.459) представляет собой относительно параметра ξ уравнение восьмого порядка, так что кроме основного решения может иметь ряд побочных. Проверка показывает, что при любом заданном значении волнового числа k_y для частоты Ω имеется всего два действительных решения, меньшее из которых соответствует обычному закону дисперсии типа Дэймона–Эшбаха, а большее — существенно превышает первое. Типичный пример кривых, соответствующих двум решениям уравнения (6.431), показан на рис. 6.19. Как и в ряде предыдущих случаев, с целью наглядности, константа обмена равна десятикратному значению для ЖИГ. Для простоты динамическое размагничивание не учитывается ($\alpha_p = 0$). На рисунке кривая 1 получена как первый корень уравнения (6.431), кривая 2 — как второй. Точечная линия 3 определяет нижнюю границу классического спектра ПМСВ:

$$\Omega_b = \sqrt{\Omega_H(\Omega_H + 1)}, \quad (6.457)$$

при условии $\Omega_H = 0,25$ отн. ед., равную 0,559 отн. ед. Точечная линия 4 определяет верхнюю границу классического спектра ПМСВ:

$$\Omega_t = \Omega_H + 1/2, \quad (6.458)$$

равную 0,75 отн. ед. Кривая 5 — то же, что кривая 1, но при меньшей толщине пластины.

Из рисунка можно видеть, что кривая 1 представляют собой классическое решение задачи Дэймона–Эшбаха, дополненное учетом обменного взаимодействия. Начало ее соответствует нижней границе спектра ПМСВ вида (6.457), после чего она довольно быстро нарастает,

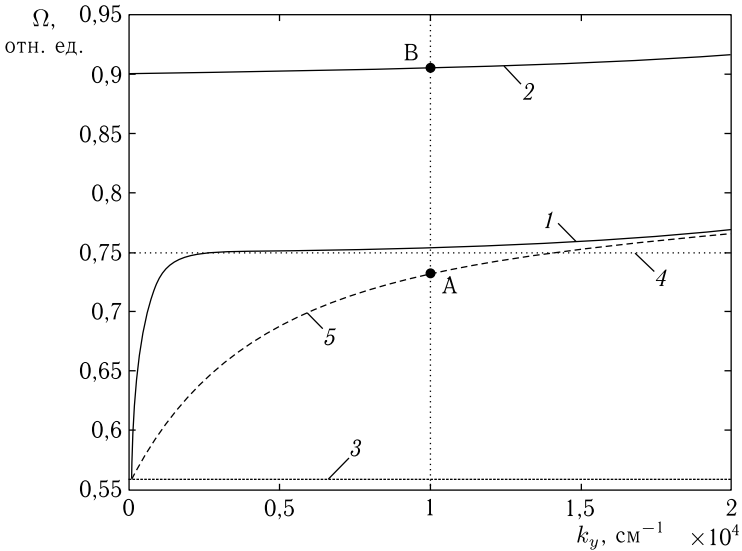


Рис. 6.19. Дисперсионные кривые, соответствующие нулевым решениям уравнения (6.431): 1 — дисперсионная кривая при толщине $d = 10$ мкм; 2 — дополнительная дисперсионная кривая; 3 — нижняя граница спектра ПМСВ (6.457); 4 — верхняя граница спектра ПМСВ (6.458); 5 — дисперсионная кривая при толщине $d = 1$ мкм. Назначение вертикальной точечной линии и точек А и В поясняется при описании рис. 6.21. Параметры: $H_0 = 437,5$ Э; $4\pi M_0 = 1750$ Гс; $Q = 3,37 \cdot 10^{-11}$ см²

стремясь к верхнему значению спектра (6.458), однако за счет добавки от обменного взаимодействия, вскоре пересекает эту границу, принимая далее квадратичный относительно k_y характер. Кривая 5 ведет себя таким же образом, с тем отличием, что ее нарастание при малых волновых числах происходит значительно плавнее, чем нарастание кривой 1, что полностью соответствует классическому закону дисперсии Дэймона–Эшбаха. При дальнейшем увеличении волнового числа кривая 5 сливается с кривой 1, принимая такую же квадратичность.

Особыми свойствами отличается кривая 2, соответствующая второму решению уравнения (6.431). Пологий участок при малых волновых числах у этой кривой отсутствует, то есть она сразу начинается при частоте, равной 0,9 отн. ед., после чего далее плавно нарастает в соответствии с квадратичным законом относительно k_y . Геометрическая конфигурация этой кривой от толщины пластины не зависит. При изменении постоянного поля смещение кривой 2 по частоте подобно смещению кривой 1, однако по мере увеличения поля расстояние между кривыми 1 и 2 несколько уменьшается. Так, при волновом числе $k_y = 10^4$ см⁻¹ в поле 437,5 Э, то есть при $\Omega_H = 0,25$ отн. ед., расстояние по частоте Ω между этими кривыми составляет около 1,5 отн. ед.,

а при увеличении поля вдвое, то есть до 875 Э, что соответствует $\Omega_H = 0,50$ отн. ед., это расстояние составляет уже 1,3 отн. ед., то есть уменьшается на 13%.

Взаимное поведение кривых 1 и 2 в более широком диапазоне волновых чисел иллюстрируется рис. 6.20, построенным при тех же условиях, что и рис. 6.19.

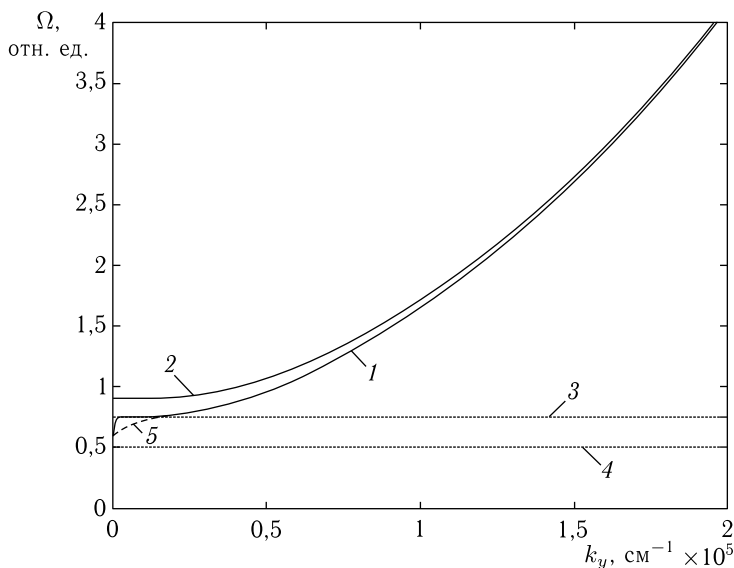


Рис. 6.20. Те же кривые, что на рис. 6.19, в более широком диапазоне волнового числа. Нумерация кривых и параметры — те же, что приняты при построении рис. 6.19

Из рисунка можно видеть, что кривая 2 имеет такой же квадратичный характер, что и кривая 1, причем по мере увеличения волнового числа k_y кривая 2 постепенно приближается к кривой 1, а начиная с волнового числа около $1,5 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$, обе кривые практически полностью сливаются.

Рассмотрим теперь образование кривых 1 и 2 несколько более подробно, для чего обратимся к рис. 6.21, где показаны зависимости от частоты параметра W_d , равного (6.389), (6.431):

$$W_d = \frac{AB}{A^2 \sin^2(dk_m) + B^2 \cos^2(dk_m)} - \frac{u_d v_d + u_m v_m}{v_d^2 + v_m^2}, \quad (6.459)$$

то есть действительной части дисперсионного соотношения (6.392), которая должна равняться нулю. Рисунок 6.21 построен при значении волнового числа $k_y = 10^4 \text{ см}^{-1}$, соответствующего вертикальной точечной линии на рис. 6.19, где точки А и В отвечают пересечению

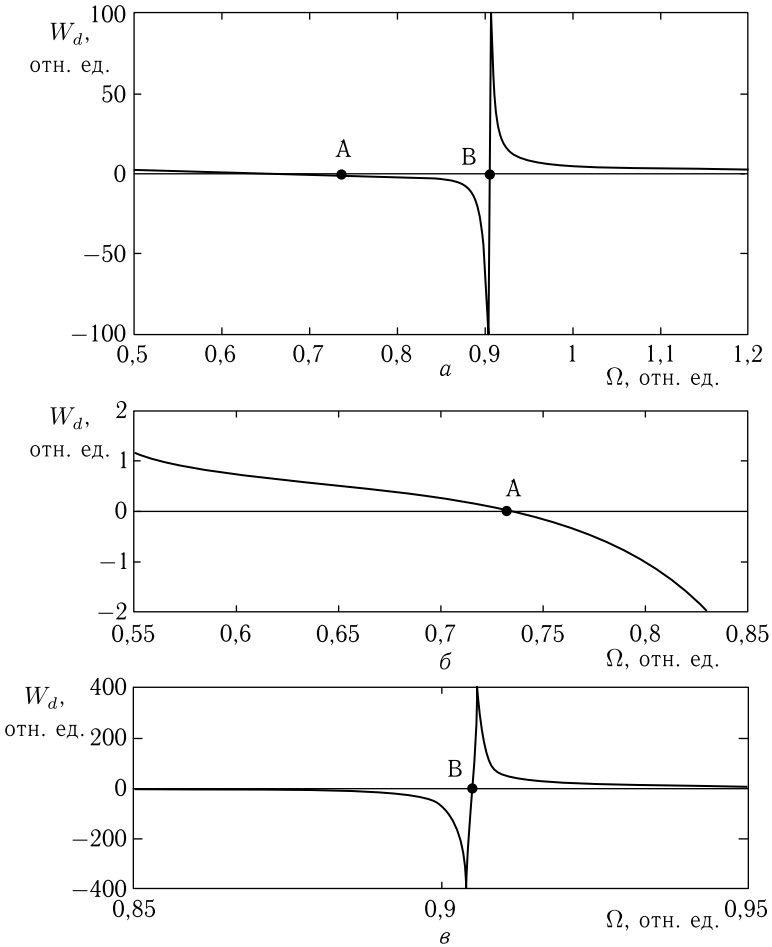


Рис. 6.21. Зависимости параметра W_d от частоты. *a* — полная зависимость в широком диапазоне частот; *б*, *в* — участки изменения знака параметра W_d в более крупном масштабе. Волновое число: $k_y = 10^4 \text{ см}^{-1}$; толщина — 1 мкм. Остальные параметры — те же, что приняты при построении рис. 6.19

этой линии с дисперсионными кривыми 5 и 2. То есть рис. 6.21 можно рассматривать как «сечение» рис. 6.19 линией, соответствующей $k_y = 10^4 \text{ см}^{-1}$. Кривая 5 при этом выбрана вместо кривой 1 с целью большей наглядности.

Из рис. 6.21, *a* можно видеть, что зависимость W_d от Ω пересекает нулевую линию в двух точках А и В (соответствующих точкам с теми же обозначениями на рис. 6.19). При этом характер пересечения в этих точках принципиально различен. Для большей ясности окрестности

точек пересечения представлены на рис. 6.21, б (точка А) и рис. 6.21, в (точка В) в более крупном масштабе. Можно видеть, что пересечение в точке А формируется при плавном изменении зависимости W_d от Ω , тогда как пересечение в точке В имеет место при расходимости такой зависимости. Контрольная проверка показывает, что расходимость в точке В формируется за счет обращения в нуль знаменателя второго слагаемого выражения (6.459), тогда как в точке А имеет место баланс между обоими слагаемыми, то есть их равенство с противоположными знаками.

Следует заметить, что реальный физический смысл, соответствующий задаче Дэймона–Эшбаха с обменом, имеет точка А, образованная балансом между слагаемыми. При этом выяснение физического смысла точки В требует более подробного рассмотрения, выходящего за рамки настоящей работы и могущего составить предмет самостоятельной задачи. При этом важнейшим моментом исследования можно полагать не только нахождение нуля дисперсионного соотношения, как это сделано в настоящей работе, но и определение пространственного распределения потенциала и полей волны, а также ее динамической намагниченности в сочетании с определением угла отсечки, примерно таким же образом, как это сделано для классической волны Дэймона–Эшбаха в работе [1, стр. 68–74].

Выводы по главе 6

Данная глава посвящена рассмотрению дисперсионных свойств магнитостатических волн, распространяющихся в касательно намагниченной ферритовой пластине, обладающей гиротропными свойствами. Введено в рассмотрение неоднородное обменное взаимодействие между спинами распространяющейся волны. Получено дисперсионное соотношение, выявлен его комплексный характер. Приведены данные, касающиеся необходимости учета обмена в реальных экспериментах. Обсуждены перспективы развития исследований и дальнейшего освоения обменных волн.

Основные вопросы, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрено влияние поля размагничивания и неоднородного обменного взаимодействия на дисперсионные свойства поверхностной волны Дэймона–Эшбаха. Выполнен краткий обзор сегодняшнего состояния работ по исследованию магнитостатических волн применительно к устройствам обработки информации. Отмечено недостаточное внимание к учету, как поля размагничивания, так и неоднородного обменного взаимодействия распространяющейся волны, особенно заметно проявляющихся для волн длиной порядка единиц нанометров и менее. Для случая столь коротких волн показана необходимость введения

в рассмотрение эффективных полей размагничивания и неоднородного обмена.

2. В геометрии плоскопараллельной пластины записаны выражения для полей размагничивания и обмена при распространении в плоскости пластины волны, длина которой может быть меньше толщины пластины. Количественное описание поля размагничивания выполнено в виде гиперболического тангенса, аргумент которого представляет собой произведение волнового числа на толщину пластины. Введен нормирующий коэффициент, учитывающий соотношение между длиной волны и толщиной пластины, показано, что для реальной геометрии его величина составляет порядка одной десятой.

3. В линейном приближении решено уравнение движения для намагниченности с учетом полей размагничивания и обмена. Получен тензор магнитной восприимчивости, диагональные компоненты которого представляют собой сумму антисимметричной и симметричной частей, причем антисимметричная часть определяется частотой волны, а симметричная часть определяется размагничиванием. Отмечен резонансный вид компонент тензора, выявлена близкая к квадратичной зависимость частоты резонанса от волнового числа.

4. В геометрии задачи Дэймона–Эшбаха для потенциала поля распространяющейся волны получено уравнение Уокера, учитывающее влияние размагничивания и обмена. Главным отличием полученного уравнения от классического его варианта, является различие коэффициентов при вторых производных по координатам, перпендикулярным постоянному полю, а также появление смешанной производной второго порядка по этим координатам.

5. Выполнено решение уравнения Уокера методом разделения переменных. Показано, что наличие в уравнении смешанной производной приводит к комплексному характеру компоненты волнового числа, перпендикулярной плоскости пластины. В случае поверхностной волны полное решение для компоненты потенциала по этой координате представляет собой произведение экспоненциально спадающего коэффициента на периодический множитель синусоидального характера. Показано, что полное распределение компоненты потенциала по координате, нормальной к плоскости пластины, описывается двумя комплексными волновыми числами, имеющими разные знаки, но одинаковые по абсолютной величине действительные и мнимые части. Выполнено преобразование коэффициентов уравнения Уокера с целью представления их в виде, допускающем простой по форме предельный переход к классическим случаям отсутствия как размагничивания, так и обмена, то есть к классической задаче Дэймона–Эшбаха.

6. Выявлена двойственность поперечного волнового числа, обусловленная двумя возможными решениями уравнения Уокера для компоненты волны, распространяющейся перпендикулярно плоскости пластины в ее глубину. Для случая отсутствия обмена выполнено представле-

ние поперечного волнового числа в виде суммы действительной и мнимой частей. Получено уравнение, определяющее поперечное волновое число через продольное, выявлен его биквадратный характер, получены аналитические выражения для действительной и мнимой компонент поперечного волнового числа. Отмечено, что оба возможных варианта поперечного волнового числа содержат одинаковые по абсолютной величине действительную и мнимую части, однако отличаются друг от друга по знаку.

7. Получены зависимости действительной и мнимой компонент поперечного волнового числа от продольного волнового числа при различных значениях нормирующего коэффициента параметра размагничивания. Показано, что все зависимости при достаточно большой величине продольного волнового числа являются прямыми, причем зависимость для действительной компоненты всегда располагается выше зависимости для мнимой компоненты, а по мере увеличения нормирующего коэффициента эти зависимости взаимно сближаются. Показано, что при малой величине продольного волнового числа имеет место эффект «схлопывания» обеих зависимостей друг с другом, состоящий в равенстве действительной и мнимой компонент, причем после точки «схлопывания» поперечная компонента волны пропадает и остается только продольная. Отмечено, что точка «схлопывания» по продольному волновому числу располагается тем дальше, чем толщина пластины меньше, причем положение этой точки определяется перегибом зависимости параметра размагничивания от толщины пластины.

8. Рассмотрена возможность представления поперечного волнового числа в виде суммы действительной и мнимой частей при учете обменного взаимодействия. Выявлено, что в этом случае поперечное волновое число, имея комплексный характер, определяется решением полного алгебраического уравнения восьмой степени. Показано, что представление поперечного волнового числа в виде суммы действительной и мнимой частей позволяет свести полное комплексное уравнение к системе двух уравнений восьмой степени, корни которых имеют действительный характер. При этом первое уравнение получается из равенства нулю действительной части исходного полного уравнения, а второе — из равенства нулю мнимой части того же уравнения. Отмечено, что численное решение полученной системы уравнений требует поиска нуля по двум переменным, что представляет определенные вычислительные трудности.

9. Предложен алгоритм упрощенного численного решения системы уравнений, состоящий в пошаговом варьировании одной из переменных и нахождении на каждом шаге двух значений другой, после чего из сравнения результатов вариации находится минимум различия между двумя получаемыми решениями, что и дает требуемые значения обеих переменных. С помощью предложенного алгоритма получена зависимость мнимой компоненты поперечного волнового числа от значения

продольного волнового числа. Выполнено сравнение полученной зависимости с таковой, соответствующей отсутствию обмена. Показано, что наилучшее совпадение обеспечивает второе уравнение системы, соответствующее нулю мнимой части полного уравнения. Построена функциональная зависимость значимой части второго уравнения от продольного волнового числа. Показано, что в отсутствие обмена нули этой функции с хорошей точностью соответствуют значениям действительной и мнимой компонент поперечного волнового числа. Отмечено наблюдаемое расхождение (превышение приблизительно в два раза) между значением действительной части поперечного волнового числа, получаемой из первого уравнения системы и значением той же части, соответствующим отсутствию обмена. Выяснение причины такого парадокса предложено в виде темы для самостоятельной задачи.

10. Рассмотрено влияние обменного взаимодействия на зависимость компонент поперечного волнового числа от величины числа продольного. Показано, что обменное взаимодействие приводит к повышению зависимостей обеих компонент поперечного волнового числа относительно подобных зависимостей в отсутствие обмена, причем по мере увеличения константы обмена повышение мнимой компоненты происходит значительно быстрее, чем повышение действительной. Отмечено, что величина мнимой компоненты всегда остается меньше величины действительной, причем рост той и другой, по мере увеличения константы обмена, будучи сначала довольно быстрым, далее замедляется и постепенно меняет знак, так что обе зависимости стремятся к предельному значению, однако сильно превышающему таковое в отсутствие обмена.

11. Выявлены три основных положения, определяющие характер наблюдаемых явлений:

- 1) учет размагничивания приводит к формированию мнимой части поперечного волнового числа;
- 2) по мере увеличения размагничивания абсолютная величина мнимой части поперечного волнового числа увеличивается;
- 3) по мере увеличения обменного взаимодействия абсолютная величина мнимой части поперечного волнового числа увеличивается.

Для качественной интерпретации этих положений предложена модель, рассматривающая распространяющуюся волну как движущееся поступательно периодическое чередование плоских поверхностей максимального отклонения намагниченности. Такие поверхности предполагаются перпендикулярными плоскости магнитной пластины, причем на них располагаются магнитные заряды того или другого знака. При выходе таких заряженных плоскостей на поверхность магнитной пластины, вблизи поверхности образуются поля, «вылезавшие» за пределы пластины. Высказано предположение о том, что в процессе своего распространения волна вынуждена «тащить за собой» эти «вылезавшие» поля, в результате чего поверхности максимального отклоне-

ния намагниченности приобретают наклонные участки, отстающие от основной части движущейся поверхности. Именно такие наклонные участки обеспечивают формирование поперечной составляющей волнового числа. По мере увеличения размагничивания, то есть увеличения величины зарядов и обусловленных этим увеличением «вылезавших» полей, протяженность наклонных участков увеличивается, что и приводит к увеличению поперечной составляющей волнового числа.

Отмечено, что предположение о независимости протяженности наклонных участков от толщины пластины приводит к выводу о том, что влияние «вылезавших» полей должно сильнее проявляться в более тонкой пластине, чем объясняется хорошее совпадение результатов ранних экспериментов, проводившихся на толстых пленках, с классической теорией Дэймона–Эшбаха, где такие поля не учитываются.

12. Для интерпретации увеличения мнимой компоненты поперечного волнового числа при увеличении размагничивания, высказано предположение о том, что по мере увеличения размагничивания, то есть увеличения зарядов, отклонение наклонных участков от нормали к плоскости пластины увеличивается, так что волновой вектор, перпендикулярный плоскости наклонного участка, также поворачивается ближе к нормали к плоскости пластины. В этом случае поперечная составляющая волнового числа увеличивается, что и проявляется как увеличение его мнимой составляющей.

13. Для интерпретации увеличения мнимой компоненты поперечного волнового числа при увеличении обмена, высказано предположение о том, что включение обменного взаимодействия приводит к затруднению искривления поверхностей максимального отклонения намагниченности, то есть проникновение наклонных участков в глубину пластины уменьшается. Такое уменьшение также приводит к повороту волнового вектора, перпендикулярного плоскости наклонного участка ближе к плоскости пластины, что проявляется как дополнительное увеличение поперечной составляющей волнового числа с соответствующим увеличением его мнимой составляющей.

14. В качестве недостатка предложенной модели отмечена произвольность положения о неизменности протяженности наклонных участков при изменении толщины пластины, а также отсутствие обоснованности сохранения их протяженности при увеличении обмена. В пользу сохранения размеров участков при изменении толщины и увеличении обмена приведена аналогия с распределением намагниченности в скрученной доменной границе, где гипотеза о существовании подобных участков находит подтверждение в многочисленных экспериментах.

15. Отмечено о существовании дополнительной возможности изменения параметров системы за счет размагничивания и обмена, не учитываемая предложенной моделью. На основе аналогии с механикой высказано предположение о том, что увеличение как размагничивание, так и обмена должно приводить к определенному «стеснению»

колебаний намагниченности, препятствуя ее динамическому отклонению от равновесного состояния. Отмечено, что такое «стеснение» эквивалентно увеличению жесткости системы, что в случае механических колебаний, например, струны, приводит к увеличению длины волны, то есть к уменьшению волнового числа, что противоречит наблюдаемому его увеличению.

16. Предложен вывод о том, что изменение поперечного волнового числа при изменении как размагничивания, так и обмена, подвержено влиянию двух факторов, а именно: изменению конфигурации поверхности максимального отклонения намагниченности и изменению жесткости системы, действующих в противоположных направлениях. То есть результирующее изменение волнового числа должно определяться компромиссом между этими факторами. Отмечено, что более подробное рассмотрение вопроса о взаимном соотношении обоих факторов, в том числе на модельном уровне, может явиться предметом для отдельной задачи.

17. Для геометрии задачи Дэймона–Эшбаха записаны уравнения для потенциала в магнитной пластине и окружающих ее с обеих сторон двух свободных полупространствах. Приведены граничные условия на поверхностях между материалом пластины и свободным пространством. Показано, что решение поставленной граничной задачи методом разделения переменных позволяет получить дисперсионное соотношение для поверхностной волны, распространяющейся в плоскости пластины перпендикулярно направлению постоянного поля. Структура полученного дисперсионного соотношения приведена к виду, аналогичному структуре подобного соотношения в классической задаче Дэймона–Эшбаха, однако здесь компоненты полученного соотношения определяются влиянием динамического размагничивания и обмена.

18. Подробно рассмотрен двойственный характер поперечного волнового числа, обусловленный смешанной производной в уравнении Уокера. Получены аналитические выражения для обоих значений волнового числа, обусловленные только размагничиванием в отсутствие обмена. Показано, что получение обеих компонент волнового числа при наличии обменного взаимодействия требует решения алгебраического уравнения восьмой степени, осуществимого только численным методом. Приведена последовательность численного расчета действительной и мнимой компонент поперечного волнового числа при наличии обмена, позволяющих получить поперечное волновое число в виде, требуемом для подстановки в дисперсионное соотношение.

19. Приведена общая схема получения закона дисперсии как функциональной зависимости частоты волны от ее продольного волнового числа. Предложен алгоритм расчета, состоящий в пошаговом задании продольного волнового числа с нахождением значения частоты на каждом шаге методом поиска нуля. В качестве первого шага отмечена необходимость определения компонент тензора магнитной проницаемо-

сти с учетом двойственного характера поперечного волнового числа. Приведена схема алгоритма получения тензора проницаемости для каждой из компонент двойственного волнового числа в отдельности. Получены промежуточные параметры, определяющие структуру правой и левой частей дисперсионного соотношения. Приведены схемы алгоритмов получения обеих частей дисперсионного соотношения, а также действительной и мнимой частей соотношения в целом. Отмечено, что приведенный алгоритм позволяет получить функциональную зависимость частоты распространяющейся волны от продольного волнового числа, что и составляет искомый закон дисперсии.

20. Приведены результаты расчета дисперсии поверхностной магнитостатической волны на основе полученного дисперсионного соотношения. В качестве точки для сравнения приведена классическая дисперсионная зависимость для обменной волны в безграничном пространстве и ее обобщение для тонкой пластины. Отмечена недостаточность классического представления, обусловленная отсутствием учета динамического размагничивания, двойственного характера поперечного волнового числа и динамических граничных условий на поверхностях пластины.

21. На основе полученного дисперсионного соотношения построены дисперсионные кривые с учетом как размагничивания, так и обмена. Исследования выполнены в интервале продольного волнового числа от нуля до $4 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$, что превышает традиционно реализуемый диапазон в экспериментах по дипольным магнитостатическим волнам примерно на два порядка. Выполнено сравнение полученных кривых с таковыми для классической задачи Дэймона–Эшбаха, а также для классической обменной волны в безграничной среде и тонкой пластине. Показано, что учет размагничивания приводит к повышению дисперсионных кривых в области волновых чисел, величина которых превышает обратную величину толщины пластины. Показано, что обменное взаимодействие приводит к росту дисперсионных кривых, существенно превышающему дисперсионные кривые для поверхностных волн, полученные в рамках классической задачи Дэймона–Эшбаха, причем превышение с увеличением продольного волнового числа растет по закону, близкому к квадратичному. Показано, что учет обменного взаимодействия, в основном сохраняя близкий к квадратичному закон дисперсии, задаваемый классикой, приводит к большей крутизне дисперсионных кривых по сравнению с классическими, причем такое превышение крутизны по мере увеличения продольного волнового числа также увеличивается. Отмечено, что учет размагничивания, сам по себе не обеспечивая роста дисперсионных кривых выше квадратичного, в свою очередь, складываясь с обменом, приводит к дополнительному превышению получаемых квадратичных кривых над классическими.

22. На основе полученного дисперсионного соотношения с учетом размагничивания и обмена, рассмотрена зависимость закона дисперсии для поверхностной волны от толщины пластины. Отмечено, что дисперсионные кривые при любой толщине, по мере роста волнового числа, также возрастают по закону, близкому к квадратичному. При этом в области значений волнового числа, меньших обратной толщины пластины, крутизна дисперсионных зависимостей по мере уменьшения толщины возрастает. В области значений волнового числа, больших обратной толщины пластины, крутизна дисперсионных кривых по мере уменьшения толщины асимптотически стремится к величине, свойственной закону дисперсии в отсутствие размагничивания.

23. На основе полученного дисперсионного соотношения с учетом размагничивания и обмена, рассмотрена зависимость закона дисперсии для поверхностной волны от величины константы обменного взаимодействия. Рассмотрение выполнено при толщине пластины, равной 1 мкм, что обеспечивало начало заметного влияния размагничивания примерно на середине исследуемого диапазона волнового числа (то есть около $2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$). В качестве эталона принято значение константы обмена, свойственное железоиттриевому гранату. Получены дисперсионные кривые при разной величине константы обменного взаимодействия в интервале от одного до ста эталонных значений. Показано, что при величине константы порядка единицы от эталонного значения, дисперсионная кривая, хотя и проходит несколько выше классической, соответствующей задаче Дэймона–Эшбаха, но квадратичный характер дисперсии заметно не проявляется. Показано, что для заметного проявления квадратичности необходимо превышение константы обмена не менее чем на порядок по сравнению с эталоном. При этом превышение константы над эталоном на два порядка приводит к полному преобладанию квадратичного закона над классическим.

24. Отмечена связанная с численным характером решения задачи техническая причина ограничения интервала продольного волнового числа величиной $4 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$. Выявлены ее особенности и указаны пути их преодоления. В качестве важнейшей задачи для дальнейшего рассмотрения отмечена необходимость расширения исследуемого диапазона продольного волнового числа не менее чем на два порядка.

25. Рассмотрена дисперсия обменных волн при больших волновых числах вплоть до 10^7 см^{-1} , при которых длина волны становится соизмеримой с межатомными расстояниями в материале магнитной пластины. Исследования выполнены при изменении константы обменного взаимодействия в диапазоне от $1,6 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2$ до $3,4 \cdot 10^{-11} \text{ см}^2$, включающем в себя константу для железоиттриевого граната (ЖИГ), равную $Q(YIG) = 3,37 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2$. Показано, что во всем диапазоне изменения константы обмена дисперсионные зависимости имеют возрастающий квадратичный характер. По мере увеличения константы относительная степень возрастания уменьшается, то есть рост, хотя и со-

храняется, но постепенно замедляется. Показано, что волновым числам порядка 10^7 см^{-1} , то есть длинам обменных волн порядка межатомных расстояний, соответствуют частоты порядка десятков и небольших сотен ТГц. Так, при единичной константе для ЖИГ волновому числу 10^7 см^{-1} , то есть длине волны в 6,28 нм соответствует частота около 4 ТГц. Тому же волновому числу при константе $10,0 \cdot Q(YIG)$ соответствует частота около 40 ТГц. Отмечено, что электромагнитным волнам той же длины соответствуют частоты порядка 10^4 ТГц, лежащие далеко выше видимого оптического спектра, уже в ультрафиолетовой и частично в рентгеновской области.

26. Выполнено сравнение полученного закона дисперсии для касательно намагниченной пластины с классической формулой дисперсии для безграничной среды, представляющей собой произведение константы обмена на квадрат волнового числа. Установлено, что дисперсионная кривая без учета поперечного волнового числа лежит по частоте выше классической примерно в два раза, однако учет поперечного волнового числа приводит к уменьшению различия всего до 20%. Таким образом, показано, что в формировании дисперсионной кривой для поверхностной волны типа Дэймона–Эшбаха в области волновых чисел, где обменное взаимодействие сказывается достаточно сильно (то есть при волновых числах больше 10^4 см^{-1}), поперечное волновое число (точнее — его действительная часть) имеет принципиальное значение. На основе сопоставления дисперсии в безграничном пространстве с дисперсией в тонкой пластине отмечена необходимость более точного определения константы неоднородного обменного взаимодействия, а также более глубокой физической разработки роли поперечного волнового числа.

27. Выявлено существование, кроме основного, дополнительного решения дисперсионного соотношения. Показано, что основная кривая при отсутствии обмена и динамического размагничивания переходит в классическую дисперсионную кривую Дэймона–Эшбаха, по частоте заключенную между нижней и верхней границами спектра поверхностных магнитоэлектронных волн, причем по мере уменьшения толщины пластины наклон начального участка классической дисперсионной кривой уменьшается. Показано, что дополнительная дисперсионная кривая по частоте лежит выше основной, причем в области малых волновых чисел превышение составляет около 0,5 от нормированной на намагниченность насыщенности частоты основной кривой. Наклон начального участка у дополнительной кривой отсутствует и с изменением толщины не меняется. Обе кривые, как основная, так и дополнительная, по мере увеличения волнового числа имеют сходный квадратичный характер, причем расстояние по частоте между ними постепенно уменьшается, а после волнового числа порядка $1,5 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$, обе кривые практически полностью сливаются. Геометрическая конфигурация этой кривой от толщины пластины не зависит. При изменении постоянного поля

смещение дополнительной кривой по частоте подобно смещению основной, однако по мере увеличения поля расстояние между обеими кривыми уменьшается (на единицы и небольшие десятки процентов).

28. На основе анализа структуры дисперсионного соотношения показано, что существование двух его решений обусловлено прохождением через нуль зависимости его левой части от частоты. При этом характер прохождения через нуль для обеих кривых принципиально различен. Так, основная дисперсионная кривая формируется при плавном прохождении левой части через нуль, тогда как на частоте дополнительной дисперсионной кривой имеет место расходимость, по обе стороны от которой значение левой части дисперсионного соотношения, имея противоположные знаки, стремится к бесконечности. Отмечено, что для более глубоко выявления физического смысла дополнительной дисперсионной кривой необходимо исследование пространственного распределения потенциала и полей волны, а также ее динамической намагнитченности в сочетании с определением угла отсечки.

Глава 7

ВЛИЯНИЕ ОБМЕНА И РАЗМАГНИЧИВАНИЯ НА ОГРАНИЧЕНИЕ ВОЛНОВОГО ЧИСЛА В ЗАДАЧЕ ДЭЙМОНА–ЭШБАХА С ДИССИПАЦИЕЙ

Настоящая глава посвящена рассмотрению влияния неоднородного обмена и размагничивания на ограничение волнового числа в задаче Дэймона–Эшбаха с диссипацией. Будет показано, что необходимым условием беспрепятственного распространения волны является меньшая величина времени собственного пробега волны по сравнению со временем ее релаксации. Будут выявлены параметры материала и геометрии структуры, а также частотные свойства, требуемые для выполнения такого условия, а также выполнена оценка допустимых параметров реальных материалов и приведены данные, необходимые для реализации в эксперименте беспрепятственного распространения волны с большими волновыми числами.

Основной ход изложения следует [37], а необходимые дополнительные ссылки указываются в тексте.

7.1. Общие замечания о постанове задачи об ограничении волнового числа

Сегодняшнее развитие устройств обработки информации требует обращения к временам, исчисляемым пико- и фемтосекундами, а также к размерам, исчисляемым нанометрами. Значительные перспективы здесь открываются для использования спиновых волн [193–198], в первую очередь обменных, длина которых исчисляется единицами нанометров, а доступные частоты СВЧ-диапазона достигают единиц и десятков терагерц [34]. В этом случае решающее значение приобретают динамические поля размагничивания [31] и неоднородное обменное взаимодействие [32–34].

В связи с продемонстрированной в предыдущей главе (разд. 6.23) возможностью достижения волновым числом весьма высоких значений, возникает вопрос, в какой степени увеличение волнового числа может быть реализовано в реальных материалах, то есть, может ли длина волны уменьшаться до своего физического предела, близкого к межатомному расстоянию. Очевидно, для более коротких волн классическое

рассмотрение магнитной среды в виде непрерывного континуума становится неприменимым и требуется рассмотрение на квантовом уровне. Физический предел рассмотрения магнитостатической волны, определяемый межатомным расстоянием, находится в пределах единиц нанометров, что соответствует волновому числу порядка 10^7 – 10^8 см⁻¹.

Следует отметить, что имеется ряд теоретических работ [5–8, 11, 12, 15, 16, 222, 224], где на основе классического дисперсионного соотношения Дэймона–Эшбаха показано, что в среде с реальным уровнем диссипации (например, в железиттриевом гранате, где константа Гильберта составляет порядка 0,001) дисперсионная кривая по мере увеличения волнового числа ограничивается на уровне порядка 10^4 – 10^5 см⁻¹. Из этого следует, что длина спиновой волны не может быть меньше единиц и десятых долей микрометра, то есть сотен и тысяч нанометров, что превышает межатомные расстояния в сотни и тысячи раз, то есть далеко не достигает своего физического предела.

Такое ограничение обусловлено уменьшением групповой скорости волны до такого уровня, когда за промежуток времени, равный периоду колебаний волны, волновое возмущение не успевает пройти расстояние, равное длине волны, в результате чего волна распространяться не может.

В то же время, следует отметить, что экспериментальное подтверждение ограничения диапазона допустимых волновых чисел на уровне 10^4 – 10^5 см⁻¹, в настоящее время отсутствует. Более того, во многих достаточно современных работах рассматриваются спиновые волны с волновым числом на порядок и более превышающим отмеченный выше уровень ограничения. Так, в работе [200], посвященной машинному моделированию спиновых волн с использованием программных пакетов, работающих по методу конечных разностей или конечных элементов, на рис. 16 представлены волновые числа порядка $0,1$ нм⁻¹, то есть 10^6 см⁻¹, на рис. 20 — волновые числа порядка $3 \cdot 10^6$ см⁻¹ и так далее. В экспериментальной работе [199], посвященной возбуждению спиновых волн лучом фемтосекундного лазера, падающим на решетку из никеля, период этой решетки, определяющий длину возбуждаемых спиновых волн, составляет 500 нм, то есть волновое число здесь близко к величине 10^5 см⁻¹. В экспериментальной работе [202] продемонстрировано возбуждение спиновых волн с волновым числом порядка 10^5 см⁻¹ в спиновом волноводе на основе пермаллоевой пленки шириной 100 нм и толщиной 10 нм. При этом, начиная с волновых чисел порядка $6 \cdot 10^4$ см⁻¹ до максимально достигнутых волновых чисел $2 \cdot 10^5$ см⁻¹, наблюдался резкий рост частоты возбуждаемых волн в диапазоне от 11 до 16 ГГц, имевший вид, близкий к квадратичному, что говорит в пользу обменного характера возбуждаемых волн.

С другой стороны, еще в ранних работах по возбуждению коротких спиновых волн в неоднородном поле, положивших основу созданию

высокоэффективных линий задержки СВЧ-сигнала, частично обобщенных в [147] (см. также обзор в главе 1 работы [1]), была показана не только возможность возбуждения спиновых волн длиной порядка единиц микрон, но и эффективное их преобразование в упругие волны той же длины.

Возбуждение обменных спиновых волн длиной в единицы и доли микрона широко исследовалось в металлических пленках микронных толщин (см. напр. [71, 75], а также обзор в главе 1 работы [1]). В таких пленках, благодаря проводимости, затухание настолько велико, что, согласно [5–9, 11, 12, 15, 16, 222, 224], ограничение по волновому числу должно наступать уже на уровне 10^2 – 10^3 см⁻¹. При этом длина волны, особенно на модах высоких порядков, составляла единицы и десятые доли микрона, то есть волновое число достигало величины порядка 10^5 см⁻¹ и какое-либо его ограничение явным образом не наблюдалось.

Следует отметить также, что достаточно адекватная теоретическая трактовка экспериментальных работ по параметрическому возбуждению спиновых волн в условиях нелинейного ферромагнитного резонанса [66, 70] основана на рассмотрении таких волн с волновыми числами порядка 10^6 – 10^7 см⁻¹, то есть имеющих длину менее сотен и даже десятков нанометров. При этом ограничение по волновому числу тоже никак не проявляется.

Таким образом, можно полагать, что предсказанное в теории [5–9, 11, 12, 15, 16, 222, 224] ограничение длины спиновых волн единицами микрометров или волнового числа величинами порядка 10^4 – 10^5 см⁻¹, в реальной ситуации места не имеет.

В качестве причины снятия такого ограничения можно предположить отсутствие уменьшения групповой скорости до величины, когда волновое возмущение за время своего периода не успевает преодолеть длину собственной волны. То есть групповая скорость при любом значении волнового числа всегда остается больше минимального критического значения, обуславливающего ограничение.

Как показано в работах [31–33], благодаря влиянию размагничивания и обмена, групповая скорость спиновой волны по мере увеличения волнового числа всегда только растет, причем тем сильнее, чем волновое число больше. Напротив того, в классической задаче Дэймона–Эшбаха, на которой основаны работы [5–9, 11, 12, 15, 16, 222, 224], групповая скорость по мере увеличения волнового числа стремится к нулю. Введение в рассмотрение размагничивания и обмена, выполненное в работах [31–33] такое стремление компенсирует, в результате чего ограничение по волновому числу, если и может проявляться, то требует для своего выполнения весьма специфических условий, предусматривающих сочетание малой групповой скорости с высоким уровнем диссипации.

Довольно яркую иллюстрацию отсутствия уменьшения групповой скорости до малых значений дает рис. 6.19. Здесь видно, что хотя

для кривой 1 на участке изменения волнового числа от $0,2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ до $0,5 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ групповая скорость, как тангенс угла касательной к дисперсионной кривой, в самом деле близка к нулю, однако уже начиная с волновых чисел порядка $0,5 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$, откуда начинается квадратичный рост кривой, эта скорость постепенно увеличивается тем сильнее, чем волновое число больше. Еще ярче такое отсутствие уменьшения групповой скорости наблюдается для кривой 5, соответствующей меньшей толщине пластины (1 мкм против 10 мкм для кривой 1). Здесь пологого участка, подобного наблюдаемому на кривой 1, вообще не существует, так как ниже $k_y = 1,5 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ высокая крутизна кривой 5 обеспечивается малостью толщины пластины (то есть работает размагничивающий фактор), а выше этого значения вступает в действие обмен, приводящий к квадратичному росту кривой в целом.

Следует заметить, что столь эффектная картина, как на рис. 6.19, получена при значении константы обмена в 10 раз превышающей таковую для ЖИГ. Можно полагать, что в случае реальной константы ЖИГ для устранения пологого участка, необходима еще меньшая толщина магнитной пластины. Однако, как отмечено в цитированных выше работах, толщина в 0,1 мкм и менее для проводимых на сегодняшний день экспериментов является типичной, что и может способствовать снятию ограничения на длину обменной волны по волновому числу.

Замечание. Проведенное в настоящем разделе рассмотрение ликвидации ограничения по волновому числу является не более чем качественным. Для количественной трактовки следует прежде всего рассмотреть механизм ограничения более подробно, то есть найти критерий, накладываемый на групповую скорость длиной волны и параметром затухания. Далее следует выполнить рассмотрение дисперсии, подобное проведенному выше, с определением зависимости групповой скорости от волнового числа, после чего найти условия преодоления упомянутого критерия за счет обмена и малой толщины пластины, что даст картину, соответствующую эксперименту. Возможен и более прямой путь, то есть выполнить анализ дисперсии с учетом затухания, подобный, проведенному в работах [5–9, 11, 12, 15, 16, 222, 224], но с привлечением к рассмотрению обменного взаимодействия и динамического размагничивания. Однако можно полагать, что этот способ, хотя и будет более последовательным, но потребует вычислений значительно более громоздких, чем непосредственное получение критерия. Авторы полагают, что исчерпывающе подробное рассмотрение задачи о наличии или отсутствии ограничения дисперсии по волновому числу может составить достойный внимания предмет для отдельной работы.

Тем не менее, некоторые вопросы ограничения по волновому числу количественного характера, в первую очередь касающиеся механизма ограничения, с определенной подробностью будут рассмотрены в данной главе настоящей монографии.

7.2. Дисперсионное соотношение

Геометрия задачи представляет собой касательно намагниченную ферритовую пластину, то есть полностью совпадает с принятой выше и подробно изображенной на рис. 5.1 (а также рис. 2.1). Будем полагать, что волна распространяется перпендикулярно направлению приложенного поля.

Длина волны и ее групповая скорость определяются из дисперсионного соотношения, поэтому, следуя разд. 6.14, а также работам [31, 32, 34], приведем вкратце его выражение для рассматриваемой задачи.

Дисперсионное соотношение, приведенное к виду, подобному классическому соотношению Дэймона–Эшбаха, имеет вид (6.273), (6.357):

$$\frac{e^{(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})} - e^{-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})}}{e^{(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})} + e^{-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})}} = \frac{k_x^e (\varepsilon^{(-)} - \varepsilon^{(+)})}{(k_x^e)^2 - \varepsilon^{(+)} \varepsilon^{(-)}}, \quad (7.1)$$

где величины $\rho^{(\pm)}$ и $\varepsilon^{(\pm)}$ определяются формулами (6.267)–(6.271), а оба варианта комплексного поперечного волнового числа $k_x^{(\pm)}$ имеют вид (6.274), (6.275), где k_d и k_m — действительные.

Компоненты поперечного волнового числа k_d и k_m в общем случае (при наличии обмена и размагничивания) определяются решениями уравнения относительно неизвестной величины ξ , имеющего вид (6.230), (6.278):

$$g_8 c_{8b} + g_6 c_{6b} + g_4 c_{4b} + g_{2a} c_{2b} + g_{2b} c_{2a} = 0. \quad (7.2)$$

В этом уравнении заданные параметры g , не содержащие ξ , определяются формулами (6.203)–(6.207), а параметры c , содержащие искомую неизвестную ξ , имеют вид (6.216), (6.218), (6.220)–(6.222), где k_d в качестве предварительного шага полного решения определяется через k_y по формуле (6.185), (6.276):

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)} \right)^2}} \cdot k_y. \quad (7.3)$$

Решение уравнения (7.2) методом поиска нуля приводит к двум значениям неизвестной ξ , как раз соответствующим значениям компонент поперечного волнового числа k_d и k_m .

Подстановка перечисленных параметров в дисперсионное соотношение (7.1), а также учет равенства:

$$k_x^e = k_y, \quad (7.4)$$

согласно (2.159), выполняющегося при $k_z = 0$, позволяет привести его к виду, содержащему только частоту Ω и продольное волновое число k_y .

Комплексный характер поперечного волнового числа $k_x^{(\pm)}$, в соответствии с формулами (6.274), (6.275), приводит к комплексному виду дисперсионного соотношения. В разд. 6.19 (в том числе в «замечании» в конце раздела) отмечено, что для получения действительной зависимости частоты Ω от продольного волнового числа k_y достаточно рассмотреть только действительную часть полного дисперсионного соотношения (6.388), с учетом (6.393), имеющую вид (6.395):

$$\frac{AB}{A^2 \sin^2(dk_m) + B^2 \cos^2(dk_m)} - \frac{u_d v_d + u_m v_m}{v_d^2 + v_m^2} = 0, \quad (7.5)$$

где используются обозначения (6.369), (6.370), а также (6.379)–(6.382) с учетом (6.351), (6.352), (6.355), (6.356), взятые при значениях волнового числа $k_x^{(+)}$ и $k_x^{(-)}$ соответственно.

Решение дисперсионного отношения (7.1) или (7.5) в аналитическом виде вряд ли возможно, поэтому в задачах предыдущей главы решение выполняется численно методом поиска нуля. Подробная пошаговая процедура выполнения такого решения приведена полностью в работе [33] и отражена здесь в разд. 6.15–6.19. В настоящей главе использовалась та же процедура, позволившая получить дисперсионные кривые, приведенные далее.

7.3. Время собственного пробега волны

Условием ограничения волнового числа, то есть прекращением распространения волны является ее затухание на расстоянии, равном собственной длине.

Согласно общей теории распространения волны, ее длина обратна волновому числу, с коэффициентом 2π [153, стр. 30], то есть:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (7.6)$$

Групповая скорость равна производной от закона дисперсии волны $\omega(k)$ по волновому числу k [153, стр. 430], то есть:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (7.7)$$

Таким образом, если известен закон дисперсии магнитостатической волны $\omega(k)$, то ее групповую скорость v_g можно найти путем дифференцирования $\omega(k)$ по волновому числу k . При этом время t_S , за которое волна проходит расстояние, равное своей длине (называемое далее «время собственного пробега»), принимает вид:

$$t_S = \frac{\lambda}{v_g} = \frac{2\pi}{k} \cdot \left(\frac{d\omega}{dk} \right)^{-1}. \quad (7.8)$$

Схема нахождения такого времени показана на рис. 7.1. Здесь на рис. 7.1, а представлены дисперсионные кривые, полученные по фор-

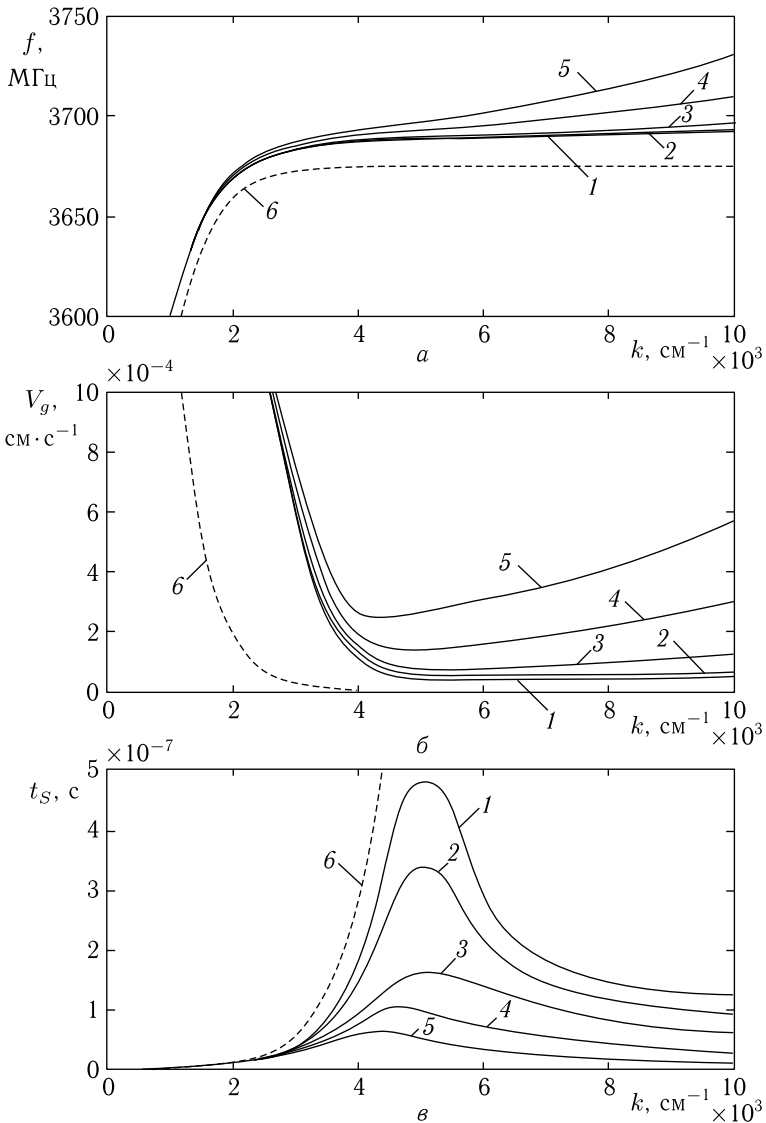


Рис. 7.1. Зависимости частоты (а), групповой скорости (б) и времени собственного пробега волны (в) от волнового числа при различных значениях константы обменного взаимодействия. Значения константы обмена Q отнесены к таковому для ЖИГ $Q(YIG) = 3,37 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2$ (нормирована на 4π): 1 — $Q = 0,5 \cdot Q(YIG)$; 2 — $Q = 1,0 \cdot Q(YIG)$; 3 — $Q = 3,0 \cdot Q(YIG)$; 4 — $Q = 10 \cdot Q(YIG)$; 5 — $Q = 20 \cdot Q(YIG)$. Точечные кривые 6 соответствуют классической задаче Дэймона–Эшбаха без размагничивания и обмена.

Параметры: $H_0 = 437,5 \text{ Э}$, $4\pi M_0 = 1750 \text{ Гс}$, $d = 10 \text{ мкм}$, $\alpha_p = 0,05$

муле (7.5) при различных значениях параметра обмена. На рис. 7.1, б — зависимости групповой скорости от волнового числа, полученные путем численного дифференцирования дисперсионных кривых, представленных на рис. 7.1, а. На рис. 7.1, в представлены зависимости времени прохождения волной расстояния собственной длины t_S , полученные по формуле (7.8). На всех рисунках для сравнения точечной линией приведены те же зависимости для классической волны Дэймона–Эшбаха без учета обмена и размагничивания.

Из рис. 7.1, а видно, что по мере увеличения волнового числа все дисперсионные кривые возрастают по квадратичному закону тем сильнее, чем константа обмена больше, что соответствует влиянию обмена, рассмотренному в разд. 6.21.2, а также в разд. 6.23.2.

Все кривые 1–5 проходят выше классической кривой Дэймона–Эшбаха б, причем добавка даже при малой величине константы обмена (кривые 1, 2) во всем интервале изменения волнового числа остается почти постоянной (около 15 МГц). Некоторое увеличение этой добавки при волновом числе больше $8 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$, хотя и наблюдается, но оно значительно меньше увеличения, обусловленного обменным взаимодействием. Согласно показанному в разд. 5.11, такое поведение добавки к дисперсионным кривым обусловлено влиянием поля размагничивания волны.

Из рис. 7.1, б, где показаны групповые скорости, соответствующие дисперсионным кривым на рис. 7.1, а, видно, что все они сначала резко спадают после чего, пройдя минимум, плавно возрастают. Первичный спад кривых обусловлен быстрым ростом зависимостей дисперсии на начальном участке до волновых чисел порядка $3 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$. Минимум соответствует прохождению дисперсионных кривых почти горизонтального участка, где волновое число меняется от $3 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ до $6 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$. В этой области действие размагничивания формы пластины уже заканчивается, а действие обмена еще только начинается. Здесь классическая дисперсия Дэймона–Эшбаха (кривая б) приводит к стремлению групповой скорости к нулю, что и дает в результате ограничение волнового числа. При волновых числах больше $6 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ обмен сказывается все сильнее, так что групповая скорость волны увеличивается и кривые идут вверх. Это рост проявляется тем более ярко, чем константа обмена больше.

На рис. 7.1, в приведены зависимости времени собственного пробега волны t_S от волнового числа, построенные по формуле (7.8) для тех же значений константы обмена. Видно, что в области минимума кривых на рис. 7.1, б зависимости времени t_S от k имеют максимум. То есть, чем меньше скорость, тем больше времени требуется волне для прохождения своей длины. Для классической волны Дэймона–Эшбаха (кривая б) это время стремится к бесконечности, так что за время релаксации она никогда не успевает пройти собственную длину, вследствие чего волна на этом пути полностью затухает и дальше распространяться не может.

Из рисунка видно, что время t_S тем больше, чем константа обмена меньше. То есть именно обменное взаимодействие, поддерживая волну на пути, не дает ей затухнуть на собственной длине и она может распространяться дальше. При этом, чем константа обмена больше, тем такое его положительное действие проявляется сильнее.

7.3.1. Влияние дискретности развертки по волновому числу на время собственного пробега волны

Зависимости групповой скорости от волнового числа, представленные на рис. 7.1, б, получены путем численного дифференцирования дисперсионных кривых, приведенных на рис. 7.1, а. Процедура дифференцирования выполнялась в соответствии с [259, стр. 562–576], где учитывался только первый член ряда. Однако в [208, стр. 695] отмечено, что «Численное дифференцирование чувствительно к ошибкам, вызванным неточностью исходных данных, отбрасыванием членов ряда и т. д., и поэтому должно применяться с осторожностью». Рассмотрим кратко, какие именно меры предосторожности должны быть приняты.

Можно видеть, что кривые на рис. 7.1, а при волновых числах выше $4 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ идут довольно полого. При этом их значения на длине шага по волновому числу меняются крайне мало, так что разность этих значений, необходимая для вычисления производной, получается близкой к нулю. Дисперсионные кривые, приведенные на рис. 7.1, а, получены путем поиска нуля, так что их точность определяется величиной шага по частоте в процессе такого поиска. Вследствие малости изменения частоты на длине шага по волновому числу, значение приращения частоты на длине такого шага измеряется несколькими единицами шага по частоте. То есть последовательность этих значений при изменении волнового числа в области k больше $4 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ имеет ступенчатый характер, где высота ступенек определяется величиной шага по частоте при поиске нуля. При дифференцировании такой ступенчатой зависимости на соответствующих участках кривых для групповой скорости, представленных на рис. 7.1, б, получаются довольно большие ошибки. При шаге по частоте в 0,5 МГц, который был принят основным в настоящей работе, кривые для групповой скорости в тех частях, где они проходят почти горизонтально, испытывают колебания до 5%. Проверка показала, что уменьшение шага по частоте еще на порядок к заметному сглаживанию кривых не приводит, однако время расчета, особенно при волновых числах более 10^4 см^{-1} становится неоправданно большим (до нескольких часов). Это происходит при шаге по волновому числу в 250 см^{-1} , причем дальнейшее уменьшение шага к повышению точности не приводит. В результате кривые на рис. 7.1, в, получаемые делением длины волны на значения групповой скорости, приведенные на рис. 7.1, б, испытывают скачки, достигающие 10%. Уменьшение шага по волновому числу приводит к учащению скачков с увеличением их амплитуды. Такое возрастание амплитуды скачков

происходит из-за того, что знаменатель дроби, определяющей длину собственного пробега, уменьшается.

Пример разброса значений времени собственного пробега при изменении шага по волновому числу показан на рис. 7.2. Приведены три значения шага, по обе стороны от оптимума. Сплошная кривая является результатом усреднения значений при шаге, равном 500 см^{-1} .

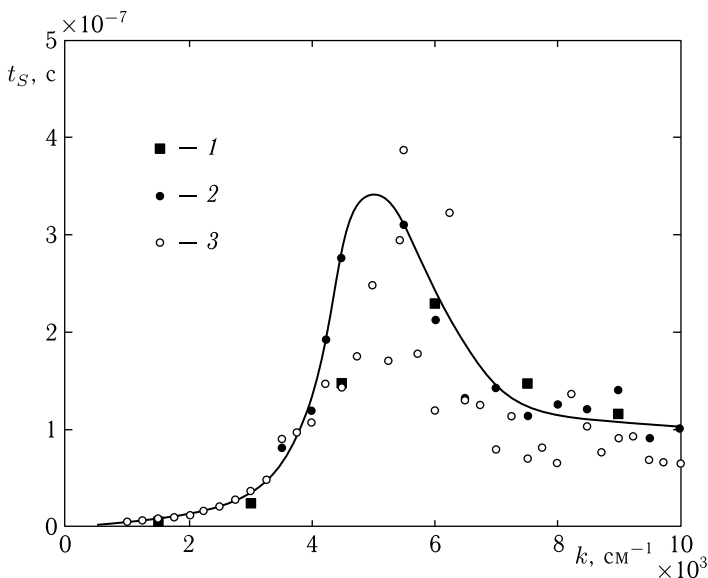


Рис. 7.2. Зависимости времени собственного пробега от волнового числа, полученные при различной величине шага по волновому числу: 1 — $\Delta k = 750 \text{ см}^{-1}$, 2 — $\Delta k = 500 \text{ см}^{-1}$, 3 — $\Delta k = 250 \text{ см}^{-1}$. Константа обмена равна $Q(YIG)$.

Остальные параметры — те же, что приняты при построении рис. 7.1

Из рисунка можно видеть, что шаг в 750 см^{-1} (точки квадратные — 1), хотя и отражают рост зависимости в области между $4 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ и $7 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ в сочетании с пологими участками вне этого интервала, причем разброс их отсутствует, однако расстояние между этими точками слишком велико и не позволяет получить подробного представления о полном ходе зависимости. Более того, максимум вблизи $k = 5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ вообще пропущен (так как на него не пришлось соответствующей точки).

Шаг в 500 см^{-1} (точки круглые сплошные — 2) отражает ход кривой с достаточной подробностью, а разброс проявляется только выше $7 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ и не превышает 10 %.

Шаг в 250 см^{-1} (точки круглые открытые — 3) общий характер зависимости (подъем посередине и спады по обе стороны), отражает в достаточной степени, однако приводит к весьма значительно-

му разбросу, который начинает проявляться уже с волнового числа около $5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$. Величина разброса достигает 30 %, что значительно больше, чем при шаге в 500 см^{-1} .

На основании данных, представленных на рис. 7.2, можно полагать, что оптимальным является шаг по волновому числу, равный 500 см^{-1} , который и был принят в качестве основного в настоящей работе. Сплошная кривая на рисунке проведена путем усреднения («на глаз») точек 2, соответствующих этому шагу. Можно видеть, что она является достаточно плавной и отклоняется от точек не более чем на 5 %. Эта кривая соответствует кривой 2 на рис. 7.1, в.

Таким образом, склонное к скачкообразному поведение получаемых зависимостей времени собственного пробега от величины волнового числа, вызвало необходимость усреднения с целью приближения их более гладкими кривыми, которые и приведены на рис. 7.1, в. То есть эти кривые получены путем сглаживания реально получаемых зависимостей в пределах около 10 %, что следует иметь в виду при сопоставлении с временами релаксации.

7.4. Время релаксации

Важнейшим параметром, характеризующим возможность распространения волны в диссипативной среде, является время релаксации ее колебаний. Так, если время релаксации настолько мало, что волна за это время не успевает пройти расстояние, равное своей длине, то ее распространение, как волнового процесса, прекращается. Колебания вблизи точки возбуждения спадают по амплитуде на расстоянии первой же длины волны настолько, что на расстоянии второй длины волны колебания уже отсутствуют. То есть колебания в пределах первой длины волны приобретают аperiodический характер и волна дальше не распространяется.

Волна, амплитуда которой меняется во времени, распространяется с групповой скоростью. Поэтому, если время распространения волны с групповой скоростью на расстояние своей длины превышает время релаксации, то волна распространяться не может. В работах [5–9, 11, 12, 15, 16, 222, 224] показано, что именно такое обстоятельство является причиной ограничения закона дисперсии волны по волновому числу. Там же отмечено, что прямое определение групповой скорости как тангенса угла касательной к дисперсионной кривой, приводит после достижения минимума к новому увеличению групповой скорости (рис. 3 в работе [11]). Однако далее сказано, что это увеличение является кажущимся, так как соответствует плавному уменьшению намагниченности по аperiodическому закону на расстояние, превышающее длину волны, что и дает как бы увеличение групповой скорости. То есть за время периода спад намагниченности простирается на значительную длину, а скорость, определяемая как отношение длины этого спада ко времени периода соответственно возрастает. Однако

эта «скорость» уже не имеет отношения к распространению волны, то есть волна, как возмущение среды с определенной периодичностью, дальше не распространяется.

Таким образом, равенство между временем распространения волны с групповой скоростью на расстояние своей длины и временем релаксации можно считать критерием окончания распространения волны, то есть критерием ограничения закона дисперсии волны по волновому числу.

7.4.1. Определение времени релаксации для колебаний намагниченности

Основным предметом настоящей работы является задача Дэймона–Эшбаха с учетом обмена и размагничивания, представленная в работах [31–34]. Эти работы выполнены без учета затухания, однако аналитическое решение, требующее учета поперечного волнового числа, является довольно громоздким. Для задачи Дэймона–Эшбаха решение с учетом затухания получено в работах [5–9, 11, 12, 15, 16]. Хотя размагничивание и обмен здесь отсутствуют, однако аналитическая часть решения вследствие учета комплексного вида волнового числа также является довольно громоздкой. Объединение этих двух задач, то есть рассмотрение магнитостатических волн с учетом как обмена с размагничиванием, так и затухания, еще не выполнено. Следует ожидать, что оно будет еще более громоздким, чем каждая из этих задач в отдельности, поэтому авторы предпочитают оставить постановку объединенной задачи для отдельного исследования. Тем не менее, для рассматриваемой здесь задачи необходимо знание времени релаксации магнитостатической волны.

Вообще говоря, в наиболее чистом виде оно должно быть определено из решения упомянутой выше объединенной задачи, которое на данный момент отсутствует. В то же время, относительно колебаний намагниченности, имеется достаточно подробное решение задачи с учетом затухания, относящееся к возбуждению гиперзвуковых упругих колебаний на частоте ферромагнитного резонанса [237]. В этой задаче определение времени релаксации магнитных колебаний легко осуществимо путем анализа развития колебаний во времени после включения возбуждения.

В рамках настоящей работы положим, что время релаксации в этой задаче при возбуждении ферромагнитного резонанса то же самое, что и время релаксации в задаче о распространении магнитостатической волны типа Дэймона–Эшбаха. То есть для нашей цели воспользуемся временем релаксации, получаемом на основе решения задачи о гиперзвуке, рассмотренной в [237].

Замечание. Эквивалентность процесса затухания в обоих случаях не вполне очевидна, так как процесс релаксации может определяться конкретной моделью. Так, в динамике доменов [167, 168] релаксация, соответствующая линейному ФМР, не проходит, так как в доменах намагниченность переориентируется в обратном направлении на полный

угол в 180 градусов, тогда как при ФМР в линейном режиме намагниченность отклоняется лишь на доли градуса (как правило, не более чем на 1 градус), после чего начинается нелинейное параметрическое возбуждение обменных спиновых волн [66, 70]. В самом деле, динамика доменов — процесс существенно нелинейный, механизм развития которого коренным образом отличается от развития линейного ФМР, что и дает различие времен релаксации. Однако в рамках настоящей работы прецессия намагниченности является линейной, так что раскрытие конуса прецессии не превышает 1–2 градусов, поэтому можно полагать, что процессы релаксации для линейной волны и для линейной же прецессии в [237] происходят одинаково, то есть эквивалентны.

7.4.2. Задача о возбуждении однородной прецессии намагниченности

Геометрия задачи, совпадающая с принятой в [237], показана на рис. 7.3. Основу составляет ферритовая пластина толщины d , обладающая магнитными, упругими и магнитоупругими свойствами. Для рассматриваемых здесь вопросов упругие колебания не нужны, поэтому ограничимся только магнитной частью задачи.

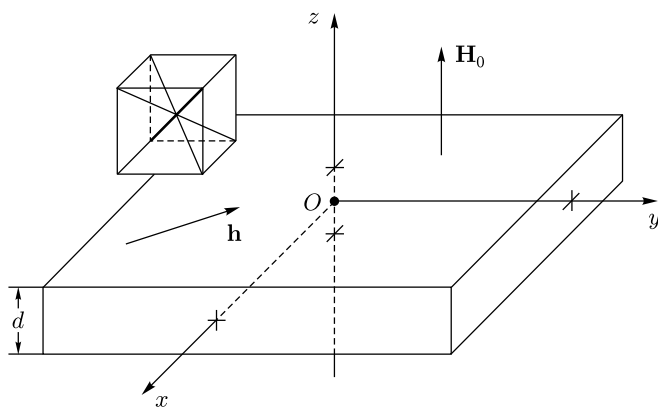


Рис. 7.3. Геометрия задачи. Слева — схема кристаллической ячейки

Плоскость системы координат $Oxyz$ совпадает с плоскостью пластины, а центр находится на половине ее высоты. Постоянное поле \mathbf{H}_0 направлено по оси Oz , переменное \mathbf{h} — в плоскости пластины. Уравнение движения для компоненты намагниченности m_x имеет вид (формула (7) в работе [237]):

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \cdot [(m_y + \alpha m_x m_z) \cdot H_z - (m_z - \alpha m_y m_x) \cdot H_y - \alpha \cdot (m_y^2 + m_z^2) \cdot H_x], \quad (7.9)$$

где m_x , m_y , m_z — компоненты намагниченности, нормированные на намагниченность насыщения M_0 , γ — гиромагнитная постоянная,

α — параметр затухания по Гильберту [40–42, 234], а уравнения для m_y и m_z получаются циклической перестановкой индексов x, y, z .

Будем полагать, что колебания намагниченности возбуждаются переменным полем правой круговой поляризации, так что эффективные поля имеют вид:

$$H_x = h_0 \sin(2\pi f_0 t); \quad (7.10)$$

$$H_y = -h_0 \cos(2\pi f_0 t); \quad (7.11)$$

$$H_z = H_0 - 4\pi M_0 m_z, \quad (7.12)$$

где C_m — частота возбуждения.

Намагниченность пластины — типичная для монокристалла ЖИГ: $4\pi M_0$ 1750 Гс. Постоянное поле $H_0 = 2750$ Э. Амплитуда переменного поля $h_0 = 0,01$ Э. Частота ФМР при $\gamma = 2,8$ МГц \cdot Э $^{-1}$ равна 2800 МГц. Частота переменного поля равна той же величине: $f_0 = 2800$ МГц. Параметр затухания α будет далее меняться от 0,0005 до 0,0200 в соответствии с условиями задачи.

Система трех уравнений вида (7.9) для m_x, m_y, m_z решалась численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка [208]. Результатом решения являлась развертка по времени колебаний намагниченности, происходящих после включения возбуждения.

7.4.3. Схема определения времени релаксации

Рассмотрим определение времени релаксации с помощью схемы, приведенной на рис. 7.4. Здесь показано развитие во времени колебаний нормированной компоненты намагниченности m_x , происходящее после включения возбуждения, полученное в соответствии с решением задачи о возбуждении гиперзвука. Колебания настолько частые, что в масштабе рисунка неразличимы и слились в сплошное черное поле. Однако огибающая видна совершенно отчетливо.

Согласно классическому определению [219, стр. 210–211, форм. (48.6), стр. 554, форм. (124.7)], [213, стр. 171–172, форм. (80.1)], время релаксации равно промежутку времени, за который колебания от нуля возрастают до величины, составляющей

$$A_R = (1 - e^{-1}) \cdot A_S, \quad (7.13)$$

где $e = 2,71828\dots$ — основание натуральных логарифмов, A_S — амплитуда колебаний в установившемся режиме (то есть при $t \rightarrow \infty$). Полагая $A_S = 1$, получаем: $1 - e^{-1} = 0,6321$. То есть время релаксации равно промежутку времени, за который амплитуда колебаний нарастает до уровня 0,6321 от своего значения при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, нарастание колебаний намагниченности во времени происходит по закону:

$$m_x = 1 - \exp(t/\tau_R). \quad (7.14)$$

При этом время релаксации определяется на уровне $m_x(\tau_R) = 0,6321$.

На рис. 7.4 время релаксации, соответствующее этому уровню, отмечено левой вертикальной пунктирной линией при $t = \tau_R(0,63)$.

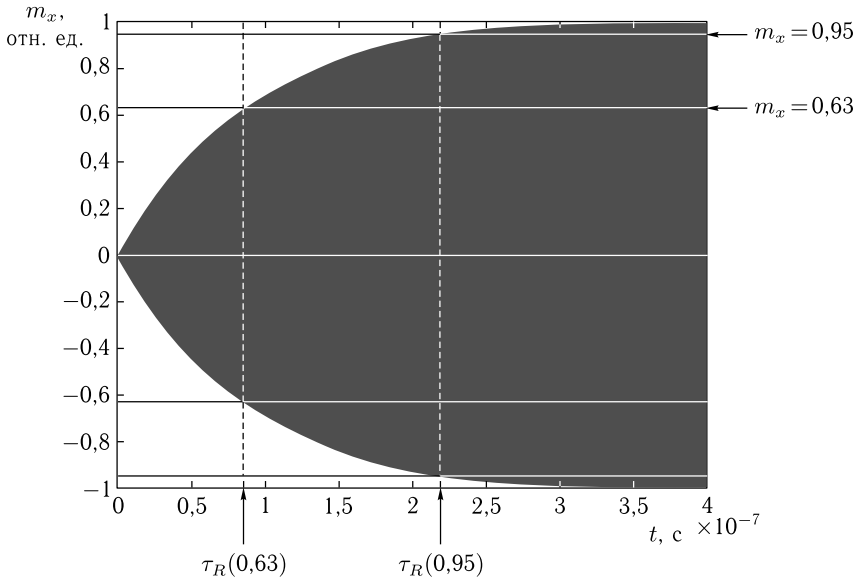


Рис. 7.4. Схема определения времени релаксации намагниченности. Черное поле — колебания намагниченности с периодом $3,5714 \cdot 10^{-10}$ с, что соответствует частоте 2800 МГц. Параметр затухания — $\alpha = 0,0006$. Остальные параметры — те же, что приняты при построении рис. 7.1

Однако из рисунка можно видеть, что амплитуда нормированных колебаний при этом времени еще далеко не достигает единицы. То есть, если принять так определенное время релаксации за время уменьшения амплитуды волны за счет затухания, то видно, что волна затухла еще далеко не совсем и частично может распространяться, по крайней мере преодолеть расстояние, равное своей длине. Поэтому для большей верности следует принять за время релаксации время, при котором амплитуда колебаний достигает более высокого уровня, чем 0,6321, например уровня 0,9500 от максимального значения. Так определенное время релаксации показано на рис. 7.4 правой вертикальной пунктирной линией при $t = \tau_R(0,95)$. В рамках настоящей работы будем рассматривать оба значения времени релаксации, однако времени $\tau_R(0,95)$ отдадим определенное предпочтение, как соответствующему более надежному затуханию волны.

7.4.4. Времена релаксации магнитных колебаний при различном затухании

Применим теперь так определенное время релаксации к колебаниям намагниченности в рамках задачи о возбуждении гиперзвука. Обратимся к табл. 7.1, где приведены соответствующие времена релаксации при изменении параметра затухания α от 0,0005 до 0,020,

что как раз перекрывает диапазон параметров затухания для реальных ферритов [40–42, 47]. В качестве дополнения в таблице 7.1 приведены значения полуширины линии ферромагнитного резонанса, соответствующие тем же значениям параметра затухания.

Таблица 7.1. Времена релаксации и полуширина линии ферромагнитного резонанса при различном затухании

№	α , ед.	$t = \tau_R(0,63)$, с	$t = \tau_R(0,95)$, с	ΔH , Э
1	0,0001	$4,80 \cdot 10^{-7}$	$10,00 \cdot 10^{-7}$	0,10
2	0,0002	$2,10 \cdot 10^{-7}$	$4,50 \cdot 10^{-7}$	0,20
3	0,0003	$1,48 \cdot 10^{-7}$	$3,00 \cdot 10^{-7}$	0,30
4	0,0004	$1,13 \cdot 10^{-7}$	$2,25 \cdot 10^{-7}$	0,40
5	0,0005	$1,05 \cdot 10^{-7}$	$2,00 \cdot 10^{-7}$	0,50
6	0,0010	$0,54 \cdot 10^{-7}$	$1,35 \cdot 10^{-7}$	1,00
7	0,0020	$0,30 \cdot 10^{-7}$	$0,80 \cdot 10^{-7}$	2,00
8	0,0050	$0,12 \cdot 10^{-7}$	$0,25 \cdot 10^{-7}$	5,00
9	0,0100	$0,07 \cdot 10^{-7}$	$0,16 \cdot 10^{-7}$	10,00
10	0,0200	$0,03 \cdot 10^{-7}$	$0,08 \cdot 10^{-7}$	20,00

Из таблицы видно, что по мере увеличения параметра затухания в рассматриваемом диапазоне в 200 раз, время релаксации уменьшается от 160 для $\tau_R(0,63)$ до 111 для $\tau_R(0,95)$ раз. При этом полуширина линии ферромагнитного резонанса ΔH увеличивается в те же 200 раз, что и параметр затухания.

На рис. 7.5 приведены зависимости времени релаксации от параметра затухания, соответствующие данным табл. 7.1. Там же на врезке приведена зависимость поперечной компоненты намагниченности от параметра затухания при тех же условиях.

Из рисунка видно, что при малых значениях параметра затухания по мере его увеличения время релаксации спадает очень быстро, при средних такое падение замедляется, а при больших почти останавливается. Такой характер зависимости подобен закону обратной пропорциональности. При этом амплитуда установившихся колебаний также спадает сходным образом, что адекватно соответствует росту затухания.

Оценим порядок времени релаксации для типичных случаев. Воспользуемся формулой для полуширины резонансной линии ΔH [40, стр. 46, форм. (1.3.30) с учетом стр. 42, форм. (1.3.15)]:

$$\Delta H = \frac{f\alpha}{\gamma_f}, \quad (7.15)$$

где $\gamma_f = 2,8 \text{ МГц} \cdot \text{Э}^{-1}$ — гиромагнитная постоянная (для линейной частоты).

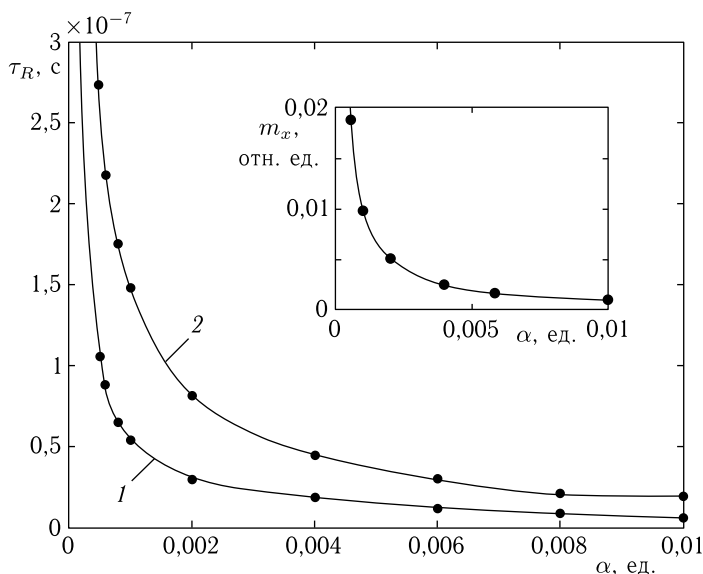


Рис. 7.5. Зависимость времени релаксации от параметра затухания: 1 — $\tau_R(0,63)$; 2 — $\tau_R(0,95)$. Остальные параметры — те же, что приняты при построении рис. 7.1 и рис. 7.4. На врезке — зависимость поперечной компоненты намагниченности от параметра затухания

Выражая α , получаем:

$$\alpha = \frac{\gamma_f \Delta H}{f}. \quad (7.16)$$

Полагая для большинства ферритов ΔH порядка 20 Э, для частоты 3000 МГц находим $\alpha = 0,019$, что соответствует временам релаксации $\tau_R(0,63) = 0,03 \cdot 10^{-7}$ с и $\tau_R(0,95) = 0,08 \cdot 10^{-7}$ с.

Для железоиттриевого граната среднего качества при тех же условиях ΔH составляет около 1 Э, так что $\alpha = 0,001$, что соответствует $\tau_R(0,63) = 0,50 \cdot 10^{-7}$ с и $\tau_R(0,95) = 1,50 \cdot 10^{-7}$ с.

Учитывая грубость проделанной оценки, а также зависимость параметра затухания α от частоты, можно полагать, что времена релаксации для большинства ферритов составляют $0,05 \cdot 10^{-7}$, а для железоиттриевого граната — $1,00 \cdot 10^{-7}$ с, то есть, по крайней мере, на порядок больше.

Проверка показывает, что при значении $\Delta H = 0,15$ Э, приведенном в [42, стр. 31], что соответствует железоиттриевому гранату высокого качества, при частоте 3000 МГц, когда $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-4}$ время релаксации составляет $8,0 \cdot 10^{-7}$ с⁻¹, а при частоте 9000 МГц достигает $20,0 \times 10^{-7}$ с⁻¹, что превышает таковое для большинства ферритов более чем на два порядка.

7.5. Сравнение времен релаксации и собственного пробега волны

Выше отмечено, что факт ограничения дисперсии волны по волновому числу связан с соотношением между временем собственного пробега волны и временем ее релаксации. То есть волна может распространяться без ограничения по волновому числу только в том случае, если время собственного пробега меньше времени релаксации, так что волна, пробегая свою длину, не успевает релаксировать полностью. Рассмотрим теперь соотношение этих времен на основе данных, приведенных в разд. 7.3 и 7.4.4.

Обратимся к рис.7.6, где приведены зависимости времени собственного пробега t_S и времени релаксации τ_R при различных параметрах затухания от волнового числа. Кривая $t_S(k)$ соответствует кривой 2 на рис. 7.1, ν и отражает наиболее типичный материал — железоиттриевый гранат. Горизонтальные линии соответствуют различным уровням параметра затухания.

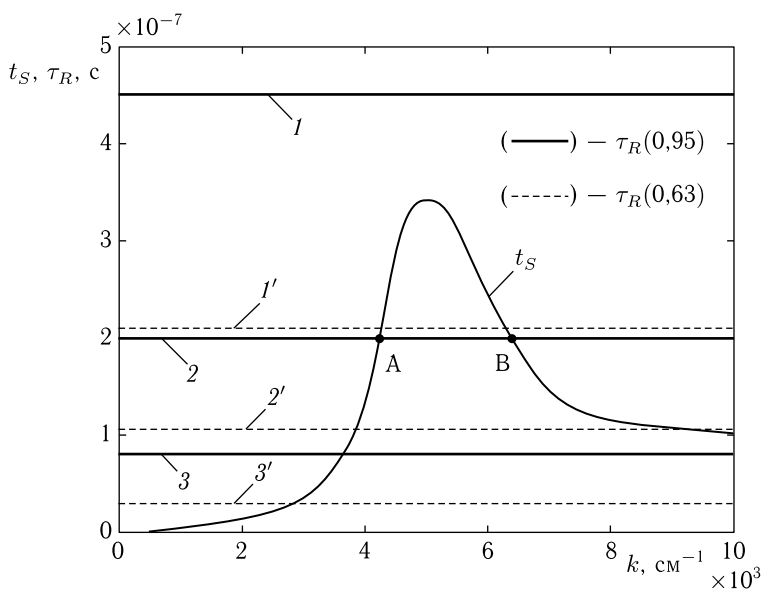


Рис. 7.6. Зависимости времени собственного пробега t_S и времени релаксации τ_R при различных параметрах затухания от волнового числа. Утолщенная кривая соответствует времени собственного пробега при константе обмена $Q(YIG)$. Горизонтальные сплошные линии — времена релаксации $\tau_R(0,95)$, пунктирные — времена релаксации $\tau_R(0,65)$. Параметры затухания: 1, 1' — $\alpha = 0,0002$; 2, 2' — $\alpha = 0,0005$; 3, 3' — $\alpha = 0,0020$. Остальные параметры — те же, что приняты при построении рис. 7.1

Из рисунка можно видеть, что линия 1 проходит значительно выше кривой $t_S(k)$, так что волна с параметром затухания $\alpha = 0,0002$ может распространяться при любых значениях волнового числа. Из табл. 7.1 видно, что полуширина линии ΔH для этого случая равна 0,20 Э, так что это — обычная величина для железиттриевого граната высокого качества. Такой или меньший уровень затухания как раз обеспечивает распространение достаточно коротких волн, описанных в экспериментах по линиям задержки в неоднородном поле [42, 98, 109, 110, 145–148].

Линия 2 проходит несколько ниже вершины кривой $t_S(k)$, так что пересекает ее в двух точках А и В. В этом случае волна может распространяться в двух интервалах волнового числа: первый от нуля до $4,2 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ (левее точки А), второй — от $6,4 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ до бесконечности (правее точки В). То есть здесь как раз имеет место ограничение дисперсии по волновому числу на уровне $4,2 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$, подробно рассмотренное в работах [5–9, 11, 12, 15, 16, 222, 224]. Однако такое ограничение не является безусловным: волны, волновое число которых превышает $6,4 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ также могут распространяться, что и наблюдается, например, в экспериментах по их параметрическому возбуждению [40–42, 66, 70]. Полуширина линии ΔH в этом случае составляет 0,5 Э, что отвечает железиттриевому гранату невысокого качества, а также некоторым ферритам наилучших марок.

Линия 3 проходит еще ниже вершины кривой $t_S(k)$, так что в пределах рисунка пересекает ее только в одной точке при $k = 4,2 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$. Поскольку кривая $t_S(k)$ при $k \rightarrow \infty$ стремится к нулю, то за пределами рисунка пересечение также имеется, однако уже достаточно далеко. Проверка показывает, что это происходит где-то на уровне $3,0 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$. Ограничение со стороны меньших волновых чисел наступает еще раньше, чем в предыдущем случае, а преодоление ограничения происходит только при волновых числах более $3,0 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$. Полуширина линии ΔH составляет 2,0 Э, что отвечает ряду большинству ферритов достаточно хорошего качества. Таким образом, здесь реализация линий задержки уже затруднительна, так как происходит весьма значительное ослабление задерживаемого сигнала. Однако параметрическое возбуждение также вполне возможно, что и соответствует экспериментам, описанным в [66, 70].

При дальнейшем увеличении параметра затухания ограничение наступает еще раньше и преодолевается при волновых числах еще больших. Проверка показывает, что при $\alpha = 0,01$, что соответствует величине ΔH , равной 10,0 Э (полная ширина — 20 Э), преодоление ограничения происходит на уровне 10^5 – 10^6 см^{-1} , однако оно все же преодолевается, что и обеспечивает параметрическое возбуждение обменных волн в достаточно плохих ферритах, в том числе в поликристаллах [66, 70].

Заметим, что все проведенные оценки относятся к времени релаксации на уровне 0,95 от максимума амплитуды, то есть к $\tau_R(0,95)$.

При времени релаксации $\tau_R(0,63)$, как можно видеть из пунктирных линий на рис. 7.6, ограничения несколько ужесточаются, однако основные выводы остаются прежними. То есть, если мы хотим работать без ограничения по волновому числу, то надо использовать железиттриевый гранат достаточно высокого качества.

7.6. Времена собственного пробега и релаксации в диапазоне частот

Проведенное выше рассмотрение выполнено на одной частоте 2800 МГц, что недостаточно для уяснения прикладных возможностей. Рассмотрим теперь времена собственного пробега волны и релаксации в более широком диапазоне частот.

7.6.1. Время собственного пробега

Величина пробега обусловлена значением групповой скорости, которая, в свою очередь, определяется законом дисперсии. Поэтому сначала рассмотрим именно эти величины.

На рис. 7.7 показаны дисперсионные кривые (а) и соответствующие зависимости групповой скорости от волнового числа (б) при различных значениях постоянного поля. Для удобства рассмотрения значения полей подобраны кратными величине 437,5 Э, равной $4\pi M_0/4$, где $4\pi M_0 = 1750$ Гс — типичная величина для железиттриевого граната.

Из рис. 7.7, а видно, что все дисперсионные кривые остаются подобными друг другу, только смещаясь вверх по частоте пропорционально увеличению поля. При волновых числах меньше 10^3 см⁻¹ все кривые приближаются к левому краю рисунка, каждая на своей частоте, определяемой соотношением

$$f = \gamma \sqrt{H_0(H_0 + 4\pi M_0)}, \quad (7.17)$$

что соответствует нижней частоте спектра поверхностных волн [1, 2]. На рисунке эти участки кривых не показаны, так как для рассматриваемой здесь задачи не представляют интереса (здесь ограничения по волновому числу нет).

Приведенные на рис. 7.7, б зависимости групповой скорости от волнового числа также ведут себя практически одинаковым образом: по мере увеличения k сначала резко спадают, затем спад замедляется и кривые подходят близко к нулю. В области малых волновых чисел крутизна спада кривых тем больше, чем поле меньше. Такое их поведение отражает крутизну дисперсионных кривых в этой области: интервал дисперсии между нижней и верхней частотами спектра по мере увеличения поля уменьшается, так что и крутизна начального участка также падает.

Из рис. 7.7, б можно видеть, что в области волновых чисел больше $4 \cdot 10^3$ см⁻¹ кривые проходят вблизи нуля, однако ожидаемый

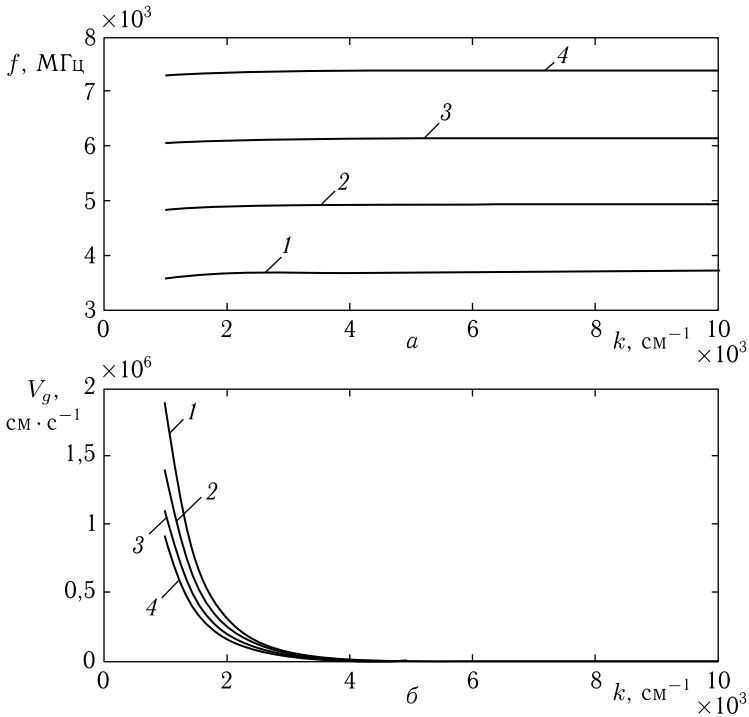


Рис. 7.7. Зависимости частоты (а) и групповой скорости (б) волны от волнового числа при различных значениях постоянного поля H_0 : 1 — 437,5 Э; 2 — 875,0 Э; 3 — 1312,5 Э; 4 — 1750,0 Э. Константа обмена равна $Q(YIG) = 3,37 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2$. Остальные параметры — те же, что приняты при построении рис. 7.1

их рост не заметен из-за недостаточности разрешения рисунка. Проверка показывает, что это рост имеет место и он подобен такому на рис. 7.1, б, однако здесь не представлен ввиду отсутствия каких-либо особенностей.

На рис. 7.8 приведены зависимости времени собственного пробега волны при тех же полях и частотах, что на рис. 7.7. построение аналогично приведенному на рис. 7.1, в.

Из рисунка видно, что в области волновых чисел меньше $4 \times 10^3 \text{ см}^{-1}$ все точки ложатся на одну кривую с точностью единиц процентов, однако далее наблюдается заметный разброс, подобный разобранным в разд. 7.3.1. Можно видеть, что разброс точек происходит в обе стороны вверх и вниз примерно с одинаковой вероятностью. То есть можно считать, что все зависимости в этой области, особенно при волновых числах больше $6 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$, практически совпадают. Усредненная зависимость построена сплошной линией. Видно,

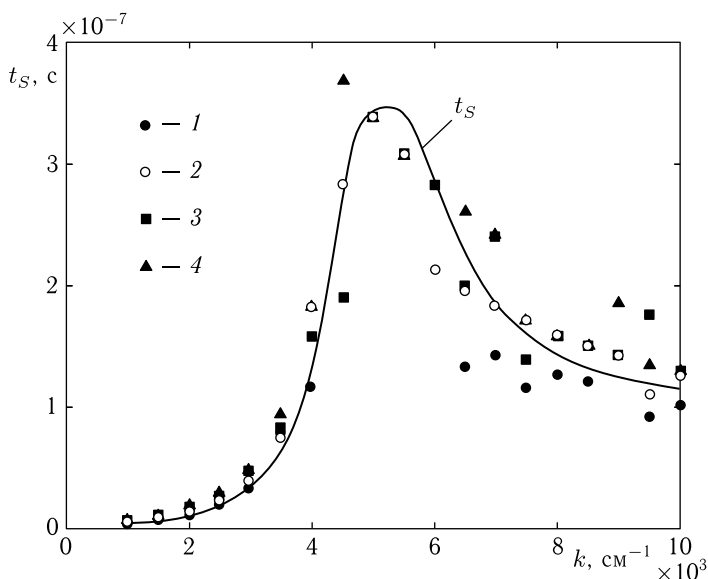


Рис. 7.8. Зависимости времени собственного пробега волны от волнового числа для тех же полей, что на рис. 7.7. Цифровые обозначения точек и все параметры — те же. Сплошная кривая — усредненная по всем точкам

что она подобна кривой 2 на рис. 7.1, в. Таким образом, можно сделать вывод, что зависимость времени собственного пробега волны от частоты и соответствующего поля с достаточной степенью вероятности отсутствует.

7.6.2. Время релаксации

Для выяснения вопроса об ограничении волнового числа следует сравнить время собственного пробега волны со временем релаксации. Времена собственного пробега получены в предыдущем разделе. Обратимся теперь к рассмотрению времени релаксации в тех же условиях.

Поскольку время пробега определяется из закона дисперсии поверхностной волны, а время релаксации из ферромагнитного резонанса нормально намагниченной пластины, в качестве равенства условий примем одно и то же значение постоянного магнитного поля.

Зададим для поля те же значения, что были заданы в предыдущем разделе, то есть кратные величине $4\pi M_0/4 = 437,5 \text{ Э}$ (где $4\pi M_0 = 1750 \text{ Гс}$) с кратностью от единицы до четырех. Поскольку поле в первую очередь относится к задаче о волне, обозначим его H_w . В этом поле частота начала спектра поверхностных волн определяется формулой [1, 2]:

$$f_H = \gamma \sqrt{H_w(H_w + 4\pi M_0)}. \quad (7.18)$$

При этом поле, требуемое для возбуждения ферромагнитного резонанса в нормально намагниченной пластине на этой частоте, равно:

$$H_R = \left(\frac{f_H}{\gamma} \right) + 4\pi M_0. \quad (7.19)$$

Это поле определяется в соответствии с формулой Киттеля для ферромагнитного резонанса в нормально намагниченном диске, приведенной, например, в [41, стр. 54, форм. (1.4.20)] или в [42, стр. 34, форм. (1.99)].

Параметр затухания α будем определять по формуле (7.16):

$$\alpha = \frac{\gamma_f \Delta H}{f}, \quad (7.20)$$

в которой полуширину линии будем считать не зависящей от частоты и поля. Таким образом, изменение времени релаксации при изменении частоты или поля будет обеспечиваться изменением не ширины линии, а изменением параметра затухания.

Замечание. Положение о независимости полуширины линии ферромагнитного резонанса от поля и, соответственно, частоты, вообще говоря, бесспорным не является. Однако, как можно видеть из работы [267], в которой выполнено экспериментальное исследование зависимости ширины линии от частоты на образце из поликристаллического иттрий-гадолиниевого граната, эта ширина в интервале частот от 2000 до 10000 МГц везде, кроме небольшого участка вблизи 4000 МГц, где она несколько больше, сохраняет одно и то же значение, равное 55 ± 5 Э (рис. 1 на стр. 619 в [267]). То есть положение о независимости ширины линии от частоты или поля можно считать достаточно обоснованным.

В табл. 7.2 приведены значения параметра затухания при различных значениях поля H_w и соответствующей ему частоты f_H (первые два столбца). В следующем столбце приведены значения поля резонанса H_R , рассчитанные по формуле (7.19). В последних четырех столбцах приведены значения параметра затухания α , соответствующие полуширине линии, указанной в скобках. Эти значения рассчитаны по формуле (7.20). Столбцы при $\alpha(0,1)$ и $\alpha(0,2)$ соответствуют железоиттриевому гранату хорошего и среднего качества соответственно. Столбцы при $\alpha(0,5)$ и $\alpha(1,0)$ соответствуют лучшим и средним ферритам.

В табл. 7.3 приведены времена релаксации, полученные по способу, описанному в разд. 7.4.3, при тех же условиях и для тех же значений параметра α , что в табл. 7.2.

В предыдущем разделе показано, что максимальное время собственного пробега в принятых здесь условиях составляет $3,5 \cdot 10^{-7}$ с. Из табл. 7.3 можно видеть, что время релаксации превышает эту величину только для первых двух столбцов табл. 7.2.

Таблица 7.2. Параметр затухания при различных значениях поля

№	$H_w, \text{Э}$	$f_H, \text{МГц}$	$H_R, \text{Э}$	$\alpha(0, 1) \times 10^{-5}$	$\alpha(0, 2) \times 10^{-5}$	$\alpha(0, 5) \times 10^{-5}$	$\alpha(1, 0) \times 10^{-5}$
1	437,5	2739	2728	10,000	20,000	50,000	100,000
2	875,0	4244	3266	6,598	13,196	32,990	65,980
3	1312,5	4614	3755	4,988	9,976	24,940	49,880
4	1750,0	6390	4225	4,040	8,080	20,200	40,400

Таблица 7.3. Времена релаксации при тех же полях, что в табл. 7.2

№	$\tau_R(0,1) \times 10^{-7}, \text{с}$	$\tau_R(0,2) \times 10^{-7}, \text{с}$	$\tau_R(0,5) \times 10^{-7}, \text{с}$	$\tau_R(1,0) \times 10^{-7}, \text{с}$
1	11,0	5,2	3,4	2,5
2	8,8	4,6	3,2	2,3
3	7,2	4,1	3,0	2,2
4	5,6	3,7	2,7	2,1

На рис. 7.9 показаны зависимости времени релаксации от частоты при различных значениях полуширины линии резонанса ΔH , построенные по данным табл. 7.1 и 7.2. Там же горизонтальной пунктирной линией показано время собственного пробега волны, в соответствии с данными предыдущего раздела, от частоты не зависящее.

Из рисунка можно видеть, что все зависимости в рассматриваемом интервале частот очень хорошо приближаются прямыми линиями, наклон которых тем больше, чем ширина линии меньше. В пределах рисунка линии 1 и 2 проходят выше максимального значения t_S , а линии 3 и 4 — ниже. То есть для линий 1 и 2 ограничение по волновому числу отсутствует, а для линий 3 и 4 имеет место. Линиям 1 и 2 соответствует железоиттриевый гранат, так что только он пригоден для создания устройств, работающих во всем диапазоне частот. Однако следует заметить, что линия 1, соответствующая наилучшему железоиттриевому гранату, все же пересекает пунктирную линию за пределами рисунка на частоте 11 000 МГц. То есть на более высоких частотах ограничение волнового числа даже для лучшего железоиттриевого граната будет иметь место. С другой стороны, линия 3 ниже частоты 2000 МГц выходит на участок выше пунктирной линии, то есть при столь низких частотах ограничение по волновому числу для феррита достаточно хорошего качества может отсутствовать. Однако для феррита с шириной линии 1,0 Э (линия 4) ограничение будет всегда, особенно если учесть, что на частотах ниже 1000 МГц в любом феррите потери резко возрастают из-за доменной структуры, то есть продвижение ниже этой частоты вряд ли оправдано.

Таким образом, можно сделать вывод, что достаточные условия для распространения волны при любых значениях волнового числа в ин-

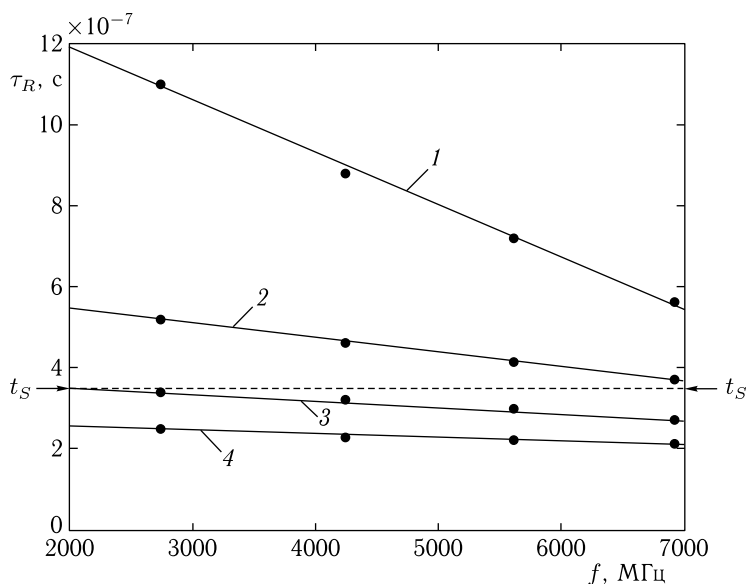


Рис. 7.9. Зависимости времени релаксации от частоты при различных значениях полуширины линии резонанса ΔH : 1 — 0,1 Э; 2 — 0,2 Э; 3 — 0,5 Э; 4 — 1,0 Э. Горизонтальная пунктирная линия — максимальное время собственного пробега волны $t_S = 3,5 \cdot 10^{-7}$ с (по рис. 7.8). Параметры — те же что в табл. 7.2 и 7.3

тервале частот, представленном на рисунке, выполняются только при полуширине линии меньше 0,2 Э, чему в полной степени удовлетворяет только железиттриевый гранат. Можно полагать, что именно этим обстоятельством обусловлено отсутствие попыток реализации линий задержки на ферритах других марок [109, 110, 145–148].

7.7. Время релаксации в широком диапазоне частот

Отступим теперь от сетки частот и полей, принятой в предыдущих разделах, и рассмотрим время релаксации в более широком диапазоне частот. В первую очередь будем искать отклонение от закона линейности по частоте, так как можно видеть, что он в любом случае приводит к неизбежности ограничения дисперсии по волновому числу.

В самом деле, из рис. 7.9 следует, что зависимость времени релаксации от частоты спадает по линейному закону. Продолжая кривую 1 в правую сторону за пределы рисунка, можно видеть, что рано или поздно она все же пересечет горизонтальную линию, что произойдет при частоте около 11 000 МГц. То есть при такой частоте ограничение по волновому числу будет всегда, даже для самого лучшего железиттриевого граната. В то же время, для кривой 3 такое пересечение имеет место при частоте около 24 000 МГц. То есть получается, что

для хорошего феррита ограничение наступает раньше, чем для плохого. Такой вывод не может не вызвать некоторого недоумения, так как, казалось бы, чем лучше феррит, тем в более широком диапазоне частот он должен работать.

С другой стороны, если положить продолжение кривой 1 за правую сторону рис. 7.9 линейным, то получается, что при частоте 11 000 МГц время релаксации должно быть равно нулю, то есть резонанс после включения возбуждения затухает сразу и ширина линии по частоте получается огромной. То есть и ширина линии по полю должна быть огромной, тогда как мы предположили, что она равна 0,1 Э. Такое расширение линии на частоте 11 000 МГц противоречит экспериментальным данным, хотя бы по той же статье [267].

Таким образом, чтобы получить более или менее правдоподобные результаты, следует предположить, что зависимость времени релаксации от частоты должна спадать не линейно, а по более медленному закону, то есть по мере увеличения частоты правая часть кривой 1 должна идти более полого, стремясь к горизонтальному уровню.

Контрольная проверка показывает, что при частоте 28 000 МГц (что значительно выше предполагаемой точки пересечения) в резонансном поле 11750 Э и параметре затухания (в соответствии с формулой (7.20)), равном 10^{-5} , время релаксации составляет $1,5 \cdot 10^{-7}$ с, так что кривая 1 на рис. 7.9 в самом деле за пределами рисунка идет более полого и пересечение не наступает. Несколько неожиданным выглядит значение параметра затухания $Q(YIG) = 10^{-5}$, представляющего собой столь малую величину. Тем не менее, в предположении независимости ширины линии от частоты, соотношение (7.20) дает именно такое значение.

Для более подробного рассмотрения этого вопроса, обратимся к рис. 7.10, где показаны зависимости времени релаксации от частоты при двух довольно характерных значениях полуширины линии резонанса — 0,1 Э (кривая 1) и 1,0 Э (кривая 2). Диапазон частот выбран значительно более широким, чем на подобном рис. 7.9, что позволяет проследить ход кривых на большом их протяжении. В рамках настоящего раздела рассмотрим только сплошные кривые, а к пунктирным обратимся позднее.

Из рисунка можно видеть, что, в отличие от рис. 7.9, линейный характер кривых имеет место только при сравнительно низких частотах — не более 7 ГГц. Далее спад кривых становится более пологим, как и ожидалось выше. Такой более пологий ход сдвигает возможную точку пересечения с линией, соответствующей уровню времени собственного пробега, в сторону более высоких частот. Более того, как видно из врезки на рис. 7.10, обе кривые, пройдя минимум в области частот порядка 30–40 ГГц, далее возрастают, так что время релаксации увеличивается, создавая более благоприятные условия для распространения волны по мере увеличения ее частоты.

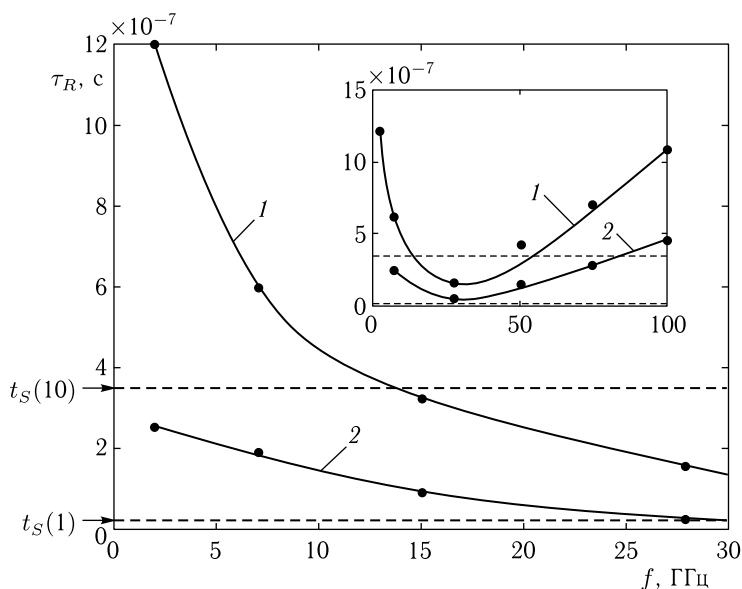


Рис. 7.10. Зависимости времени релаксации от частоты в широком диапазоне частот при двух значениях полуширины линии резонанса ΔH : 1 — 0,1 Э; 2 — 1,0 Э. Горизонтальные пунктирные линии соответствуют максимальному времени собственного прогона волны t_S при толщине пластины 10 мкм (верхняя линия) и 1 мкм (нижняя линия). Остальные параметры — те же, что приняты при построении рис. 7.9. На врезке показаны те же кривые в диапазоне от нуля до 100 ГГц

Таким образом, ограничение по волновому числу, следующее из линейного характера зависимостей на рис. 7.9, в более широком диапазоне частот, может быть исключено или, во всяком случае, значительно отодвинуто. Рассмотрим далее влияние на рассматриваемые явления других параметров, в первую очередь — толщины магнитной пластины.

7.8. Влияние толщины пластины на ограничение волнового числа

Проведенное выше рассмотрение выполнено при одной и той же толщине пластины, равной 10 мкм. В то же время известно, что закон дисперсии поверхностных магнитостатических волн от толщины пластины зависит в весьма значительной степени. Типичные кривые такого типа, правда, для структуры феррит–диэлектрик–металл, можно найти в работе [1, стр. 120–121, рис. 3.1, рис. 3.2]. Рассмотрим здесь, в какой степени изменение толщины пластины может сказаться на ограничении волнового числа поверхностной волны.

Обратимся к рис. 7.11, где показаны зависимости частоты (а), групповой скорости (б) и времени собственного пробега волны (в) от волнового числа при различных значениях толщины пластины.

Из рис. 7.11, а можно видеть, что по мере уменьшения толщины пластины выгиб вверх дисперсионной кривой в ее начале становится более плавным. Такое изменение дисперсии связано с увеличением влияния размагничивающих факторов пластины по толщине. То есть, чем тоньше пластина, тем сильнее размагничивающее поле «заталкивает» волну внутрь пластины, не давая ей как следует «развернуться» и ее частоте достичь верхней границы спектра до тех пор, пока волна не станет настолько короткой, что противоположную поверхность пластины и создаваемое ей размагничивающее поле чувствовать не будет.

На рис. 7.11, б показаны соответствующие зависимости для групповой скорости, полученные путем дифференцирования предыдущих кривых. Видно, что смещение достаточно крутого участка дисперсионной кривой на рис. 7.11, а в сторону больших значений волнового числа, приводит к сдвигу кривой для групповой скорости в ту же сторону. При этом минимумы кривых по мере уменьшения толщины пластины также сдвигаются в сторону увеличения волнового числа.

На рис. 7.11, в приведены соответствующие зависимости для времени собственного пробега волны. Эти зависимости подобны приведенным на рис. 7.1, в, так что, как и ранее, их максимумы обусловлены минимумами кривых для групповой скорости (рис. 7.11, б).

Таким образом, поскольку минимумы кривых на рис. 7.11, б сдвигаются к большим значениям волнового числа, то и максимумы кривых на рис. 7.11, в сдвигаются в ту же сторону.

Однако высота этих максимумов по мере увеличения волнового числа существенным образом уменьшается. Такое уменьшение обусловлено более плавным характером дисперсионных кривых на рис. 7.11, а по мере увеличения волнового числа. Плавность кривых приводит к тому, что существенное влияние обменного взаимодействия, обеспечивающее квадратичный рост дисперсионных кривых, сказывается раньше, чем дисперсионная кривая приблизится к горизонтальному направлению, так что групповая скорость не успевает упасть до малых значений. Поэтому минимумы кривых на рис. 7.11, б располагаются тем выше, чем толщина пластины меньше. В результате и максимумы кривых на рис. 7.11, в, обратные минимумам кривых на рис. 7.11, б, по мере уменьшения толщины пластины снижаются.

Так, при толщине пластины в 10 мкм максимальное время собственного пробега составляет $3,5 \cdot 10^{-7}$ с, а при уменьшении толщины пластины до 1 мкм падает до $0,2 \cdot 10^{-7}$ с. Столь сильное снижение значительно ослабляет требования к качеству феррита, необходимому для отсутствия ограничения по волновому числу. Так, из рис. 7.9 можно видеть, что время собственного пробега при толщине 1 мкм лежит значительно ниже (почти на порядок) времени релаксации для феррита среднего качества, составляющего около $2 \cdot 10^{-7}$ с. То есть, при

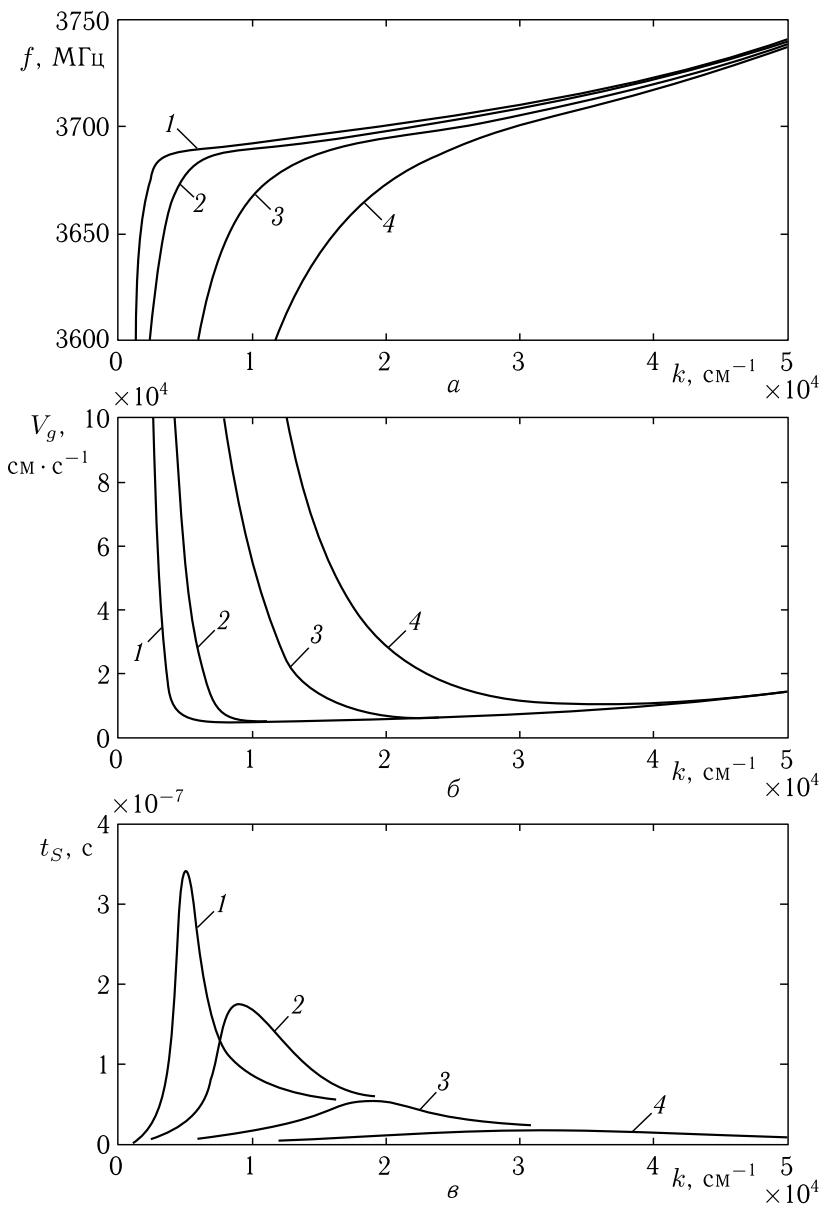


Рис. 7.11. Зависимости частоты (а), групповой скорости (б) и времени собственного пробега волны (в) от волнового числа при различных значениях толщины пластины: 1 — 10 мкм; 2 — 5 мкм; 3 — 2 мкм; 4 — 1 мкм. Константа обмена: $Q(YIG) = 3,37 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2$. Остальные параметры — те же, что приняты при построении рис. 7.1

желании использовать для линии задержки феррит среднего качества, следует толщину пластины выбирать как можно меньшей, не более единиц мкм.

Обратимся теперь еще раз к рис. 7.10, где выполнено сопоставление времени собственного пробега с временем релаксации. При этом время релаксации показано сплошными кривыми, а время собственного пробега, не зависящее от частоты (разд. 7.6.1), горизонтальными пунктирными линиями для двух значений толщины 1 и 10 мкм.

Замечание. Заметим, что время пробега в разд. 7.6.1 исследовано в довольно узком диапазоне частот — от 2 до 7 ГГц. Поэтому использование здесь, в диапазоне до 100 ГГц, полученного в разд. 7.6.1 факта независимости этого времени от частоты, казалось бы, не вполне корректно. Для проверки допустимости положения о независимости времени пробега от частоты была выполнена контрольная проверка в диапазоне частот до 100 ГГц. Определенной помехой для такой проверки оказался разброс данных, отмеченный в разд. 7.3.1, который по мере увеличения частоты резко увеличивался и при частоте 50 ГГц достигал 40% и более. В этих условиях усреднение все же выявило небольшое увеличение времени пробега — примерно до $(5 \pm 2) \cdot 10^{-7}$ с, что, однако, находится в пределах ошибки по сравнению с максимумом на рис. 7.8. При этом во всем диапазоне частот максимум всегда приходился на волновое число около $5 \cdot 10^3$ см⁻¹. Таким образом, учитывая малость наблюдаемого увеличения и отсутствие его выхода за пределы ошибки, в рамках настоящей работы полагалось, что время пробега в исследуемом диапазоне частот остается постоянным на уровне $3,5 \cdot 10^{-7}$ с. Тем не менее, окончательный вопрос о более подробном характере зависимости времени пробега от частоты в какой-то мере остается открытым и может явиться предметом дальнейшего уточнения.

Итак, из рис. 7.10 видно, что при толщине 10 мкм (верхняя пунктирная линия) ограничение по волновому числу для материала с $\Delta H = 0,1$ Э наступает на частоте 14 ГГц, а в материале с $\Delta H = 1,0$ Э волна вообще не может распространяться (вся кривая 2 лежит ниже соответствующей пунктирной линии). При толщине 1 мкм (нижняя пунктирная линия) ограничение при $\Delta H = 0,1$ Э полностью отсутствует, а при $\Delta H = 1,0$ Э, если и имеет место, то уже на частоте около 28 ГГц.

Из врезки видно, что при толщине 10 мкм (кривая 1) волна с $\Delta H = 0,1$ Э снова может распространяться при частоте выше 51 ГГц, а при $\Delta H = 1,0$ Э — при частоте выше 82 ГГц. При толщине 1 мкм (кривая 2) волна с $\Delta H = 0,1$ Э никаких препятствий для распространения не имеет, а при $\Delta H = 1,0$ Э, слегка затормозив в области около 30 ГГц, на более высоких частотах также может распространяться беспрепятственно.

Таким образом, уменьшение толщины пластины до величины порядка 1 мкм и менее позволяет практически полностью устранить

ограничение по волновому числу не только для железиттриевого граната, но даже и для другого феррита достаточно высокого качества, с полушириной линии порядка 1 Э.

7.9. Некоторые практические рекомендации

Одной из важнейших задач, возникающих при создании устройств обработки информации на поверхностных магнитостатических волнах типа Дэймона–Эшбаха, является расширение диапазона рабочих частот до десятков и сотен гигагерц, а также освоение как можно более коротких волн до единиц нанометров. Определенным препятствием здесь может явиться ограничение по волновому числу, обусловленное процессами диссипации колебаний магнитной среды.

Как показано выше, для преодоления ограничения есть две возможности: первая — выбор рабочего материала устройства с возможно меньшим уровнем диссипации. При толщине пластин порядка 10 мкм и более приоритет остается только за железиттриевым гранатом. Вторая возможность — уменьшение толщины пластины до 1 мкм и менее. Здесь кроме железиттриевого граната можно использовать высококачественные ферриты других марок, желательно с полушириной линии не более 1 Э.

Можно полагать, что дальнейшее уменьшение толщины приведет к возможности использования ферритов средних и худших марок с полушириной линии 10 и более эрстед. Основной аппарат, развитый в настоящей работе, позволяет выполнить такую оценку более подробно.

Заметим, что в настоящее время вопрос об ограничении волнового числа в эксперименте в достаточной степени не решен, что, по-видимому, связано с трудностью возбуждения достаточно коротких спиновых волн. Так, проволочная антенна может возбудить волны длиной не менее 100 мкм [1, стр. 134, рис. 3.8], то есть с волновым числом не более $6 \cdot 10^2 \text{ см}^{-1}$. Возбуждение в неоднородном поле [145, 146, 148] позволяет отодвинуть эту границу до волнового числа порядка 10^4 см^{-1} , однако при этом ограничения волнового числа не наблюдалось, или, во всяком случае, ни о чем таком не сообщалось. Так что экспериментальная задача обнаружения ограничения по волновому числу еще требует своего решения.

Для активно развиваемых в настоящее время экспериментов по возбуждению упругих и магнитостатических волн путем воздействия мощных импульсов света от фемтосекундного лазера [178–180, 184–188, 199], характерно использование пленок никеля, имеющих уровень магнитной диссипации довольно высокий. Основные потери здесь обусловлены электрической проводимостью никеля, так что полуширина линии может составлять 100–200 Э и более. Такая же ширина линии наблюдается в экспериментах по возбуждению спиновых волн в тонких металлических пленках [42, стр. 134, рис. 3.8], а также [74, 75]. Однако, как в первой, так и во второй группах таких экспериментов

используются пленки толщиной от 10 до 500 нм, то есть значительно более тонкие, чем рассмотренные в настоящей работе. Так что можно полагать, что и в этом случае ограничение по волновому числу или будет достаточно высоким, или будет вообще отсутствовать. Более точный ответ на этот вопрос, в том числе на количественном уровне, по мнению авторов, представляет значительный интерес в качестве новой задачи, не только теоретической, но и, особенно, экспериментальной.

Выводы по главе 7

Данная глава посвящена рассмотрению влияния неоднородного обменного взаимодействия и поля размагничивания на ограничение волнового числа в задаче Дэймона–Эшбаха о распространении поверхностной магнитостатической волны в касательно намагниченной ферритовой пластине, обладающей диссипацией. Выявлены условия, при которых такое ограничение может отсутствовать. Приведены рекомендации, касающиеся выбора параметров эксперимента, позволяющие преодолеть ограничение и возбудить волны с большими волновыми числами.

Основные вопросы, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрен вопрос о возможности практической реализуемости отмеченного в ряде теоретических работ ограничения максимального значения волнового числа за счет диссипации. Отмечено, что причиной такого ограничения может явиться снижение групповой скорости волны на пологом участке дисперсионной кривой до значения, при котором волна практически полностью затухает на расстоянии, меньшем ее длины. Выполнен сравнительный анализ известных на сегодня авторам настоящей работы экспериментальных результатов. Отмечено, что ограничение волнового числа при значительных уровнях диссипации в рассмотренных экспериментах не наблюдалось. Высказано предположение о том, что в реальных материалах квадратичный рост дисперсии не позволяет групповой скорости уменьшиться до величины, при которой волна будет затухать на расстоянии своей длины. В качестве возможной задачи отмечена целесообразность получения численного критерия соотношения между расстоянием пробега волны до своего полного затухания и длиной той же волны в зависимости от параметра диссипации.

2. В рамках классической задачи Дэймона–Эшбаха отмечено, что при достаточно большом увеличении волнового числа частота волны приближается к верхней границе своего спектра, то есть достигает верха допустимой области существования. При этом групповая скорость волны, будучи производной от закона дисперсии, вблизи верхней границы спектра по мере увеличения волнового числа стремится к нулю. В среде с диссипацией уменьшение групповой скорости приводит

к уменьшению длины пробега волны до состояния полного затухания. Когда длина пробега становится меньше собственной длины волны, распространение приобретает аperiodический характер, то есть волна на собственной длине полностью затухает и далее распространяться не может, что и проявляется как ограничение закона дисперсии волны по волновому числу.

3. В рамках отмеченного рассмотрения для волны Дэймона–Эшбаха с учетом обмена и размагничивания, но без учета диссипации, приведено дисперсионное соотношение, получена групповая скорость и найдено время прохождения волной расстояния, равного собственной длине. Показано, что по мере увеличения волнового числа дисперсионные кривые за счет обмена и размагничивания растут вверх по квадратичному закону, групповая скорость, пройдя через минимум, далее растет, а время собственного пробега сначала увеличивается, после чего, пройдя через максимум, далее уменьшается.

4. Рассмотрены зависимости времени собственного пробега от волнового числа при различных значениях константы обменного взаимодействия. Показано, что по мере увеличения константы обмена время собственного пробега волны уменьшается. Так, при увеличении константы обмена по сравнению с таковой для железоиттриевого граната в десять раз время собственного пробега волны уменьшается в пять раз.

5. Отмечено заметное влияние дискретности развертки по волновому числу на получаемую в результате расчета величину времени собственного пробега волны. Показано, что такая дискретность, вследствие высокой чувствительности операции численного дифференцирования к изменению входных данных, приводит к скачкообразному характеру зависимости, особенно после прохождения ее максимума, причем относительная величина скачков может достигать 10%. Определено оптимальное значение шага по волновому числу, минимизирующее амплитуду скачков, после чего выполнено статистическое усреднение полученных зависимостей.

6. Отмечено, что одновременный учет обмена, размагничивания и диссипации в едином дисперсионном соотношении приводит к неоправданной математической сложности и громоздкости задачи в целом. Для преодоления такой сложности выдвинуто предположение о том, что время релаксации однородных колебаний намагниченности и время релаксации тех же колебаний в процессе распространения волны между собой совпадают. В рамках такого предположения рассмотрена вспомогательная задача о возбуждении однородных колебаний намагниченности в нормально намагниченной пластине, решение которой позволило определить время релаксации независимым образом.

7. Приведена схема определения времени релаксации с помощью вспомогательной задачи об однородной прецессии, состоящая в определении времени развития амплитуды колебаний после включения возбуждения до уровня 0,63 и 0,95 от максимальной амплитуды в установленном режиме.

8. Рассмотрена зависимость времени релаксации от параметра диссипации Гильберта в уравнении Ландау–Лифшица. Показано, что время релаксации по мере увеличения параметра затухания уменьшается по закону, близкому к обратной пропорциональности. Полученное время релаксации сопоставлено с временем собственного пробега волны на своей длине при совпадении остальных параметров основной и вспомогательной задач. Показано, что необходимым условием распространения волны является меньшая величина времени собственного пробега по сравнению со временем релаксации. При этом, если время собственного пробега в области своего максимума превышает время релаксации, так что совпадение обоих времен по волновому числу имеет место в двух точках, то по волновому числу возможны две области распространения волны. Первая — от нуля до первой точки пересечения. Именно эта область соответствует случаю ограничения волнового числа в классической задаче Дэймона–Эшбаха с диссипацией. Вторая область начинается от второй точки пересечения и продолжается до бесконечности. Здесь распространение волны возможно только благодаря квадратичному росту закона дисперсии волны за счет обмена и размагничивания.

9. Рассмотрено время собственного пробега волны при изменении частоты и поля. Показано, что в интервале частот от 2 до 7 ГГц для материала типа железиттриевого граната время собственного пробега и характер его зависимости от волнового числа с точностью до статистического разброса около 10%, от частоты и соответствующего ей поля не зависят. Рассмотрено время релаксации в том же диапазоне частот и полей. Показано, что время релаксации по мере увеличения частоты падает по закону, близкому к линейному. Отмечен парадокс, состоящий в том, что при линейном падении времени релаксации по мере увеличения частоты ограничение по волновому числу для феррита с малой диссипацией должно наступать при меньшем значении волнового числа, чем для феррита с большой диссипацией. В качестве интерпретации такого парадокса высказано предположение о том, что линейное падение времени релаксации при увеличении частоты, после достижения определенного минимума должно смениться последующим ростом. Для проверки такого предположения предпринято исследование времени релаксации в более широком диапазоне частот вплоть до 100 ГГц. Показано, что для материала типа железиттриевого граната спад времени релаксации по мере увеличения частоты остается близким к линейному только до частот порядка 10 ГГц. После прохождения этой частоты спад замедляется и в области около 30 ГГц зависимость достигает минимума, после чего возрастает до величин, сравнимых и даже превышающих время релаксации в области малых частот. Таким образом, отмеченный выше парадокс полностью разрешается.

10. Исследовано влияние толщины пластины на ограничение волнового числа. Показано, что при уменьшении толщины начальный

рост дисперсионной кривой в области малых волновых числе из резко становится более плавным, так что минимально достижимое значение групповой скорости возрастает, в результате чего максимальное время собственного пробега уменьшается тем сильнее, чем толщина пластины меньше. При этом уменьшение толщины пластины, приводящее к уменьшению времени собственного пробега, в сочетании с замедлением и последующим ростом зависимости времени релаксации от частоты, приводит к снятию ограничения по волновому числу во всем исследованном диапазоне частот, то есть по крайней мере до 100 ГГц. Таким образом, уменьшение толщины пластины приводит как к значительному расширению диапазона допустимых частот, так и к полному снятию ограничения граната имеет место при толщине менее 2–3 мкм, а для ферритов других марок — при толщине около 1 мкм и менее.

11. Приведены некоторые рекомендации для практического применения рассматриваемых явлений. Отмечена возможность распространения магнитостатических волн в материалах с весьма высоким уровнем диссипации, в том числе в тонких пленках металлов (никеля и других), в настоящее время активно исследуемых при воздействии мощных импульсов света от фемтосекундного лазера. При этом условием возбуждения таких волн является выбор толщины металлической пленки не более нескольких десятков нанометров. Поскольку в большинстве экспериментов с фемтосекундным лазером подобные условия выполняются, поставлен вопрос о необходимости проведения соответствующих экспериментальных исследований.

Глава 8

СПИН-ВОЛНОВОЙ РЕЗОНАНС В ТОНКИХ МАГНИТНЫХ ПЛЕНКАХ В ОТСУТСТВИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ АНИЗОТРОПИИ

Настоящая глава посвящена рассмотрению возбуждения спин-волнового резонанса, где стоячие волны обменного характера устанавливаются по толщине пленки.

Данная глава несколько выходит из общего строя идей и положений, освещаемых в настоящей монографии, отличаясь, главным образом, геометрией задачи. Так, во всех предыдущих главах (2–7) рассматриваются волны, распространяющиеся вдоль плоскости магнитной пластины, здесь же волны распространяются по ее толщине. Такой выход за рамки общего строя монографии обусловлен тем, что такая геометрия является единственной, где в эксперименте удастся реально возбудить достаточно эффективные и хорошо управляемые волны обменного характера. При этом возможность возбуждения обусловлена тем, что толщина пластины (в качестве которой обычно используется тонкая пленка) составляет единицы и доли микрометра, что вполне соизмеримо с длиной такой магнитостатической волны, для которой обменное взаимодействие приобретает решающий характер. Хорошо наблюдаемый в эксперименте спин-волновой резонанс, соответствующий установлению стоячих волн обменного характера по толщине пластины, побудил авторов несколько отступить от общего строя монографии и включить в нее настоящую главу с подробным рассмотрением такого резонанса.

Итак, в настоящей главе, в отличие от традиционной трактовки спин-волнового резонанса на основе введения поверхностной анизотропии, рассматривается пленка без анизотропии, но с учетом жесткости цепочки спинов, проходящей от одной поверхности пленки до другой. В качестве механического аналога задачи рассматриваются колебания жесткой струны со свободными концами. Получен спектр частот спин-волнового резонанса и приведены рекомендации по дальнейшему развитию модели жесткой цепочки спинов.

Основной ход изложения следует [38], а необходимые дополнительные ссылки указываются в тексте.

8.1. Краткий обзор основных исследований спин-волнового резонанса

Современные технологии обработки информации требуют освоения терагерцовых диапазонов частот и нанометровых размеров [268–276]. Разработка конкретных устройств при этом базируется на тонкопленочной технике, важнейшей из областей которой является использование тонких магнитных пленок [193–196], причем широкие перспективы открывает использование распространяющихся в таких пленках магнито-статических спиновых волн [200–203].

В работах [1–4, 114] приведены свойства таких волн, возбуждаемых в традиционной геометрии Дэймона–Эшбаха, то есть в касательно намагниченной пленке, где распространяются спиновые волны дипольного характера. Стремление минимизировать размеры устройств и обеспечить их работу в более высокочастотных диапазонах стимулирует обращение к обменным спиновым волнам [40, стр. 36–41], [41, стр. 374–424], [42, стр. 198–221]. В работах [31–34], а также здесь в главе 6 рассмотрены волны типа Дэймона–Эшбаха с участием обменного взаимодействия, что по сравнению с дипольными волнами позволяет более чем на два порядка уменьшить размеры и повысить рабочие частоты устройств.

Главным препятствием в широком освоении обменных волн является требование возбуждения волн нанометровой длины, что связано с технологическими трудностями создания возбудителей, геометрические размеры которых были бы соизмеримы с длиной волны. Однако с давних времен практикуется возбуждение спиновых волн обменной природы однородным СВЧ-полем в нормально намагниченных тонких магнитных пленках [71]. При этом длина возбуждаемой волны определяется толщиной пленки и уже в ранних работах составляла десятки нанометров (при толщине пленки в 500 нм в [71] возбуждалось до десяти гармоник).

Подробный обзор дальнейшего развития таких работ можно найти, например, в монографиях [41, стр. 410–417], [42, стр. 205–214]. Теоретическая трактовка этих работ базируется на модели поверхностной анизотропии, впервые предложенной в работе [72]. То есть полагается, что спин, расположенный на поверхности пленки, подвержен действию достаточно сильного поля анизотропии, которое препятствует его колебаниям, то есть вызывает «закрепление» спина на этой поверхности. Следует заметить, что такое предположение было введено без какого-либо независимого экспериментального обоснования, а оправдывалось только самим фактом возможности возбуждения спиновых волн обменного характера однородным СВЧ-полем.

Во всех последующих работах, частично обобщенных в [41, стр. 410–417], [42, стр. 205–214], экспериментальные результаты трактовались лишь на основе такой модели, в том числе путем предположительного введения «частичного» и «упругого» закрепления.

То есть модель простого «жесткого» закрепления спина для объяснения ряда экспериментов оказывалась недостаточной, а предположение о «частичном» или «упругом» закреплении вводилось искусственно, чтобы как-то согласовать выводы модели с экспериментальными данными.

Дополнительно также следует отметить, что численная оценка величины анизотропии, требуемой для достаточного закрепления спина на поверхности, как правило, на порядок и более превышает значение анизотропии в основном объеме пленки, так что природа ее появления остается неясной.

В то же время, простые качественные соображения говорят о том, что спин на поверхности пленки должен быть не закреплен, а наоборот, более свободен, чем в ее объеме. Положение о большей свободе поверхностного спина следует из того, что внутри объема спин со всех сторон находится в окружении других спинов, «прикрепляющих» его к себе за счет обменного взаимодействия, тогда как на поверхностный спин действуют обменные силы только с одной стороны, соответствующей основному объему пленки, а с другой стороны, то есть со стороны свободного пространства, никаких сил нет.

В модели поверхностной анизотропии отсутствует учет обменного выстраивания спинов в одном направлении. Однако именно обменное взаимодействие затрудняет изгиб прямолинейной спиновой цепочки, создавая при изгибе определенную «выпрямляющую» силу. То есть и здесь модель поверхностной анизотропии оказывается недостаточной.

Настоящая глава посвящена рассмотрению колебаний спинов в тех же условиях, то есть в нормально намагниченной тонкой пленке, но без учета поверхностной анизотропии, а также с введением действующей на спиновую цепочку выпрямляющей силы. В основу описания обменного взаимодействия положена трактовка, приведенная в монографии [4, стр. 144–166].

8.2. Общая геометрия задачи

Общая геометрия задачи для магнитной пленки показана на рис. 8.1.

Здесь слева (рис. 8.1, *а*) представлена магнитная пленка в общем виде. Система координат $Oxyz$ выбрана таким образом, что плоскость Oxy совпадает с нижней поверхностью пленки. При этом нижней поверхности соответствует координата $z = 0$, а верхней — $z = L$. То есть толщина пленки равна L . Постоянное поле \mathbf{H}_0 перпендикулярно плоскости пленки, переменное \mathbf{h} приложено в плоскости пленки. Внешнее магнитное поле \mathbf{H}_0 предполагается достаточным для выстраивания намагниченности перпендикулярно плоскости пленки (вдоль оси Oz), то есть оно превышает поле размагничивания $4\pi M_0$, где M_0 — намагниченность насыщения.

Справа (рис. 8.1, *б*) показан разрез той же пленки плоскостью Oxz . Волнистой линией посередине изображена спиновая волна, распростра-

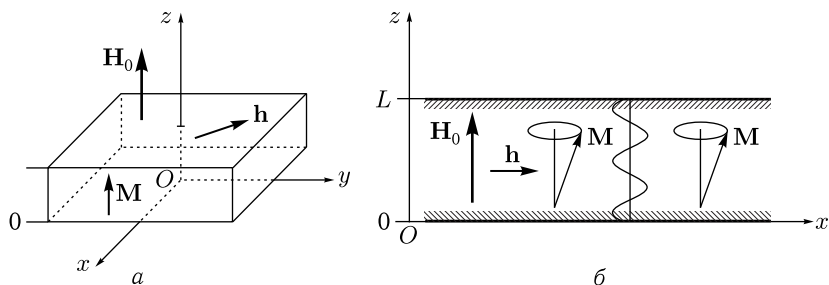


Рис. 8.1. Общая геометрия задачи: *a* — магнитная пленка, общий вид; *б* — сечение пленки плоскостью Oxz

няющаяся вдоль оси Oz через всю толщину пленки от одной поверхности до другой. При этом предполагается, что переменное поле \mathbf{h} в плоскости пленки однородно, так что во всей пленке при одной и той же координате z намагниченность прецессирует в одинаковой фазе.

Спины, рассматриваемые как векторы намагниченности, во всей пленке связаны обменным взаимодействием, определяющим их выстраивание вдоль одной оси. Далее будет рассматриваться не весь массив спинов, а отдельная их цепочка, ориентированная вдоль оси Oz , проходящая от одной поверхности пленки до другой. Возможность такого рассмотрения обоснована синфазностью колебаний намагниченности в пределах любой плоскости, параллельной Oxy . При этом обменное взаимодействие вынуждает спины внутри цепочки выстраиваться друг за другом в одну линию, в отсутствие переменного поля ориентированную точно вдоль оси Oz . Переменное поле может вызывать отклонение от такой линии. Такое отклонение и будет образовывать внутри цепочки спиновую волну, распространяющуюся вдоль оси Oz . Поперечные компоненты намагниченности в такой волне будут ориентированы вдоль осей Ox и Oy , а их амплитуда будет меняться по координате Oz . Именно такая волна рассматривается далее.

8.3. Модель поверхностной анизотропии

Рассмотрим сначала модель поверхностной анизотропии, следуя ее классическому виду, впервые предложенному в работе [72].

В этой работе рассмотрен спин-волновой резонанс обменных волн в нормально намагниченной тонкой пленке. В качестве модели предложена перпендикулярная поверхности пленки линейная цепочка спинов, рассматриваемых как классические векторы намагниченности, связанные обменным взаимодействием.

Геометрия задачи подобна представленной на рис. 8.1. Это — нормально намагниченная тонкая пленка, на которую воздействует однородное переменное поле в ее плоскости. Исследуется возбужденные колебания спинов под воздействием переменного поля. Система

координат $Oxyz$ ориентирована таким образом, что плоскость Oxy совпадает с плоскостью пленки, а ось Oz ей перпендикулярна. Постоянное поле приложено вдоль оси Oz , переменное поле приложено в плоскости Oxy . Колебания намагниченности в плоскости Oxy однородны, так что намагниченность зависит только от координаты z . Между спинами в пленке имеется обменное взаимодействие, выстраивающее их в одном направлении. Постоянное поле превышает поле размагничивания формы пленки, так что в стационарном состоянии намагниченность ориентирована вдоль оси Oz . По толщине пленки возбуждаются стоячие волны намагниченности.

Главное предположение, составляющее основу работы [72] — наличие в пленке поверхностной анизотропии.

Рассматривается цепочка из спинов, выстроенная вдоль оси Oz . Крайний спин — \mathbf{S}_1 , следующий за ним — \mathbf{S}_2 . На спин \mathbf{S}_1 действуют два поля: внешнее \mathbf{H}_0 и поле поверхностной анизотропии \mathbf{H}_a . На спин \mathbf{S}_2 действует только внешнее поле, а поле анизотропии не действует. Спины связаны обменным взаимодействием.

Записывается уравнение движения для первого спина [72]:

$$\frac{\partial \mathbf{S}_1}{\partial t} = \frac{2J}{\hbar} [\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2] + \gamma [\mathbf{S}_1 \times (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_a)], \quad (8.1)$$

где J — интеграл обмена (однородного обменного взаимодействия), \hbar — постоянная Планка, γ — гиромагнитная постоянная.

Раскрываем по компонентам:

$$\frac{\partial S_1^x}{\partial t} = \frac{2J}{\hbar} (S_1^y - S_2^y) S^z + \gamma S_1^y (H_0 + H_a); \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial S_1^y}{\partial t} = -\frac{2J}{\hbar} (S_1^x - S_2^x) S^z - \gamma S_1^x (H_0 + H_a), \quad (8.3)$$

где через S^z обозначена компонента спина по оси Oz , в линейном приближении одинаковая для обоих спинов, близкая к единице (или к намагниченности насыщения).

Введем обозначения:

$$\omega_1 = \gamma(H_0 + H_a); \quad (8.4)$$

$$\omega_e = \frac{2JS}{\hbar}, \quad (8.5)$$

где через S обозначена та же компонента по оси Oz , у которой индекс « z » опущен за ненадобностью.

С этими обозначениями получаем:

$$\frac{\partial S_1^x}{\partial t} = \omega_e (S_1^y - S_2^y) + \omega_1 S_1^y; \quad (8.6)$$

$$\frac{\partial S_1^y}{\partial t} = -\omega_e (S_1^x - S_2^x) - \omega_1 S_1^x, \quad (8.7)$$

Представим S_2^y и S_2^x в виде разложений в ряды по параметру решетки a и ограничимся их первыми членами:

$$S_2^y \approx S_1^y + a \frac{\partial S_1^y}{\partial z}; \quad (8.8)$$

$$S_2^x \approx S_1^x + a \frac{\partial S_1^x}{\partial z}. \quad (8.9)$$

Замечание. В работе [72] учтены также последующие члены рядов со вторыми производными, однако это ничего принципиально нового не дает, а только увеличивает громоздкость выкладок, поэтому здесь ограничиваемся членами с первыми производными.

Подставляя (8.8), (8.9) в (8.6), (8.7), получаем:

$$\frac{\partial S_1^x}{\partial t} = -a\omega_e \frac{\partial S_1^y}{\partial z} + \omega_1 S_1^y; \quad (8.10)$$

$$\frac{\partial S_1^y}{\partial t} = a\omega_e \frac{\partial S_1^x}{\partial z} - \omega_1 S_1^x. \quad (8.11)$$

Исключим из этих выражений S_1^y . Для этого сначала продифференцируем (8.10) по времени и в первом слагаемом справа изменим порядок дифференцирования:

$$\frac{\partial^2 S_1^x}{\partial t^2} = -a\omega_e \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial S_1^y}{\partial t} \right) + \omega_1 \frac{\partial S_1^y}{\partial t}. \quad (8.12)$$

Теперь подставим (8.11) в полученное выражение:

$$\frac{\partial^2 S_1^x}{\partial t^2} = -a\omega_e \frac{\partial}{\partial t} \left(a\omega_e \frac{\partial S_1^x}{\partial z} - \omega_1 S_1^x \right) + \omega_1 \left(a\omega_e \frac{\partial S_1^x}{\partial z} - \omega_1 S_1^x \right). \quad (8.13)$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем:

$$\frac{\partial^2 S_1^x}{\partial t^2} = -a^2\omega_e^2 \frac{\partial^2 S_1^x}{\partial z^2} + 2\omega_e\omega_1 \frac{\partial S_1^x}{\partial z} - \omega_1^2 S_1^x. \quad (8.14)$$

Это выражение с точностью до первых членов разложений (8.8) и (8.9) совпадает с формулой (10) в работе [72].

Полученное выражение представляет собой уравнение для первого спина, который находится в поле поверхностной анизотропии.

Далее в работе [72, форм. (12)] предлагается «принять для внутренних спинов цепочки решение вида»:

$$S_1^x = e^{i\omega t} (\alpha \sin kz + \beta \cos kz). \quad (8.15)$$

Для упрощения записи опустим далее индексы «1» и «x», то есть запишем (8.15) в виде:

$$S = e^{i\omega t} (\alpha \sin kz + \beta \cos kz), \quad (8.16)$$

где под S подразумеваются поперечные, то есть ориентированные вдоль осей Ox , Oy , компоненты спина внутри цепочки.

Найдем производные:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = -\omega^2 e^{i\omega t} (\alpha \sin kz + \beta \cos kz); \quad (8.17)$$

$$\frac{\partial S}{\partial z} = k e^{i\omega t} (\alpha \cos kz - \beta \sin kz); \quad (8.18)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = -k^2 e^{i\omega t} (\alpha \sin kz + \beta \cos kz). \quad (8.19)$$

Подставляя (8.17)–(8.19) в (8.14) и разделяя на $e^{i\omega t}$, получаем:

$$-\omega^2 (\alpha \sin kz + \beta \cos kz) = a^2 k^2 \omega_e^2 (\alpha \sin kz + \beta \cos kz) + 2ak\omega_e \omega_1 (\alpha \cos kz - \beta \sin kz) - \omega_1^2 (\alpha \sin kz + \beta \cos kz). \quad (8.20)$$

Далее, поскольку рассматривается крайний спин цепочки, следует положить в этой формуле $z = 0$, откуда получаем:

$$-\omega^2 \beta = a^2 k^2 \omega_e^2 \beta + 2ak\omega_e \omega_1 \alpha - \omega_1^2 \beta. \quad (8.21)$$

Разделяя на α и выделяя β/α , получаем:

$$(\omega_1^2 - \omega^2 - a^2 k^2 \omega_e^2) \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) = 2ak\omega_e \omega_1. \quad (8.22)$$

Выражая β/α , находим:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2ak\omega_e \omega_1}{\omega_1^2 - \omega^2 - a^2 k^2 \omega_e^2}. \quad (8.23)$$

Это выражение с точностью до первых членов разложений (8.8) и (8.9) совпадает с формулой (14) в статье [72].

Далее в работе [72] предложены два приближения.

Первое из них имеет вид:

$$\omega_1 \gg \omega, \quad (8.24)$$

то есть поле анизотропии достаточно велико по сравнению с полем резонанса внутри цепочки, где можно полагать $\omega \approx \gamma H_0$.

Второе содержит волновое число, обратное длине волны, которая близка к толщине пластины (при небольшом числе полуволн по ее толщине) и предполагает, что это волновое число невелико, то есть толщина пластины достаточно велика. Это приближение имеет вид:

$$\omega_1 \gg \omega_e ka. \quad (8.25)$$

Это соотношение предполагает, что поле анизотропии настолько велико, что оно пересиливает огромное поле обмена, умноженное на довольно малую постоянную решетки, которая в свою очередь умножается на не очень большое волновое число.

При таких приближениях в знаменателе формулы (8.23) остается только первое слагаемое, так что она принимает вид:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2ak\omega_e}{\omega_1}. \quad (8.26)$$

При этом, учитывая второе приближение (8.25), получаем:

$$\frac{\beta}{\alpha} \ll 1, \quad (8.27)$$

то есть $\beta \ll \alpha$, в результате чего выражение (8.16) принимает вид:

$$S = e^{i\omega t} \alpha \sin kz. \quad (8.28)$$

То есть колебания намагниченности описываются синусоидой, нули которой совпадают с поверхностями пленки. Требование нулевых значений намагниченности на поверхностях соответствует закреплению спинов на этих поверхностях за счет поверхностной анизотропии.

Граничные условия, соответствующие закреплению спинов на поверхностях пластины толщины L , то есть при $z = 0$ и $z = L$, имеют вид:

$$S|_{z=0} = 0; \quad (8.29)$$

$$S|_{z=L} = 0. \quad (8.30)$$

Подставляя (8.28) в эти условия, получаем дискретный ряд допустимых значений волнового числа:

$$k = \frac{\pi n}{L}, \quad (8.31)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ — последовательные целые числа.

При этом координатная составляющая решения (8.28) принимает вид:

$$S^{x,y} = \sin\left(\frac{\pi n}{L}z\right). \quad (8.32)$$

Эта формула говорит о том, что амплитуда допустимых колебаний намагниченности распределена по толщине пленки согласно синусу, нули которого приходятся на поверхности пленки.

8.3.1. Тензор магнитной восприимчивости

Дальнейший шаг расчета состоит в рассмотрении возбуждения намагниченности однородным переменным полем, приложенным в плоскости пленки, то есть имеющим компоненты h_x и h_y с зависимостью от времени вида $e^{i\omega t}$.

Поскольку по нормали к пленке приложено достаточно сильное постоянное поле, то намагниченность в стационарном состоянии ориентирована вдоль оси Oz , а переменное поле в плоскости пленки вызывает появление переменных компонент намагниченности m_x и m_y в той же плоскости. Расчет выполняется в соответствии с обычным уравнением Ландау–Лифшица с учетом динамического размагничивания и обмена.

Результатом такого расчета является выражение для динамической намагниченности:

$$\mathbf{m} = \overleftrightarrow{\chi}_d \cdot \mathbf{h}, \quad (8.33)$$

где $\overleftrightarrow{\chi}_d$ — тензор динамической восприимчивости обычного вида, характерного для безграничной среды, пример которого приведен в монографии [4, стр. 160, форм. (7.116)–(7.121)], а также здесь в гл. 2 (разд. 2.2.2).

Так, полагая в цитированной формуле $k_{x,y} = 0$ (как того требует геометрия рассматриваемой задачи), получаем:

$$\overleftrightarrow{\chi}_d = \begin{pmatrix} \frac{\gamma M_0(\omega_H + \omega_E)}{(\omega_H + \omega_E)^2 - \omega^2} & \frac{i\omega\gamma M_0}{(\omega_H + \omega_E)^2 - \omega^2} \\ -\frac{i\omega\gamma M_0}{(\omega_H + \omega_E)^2 - \omega^2} & \frac{\gamma M_0(\omega_H + \omega_E)}{(\omega_H + \omega_E)^2 - \omega^2} \end{pmatrix}, \quad (8.34)$$

где введены обозначения:

$$\omega_H = \gamma H_0; \quad (8.35)$$

$$\omega_E = \gamma q k^2 M_0. \quad (8.36)$$

При этом:

$$m_x = \frac{\gamma M_0(\omega_H + \omega_E)}{(\omega_H + \omega_E)^2 - \omega^2} h_x + \frac{i\omega\gamma M_0}{(\omega_H + \omega_E)^2 - \omega^2} h_y; \quad (8.37)$$

$$m_y = -\frac{i\omega\gamma M_0}{(\omega_H + \omega_E)^2 - \omega^2} h_x + \frac{\gamma M_0(\omega_H + \omega_E)}{(\omega_H + \omega_E)^2 - \omega^2} h_y, \quad (8.38)$$

а резонансная частота определяется выражением:

$$\omega = \omega_H + \omega_E, \quad (8.39)$$

или:

$$\omega = \gamma \left\{ H_0 + q M_0 \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 \right\}, \quad (8.40)$$

то есть зависит от числа полуволн n , укладываемых по толщине пленки.

8.3.2. Интеграл перекрытия в модели поверхностной анизотропии

Тензор (8.34) получен в предположении однородного распределения намагниченности по оси Oz . Однако из (8.32) следует, что такое распределение, благодаря закреплению спинов на поверхностях пленки, является неоднородным, то есть определяется синусом, зависящим от z . При этом намагниченность (8.33) с тензором (8.34) можно считать «локальной», то есть такое ее значение имеет место только в точке, определяемой заданной координатой z . В то же время, полная эффективность возбуждения спин-волнового резонанса опреде-

ляется не локальной намагниченностью в одной точке, а суммарной, то есть интегральной намагниченностью, распределенной по всей толщине пленки от нуля до L .

Определим требуемую эффективность путем интегрирования плотности энергии взаимодействия намагниченности с возбуждающим полем по всей толщине пленки.

В общем случае плотность энергии взаимодействия намагниченности \mathbf{M} с внешним полем \mathbf{H} имеет вид [3, стр. 38, форм. (2.4)]:

$$U_H = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{H} = -(M_x H_x + M_y H_y + M_z H_z). \quad (8.41)$$

Переменное поле будем считать ориентированным в плоскости пленки Oxy и по ее толщине однородным, то есть не зависящим от координаты z :

$$\mathbf{H} = \{h_x, h_y, 0\}. \quad (8.42)$$

Намагниченность положим в виде:

$$\mathbf{M} = \{m_x(z), m_y(z), M_0\}, \quad (8.43)$$

где через $m_{x,y}$ обозначена динамическая часть намагниченности, малая по сравнению с M_0 .

В рассматриваемой задаче зависимость намагниченности от z определяется формулой (8.32):

$$m_{x,y} = m_{\perp} \sin\left(\frac{\pi n}{L} z\right), \quad (8.44)$$

где через m_{\perp} обозначена амплитуда отклонения намагниченности от оси Oz (поперечная составляющая намагниченности).

Таким образом, получаем:

$$U_H = -\{m_x(z) \cdot h_x + m_y(z) \cdot h_y\}. \quad (8.45)$$

Если задана координата z , то такое взаимодействие можно считать локальным. Из формулы (8.44) можно видеть, что при $z = 0$ и $z = L$ величина U равна нулю, а при промежуточных значениях z меняется в соответствии с осцилляцией синусоиды.

Для получения эффективности суммарного взаимодействия по всей толщине пленки следует (8.45) проинтегрировать по всем возможным значениям этой координаты z от нуля до L , то есть найти так называемый «интеграл перекрытия»:

$$J_S = \int_0^L [m_x(z) \cdot h_x + m_y(z) \cdot h_y] dz. \quad (8.46)$$

Чтобы не загромождать формулы излишними индексами, а также учитывая постоянство $h_{x,y}$ по координате z , рассмотрим более простое вспомогательное выражение:

$$J_{Sn} = \int_0^L \sin\left(\frac{\pi n}{L}z\right) dz. \quad (8.47)$$

Выполняя интегрирование, получаем:

$$J_{Sn} = \begin{cases} \frac{2L}{\pi n} \rightarrow n = 1, 3, 5, \dots, \\ 0 \rightarrow n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (8.48)$$

Таким образом, взаимодействие имеет место при нечетных значениях n и отсутствует при четных.

Формулу (8.48) можно записать в обобщенном виде:

$$J_{Sp} = \frac{2L}{\pi(2p-1)}, \quad (8.49)$$

где $p = 1, 2, 3, \dots$

При этом

$$U_H = -J_{Sp} \{m_{x0}h_x + m_{y0}h_y\} = -\frac{2L}{\pi(2p-1)} \{m_{x0}h_x + m_{y0}h_y\}, \quad (8.50)$$

где m_{x0} и m_{y0} определяются формулами (8.37) и (8.38).

Итак, резюмируя данные настоящего раздела, можно видеть, что роль интеграла перекрытия состоит в выборе из полного решения вида (8.32) или (8.44), где волновое число определяется формулой (8.31) при любом значении n , только тех решений, которые могут возбуждаться однородным переменным полем, приложенным в плоскости пленки, что требует выполнения условия

$$n = 2p - 1, \quad (8.51)$$

то есть вместо (8.44) получаем:

$$m_{x,y} = m_{\perp} \sin\left[\frac{\pi(2p-1)}{L}z\right], \quad (8.52)$$

где $p = 1, 2, 3, \dots$ — произвольное целое число.

Такие колебания являются резонансными, а их частоты определяются соотношением (8.40), в котором n надо заменить на p в соответствии с (8.51):

$$\omega = \gamma \left\{ H_0 + qM_0 \left[\frac{\pi(2p-1)}{L} \right]^2 \right\}. \quad (8.53)$$

Таким образом, возбуждаются только те моды, полуволна которых укладывается по толщине пленки $(2p-1)$ раз, то есть нечетное их число. Частота таких мод определяется формулой (8.53). При этом

эффективность возбуждения (8.50), то есть амплитуда возбуждаемых мод, по мере увеличения p падает по закону обратной пропорциональности. То есть, чем больше полуволн укладывается по толщине пленки, тем возбуждение хуже. Спектр колебаний намагниченности, определяемый таким распределением частот и амплитуд, вполне удовлетворительно согласуется со свойствами спин-волнового резонанса, наблюдаемыми в эксперименте [71].

8.3.3. Развитие модели поверхностной анизотропии

После того как модель поверхностной анизотропии дала приемлемое описание первых экспериментальных результатов по спин-волновому резонансу в тонких пленках [71], началось активное ее использование для множества других экспериментов в самых разнообразных условиях. Достаточно подробный обзор таких исследований с многочисленными ссылками можно найти в монографиях [41, стр. 404–417], [42, стр. 205–214].

Для детальной интерпретации дискретного характера спин-волнового резонанса простые граничные условия (8.29)–(8.30), предполагающие закрепление спинов на поверхностях пленки, оказались недостаточными и были предложены более общие граничные условия вида:

$$\alpha \frac{\partial m}{\partial z} + \beta m \Big|_{z=0,L} = 0, \quad (8.54)$$

где m — переменная часть намагниченности в предположении малых ее колебаний, α и β — параметры, определяющие удельное соотношение роли первого и второго слагаемых этого выражения в поведении спинов на поверхности пленки. В общем случае намагниченность имеет векторный характер, однако здесь для простоты этим пренебрегаем. Вывод таких условий приведен в цитированных монографиях в несколько отличающемся друг от друга виде, однако приводящем к одинаковым конечным результатам [41, стр. 407–410], [42, стр. 205–208].

Замечание. В конкретном виде параметров α и β в цитированных монографиях имеется определенное разночтение. Так, в [41, стр. 410, форм. (8.3.20)] граничное условие записано в виде:

$$\xi \frac{\partial m}{\partial z} + m = 0, \quad (8.55)$$

где [41, стр. 409, форм. (8.3.18)]:

$$\xi = \frac{qM_0^2}{2K_S}, \quad (8.56)$$

где K_S — «поверхностная плотность энергии взаимодействий, учитываемая эффективным полем» поверхностной анизотропии, то есть, грубо говоря, константа такой анизотропии, а для параметра ξ явное название отсутствует.

С другой стороны, в [42, стр. 207, форм. (7.39)] подобное условие записано в виде:

$$\frac{\partial m}{\partial z} + \xi m = 0, \quad (8.57)$$

где ξ — «параметр закрепления» магнитных моментов на поверхности [42, стр. 207, форм. (7.37)], равный:

$$\xi = \frac{2K_S}{qM_0^2}, \quad (8.58)$$

где величина K_S прямо названа «константой поверхностной анизотропии». Можно видеть, что формулы (8.56) и (8.58), используя в левой части одно и то же буквенное обозначение, описывают величины, взаимно обратные друг другу.

Несмотря на отмеченное разночтение, основной характер этих условий, обобщенных в виде (8.54), является достаточно универсальным.

Так, при $\alpha = 0$ из (8.54) получаем:

$$m|_{z=0,L} = 0, \quad (8.59)$$

что соответствует полному закреплению спинов на поверхности, принятому в работе [72].

При $\beta = 0$ из того же условия (8.54) получаем:

$$\left. \frac{\partial m}{\partial z} \right|_{z=0,L} = 0, \quad (8.60)$$

что соответствует полностью свободным спинам на поверхности, то есть отсутствию какой-либо «поверхностной анизотропии». Этот случай рассмотрен ранее [72] в работе [277].

В математической трактовке, например, относительно достаточно общей задачи о колебаниях струны или пружины, эти условия соответствуют струне с закрепленными (8.59) и свободными (8.60) концами, а полное условие (8.54) — наиболее общему случаю так называемого «упругого закрепления» [207, стр. 39–41, форм. (50)–(54)].

Таким образом, условие типа (8.54) отражает достаточно широкий спектр различных состояний поверхности, что и позволяет удовлетворить разнообразным спектрам спин-волновых резонансных колебаний, полученным в работах, цитированных в [41] и [42], путем надлежащего выбора «параметров закрепления» α и β .

8.3.4. Оценка величины поверхностной анизотропии

Оценим величину анизотропии, требуемой для эффективного закрепления спинов на поверхностях. Будем исходить из основной трактовки такого закрепления, предложенной в работе [72].

Выразим частоты ω_e и ω_1 через соответствующие поля: $\omega_e = \gamma H_e$, $\omega_1 = \gamma H_a$ (в пренебрежении H_0), где H_e — поле однородного обменного

взаимодействия («обменное поле» или «поле Вейсса»), а H_a — поле поверхностной анизотропии. При этом (8.26) принимает вид:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2akH_e}{H_a}. \quad (8.61)$$

Из условия (8.27), пренебрегая коэффициентом «2» в (8.26), получаем:

$$H_a \gg akH_e. \quad (8.62)$$

Оценим требуемую величину H_a при типичных параметрах эксперимента. Положим обменное поле $H_e \approx 10^7$ Э [39, стр. 83, 262], а постоянную решетки $a \approx 10^{-8}$ см. Толщину пленки возьмем равной 1 мкм. При этом, полагая, что по толщине пленки укладывается одна полуволна стоячих колебаний, получаем волновое число порядка $k \approx 10^4$ см $^{-1}$. Подставляя эти значения в (8.62), получаем $H_a \gg 10^3$ Э, то есть поле анизотропии должно составлять порядка 10 000 Э и более.

Поле анизотропии оценим с помощью формулы [41, стр. 85, форм. (2.2.10)], [3, стр. 171, форм. (4.119)]:

$$H_a = \frac{2K_1}{M_0}, \quad (8.63)$$

где K_1 — константа кубической анизотропии.

Замечание. Во второй из приведенных ссылок формула для поля анизотропии (4.119) не содержит коэффициента «2», как оно дано в виде H_{A1} по первой ссылке в формуле (2.2.10). Это связано с тем, что приведенные в той же первой ссылке ориентационные зависимости частоты ферромагнитного резонанса (стр. 95, рис. 2.2.8, рис. 2.2.9) используют в качестве базового именно поле H_{A1} без такого коэффициента. Однако там же двумя строками ниже сказано, что «величину $2H_{A1}$ называют часто полем анизотропии». Более того, получение поля анизотропии путем дифференцирования плотности энергии по компонентам намагниченности [3, стр. 186, форм. (4.186)], например, с использованием формул (4.117) или (4.118), приведенных на стр. 171 в [3] (здесь — формула (2.3) в разд. 2.2.1), приводит к выражению, содержащему коэффициент «2». Поэтому в настоящей работе будем придерживаться для поля анизотропии выражения, содержащего коэффициент «2», то есть (8.63).

Оценим поля анизотропии в материалах, типичных для экспериментов по спин-волновому резонансу. Достаточно часто используются пленки железа, никеля и пермаллоя, имеющие кубическую структуру. Воспользуемся данными, приведенными в [39, стр. 59, 281]. Так, намагниченность M_0 для железа положим равной 1700 Гс, для никеля — 500 Гс, для пермаллоя — 880 Гс. Константы анизотропии для тех же материалов будем считать равными $4 \cdot 10^5$ эрг · см $^{-3}$, $4 \cdot 10^4$ эрг · см $^{-3}$ и $3,5 \cdot 10^3$ эрг · см $^{-3}$. При помощи формулы (8.63) получаем поля

анизотропии: для железа — 470 Э, для никеля — 160 Э, для пермаллоя — 8 Э. Эти поля анизотропии — в объеме материала. Все они значительно ниже требуемой величины поля анизотропии на поверхности $H_a \sim 10\,000$ Э. То есть можно полагать, что для реализации модели поверхностного закрепления спинов, поле поверхностной анизотропии для железа и никеля должно превышать поле анизотропии в объеме этих материалов не менее чем на один–два порядка величины, а для пермаллоя не менее чем на три порядка.

Более приемлемые величины полей анизотропии имеют место для смешанных ферритов-гранатов [3, стр. 227, табл. 5.1]. Так, для феррита состава $(\text{EuEr})_3(\text{FeGa})_5\text{O}_{12}$ поле анизотропии составляет от 5000 до 9000 Э. Однако для наилучшего с точки зрения резонансных свойств феррита, железиттриевого граната $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$, поле анизотропии составляет всего около 40 Э [3, стр. 172], что для удовлетворения неравенства (8.62) явно недостаточно. Тем не менее, в железиттриевом гранате спин-волновой резонанс прекрасно наблюдается [89], что говорит о недостаточности модели поверхностной анизотропии в этом случае.

8.3.5. Обсуждение модели поверхностной анизотропии

Описанная в предыдущих разделах модель поверхностной анизотропии, в том числе с дальнейшим развитием, позволила описать значительное количество экспериментальных результатов. Однако, как в самой модели, так и в развитом варианте, содержатся некоторые моменты, вызывающие определенное неудовлетворение.

По статье [72], где эта модель была впервые предложена, остается довольно произвольным предположение о существовании самой «поверхностной анизотропии», как таковой, то есть о различии действующих на спин сил на поверхности пленки и внутри ее объема. В самом деле, на спин, находящийся внутри цепочки, действуют два соседних спина, расположенных в той же цепочке по обе стороны от первого. Однако на спин, находящийся на поверхности, то есть на конце цепочки, действует только один спин, так как он соседствует с единственным принадлежащим цепочке спином, а по другую сторону от него находится открытое пространство, где никаких действующих на спин сил нет. Таким образом, внутренний спин находится в более тесном окружении, чем внешний, то есть он «закреплен» значительно сильнее, чем тот, который находится на поверхности. Однако модель поверхностной анизотропии предполагает, что «закреплен» именно внешний спин.

Обращаясь к аналогии со струной [207], можно сказать, что модель поверхностной анизотропии соответствует струне с закрепленными концами, тогда как более свободное положение внешнего спина по сравнению с внутренним соответствует струне со свободными концами.

Граничные условия, соответствующие высвобождению спинов на поверхностях пластины, вместо (8.29) и (8.30) принимают вид:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial z} \right|_{z=0} = 0; \quad (8.64)$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial z} \right|_{z=L} = 0. \quad (8.65)$$

Положим решение уравнения (8.14) в наиболее общем виде, совпадающем с (8.16):

$$S = e^{i\omega t} (\alpha \sin kz + \beta \cos kz). \quad (8.66)$$

Производная этого выражения имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial z} = ke^{i\omega t} (\alpha \cos kz - \beta \sin kz). \quad (8.67)$$

Подставляя (8.67) в граничные условия (8.29) и (8.30), из первого получаем

$$\alpha = 0, \quad (8.68)$$

а из второго:

$$k = \frac{\pi n}{L}, \quad (8.69)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ — последовательные целые числа.

Таким образом, координатная составляющая решения (8.66) принимает вид:

$$S^{x,y} = \cos\left(\frac{\pi n}{L}z\right), \quad (8.70)$$

что отличается от (8.32) заменой синуса на косинус.

Интеграл перекрытия вместо (8.47) принимает вид:

$$J_{Sn} = \int_0^L \cos\left(\frac{\pi n}{L}z\right) dz. \quad (8.71)$$

Выполняя интегрирование, получаем:

$$J_{Sn} = \frac{L}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{L}z\right) \Big|_{z=0}^{z=L} = 0. \quad (8.72)$$

Таким образом, предположение о свободных спинах на поверхностях пленки приводит к отсутствию возможности возбуждения колебаний намагниченности однородным переменным полем, приложенным в плоскости той же пленки.

Итак, получаем, что необходимым условием возможности возбуждения является распределение намагниченности по толщине пленки в соответствии с функцией синуса, а не косинуса. Можно полагать, что именно такое положение дел, то есть необходимость получения синуса, побудило принять в статье [72] предположение о закреплении спинов, то есть о существовании поверхностной анизотропии.

Другим моментом, вызывающим определенное неудовлетворение, является некоторое несоответствие числовой оценки поверхностной анизотропии значению анизотропии в объеме пленки. Примеры такого несоответствия приведены в предыдущем разделе. Следует заметить, однако, что развитие модели, рассмотренное в разделе 8.6, в известной степени позволило подогнать модель под экспериментальные результаты, что потребовало определенного подбора значений параметров закрепления. С другой стороны, какие-либо независимые экспериментальные указания на существование и измерение величины поверхностной анизотропии, кроме классического спин-волнового резонанса, по-видимому, отсутствуют. Таким образом, можно полагать, что вопрос о наличии или отсутствии закрепления спинов на поверхностях пленки как механизма, обеспечивающего интерпретацию явления спин-волнового резонанса, на сегодняшний день остается открытым.

В настоящей работе далее предпринята попытка построения модели, описывающей явление спин-волнового резонанса без привлечения поверхностной анизотропии, то есть в предположении не закрепленных, а свободных концов цепочки спинов. При этом введено в рассмотрение свойство жесткости спиновой цепочки, состоящее в том, что, благодаря обменному взаимодействию, спины внутри цепочки стремятся выстроиться по прямой линии вдоль одной оси, а всякое отклонение спинов от этой оси внутри цепочки вызывает сильное противодействие, обеспечиваемое силами неоднородного обмена. Таким образом, спиновая цепочка проявляет определенное свойство жесткости, препятствующей ее изгибу. Для построения такой модели рассмотрим сначала механическую аналогию на примере известной задачи о колебаниях струны [207, стр. 23–27], в которой положим свойства струны жесткими относительно изгиба, то есть будем полагать, что при всяком изгибе струны возникает выпрямляющая сила, противодействующая этому изгибу.

8.4. Модель жесткой струны

Главным объектом рассмотрения в описанной выше модели поверхностной анизотропии является прямая цепочка спинов, выстроенная от одной поверхности пленки до другой. При этом концы цепочки на поверхностях закреплены, а внутреннее устройство цепочки не рассматривается, кроме, разумеется, предположения (8.15) (или (8.16)), отражающего лишь волну, распространяющуюся вдоль цепочки. Представление решения в таком виде, вообще говоря, является универсальным и может быть применено к цепочке с любым внутренним устройством. В то же время, решение предполагает локальные отклонения спинов от прямой линии в соответствии с синусом или косинусом. То есть цепочка должна как-то изгибаться. Вполне естественно предположить, что изгиб цепочки вызывает силы обменного взаимодействия, такому изгибу препятствующие. То есть цепочка является как бы «жесткой» и в той или иной степени сопротивляется изгибу.

С другой стороны, цепочку, закрепленную на обоих концах, можно рассматривать как эквивалент натянутой струны, поперечные колебания которой также описываются смещениями, перпендикулярными линии, вдоль которой эта струна натянута. В классическом варианте задача о колебаниях струны рассматривается в предположении, что «струна не сопротивляется изгибу» [207, стр. 23, второй абзац снизу]. Однако можно полагать, что отмеченная выше «жесткость» цепочки спинов эквивалентна жесткости струны, которая теперь изгибу сопротивляется.

Поэтому, с методической стороны, сначала обратимся к более простой в идеологическом отношении вспомогательной задаче, а именно — к рассмотрению механической модели струны, обладающей определенной жесткостью, то есть сопротивляющейся изгибу.

8.4.1. Сопротивление изгибу жесткой струны

Далее будут рассматриваться колебания струны вокруг равновесного положения, которое она имеет в состоянии покоя. Так как скорость распространения возмущений по струне конечна, то в процессе колебаний струна претерпевает изгибы в различных ее частях. Будем считать струну достаточно жесткой, так что ее изгиб вызывает определенное сопротивление, то есть при изгибе струны возникает сила, препятствующая этому изгибу. Положим, что сила сопротивления изгибу в заданной точке тем сильнее, чем больше изгиб в этой точке. В геометрическом отношении изгиб струны соответствует локальной кривизне ее профиля [278, стр. 551–553].

Для простоты начального рассмотрения положим, что струна изогнута только в одном месте, то есть на локальном участке конечной протяженности, а по обе стороны от этого участка струна остается прямой.

Рассмотрим общую схему локального изгиба жесткой струны, представленную на рис. 8.2. Система координат Oxy ориентирована таким образом, что ось Ox соответствует начальному положению струны в отсутствие изгиба, а ось Oy отражает смещение точек струны в поперечном направлении. Функция зависимости смещения струны от координаты x обозначена через $u(x)$.

На рис. 8.2, *a* показан профиль (конфигурация) частично изогнутой струны. Предполагается, что максимальный изгиб, то есть максимальная кривизна профиля имеет место в центральной части струны. Полагаем, что на участках АВ и DE изгиб отсутствует, эти участки прямые. На участке ВС изгиб нарастает, на участке CD изгиб спадает. Максимальный изгиб, то есть максимальная кривизна профиля струны имеет место в точке С. В этой точке действует сила сопротивления изгибу \mathbf{P} , направленная таким образом, чтобы уменьшить кривизну профиля, то есть в отрицательном направлении оси Oy (по рисунку вниз).

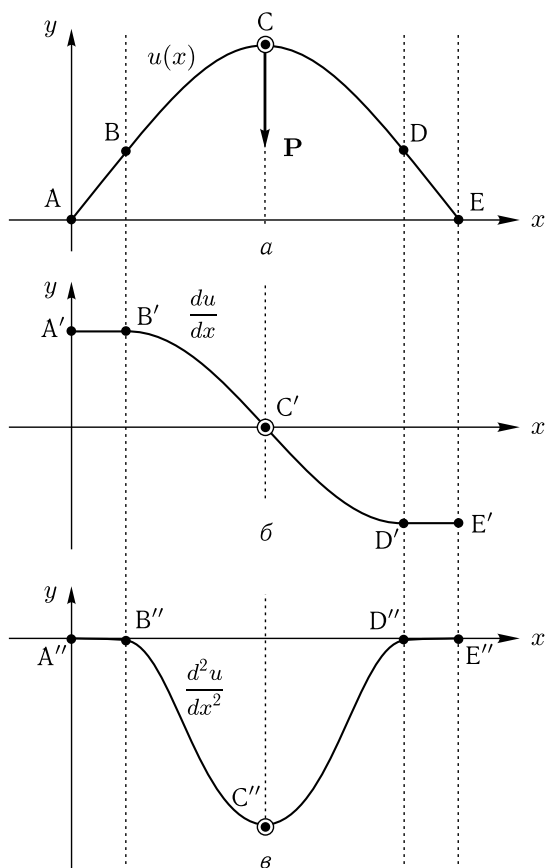


Рис. 8.2. Схема формирования второй производной при изгибе струны: *a* – профиль (конфигурация) изогнутой струны; *б* – первая производная от профиля струны; *в* – вторая производная от профиля струны

На рис. 8.2, *б* показана первая производная от конфигурации струны по координате x , то есть du/dx . Можно видеть, что на участках $A'B'$ и $D'E'$ производная постоянна, что обусловлено линейностью нарастания профиля $u(x)$ на этих участках (рис. 8.2, *а*). На участке $A'B'$ производная du/dx положительна, на участке $D'E'$ отрицательна. Между этими участками, то есть от точки B' до точки D' производная спадает, причем в точке C' проходит через нуль. В этой же точке C' крутизна спада производной максимальна, что отражает резкий переход кривой на рис. 8.2, *а* от нарастания к убыванию.

На рис. 8.2, *в* показана вторая производная от конфигурации струны по координате, то есть d^2u/dx^2 . Можно видеть, что на участках $A''B''$ и $D''E''$ производная равна нулю, что обусловлено постоянством первой

производной (рис. 8.2, б) на этих участках. Между этими участками, то есть от точки В'' до точки D'' вторая производная везде отрицательна, что отражает спад первой производной в этой области. Наиболее глубокий минимум имеет место в точке С'', где наклон зависимости первой производной по координате x максимален. Можно видеть, что этот минимум второй производной приходится как раз на точку максимальной кривизны профиля на рис. 8.2, а, то есть на ту точку, где сопротивление струны изгибу максимально.

Предположим далее, что сила \mathbf{P} , с которой струна сопротивляется изгибу в данной точке, прямо пропорциональна второй производной от профиля струны в этой же точке.

Замечание. Следует заметить, что предположение о прямой пропорциональности силы сопротивления второй производной является, вообще говоря, произвольным, то есть пропорциональность может быть не прямой, а определяться каким-то другим законом степенного или иного вида. Однако можно полагать, что в разложении в степенной ряд любой зависимости член первого порядка всегда присутствует с тем или иным коэффициентом, то есть упомянутое предположение можно считать правомерным с точностью до линейного приближения, рамками которого ограничимся далее.

Таким образом, полагаем, что сопротивление жесткой струны изгибу можно описать путем введения в рассмотрение силы P , пропорциональной второй производной от зависимости смещения струны по координате, то есть:

$$P = r \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad (8.73)$$

где r — коэффициент сопротивления изгибу, который можно назвать «константой изгибной жесткости» струны.

Можно полагать, что в общем случае направление действия силы \mathbf{P} определяется нормалью к касательной, проведенной к кривой $u(x)$ в точке максимальной ее кривизны, то есть вместо (8.73) следует записать:

$$\mathbf{P} = r \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot \mathbf{n}, \quad (8.74)$$

где \mathbf{n} — вектор указанной нормали.

В проделанном рассмотрении (рис. 8.2) положено, что точка максимального изгиба С приходится на максимальное отклонение струны от равновесного положения. Однако в общем случае значительный, в том числе наиболее резкий изгиб может иметь место не в точке максимума функции $u(x)$, а в стороне от такого максимума, например, где эта функция монотонно возрастает или убывает. В этом случае точка максимальной кривизны может также не совпадать с максимумом функции $u(x)$, то есть сильный излом может быть где-то сбоку,

а окрестность максимума достаточно плавной. В этом случае для определения кривизны следует использовать формулу [278, стр. 556]:

$$k(x) = \frac{f''(x)}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}. \quad (8.75)$$

где k — значение кривизны в точке x .

Заметим, однако, что в представленном на рис. 8.2 случае первая производная в точке C' равна нулю, так что формула (8.75) приобретает вид:

$$k(x \rightarrow C) = f''(x \rightarrow C), \quad (8.76)$$

что с точностью до постоянного множителя соответствует (8.73).

Кроме того, в окрестности изгиба можно повернуть систему координат таким образом, чтобы точка максимального изгиба совпала с точкой максимума функции x_1 . В этом случае значение кривизны останется прежним (так как это — свойство кривой, а не системы координат), а первая производная опять обратится в нуль.

В случае малого изгиба струны также можно положить:

$$f'(x) \ll 1, \quad (8.77)$$

так что знаменатель формулы (8.75) опять обращается в единицу.

Итак, чтобы не усложнять дальнейшего рассмотрения, ограничимся случаем малого изгиба, так что для силы, препятствующей изгибу, примем выражение (8.73), а направление силы \mathbf{P} будем считать перпендикулярным равновесному положению струны, то есть по рис. 8.2 — вдоль оси Oy .

8.4.2. Волновое уравнение с третьей производной

Получим теперь уравнение колебаний жесткой струны, сопротивляющейся изгибу. При выводе будем следовать методу, используемому для струны в отсутствие сопротивления изгибу [207, стр. 23–26], который дополним учетом силы сопротивления изгибу, пропорциональной второй производной от профиля струны.

Обратимся к рис. 8.3, где показаны силы, действующие на малый участок струны между точками с координатами x_1 и x_2 .

На этом рисунке буквами А и В обозначена часть профиля струны, представляющая интерес для рассмотрения. Описываемая далее картина полностью характерна для всего протяжения струны, а рассматриваемый здесь участок между точками 1 и 2 выбран исходя из наглядности рисунка в качестве типичного примера.

Характер расположения сил натяжения и противодействия изгибу одинаков на всем протяжении струны, поэтому в дальнейшем рассмотрении будем указывать индексы «1» и «2» только там, где это будет необходимо. Будем полагать отклонения струны от положения равновесия достаточно малым, так что углы $\alpha_{1,2}$ также можно считать малыми.

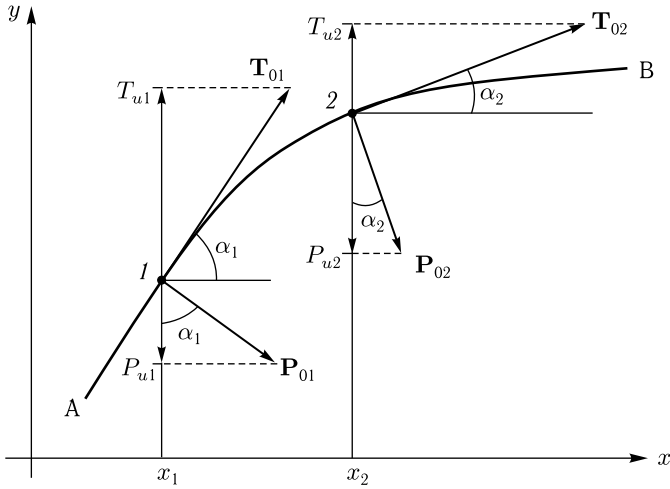


Рис. 8.3. Силы, действующие на малый участок струны между точками 1 и 2: АВ — профиль струны

Итак, составляющая силы натяжения вдоль оси Oy при малом α имеет вид:

$$T_u = T_0 \sin \alpha \cong T_0 \operatorname{tg} \alpha = T_0 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (8.78)$$

то есть:

$$T_u = T_0 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (8.79)$$

Составляющая силы противодействия изгибу вдоль оси Oy пропорциональна второй производной от профиля струны, то есть при малом значении α имеет вид:

$$P_u = -P_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (8.80)$$

Здесь величины T_0 и P_0 — положительные.

Сила на участке $(x_1; x_2)$ вдоль оси Oy складывается из двух сил — натяжения и противодействия изгибу:

$$V_{x1,2} = (T_u|_{x2} - T_u|_{x1}) - (P_u|_{x2} - P_u|_{x1}). \quad (8.81)$$

С помощью (8.78) и (8.80) записываем:

$$V_{x1,2} = T_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x2} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x1} \right) - P_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x1} \right). \quad (8.82)$$

Запишем первую скобку через среднее значение на участке $(x_1; x_2)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x2} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x1} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x1, x2} \right) \cdot (x_2 - x_1) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \Delta x, \quad (8.83)$$

где $\Delta x = x_2 - x_1$.

Аналогично для второй скобки получаем:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_2} - \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_1} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_1, x_2} \right) \cdot (x_2 - x_1) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \cdot \Delta x. \quad (8.84)$$

Подставляя (8.83) и (8.84) в (8.82), получаем силу в виде:

$$V_{x1,2} = \left(T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - P_0 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \cdot \Delta x. \quad (8.85)$$

Импульс силы за время $\Delta t = t_2 - t_1$ равен:

$$\delta V_{x1,2} = \left(T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - P_0 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \cdot \Delta x \Delta t. \quad (8.86)$$

Найдем теперь изменение количества движения того же участка за то же время. Прежде всего учтем, что масса участка равна:

$$m_{x1,2} = \rho \cdot \Delta x, \quad (8.87)$$

где ρ — плотность на единицу длины, которую считаем по всей длине струны постоянной.

Количество движения в момент времени t_1 равно:

$$U_{t1} = m_{x1,2} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t1} = \rho \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t1} \cdot \Delta x, \quad (8.88)$$

где производная $\partial u / \partial t$ соответствует скорости.

Аналогично количество движения в момент времени t_2 равно:

$$U_{t2} = m_{x1,2} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t2} = \rho \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t2} \cdot \Delta x. \quad (8.89)$$

Изменение количества движения за время $t_2 - t_1$ равно:

$$\delta U_{t1,2} = U_{t2} - U_{t1} = \rho \left(\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t2} - \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t1} \right) \cdot \Delta x. \quad (8.90)$$

Запишем выражение в скобках через среднее значение на интервале времени $(t_1; t_2)$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t2} - \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t1} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t1, t2} \right) \cdot (t_2 - t_1) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \Delta t. \quad (8.91)$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$.

Подставляя это выражение в (8.90), получаем:

$$\delta U_{t1,2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \Delta t \Delta x. \quad (8.92)$$

Согласно известному закону механики, изменение количества движения равно импульсу силы [279, стр. 96, форм. (26.1)], [280, стр. 53, форм. (4)], [281, стр. 53, форм. (4)], то есть:

$$\delta V_{x1,2} = \delta U_{t1,2}. \quad (8.93)$$

Раскрывая обе части этого равенства в соответствии с (8.86) и (8.92), получаем:

$$\left(T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - P_0 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) \cdot \Delta x \Delta t = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \Delta t \Delta x. \quad (8.94)$$

Сокращая обе части на $\Delta x \Delta t$, разделяя на ρ , перенося все в левую часть и меняя порядок слагаемых, получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{P_0}{\rho} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (8.95)$$

Введем обозначения:

$$p = \frac{T_0}{\rho}; \quad (8.96)$$

$$r = \frac{P_0}{\rho}. \quad (8.97)$$

С этими обозначениями (8.95) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (8.98)$$

Это — искомое волновое уравнение с третьей производной, отражающей сопротивление струны изгибу.

Будем полагать, что на концах струны сила (8.80), противодействующая изгибу, то есть выпрямляющая струну, отсутствует. То есть вторая производная от смещения струны u по оси Oy равна нулю. Таким образом, граничные условия на концах струны будут соответствовать равенству нулю именно такой второй производной.

8.4.3. Колебания смещения в жесткой струне

Рассмотрим решение уравнения типа (8.98) в общем виде. Итак, обращаемся к уравнению:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - p \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + r \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 0, \quad (8.99)$$

где параметры p и r (по физическому смыслу, в соответствии с (8.96) и (8.97)) предполагаются действительными и положительными.

Положим граничные условия, как отсутствие выпрямляющей силы на концах струны, следующими:

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0; \quad (8.100)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0. \quad (8.101)$$

Решаем методом разделения переменных [207, стр. 83–88], то есть будем искать решение в виде:

$$U = X(x) \cdot T(t). \quad (8.102)$$

Подставляя (8.102) в исходное уравнение (8.99) и разделяя на $X T$, получаем:

$$\frac{T''}{T} - p \frac{X''}{X} + r \frac{X'''}{X} = 0. \quad (8.103)$$

Выполним разделение переменных и введем постоянную разделения μ , которую полагаем действительной:

$$\frac{T''}{T} = p \frac{X''}{X} - r \frac{X'''}{X} = -\mu^2. \quad (8.104)$$

Уравнение для T имеет вид:

$$T'' + \mu^2 T = 0. \quad (8.105)$$

Ищем решение в виде:

$$T = e^{\eta t}. \quad (8.106)$$

Подставляя в уравнение для T , получаем уравнение для η :

$$\eta^2 + \mu^2 = 0, \quad (8.107)$$

откуда находим:

$$\eta = \pm i\mu. \quad (8.108)$$

Полное решение уравнения (8.105) имеет вид:

$$T = A e^{i\mu t} + B e^{-i\mu t}. \quad (8.109)$$

В этом выражении параметр μ заранее не известен. В классическом методе разделения переменных [207, стр. 84–86, форм. (9), (13), (15)] этот параметр определяется через собственное решение уравнения для X с граничными условиями (8.100)–(8.101). Поэтому, следуя классической схеме, обратимся сначала к следующему из (8.104) уравнению для X :

$$p \frac{X''}{X} - r \frac{X'''}{X} = -\mu^2. \quad (8.110)$$

Разделяя на r , умножая на X и вводя более удобный порядок слагаемых, получаем:

$$X''' - \frac{p}{r} \cdot X'' - \frac{\mu^2}{r} \cdot X = 0. \quad (8.111)$$

Введем обозначения:

$$g = -\frac{p}{r}; \quad (8.112)$$

$$h = -\frac{\mu^2}{r}. \quad (8.113)$$

Можно видеть, что в силу положительности p и r параметры g и h являются отрицательными.

С этими обозначениями уравнение (8.111) принимает вид:

$$X''' + gX'' + hX = 0. \quad (8.114)$$

Ищем решение в виде:

$$X = e^{\lambda x}. \quad (8.115)$$

Подставляя это выражение в уравнение для X , получаем уравнение для λ :

$$\lambda^3 + g\lambda^2 + h = 0. \quad (8.116)$$

Это — уравнение третьей степени. В его решении будем следовать методике, приведенной в [3, стр. 63–71] (а также в [210, стр. 195–205]) и кратко рассмотренной здесь в разд. 2.9.1.

Прежде всего устраним член второй степени, для чего введем новую переменную:

$$y = \lambda - \varepsilon. \quad (8.117)$$

При этом:

$$\lambda = y + \varepsilon. \quad (8.118)$$

Общее уравнение третьей степени имеет вид (2.302):

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0. \quad (8.119)$$

Согласно (2.303), вводя замену переменной:

$$x = y + \varepsilon, \quad (8.120)$$

это уравнение можно привести к виду (2.310):

$$y^3 + ay + b = 0, \quad (8.121)$$

где, согласно (2.311) и (2.312), имеем:

$$a = \frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1^2}{3a_0^2}; \quad (8.122)$$

$$b = \frac{2a_1^3}{27a_0^3} - \frac{a_1a_2}{3a_0^2} + \frac{a_3}{a_0}. \quad (8.123)$$

При этом параметр ε определяется выражением:

$$\varepsilon = -\frac{a_1}{3a_0}. \quad (8.124)$$

Запишем уравнение (8.119) относительно λ :

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \quad (8.125)$$

Из сравнения этого уравнения с (8.116), можно видеть, что:

$$a_0 = 1; \quad (8.126)$$

$$a_1 = g; \quad (8.127)$$

$$a_2 = 0; \quad (8.128)$$

$$a_3 = h. \quad (8.129)$$

Подставляя эти параметры в (8.122)-(8.123), получаем:

$$a = -\frac{g^2}{3}; \quad (8.130)$$

$$b = \frac{2g^3 + 27h}{27}; \quad (8.131)$$

$$\varepsilon = -\frac{g}{3}. \quad (8.132)$$

Для дальнейшего рассмотрения будет необходима запись этих параметров через p и r , так что в соответствии с (8.112)–(8.113) получаем:

$$a = -\frac{p^2}{3r^2}; \quad (8.133)$$

$$b = -\frac{1}{27r^3}(2p^3 + 27\mu^2r^2); \quad (8.134)$$

$$\varepsilon = \frac{p}{3r}. \quad (8.135)$$

Итак, уравнение для y имеет вид (8.121):

$$y^3 + ay + b = 0, \quad (8.136)$$

где a и b определяются формулами (8.133) и (8.134).

Дискриминант этого уравнения равен (2.326):

$$D = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}. \quad (8.137)$$

Подставляя (8.130), (8.131) и выполняя упрощение, получаем:

$$D = \frac{h}{4 \cdot 27}(4g^3 + 27h). \quad (8.138)$$

С учетом (8.112) и (8.113), запишем это же выражение в виде:

$$D = \frac{\mu^2}{27 \cdot 4r^4}(4p^3 + 27\mu^2r^2). \quad (8.139)$$

Можно видеть, что в силу положительности p , а также четности степеней всех остальных параметров, дискриминант (8.138) или (8.139) в целом является положительным.

Положительность дискриминанта позволяет использовать для решения уравнения (8.136) метод Кардано [3, стр. 64–65].

Согласно этому методу, решение уравнения (8.136) имеет вид [3, форм. (2.171)–(2.173)]:

$$y = u + v, \quad (8.140)$$

где:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{D}}; \quad (8.141)$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{D}}, \quad (8.142)$$

причем b и D определяются формулами (8.131) и (8.138).

Итак, формулы (8.140)–(8.142) дают решение уравнения (8.136), имеющее вид (8.140). При этом решение уравнения для λ (8.116) определяется формулой (8.118). В общем случае уравнение (8.116), будучи третьей степени, имеет три решения [3, стр. 66, форм. (2.182)–(2.184)]:

$$\lambda_1 = \varepsilon + u + v; \quad (8.143)$$

$$\lambda_2 = \varepsilon + \omega u + \omega^2 v; \quad (8.144)$$

$$\lambda_3 = \varepsilon + \omega^2 u + \omega v, \quad (8.145)$$

где [3, форм. (2.175)–(2.176)]:

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; \quad (8.146)$$

$$\omega^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}. \quad (8.147)$$

Классический метод Кардано дает одно решение (8.143), являющееся действительным (в силу действительности p и r , а также положительности D), а решения (8.144) и (8.145) являются комплексными.

Подставляя (8.146)–(8.147) в (8.144)–(8.145), приводим (8.143)–(8.145) к виду:

$$\lambda_1 = \varepsilon + u + v; \quad (8.148)$$

$$\lambda_2 = \left[\varepsilon - \frac{1}{2}(u + v) \right] + i \frac{\sqrt{3}}{2}(u - v); \quad (8.149)$$

$$\lambda_3 = \left[\varepsilon - \frac{1}{2}(u + v) \right] - i \frac{\sqrt{3}}{2}(u - v). \quad (8.150)$$

Введем обозначения:

$$P = \varepsilon + u + v; \quad (8.151)$$

$$Q = \varepsilon - \frac{1}{2}(u + v); \quad (8.152)$$

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2}(u - v). \quad (8.153)$$

В силу действительности ε , u и v параметры P , Q и R также являются действительными.

При этом формулы (8.148)–(8.150) принимают вид:

$$\lambda_1 = P; \quad (8.154)$$

$$\lambda_2 = Q + iR; \quad (8.155)$$

$$\lambda_3 = Q - iR. \quad (8.156)$$

Таким образом, согласно (8.115), решение уравнения (8.114) имеет вид:

$$X = Ae^{Px} + Be^{(Q+iR)x} + Ce^{(Q-iR)x}, \quad (8.157)$$

где A , B , C — постоянные, которые должны быть определены из граничных условий.

Для рассматриваемой задачи о колебаниях струны наибольший интерес представляют комплексные решения, так как именно они обеспечивают периодичность функции смещения струны U по координате x . Граничных условий два, а постоянных — три, поэтому одну из них можно задать произвольно. Оставляя оба колебательных решения, положим $A = 0$. При этом решение принимает вид:

$$X = Be^{(Q+iR)x} + Ce^{(Q-iR)x}. \quad (8.158)$$

Для подстановки в граничные условия требуется вторая производная. Дифференцируя (8.158) по x два раза, получаем:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = (Q+iR)^2 Be^{(Q+iR)x} + (Q-iR)^2 Ce^{(Q-iR)x}. \quad (8.159)$$

Согласно (8.100), (8.101), граничные условия для X имеют вид:

$$\left. \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0; \quad (8.160)$$

$$\left. \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0. \quad (8.161)$$

Подставляя (8.159) в граничные условия (8.160), (8.161), получаем:

$$(Q+iR)^2 B + (Q-iR)^2 C = 0; \quad (8.162)$$

$$(Q+iR)^2 Be^{(Q+iR)l} + (Q-iR)^2 Ce^{(Q-iR)l} = 0. \quad (8.163)$$

Это — система уравнений для определения B и C . Условие нетривиальности решения требует равенства нулю ее детерминанта. Найдем этот детерминант:

$$\begin{aligned} D_0 &= \begin{vmatrix} (Q+iR)^2 & (Q-iR)^2 \\ (Q+iR)^2 e^{(Q+iR)l} & (Q-iR)^2 e^{(Q-iR)l} \end{vmatrix} = \\ &= (Q+iR)^2 (Q-iR)^2 e^{Ql} (e^{-iRl} - e^{iRl}) = \\ &= -2i(Q+iR)^2 (Q-iR)^2 e^{Ql} \sin(Rl). \end{aligned} \quad (8.164)$$

Из условия

$$D_0 = 0 \quad (8.165)$$

получаем:

$$\sin(Rl) = 0, \quad (8.166)$$

так что:

$$Rl = \pi n, \quad (8.167)$$

где $n = 1, 2, \dots$ — целое число.

Отсюда получаем:

$$R_n = \frac{\pi n}{l}, \quad (8.168)$$

где индекс « n » введен, чтобы подчеркнуть множественность собственных значений параметра R .

Условие нетривиальности решения $D_0 = 0$ означает, что уравнения (8.162) и (8.163) не являются независимыми, то есть одну из постоянных можно исключить. С помощью первого уравнения (8.162) выразим C через B :

$$C = -\frac{(Q + iR)^2}{(Q - iR)^2}B. \quad (8.169)$$

Подставляя это выражение во второе уравнение (8.163), можно убедиться, что оно приводится к виду:

$$B(e^{iRl} - e^{-iRl}) = 0, \quad (8.170)$$

то есть в силу равенства (8.166), эквивалентного условию $D_0 = 0$, удовлетворяется тождественно.

Подставим теперь (8.169) в решение (8.158):

$$X = Be^{(Q+iR)x} - \frac{(Q + iR)^2}{(Q - iR)^2}Be^{(Q-iR)x}. \quad (8.171)$$

В таком виде решение зависит только от одной постоянной B . Вынося общие множители за скобки, получаем:

$$X = Be^{Qx} \left[e^{iRx} - \frac{(Q + iR)^2}{(Q - iR)^2} e^{-iRx} \right]. \quad (8.172)$$

Чтобы выделить периодическое решение, надо показатель первой экспоненты (за скобками) положить равным нулю, то есть принять условие:

$$Q = 0. \quad (8.173)$$

В этом случае решение принимает вид:

$$X = B \left[e^{iRx} - \frac{(iR)^2}{(-iR)^2} e^{-iRx} \right] = B(e^{iRx} - e^{-iRx}) = 2iB \sin(Rx). \quad (8.174)$$

Подставляя значение R в соответствии с (8.168), получаем:

$$X_n = 2iB \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right), \quad (8.175)$$

откуда, учитывая произвольность амплитудного множителя и полагая его равным единице (что допустимо благодаря тому, что начальные условия в исходной задаче не заданы), получаем:

$$X_n = \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right). \quad (8.176)$$

8.4.4. Спектр резонансных частот колебаний жесткой струны

Итак, координатная часть исходной задачи (8.99)–(8.101) решена, то есть найдено распределение смещения струны по координате, определяемое собственными функциями X_n (8.176) при собственных значениях R_n (8.168). Обратимся теперь к нахождению параметра μ ,

согласно (8.109), определяющему зависимость решения полной задачи (8.99)–(8.101) от времени, в соответствии с полным решением вида (8.102).

Как показано выше, составляющая X полного решения (8.102) представляет собой дискретный набор собственных функций (8.176), определяемый набором собственных значений R_n , соответствующих целым числам n . Из этого следует, что параметр μ , присутствующий в уравнении (8.111), также будет иметь дискретные значения. То есть, подставляя решение (8.176) в уравнение (8.111) и разрешая полученное выражение относительно μ , можно получить дискретный ряд значений μ_n , соответствующих тем же целым числам n . Однако при этом получаются довольно сложные тригонометрические выкладки, поэтому обратимся к более простому приему.

Итак, выше на u и v получены два условия (8.153) и (8.173), с учетом явного вида выражения для Q (8.152), имеющие вид:

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2}(u - v), \quad (8.177)$$

$$\varepsilon - \frac{1}{2}(u + v) = 0, \quad (8.178)$$

где R определяется выражением (8.168):

$$R_n = \frac{\pi n}{l}, \quad (8.179)$$

а ε — выражением (8.132) с учетом (8.112):

$$\varepsilon = \frac{p}{3r}. \quad (8.180)$$

Из (8.178) выразим v :

$$v = 2\varepsilon - u. \quad (8.181)$$

Подставляя это выражение в (8.177) и находя u с учетом (8.112) и (8.113), получаем:

$$u = \frac{\sqrt{3} \pi n}{3l} + \frac{p}{3r}. \quad (8.182)$$

Введем вспомогательное обозначение:

$$G = \frac{\sqrt{3} \pi n}{3l} + \frac{p}{3r}. \quad (8.183)$$

При этом (8.182) принимает вид:

$$u = G. \quad (8.184)$$

Согласно (8.141), имеем:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{D}}, \quad (8.185)$$

где в соответствии с (8.131) и (8.138) с учетом (8.112) и (8.113), имеем:

$$-\frac{b}{2} = \frac{1}{2 \cdot 27r^3} (2p^3 + 27\mu^2 r^2); \quad (8.186)$$

$$\sqrt{D} = \frac{\mu}{6r^2} \sqrt{\frac{1}{3} (4p^3 + 27\mu^2 r^2)}. \quad (8.187)$$

Из условия (8.184) с учетом (8.185), получаем:

$$G^3 = -\frac{b}{2} + \sqrt{D}. \quad (8.188)$$

Подставляя в это выражение (8.186) и (8.187), раскрывая скобки, приводя подобные члены и выделяя μ^2 , получаем уравнение для μ в виде:

$$(27G^3 r^3 - p^3)^2 - 27^2 G^3 r^5 \mu^2 = 0. \quad (8.189)$$

Из этого уравнения находим:

$$\mu = \frac{27G^3 r^3 - p^3}{27Gr^2 \sqrt{Gr}}, \quad (8.190)$$

где G определяется выражением (8.183), имеющим дискретный характер, то есть:

$$G = G_n = \frac{\sqrt{3}\pi n}{3l} + \frac{p}{3r}, \quad (8.191)$$

где $n = 1, 2, \dots$ — целое число.

Таким образом, μ также имеет дискретный характер, определяемый параметром n . Непосредственная подстановка (8.183) позволяет представить эту зависимость μ от n в явном виде:

$$\mu_n = \frac{27 \left(\frac{\sqrt{3}\pi n}{3l} + \frac{p}{3r} \right)^3 r^3 - p^3}{27 \left(\frac{\sqrt{3}\pi n}{3l} + \frac{p}{3r} \right) r^2 \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}\pi n}{3l} + \frac{p}{3r} \right) r}}. \quad (8.192)$$

По физическому смыслу задачи в соответствии с зависимостью от времени вида (8.109) параметр μ представляет собой частоту свободных колебаний системы, описываемой уравнением (8.99). В общем случае частота должна быть положительной, поэтому представляет интерес проверить знак полученного выражения для μ при различных значениях параметра n .

Можно видеть, что выражение (8.190), а также следующее из него (8.192), содержат в числителе разность двух положительных слагаемых, а все остальные составляющие этих выражений положительны. Поэтому обратим внимание только на знак числителя выражения (8.190).

Из структуры выражения для G_n (8.191) видно, что в силу положительности p , l и r оно положительно при любом значении $n \geq 1$, причем его величина тем больше, чем большее значение принимает параметр n .

Рассмотрим сначала значение $n = 1$. При этом G принимает вид:

$$G \rightarrow G_1 = \frac{\sqrt{3}\pi}{3l} + \frac{p}{3r}. \quad (8.193)$$

Согласно сказанному выше, эта величина является положительной.

Пользуясь этим выражением, находим числитель дроби (8.190):

$$27G^3 r^3 - p^3 = \frac{3r^3}{l} \left(\frac{\sqrt{3}\pi^2}{l^2} + \frac{3\pi^2 p}{lr} + \frac{3p^2}{r^2} \right). \quad (8.194)$$

Можно видеть, что в силу положительности p , l и r , а также G , это выражение положительно. Увеличение параметра n ($n > 1$) может привести только к его увеличению, откуда следует, что величина μ_n , определяющая частоту собственных колебаний рассматриваемой системы при любом значении n , всегда является положительной.

Таким образом, выражение (8.192) представляет собой набор частот, определяемых волновым числом (8.168), то есть дисперсионное соотношение, дискретность которого задается последовательным рядом целых значений n . Это выражение определяет сетку резонансных частот, соответствующих волновым числам вида (8.168) при заданном значении n . Заметим, что здесь соотношение (8.192) получилось дискретным по той причине, что для его вывода использовался дискретный ряд волновых чисел (8.168), определяемый граничными условиями (8.160)–(8.161).

Для получения полного дисперсионного соотношения в непрерывном виде следует решение (8.158) подставить непосредственно в уравнение (8.114), где параметр h будет определяться через μ в соответствии с (8.113). Следующим шагом должно быть разрешение полученного соотношения относительно μ . Можно видеть, что степень такого уравнения будет определяться структурой параметра D , определяемого через μ по формуле (8.139). Далее этот параметр войдет под знаком корня шестой степени в выражения (8.141) и (8.142), из которых затем будут получены выражения (8.152) и (8.153), входящие в решение (8.158) в виде показателей экспонент. Далее, при подстановке (8.158) в (8.114) за счет третьей производной эти выражения будут возведены в третью степень, что и даст, в конечном счете, уравнение для μ . Можно видеть, что такое решение будет, по меньшей мере, крайне громоздким, если вообще разрешимым аналитически, что тоже не ясно. Поэтому в рамках настоящей работы ограничимся выражением (8.192), определяющим частоту резонансных колебаний волны, длина которой определяется волновым числом (8.168).

8.4.5. Замечание о роли интеграла перекрытия в задаче о струне

В разд. 8.4.3 получено решение задачи о колебаниях жесткой струны в виде (8.176):

$$X_n = \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right). \quad (8.195)$$

Можно видеть, что это решение по форме совпадает с таковым, полученным для цепочки спинов в модели поверхностной анизотро-

пии (8.32) или (8.44). То есть и здесь граничные условия требуют укладывания по длине струны целого числа полувольт. Таким образом, далее применим тот же метод вычисления интеграла перекрытия, что реализован в разд. 8.3.2. Возбуждение струны при этом должно осуществляться однородным по координате вдоль струны периодическим во времени воздействием. При этом опять будут выделены только те решения, которые требуют выполнения соотношения (8.51), то есть решение будет иметь вид, подобный (8.52). Принципиальное отличие от модели поверхностной анизотропии состоит в выборе резонансных частот таких колебаний. Так, в модели поверхностной анизотропии частоты определяются соотношением (8.53), а в модели жесткой струны соотношением (8.192), где n также должно быть заменено нечетным числом, например $n = 2m - 1$, где m — целое число (здесь в отличие от (8.51) вместо p использовано обозначение m , чтобы избежать путаницы с коэффициентом при второй производной в уравнении (8.99)).

Таким образом, принципиальное различие между моделью жесткой струны и моделью поверхностной анизотропии состоит только в получении резонансных частот возбуждаемых колебаний. Относительно же распределения колебаний по длине струны или по толщине магнитной пленки различия нет. То есть вычисление интеграла перекрытия в обоих случаях будет аналогичным. Поэтому в рамках настоящей работы мы не будем вычислять интеграл перекрытия для жесткой струны, а перейдем далее к рассмотрению магнитной пленки на основании модели жесткой цепочки спинов.

8.5. Модель спиновой цепочки

В работе [72] основные рассуждения выполнены на модели цепочки спинов, перпендикулярной плоскости пленки и проходящей от одной ее поверхности до другой. Примем ту же модель, то есть положим распределение намагниченности вдоль осей Ox и Oy однородным, а неоднородной по оси Oz будем считать поперечную составляющую намагниченности. Понятие «поверхностной анизотропии», введенное в работе [72], далее использовать не будем.

8.5.1. Эффективные поля, действующие на цепочку спинов в магнитной пленке

Положим, что на намагниченность внутри пленки действует суммарное поле:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_M + \mathbf{h} + \mathbf{H}_{ex}, \quad (8.196)$$

где: \mathbf{H}_0 — внешнее поле, перпендикулярное плоскости пленки;

$$\mathbf{H}_M = -4\pi\mathbf{M}_0 \quad (8.197)$$

— поле размагничивания пленки относительно постоянного поля; \mathbf{h} — переменное поле; \mathbf{H}_{ex} — поле неоднородного обменного взаимодействия.

Введем единое обозначение для постоянного поля, перпендикулярного плоскости пленки:

$$\mathbf{H}_N = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_M = \mathbf{H}_0 - 4\pi\mathbf{M}_0, \quad (8.198)$$

которое следует из известной формулы Киттеля [41, стр. 54, форм. (1.4.20)], [42, стр. 54, форм. (1.4.20)]. Это поле имеет только одну компоненту вдоль оси Oz :

$$H_N = H_0 - 4\pi M_0. \quad (8.199)$$

Положим, что переменное поле приложено в плоскости пленки, так что имеет вид:

$$\mathbf{h} = \{h_x, h_y, 0\}. \quad (8.200)$$

Поле \mathbf{H}_{ex} найдем из плотности энергии обменного взаимодействия [4, стр. 147, форм. (7.18)]:

$$U_{ex} = \frac{q}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial M_i}{\partial x_j} \right)^2 = \frac{q}{2} \left\{ \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_y}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial M_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_z}{\partial z} \right)^2 \right\}. \quad (8.201)$$

Общее выражение для эффективного поля имеет вид [41, стр. 68], [37, стр. 42] (или здесь — формула (2.3) в разд. 2.2.1):

$$\mathbf{H}_e = -\frac{\partial U_e}{\partial \mathbf{M}} + \sum_{p=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_p} \left[\frac{\partial U_e}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_p} \right)} \right]. \quad (8.202)$$

Для обменного поля плотность энергии (8.201) определяется только производными от намагниченности по координатам, поэтому первое слагаемое в формуле (8.202) равно нулю. Раскрывая второе слагаемое по процедуре, описанной в [4, стр. 147–150], получаем:

$$\mathbf{H}_{ex} = q \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{M}. \quad (8.203)$$

При заданной геометрии поля по осям Ox и Oy однородные, так что производные по этим координатам равны нулю. В результате получаем компоненты поля обменного взаимодействия в виде:

$$(H_{ex})_x = q \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2}, \quad (8.204)$$

$$(H_{ex})_y = q \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2}, \quad (8.205)$$

$$(H_{ex})_z = q \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2}. \quad (8.206)$$

8.5.2. Механизм выпрямления спиновой цепочки

Отклонение спинов внутри цепочки от оси Oz приводит к возникновению сил, стремящихся уменьшить такое отклонение.

Возможны два механизма, обеспечивающие такое уменьшение.

Прежде всего следует отметить дипольный механизм, связанный с воздействием постоянного поля. Такое поле стремится повернуть спин к своему направлению, то есть действует на всю цепочку в целом, не создавая в ней противодействия изгибу. Сила его воздействия определяется магнитным дипольным взаимодействием, которое значительно меньше обменного.

Главным фактором, обеспечивающим жесткость спиновой цепочки, является возникновение сильного обменного поля при небольшом ее искривлении. Этот фактор действует на цепочку, уже ориентированную дипольным полем, заставляя все спины выстраиваться друг за другом в одну линию, то есть выпрямляет цепочку, что эквивалентно возрастанию ее жесткости.

Схема образования силы, вызывающей такое выстраивание, показана на рис. 8.4.

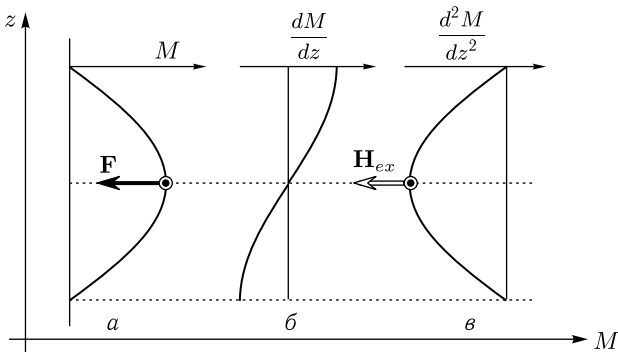


Рис. 8.4. Схема образования обменной силы, выпрямляющей спиновую цепочку: a — зависимость поперечной компоненты намагниченности $M_{x,y}$ от координаты z вдоль цепочки; b — зависимость первой производной поперечной компоненты намагниченности $M_{x,y}$ по координате z от той же координаты z вдоль цепочки; v — зависимость второй производной поперечной компоненты намагниченности $M_{x,y}$ по координате z от той же координаты z вдоль цепочки

Здесь по вертикальной оси отложена координата z , в соответствии с общей геометрией, перпендикулярная плоскости пленки. На трех эпюрах показано отклонение намагниченности от этой оси (a), первая производная от величины такого отклонения (b) и вторая производная от того же отклонения (v). Согласно (8.204)–(8.206), вторая производная компоненты намагниченности, перпендикулярной оси цепочки, вызывает сильное обменное поле \vec{H}_{ex} , направление которого

противоположно направлению этой компоненты (рис. 8.4, в). Это поле создает силу \mathbf{F} , действующую на отклоненную намагниченность, стремясь вернуть ее на место (рис. 8.4, а). Таким образом, жесткость спиновой цепочки обеспечивается второй производной от компоненты намагниченности, перпендикулярной оси этой цепочки.

Из сравнения рис. 8.4 с рис. 8.2 можно видеть, что механизм образования выпрямляющей силы для спиновой цепочки с математической стороны тождественен механизму выпрямления жесткой струны. То есть в обоих случаях выпрямляющая сила пропорциональна второй производной по координате вдоль оси от переменной, перпендикулярной этой оси. Граничные условия для жесткой струны состоят в равенстве нулю выпрямляющей силы на концах струны. Можно считать, что и в задаче о жесткой спиновой цепочке граничные условия также будут состоять в отсутствии выпрямляющей силы на концах цепочки. Поскольку, как видно из рис. 8.4, выпрямляющая сила \mathbf{F} пропорциональна полю обменного взаимодействия \mathbf{H}_{ex} , то будем считать далее, что граничные условия на концах спиновой цепочки состоят в равенстве нулю обменного поля вида (8.204)–(8.206) или в линейном приближении (8.204)–(8.205).

8.5.3. Прецессия намагниченности спиновой цепочки

Будем решать задачу в линейном приближении, то есть положим, что в принятой геометрии вектор намагниченности имеет вид:

$$\mathbf{M} = \{m_x, m_y, M_0\}, \quad (8.207)$$

где $m_{x,y} \ll M_0$. При этом отличными от нуля остаются только две компоненты обменного поля:

$$(H_{ex})_x = q \frac{\partial^2 m_x}{\partial z^2}; \quad (8.208)$$

$$(H_{ex})_y = q \frac{\partial^2 m_y}{\partial z^2}. \quad (8.209)$$

Раскрывая уравнение Ландау–Лифшица [1, стр. 41, форм. (2.28), (2.29)] (здесь — формула (2.1) в разд. 2.2.1) по координатам, получаем:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma(M_y H_z - M_z H_y); \quad (8.210)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\gamma(M_z H_x - M_x H_z). \quad (8.211)$$

Рассмотрим сначала свободные колебания намагниченность, то есть положим переменное поле равным нулю $\mathbf{h} = 0$.

Подставляя в (8.210)–(8.211) компоненты намагниченности и поля, получаем:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma \left(m_y H_N - M_0 q \frac{\partial^2 m_y}{\partial z^2} \right); \quad (8.212)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\gamma \left(M_0 q \frac{\partial^2 m_x}{\partial z^2} - m_x H_N \right). \quad (8.213)$$

Исключим из первого уравнения m_y , для чего сначала продифференцируем (8.212) по t :

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} = -\gamma \left(H_N \left(\frac{\partial m_y}{\partial t} \right) - M_0 q \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial m_y}{\partial t} \right) \right), \quad (8.214)$$

поле чего подставим в это выражение производную $\partial m_y / \partial t$ в соответствии с (8.213):

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} = -\gamma \left\{ H_N \left[-\gamma \left(M_0 q \frac{\partial^2 m_x}{\partial z^2} - m_x H_N \right) \right] - M_0 q \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[-\gamma \left(M_0 q \frac{\partial^2 m_x}{\partial z^2} - m_x H_N \right) \right] \right\}. \quad (8.215)$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} = -\gamma^2 M_0^2 q^2 \frac{\partial^4 m_x}{\partial z^4} + 2\gamma^2 H_N M_0 q \frac{\partial^2 m_x}{\partial z^2} - \gamma^2 H_N^2 m_x. \quad (8.216)$$

Это уравнение — волнового типа. Его возможное решение имеет вид:

$$m_x = m_0 \cdot e^{i(\omega t - kz)}. \quad (8.217)$$

Подставляя это решение в уравнение, сокращая общий множитель и меняя порядок слагаемых, получаем:

$$\omega^2 = \gamma^2 H_N^2 + 2\gamma^2 H_N M_0 q k^2 + \gamma^2 M_0^2 q^2 k^4. \quad (8.218)$$

Правая часть этого выражения является полным квадратом. Извлекая квадратный корень, получаем:

$$\omega = \gamma H_N + \gamma M_0 q k^2. \quad (8.219)$$

Это выражение с точностью до обозначения (8.198) представляет собой известный квадратичный закон дисперсии обменных волн [41, стр. 378, форм. (8.1.15) с учетом (8.1.8)], [42, стр. 199, форм. (7.6) с учетом (7.5)].

8.5.4. Решение с учетом граничных условий

Будем полагать, что цепочка спинов, перпендикулярная плоскости пленки, проходит через всю ее толщ, причем на всем своем протяжении стремится оставаться прямой. Такое стремление к выпрямлению обеспечивается обменным полем. На поверхностях пленки, где цепочка заканчивается, обменное поле, как выпрямляющая сила, перестает действовать, так как со стороны свободного пространства спинов далее нет. Поэтому можно считать, что на поверхностях пленки обменное поле обращается в нуль. Таким образом, граничные условия можно записать в виде:

$$(H_{ex})_x|_{z=0} = 0; \quad (8.220)$$

$$(H_{ex})_x|_{z=L} = 0. \quad (8.221)$$

Учитывая (8.208), (8.209), получаем:

$$\left. \frac{\partial^2 m_x}{\partial z^2} \right|_{z=0} = 0; \quad (8.222)$$

$$\left. \frac{\partial^2 m_x}{\partial z^2} \right|_{z=L} = 0. \quad (8.223)$$

Запишем решение (8.217) в эквивалентном виде:

$$m_x = A \cos(kz) + B \sin(kz), \quad (8.224)$$

где A и B — коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий.

Дифференцируя, находим:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial z^2} = -k^2 [A \cos(kz) + B \sin(kz)]. \quad (8.225)$$

Подставляя (8.225) в первое граничное условие (при $z = 0$), получаем:

$$-qk^2 A = 0, \quad (8.226)$$

то есть $A = 0$.

Подставляя во второе граничное условие (при $z = L$), получаем:

$$-qk^2 B \sin(kL) = 0, \quad (8.227)$$

откуда

$$kL = \pi n \quad (8.228)$$

или

$$k = \frac{\pi n}{L}, \quad (8.229)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$.

Таким образом, в соответствии с (8.224), получаем решение в окончательном виде:

$$m_x = m_{x0} \sin\left(\frac{\pi n}{L} z\right), \quad (8.230)$$

где m_{x0} — амплитуда, определяемая внешним возбуждением.

Решение вида (8.230) получено для компоненты намагниченности вдоль оси Ox . Нетрудно убедиться, что в силу симметрии задачи относительно компонент m_x и m_y , для другой компоненты m_y получается решение такого же вида. При этом из системы (8.212)–(8.213) надо исключить не m_y , а m_x , то есть продифференцировать по времени не (8.212), а (8.213), после чего подставить в полученное выражение (8.212). Граничные условия (8.222), (8.223) также должны быть написаны не для m_x , а для m_y . В остальном решение полностью аналогично и приводит к такому же выражению (8.230) с заменой индекса « x » на индекс « y ».

8.5.5. Интеграл перекрытия

Рассмотрим теперь, в какой степени возможно возбуждение полученных колебаний намагниченности однородным переменным полем вида (8.200), приложенным в плоскости пленки.

Можно видеть, что полученное решение (8.230) с точностью до амплитудного коэффициента совпадает с решением (8.32), полученным на основе модели поверхностной анизотропии.

Дальнейшие вычисления полностью аналогичны приведенным выше (8.41)–(8.45) и здесь не приводятся ввиду их тождественности. В результате получается интеграл перекрытия вида (8.46):

$$J_S = \int_0^L [m_x(z) \cdot h_x + m_y(z) \cdot h_y] dz. \quad (8.231)$$

С учетом (8.230), плотность энергии взаимодействия намагниченности с переменным полем, определяющая эффективность возбуждения, принимает вид:

$$U_H = -\{m_{x0}h_x + m_{y0}h_y\} \cdot \int_0^L \sin\left(\frac{\pi n}{L}z\right) dz. \quad (8.232)$$

Введем обозначение:

$$J_{Sn} = \int_0^L \sin\left(\frac{\pi n}{L}z\right) dz. \quad (8.233)$$

Выполняя интегрирование, получаем:

$$J_{Sn} = \begin{cases} \frac{2L}{\pi n} \rightarrow n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 \rightarrow n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (8.234)$$

Таким образом, взаимодействие имеет место при нечетных значениях n и отсутствует при четных.

Аналогично (8.49), формулу (8.234) можно записать в обобщенном виде:

$$J_{Sp} = \frac{2L}{\pi(2p-1)}, \quad (8.235)$$

где $p = 1, 2, 3, \dots$

Таким образом, плотность энергии взаимодействия намагниченности с переменным полем, определяющая эффективность возбуждения, имеет вид:

$$U_H = -J_{Sp} \{m_{x0}h_x + m_{y0}h_y\}, \quad (8.236)$$

или с учетом (8.235):

$$U_H = -\frac{2L}{\pi(2p-1)} \{m_{x0}h_x + m_{y0}h_y\}. \quad (8.237)$$

Таким образом, эффективно будут возбуждаться моды с волновыми числами вида:

$$k_p = \frac{\pi(2p-1)}{L}, \quad (8.238)$$

где $p = 1, 2, 3, \dots$.

Спектр частот таких мод, в соответствии с (8.219), имеет вид:

$$\omega_p = \gamma H_N + \gamma M_0 q \left[\frac{\pi(2p-1)}{L} \right]^2. \quad (8.239)$$

Можно видеть, что выражение (8.237) полностью совпадает с полученным по модели поверхностной анизотропии выражением (8.50), однако здесь (8.237) получено без привлечения такой модели.

В силу тождественности формул (8.50) и (8.237), спектр колебаний намагниченности, определяемый формулой (8.237) будет тем же самым, что и спектр, определяемый формулой (8.50), так что с той же степенью достоверности сможет описать экспериментальные результаты, приведенные в работе [71].

Замечание. Заметим, однако, что привлечение предложенной модели для интерпретации экспериментальных результатов, использующих развитие модели поверхностной анизотропии (разд. 8.6), требует более подробного рассмотрения, возможно, на основе комбинации обеих моделей, то есть с привлечением обобщенного граничного условия вида:

$$\alpha m + \beta \frac{\partial m}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 m}{\partial z^2} \Big|_{z=0,L} = 0. \quad (8.240)$$

Для оценки реалистичности подобного условия, по-видимому, потребуется более подробное исследование свойств поверхности, в первую очередь, в эксперименте. Можно полагать, что довольно полезным здесь будет предварительное изучение механической аналогии со струной, сопротивляющейся изгибу, подобное приведенному в разд. 8.4.

8.6. Некоторые дополнительные замечания

В рамках настоящей работы, по сути дела, решены две задачи: первая — колебания струны, сопротивляющейся изгибу и вторая — колебания спиновой цепочки, также сопротивляющейся изгибу.

В обоих случаях в качестве граничных условий используется равенство нулю второй производной по координате от основной переменной, причем решение получается в виде синуса, что обеспечивает ненулевое значение интеграла перекрытия.

Полученный так синус предполагает нулевые значения переменной на обеих поверхностях, что совпадает с моделью закрепления.

Однако при начальной формулировке обеих приведенных здесь задач граничного условия о равенстве нулю переменной (смещения струны или амплитуды намагниченности) на поверхностях нет, поэтому

такая переменная может принимать какие угодно значения, определяемые другими конкретными условиями задачи.

Например, в задаче о жесткой струне в процессе колебаний могут оставаться на месте не концы струны, а какие-то симметрично расположенные точки относительно ее центра или даже сам центр. При этом выход синуса на концы обеспечит колебания этих концов во времени с частотой, определяемой резонансными условиями, а амплитуда таких колебаний во времени будет оставаться постоянной. В этом случае ни сама функция, ни ее первая производная по координате нулю равняться не будут, то есть ни о каком закреплении речь не идет.

Заметим, что определенную возможность в этом плане предоставляет тот факт, что волновое уравнение (8.114) разрешается через уравнение третьей степени (8.116), имеющее три решения, два из которых (8.155) и (8.156), будучи комплексными, дают синус, а третье (8.154) является действительным и обеспечивает смещение этого синуса, зависящее от координаты x вдоль струны по экспоненциальному закону вида $Ae^{px}(Px)$. Параметр P дается формулой (8.151), в свою очередь определяемой коэффициентами исходного уравнения (8.99), а величина постоянного коэффициента A должна быть определена из каких-то других условий, налагаемых конкретной задачей. В настоящем рассмотрении положено $A = 0$, поэтому решение и получилось в виде синуса с нулями на концах. Однако, как сказано выше, такие нули никак не означают какого-либо «закрепления». Таким образом, при надлежащем выборе P и коэффициента A (где $A \neq 0$) конечные точки струны вполне могут колебаться во времени, а первая производная от конфигурации струны по координате также будет задаваться выбором этих параметров.

С другой стороны, полные граничные условия задачи, содержащие условия (8.100), (8.101) в виде одного из слагаемых, могут быть такими, что экспоненциальная зависимость, соответствующая первому слагаемому выражения (8.157), не даст возможности удовлетворить таким условиям. В таком случае решение следует искать в виде суммы двух функций, одна из которых удовлетворяет условиям (8.100) и (8.101), а другая — добавкам к этим условиям, содержащимся в полных граничных условиях. При этом обе задачи могут быть решены независимо, а полное решение будет суперпозицией решения этих задач (возможно, в виде ряда по собственным функциям основной задачи, то есть по синусам). Иными словами, следует использовать прием разделения задач подобного типа, реализацию которого можно найти в работе [237], посвященной возбуждению мощного гиперзвука. Применительно к струне в общем виде этот прием описан в учебной монографии [207, стр. 103].

Сказанное выше относится к задаче о колебаниях жесткой струны, где алгебраическое уравнение, разрешающее соответствующее дифференциальное, имеет третий порядок. В задаче о колебаниях жесткой цепочки спинов уравнение, подобное (8.14), имеет вид (8.216) (с учетом

зависимости от времени вида $e^{i\omega t}$), которое содержит вторую и четвертую производные по координате. Поэтому поиск решения в виде (8.115) приводит к биквадратному относительно k уравнению (8.218), которое дает сразу дисперсионное соотношение (8.219).

В то же время, подстановка решения вида (8.224), представляющего собой развернутый вид решения (8.115), в граничные условия (8.222), (8.223) дает сразу значение для k вида (8.229), которое и обеспечивает, в конечном счете, желаемый синус (8.230). Таким образом, поскольку разрешающее алгебраическое уравнение имеет здесь лишь второй порядок вместо третьего, решение в виде экспоненты с действительным показателем типа первого слагаемого в формуле (8.157), здесь отсутствует.

Тем не менее, получаемый синус (8.230) и здесь никак не означает «закрепление» спинов. То есть концы цепочки спинов здесь являются в известной степени свободными и только подчиняются граничным условиям (8.222), (8.223). Поэтому и здесь могут быть заданы более полные граничные условия, содержащие как саму намагниченность, так и ее первую производную. В этом случае, как и в случае жесткой струны, следует идти по пути разделения задачи на две с последующим решением их по отдельности. То есть использовать тот же прием, что применен в работах [237, 264, 265] и схематично описан в монографии [207, стр. 103].

Заметим, что на этом пути возможно введение комбинированных граничных условий типа предложенных выше (8.240). Более подробное рассмотрение всего класса подобных задач можно полагать в качестве предмета для отдельного исследования.

Выводы по главе 8

Главным результатом настоящей работы является интерпретация возбуждения спин-волнового резонанса однородным переменным полем в случае отсутствия поверхностной анизотропии за счет жесткости спиновой цепочки, обусловленной неоднородным обменным взаимодействием.

Основные вопросы, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Выполнен краткий обзор литературы, касающейся возбуждения спин-волнового резонанса в тонких магнитных пленках однородным переменным полем, а также интерпретации такого возбуждения на основе модели поверхностной анизотропии. Отмечена неполнота модели, состоящая в отсутствии учета обусловленного неоднородным обменным взаимодействием жесткого характера изгибных колебаний спинов по толщине пленки.

2. В рамках геометрии нормально намагниченной пленки рассмотрен классический вариант возбуждения спин-волнового резонанса. На основе рассмотрения цепочки спинов, связанных обменным взаи-

модействием, решена граничная задача о колебаниях намагниченности внутри пленки с учетом граничных условий, состоящих в равенстве нулю амплитуды колебаний на поверхностях пленки. Отмечено, что такие граничные условия соответствуют закреплению спинов на поверхностях пленки. Рассчитан интеграл перекрытия между колебаниями намагниченности и переменного поля, приложенного в плоскости пленки. На основе анализа интеграла перекрытия показано, что возможно возбуждение только таких мод, при которых по толщине пленки укладывается нечетное число полуволн колебаний.

3. Отмечена недостаточность модели поверхностной анизотропии для интерпретации ряда экспериментальных результатов, в том числе для спектров возбуждения спин-волновых резонансов и чрезмерно большой величины поверхностной анизотропии, на порядок и более превышающей анизотропию в объеме пленки. В качестве развития модели поверхностной анизотропии приведены граничные условия, учитывающие не только жесткое закрепление, но также и частичное высвобождение спинов и их упругое закрепление. Отмечено, что во всех вариантах усовершенствования модели учет жесткости спиновой цепочки за счет обменного взаимодействия отсутствует.

4. Предложена модель колебаний спиновой цепочки, основанная на учете жесткости такой цепочки без обращения к понятию поверхностной анизотропии. В качестве упрощенной аналогии приведена механическая модель колебаний жесткой струны. Рассмотрено проявление жесткости струны, состоящее в возникновении выпрямляющей силы, противодействующей изгибу. Показано, что выпрямляющая сила пропорциональна второй производной от смещения струны по координате вдоль основного ее направления. Получено уравнение колебаний струны волнового типа, содержащее вторые производные по координате и времени в сочетании с производной третьего порядка от смещения струны по координате. Отмечено, что производная третьего порядка как раз описывает выпрямляющую силу, препятствующую изгибу струны. Полученное уравнение третьего порядка решено методом разделения переменных.

5. Предложены граничные условия, состоящие в отсутствии выпрямляющей силы, то есть в равенстве нулю второй производной от смещения по координате на концах струны. Показано, что учет этих условий приводит к решению, представляющему собой дискретный набор мод, подобный таковому для струны с закрепленными концами, причем главное отличие состоит в отсутствии закрепления. Получен спектр резонансных мод колебаний струны, выявлен его дискретный характер, рассмотрена схема получения полного дисперсионного соотношения. Отмечено, что рассмотрение интеграла перекрытия приводит к отбору резонансных колебаний, соответствующих укладыванию по длине струны нечетного числа полуволн.

6. Результаты, полученные на механической модели, применены для анализа колебаний цепочки спинов, связанных обменным взаимодействием, в нормально намагниченной тонкой пленке. Показано,

что поле неоднородного обмена пропорционально второй производной от поперечной составляющей намагниченности по координате вдоль цепочки. Установлено, что такое поле является механизмом возникновения силы, выпрямляющей спиновую цепочку при ее изгибе.

7. Предложены граничные условия, состоящие в отсутствии выпрямляющей силы, то есть в равенстве нулю на поверхностях пленки второй производной от поперечной намагниченности по координате вдоль цепочки. Рассмотрена прецессия намагниченности внутри пленки, получен тензор восприимчивости, описывающий спиновые колебания поперечной намагниченности по толщине пленки. На основе учета граничных условий, установлен дискретный характер мод колебаний, подобный таковому, полученному по модели поверхностной анизотропии, причем главное отличие состоит в отсутствии закрепления спинов на поверхностях пленки. Рассмотрен интеграл перекрытия намагниченности в таких модах с переменным полем, приложенным в плоскости пленки. Показано, что интеграл перекрытия приводит к отбору мод, соответствующих укладыванию нечетного числа полуволн по толщине пленки. Получен спектр частот колебаний, соответствующих модам, отобранным на основе интеграла перекрытия.

8. Отмечено, что предложенная модель жесткой цепочки спинов описывает те же экспериментальные результаты по возбуждению спин-волнового резонанса однородным переменным полем, что и модель поверхностной анизотропии, однако без использования такой модели, то есть в отсутствие поверхностной анизотропии как таковой. Приведены некоторые рекомендации по дальнейшему развитию модели жесткой цепочки спинов, в том числе возможной ее комбинации с моделью поверхностной анизотропии.

Глава 9

ВОПРОСЫ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПРИМЕНЕНИЯ ОБМЕННЫХ ВОЛН

В этой главе приведем некоторые соображения касающиеся корректности классических представлений о волнах обменного характера, требующие дальнейшей разработки, а также отметим видимые авторам на настоящий момент возможные практические применения обменных волн.

9.1. Некоторые вопросы, требующие дальнейшей разработки

Проведенное рассмотрение поверхностной магнитостатической волны с учетом обмена и динамического размагничивания выполнено для параллельно-перпендикулярной геометрии классической задачи Дэймона–Эшбаха, то есть для случая касательно намагниченной пластины, в которой волна распространяется в направлении, перпендикулярном направлению постоянного поля. При этом было показано, что, как и в классическом случае, поперечное волновое число содержит действительную составляющую, абсолютная величина которой близка к абсолютной величине действительной составляющей продольного волнового числа.

Действительная составляющая поперечного волнового числа подразумевает спад или нарастание амплитуды волны, то есть динамического потенциала, по экспоненте в направлении, перпендикулярном вектору продольного волнового числа. Для пластины такое обстоятельство означает, что амплитуда волны внутри пластины, имея конечное значение на поверхности пластины, спадает в ее глубину по экспоненциальному закону. Мнимая составляющая поперечного волнового числа подразумевает лишь, что такая спадающая экспонента промодулирована синусоидой постоянной амплитуды. Однако для безграничного пространства такое решение не подходит, так как в этом случае амплитуда волны по тому или другому направлению координаты, перпендикулярной направлению поля, должна была бы нарастать до бесконечности. В случае двух решений было бы две таких волны, нарастающие в противоположных направлениях. То есть в безграничной среде поперечное волновое число должно иметь чисто мнимый характер, обеспечивающий не экспоненциальную, а периодическую

синусоидальную зависимость потенциала от перпендикулярной координаты.

Причиной появления действительной составляющей поперечного волнового числа, как в классическом случае, так и при учете обмена, является решение уравнения Уокера, получающееся для магнитной среды из классического уравнения электродинамики, требующего, чтобы дивергенция вектора магнитной индукции равнялась нулю. По этому параметру уравнения Уокера в классическом случае и при учете обмена и динамического размагничивания полностью эквивалентны. Учет обмена и размагничивания дает смешанную производную в уравнении Уокера, которая в конечном счете приводит к мнимой части поперечного волнового числа в дополнение к действительной. По отношению к безграничной среде мнимая составляющая дает лишь синусоидальную зависимость, к уходу на бесконечность не приводящую. То есть в отношении корректности важным параметром является именно действительная часть поперечного волнового числа.

Обращаясь к классической задаче Дэймона–Эшбаха, замечаем, что поперечное волновое число является действительным только при распространении волны перпендикулярно направлению поля. В случае распространения волны вдоль направления поля поперечное волновое число является мнимым, то есть перпендикулярно плоскости пластины распространяется синусоидальная волна, для которой наличие двух поверхностей приводит к многомодовому режиму. Можно полагать, что и в случае учета обмена и динамического размагничивания поперечное волновое число также будет полностью мнимым, то есть в случае безграничного пространства вдоль направления поля будет распространяться волна, амплитуда которой будет сохраняться постоянной.

Из сказанного следует, что в безграничной среде распространение волны в направлении, перпендикулярном направлению поля, физически не реализуется, тогда как при распространении волны вдоль направления поля такая реализация становится вполне возможной.

В этом плане представляет значительный интерес рассмотреть распространение волны не только вдоль и поперек направления поля, но и под произвольным углом к полю, где может проявиться сектор углов отсечки, а также неколлинеарность фазовой и групповой скоростей, подобная имеющей место для классической задачи Дэймона–Эшбаха.

Замечание. Следует заметить, что приведенный здесь вывод о невозможности реализуемости распространения обменной волны в направлении, перпендикулярном направлению поля, находится в противоречии с классически принятым положением о возможности распространения обменной волны, как вдоль поля, так и под углом в 90 градусов по отношению к нему (см. напр. [42, стр. 201, рис. 7.1]). Можно полагать, что такое различие обусловлено тем фактом, что в классической трактовке такой вывод сделан на основании закона дисперсии обменной волны в виде произведения константы обмена на квадрат волнового числа, по-

лученного без учета равенства нулю дивергенции магнитной индукции, то есть без последовательного рассмотрения уравнения Уокера, обеспечивающего в конечном счете допустимость распространения волны только в пределах определенных углов отсечки. Можно полагать, что проведенное здесь рассмотрение, дающее более сложный закон дисперсии, является более корректным, то есть вносит некоторые коррективы в классически принятую трактовку.

В заключение настоящего раздела заметим, что приведенные здесь соображения носят в первую очередь качественный характер, так что для подтверждения их правоты, коррекции или опровержения необходима более подробная количественная проверка.

В этом свете проделанная работа ставит на повестку дня две первостепенные задачи:

- первая — распространение волны с учетом обмена и размагничивания в касательно намагниченной пластине в произвольном направлении относительно поля;
- вторая — распространение волны в безграничном пространстве в произвольном направлении относительно поля.

При решении обеих этих задач, как и при более подробном рассмотрении задач, решенных в настоящей монографии в целом, следует полностью исследовать распределение потенциала и полей внутри и вне пластины, а также и в свободном пространстве.

9.2. Возможные применения обменных волн

Остановимся вкратце на некоторых возможных применениях обменных волн.

Прежде всего следует отметить традиционные применения для создания устройств обработки аналоговой информации. Такие устройства на дипольных волнах активно исследовались шестидесятих годах XX века, в первую очередь применительно к малогабаритным линиям задержки. Подробное обобщение полученных результатов можно найти в обзорах [98, 109, 110, 147, 212]. Составлявшие основу таких устройств дипольные волны имели длину в десятки и сотни микрометров, так что волноведущая часть устройства имела габариты порядка единиц сантиметров. При этом рабочие поля устройств составляли порядка 100–1000 Э, а диапазон частот — 1–5 ГГц.

Обменные волны при таких же полях и диапазонах частот имеют длину в единицы и доли микрометра, так что размер волноведущей части может быть уменьшен на два-три порядка. Квадратичный характер дисперсии позволяет при тех же достаточно небольших полях достичь значительно более высоких частот, вплоть до десятков–сотен ГГц и даже единиц ТГц, как это можно видеть, например, из приведенного выше рис. 6.16. Заметим, что применение традиционного ферромагнитного резонанса на таких частотах требует или огромных магнитных полей (десятки и сотни килоэрстед) или очень высокой анизотропии

материала (того же порядка), что в реальных условиях крайне затруднительно.

Для обменных же волн важнейшей, но вполне осуществимой задачей становится создание преобразователей, позволяющих возбуждать и регистрировать волны с волновым числом порядка 10^5 – 10^6 см⁻¹, то есть имеющих длину в десятки и менее нанометров.

Преобразователь на основе решетки должен иметь период такой же величины, что можно осуществить вполне реализуемыми методами электронной микроскопии. Другим возможным способом возбуждения столь коротких волн является преобразование их длины в неоднородном поле, подобно тому, как это делалось для дипольных волн [145–148].

Дополнительные возможности для создания устройств открываются при использовании распространения волн в неоднородных полях. Здесь также можно использовать методы, развитые для дипольных волн, частично обобщенные в монографии [1]. Возможные перспективы для достижения частот терагерцового диапазона может открыть использование деления и умножения частот в нелинейном режиме [234, 260–264]. Для оценки возможности такого использования следует исследовать регулярно возбуждаемые обменные волны в условиях сильной нелинейности, что на сегодняшний день полностью отсутствует.

Замечание. Под нелинейностью обменных волн здесь подразумевается не параметрическое возбуждение таких волн в условиях нелинейного ферромагнитного резонанса [66–70], где колебания намагниченности внутри волны остаются линейными, а такие обменные волны, колебания намагниченности внутри которых имеют нелинейный характер, то есть намагниченность внутри волны отклоняется от оси прецессии на углы до десятков градусов. Физическая теория таких волн еще требует своей изначальной разработки.

В заключение кратко упомянем еще некоторые соображения, касающиеся возможных применений обменных волн, требующих более подробной разработки.

Как показано в настоящей работе (например, можно видеть из рис. 6.16), длина обменной волны может быть на два-три порядка меньше длины оптической электромагнитной волны, то есть составлять десятые и сотые доли микрона. Такое обстоятельство позволяет рассматривать обменную волну как возможный инструмент для построения микроскопа с пространственным разрешением на два-три порядка превышающим разрешение оптического микроскопа.

Примечательным является тот факт, что на частотах порядка десятков ТГц, хотя и с трудом, но все же достижимых известными радиотехническими методами, длина обменной волны становится сравнимой с межатомными расстояниями, так что при распространении в кристаллической решетке такая волна может испытывать на решетке дифракцию, подобную дифракции рентгеновских лучей в кристаллах.

То есть обменные волны столь высоких частот можно рассматривать как определенный инструмент для изучения атомной структуры вещества. Заметим, что здесь выполненная выше континуальная разработка обменных волн уже не годится, а требуется разработка на квантовом уровне.

В заключение хочется четко сформулировать две основные задачи, стоящие перед практической реализацией устройств обработки информации на обменных волнах.

Первая — достичь управляемого возбуждения когерентных как можно более коротких обменных волн с волновым числом до 10^{-6} см $^{-1}$ и более.

Вторая — найти способы возбуждения и создать преобразователи, способные возбуждать такие волны с максимальной эффективностью.

В качестве дополнительной задачи можно считать нахождение способов управления обменными волнами, как во времени, так и в пространстве, в том числе создание устройств канализации, переключения и направленного распространения волновых пучков ограниченной ширины.

В целом требуется продвижение в сторону больших волновых чисел — до 10^7 см $^{-1}$, продвижение в сторону высоких частот — до 1000 ГГц, реализация малых размеров волноводов — шириной в 10 нм и менее.

Важнейшей дополнительной задачей можно считать поиск способов снижения затухания, а также усиления обменных волн при их распространении.

В качестве весьма интересной программы-максимум следует отметить перенесение физики обменных волн на квантовый уровень, когда длина волны будет сравнима с межатомным расстоянием и вместо волнового процесса в непрерывной среде будет иметь место распространение квантовых возбуждений в дискретных межатомных спиновых решетках, связанных обменным взаимодействием.

Разумеется, приведенные здесь соображения на сегодняшний день имеют пока еще чисто умозрительный характер, так что возможная их реализация потребует значительных как теоретических, так и экспериментальных усилий. Авторы осмеливаются выразить надежду, что будущими исследователями такие усилия будут предприняты в должной мере.

Выводы по главе 9

В настоящей главе кратко обсуждается требующий дальнейшего рассмотрения вопрос о распространении обменной магнитостатической волны в произвольном направлении относительно поля. Главным результатом главы следует считать освещение вопроса о возможном практическом применении обменных волн, предложение некоторых рекомендаций и приведение вопросов, требующих разрешения для введения

обменных волн в широкий обиход экспериментаторов и разработчиков устройств обработки информации.

Основные вопросы, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Высказано качественное предположение о том, что в безграничной среде распространение волны в направлении, перпендикулярном направлению постоянного поля, не реализуется, ибо это запрещено действительным характером поперечного волнового числа. При этом распространение волны вдоль поля полностью разрешено, так как поперечное волновое число приобретает мнимый характер. Отмечено некоторое противоречие приведенных положений с классической трактовкой условий распространения обменных волн. В связи с этим в качестве предмета для дальнейшего рассмотрения сформулированы две задачи: (1) исследование распространения волны с учетом обмена и размагничивания в касательно намагниченной пластине в произвольном направлении относительно поля, в том числе выявление соответствующих углов отсечки; (2) исследование распространения такой же волны в безграничном пространстве также в произвольном направлении относительно поля.

2. Обсуждены некоторые возможные применения обменных магнитостатических волн. В качестве традиционного направления упомянуто создание устройств обработки аналоговой информации, в первую очередь — линий задержки. Показано, что использование обменных волн вместо дипольных позволит уменьшить размеры волноведущих частей устройства на два-три порядка, обеспечивая габариты в десятки и единицы нанометров, а также увеличить рабочую частоту устройств до нескольких терагерц без увеличения постоянного магнитного поля. Упомянуты возможности создания устройств на основе неоднородных магнитных полей, а также работающих в сильно нелинейном режиме, что позволит повысить диапазон допустимых частот еще на порядок и более. Возможность укорочения длины обменной волны до нескольких нанометров позволяет рассматривать такую волну, как возможный инструмент для построения микроскопа с пространственным разрешением на два-три порядка превышающим разрешение оптического микроскопа. Другим возможным применением столь коротких волн может явиться исследование структуры вещества на атомно-молекулярном уровне, для теоретической интерпретации чего требуется переход от континуального рассмотрения к микроскопическому на квантовом уровне.

Литература

1. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Магнитостатические волны в неоднородных полях. — М.: Физматлит. 2016. Электронный ресурс: jre.cplire.ru/jre/library/Shavrov-Shcheglov_1.pdf.
2. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Магнитостатические и электромагнитные волны в сложных структурах. — М.: ФИЗМАТЛИТ. 2017. Электронный ресурс: jre.cplire.ru/jre/library/Shavrov-Shcheglov_2.pdf.
3. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Ферромагнитный резонанс в условиях ориентационного перехода. — М.: ФИЗМАТЛИТ. 2018. Электронный ресурс: jre.cplire.ru/jre/library/Shavrov-Shcheglov_3.pdf.
4. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Динамика намагниченности в условиях изменения ее ориентации. — М.: ФИЗМАТЛИТ. 2019. Электронный ресурс: jre.cplire.ru/jre/library/Shavrov-Shcheglov_4.pdf.
5. *Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Влияние диссипации на свойства поверхностных магнитостатических волн в касательно намагниченной пластине феррита // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2014. №7. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jul14/8/text.pdf>.
6. *Келлер Ю. И., Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Поверхностные магнитостатические волны в пластине феррита с диссипацией. Часть 1. Дисперсионные соотношения // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2016. №2. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/feb16/2/text.pdf>.
7. *Келлер Ю. И., Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Поверхностные магнитостатические волны в пластине феррита с диссипацией. Часть 2. Распространение волны перпендикулярно направлению поля // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2016. №3. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/mar16/1/text.pdf>.
8. *Келлер Ю. И., Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Поверхностные магнитостатические волны в пластине феррита с диссипацией. Часть 3. Распространение волны в произвольном направлении относительно поля // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2016. №3. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/mar16/2/text.pdf>.
9. *Келлер Ю. И., Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Дисперсионные свойства электромагнитных волн в касательно намагниченной ферритовой пластине. // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2018. №4. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr18/7/text.pdf>.
10. *Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Дисперсия гиромангнитной волны в пластине феррита с диссипацией. // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2018. №9. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/sep18/10/text.pdf>.
11. *Келлер Ю. И., Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Дисперсионные свойства поверхностных магнитостатических волн в пластине феррита с диссипацией // РЭ. 2018. Т. 63. №6. С. 577–583.

12. *Келлер Ю. И., Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Распространение поверхностных магнитостатических волн в пластине феррита с диссипацией // РЭ. 2018. Т. 63. № 9. С. 974–980.
13. *Макаров П. А., Щеглов В. И.* О применении операторного формализма к решению задач электродинамики бигиротропных сред // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 1(26). С. 3–16.
14. *Makarov P. A., Shcheglov V. I.* Influence of dissipation on magnetostatic surface waves dispersion. // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2016. V. 9. № 4. P. 469–472.
15. *Makarov P., Maltceva L., Kotov L., Shcheglov V.* Magnetostatic waves in a medium with damping // Eur. Phys. Journ. 2018. V. 185. P.02012(3).
16. *Maltceva L., Makarov P., Kotov L., Shcheglov V.* Dispersion of the magnetostatic volume waves in a medium with damping // Eur. Phys. Journ. 2018. V. 185. P. 02015(4).
17. *Макаров П. А., Щеглов В. И.* Дисперсия поверхностных магнитостатических волн в среде с затуханием // Международная 50 Школа ПИЯФ по физике конденсированного состояния — «Школа ФКС-2016». Сборник тезисов и список участников. Гатчина. Санкт-Петербург: СПб. ПИЯФ. 2016. С. 184.
18. *Makarov P., Shcheglov V.* Dispersion of magnetostatic surface waves in a medium with damping. // Материалы конференции: VI Euro-Asian Symposium «Trends in MAGnetism» (EASTMAG-2016). Россия. Красноярск. 2016. С. 363.
19. *Makarov P., Shcheglov V., Kotov L., Vlasov V.* Dispersion of magnetostatic surface waves in the thin ferromagnetic films // Материалы конференции: Condensed Matter in Groningen (CMD26). Groningen — The placecountry-regionNetherlands. 04/2С — Magnons, Phonons and Their Interactions. 2016.
Электронный ресурс: <http://cmd26.eu/scientific-programme/programme>.
20. *Макаров П. А., Щеглов В. И.* Дисперсионные характеристики поверхностных магнитостатических волн в тонких пленках никеля // Сборник тезисов участников LI Школы ПИЯФ по физике конденсированного состояния. Санкт-Петербург: ПИЯФ. 2017. С. 198.
21. *Makarov P. A., Vlasov V. S., Kotov L. N., Shavrov V. G., Shcheglov V. I., Temnov V. V.* Dispersion of spin magnetostatic surface waves in a medium with damping. // Book of Abstracts of International Symposium «Spin Waves 2018 (SW 2018)». placeCitySaint Petersburg. placecountry-regionRussia. 2018. Published by «Ioffe Physical-Technical Institute RAS». P. 186.
22. *Макаров П. А., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Особенности дисперсии магнитостатических волн в диссипативных средах // Сборник докладов V Всероссийской научной молодежной конференции с международным участием «Актуальные проблемы микро- и нанoeлектроники». 2018. Уфа. С. 189–190.
23. *Макаров П. А., Щеглов В. И.* Дисперсионные характеристики поверхностных и объемных магнитостатических волн при учете диссипации // Сборник тезисов «LII Школы ПИЯФ» и МММолодежной конференции по фи-

- зике конденсированного состояния ФКС-2018». Россия. Санкт-Петербург. 2018. С. 202.
24. Макаров П. А., Щеглов В. И. Особенности дисперсии магнитостатических волн в диссипативных средах // Сборник материалов Национальной (Всероссийской) конференции «Математическое Моделирование и Информационные Технологии (ММИТ-2018)». Россия. Сыктывкар. 2018. С. 28–29.
 25. Горбунов С. А., Котов Л. Н., Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Дисперсия поверхностных магнитостатических волн в диссипативных средах // Сборник трудов XXIII Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ-2018)». МИРЭА. М.: Буки Веди. 2018. С. 321.
 26. Колегов О. К., Котов Л. Н., Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Объемные магнитостатические волны в диссипативных средах // Сборник трудов XXIII Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ-2018)». МИРЭА. М.: Буки Веди. 2018. С. 322.
 27. Власов В. С., Котов Л. Н., Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Дисперсия электромагнитных волн в бигиротропных диссипативных средах // Сборник трудов XXIII Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ-2018)». МИРЭА. М.: Буки Веди. 2018. С. 326.
 28. Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Поверхностные магнитостатические волны в пластине феррита с диссипацией // Сборник трудов XXII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы», Москва, МЭИ, издательство «НИУ МЭИ». 2014. С. 221–236.
 29. Келлер Ю. И., Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Поверхностные и объемные гиромангнитные волны в касательно намагниченной ферритовой пластине // Сборник трудов XXVI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы (фундаментальные физические исследования)». М.: ИНФРА-М. 2018. С. 265–278.
 30. Макаров П. А., Уляшева М. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Диссипативный характер дисперсии гиромангнитной волны в пластине феррита // Сборник трудов XXVII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы (фундаментальные физические исследования)». М.: НИУ МЭИ. 2019. С. 209–219.
 31. Щеглов В. И. Влияние поля размагничивания на дисперсию поверхностной волны Дэймона–Эшбаха // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2019. №2. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/feb19/3/text.pdf>.
 32. Щеглов В. И. Влияние обменного взаимодействия и динамического размагничивания на дисперсию поверхностной волны Дэймона–Эшбаха. Часть 1. Поперечное волновое число // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2019. №7. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jul19/3/text.pdf>.
 33. Щеглов В. И. Влияние обменного взаимодействия и динамического размагничивания на дисперсию поверхностной волны Дэймона–Эшбаха. Часть 2. Дисперсионное соотношение // Электронный «Журнал радио-

- электроники». 2019. № 9. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/sep19/8/text.pdf>.
34. *Щеглов В. И.* Влияние обменного взаимодействия и динамического размагничивания на дисперсию поверхностной волны Дэймона–Эшбаха. Часть 3. Особые случаи дисперсии // *Электронный «Журнал радиоэлектроники»*. 2019. № 11. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/nov19/4/text.pdf>.
 35. *Щеглов В. И.* Дисперсия поверхностной волны Дэймона–Эшбаха в условиях динамического размагничивания // *Сборник трудов XXVII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы (фундаментальные физические исследования)»*. М.: НИУ МЭИ. 2019. С. 246–257.
 36. *Щеглов В. И.* Дисперсия поверхностной волны Дэймона–Эшбах в условиях неоднородного обменного взаимодействия // *Сборник трудов XXVII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы (фундаментальные физические исследования)»*. М.: НИУ МЭИ. 2019. С. 258–266.
 37. *Щеглов В. И.* К вопросу об ограничении волнового числа в задаче Дэймона–Эшбаха с обменом и размагничиванием // *Электронный «Журнал радиоэлектроники»*. 2020. № 7. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jul20/5/text.pdf>.
 38. *Щеглов В. И.* Возбуждение спин–волнового резонанса в тонких магнитных пленках в отсутствие поверхностной анизотропии // *Электронный «Журнал радиоэлектроники»*. 2020. № 8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug20/2/text.pdf>. DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.8.2>.
 39. *Вонсовский С. В., Шур Я. С.* Ферромагнетизм — М.: ОГИЗ Гостехиздат. 1948.
 40. *Гуревич А. Г.* Ферриты на сверхвысоких частотах — М.: Гос. Изд. физ.-мат. лит. 1960.
 41. *Гуревич А. Г.* Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках — М.: Наука. 1973.
 42. *Гуревич А. Г., Мелков Г. А.* Магнитные колебания и волны — М.: ФИЗМАТЛИТ. 1994.
 43. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies. *Phys. Zs. der Sowjetunion*, 1935. V. 8. № 2. P. 153–172. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел // В кн.: Л. Д. Ландау. *Собрание трудов*. Т. 1. М.: Наука. 1969. С. 128–143.
 44. *Polder D.* On the Theory of Ferromagnetic Resonance // *Phil. Mag.* 1949. V. 40. № 1. P. 99–115.
 45. Ферромагнитный резонанс и поведение ферромагнетиков в переменных магнитных полях. Сб. статей под ред. Вонсовского С. В. — М.: ИЛ, 1952.
 46. Ферромагнитный резонанс. Сборник статей под ред. Вонсовского С. В. — М.: Физмаггиз, 1961.
 47. *Лакс Б., Баттон К.* Сверхвысокочастотные ферриты и ферримангнетики. — М.: Мир. 1965. *Lax B., Button K. J.* Microwave Ferrites and Ferrimagnetics. N.Y.: McGraw-Hill Book Company. 1962.
 48. *Сколник М.* (ред.). Справочник по радиолокации. Т. 2. Радиолокационные антенные устройства. — М.: Советское радио. 1977.

49. *Кефалес Г., Вилтс Дж.* Элементы и узлы линий передачи // В книге: Сколник М. (ред.). Справочник по радиолокации. Т. 2. Радиолокационные антенные устройства. С. 21–42.
50. *Старк Л., Бэрнс Р., Кларк В.* Фазовращатели фазированных антенных решеток // В книге: Сколник М. (ред.). Справочник по радиолокации. Т. 2. Радиолокационные антенные устройства. С. 208–251.
51. *Микаэлян А.Л.* Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах — М.: Госэнергоиздат. 1963.
52. Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Сб. статей под ред. Гуревича А. Г. — М.: ИЛ. 1961.
53. *Пиппин Дж.* Удвоение и преобразование частоты в ферритах / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 41. *J. E. Pippin // Proc. IRE. 1956. V. 44. № 8. P. 1054.*
54. *Мелчер Дж., Эйрс В., Вертенен П.* Удвоение частоты с 9000 до 18000 мгц при помощи ферритов / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 44. *J. I. Melchor, W. P. Ayres, P. H. Vartanian // Proc. IRE. 1957. V. 45. № 5. P. 643.*
55. *Скомел Е., Медина М.* Исследование преобразования частоты в намагниченном феррите / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 56. *E. N. Skomal, M. A. Medina // Journ. Appl. Phys. 1958. V. 29. № 3. P. 423.*
56. *Скомел Е., Медина М.* Исследование многократного преобразования частоты в ферритах / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 60. *E. N. Skomal, M. A. Medina // Journ. Appl. Phys. 1959. Suppl. to V. 30. № 4. P. 161S.*
57. *Пул К., Тьен П.* Ферромагнитный резонансный преобразователь частоты / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 66. *K. M. Poole, P. K. Tien // Proc. IRE. 1958. V. 46. № 7. P. 1387.*
58. *Джаффе Д., Качерис Дж., Караянис Н.* Ферритовый детектор СВЧ / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 23. *D. Jaffe, J. C. Cacheris, N. Karayianis // Proc. IRE. 1958. V. 46. № 3. P. 594.*
59. *Simon J. C., Broussaud G.* Detection with microwave ferrites // *Compt. Rend. Acad. Sci. 1954. V. 238. № 24. P. 2294.*
60. *Сул Г.* Ферромагнитный усилитель СВЧ / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича // М.: ИЛ. 1961. С. 299. *H. Suhl // Phys. Rev. 1957. V. 106. № 2. P. 384.*
61. *Сул Г.* Теория ферромагнитного усилителя СВЧ / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 304. *H. Suhl // Journ. Appl. Phys. 1957. V. 28. № 11. P. 1225.*

62. Вейсс М. Ферритовый усилитель и генератор СВЧ / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 346. *M. T. Weiss // Phys. Rev.* 1957. V. 107. № 1. P. 317.
63. *Уирри У., Уанг Ф.* Экспериментальное исследование модифицированного полустатического ферритового усилителя / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 353. *W. L. Whirry, F. B. Wang // Journ. Appl. Phys.* 1959. Suppl. to V. 30. № 4. P. 150S.
64. *Хоган Ч., Джепсен Р., Вертенен П.* Новый тип ферромагнитного усилителя / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 366. *C. L. Hogan, R. L. Jepsen, P. H. Vartanian // Journ. Appl. Phys.* 1958. V. 29. № 3. P. 422.
65. *Вейсс М.* Сверхвысокочастотные и низкочастотные колебания, вызванные нестабильностью резонанса в ферритах / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 281. *M. T. Weiss // Phys. Rev. Lett.* 1958. V. 1. № 7. P. 239.
66. *Моносов Я. А.* Нелинейный ферромагнитный резонанс. — М.: Наука. 1971.
67. *Сул Г.* Источник и использование нестабильностей при ферромагнитном резонансе / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 109. *H. Suhl // Journ. Appl. Phys.* 1958. V. 29. № 3. P. 416.
68. *Сул Г.* Теория ферромагнитного резонанса при больших уровнях высокочастотной мощности / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича // М.: ИЛ. 1961. С. 163. *H. Suhl // Journ. Phys. Chem. Sol.* 1957. V. 1. № 4. P. 209.
69. *Захаров В. Е., Львов В. С., Старобинец С. С.* Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения // УФН. 1974. Т. 114. № 4. С. 609.
70. *Львов В. С.* Нелинейные спиновые волны. — М.: Наука. 1987.
71. *Сивей М., Танненвальд П.* Непосредственное наблюдение спин-волнового резонанса / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 594. *M. H. Seavey, P. E. Tannenwald // 1958. V. 1. № 5. P. 168.*
72. *Киттель Ч.* Возбуждение спиновых волн в ферромагнетиках однородным СВЧ полем / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 585. *C. Kittel // Phys. Rev.* 1958. V. 110. № 6. P. 1295.
73. *Wolfram T., de Wames R. E.* Effects of exchange on the magnetic surface states of yttrium iron garnet films // *Solid State Comm.* 1970. V. 8. № 1. P. 191–194.
74. *De Wames R. E., Wolfram T.* Dipole-exchange spin waves in ferromagnetic films // *JAP.* 1970. V. 41. № 2. P. 987–993.

75. *Wolfram T., de Wames R.E.* Magnetoexchange branches and spin wave resonance in conducting and insulating films — perpendicular resonance // PR(B). 1971. V.4. №9. P.3125–3141.
76. *Высоцкий С.Л., Казаков Г.Т., Кац М.Л., Филимонов Ю.А.* Влияние закрепления поверхностных спинов на спектр спин-волнового резонанса структуры с двумя обменно-связанными пленками // ФТТ. 1993. Т.35. №5. С.1190–1199.
77. *Гуслиенко К.Ю.* Спин-волновые моды в обменно-связанных многослойных магнитных пленках // ФТТ. 1995. Т.37. №6. С.1603–1611.
78. *Зильберман П.Е., Темирязов А.Г., Тихомирова М.П.* Возбуждение и распространение обменных спиновых волн в пленках железо-иттриевого граната // ЖЭТФ. 1995. Т.108. №1(7). С.281–302.
79. *Зильберман П.Е., Луговской А.В., Шарафатдинов А.А.* Спин-волновой резонанс и распределение обменных спиновых волн в неоднородных по толщине ферритовых пленках // ФТТ. 1995. Т.37. №7. С.2010–2020.
80. *Temiryazev A.G., Tikhomirova M.P., Zil'berman P.E.* «Exchange» spin waves in nonuniform yttrium iron garnet films // JAP. 1994. V.76. №9. P.5586–5588.
81. *Gulyaev Yu.V., Temiryazev A.G., Tikhomirova M.P., Zil'berman P.E.* Magnetoelastic interaction in yttrium iron garnet films with magnetic inhomogeneities through the film thickness // JAP. 1994. V.75. №10. P.5619–5621.
82. *Калиникос Б.А., Митева С.И.* Дисперсия дипольно-обменных спиновых волн в слоистой структуре // ЖТФ. 1981. Т.51. №10. С.2213–2215.
83. *Калиникос Б.А.* Возбуждение дипольно-обменных спиновых волн в ферромагнитных пленках: спин-волновые функции Грина // ЖТФ. 1984. Т.54. №9. С.1846–1849.
84. *Kalinikos B.A., Slavin A.N.* Theory of dipole-exchange spin wave spectrum for ferromagnetic films with mixed exchange boundary conditions // J. Phys. C. 1986. V.19. P.7013–7033.
85. *Дмитриев В.Ф., Калиникос Б.А.* Возбуждение спиновых волн в перпендикулярно намагниченных ферритовых пленках // ЖТФ. 1987. Т.57. №11. С.2212–2220.
86. *Григорьева Н.Ю., Калиникос Б.А.* Дисперсионные характеристики спиновых волн в планарных периодических структурах на основе ферромагнитных пленок // ЖТФ. 2009. Т.79. №8. С.110–117.
87. *Григорьева Н.Ю.* Дипольно-обменные спиновые волны в периодических структурах на основе тонких ферромагнитных пленок. Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н. — Санкт-Петербург. 2009.
88. *Григорьева Н.Ю., Попов Д.А., Калиникос Б.А.* Спектр дипольно-обменных спиновых волн в анизотропном ферромагнитном волноводе прямоуглового сечения // ФТТ. 2014. Т.56. №9. С.1746–1755.
89. *Луговской А.В., Щеглов В.И.* Спектр обменных и безобменных спин-волновых возбуждений в пленках ферритов-гранатов // РЭ. 1982. Т.27. №3. С.518–524.
90. *Геллер С., Гилльо М.* Кристаллическая структура и ферримагнетизм иттриевого граната / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А.Г. Гуревича. — М.: ИЛ.

1961. С. 373. *S. Geller, M. A. Gilleo* // Journ. Phys. Chem. Sol. 1957. V. 3. № 1/2. P. 30.
91. *Нильсен Дж., Диборн Е.* Выращивание монокристаллов магнитных ферритов со структурой граната / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 400. *J. W. Nielsen, E. F. Dearborn* // Journ. Phys. Chem. Sol. 1958. V. 5. № 3. P. 202.
92. *Вольф В., Родриг Дж.* Приготовление поликристаллических ферромагнитных материалов со структурой граната для применения в СВЧ устройствах / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 414. *W. P. Wolf, G. P. Rodrigue* // Journ. Appl. Phys. 1958. V. 29. № 1. P. 105.
93. *Ван-Уитерт Л., Свонкемп Ф., Хазко С.* Ширина резонансных кривых в поликристаллическом иттриевом гранате / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 426. *L. G. Van Uitert, F. W. Swanekamp, S. E. Haszko* // 1959. V. 30. № 3. P. 363.
94. *ЛеКроу Р., Спенсер Е., Портер К.* Ширина кривой ферромагнитного резонанса в монокристаллах иттриевого феррита со структурой граната / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 433. *R. C. LeCraw, E. G. Spencer, C. S. Porter* // Phys. Rev. 1958. V. 110. № 6. P. 1311.
95. *Диллон Дж., Нильсен Дж.* Влияние редкоземельных примесей на ферромагнитный резонанс в иттриевом гранате // В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича // М.: ИЛ. 1961. С. 442. *J. F. Dillon, J. W. Nielsen* // Phys. Rev. Lett. 1959. V. 3. № 1. P. 30.
96. *Спенсер Е., ЛеКроу Р., Клогстон А.* Низкотемпературный максимум ширины кривой ферромагнитного резонанса в иттриевом гранате / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 447. *E. G. Spencer, R. C. LeCraw, A. M. Clogston* // Phys. Rev. Lett. 1959. V. 3. № 1. P. 32.
97. *Мэзон У.* (ред.), *Терстон Р.* (ред.). Физическая акустика. Т. 1–7. — М.: Мир. 1966–1974.
98. *Ле-Кроу Р., Комсток Р.* Магнитоупругие взаимодействия в ферромагнитных диэлектриках / В кн.: Физическая акустика, под ред. Мэзона У. П. Т. 3Б, Динамика решетки. М.: Мир. 1968. С. 156–243. *R. C. LeCraw, R. L. Comstock* // In book: Physical Acoustics. Principles and Methods. Ed. by W. P. Mason. V. III. Part B. Lattice Dynamics. Ac. Press. placeStateNew York, Lomdon. 1965.
99. *Штраусс В.* Магнитоупругие свойства иттриевого феррита-граната // В кн.: У. Мэзон (ред.): Физическая акустика. Т. 4Б. Применения физической акустики в квантовой физике и физике твердого тела. М., Мир, 1970. С. 247–316.
100. *Звездин А. К., Котов В. А.* Магнитооптика тонких пленок. — М.: Наука. 1988.
101. *Уокер Л.* Резонансные типы прецессии в ферромагнитных сфероидах / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устрой-

- ствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 453. *R. L. Walker* // Journ. Appl. Phys. 1958. V. 20. № 3. P. 318.
102. *Уокер Л.* Магнитостатические типы прецессии при ферромагнитном резонансе / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 470. *R. L. Walker* // Phys. Rev. 1957. V. 105. № 2. P. 390.
103. *Флетчер П., Бэлл Р.* Магнитостатические типы прецессии в ферромагнитных сферах / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 497. *P. C. Fletcher, R. G. Bell* // Journ. Appl. Phys. 1959. V. 30. № 5. P. 687.
104. *Уайт Р., Солт И.* Мультиплетный ферромагнитный резонанс в ферритовых сферах / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 529. *R. L. White, I. H. Solt* // Phys. Rev. 1956. V. 104. № 1. P. 56.
105. *Диллон Дж.* Магнитостатические типы прецессии в ферромагнитных сферах / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 543. *J. F. Dillon* // Phys. Rev. 1958. V. 112. № 1. P. 59.
106. *Уайт Р.* Наблюдение ширины кривой ферромагнитного резонанса / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 558. *R. L. White* // Journ. Appl. Phys., Suppl. to V. 30. 1959. № 4. P. 182S.
107. *Флетчер П., Солт И.* Связь магнитостатических типов прецессии / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 563. *P. C. Fletcher, I. H. Solt* // Journ. Appl. Phys., Suppl. to V. 30. № 4. P. 181S.
108. *Флетчер П., Солт И., Бэлл Р.* Идентификация магнитостатических типов прецессии при ферромагнитном резонансе в сферах / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961. С. 568. *P. C. Fletcher, I. H. Solt, R. Bell* // Phys. Rev. 1959. V. 114. № 3. P. 739.
109. *Adam J. D.* Analog signal processing with microwave magnetics // Proc. IEEE. 1988. V. 76. № 2. P. 159. *Адам Дж. Д.* Аналоговая обработка сигналов с помощью СВЧ-ферритов // ТИИЭР. 1988. Т. 76. № 2. С. 73.
110. *Ishak W. S.* Magnetostatic wave technology: a review // Proc. IEEE. 1988. V. 76. № 2. P. 171. *Исхак В. С.* Применение магнитостатических волн: обзор // ТИИЭР. 1988. Т. 76. № 2. С. 86.
111. *Schlömann E. F.* Circulators for microwave millimeter wave integrated circuits // Proc. IEEE. 1988. V. 76. № 2. P. 188. *Шлеман Э. Ф.* Циркуляторы для интегральных СВЧ-схем // ТИИЭР. 1988. Т. 76. № 2. С. 105.
112. *Stitzer S. N., Emtage P. R.* Nonlinear microwave signal-processing devices using thin ferrimagnetic films // Circuits, systems and signal processing. 1985. V. 4. № 1–2. P. 227–252.
113. *Parekh J. P., Tuan H. S., Chang K. W.* Magnetostatic wave convolvers. // Circuits, systems and signal processing. 1985. V. 4. № 1–2. P. 253–264.
114. *Damon R. W., Eshbach J. R.* Magnetostatic modes of a ferromagnet slab // J. Phys. Chem. Solids. 1961. V. 19. № 3/4. P. 308.

115. *Damon R. W., Eshbach J. R.* Magnetostatic modes of a ferromagnet slab // JAP. 1960. V. 31. № 5. P. 104S.
116. *Eshbach J. R., Damon R. W.* Surface magnetostatic modes and surface spin waves // PR. 1960. V. 118. № 5. P. 1208.
117. *Joseph R. I., Schloemann E.* Theory of magnetostatic modes in long, axially magnetized cylinders // JAP. 1961. V. 32. № 6. P. 1001.
118. *Damon R. W., Van de Vaart H.* Propagation of magnetostatic spin waves at microwave frequencies. II. Rods // JAP. 1966. V. 37. № 6. P. 2445.
119. *Damon R. W., Van de Vaart H.* Propagation of magnetostatic spin waves at microwave frequencies in a normally-magnetized disk // JAP. 1965. V. 36. № 11. P. 3453.
120. *Seshadri S. R.* Magnetostatic surface waves in ferrite slab // Proc. IEEE. 1970. V. 58. № 3. P. 506.
Сешадри. Поверхностные магнитостатические волны в ферритовой пластине // ТИИЭР. 1970. Т. 58. № 4. С. 105.
121. *Van de Vaart H.* Influence of metal plate on surface magnetostatic modes of magnetic slab // El. Lett. 1970. V. 6. № 19. P. 601.
122. *Ахизер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В.* Спиновые волны. — М.: Наука. 1967.
123. *Sodha M. S., Srivastava N. S.* Microwave propagation in Ferrimagnetics — placeStateNew York: Plenum Press. 1981.
124. *Мэзон У. П.* (ред). Физическая акустика. Т.3Б. Динамика решетки. — М.: Мир. 1968.
125. *Беляева О. Ю., Зарембо Л. К., Карпачев С. Н.* Магнитоакустика ферритов и магнитоакустический резонанс // УФН. 1992. Т. 162. № 2. С. 107–138.
126. *Голдин Б. А., Котов Л. Н., Зарембо Л. К., Карпачев С. Н.* Спин-фононные взаимодействия в кристаллах (ферритах). — Л.: Наука. 1991.
127. *Моносов Я. А., Сурин В. В., Щеглов В. И.* Возбуждение резонансных упругих колебаний при нелинейном ферромагнитном резонансе // Письма в ЖЭТФ. 1968. Т. 7. № 9. С. 315–317.
128. *Зубков В. И., Моносов Я. А., Щеглов В. И.* Спиновый эффект Мандельштама–Бриллюэна. // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 13. № 5. С. 229–232.
129. *Зубков В. И., Моносов Я. А., Щеглов В. И.* О спиновом эффекте Мандельштама–Бриллюэна / В кн.: Всесоюзная конференция по магнетизму. Тезисы докладов. Красноярск. 1971. С. 140.
130. *Зубков В. И., Моносов Я. А., Щеглов В. И.* Спиновый эффект Мандельштама–Бриллюэна в железиттриевом гранате / В кн.: Международная конференция по микроэлектронике твердого тела. Тезисы докладов. ПНР. Закопане. 1971. Т. 3. С. 52–61.
131. *Кирюхин Н. Н., Лисовский Ф. В.* Спиновые волны в среде с пространственно-временной периодичностью // ФТТ. 1968. Т. 10. № 3. С. 709.
132. *Лисовский Ф. В.* Некоторые особенности спинового эффекта Мандельштама–Бриллюэна в ферромагнитных кристаллах // ФТТ. 1968. Т. 10. № 2. С. 636–637.
133. *Попков А. Ф.* Коллинеарное рассеяние спиновых волн в пластине при акустической накачке // РЭ. 1982. Т. 27. № 7. С. 1366.

134. Медников А.М., Попков А.Ф., Анисимкин В.И., Нам Б.П., Петров А.А., Спиваков Д.Д., Хе А.С. Неупругое рассеяние поверхностной спиновой волны в тонкой пленке ЖИГ на поверхностной акустической волне // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33. № 12. С. 646.
135. Крышталь Р.Г., Медведь А.В., Осипенко В.А., Попков А.Ф. Трансформация мод магнитостатических волн при рассеянии их на поверхностной акустической волне в пленках ЖИГ // ЖТФ. 1988. Т. 58. № 12. С. 2315.
136. Крышталь Р.Г., Медведь А.В. Рассеяние поверхностных магнитостатических волн на поверхностной акустической волне в невазимной структуре пленка ЖИГ-металл // ЖТФ. 1989. Т. 59. № 6. С. 82.
137. Крышталь Р.Г., Медведь А.В. Экспериментальное исследование рассеяния нелинейных поверхностных магнитостатических волн на поверхностной акустической волне // ФТТ. 1992. Т. 34. № 1. С. 333.
138. Tien P.K., Martin R.J., Wolfe R., Le Craw R.C., Blank S.L. Switching and modulation of light in magneto-optic waveguides of garnet films // Appl. Phys. Lett. 1972. V. 21. № 8. P. 394–397.
139. Wilber W.D., Wetling W., Kabos P., Patton C.E., Jantz W. A wave-vector selective light scattering magnon spectrometer // JAP. 1984. V. 55. № 6(pt.2B). P. 2533–2535.
140. Fisher A.D. Optical signal processing with magnetostatic waves // Circuits, systems and signal processing. 1985. V. 4. № 1–2. P. 265–284.
141. Butler J.C., Kramer J.J., Esman R.D., Craig A.E., Lee J.N., Ryo T. Microwave and magneto-optic properties of bismuth-substituted yttrium iron garnet thin films // JAP. 1990. V. 67. № 9. P. 4938–4940.
142. Silliman S.D., Gualtieri D.M., Stancil D.D. Improvement of FMR linewidth in Bi-substituted lutetium iron garnet thin films for the MSW-optical-mode interaction // JAP. 1993. V. 73. № 10. P. 6460–6462.
143. Desormiere B., Le Gall H. Magnetostatic mode excitation in YIG rods containing a turning point // JAP. 1969. V. 40. № 3. P. 1191–1192.
144. Шлеман, Джозеф Теория возбуждения спиновых волн в неоднородных магнитных полях // ТИИЭР. 1963. Т. 51. № 9. С. 1267–1268.
145. Schlömann E. Generation of spin waves in nonuniform magnetic fields. I. Conversion of electromagnetic power into spin-wave power and vice versa // JAP. 1964. V. 35. № 1. P. 159–166.
146. Schlömann E., Joseph R.I. Generation of spin waves in nonuniform dc magnetic fields. II. Calculation of the coupling length // JAP. 1964. V. 35. № 1. P. 167–170.
147. Schlömann E., Joseph R.I., Kohane T. Generation of spin waves in nonuniform magnetic fields, with application to magnetic delay line // Proc. IEEE. 1965. V. 53. № 10. P. 1495–1507. Шлеман, Джозеф, Кохейн. Возбуждение спиновых волн в неоднородных магнитных полях и их применение в магнитных линиях задержки // ТИИЭР. 1965. Т. 53. № 10. С. 1685–1698.
148. Schlömann E., Joseph R.I. Generation of spin waves in nonuniform magnetic fields. III. Magneto-elastic interaction // JAP. 1964. V. 35. № 8. P. 2382–2390.
149. Schlömann E., Joseph R.I. Erratum: Generation of spin waves in nonuniform magnetic fields. III. Magneto-elastic interaction // JAP. 1965. V. 36. № 3. P. 875–876.

150. *Schlömann E.* Amplification of magnetostatic surface waves by interaction with drifting charge carriers in crossed electric and magnetic fields // JAP. 1969. V. 40. № 3. P. 1422–1425.
151. *Рэлей Дж. У.* Теория звука. Т. 1,2. — М.: ИЛ. 1955.
152. *Шустер А.* Введение в теоретическую оптику. — М., Л.: ОНТИ. Гл. ред. общетех. лит. 1935.
153. *Ландсберг Г. С.* Оптика. — М.: Наука. 1976.
154. *Веселаго В. Г.* Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ϵ и μ // УФН, 1967. Т. 92. № 3. С. 517–526.
155. *Кизель В. А.* Современное состояние теории отражения света // УФН. 1967. Т. 92. № 3. С. 479–516.
156. *Parimi P. V., Lu W. T., Vodo P., Sokoloff J., Derov J. S., Sridhar S.* Negative refraction and left-handed electromagnetism in microwave photonic crystals // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. № 12. P. 127401(4).
157. *Агранович В. М., Гартштейн Ю. Н.* Пространственная дисперсия и отрицательное преломление света // УФН. 2006. Т. 176. № 10. С. 1052–1068.
158. *Веселаго В. Г.* Волны в метаматериалах: их роль в современной физике // УФН. 2011. Т. 181. № 11. С. 1201–1205.
159. *Вашковский А. В., Стальмахов В. С., Шараевский Ю. П.* Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. — Саратов: СГУ. 1993.
160. *Локк Э. Г.* Свойства изочастотных зависимостей и законы геометрической оптики // УФН. 2008. Т. 178. № 2. С. 397.
161. *Auld B. A.* Geometrical optics of magnetoelastic wave propagation in a nonuniform magnetic field // Bell Syst. Tech. J. 1965. V. 44. № 3. P. 495.
162. *Беспярых Ю. И., Зубков В. И., Тарасенко В. В.* Распространение поверхностных магнитостатических волн в ферромагнитной пластине // ЖТФ. 1980. Т. 50. № 1. С. 140.
163. *Tabor W. J., Bobeck A. H., Vella-Coleiro G. P., Rosencwaig A.* A new type of cylindrical magnetic domains (bubble isomers) // Bell. Syst. Tech. J. 1972. V. 51. № 6. P. 1427–1431.
164. *Voegeli O., Calhoun B. A., Rosier L. L., Slonczewski J. C.* The use of bubble lattices for information storage // AIP Conf. Proc. 1975. V. 25. P. 617–618.
165. *Cape J. A., Lehman G. W.* Magnetic bubble domain interactions // Sol. St. Comm. 1970. V. 8. № 1. P. 1303–1306.
166. *Druyvesteyn W. F., Dorlejin J. W. F.* Calculations of some periodic magnetic domain structures: consequences for bubble devices // Phil. Res. Rep. 1971. V. 26. № 1. P. 11–28.
167. *Лисовский Ф. В.* Физика цилиндрических магнитных доменов. — М.: Сов. Радио. 1979.
168. *Малоземов А., Слонзуски Дж.* Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами. — М.: Мир. 1982. *Malozemoff A. P., Slonczewski J. C.* Magnetic domain walls in bubble materials. — Ac. Press: New York, London, Toronto, Sydney, San Francisco. 1979.
169. *Hubert A., Schafer R.* Magnetic domains: the analysis of magnetic microstructures. — Berlin. Heidelberg. Springer. 1998.
170. *Аваева И. Г., Копылов Ю. Л., Кравченко В. Б., Лисовский Ф. В., Соболев А. Т., Щеглов В. И.* Эпитаксиальные пленки смешанных ферритов-

- гранатов для ЦМД применений // Микроэлектроника. 1975. Т. 4. № 4. С. 325–329.
171. *Аваева И. Г., Лисовский Ф. В., Щеглов В. И.* О наклоне оси магнитной анизотропии в эпитаксиальных пленках смешанных ферритов-гранатов // ФТТ. 1975. Т. 17. № 5. С. 2102–2105.
172. *Аваева И. Г., Лисовский Ф. В., Осика В. А., Щеглов В. И.* Исследование эпитаксиальных пленок смешанных ферритов-гранатов методом ферромагнитного резонанса // ФТТ. 1975. Т. 17. № 10. С. 3045–3047.
173. *Аваева И. Г., Копылов Ю. Л., Кравченко В. Б., Лисовский Ф. В., Мушкаренко Ю. Н., Соболев А. Т., Щеглов В. И.* Эпитаксиальные пленки смешанных ферритов-гранатов для ЦМД-применений // В сб.: «Устройства автоматики и вычислительной техники с использованием доменной структуры магнитных кристаллов». М.: ИНЭУМ. 1975. В. 46. С. 27–29.
174. *Вашковский А. В., Зубков В. И., Локк Э. Г., Щеглов В. И.* Распространение поверхностных магнитостатических волн в поперечно неоднородных полях подмагничивания // РЭ. 1993. Т. 38. № 5. С. 818–824.
175. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Пространственное распределение излучения электромагнитных волн, сопровождающего распространение поверхностных магнитостатических волн в ферритовой пленке, намагниченной поперечно неоднородным полем // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. № 13. С. 106–110.
176. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Излучение электромагнитных волн, обусловленное ускорением магнитостатических волн в неоднородно намагниченной ферритовой пленке // РЭ. 2001. Т. 46. № 4. С. 433–440.
177. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Характеристики излучения, возникающего при преобразовании обратных объемных магнитостатических волн в электромагнитные // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. № 22. С. 44–49.
178. *Kirilyuk A., Kimel A. V., Rasing T.* Ultrafast optical manipulation of magnetic order // *Rev. Mod. Phys.* 2010. V. 82. № 3. P. 2731.
179. *Walowski J., Münzenberg M.* Perspective: Ultrafast magnetism and THz spintronics // *J. Appl. Phys.* 2016. V. 120. № 14. P. 140901(16).
180. *Ka Shen, Bauer G. E. W.* Laser-induced spatiotemporal dynamics of magnetic films // *Phys. Rev. Lett.* 2015. V. 115. № 19. P. 197201(5).
181. *Janusonis J., Chang C. L., Jansma T., Gatilova A., Vlasov V. S., Lomonosov A. M., Temnov V. V., Tobey R. I.* Ultrafast magnetoelastic probing of surface acoustic transients // *Phys. Rev. B.* 2016. V. 94. № 2. P. 024415(7).
182. *Chang C. L., Lomonosov A. M., Janusonis J., Vlasov V. S., Temnov V. V., Tobey R. I.* Parametric frequency mixing in a magnetoelastically driven linear ferromagnetic oscillator // *Phys. Rev. B.* 2017. V. 95. № 6. P. 060409(5).
183. *Власов В. С., Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Ориентационные характеристики возбуждения магнитоупругих волн фемтосекундным импульсом света. // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2017. № 6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun17/5/text.pdf>.
184. *Dreher L., Weiler M., Pernpeintner M., Huebl H., Gross R., Brandt M. S., Goennenwein S. T. B.* Surface acoustic wave driven ferromagnetic resonance in nickel thin films: theory and experiment // *Phys. Rev. B.* 2012. V. 86. № 13. P. 134415(13).

185. *Thevenard L., Gourdon C., Prieur J. Y., Von Bardeleben H. J., Vincent S., Becerra L., Largeau L., Duquesne J. Y.* Surface-acoustic-wave-driven ferromagnetic resonance in (Ga,Mn)(As,P) epilayers // *Phys. Rev. B*. 2014. V. 90. № 9. P. 094401(8).
186. *Чернов А.И., Кожжаев М.А., Ветошко П.М., Додонов Д.В., Прокопов А.Р., Шумилов А.Г., Шапошников А.Н., Бержанский В.Н., Звездин А.К., Беломелов В.И.* Локальное зондирование магнитных пленок с помощью оптического возбуждения магнитостатических волн // *ФТТ*. 2016. Т. 58. № 6, С. 1093.
187. *Beaurepaire E., Merle J. C., Daunois A., Bigot J. Y.* Ultrafast spin dynamics in ferromagnetic nickel // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 76. № 22. P. 4250.
188. *Bigot J. V., Vomir M.* Ultrafast magnetization dynamics of nanostructures // *Ann. Phys. (Berlin)*. 2013. V. 525. № 1–2. P. 2.
189. *Linnik T. I., Scherbakov A. V., Yakovlev D. R., Liu X., Furdina J. K., Bayer M.* Theory of magnetization precession induced by picosecond strain pulse in ferromagnetic semiconductor (Ga,Mn)As // *Phys. Rev. B*. 2011. V. 84. № 21. P. 214432(11).
190. *Jäger J. V., Scherbakov A. V., Linnik T. I., Yakovlev D. R., Wang M., Wadley P., Holy V., Cavill S. A., Akimov A. V., Rushforth A. W., Bayer M.* Picosecond inverse magnetostriction in garfenol thin films // *Appl. Phys. Lett.* 2013. V. 103. № 3. P. 032409(5).
191. *Jäger J. V., Scherbakov A. V., Glavin B. A., Salasyuk A. S., Campion R. P., Rushforth A. W., Yakovlev D. R., Akimov A. V., Bayer M.* Resonant driving of magnetization precession in a ferromagnetic layer by coherent monochromatic phonons // *Phys. Rev. B*. 2015. V. 92. № 2. P. 020404(5).
192. *Власов В.С., Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Колебания намагниченности в магнитоупругой среде при ударном воздействии упругого смещения // *Электронный «Журнал радиоэлектроники»*. 2018. № 4. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr18/3/text.pdf>.
193. *Serga A. A., Chumak A. V., Hillebrands B.* YIG magnonics // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2010. V. 43. P. 264002(16).
194. *Kruglyak V. V., Demokritov S. O., Grundler D.* Magnonics // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2010. V. 43. № 26. P. 264001(14).
195. *Slonczewski J. C.* Current-driven excitation of magnetic multilayers // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 1996. V. 159. № 1. P. L1–L7.
196. *Berger L.* Emission of spin waves by a magnetic multilayer traversed by a current // *Phys. Rev. B*. 1996. V. 54. № 13. P. 9353–9358.
197. *Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Крикунов А.И., Панас А.И., Эпштейн Э.М.* Создаваемая током инверсная заселенность спиновых подзон в магнитных переходах // *ПЖЭТФ*. 2007. Т. 85. № 3. С. 192–196.
198. *Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Маликов И.В., Михайлов Г.М., Панас А.И., Чигарев С.Г., Эпштейн Э.М.* Спин-инжекционное терагерцовое излучение в магнитных переходах // *ПЖЭТФ*. 2011. Т. 93. № 5. С. 289–292.
199. *Chang C. L., Tammung R. R., Broomhall T. J., Janusonis J., Fry P. W., Tobej R. I., Hayward T. J.* Selective excitation of localized spin-wave modes by optically pumped surface acoustic waves // *Phys. Rev. Applied*. 2018. V. 10. № 3. P. 034068(8).

200. *Kim S.-K.* Micromagnetic computer simulations of spin waves in nanometer-scale patterned magnetic elements // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2010. V.43. P. 264004(25).
201. *Khitun A., Bao M., Wang K.L.* Magnonic logic circuits // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2010. V.43. P. 264005(10).
202. *Au Y., Ahmad E., Dmytriiev O., Dvornik M., Davison T., Kruglyak V.V.* Resonant microwave-to-spin-wave transducer // *Appl. Phys. Lett.* 2012. V.100. №18. P. 182404(5).
203. *Au Y., Davison T., Ahmad E., Keatley P.S., Hicken R.J., Kruglyak V.V.* Excitation of propagating spin waves with global uniform microwave fields // *Appl. Phys. Lett.* 2011. V.98. №12. P. 122506(3).
204. *Smith K.R., Kabatek M.J., Krivosik P., Wu M.* Spin wave propagation in spatially nonuniform magnetic fields // *J. Appl. Phys.* 2008. V.104. №4. P. 0439116(10).
205. *Gruszecki P., Krawczyk M.* Spin-wave beam propagation in ferromagnetic thin films with graded refractive index: mirage effect and prospective applications // *Phys. Rev. B.* 2018. V.97. №9. P. 094424(9).
206. *Gilbert T.L.* A phenomenological theory of damping in ferromagnetic materials // *IEEE Trans. on Magn.* 2004. V.40. №6. P. 3443.
207. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972.
208. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука. 1965.
209. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. — М., Л.: ОГИЗ. Гос. изд. техн.-теор. лит. 1945.
210. *Сушкевич А.К.* Основы высшей алгебры. М., Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит. 1941.
211. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука. 1973.
212. *Вашковский А.В., Локк Э.Г.* Характеристики поверхностной магнитостатической волны в структуре феррит-диэлектрик, помещенной в медленно меняющееся неоднородное магнитное поле // *РЭ.* 2001. Т.46. №10. С. 1257.
213. *Вашковский А.В., Локк Э.Г.* Поверхностные магнитостатические волны в структуре феррит-диэлектрик, окруженной полупространствами с отрицательной диэлектрической проницаемостью // *РЭ.* 2002. Т.47. №1. С. 97.
214. *Локк Э.Г.* Магнитостатические волны в ферритовых пленках и структурах на их основе. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. — М. ИРЭ РАН. 2007.
215. *Вашковский А.В., Локк Э.Г.* О механизме преобразования поверхностной магнитостатической волны в электромагнитную // *РЭ.* 2009. Т.54. №4. С. 476.
216. *Вашковский А.В., Локк Э.Г.* О взаимосвязи энергетических и дисперсионных характеристик магнитостатических волн в ферритовых структурах // *УФН.* 2011. Т.181. №3. С. 293.

217. *Adam J. D., Davis L. E., Dionne G. F., Schloemann E. F., Stitzer S. N.* Ferrite devices and materials // IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques. 2002. V. 50. № 3. P. 721–737.
218. *Калашников С. Г.* Электричество. М.: Наука. 1964.
219. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Т. 3. Электричество. М.: Наука. 1977.
220. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля (Теоретическая физика, т. II). М.: Наука. 1967.
221. *Левич В. Г.* Курс теоретической физики. Т. 1. М.: Наука. 1969.
222. *Вызулин С. А., Розенсон А. Э., Шех С. А.* О спектре поверхностных магнитостатических волн в ферритовой пленке с потерями // РЭ. 1991. Т. 36. № 1. С. 164.
223. *Вызулин С. А.* Обобщенные плоские волны в задачах электродинамики магнитогиrotропных сред. Диссертация. на соискание уч. ст. д.ф.-м.н. Краснодар. 2000.
224. *Ползикова Н. И., Раевский А. О.* Особенности законов дисперсии поверхностных спиновых волн в структурах, содержащих сверхпроводник // ФТТ. 1996. Т. 38. № 10. С. 2937.
225. *Annenkov A. Yu., Gerus S. V.* // Book of Abstracts of Moscow International Symposium on Magnetism (MISM). 2014. Published by «Изд-во Физ.фак. МГУ». Moscow. P. 863.
226. *Анненков А. Ю., Герус С. В.* // Сборник трудов XXII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ. 2014. С. 99.
227. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука. 1973.
228. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука. 1970.
229. *Вашковский А. В., Зубков В. И., Локк Э. Г., Щеглов В. И.* Влияние неоднородности постоянного магнитного поля на траектории поверхностных магнитостатических волн // ПЖТФ. 1989. Т. 15. № 4. С. 1.
230. *Вашковский А. В., Зубков В. И., Локк Э. Г., Щеглов В. И.* Траектории поверхностных магнитостатических волн в неоднородно намагниченных ферритовых пленках // ПЖТФ. 1989. Т. 15. № 4. С. 5.
231. *Вашковский А. В., Зубков В. И., Локк Э. Г., Щеглов В. И.* Распространение поверхностных магнитостатических волн в неоднородном постоянном магнитном поле типа протяженной ямы // ЖТФ. 1990. Т. 60. № 7. С. 138.
232. *Зубков В. И., Локк Э. Г., Щеглов В. И.* Распространение поверхностных магнитостатических волн в неоднородном постоянном магнитном поле с профилем типа вала // РЭ. 1990. Т. 35. № 8. С. 1617.
233. *Vashkovsky A. V., Lock E. H., Shcheglov V. I., Zubkov V. I.* Passage of surface magnetostatic waves through magnetic «valley» and «ridge» // IEEE Trans. on Magn. 1990. V. 26. № 5. P. 1480.
234. *Вашковский А. В., Зубков В. И., Локк Э. Г., Щеглов В. И.* Поверхностные магнитостатические волны в линейно неоднородных магнитных полях // РЭ. 1991. Т. 36. № 1. С. 18.
235. *Вайнштейн Л. А.* Групповая скорость затухающих волн // ЖТФ. 1957. Т. 27. № 11. С. 2606.

236. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — Наука. 1967.
237. Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе // РЭ. 2009. Т. 54. № 7. С. 863.
238. Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Нелинейная динамика установления намагниченности в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами в условиях ориентационного перехода // РЭ. 2010. Т. 55. № 6. С. 689.
239. Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Вынужденная нелинейная прецессия вектора намагниченности в условиях ориентационного перехода // РЭ. 2011. Т. 56. № 1. С. 84.
240. Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Несимметричная вынужденная нелинейная прецессия намагниченности в условиях ориентационного перехода // РЭ. 2011. Т. 56. № 6. С. 719.
241. Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Мультирежимный характер нелинейной прецессии намагниченности второго порядка в условиях ориентационного перехода // РЭ. 2011. Т. 56. № 9. С. 1120.
242. Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Несимметричное возбуждение прецессии намагниченности второго порядка в условиях ориентационного перехода // РЭ. 2012. Т. 57. № 5. С. 501.
243. Власов В. С., Кирушев М. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Прецессия намагниченности второго порядка в анизотропной среде. Часть 1. Одноосная анизотропия // РЭ. 2013. Т. 58. № 8. С. 806.
244. Власов В. С., Кирушев М. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Прецессия намагниченности второго порядка в анизотропной среде. II. Кубическая анизотропия // РЭ. 2013. Т. 58. № 9. С. 857.
245. Власов В. С., Котов Л. Н., Щеглов В. И. Нелинейная прецессия вектора намагниченности в условиях ориентационного перехода. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2013.
246. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. — М.: Сов. радио. 1957.
247. Изюмова Т. И., Свиридов В. Т. Волноводы, коаксиальные и полосковые линии. — М.: Энергия. 1975.
248. Нефедов Е. И., Фиалковский А. Т. Полосковые линии передачи. — М.: Наука. 1980.
249. Нефедов Е. И., Фиалковский А. Т. Излучаемые типы волн микрополоскового волновода // ДАН СССР. 1978. Т. 239. № 2. С. 315.
250. Нефедов Е. И., Санталов Н. П., Фиалковский А. Т. Дисперсионные характеристики неизлучающих волн микрополоскового волновода // РЭ. 1979. Т. 24. № 1. С. 17.
251. Курушин Е. П., Нефедов Е. И. Применение тонких монокристаллических пленок ферритов в устройствах СВЧ-микроэлектроники // Микроэлектроника. 1977. Т. 6. № 6. С. 549.
252. Гуляев Ю. В., Зильберман П. Е. Взаимодействие СВЧ-спиновых волн и электронов в слоистых структурах полупроводник-феррит (обзор) // РЭ. 1978. Т. 23. № 5. С. 897.

253. *Eshbach J.R.* Spin-wave propagation and the magnetoelastic interaction in yttrium iron garnet // JAP. 1963. V. 34. № 4. P. 1298.
254. *Eggers F.G., Strauss W.* A UHF delay line using single-crystal yttrium iron garnet // JAP. 1963. V. 34. № 4. P. 1180.
255. *Есиков О.С., Фетисов Ю.К., Царьков А.Г.* Влияние неоднородного магнитного поля на распространение поверхностных магнитостатических волн в пластинке феррита // ЖТФ. 1982. Т. 52. № 4. С. 719.
256. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Время задержки поверхностных магнитостатических волн в ферритовых пленках и структурах феррит-металл, намагниченных неоднородными полями // РЭ. 2003. Т. 48. № 8. С. 1012.
257. *Adam J.D., Collins J.H.* Microwave magnetostatic delay devices based on epitaxial yttrium iron garnet // Proc. IEEE. 1976. V. 64. № 4. P. 794.
258. *Антонец И.В., Котов Л.Н., Кирпичёва О.А., Голубев Е.А., Калинин Ю.Е., Ситники А.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Механизм динамической проводимости аморфных наногранулированных пленок «металл-диэлектрик» в диапазоне сверхвысоких частот // Электронный «Журнал радиоэлектроники», 2014, № 4. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/arg14/12/text.pdf>.
259. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. М.: Физматгиз. 1963.
260. *Bigot J.V., Vomir M.* Ultrafast magnetization dynamics of nanostructures // Ann. Phys. (placeStateBerlin). 2013. V. 525. № 1–2. P. 2–30.
261. *Шпольский Э.В.* Атомная физика. Т. 1. М.: Наука. 1974.
262. *Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Кратное преобразование частоты в схеме магнитострикционного преобразователя. Умножение частоты в режиме релаксации. РЭ. 2019. Т. 64. № 5. С. 487–489.
263. *Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Кратное преобразование частоты в схеме магнитострикционного преобразователя. Умножение частоты в непрерывном режиме // РЭ. 2019. Т. 64. № 6. С. 604–618.
264. *Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2013. № 2. С. 10. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/feb13/10/text.html>.
265. *Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре при ферромагнитном резонансе // РЭ. 2014. Т. 59. № 5. С. 482–497.
266. *Плешев Д.А., Котов Л.Н., Власов В.С., Щеглов В.И.* Преобразование частоты при акустическом резонансе в феррите. — Сыктывкар: СГУ. 2019.
267. *Баффлер К.* Ферромагнитный резонанс вблизи верхней границы спиновых волн // В кн.: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Сборник статей по ред. А.Г. Гуревича. М.: ИЛ. 1961. С. 613.
268. *Сыздалев И.П.* Нанотехнология. Физико-химия нанокластеров, наноструктур и наноматериалов. М.: КомКнига. 2006.
269. *Рит М.* Наноконструирование в науке и технике. Введение в мир нанорасчета. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2005.

270. Вендик И. Б., Вендик О. Г. Метаматериалы и их применение в технике сверхвысоких частот // ЖТФ. 2013. Т. 83. № 1. С. 3.
271. Виноградов А. П. Электродинамика композитных материалов. — М.: УРСС. 2001.
272. Виноградов А. П., Дорофеев А. В., Зухди С. К вопросу об эффективных параметрах метаматериалов // УФН. 2008. Т. 178. № 5. С. 511.
273. Голованов О. С., Макеева Г. С., Ринкевич А. Б. Взаимодействие электромагнитных волн с периодическими решетками микро- и нанолент графена в терагерцовом диапазоне // ЖТФ. 2016. Т. 86. № 2. С. 119.
274. Макеева Г. С., Голованов О. А. Математическое моделирование электроноуправляемых устройств терагерцового диапазона на основе графена и углеродных нанотрубок. Пенза: Изд. ПГУ. 2018.
275. Макеева Г. С., Голованов О. С., Ринкевич А. Б. Вероятностная модель и электродинамический анализ резонансного взаимодействия электромагнитных волн с 3D-магнитными нанокомпозитами // РЭ. 2014. Т. 59. № 2. С. 152.
276. Вилков Е. А., Михайлов Г. М., Никитов С. А., Сафин А. Р., Чигарев С. Г., Фомин Л. А., Черных А. В. Уравнение кинетики спиновой поляризации неравновесных электронов проводимости в магнитных переходах // Сборник трудов XXIII Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ-2018)». МИРЭА. Москва: Буки Веди. 2018. С. 298.
277. Ament W. S., Rado G. T. // Phys. Rev. 1955. V. 97. № 6. P. 1558.
278. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Часть I. — М.: Наука. 1965.
279. Стрелков С. П. Механика. — М.: Наука. 1965.
280. Фриш С. Э., Тиморева А. В. Курс общей физики. Том 1. Физические основы механики, молекулярная физика, колебания и волны. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., Л.: Физматгиз. 1962. 468 с.
281. Ольховский И. И. Курс теоретической механики для физиков. — М.: Наука. 1970.

Научное издание

ШАВРОВ Владимир Григорьевич

ЩЕГЛОВ Владимир Игнатьевич

**СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ
С ОБМЕНОМ И ДИССИПАЦИЕЙ**

Редактор *Е.С. Артоболевская*

Оригинал-макет: *Д.П. Вакуленко*

Оформление переплета: *А.В. Андросов*

Подписано в печать 28.12.2021. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 31. Уч.-изд. л. 34,1. Тираж 300 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерпериодика»

117342, г. Москва, ул. Бутлерова, д. 17Б

E-mail: porsova@fml.ru, sale@fml.ru

Сайт: <http://www.fml.ru>

Интернет-магазин: <http://www.fmlib.ru>

Отпечатано с электронных носителей издательства

в АО «Первая Образцовая типография»

Филиал «Чеховский Печатный Двор»

142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1

Сайт: www.chpd.ru. E-mail: sales@chpd.ru, тел.: 8 (499) 270-73-59

