



Игорь Викторович Антонец,
кандидат физико-математических наук,
доцент Сыктывкарского
государственного университета
имени Питирима Сорокина



Владимир Григорьевич Шавров,
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий лабораторией
магнитных явлений в микроэлектронике
Института радиотехники и электроники
имени В. А. Котельникова РАН



Владимир Игнатьевич Щеглов,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Института радиотехники и электроники
имени В. А. Котельникова РАН



**ВОЛНЫ В МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУРАХ
МЕТОДЫ РАСЧЕТА: ПРЯМОЙ, УСРЕДНЕНИЯ, МАТРИЦЫ**

ЧАСТЬ 1

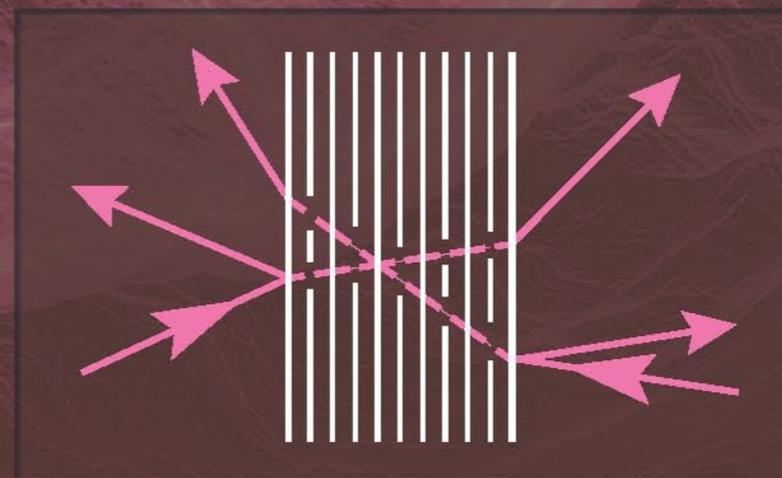


**И. В. АНТОНЕЦ
В. Г. ШАВРОВ
В. И. ЩЕГЛОВ**

ВОЛНЫ В МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУРАХ

ЧАСТЬ 1

МЕТОДЫ РАСЧЕТА: ПРЯМОЙ, УСРЕДНЕНИЯ, МАТРИЦЫ



И. В. АНТОНЕЦ
В. Г. ШАВРОВ
В. И. ЩЕГЛОВ

ВОЛНЫ В МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУРАХ

ЧАСТЬ 1

МЕТОДЫ РАСЧЕТА: ПРЯМОЙ, УСРЕДНЕНИЯ, МАТРИЦЫ

Рекомендовано Федеральным учебно-методическим объединением в системе высшего образования по укрупненной группе специальностей и направлений подготовки 03.00.00 «Физика и астрономия» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки уровня магистратуры «Прикладная математика и физика» (03.04.01), «Физика» (03.04.02), «Радиофизика» (03.04.03), специалитета по специальности «Фундаментальная и прикладная физика» (03.05.02)



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2022

УДК 537.874; 537.624
ББК 22.33
В 67

Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. **Волны в многослойных структурах. Часть 1. Методы расчета: прямой, усреднения, матрицы.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2022. — 424 с. — ISBN 978-5-9221-1958-0.

Издание посвящено изложению основ методов расчета распространения одномерных и электромагнитных волн через многослойные структуры. Методами прямым и усреднения определены параметры распространяющихся волн, а также коэффициенты отражения и прохождения по энергиям. Значительное внимание уделено методу матрицы, имеющему достаточно универсальный характер и допускающему простую машинную алгоритмизацию для структур с произвольным числом слоев. Решены некоторые задачи прикладного характера. Приведено множество примеров и даны методические рекомендации, предназначенные для самостоятельной работы учащихся.

Книга предназначена специалистам, работающим в области физики волновых процессов, электродинамики, магнитных явлений, инженерам и конструкторам СВЧ-, оптической и акустической аппаратуры, а также может использоваться в качестве учебного пособия для студентов и аспирантов соответствующих специальностей и направлений подготовки.

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор
А. К. Звездин (главный научный сотрудник ИОФ им. А.М. Прохорова РАН);
доктор физико-математических наук, профессор
В. Н. Прудников (физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова)

ISBN 978-5-9221-1958-0

© ФИЗМАТЛИТ, 2022

© И. В. Антонец, В. Г. Шавров,
В. И. Щеглов, 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	11
Глава 1. Общие вопросы колебаний и распространения волн	16
1.1. Колебания гармонического осциллятора	16
1.1.1. Свободные колебания гармонического осциллятора без затухания	17
1.1.2. Свободные колебания гармонического осциллятора с затуханием	18
1.1.3. Вынужденные колебания гармонического осциллятора с затуханием	21
1.2. Распространение одномерной волны	26
1.2.1. Волновое уравнение для одномерной волны в среде без затухания	26
1.2.2. Свободное распространение одномерной волны в среде без затухания	27
1.2.3. Свободное распространение одномерной волны в среде с затуханием	30
1.2.4. Распространение одномерной волны заданной частоты в среде с затуханием	34
1.2.5. Распространение волны в рамках задачи без начальных условий	35
1.3. Энергетические характеристики одномерной волны	39
1.3.1. Плотность и поток энергии для волны в струне	39
1.3.2. Плотность и поток энергии для одномерной волны	42
1.3.3. Замечание о комплексных волновых числах	46
1.4. Распространение электромагнитной волны	47
1.4.1. Поля плоской поперечной электромагнитной волны правой поляризации	47
1.4.2. Волновые уравнения для полей электромагнитной волны	51
1.4.3. Баланс энергии для электромагнитной волны в среде с диссипацией	55
1.4.4. Аналогия между балансами энергии для электромагнитной и одномерной волны	56
1.5. Традиционные методы расчета распространения волн через многослойные структуры	59
1.5.1. Прямой метод	59
1.5.2. Метод усреднения	60
1.5.3. Метод характеристической матрицы	60
1.5.4. Метод импеданса	61

1.6. Некоторые математические приемы, полезные при рассмотрении распространения волн	61
1.6.1. Комплексная амплитуда	61
1.6.2. Квадратный корень из комплексного числа	63
1.6.3. Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями	65
1.6.4. Преобразование суммы синуса и косинуса в единый косинус	66
1.6.5. Представление комплексного числа в виде произведения действительного числа на экспоненту с мнимым показателем	67
1.6.6. Связь между волновым числом, показателем преломления, импедансом и фазовой скоростью волны	70
1.6.7. Основные физические величины электродинамики	71
Выводы по главе 1	72
Глава 2. Распространение волн через две среды, разделенные одной границей	74
2.1. Одномерная волна	74
2.1.1. Падение одномерной волны на одну границу раздела сред	74
2.1.2. Коэффициенты отражения и прохождения по амплитуде	77
2.1.3. Коэффициенты отражения и прохождения по энергии . . .	77
2.2. Электромагнитная волна	78
2.2.1. Падение электромагнитной волны по нормали на одну границу раздела двух сред	78
2.2.2. Коэффициенты отражения и прохождения по полям	81
2.2.3. Коэффициенты отражения и прохождения по энергиям . .	82
2.2.4. Наклонное падение электромагнитной волны на одну границу раздела двух сред	83
2.2.5. Возможные варианты поляризации падающей волны	85
2.2.6. Продольная поляризация	86
2.2.7. Поперечная поляризация	90
2.2.8. Коэффициенты отражения и прохождения	92
2.3. Векторная модель распространения одномерной волны через границу, разделяющую диссипативные среды	93
2.3.1. Общее тригонометрическое решение	93
2.3.2. Прохождение волны из мягкой среды в жесткую при диссипации в первой среде	96
2.3.3. Прохождение волны из мягкой среды в жесткую при диссипации во второй среде	98
2.3.4. Прохождение волны из жесткой среды в мягкую при диссипации в первой среде	100
2.3.5. Прохождение волны из жесткой среды в мягкую при диссипации во второй среде	103
2.3.6. Общий вывод по векторной модели	106
Выводы по главе 2	106

Глава 3. Распространение волн через три среды, разделенные двумя границами	108
3.1. Одномерная волна	108
3.1.1. Падение одномерной волны на две границы раздела сред. Прямой метод	108
3.1.2. Коэффициенты отражения и прохождения	111
3.1.3. Нормировка амплитуды волны, проходящей через структуру	112
3.1.4. Падение одномерной волны на две границы раздела сред. Метод усреднения	117
3.1.5. Сравнение методов прямого и усреднения для одномерной задачи	122
3.1.6. Пределы применимости метода усреднения в одномерном случае	123
3.2. Электромагнитная волна	125
3.2.1. Нормальное падение электромагнитной волны на две границы раздела. Прямой метод	125
3.2.2. Предельные случаи структуры из двух поверхностей	129
3.2.3. Нормальное падение электромагнитной волны на две границы раздела. Метод усреднения	130
3.2.4. Электродинамические граничные условия для тонкой пластины. Метод усреднения	135
3.2.5. Получение граничных условий задачи о нормальном падении волны из общих условий для метода усреднения	143
3.2.6. Наклонное падение электромагнитной волны на две границы раздела	145
3.2.7. Наклонное падение, продольная поляризация. Прямой метод	146
3.2.8. Наклонное падение, продольная поляризация. Метод усреднения	149
3.2.9. Наклонное падение, поперечная поляризация. Прямой метод	150
3.2.10. Наклонное падение, поперечная поляризация. Метод усреднения	152
3.2.11. Сведение электродинамических задач к одномерной	153
3.2.12. Оценка корректности метода усреднения для электромагнитной волны	154
Выводы по главе 3	160
Глава 4. Коэффициенты отражения и прохождения при наклонном падении электромагнитной волны на три среды, разделенные двумя границами	164
4.1. Общие определения коэффициентов отражения и прохождения	164
4.1.1. Коэффициенты отражения и прохождения относительно произвольных точек пространства	166
4.1.2. Обобщенные коэффициенты выхода	168

4.2. Некоторые численные примеры расчета коэффициентов отражения и прохождения	169
4.2.1. Амплитуды волн при продольной поляризации	169
4.2.2. Коэффициенты отражения и прохождения при продольной поляризации	174
4.2.3. Обращение в нуль коэффициента отражения при угле Брюстера	175
4.2.4. Большая толщина второй среды при продольной поляризации	181
4.2.5. Амплитуды волн при поперечной поляризации	182
4.2.6. Коэффициенты отражения и прохождения при поперечной поляризации	184
4.2.7. Большая толщина второй среды при поперечной поляризации	185
4.3. Отражение и прохождение волны в случае магнитной среды	186
4.3.1. Продольная поляризация	188
4.3.2. Поперечная поляризация	190
4.3.3. Отрицательная магнитная проницаемость	191
4.3.4. Волны в сложных магнитных структурах	191
4.4. Аномальное влияние проводимости первой среды	192
Выводы по главе 4	195
Глава 5. Прямой метод для многослойных структур	199
5.1. Общая схема прямого метода	199
5.2. Одномерная волна. Распространение двух встречных волн	200
5.2.1. Две среды, разделенные одной границей	200
5.2.2. Три среды, разделенные двумя границами	203
5.2.3. Четыре среды, разделенные тремя границами	206
5.2.4. Пять сред, разделенные четырьмя границами	209
5.2.5. Алгоритмическая схема последовательного вычисления коэффициентов отражения и прохождения	213
5.3. Электромагнитная волна. Распространение двух встречных волн	215
5.3.1. Геометрия распространения электромагнитных волн через слоистые структуры	215
5.3.2. Нормальное падение	215
5.3.3. Наклонное падение	216
5.3.4. Особенности трехмерного характера задач о распространении электромагнитных волн	219
5.3.5. Некоторые особенности геометрии распространения электромагнитных волн	221
5.3.6. Нормальное падение электромагнитной волны на структуру, состоящую из пяти сред	224
5.3.7. Нормальное падение электромагнитной волны на структуру, состоящую из трех и четырех сред	229
5.3.8. Схема вычисления коэффициентов отражения и прохождения для нормального падения	230

5.3.9. Наклонное падение электромагнитной волны на структуру, состоящую из пяти сред	232
5.3.10. Продольная поляризация	233
5.3.11. Поперечная поляризация	237
5.3.12. Наклонное падение электромагнитной волны на структуру, состоящую из трех и четырех сред	240
5.3.13. Схема вычисления коэффициентов отражения и прохождения для наклонного падения	245
5.4. Общий характер коэффициентов отражения и прохождения для многослойных структур.	246
Выводы по главе 5	248
Глава 6. Основы метода матрицы на примере простых структур.	252
6.1. Некоторые полезные сведения из теории матриц	252
6.1.1. Матрица, как инструмент преобразования	252
6.1.2. Правила действий над матрицами и векторами в матричной записи	253
6.1.3. Некоторые полезные определения	255
6.1.4. Способ вычисления обратной матрицы	257
6.2. Общая схема метода матрицы	259
6.3. Матричные методы в различных областях применения.	261
6.4. Общее определение характеристической матрицы	263
6.5. Общая схема применения матриц для представления распространения волн через сложную структуру	264
6.5.1. Прямая и обратная матрицы для единичного участка волноведущей структуры	264
6.5.2. Прямая и обратная матрицы для произвольного числа участков волноведущей среды	266
6.5.3. Прямая матрица для двух участков волноведущей структуры	266
6.5.4. Прямая матрица при произвольном числе участков	268
6.5.5. Обратная матрица для двух участков волноведущей структуры	268
6.5.6. Обратная матрица при произвольном числе участков	269
6.6. Характеристическая матрица для волны, определяемой уравнением второго порядка	270
6.6.1. Прямая характеристическая матрица	271
6.6.2. Обратная характеристическая матрица	272
6.7. Характеристическая матрица для одномерной волны в экспоненциальном виде.	273
6.7.1. Прямая характеристическая матрица	273
6.7.2. Обратная характеристическая матрица	275
6.7.3. Упрощенный пример применения характеристических матриц	276

6.8. Применение метода матриц для задач о падении волны на границу	278
6.8.1. Отражение волны от границы	278
6.8.2. Прохождение волны через границу	281
Выводы по главе 6	283
Глава 7. Метод результирующей матрицы для одномерной волны	287
7.1. Метод матрицы для четырехполюсников	287
7.1.1. Определение четырехполюсников по их функциональному назначению	287
7.1.2. Два вида четырехполюсников по входам и выходам	288
7.1.3. Функциональный характер четырехполюсника	290
7.1.4. Замечание о направлении прохождения четырехполюсника	292
7.1.5. Результирующая матрица для цепочки из четырехполюсников	292
7.1.6. Замечание о порядке связи четырехполюсников	295
7.1.7. Цепочки из функционально различных видов четырехполюсников	296
7.2. Применение матричного аппарата четырехполюсников для волноведущей структуры	298
7.2.1. Общая постановка задачи	299
7.2.2. Результирующая матрица для двух сред, разделенных одной границей	300
7.2.3. Результирующая матрица для произвольного числа сред	303
7.2.4. Общая структура матрицы распространения (матрицы среды)	304
7.2.5. Общая структура матрицы связи (матрицы границы)	304
7.2.6. Замечание о произвольном числе сред	306
7.3. Применение матричного аппарата четырехполюсников для волн экспоненциального вида	307
7.3.1. Две однородные среды, разделенные одной границей	307
7.3.2. Матрица связи (матрица границы)	308
7.3.3. Матрицы распространения (матрицы сред)	309
7.3.4. Результирующие матрицы для структуры в целом	310
7.3.5. Матрицы распространения и связи для произвольного номера среды и границы	312
7.3.6. Три однородные среды, разделенные двумя границами	314
7.3.7. Замечание об экономии вычислений	316
7.3.8. Замечание о структуре результирующих матриц при произвольном числе сред	316
7.4. Метод матрицы передачи для одномерной волны	317
7.4.1. Общая схема метода	318
7.4.2. Матрица передачи для двух сред, разделенных одной границей	318
7.4.3. Матрица передачи для трех сред, разделенных двумя границами	320

7.4.4. Матрица передачи для многослойной структуры	323
7.4.5. Коэффициенты отражения и прохождения	324
7.4.6. Упрощенный вариант матрицы передачи для одного участка структуры	325
7.4.7. Результирующая матрица передачи для произвольного числа сред	326
7.5. Общая схема расчета распространения одномерных волн через многослойные структуры	327
7.5.1. Замечание о волновых уравнениях высоких порядков . . .	329
Выводы по главе 7	330
Глава 8. Метод результирующей матрицы для электромагнитной волны	334
8.1. Особенности распространения электромагнитных волн через многослойные структуры	334
8.2. Нормальное падение электромагнитной волны на структуру, содержащую произвольное число сред	335
8.2.1. Общая геометрия нормального падения	335
8.2.2. Результирующая матрица при произвольном числе сред	336
8.2.3. Нормальное падение в случае двух–пяти сред	338
8.2.4. Замечание о произвольном числе сред	342
8.3. Наклонное падение электромагнитной волны продольной поляризации	343
8.3.1. Общая геометрия наклонного падения	343
8.3.2. Углы прохождения и отражения	344
8.3.3. Результирующая матрица при произвольном числе сред	344
8.3.4. Наклонное падение в случае двух–пяти сред	346
8.4. Наклонное падение электромагнитной волны поперечной поляризации	350
8.4.1. Общая геометрия наклонного падения	350
8.4.2. Углы прохождения и отражения	350
8.4.3. Результирующая матрица при произвольном числе сред	350
8.4.4. Наклонное падение в случае двух–пяти сред	352
8.5. Коэффициенты отражения, прохождения и выхода	355
8.5.1. Коэффициенты отражения и прохождения	355
8.5.2. Обобщенные коэффициенты выхода	356
8.5.3. Коэффициенты отражения, прохождения и выхода при нормальном падении двух встречных электромагнитных волн на структуру из двух–пяти сред	357
Выводы по главе 8	361
Глава 9. Применение метода результирующей матрицы для расчета падения волны на наклонный барьер	364
9.1. Алгоритм расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру	364
9.1.1. Общая постановка задачи	364
9.1.2. Получение матриц распространения и связи	366

9.1.3. Структура цепочки из четырехполосников	369
9.1.4. Последовательное вычисление элементов результирующей матрицы	370
9.1.5. Результирующая матрица для произвольного числа сред	374
9.1.6. Переход от цепочки четырехполосников к волноведущей структуре	376
9.1.7. Коэффициенты отражения и прохождения	377
9.1.8. Схема пошагового определения амплитуд выходящих волн	378
9.1.9. Блок-схема алгоритма	379
9.2. Применение матричного алгоритма для расчета падения волны на наклонный барьер	380
9.2.1. Геометрические и волноведущие параметры структуры	380
9.2.2. Дискретная вариация длины барьера	384
9.2.3. Непрерывная вариация длины барьера	387
9.2.4. Вариация длины первого участка	390
9.2.5. Характерные области изменения волнового числа	392
9.2.6. Критерии осцилляций и хаоса	395
9.2.7. Кратное изменение зависимостей коэффициентов от длины барьера	397
9.2.8. Отражение и прохождение при большой длине структуры	398
9.2.9. Модель переотражений	402
9.2.10. Обобщение на электромагнитные волны	405
9.2.11. Замечание о возможности других решений	406
Выводы по главе 9	406
Литература	411

Введение

Вопросы распространения волн различной природы через слоистые и неоднородные среды издавна привлекают внимание исследователей [1–13]. До недавнего времени в большинстве решенных задач рассматривались электромагнитные и акустические волны, законы распространения которых в различных средах имеют много общего [3]. В оптике весьма подробно были исследованы два вида сред — диэлектрики, у которых проводимость полностью отсутствует, и металлы, проводимость которых весьма велика [2, 4, 5]. В диапазоне СВЧ, наряду с диэлектриками, значительное внимание до сих пор уделяется гиротропным средам — ферритам, которые по существу представляют собой также диэлектрики, гиротропные свойства которых проявляют резонансный характер [14–25]. В последнее время расширяются работы по фотонным, фононным и магнонным кристаллам, близким к диэлектрикам с сильно выраженными резонансными свойствами [26–28], по биизотропным, бианизотропным и киральным диэлектрическим средам [29], в том числе посвященные распространению в них обратных волн [30–40]. Особую группу сред составляют тонкие (наноразмерные) металлические пленки, проводимость которых меняется в зависимости от толщины за счет явления перколяции [41–44].

В то же время, несмотря на огромное многообразие перечисленных задач и многих других, здесь не упомянутых, математическое содержание большинства из них является сходным, то есть состоит в применении одних и тех же математических приемов при решении весьма похожих уравнений с близкими по виду граничными условиями. Наиболее широким классом здесь, по-видимому, являются задачи электродинамики, касающиеся распространения электромагнитных волн.

В этом плане одной из целей настоящей монографии является демонстрация возможности сведения подобных задач, в первую очередь касающихся электродинамики, к более простым задачам о распространении через слоистые структуры одномерных волн, простейшим примером которых являются волны в струне [45, с. 23–27], [46, с. 9–13]. Другой целью является рассмотрение различных методов решения таких задач и сравнение между ними, в том числе применительно к ряду неоднородностей характерных видов.

В значительной части монография представляет собой развернутую компиляцию из более ранних монографий авторов [47–55] в совокупности с дополняющими их статьями [56–93] и многочисленными разработками авторов, не нашедших места в вышедших публикациях.

Монографии [47–55] издавались последовательно в течение 2010–2017 годов, в хронологической согласованности с работами авторов. Дополняющие монографии статьи [56–93] также публиковались в разное время. По этой причине порядок и очередность изложения материала, в том числе хронологическая последовательность выхода публикаций, не являются оптимальными. Поэтому в настоящей монографии порядок изложения будет диктоваться не хронологическими рамками, а логикой и последовательностью развития самого материала.

Ввиду довольно значительного объема имеющегося в распоряжении авторов материала, они сочли целесообразным разделить его на несколько частей. Все части объединены общей тематикой, посвященной методам расчета распространения волн через многослойные среды, а также решению некоторых характерных задач. Первая часть содержит описание классических методов расчета, причем некоторых в определенном авторском преломлении. Следующие части предполагается посвятить еще некоторым классическим методам, не нашедшим отражения здесь из-за ограниченности объема, а также различным специфическим методам, в том числе впервые развитым авторами. Предполагается также привести различные примеры применения этих методов к конкретным задачам.

Настоящее издание включает девять глав. Кратко перечислим рассматриваемые вопросы по главам.

ПЕРВАЯ ГЛАВА представляет собой предварительное введение в вопросы распространения волн через слоистые среды. Рассмотрены основные уравнения колебаний и распространяющихся волн, в том числе для одномерного и электромагнитного случаев. Приведены физические основания рассматриваемых далее задач.

ВТОРАЯ ГЛАВА посвящена распространению волн в структуре из двух сред, разделенных одной границей. Рассмотрена одномерная волна, а также электромагнитные волны с различными углами падения и поляризациями. Получены амплитуды распространяющихся волн в обеих средах. Введены понятия коэффициентов отражения и прохождения. Кратко рассмотрена векторная модель распространения волн в структуре из двух сред.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА посвящена распространению одномерных и электромагнитных волн в структуре из трех сред, разделенных двумя границами, в том числе в случае одного слоя, окруженного двумя свободными пространствами. Выявлена необходимость и корректность нормировки волны на точку ее исхода. Получены коэффициенты отражения и прохождения. Для расчета использованы методы прямой и усреднения. На основе численных примеров рассмотрены достоинства, а также корректность и условия применимости метода усреднения.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА посвящена более общему рассмотрению коэффициентов отражения и прохождения. Для структуры из трех сред получены амплитуды распространяющихся волн, коэффициенты отражения и прохождения для одномерной волны, а также для нормального

и наклонного падения электромагнитной волны. Рассмотрены условия реализации явления Брюстера при малой и большой толщине центрального слоя, а также влияние на этот эффект магнитной проницаемости. Отмечена роль диссипации в первой среде, а также необходимость учета активной, реактивной и локализованной составляющих потоков энергии.

ПЯТАЯ ГЛАВА посвящена расчету распространения волн через многослойные структуры прямым методом. Рассмотрение ограничено случаем трех-пяти сред. Получены амплитуды распространяющихся волн во всех средах, а также коэффициенты отражения и прохождения для одномерных волн. Те же задачи решены для электромагнитных волн при нормальном падении, а также при наклонном падении в случае продольной и поперечной поляризации. Выявлено единство одномерной задачи с задачами о распространении электромагнитных волн различных видов. Приведена схема сведения электромагнитных задач к задаче о распространении одномерной волны.

ШЕСТАЯ ГЛАВА посвящена основам методологии расчета распространения волн через многослойные структуры с использованием метода матриц. Приведен краткий обзор необходимых сведений из теории матричного исчисления. В основной части главы приведены общие основания матричного метода, состоящего в нахождении характеристических матриц для отдельных сред с последующим их перемножением. Приведены примеры, иллюстрирующие применение метода матрицы для расчета распространения одномерных волн в простейших структурах.

СЕДЬМАЯ ГЛАВА посвящена более углубленному применению метода матрицы для задач о распространении одномерной волны через многослойные структуры. В качестве предварительной задачи рассмотрено применение метода матрицы для расчета распространения волн через структуру, состоящую из четырехполюсников. Методология расчета четырехполюсников распространена на случай одномерных волн. Рассмотрено получение результирующей матрицы для распространения встречных волн через структуру с произвольным числом слоев.

ВОСЬМАЯ ГЛАВА посвящена применению метода матрицы для задач о распространении электромагнитной волны через многослойные структуры. Рассмотрены случаи нормального и наклонного падения волны с продольной и поперечной поляризациями. Для всех случаев получены результирующие матрицы для структур, содержащих от двух до пяти сред, а также общая структура матрицы для произвольного числа сред. Получены коэффициенты прохождения, отражения и обобщенного выхода.

ДЕВЯТАЯ ГЛАВА посвящена применению метода результирующей матрицы для решения конкретной практической задачи — рассмотрению отражения и прохождения волны при ее падении на наклонный барьер. Глава состоит из двух частей. В первой части рассмотрены общие вопросы, необходимые для решения поставленной задачи, приведена схема алгоритма вычисления коэффициентов отражения и прохождения. Вторая часть посвящена именно задаче о падении

волны на наклонный барьер, то есть вычислению таких коэффициентов и определению их свойств.

Определенный опыт работы авторов со студентами и начинающими исследователями показывает, что при первоначальном ознакомлении с предметом заметные трудности вызывает освоение математического аппарата, значительная часть которого рассеяна в статьях, не всегда легко стыкующихся друг с другом. С целью преодоления подобного положения в начальных главах монографии приведены некоторые общие приемы работы с волновыми процессами, полезные для дальнейшего изложения. Более сложные методы расчета рассматриваются в соответствующих главах также с достаточной степенью подробности. Решены некоторые задачи прикладного характера. Приведено множество примеров, и даны методические рекомендации, предназначенные для самостоятельной работы учащихся. Для удобства пользования монография снабжена подробным оглавлением и в конце каждой главы приведены краткие выводы.

В работах, предшествовавших написанию настоящей монографии, в первую очередь [47–93], кроме основных авторов, принимали участие многочисленные соавторы. Важнейшую роль сыграло создание благоприятной атмосферы, способствующей успешному выполнению исследований. Прежде всего следует отметить коллектив кафедры радиофизики Сыктывкарского государственного университета, возглавляемой Л. Н. Котовым.

Первичные экспериментальные исследования распространения электромагнитных волн через тонкие пленки проводились при участии С. В. Некипелова, К. Бажукова, М. Баженова, Д. С. Безносикова, О. А. Кирпичевой, Ю. Е. Калинина, А. В. Ситникова, Е. А. Голубева.

Важную роль в обсуждении работы на всех ее этапах играли многочисленные дискуссии с В. С. Власовым, Д. С. Плешевым, А. П. Ивановым, Ф. Ф. Асадуллиным.

Другой организацией, где проводились исследования, являлся Институт радиотехники и электроники РАН, в частности лаборатория магнитных исследований, возглавляемая одним из соавторов настоящей монографии В. Г. Шавровым.

Предшествовавшие работе многочисленные исследования магнитных свойств тонких пленок проводились совместно с В. И. Зубковым и Э. Г. Локком при активном участии А. В. Вашковского.

В публикациях в журнале «Радиотехника и электроника» РАН важнейшая роль принадлежала ответственному секретарю редакции А. О. Раевскому и заведующей редакцией И. М. Столяровой.

За весьма оперативные многочисленные публикации в электронном «Журнале радиоэлектроники» авторы считают приятнейшим долгом поблагодарить главного редактора академика РАН В. А. Черепенина и заведующую редакцией Е. В. Корженевскую, а также секретаря редакции Д. Д. Кузнецова.

Важнейшая роль в создании благоприятных условий для работы, постоянное к ней внимание и неоднократное оказание административной и научной помощи принадлежит академику РАН Ю. В. Гуляеву.

Непосредственное выполнение работы, в том числе написание настоящей монографии, оказалось возможным благодаря помощи академика РАН С. А. Никитова.

Практически все работы были выполнены с деятельным участием многочисленного технического персонала, без помощи которого выполнение приведенного труда было бы совершенно невозможным.

Всем перечисленным участникам и соавторам работ авторы выражают огромную признательность, отдают низкий поклон и приносят глубочайшую благодарность. Величайшее спасибо вам, дорогие соратники, друзья и помощники!

Глава 1

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ КОЛЕБАНИЙ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН

Глава посвящена рассмотрению некоторых достаточно общих вопросов гармонических колебаний и распространения волн. Материал является вводным к последующему изложению, рассматриваемые вопросы приведены для общего ознакомления с целью создать у читателя определенный фундамент, позволяющий более широко подходить к основному материалу монографии.

В главе частично использован материал монографий [47, 48]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

1.1. Колебания гармонического осциллятора

В основе теоретического описания волновых процессов лежит волновое уравнение, содержащее вторые производные по координате и времени. Фундаментом такого рассмотрения является дифференциальное уравнение колебаний, содержащее вторую производную по времени и слагаемое, пропорциональное основной переменной.

Такое представление по сути является выражением второго закона Ньютона, связывающего ускорение движения тела с его массой и действующей на него силой.

Сила заставляет точку двигаться по координате, однако масса точки, благодаря своей инерционности, препятствует такому движению. В результате попеременного действия таких противоположных тенденций в системе возникают колебания, имеющие периодический характер.

В настоящем разделе рассматриваются некоторые наиболее общие вопросы, касающиеся колебаний гармонического осциллятора, образующие фундамент, необходимый для изучения волновых процессов. Рассмотрение проведено в наиболее простом виде, удобном в качестве основы для дальнейшего изложения. В силу различия и неполноты изложения такого материала в различных источниках, здесь приведен вывод основных формул в едином ключе с возможной полнотой и подробностью, доступной для непосредственного воспроизведения.

1.1.1. Свободные колебания гармонического осциллятора без затухания

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора без затухания имеет вид [94, с. 16, форм. (2.1)], [95, с. 15, форм. (1.1.3)], [96, с. 14, форм. (1.3), (1.4)]:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0, \quad (1.1)$$

где u — координатная переменная, соответствующая смещению осциллятора из положения равновесия (здесь определяемого значением $u = 0$), ω_0 — параметр, соответствующий частоте собственных колебаний осциллятора.

В таком виде это уравнение является классическим примером линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, стандартным приемом решения которого является представление решения в виде экспоненты, что позволяет свести дифференциальное уравнение к степенному алгебраическому [97, с. 206–207], [98, с. 107].

Итак, положим:

$$u = e^{\lambda t}. \quad (1.2)$$

Подставляя (1.2) в (1.1), сокращая на $e^{\lambda t}$ и разрешая полученное уравнение относительно λ , находим:

$$\lambda = \pm i\omega_0, \quad (1.3)$$

так что полное решение уравнения (1.1) принимает вид:

$$u = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}, \quad (1.4)$$

где A и B — произвольные постоянные, которые могут быть определены из начальных условий.

Выражая экспоненты через тригонометрические функции с помощью формулы Эйлера [99, с. 76, форм. (408.04)], получаем то же решение в тригонометрическом виде:

$$u = C \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t, \quad (1.5)$$

где C и D — произвольные постоянные, играющие ту же роль, что A и B в уравнении (1.4).

Таким образом, смещение осциллятора относительно положения равновесия u совершает со временем синусоидальные (гармонические) колебания с частотой ω_0 , период которых равен $2\pi/\omega_0$.

1.1.2. Свободные колебания гармонического осциллятора с затуханием

Общее уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора с затуханием имеет вид:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\beta \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0, \quad (1.6)$$

где $\beta \geq 0$ — параметр затухания, предполагаемый постоянным, ω_0 — частота свободных колебаний в отсутствие затухания (действительное число).

Замечание. Приведенный вид диссипативного слагаемого $2\beta du/dt$ предполагает, что сила трения линейно зависит от скорости. Заметим, что в механике такое предположение справедливо только в случае «жидкого трения» и находится в резком противоречии со случаем «сухого трения». Подробно этот вопрос рассмотрен, например, в [100, с. 28, с. 51]. В электротехнике такой вид слагаемого задается независимостью индуктивности и активного сопротивления от величины тока, что выполняется только при достаточно малых колебаниях. В рамках настоящей работы далее всегда будем считать коэффициент β величиной постоянной.

Подобно уравнению без затухания (1.1) решение уравнения (1.6) может быть получено в экспоненциальном или тригонометрическом виде. Рассмотрим эти решения по отдельности.

Экспоненциальное решение

Обратимся сначала к экспоненциальному решению. Будем искать его в виде:

$$u = e^{\lambda t}. \quad (1.7)$$

При этом

$$\frac{du}{dt} = \lambda e^{\lambda t}, \quad (1.8)$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t}. \quad (1.9)$$

Подставляя (1.7)–(1.9) в исходное уравнение (1.6) и разделяя на $e^{\lambda t}$, получаем уравнение для λ :

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (1.10)$$

Решая (1.10), находим:

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (1.11)$$

Введем обозначение:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (1.12)$$

При этом из (1.11) получаем:

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega. \quad (1.13)$$

Полное решение имеет вид:

$$u = e^{-\beta t} (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}). \quad (1.14)$$

Переходя к тригонометрическим функциям, получаем:

$$u = e^{-\beta t} [(A + B) \cos \omega t + i(A - B) \sin \omega t], \quad (1.15)$$

или, полагая $A + B = C$ и $i(A - B) = D$, получаем:

$$u = e^{-\beta t} [C \cos \omega t + D \sin \omega t], \quad (1.16)$$

где C и D — произвольные постоянные.

Тригонометрическое решение

Рассмотрим теперь тригонометрическое решение. Прямая подстановка тригонометрических функций $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ в исходное уравнение (1.6) показывает, что обе они решениями не являются. Однако эти функции удовлетворяют уравнению колебаний без затухания (1.1) при $\omega = \omega_0$:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0. \quad (1.17)$$

Поэтому можно предположить, что решение уравнения (1.6) имеет вид:

$$u = f(t) \cos \omega t \quad (1.18)$$

или

$$u = f(t) \sin \omega t, \quad (1.19)$$

где $f(t)$ — неизвестная функция времени.

Предположим сначала, что решение имеет вид (1.18). При этом получаем:

$$\frac{du}{dt} = \frac{df}{dt} \cos \omega t - \omega f \sin \omega t; \quad (1.20)$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \left(\frac{d^2 f}{dt^2} - \omega^2 f \right) \cos \omega t - 2\omega \frac{df}{dt} \sin \omega t. \quad (1.21)$$

Подставляя (1.18), (1.20) и (1.21) в исходное уравнение (1.6), получаем:

$$\left[\frac{d^2 f}{dt^2} + 2\beta \frac{df}{dt} + (\omega_0^2 - \omega^2) f \right] \cos \omega t - 2\omega \left(\frac{df}{dt} + \beta f \right) \sin \omega t = 0. \quad (1.22)$$

В силу произвольности времени это уравнение удовлетворяется только при равенстве нулю обоих коэффициентов при синусе и косинусе. Из этого получаем систему уравнений для ω и $f(t)$:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 2\beta \frac{df}{dt} + (\omega_0^2 - \omega^2) f = 0; \quad (1.23)$$

$$\frac{df}{dt} + \beta f = 0. \quad (1.24)$$

Из второго уравнения этой системы (1.24) получаем:

$$\frac{df}{f} = -\beta dt, \quad (1.25)$$

откуда находим

$$\ln f = -\beta t + C \quad (1.26)$$

или с точностью до постоянного коэффициента

$$f(t) = e^{-\beta t}. \quad (1.27)$$

Подставляя (1.27) в первое уравнение системы (1.23) получаем:

$$\beta^2 f - 2\beta^2 f + (\omega_0^2 - \omega^2) f = 0, \quad (1.28)$$

откуда, разделяя на f , находим

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2, \quad (1.29)$$

или, учитывая, что должно быть $\omega \geq 0$, получаем

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (1.30)$$

что совпадает с (1.12).

При этом выражение (1.18) принимает вид:

$$u = e^{-\beta t} \cos \omega t. \quad (1.31)$$

Аналогично можно показать, что выражение (1.19) также является решением уравнения (1.6) при выполнении условия (1.27).

Таким образом, полное решение уравнения (1.6) принимает вид:

$$u = e^{-\beta t} [E \cos \omega t + F \sin \omega t], \quad (1.32)$$

где E и F — произвольные постоянные, а ω определяется выражением (1.30).

Легко видеть, что полученное тригонометрическим путем решение (1.32) совпадает с решением (1.16), полученным с помощью экспоненты.

1.1.3. Вынужденные колебания гармонического осциллятора с затуханием

Проведенное рассмотрение касается только свободных колебаний. Однако в вынужденном режиме колебания приобретают ряд особенностей, в том числе могут иметь резонансный характер. Поэтому для полноты картины рассмотрим более общий случай, то есть вынужденные колебания гармонического осциллятора с затуханием. Как и ранее, сначала обратимся к экспоненциальному решению, после чего приведем его к тригонометрическому виду.

Экспоненциальное решение

Общее уравнение вынужденных колебаний гармонического осциллятора с затуханием имеет вид:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\beta\frac{du}{dt} + \omega_0^2u = f_0e^{ipt}, \quad (1.33)$$

где $\beta \geq 0$ — параметр затухания, ω_0 — частота свободных колебаний в отсутствие затухания, f_0 и p — амплитуда и частота вынуждающей силы.

Решим это уравнение методом вариации постоянных [97, с. 191–193], [98, с. 28–29].

Сначала рассмотрим вспомогательное однородное уравнение

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\beta\frac{dv}{dt} + \omega_0^2v = 0. \quad (1.34)$$

Предположим, что его решение имеет вид:

$$v = e^{\lambda t}. \quad (1.35)$$

При этом

$$\frac{dv}{dt} = \lambda e^{\lambda t}, \quad (1.36)$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t}. \quad (1.37)$$

Подставляя (1.35)–(1.37) в уравнение (1.34) и разделяя на $e^{\lambda t}$, получаем уравнение для λ :

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (1.38)$$

Решая (1.38), находим два его частных решения:

$$\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \quad (1.39)$$

$$\lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \quad (1.40)$$

При этом полное решение уравнения (1.38) принимает вид:

$$v = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t}, \quad (1.41)$$

где A и B — произвольные постоянные.

В соответствии с методом вариации постоянных, положим, что параметры A и B являются функциями времени, то есть (1.41) принимает вид:

$$u = A(t)e^{\lambda_1 t} + B(t)e^{-\lambda_2 t}. \quad (1.42)$$

При этом получаем:

$$\frac{du}{dt} = \frac{dA}{dt}e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 A e^{\lambda_1 t} + \frac{dB}{dt}e^{\lambda_2 t} + \lambda_2 B e^{\lambda_2 t}. \quad (1.43)$$

Положим

$$\frac{dA}{dt}e^{\lambda_1 t} + \frac{dB}{dt}e^{\lambda_2 t} = 0. \quad (1.44)$$

При этом получаем:

$$\frac{du}{dt} = \lambda_1 A e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 B e^{\lambda_2 t}. \quad (1.45)$$

Дифференцируем (1.45) еще раз:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \lambda_1 \frac{dA}{dt}e^{\lambda_1 t} + \lambda_1^2 A e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \frac{dB}{dt}e^{\lambda_2 t} + \lambda_2^2 B e^{\lambda_2 t}. \quad (1.46)$$

Подставляем (1.42), (1.45) и (1.46) в исходное уравнение (1.33):

$$\lambda_1 \frac{dA}{dt}e^{\lambda_1 t} + \lambda_1^2 A e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \frac{dB}{dt}e^{\lambda_2 t} + \lambda_2^2 B e^{\lambda_2 t} + 2\beta\lambda_1 A e^{\lambda_1 t} + 2\beta\lambda_2 B e^{\lambda_2 t} + \omega_0^2 A e^{\lambda_1 t} + \omega_0^2 B e^{-\lambda_2 t} = f_0 e^{ipt}. \quad (1.47)$$

Приводим подобные члены:

$$\lambda_1 \frac{dA}{dt}e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \frac{dB}{dt}e^{\lambda_2 t} + A(\lambda_1^2 + 2\beta\lambda_1 + \omega_0^2)e^{\lambda_1 t} + B(\lambda_2^2 + 2\beta\lambda_2 + \omega_0^2)e^{\lambda_2 t} = f_0 e^{ipt}. \quad (1.48)$$

Согласно (1.38), коэффициенты при A и B равны нулю, то есть

$$\lambda_1 \frac{dA}{dt}e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \frac{dB}{dt}e^{\lambda_2 t} = f_0 e^{ipt}. \quad (1.49)$$

Итак, в соответствии с (1.44) и (1.49), получена система уравнений для определения dA/dt и dB/dt :

$$\frac{dA}{dt}e^{\lambda_1 t} + \frac{dB}{dt}e^{\lambda_2 t} = 0, \quad (1.50)$$

$$\lambda_1 \frac{dA}{dt}e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \frac{dB}{dt}e^{\lambda_2 t} = f_0 e^{ipt}. \quad (1.51)$$

Таблицы коэффициентов этой системы имеют вид:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ \hline \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & f_0 e^{ipt} \\ \hline \end{array} \quad (1.52)$$

Главный детерминант равен:

$$D_0 = \begin{array}{|c|c|} \hline e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \hline \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \\ \hline \end{array} = (-\lambda_1 + \lambda_2)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}. \quad (1.53)$$

В соответствии с (1.39) и (1.40)

$$-\lambda_1 + \lambda_2 = -2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}; \quad (1.54)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2\beta. \quad (1.55)$$

При этом

$$D_0 = -2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} e^{-2\beta t}, \quad (1.56)$$

откуда

$$\frac{1}{D_0} = -\frac{e^{2\beta t}}{2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}. \quad (1.57)$$

Находим dA/dt и dB/dt :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{D_0} \left| \begin{array}{c|c} 0 & e^{\lambda_2 t} \\ \hline f_0 e^{ipt} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{array} \right| = \frac{f_0}{2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} e^{(ip+2\beta+\lambda_2)t}, \quad (1.58)$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{D_0} \left| \begin{array}{c|c} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ \hline \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & f_0 e^{ipt} \end{array} \right| = -\frac{f_0}{2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} e^{(ip+2\beta+\lambda_1)t}. \quad (1.59)$$

Показатели экспонент, с учетом (1.39) и (1.40), имеют вид:

$$ip + 2\beta + \lambda_2 = ip + \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}; \quad (1.60)$$

$$ip + 2\beta + \lambda_1 = ip + \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \quad (1.61)$$

При этом

$$\frac{dA}{dt} = \frac{f_0}{2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} e^{(ip+\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}, \quad (1.62)$$

$$\frac{dB}{dt} = -\frac{f_0}{2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} e^{(ip+\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}. \quad (1.63)$$

Интегрируя (1.62) и (1.63), находим:

$$A = \frac{f_0}{2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \cdot \frac{1}{ip + \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} e^{(ip+\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t} + C_A; \quad (1.64)$$

$$B = -\frac{f_0}{2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \cdot \frac{1}{ip + \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \cdot e^{(ip+\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t} + C_B, \quad (1.65)$$

где C_A и C_B — произвольные постоянные.

Таким образом, полное решение уравнения (1.33) имеет вид:

$$u = \frac{f_0}{2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \left\{ \frac{1}{ip + \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} - \frac{1}{ip + \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right\} e^{ipt} + e^{-\beta t} \left(C_A e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + C_B e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right). \quad (1.66)$$

При $\omega_0^2 < \beta^2$ преобразуем корень к виду:

$$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (1.67)$$

При этом (1.66) принимает вид:

$$u = -\frac{if_0}{2\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \left\{ \frac{1}{\beta + i(p - \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2})} - \frac{1}{\beta + i(p + \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2})} \right\} e^{ipt} + e^{-\beta t} (C_A e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t} + C_B e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t}). \quad (1.68)$$

В слагаемых в фигурных скобках освобождаемся от мнимости в знаменателе:

$$\frac{1}{\beta + i(p - \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2})} = \frac{\beta - i(p - \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2})}{(p^2 - \omega_0^2) - 2p\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}; \quad (1.69)$$

$$\frac{1}{\beta + i(p + \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2})} = \frac{\beta - i(p + \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2})}{(p^2 - \omega_0^2) + 2p\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (1.70)$$

Выполняя вычитание и вычисляя отдельно действительную и мнимую части, приводим выражение в фигурных скобках к виду:

$$\left\{ \dots \right\} = \frac{4p\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{(p^2 - \omega_0^2)^2 + 4p^2\beta^2} - i \frac{2(p^2 - \omega_0^2)\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{(p^2 - \omega_0^2)^2 + 4p^2\beta^2} = \frac{2\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} [2p\beta - i(p^2 - \omega_0^2)]}{(p^2 - \omega_0^2)^2 + 4p^2\beta^2}. \quad (1.71)$$

Подставляя это выражение в (1.68) и сокращая общие множители в числителе и знаменателе, получаем полное решение исходного уравнения (1.33) в виде:

$$u = -\frac{(p^2 - \omega_0^2) + i \cdot 2p\beta}{(p^2 - \omega_0^2)^2 + 4p^2\beta^2} f_0 e^{ipt} + e^{-\beta t} (C_A e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t} + C_B e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t}). \quad (1.72)$$

Приведение полученного решения к тригонометрическому виду

При использовании тригонометрического представления вынуждающая сила, в соответствии с формулой Эйлера [99, с. 76, форм. (408.04)], имеет вид:

$$e^{ipt} = \cos pt + i \sin pt. \quad (1.73)$$

При этом уравнение (1.33) принимает вид:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\beta \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = f_0 (\cos pt + i \sin pt). \quad (1.74)$$

Заменим в (1.72) экспоненту e^{ipt} на выражение (1.73), выполним умножение и воспользуемся формулой [99, с. 71, форм. (401.2)]:

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = \frac{a}{|a|} \sqrt{a^2 + b^2} \cos \left(\alpha - \arctg \frac{b}{a} \right), \quad (1.75)$$

справедливой при любых знаках a и b . Подробный вывод этой формулы приведен далее в разделе 1.6.4 (форм. (1.408)).

В результате применения этой формулы получаем числитель дроби в (1.72) без множителя $(-f_0)$ в виде:

$$\begin{aligned} & [(p^2 - \omega_0^2) + i2p\beta] e^{ipt} = \\ &= \frac{p^2 - \omega_0^2}{|p^2 - \omega_0^2|} \sqrt{(p^2 - \omega_0^2)^2 + 4p^2\beta^2} \cos \left(pt + \arctg \frac{2p\beta}{p^2 - \omega_0^2} \right) + \\ &+ i \sqrt{(p^2 - \omega_0^2)^2 + 4p^2\beta^2} \cos \left(pt - \arctg \frac{p^2 - \omega_0^2}{2p\beta} \right). \quad (1.76) \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (1.72) и производя сокращение получившейся дроби, приводим первое слагаемое формулы (1.72) к виду:

$$\begin{aligned} - \frac{(p^2 - \omega_0^2) + i \cdot 2p\beta}{(p^2 - \omega_0^2)^2 + 4p^2\beta^2} f_0 e^{ipt} &= - \frac{f_0}{\sqrt{(p^2 - \omega_0^2)^2 + 4p^2\beta^2}} \times \\ &\times \left[\frac{p^2 - \omega_0^2}{|p^2 - \omega_0^2|} \cos \left(pt + \arctg \frac{2p\beta}{p^2 - \omega_0^2} \right) + i \cos \left(pt - \arctg \frac{p^2 - \omega_0^2}{2p\beta} \right) \right]. \quad (1.77) \end{aligned}$$

Преобразуем теперь с помощью формулы Эйлера [99, с. 76, форм. (408.04)] выражение в скобках во втором слагаемом формулы (1.72):

$$\begin{aligned} C_A e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t} + C_B e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t} &= \\ &= (C_A + C_B) \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t \right) + i(C_A - C_B) \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t \right). \quad (1.78) \end{aligned}$$

Подставляя (1.77) и (1.78) в (1.72), получаем полное решение исходного уравнения (1.33) в тригонометрическом виде:

$$\begin{aligned} u &= - \frac{f_0}{\sqrt{(p^2 - \omega_0^2)^2 + 4p^2\beta^2}} \times \\ &\times \left[\frac{p^2 - \omega_0^2}{|p^2 - \omega_0^2|} \cos \left(pt + \arctg \frac{2p\beta}{p^2 - \omega_0^2} \right) + i \cos \left(pt - \arctg \frac{p^2 - \omega_0^2}{2p\beta} \right) \right] + \\ &+ e^{-\beta t} \left[(C_A + C_B) \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t \right) + i(C_A - C_B) \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t \right) \right]. \quad (1.79) \end{aligned}$$

Действительная и мнимая части этого решения имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(u) = & -\frac{f_0}{\sqrt{(p^2 - \omega_0^2)^2 + 4p^2\beta^2}} \cdot \frac{p^2 - \omega_0^2}{|p^2 - \omega_0^2|} \cos\left(pt + \operatorname{arctg} \frac{2p\beta}{p^2 - \omega_0^2}\right) + \\ & + e^{-\beta t}(C_A + C_B) \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t\right); \end{aligned} \quad (1.80)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(u) = & -\frac{f_0}{\sqrt{(p^2 - \omega_0^2)^2 + 4p^2\beta^2}} \cos\left(pt - \operatorname{arctg} \frac{p^2 - \omega_0^2}{2p\beta}\right) + \\ & + e^{-\beta t}(C_A - C_B) \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t\right), \end{aligned} \quad (1.81)$$

или

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(u) = & -\frac{f_0}{\sqrt{(p^2 - \omega_0^2)^2 + 4p^2\beta^2}} \sin\left(pt - \operatorname{arctg} \frac{p^2 - \omega_0^2}{2p\beta} + \frac{\pi}{2}\right) + \\ & + e^{-\beta t}(C_A - C_B) \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t\right). \end{aligned} \quad (1.82)$$

Таким образом, если вынуждающая сила определяется действительной частью выражения (1.73) (через косинус), то в решении надо брать только действительную часть (1.80), а если мнимой (через синус), то мнимую (1.81) или (1.82).

1.2. Распространение одномерной волны

Если в качестве объекта колебаний рассматривается не точка, а структура или среда, распределенная по координате, то конечность скорости распространения возмущения, обусловленная жесткостью среды, приводит к тому, что противоположное действие возвращающей силы и силы инерции попеременно проявляется в различные моменты времени и при различных значениях координаты. В результате колебания в разных точках структуры происходят не синхронно по времени, а с определенным сдвигом по фазе, что проявляется как распространение волн.

В настоящем разделе рассматриваются некоторые наиболее общие вопросы, касающиеся распространения волн. Как и ранее, рассмотрение проведено в наиболее простом виде, необходимым в качестве фундамента для дальнейшего изложения. Вывод основных формул проведен в едином ключе с возможной полнотой и подробностью, доступной для непосредственного воспроизведения.

1.2.1. Волновое уравнение для одномерной волны в среде без затухания

Главным предметом ближайшего рассмотрения будет распространение одномерной волны. Волну будем считать «одномерной» в том отношении, что переменная, описывающая волновой процесс, зависит только

от одной координаты, которую обозначим через x . Зависимость от времени при этом сохраняется в общем виде. То есть будем рассматривать функцию

$$G = G(x, t), \quad (1.83)$$

которая далее будет подчиняться волновому уравнению, в простейшем случае имеющему вид

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0, \quad (1.84)$$

где параметр v имеет физический смысл фазовой скорости волны.

Хрестоматийным примером одномерной волны является волна малых поперечных колебаний в струне, не сопротивляющейся изгибу [45, с. 23–27, форм. (5)]. В этом случае скорость v связана с силой натяжения T_0 и линейной плотностью струны ρ выражением [45, с. 26, форм. (5)]:

$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}. \quad (1.85)$$

Для целей оптики подобные волны именуется «скалярными». Их подробную трактовку можно найти, например, в [2, с. 38–48].

При гармонической зависимости от времени вида $e^{i\omega t}$ традиционно вводится волновое число

$$k = \frac{\omega}{v}, \quad (1.86)$$

так что (1.84) принимает вид

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + k^2 G = 0. \quad (1.87)$$

1.2.2. Свободное распространение одномерной волны в среде без затухания

Исходя из общего уравнения (1.84), рассмотрим общую схему распространения одномерной волны. Для решения волнового уравнения (1.84) имеются два стандартных приема: метод распространяющихся волн Даламбера [45, с. 50–52] и метод разделения переменных Фурье [45, с. 82–88].

Первый метод применяется при решении задач о распространении волн в бесконечно протяженном свободном пространстве или в безграничной однородной среде. В этом случае в качестве определяющих параметров при решении задачи используются начальные условия — координата и скорость волны в начальный момент времени.

Второй метод применяется при решении задач о распространении волн в среде, ограниченной при каких-то значениях координат, причем на границах параметры среды меняются скачком, а между границами остаются постоянными. Определяющими параметрами здесь являются граничные условия, состоящие в задании на границе среды значения переменной и ее первой производной по координате.

В обоих случаях используется одно и то же уравнение второго порядка, поэтому для полной определенности начальных или граничных условий требуется два.

Замечание. Понятие одномерной волны не ограничивается рамками волнового уравнения второго порядка вида (1.84). В более сложных задачах, например, при учете жесткости струны, уравнение приобретает третий порядок [101, форм. (98)]. При этом смещение струны, будучи поперечным, по-прежнему определяется только одной координатой, то есть волна остается одномерной.

Основным предметом рассмотрения настоящей работы является распространение волн в многослойных средах, представляющих собой совокупность слоев, разделенных границами. Поэтому при решении таких задач следует употреблять метод разделения переменных Фурье. Покажем реализацию этого метода в простейшем случае одномерной волны, то есть для уравнения (1.84):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0. \quad (1.88)$$

В соответствии с методом разделения переменных [45, с. 82–88], будем искать решение в виде:

$$G = X(x)T(t). \quad (1.89)$$

Подставим (1.89) в (1.88), разделим все на XT , а также на v^2 , после чего разнесем члены, зависящие от x и от t , в разные части уравнения и приравняем их постоянной величине μ :

$$\frac{1}{v^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\mu, \quad (1.90)$$

где μ предполагается действительной, а знак минус принципиального значения не имеет и взят таким для вычислительного удобства.

Рассмотрим сначала уравнение для T :

$$T'' + \mu v^2 T = 0. \quad (1.91)$$

Подставляя $T = e^{\lambda t}$ в (1.91), получаем уравнение для λ :

$$\lambda^2 + \mu v^2 = 0, \quad (1.92)$$

откуда находим два возможных значения λ

$$\lambda = \pm iv\sqrt{\mu}. \quad (1.93)$$

Решение уравнения (1.91) принимает вид:

$$T = A_1 e^{iv\sqrt{\mu}t} + A_2 e^{-iv\sqrt{\mu}t}, \quad (1.94)$$

где $A_{1,2}$ — произвольные постоянные.

Два слагаемых в выражении (1.94) отражают два возможных направления течения времени. Будем далее считать время однонаправленным,

для чего будем рассматривать зависимость от времени только в виде $e^{iv\sqrt{\mu}t}$. При этом из (1.94) получаем:

$$T = A_1 e^{iv\sqrt{\mu}t}. \quad (1.95)$$

Рассмотрим теперь получаемое из (1.90) уравнение для X :

$$X'' + \mu X = 0. \quad (1.96)$$

Подставляя $X = e^{\vartheta x}$ в (1.96), получаем уравнение для ϑ :

$$\vartheta^2 + \mu = 0, \quad (1.97)$$

откуда находим два возможных значения ϑ

$$\vartheta_{1,2} = \pm i\sqrt{\mu}. \quad (1.98)$$

Решение уравнения (1.96) принимает вид:

$$X = B_1 e^{i\sqrt{\mu}x} + B_2 e^{-i\sqrt{\mu}x}, \quad (1.99)$$

где $B_{1,2}$ — произвольные постоянные.

Подставляя (1.95) и (1.99) в (1.89), получаем полное решение уравнения (1.88) в виде:

$$G(x, t) = D_1 e^{i(v\sqrt{\mu}t + \sqrt{\mu}x)} + D_2 e^{i(v\sqrt{\mu}t - \sqrt{\mu}x)}, \quad (1.100)$$

где $D_{1,2}$ — произвольные постоянные.

Можно видеть, что полученное решение при действительных выражениях в скобках является периодическим по времени и по координате, как это и должно быть для одномерной волны.

Введем обозначения, соответствующие физическому смыслу задачи. Так, для характеристики зависимости от времени введем частоту:

$$\omega = v\sqrt{\mu}. \quad (1.101)$$

При этом зависимость от времени приобретает вид $e^{i\omega t}$.

Период колебаний во времени определяется выражением

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.102)$$

Для характеристики зависимости от координаты введем волновое число:

$$k = \sqrt{\mu}, \quad (1.103)$$

так что зависимость от координаты приобретает два возможных вида e^{ikx} и e^{-ikx} .

Длина волны, то есть расстояние по x , на котором величина kx меняется на 2π , так что фаза волны сохраняется (в силу равенства $e^{i2\pi} = 1$), в обоих случаях определяется выражением

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (1.104)$$

При таких обозначениях входящая в уравнение (1.88) фазовая скорость волны v , как отношение длины волны ко времени периода (то есть частное от деления пути на время его прохождения), принимает вид:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}. \quad (1.105)$$

Преобразуем выражение (1.100) к более удобному виду, для чего переставим местами слагаемые и введем новые обозначения постоянных коэффициентов: $D_1 \rightarrow B$, $D_2 \rightarrow A$. Подставляя (1.101), (1.103), получаем полное решение уравнения (1.88) в виде:

$$G(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + Be^{i(\omega t + kx)}. \quad (1.106)$$

Здесь первое слагаемое определяет волну, распространяющуюся в положительном направлении оси Ox , а второе — в отрицательном. Постоянные A и B могут быть определены из граничных условий. Такой вид решения будет далее основным при рассмотрении распространения одномерных волн через многослойные структуры.

1.2.3. Свободное распространение одномерной волны в среде с затуханием

Рассмотрим уравнение для одномерной волны в среде с затуханием:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial G}{\partial t} - v^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0. \quad (1.107)$$

Здесь затухание описывается вторым слагаемым. В случае струны это уравнение выражает баланс сил, действующих на участок струны (с точностью до деления на плотность), при этом второе слагаемое выражает силу, пропорциональную скорости движения этого участка, то есть аналогично силе трения (которая равна произведению скорости на коэффициент трения). При этом β — параметр затухания, а v имеет физический смысл фазовой скорости волны в отсутствие затухания. Затухание положительно если $\beta > 0$. Это будет видно далее из решения уравнения по времени.

Уравнение (1.107) соответствует свободному распространению волны. Это следует из того, что в нем отсутствует какая-либо вынуждающая сила. Такой режим имеет место в том случае, если волна, будучи однократно возбужденной в одной точке, например путем задания начального отклонения, дальше остается предоставленной самой себе и распространяется без какого-либо постороннего влияния. То есть возбуждение имеет как бы ударный импульсный характер, после чего его действие прекращается. В качестве наглядной аналогии можно иметь в виду пример волн, расходящихся кругами от брошенного в воду камня.

Обратимся к решению уравнения (1.107), для чего воспользуемся методом разделения переменных [45, с. 82–88], то есть положим:

$$G = X(x)T(t). \quad (1.108)$$

Подставим (1.108) в (1.107), разделим все на XT , а также на v^2 , после чего разнесем члены, зависящие от x и от t , в разные части уравнения и приравняем их постоянной разделения:

$$\frac{1}{v^2} \frac{T''}{T} + \frac{2\beta}{v^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\mu. \quad (1.109)$$

Рассмотрим сначала уравнение для T :

$$T'' + 2\beta T' + \mu v^2 T = 0. \quad (1.110)$$

Подставляя $T = e^{\lambda t}$ в (1.110), получаем уравнение для λ :

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \mu v^2 = 0, \quad (1.111)$$

откуда

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\mu v^2 - \beta^2}. \quad (1.112)$$

Решение уравнения (1.110) принимает вид:

$$T = e^{-\beta t} \left(A_1 e^{i\sqrt{\mu v^2 - \beta^2} \cdot t} + A_2 e^{-i\sqrt{\mu v^2 - \beta^2} \cdot t} \right), \quad (1.113)$$

где $A_{1,2}$ — произвольные постоянные.

Из (1.113) видно, что при $\beta > 0$ колебания затухают, то есть их амплитуда со временем уменьшается. При $\mu v^2 - \beta^2 > 0$ колебания являются периодическими, при $\mu v^2 - \beta^2 < 0$ — аperiodическими.

Два слагаемых в выражении (1.113) отражают два возможных направления течения времени. Будем далее считать время однонаправленным, для чего будем рассматривать зависимость от времени только в виде $e^{i\sqrt{\mu v^2 - \beta^2} t}$. При этом из (1.113) получаем:

$$T = e^{-\beta t} A_1 e^{i\sqrt{\mu v^2 - \beta^2} t}. \quad (1.114)$$

Рассмотрим теперь уравнение для X :

$$X'' + \mu X = 0. \quad (1.115)$$

Подставляя $X = e^{\vartheta x}$ в (1.115), получаем уравнение для ϑ :

$$\vartheta^2 + \mu = 0, \quad (1.116)$$

откуда

$$\vartheta_{1,2} = \pm i\sqrt{\mu}. \quad (1.117)$$

Решение (1.115) принимает вид:

$$X = B_1 e^{i\sqrt{\mu} x} + B_2 e^{-i\sqrt{\mu} x}, \quad (1.118)$$

где $B_{1,2}$ — произвольные постоянные.

Полное решение уравнения (1.107) принимает вид:

$$G = D_1 e^{-\beta t} e^{i(\sqrt{\mu v^2 - \beta^2} t - \sqrt{\mu} x)} + D_2 e^{-\beta t} e^{i(\sqrt{\mu v^2 - \beta^2} t + \sqrt{\mu} x)}, \quad (1.119)$$

где значения постоянных $D_{1,2}$, равные произведению A_1 на $B_{1,2}$, могут быть определены из задания профиля волны по координате в начальный момент времени.

В решении (1.119) периодичность во времени определяется множителем $\sqrt{\mu v^2 - \beta^2}$, а периодичность в пространстве — множителем $\sqrt{\mu}$, поэтому можно ввести стандартные обозначения для частоты и волнового числа:

$$\omega = \sqrt{\mu v^2 - \beta^2}, \quad (1.120)$$

$$k = \sqrt{\mu}. \quad (1.121)$$

При этом решение (1.119) принимает вид:

$$G = D_1 e^{-\beta t} e^{i(\omega t - kx)} + D_2 e^{-\beta t} e^{i(\omega t + kx)}. \quad (1.122)$$

Замечание. Из (1.120) можно видеть, что частота волны, распространяющейся в среде с затуханием, получается более низкой, чем частота волны в среде без затухания (1.101). С физической стороны такое уменьшение частоты представляется естественным, так как при увеличении сопротивления среды колебаться ее частицам становится труднее, в результате чего волна колеблется медленнее.

В выражении (1.122) затухание волны описывается множителем $e^{-\beta t}$, зависящим от времени. В то же время, распространение волны сопровождается затуханием в пространстве. Для того чтобы перейти к затуханию в пространстве, в каждом из слагаемых выражения (1.119) будем следить за постоянной фазой, то есть когда мнимые показатели экспонент в скобках будут сохраняться постоянными, в простейшем случае равными нулю. При этом для первого слагаемого из условия

$$\sqrt{\mu v^2 - \beta^2} t - \sqrt{\mu} x = 0 \quad (1.123)$$

получаем

$$t_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\mu v^2 - \beta^2}} x. \quad (1.124)$$

Аналогично для второго слагаемого из условия

$$\sqrt{\mu v^2 - \beta^2} t + \sqrt{\mu} x = 0 \quad (1.125)$$

получаем

$$t_2 = -\sqrt{\frac{\mu}{\mu v^2 - \beta^2}} x. \quad (1.126)$$

Подставляя (1.124) и (1.126) в (1.119), получаем решение, затухающее в пространстве:

$$G = D_1 e^{-\beta \sqrt{\frac{\mu}{\mu v^2 - \beta^2}} x} e^{i(\sqrt{\mu v^2 - \beta^2} t - \sqrt{\mu} x)} + \\ + D_2 e^{\beta \sqrt{\frac{\mu}{\mu v^2 - \beta^2}} x} e^{i(\sqrt{\mu v^2 - \beta^2} t + \sqrt{\mu} x)}. \quad (1.127)$$

Вводя обозначения для частоты (1.120) и волнового числа (1.121), приведем (1.127) к виду:

$$G = D_1 e^{-\beta \frac{k}{\omega} x} e^{i(\omega t - kx)} + D_2 e^{\beta \frac{k}{\omega} x} e^{i(\omega t + kx)}. \quad (1.128)$$

Первое слагаемое в этом выражении описывает волну, распространяющуюся в положительном направлении оси Ox , а второе — волну, распространяющуюся в отрицательном направлении той же оси. При этом, так как $\beta k/\omega > 0$ (ибо все входящие в это выражение параметры положительны), то амплитуды той и другой волн в направлении их распространения спадают.

Из сравнения (1.128) с (1.122) можно видеть, что роль времени t в коэффициенте затухания здесь играет выражение $\frac{k}{\omega} x$ (с учетом уменьшения x при движении волны в отрицательном направлении оси Ox). В силу единства волны в обоих случаях, эти выражения можно приравнять, то есть положить:

$$\frac{k}{\omega} x = t. \quad (1.129)$$

Поскольку в этом случае фаза волны не меняется, то можно считать, что отношение координаты ко времени соответствует фазовой скорости волны [96, с. 195, форм. (11.40)], то есть

$$v_p = \frac{x}{t} = \frac{\omega}{k}, \quad (1.130)$$

что также можно получить из показателей экспонент периодических сомножителей.

Дисперсионное соотношение, фазовая и групповая скорости

Подставляя (1.121) в (1.120), то есть исключая μ , находим связь между ω и k , а именно дисперсионное соотношение:

$$\omega = \sqrt{k^2 v^2 - \beta^2}. \quad (1.131)$$

Фазовая скорость определяется стандартным выражением (1.130), подставляя в которое (1.131), получаем:

$$v_p = \frac{\sqrt{k^2 v^2 - \beta^2}}{k}. \quad (1.132)$$

Групповую скорость запишем в соответствии с классическим определением [4, с. 430], [96, с. 198, форм. (11.60)]:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}, \quad (1.133)$$

откуда с помощью (1.131), получаем

$$v_g = \frac{v^2 k}{\sqrt{k^2 v^2 - \beta^2}}. \quad (1.134)$$

Из (1.132) и (1.134) можно видеть, что выполняется соотношение

$$v_p v_g = v^2. \quad (1.135)$$

1.2.4. Распространение одномерной волны заданной частоты в среде с затуханием

Как и ранее, будем рассматривать уравнение для одномерной волны в среде с затуханием:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial G}{\partial t} - v^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0. \quad (1.136)$$

Это уравнение совпадает с приведенным в разделе 1.2.3 уравнением (1.107). Там это уравнение решено полностью последовательным методом разделения переменных. Рассмотрен случай свободного распространения волны, возбуждаемой путем начального отклонения, после чего волна предоставляется самой себе. При этом частота волны определяется параметрами среды, так что, благодаря затуханию, снижается относительно бездиссипативного случая.

Однако возможен другой вариант, когда колебания в волне возбуждаются не однократно в единой точке путем начального отклонения, а непрерывно во времени, так что частота ее остается постоянной. Такой случай имеет место, например, если в точке действует источник периодических колебаний, так что частота волны задается только этим источником. В этом случае распространение волны можно считать стационарным (то есть установившемся во времени), причем, поскольку частота зафиксирована источником, то волновое число, то есть длина волны уже определяется параметрами среды

Установление стационарного режима в этом случае подобно установлению вынужденных колебаний в системе с одной степенью свободы [94, с. 55–58]. Включение вынуждающей силы в начальный момент времени вызывает собственные колебания системы, которые в совокупности с вынужденными образуют биения. С течением времени собственные колебания постепенно затухают, так что биения сглаживаются и система переходит к колебаниям с постоянной амплитудой, частота которых равна частоте вынуждающей силы.

В волноведущей структуре включение непрерывного возбуждения в одной точке сначала также вызывает собственную волну, которая в совокупности с вынужденной образует биения, а после затухания

собственной волны остается только вынужденная, частота которой задается частотой возбуждающего источника, а волновое число (или длина волны) определяется параметрами среды.

Поскольку частота остается действительной, то, благодаря затуханию, волновое число приобретает комплексный характер.

При этом начальные условия уже не играют никакой роли, так как в любом случае в среде остается только вынужденная волна, параметры которой во времени остаются стационарными.

В качестве наглядного примера можно представить возбуждение волновода помещенной внутри него проволочной антенной. Подача периодического сигнала на антенну в установившемся режиме вызывает распространение волны в волноводе, причем частота такой волны определяется частотой задающего сигнала, а длина – поперечными размерами волновода. Для случая распространения магнитостатических волн в феррите подобная ситуация применительно к линиям задержки рассмотрена в [17, с. 350], [18, с. 183].

Прохождение волны через границу между двумя диссипативными средами также можно рассматривать как генерацию проходящей и отраженной волн, создаваемых периодическим во времени возмущением, локализованным на границе. При этом начальные условия также не являются существенными в силу стационарности режима. Именно такие задачи будут рассматриваться далее в рамках настоящей монографии.

1.2.5. Распространение волны в рамках задачи без начальных условий

Подобные задачи, то есть распространение волны в стационарном режиме, относятся к классическому виду «задач без начальных условий» [45, с. 106–110]. Приведем вкратце основной метод решения таких задач. Итак, следуя классической методике, рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial G}{\partial t} - v^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0 \quad (1.137)$$

с граничными условиями

$$G(0, t) = 0; \quad (1.138)$$

$$G(l, t) = P e^{i\omega t}. \quad (1.139)$$

В случае струны первое граничное условие при $x = 0$ соответствует закрепленному концу, а второе при $x = l$ означает, что этот конец движется во времени по закону $e^{i\omega t}$ с амплитудой P . В общем случае такое движение конца можно рассматривать как внешнее возбуждение.

В установившемся режиме предполагается, что струна колеблется с той же частотой, что и движущийся конец, так что решение ищется в виде:

$$G(x, t) = X(x)e^{i\omega t}. \quad (1.140)$$

Подстановка (1.140) в (1.137) приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{\omega^2 - i2\beta\omega}{v^2} X = 0. \quad (1.141)$$

Введем обозначение

$$k^2 = \frac{\omega^2 - i2\beta\omega}{v^2}, \quad (1.142)$$

при котором уравнение (1.141) принимает вид

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + k^2 X = 0, \quad (1.143)$$

так что параметр k имеет физический смысл волнового числа.

Предполагая, что решение уравнения (1.143) имеет вид:

$$X = e^{\lambda x}, \quad (1.144)$$

получаем уравнение для λ

$$\lambda^2 = k^2, \quad (1.145)$$

откуда находим

$$\lambda = \pm k, \quad (1.146)$$

так что полное решение уравнения (1.143) принимает вид:

$$X = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}, \quad (1.147)$$

где A и B — произвольные постоянные (здесь в первом слагаемом используется значение $\lambda = -k$, а во втором $\lambda = +k$, что принципиального значения не имеет и сделано лишь для удобства дальнейшего рассмотрения). Полученное выражение представляет собой общий вид решения уравнения (1.143) без учета граничных условий. Полное решение уравнения (1.137) с зависимостью от времени, входящей в (1.140), принимает вид:

$$G(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + Be^{i(\omega t + kx)}, \quad (1.148)$$

то есть представляет собой две волны, первая из которых распространяется в положительном направлении оси Ox , а вторая — в отрицательном.

Решение (1.148) получено без учета граничных условий, так что постоянные A и B могут быть заданы произвольно. Граничные условия позволяют найти эти постоянные в явном виде. Покажем вкратце, как это можно сделать.

Начнем с того, что из общих граничных условий (1.138)–(1.139) выделим условия для $X(x)$:

$$X(0) = 0; \quad (1.149)$$

$$X(l) = P. \quad (1.150)$$

Подставляя (1.147) в (1.149) и (1.150), получаем систему уравнений для определения A и B :

$$A + B = 0; \quad (1.151)$$

$$Ae^{ikl} + Be^{ikl} = P. \quad (1.152)$$

Решая эту систему, получаем:

$$A = -\frac{iP}{2 \sin(kl)}; \quad (1.153)$$

$$B = \frac{iP}{2 \sin(kl)}. \quad (1.154)$$

Подстановка (1.153), (1.154) в (1.148) дает решение задачи для X в виде:

$$X = -\frac{iP}{2 \sin(kl)} e^{ikx} + \frac{iP}{2 \sin(kl)} e^{-ikx} = P \frac{\sin(kx)}{\sin(kl)}. \quad (1.155)$$

Полное решение исходной задачи (1.137)–(1.139) имеет вид:

$$G(x, t) = P \frac{\sin(kx)}{\sin(kl)} e^{i\omega t}. \quad (1.156)$$

Можно видеть, что такое решение имеет резонансный характер. Так, при действительном значении k функция G будет иметь расходимость (за счет стремления синуса к нулю) при условии

$$k = \frac{\pi}{l} n, \quad (1.157)$$

где $n = 1, 2, \dots$ — целое число. Резонанс по частоте будет определяться тем обстоятельством, что волновое число связано с частотой соотношением (1.142), из которого при $\beta = 0$ остается только действительная часть, то есть

$$k \rightarrow \frac{\omega}{v}, \quad (1.158)$$

так что резонансные частоты будут иметь вид

$$\omega_n = \frac{\pi v}{l} n. \quad (1.159)$$

При комплексном k расходимость будет заменяться ограничением на достаточно высоком уровне, определяемом отношением мнимой части k к действительной. То есть будет классический режим резонансов на стоячих волнах, когда по длине струны будет укладываться целое число полуволн. Заметим, что резонанс будет наблюдаться только до тех пор, пока мнимая часть k не станет настолько большой, что волна успеет затухнуть, еще не дойдя до противоположного конца струны. В этом случае резонансный режим сменится аperiodическим без проявления частотной селекции.

Замечание. Рассмотренный здесь режим возбуждения резонансных колебаний на конце принципиально отличается от режима возбуждения вынуждающей силой, равномерно приложенной по всей длине

отрезка струны. Так, в пренебрежении затуханием, при возбуждении на конце амплитуда резонансных пиков по мере увеличения частоты остается постоянной, тогда как при возбуждении однородной силой амплитуда пиков при увеличении частоты падает, так как сказывается интеграл перекрытия. Влияние интеграла перекрытия на амплитуду стоячих резонансов, например для случая спин-волнового резонанса, можно найти в [101, раздел 4, форм. (50)].

Рассмотрим несколько более подробно роль второго слагаемого в уравнении (1.137), приводящего к комплексному виду волнового числа и связанному с этим затуханием волны при распространении. Так, из (1.142) можно видеть, что волновое число k , кроме действительной, содержит мнимую составляющую. Положим

$$k = \eta - i\xi, \quad (1.160)$$

где η и ξ — действительные параметры, которые будем считать положительными (отрицательные знаки приведут лишь к изменению направления распространения волн, не нарушая общности задачи).

Для выражения обеих частей k в явном виде воспользуемся формулой для извлечения квадратного корня из комплексного числа (раздел 1.6.2, форм. (1.365)):

$$\sqrt{a - ib} = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right). \quad (1.161)$$

С помощью этой формулы из (1.142), оставляя только знак плюс, получаем

$$\eta = \frac{\omega}{v} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\omega^2}} \right)}; \quad (1.162)$$

$$\xi = \frac{\omega}{v} \sqrt{\frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\omega^2}} \right)}. \quad (1.163)$$

Подставляя (1.160) в (1.148), получаем

$$G(x, t) = Ae^{-\xi x} e^{i(\omega t - \eta x)} + Be^{\xi x} e^{i(\omega t + \eta x)}, \quad (1.164)$$

то есть амплитуда обеих волн по мере распространения убывает, как это и следует из диссипативного характера среды.

Проверка показывает, что при значениях мнимой части волнового числа, не достаточной для того, чтобы в значительной степени уменьшить амплитуду колебаний на длине отрезка струны, резонансный характер частотной зависимости сохраняется. Однако по мере увеличения частоты амплитуда резонансных пиков падает, а ширина увеличивается, вплоть до того, что частотная зависимость вместо острых пиков приобретает характер, близкий к синусоидальному, после чего расплывается полностью.

Дисперсионное соотношение, фазовая и групповая скорости

Для нахождения дисперсионного соотношения для действительной части волнового числа, разрешим (1.162) относительно частоты ω :

$$\omega = \frac{\eta^2 v^2}{\sqrt{\eta^2 v^2 + \beta^2}}. \quad (1.165)$$

Из этого соотношения получаем фазовую и групповую скорости:

$$v_p = \frac{\omega}{\eta} = \frac{\eta v^2}{\sqrt{\eta^2 v^2 + \beta^2}}. \quad (1.166)$$

$$v_g = \frac{d\omega}{d\eta} = \frac{\eta v^2 (\eta^2 v^2 + 2\beta^2)}{(\eta^2 v^2 + \beta^2)^{3/2}}. \quad (1.167)$$

Произведение фазовой и групповой скоростей имеет вид:

$$v_p v_g = \frac{\eta^2 v^4 (\eta^2 v^2 + 2\beta^2)}{(\eta^2 v^2 + \beta^2)^2} = v^2 \left[1 - \frac{\beta^4}{(\eta^2 v^2 + \beta^2)^2} \right]. \quad (1.168)$$

Из полученных выражений можно видеть, что все они при $\beta \rightarrow 0$ переходят в классические, так (1.165) ω переходит в vk , (1.166) и (1.167) переходят в v , а (1.168) переходит в v^2 .

1.3. Энергетические характеристики одномерной волны

Для дальнейшего рассмотрения будут важны определенные энергетические характеристики распространяющейся волны. Важнейшими будут амплитуда волны, плотность энергии волны и плотность потока энергии волны. Покажем, как эти характеристики определяются для одномерной волны. На данном этапе ограничимся случаем без затухания. Для определенности будем рассматривать волну, распространяющуюся в положительном направлении оси Ox .

1.3.1. Плотность и поток энергии для волны в струне

Итак, в результате решения волнового уравнения (1.84)

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0 \quad (1.169)$$

получена волна в виде (1.106), из которого для простоты возьмем только первое слагаемое

$$G(x, t) = G_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad (1.170)$$

где волновое число связано с частотой и фазовой скоростью волны соотношением (1.158)

$$k = \frac{\omega}{v}. \quad (1.171)$$

Поскольку в решении (1.170) с учетом (1.148) основным параметром, определяющим интенсивность волны, является амплитуда A , которая задается внешним возбуждением, начальными или граничными условиями, а относительно уравнения (1.169) для свободно распространяющейся волны является произвольной, то привяжем определение энергетических характеристик волны именно к этой амплитуде.

В качестве иллюстрации, следуя [45, с. 28–30], рассмотрим пример определения энергетических параметров для волны в струне. Согласно [45, с. 30, форм. (17)] полная энергия колебаний струны длиной l равна:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l \left[T_0 \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 + \rho \left(\frac{\partial G}{\partial t} \right)^2 \right] dx, \quad (1.172)$$

где T_0 — сила натяжения, ρ — линейная плотность струны, а G в нашем случае определяется формулой (1.170).

В этой формуле первое слагаемое соответствует потенциальной, а второе — кинетической энергии отрезка струны длиной dx .

Для дальнейшего рассмотрения важна плотность энергии струны, то есть энергия единицы длины, которая определяется подынтегральным выражением:

$$w = \frac{1}{2} \left[T_0 \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 + \rho \left(\frac{\partial G}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (1.173)$$

Так как в формулу (1.173) входят квадраты, то возьмем действительную часть:

$$G = G_0 \cos(\omega t - kx). \quad (1.174)$$

Отсюда

$$\frac{\partial G}{\partial x} = kG_0 \sin(\omega t - kx), \quad (1.175)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\omega G_0 \sin(\omega t - kx). \quad (1.176)$$

Подставляя (1.175) и (1.176) в (1.173), получаем:

$$w = \frac{1}{2} (T_0 k^2 + \rho \omega^2) G_0^2 \sin^2(\omega t - kx). \quad (1.177)$$

Преобразуя квадрат синуса в соответствии с выражением

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha), \quad (1.178)$$

получаем

$$w = \frac{1}{4} (T_0 k^2 + \rho \omega^2) G_0^2 [1 - \cos 2(\omega t - kx)]. \quad (1.179)$$

Усредним это выражение по времени и координате, учитывая, что среднее значение косинуса за период равно нулю. В результате получаем:

$$\bar{w} = \frac{1}{4}(T_0 k^2 + \rho \omega^2) G_0^2. \quad (1.180)$$

Из (1.171) выразим ω и подставим в (1.180), а также учтем, что фазовая скорость волны в струне равна (1.85) [45, с. 26, форм. (5)]:

$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}. \quad (1.181)$$

При этом (1.180) принимает вид:

$$\bar{w} = \frac{1}{2} T_0 k^2 G_0^2. \quad (1.182)$$

Поскольку амплитудный параметр G_0 не определен заранее (относительно решения (1.170) уравнения (1.169) это произвольная постоянная), то для определения амплитуды волны введем вспомогательное выражение:

$$A = \sqrt{\frac{T_0}{2}} G_0, \quad (1.183)$$

с точностью до постоянного коэффициента соответствующее амплитуде волны.

При этом плотность энергии волны (1.182) (то есть энергия единицы ее длины) принимает вид (верхнюю черту усреднения за ненадобностью опускаем):

$$w = A^2 k^2, \quad (1.184)$$

то есть пропорциональна произведению квадрата амплитуды волны на квадрат волнового числа.

Определенная так плотность энергии волны получена для одномерной волны, не имеющей поперечного сечения, перпендикулярного оси Ox . Если волноведущая среда обладает поперечным сечением (например, при распространении продольных волн в стержне [45, с. 27–30]), полученное выражение (1.184) следует умножить на поперечное сечение среды, однако если оно не меняется, то такое умножение сводится лишь к переопределению постоянного коэффициента, а зависимость типа $A^2 k^2$ сохраняется.

Кроме плотности энергии важнейшим параметром является поток энергии волны, равный количеству энергии, протекающей за единицу времени через заданное сечение (для одномерной волны это — заданная точка на оси Ox). Учтем, что за единицу времени волна проходит расстояние, равное ее длине, которая связана с волновым числом соотношением:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (1.185)$$

Полная энергия, заключенная в таком объеме, равна:

$$S = w\lambda = 2\pi A^2 k. \quad (1.186)$$

Поскольку параметр A задан произвольно, то его можно переопределить, то есть записать:

$$S = A^2 k. \quad (1.187)$$

Таким образом, видим, что поток энергии волны пропорционален произведению квадрата амплитуды волны на ее волновое число. Для волно-ведущей среды с поперечным сечением это выражение также следует умножить на площадь такого сечения.

Таким образом, главным результатом рассмотрения, проделанного в настоящем разделе, являются два следующих положения:

1. Плотность энергии волны пропорциональна произведению квадрата амплитуды на квадрат волнового числа.
2. Поток энергии волны пропорционален произведению квадрата амплитуды волны на волновое число.

1.3.2. Плотность и поток энергии для одномерной волны

Рассмотрим энергетические характеристики одномерной волны в более общем виде.

Будем исходить из общего волнового уравнения для одномерной волны:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0, \quad (1.188)$$

где $G(x, t)$ — волновая функция, например отклонение координаты точки струны от равновесного положения; t — время; x — координата; v — фазовая скорость волны.

Среда далее предполагается однородной, изотропной и бездисперсионной, то есть фазовая скорость совпадает с групповой по величине и направлению.

Из уравнения (1.188) методом разделения переменных после замены $G(x, t) = T(t) \cdot U(x)$ получаем зависимость от времени вида $e^{\pm i\omega t}$, из которой далее будем рассматривать только зависимость $e^{i\omega t}$. При этом для $U(x)$ получаем уравнение:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + k^2 U = 0. \quad (1.189)$$

Решение уравнения (1.189) имеет вид:

$$U(x) = A_1 e^{-ikx} + A_2 e^{ikx}. \quad (1.190)$$

При этом полное решение уравнения (1.188) имеет вид:

$$G(x, t) = B_1 e^{i(\omega t - kx)} + B_2 e^{i(\omega t + kx)}. \quad (1.191)$$

Первое слагаемое — волна, распространяющаяся в положительном направлении оси Ox , второе — в отрицательном.

Главной задачей данного раздела является нахождение потока энергии, который определяется выражением:

$$\mathbf{S} = v w \mathbf{s}, \quad (1.192)$$

где v — скорость волны; w — плотность энергии волны (энергия в единице объема); \mathbf{s} — единичный вектор в направлении распространения волны, в данном случае — вдоль оси Ox .

Модуль потока энергии волны, определенный как длина вектора \mathbf{S} , равен:

$$S = v w. \quad (1.193)$$

Найдем величины v и w , входящие в эту формулу.

Скорость волны:

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (1.194)$$

На данном этапе примем **постулат** — *плотность энергии одномерной волны равна произведению квадрата амплитуды волны на квадрат ее волнового числа*:

$$w = A^2 k^2, \quad (1.195)$$

или в тождественной формулировке *плотность энергии одномерной волны равна квадрату произведения амплитуды на волновое число*:

$$w = (Ak)^2. \quad (1.196)$$

При этом модуль потока энергии (1.193) принимает вид:

$$S = v w = \frac{\omega}{k} A^2 k^2 = \omega A^2 k. \quad (1.197)$$

Для дальнейшего рассмотрения несколько забежим вперед и воспользуемся общими положениями задачи о падении одномерной волны на одну границу раздела двух сред (глава 2, раздел 2.1). Для подобных задач координатные составляющие волновых функций в наиболее общем виде представлены формулой (2.6). Таким образом, в рассматриваемом здесь случае одной границы раздела между средами 1 и 2 координатные составляющие волновых функций падающей, отраженной и проходящей волн будут иметь вид:

$$U_i = A e^{-ik_1 x}, \quad (1.198)$$

$$U_r = B e^{ik_1 x}, \quad (1.199)$$

$$U_t = C e^{-ik_2 x}. \quad (1.200)$$

Здесь волна с амплитудой A — падающая, с амплитудой B — отраженная, с амплитудой C — проходящая.

Для этих волн получаем потоки энергии (будем их считать по модулю, но слово «модуль» для краткости опускаем):

$$S_i = \omega A^2 k_1; \quad (1.201)$$

$$S_r = \omega B^2 k_1; \quad (1.202)$$

$$S_t = \omega C^2 k_2. \quad (1.203)$$

Отсюда находим коэффициенты отражения и прохождения:

$$R = \frac{S_r}{S_i} = \frac{B^2}{A^2}; \quad (1.204)$$

$$T = \frac{S_t}{S_i} = \frac{C^2}{A^2} \cdot \frac{k_2}{k_1}. \quad (1.205)$$

Амплитуды B и C , выраженные через A , получаются из решения одномерной граничной задачи в следующем виде:

$$B = A \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}; \quad (1.206)$$

$$C = A \frac{2k_1}{k_1 + k_2}. \quad (1.207)$$

Подставляя (1.206) и (1.207) в (1.204) и (1.205), получаем

$$R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}, \quad (1.208)$$

$$T = \frac{4k_1^2}{(k_1 + k_2)^2} \cdot \frac{k_2}{k_1} = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}. \quad (1.209)$$

Из этих выражений видно, что

$$R + T = 1. \quad (1.210)$$

Это соотношение выражает закон сохранения энергии при прохождении волны через границу раздела сред. Оно является следствием принятого постулата о равенстве плотности энергии волны квадрату произведения ее амплитуды на волновое число.

Получение постулата

Покажем теперь, как получается постулат. Он является следствием закона сохранения энергии в виде (1.210), откуда и будет выведен.

Предположим, что коэффициенты отражения и прохождения имеют вид:

$$R = \frac{B^2}{A^2}; \quad (1.211)$$

$$T = \frac{C^2}{A^2} \alpha, \quad (1.212)$$

где α — коэффициент, подлежащий определению.

Амплитуды B и C , выраженные через A , получаются из решения одномерной граничной задачи в следующем виде:

$$B = A \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}; \quad (1.213)$$

$$C = A \frac{2k_1}{k_1 + k_2}. \quad (1.214)$$

Подставляя (1.213) и (1.214) в (1.211) и (1.212), получаем

$$R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}, \quad (1.215)$$

$$T = \frac{4k_1^2}{(k_1 + k_2)^2} \alpha. \quad (1.216)$$

Потребуем далее выполнения условия (совпадающего с (1.210)):

$$R + T = 1. \quad (1.217)$$

Подставляя (1.215) и (1.216) в (1.217), получаем уравнение для α :

$$\frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} + \frac{4k_1^2}{(k_1 + k_2)^2} \alpha = 1, \quad (1.218)$$

решая которое находим

$$\alpha = \frac{k_2}{k_1}. \quad (1.219)$$

Подставляя (1.219) в (1.212) и (1.216), получаем (1.205) и (1.209).

Из вида выражения для коэффициента прохождения (совпадающего с (1.205)):

$$T = \frac{S_t}{S_i} = \frac{C^2}{A^2} \cdot \frac{k_2}{k_1}, \quad (1.220)$$

можно видеть, что

$$S_t = \omega C^2 k_2; \quad (1.221)$$

$$S_i = \omega A^2 k_1, \quad (1.222)$$

откуда получаем общее выражение (совпадающее с (1.197))

$$S = \omega A^2 k. \quad (1.223)$$

Выражая ω через v с помощью (1.194), получаем

$$S = v A^2 k^2. \quad (1.224)$$

Сравнивая (1.224) с (1.193) получаем

$$\omega = A^2 k^2 = (Ak)^2, \quad (1.225)$$

что и является требуемым выражением постулата.

1.3.3. Замечание о комплексных волновых числах

При выводе всех этих выражений нигде не делалось никакого предположения о действительном или мнимом характере волновых чисел. Поэтому полученные выражения должны быть справедливы при любых комплексных волновых числах.

При этом если волновое число комплексное, то комплексными становятся также скорость (1.194), плотность энергии (1.195), (1.196), поток энергии (1.197), амплитуды и потоки энергии отраженной и проходящей волн (1.199), (1.200), (1.202), (1.203), (1.206), (1.207), а также коэффициенты отражения и прохождения (1.204), (1.205) и (1.208), (1.209).

Волновое число является комплексным при наличии потерь энергии, то есть затухания. При этом у амплитуды волны появляется сомножитель в виде экспоненты с показателем, убывающим по мере распространения волн.

Встает вопрос: что означает физический смысл мнимых частей всех величин, выражающихся через комплексное волновое число?

Что такое комплексная фазовая скорость?

Чему соответствует мнимая часть плотности энергии?

Чему соответствует мнимая часть потока энергии?

Что означают мнимые части коэффициентов отражения и прохождения?

В полной постановке эти вопросы требуют довольно сложного рассмотрения с громоздкой идеологией, поэтому в рамках настоящей монографии авторы не дают на них четкого ответа, а предоставляют его поиск любознательному читателю. Отметим лишь некоторые моменты, видимые непосредственно.

Итак, если мы хотим, чтобы коэффициент отражения был чисто действительным, то его надо определить через модуль:

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2}. \quad (1.226)$$

Если мы хотим далее, чтобы выполнялось соотношение (1.210) (энергия должна сохраняться, а на плоскости раздела сред потерь не может быть, так как она бесконечно тонкая), то коэффициент прохождения надо определить в виде:

$$T = \frac{|C|^2}{|A|^2} \operatorname{Re} \left(\frac{k_2}{k_1} \right). \quad (1.227)$$

Здесь не ясно, почему надо брать действительную часть именно отношения k_2/k_1 , а не отношение действительных частей k_1 и k_2 по отдельности, однако это требование является единственным возможным вариантом для выполнения условия (1.210). Проверку такого утверждения авторы также предоставляют любознательному читателю.

1.4. Распространение электромагнитной волны

Весьма важным объектом для практики являются электромагнитные волны, поэтому теперь обратимся к их рассмотрению несколько более подробно.

1.4.1. Поля плоской поперечной электромагнитной волны правой поляризации

Прежде всего рассмотрим поля плоской поперечной электромагнитной волны правой поляризации, распространяющейся вдоль оси Ox . Геометрия задачи иллюстрируется рис. 1.1, где показана система координат (а) и ориентация полей волны (б), которая поясняется далее.

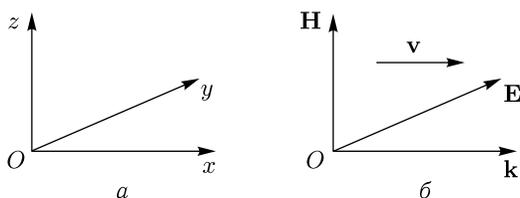


Рис. 1.1. Ориентация полей электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси Ox

Будем исходить из классической системы уравнений Максвелла для проводящей среды в отсутствие свободных зарядов (см., напр. [102, с. 41, форм. (8.1)–(8.4)]), которую запишем в системе СИ в соответствии с правилами, приведенными в [103, с. 668–675]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad (1.228)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}; \quad (1.229)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0; \quad (1.230)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (1.231)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — электрическое и магнитное поля, ε и μ — действительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, σ — действительная проводимость среды, ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные в системе СИ («проницаемости вакуума»), t — время. Здесь предполагается, что среда однородна, то есть ε , μ и σ не зависят от координат, а также какие-либо заряды отсутствуют. Введение комплексной диэлектрической проницаемости проводящей среды с помощью формулы

$$\varepsilon = \varepsilon_r - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}, \quad (1.232)$$

где ε_r — действительная диэлектрическая проницаемость среды, позволяет избавиться от второго слагаемого в формуле (1.229), что и сделано далее.

В соответствии с определением ротора как математической функции в декартовой системе координат [104, с. 171, форм. (5.5-7)] имеем:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right), \quad (1.233)$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — единичные векторы по осям Ox , Oy и Oz .

Предполагаем также, что зависимость полей от времени имеет вид $e^{i\omega t}$. Используя (1.233), записываем координатные составляющие (1.228) и (1.229) в виде:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega\mu\mu_0 H_x; \quad (1.234)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu\mu_0 H_y; \quad (1.235)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu\mu_0 H_z; \quad (1.236)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = i\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_x; \quad (1.237)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_y; \quad (1.238)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_z. \quad (1.239)$$

Рассмотрим поля плоской волны, распространяющейся вдоль оси Ox . При этом поля зависят только от x , а зависимость от y и z отсутствует, то есть производные по y и z равны нулю.

При этом из (1.234)–(1.239) получаем:

$$H_x = 0, \quad (1.240)$$

$$H_y = -\frac{i}{\omega\mu\mu_0} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x}; \quad (1.241)$$

$$H_z = \frac{i}{\omega\mu\mu_0} \cdot \frac{\partial E_y}{\partial x}; \quad (1.242)$$

$$E_x = 0; \quad (1.243)$$

$$E_y = \frac{i}{\omega\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x}; \quad (1.244)$$

$$E_z = -\frac{i}{\omega\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial H_y}{\partial x}. \quad (1.245)$$

Из этих соотношений сразу видно, что $E_x = 0$ и $H_x = 0$, то есть волна поперечная.

Предположим, что зависимость полей волны от координаты x имеет вид e^{-ikx} . При этом полная координатно-временная зависимость имеет вид $e^{i(\omega t - kx)}$, то есть при $k > 0$ волна распространяется в положительном направлении оси Ox .

При этом из (1.241), (1.242) и (1.244), (1.245) получаем:

$$H_y = -\frac{k}{\omega\mu\mu_0}E_z; \quad (1.246)$$

$$H_z = \frac{k}{\omega\mu\mu_0}E_y; \quad (1.247)$$

$$E_y = \frac{k}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}H_z; \quad (1.248)$$

$$E_z = -\frac{k}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}H_y. \quad (1.249)$$

Эти четыре уравнения образуют две независимые пары — (1.246) и (1.249), а также (1.247) и (1.248).

Рассмотрим первую из них (1.246), (1.249). Подставляя (1.249) в (1.246), получаем:

$$H_y = \frac{k^2}{\omega^2\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}H_y, \quad (1.250)$$

откуда

$$\frac{k^2}{\omega^2\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} = 1, \quad (1.251)$$

или

$$k = \pm\omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}. \quad (1.252)$$

Здесь разные знаки соответствуют двум волнам, распространяющимся в положительном (знак плюс) и отрицательном (знак минус) направлениях оси Ox . Будем рассматривать далее волну, распространяющуюся в положительном направлении этой оси, то есть при

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}. \quad (1.253)$$

Это же самое соотношение можно получить из второй пары уравнений (1.247) и (1.248). В результате вместо четырех уравнений остается два, например (1.246) и (1.247):

$$H_y = -\frac{k}{\omega\mu\mu_0}E_z; \quad (1.254)$$

$$H_z = \frac{k}{\omega\mu\mu_0}E_y. \quad (1.255)$$

Подставляя в (1.254) и (1.255) выражение (1.253), получаем:

$$H_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E_z; \quad (1.256)$$

$$H_z = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E_y. \quad (1.257)$$

Вводя импеданс среды с помощью формулы

$$Z = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}, \quad (1.258)$$

из (1.256) и (1.257) получаем

$$H_y = -\frac{E_z}{Z}; \quad (1.259)$$

$$H_z = \frac{E_y}{Z}, \quad (1.260)$$

или

$$E_y = ZH_z; \quad (1.261)$$

$$E_z = -ZH_y. \quad (1.262)$$

Для свободного пространства получаем «импеданс свободного пространства»:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}. \quad (1.263)$$

Здесь (раздел 1.6.7), форм. (1.443)–(1.445):

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}; \quad (1.264)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м}. \quad (1.265)$$

Откуда получаем:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \text{ Ом}. \quad (1.266)$$

Заметим, что формулы (1.260) и (1.261) по своей структуре напоминают закон Ома, где магнитное поле соответствует току, электрическое — напряжению, а импеданс — сопротивлению. При этом оба поля (электрическое и магнитное) ориентированы вдоль положительных направлений соответствующих осей. Если одно из полей ориентировано в положительном направлении, а другое — в отрицательном, то в законе Ома меняется знак, что соответствует формулам (1.259) и (1.262).

Ориентация векторов полей относительно волнового вектора определяется по правилу правой руки: пальцы — большой, указательный, средний — соответствуют последовательности векторов \mathbf{k} , \mathbf{E} , \mathbf{H} или \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{k} (что эквивалентно).

Волновой вектор волны, распространяющейся в положительном направлении оси Ox , имеет вид:

$$\mathbf{k} = \{k; 0; 0\} = \{\omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}; 0; 0\}. \quad (1.267)$$

Так как поля волны связаны соотношениями (1.259)–(1.262), то для однозначного их задания достаточно лишь одного поля — магнитного или электрического. При этом возможны два варианта:

1). Задано магнитное поле:

$$H_x = 0; \quad (1.268)$$

$$H_y - \text{задано}; \quad (1.269)$$

$$H_z - \text{задано}; \quad (1.270)$$

$$E_x = 0; \quad (1.271)$$

$$E_y = ZH_z; \quad (1.272)$$

$$E_z = -ZH_y. \quad (1.273)$$

2). Задано электрическое поле:

$$H_x = 0; \quad (1.274)$$

$$H_y = -\frac{1}{Z}E_z; \quad (1.275)$$

$$H_z = \frac{1}{Z}E_y; \quad (1.276)$$

$$E_x = 0; \quad (1.277)$$

$$E_y - \text{задано}; \quad (1.278)$$

$$E_z - \text{задано}. \quad (1.279)$$

1.4.2. Волновые уравнения для полей электромагнитной волны

Приведем вывод волновых уравнений для электрического и магнитного полей электромагнитной волны. Будем исходить из классических уравнений электродинамики, которые в системе СИ имеют вид (1.228)–(1.231):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad (1.280)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}; \quad (1.281)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0; \quad (1.282)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (1.283)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — электрическое и магнитное поля, ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости, σ — проводимость, ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные, t — время. Положим, что ε , μ и σ являются действительными скалярными параметрами среды и рассмотрим два случая: диэлектрической и проводящей сред.

Диэлектрическая среда

Для непроводящей диэлектрической среды, то есть при $\sigma = 0$, система уравнений (1.280)–(1.283) приобретает симметричный вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad (1.284)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad (1.285)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0; \quad (1.286)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (1.287)$$

Возьмем ротор от обеих частей уравнения (1.284):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.288)$$

и воспользуемся известным из векторного анализа соотношением [104, с. 173, форм. (5.5.19)], [102, с. 894, форм. (1.50)]

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}. \quad (1.289)$$

При этом получаем:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (1.290)$$

Теперь продифференцируем уравнение (1.285) по времени и подставим его в (1.290). Учитывая, что $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ (уравнение (1.286)) и перенося все в левую часть, получаем:

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.291)$$

Будем считать, что в среде распространяется плоская поперечная электромагнитная волна. Ориентируем систему координат $Oxyz$ таким образом, чтобы ось Oz была направлена вдоль волнового вектора распространяющейся волны. В силу поперечного характера волны ее электрическое поле E_x не зависит от координат y и z . Тогда из (1.291), вводя обозначение для скорости

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0 \varepsilon \varepsilon_0}} \quad (1.292)$$

и меняя порядок слагаемых, получаем

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = 0. \quad (1.293)$$

Можно видеть, что это уравнение по форме совпадает с уравнением для одномерной волны (1.84).

Аналогичные уравнения могут быть получены и для плоских волн, волновые векторы которых направлены вдоль осей Oy и Oz :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = 0; \quad (1.294)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = 0. \quad (1.295)$$

Подобные уравнения для компонент магнитного поля имеют вид:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} = 0; \quad (1.296)$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} = 0; \quad (1.297)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} = 0. \quad (1.298)$$

Таким образом, по своей структуре полученные уравнения (1.293)–(1.298) совпадают с полным уравнением для одномерной волны (1.84).

При гармонической зависимости от времени вида $e^{i\omega t}$, вводя волновое число подобно (1.86), приводим (1.293)–(1.298) к виду:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + k^2 E_x = 0; \quad (1.299)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + k^2 E_y = 0; \quad (1.300)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0; \quad (1.301)$$

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + k^2 H_x = 0; \quad (1.302)$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + k^2 H_y = 0; \quad (1.303)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k^2 H_z = 0. \quad (1.304)$$

Все эти уравнения по форме совпадают с уравнением для одномерной волны (1.84).

Полагая гармоническую зависимость от времени вида $e^{i\omega t}$, введем полезные для дальнейшего рассмотрения параметры. В соответствии с (1.86), а также (1.292) определим волновое число, совпадающее с (1.253):

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}. \quad (1.305)$$

Учитывая (1.284) и (1.285), то есть поперечный характер электромагнитной волны, а также полагая зависимость амплитуды волны от координаты в виде e^{-ikx} (то есть волна распространяется в положительном направлении оси Ox), записывая (1.284), (1.285) по компонентам, получаем отношение между амплитудами электрического и магнитного полей — импеданс, иногда называемый «волновым сопротивлением», (совпадающий с (1.258)):

$$Z = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}}. \quad (1.306)$$

При этом выполняется соотношение

$$H_0 = \frac{E_0}{Z_0}. \quad (1.307)$$

Проводящая среда

Рассмотрим теперь проводящую среду. В этом случае $\sigma \neq 0$, так что вместо (1.284)–(1.287) будем иметь общую систему уравнений (1.280)–(1.283). Преобразуя ее точно так же, как в предыдущем случае, получаем:

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\mu_0\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (1.308)$$

Такое уравнение в общем случае к одномерному не сводится. Однако, это можно сделать при гармонической зависимости поля \mathbf{E} от времени. Действительно, полагая

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}, \quad (1.309)$$

из (1.308) будем иметь

$$\Delta \mathbf{E}_0 + \omega^2 \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}_0 - i\omega \mu\mu_0\sigma \mathbf{E}_0 = 0, \quad (1.310)$$

или

$$\Delta \mathbf{E}_0 + \omega^2 \mu\mu_0 \left(\varepsilon\varepsilon_0 - i\frac{\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E}_0 = 0. \quad (1.311)$$

Уравнение (1.311) сводится к волновому:

$$\Delta \mathbf{E}_0 + k_c^2 \mathbf{E}_0 = 0, \quad (1.312)$$

где волновое число

$$k_c = \omega \sqrt{\mu\mu_0 \left(\varepsilon\varepsilon_0 - i\frac{\sigma}{\omega} \right)}. \quad (1.313)$$

Такое же уравнение можно получить и для магнитного поля:

$$\Delta \mathbf{H}_0 + k_c^2 \mathbf{H}_0 = 0. \quad (1.314)$$

Расписывая (1.310) по компонентам, приходим к уравнениям вида (1.299)–(1.304) с заменой действительного волнового числа k на комплексное k_c в соответствии с (1.313). То есть задача для проводящей среды также может быть сведена к одномерной.

В рассматриваемом случае, подобно (1.306), можно определить импеданс:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\left(\varepsilon\varepsilon_0 - i\frac{\sigma}{\omega} \right)}}, \quad (1.315)$$

причем соотношение (1.307) также выполняется.

Таким образом, электродинамические задачи для плоских электромагнитных волн могут быть сведены к задаче о распространении одномерной волны. К такому классу относится большинство задач

о распространении плоских электромагнитных волн через многослойные структуры, некоторые из которых для одного слоя обобщены в монографии [47].

1.4.3. Баланс энергии для электромагнитной волны в среде с диссипацией

В традиционной электродинамике одной из основных энергетических характеристик распространяющейся электромагнитной волны является баланс энергии, При этом поток энергии традиционно выражается через вектор Пойнтинга [102, с. 52–54]. Приведем краткую схему получения этого вектора сначала в системе СГС, а затем в системе СИ.

Общие уравнения электродинамики в системе СГС имеют вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0; \quad (1.316)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}. \quad (1.317)$$

Умножаем первое на \mathbf{H} и второе на \mathbf{E} :

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0; \quad (1.318)$$

$$\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} \mathbf{E}. \quad (1.319)$$

Вычитая из первого второе, получаем:

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \left(\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{4\pi\sigma}{c} E^2. \quad (1.320)$$

Воспользуемся формулой, известной из векторного анализа [105, с. 242, форм. (4)]:

$$\operatorname{div} [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b} \quad (1.321)$$

и правилом дифференцирования степенной функции [106, с. 166, табл. 3, п. 1], в результате чего получаем:

$$\operatorname{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = -\frac{1}{2A} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + H^2) - \frac{4\pi\sigma}{c} E^2. \quad (1.322)$$

Умножая на $c/4\pi$ и меняя порядок слагаемых, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] - \sigma E^2. \quad (1.323)$$

Это — баланс энергии в совокупности электрического и магнитного полей, подчиняющихся общим уравнениям электродинамики. Слева стоит скорость изменения суммарной плотности полей во времени, справа — убыль этой энергии за счет излучения (первое слагаемое) и тока проводимости (второе слагаемое).

Для характеристики излучения введем вектор Пойнтинга [107, с. 106, форм. (31.2)]:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]. \quad (1.324)$$

При этом баланс энергии принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) = -\operatorname{div} \mathbf{S} - \sigma E^2. \quad (1.325)$$

Более подробное физическое содержание этого выражения состоит в следующем. Слева стоит производная по времени от плотности энергии в единице объема среды. Эта производная отражает утечку энергии из этой единицы объема. Первое слагаемое правой части соответствует производной по координате от потока энергии, уносимой из объема. При интегрировании по объему это будет просто убыль энергии, расходящейся по окружающему пространству в виде излучения. Второе слагаемое правой части отражает безвозвратное рассеяние энергии внутри единицы объема за счет протекания внутреннего электрического тока. Эта часть энергии преобразуется в тепло.

Получим теперь те же выражения в системе СИ.

Уравнения электродинамики:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0; \quad (1.326)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.327)$$

Умножая первое на \mathbf{H} , второе на \mathbf{E} , вычитая, после чего пользуясь формулой (1.321) и правилом дифференцирования степенной функции, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 + \mu\mu_0 H^2}{2} \right) = -\operatorname{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] - \sigma E^2. \quad (1.328)$$

Вектор Пойнтинга имеет вид:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]. \quad (1.329)$$

Баланс энергии принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 + \mu\mu_0 H^2}{2} \right) = -\operatorname{div} \mathbf{S} - \sigma E^2. \quad (1.330)$$

Физическое содержание этого выражения — то же, что содержание выражения (1.325).

1.4.4. Аналогия между балансами энергии для электромагнитной и одномерной волны

В силу единства общей природы волновых процессов можно полагать, что для одномерной волны будет иметь место то же соотношение баланса, что и для электромагнитной волны. Покажем это более

подробно. Будем исходить из волнового уравнения в среде с затуханием (раздел 1.2.3, форм. (1.107)):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial G}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0, \quad (1.331)$$

где

$$G = G(x, t), \quad (1.332)$$

β — параметр затухания.

Замечание. Здесь, чтобы избежать путаницы с обозначениями, следуя [45, с. 26, 53], фазовую скорость распространения волны в отсутствие затухания вместо « v » обозначаем через « a ».

Введем новые переменные:

$$u = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial G}{\partial t}, \quad (1.333)$$

$$v = \frac{\partial G}{\partial x}. \quad (1.334)$$

Дифференцируем (1.309) по t и (1.310) по x , после чего полученные вторые производные подставляем в (1.331). Дифференцируем (1.333) по x и (1.334) по t , после чего приравниваем полученные вторые производные. В результате получаем систему двух волновых уравнений первого порядка для одномерной волны, эквивалентную исходному уравнению (1.331):

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2\beta}{a} u; \quad (1.335)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \quad (1.336)$$

Умножаем первое уравнение на u и второе на v :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{a} u \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2\beta}{a} u^2; \quad (1.337)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{a} v \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \quad (1.338)$$

Складывая, получаем:

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{a} \left(u \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial t} \right) = \frac{2\beta}{a} u^2. \quad (1.339)$$

Умножаем на a и преобразуем с помощью правил дифференцирования произведения и степенной функции, в результате чего получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) = a \frac{\partial}{\partial x} (uv) - 2\beta u^2. \quad (1.340)$$

Из сравнения уравнений (1.335) и (1.336) с уравнениями (1.316) и (1.317) для электромагнитной волны можно видеть, что здесь функция u является аналогом электрического поля, а функция v — аналогом магнитного поля.

При выводе формулы (1.340) произведены те же действия, что и при выводе уравнения баланса для электромагнитной волны (1.325). Таким образом, физическое содержание формулы (1.340) — то же самое соотношение баланса, которое для электромагнитной волны определяется выражением (1.325).

Полагая

$$G = Ae^{i(\omega t - kx)}, \quad (1.341)$$

можно видеть, что при действительных ω и k величины u^2 и v^2 будут отрицательными (за счет i^2), то есть величина, стоящая слева в круглых скобках, будет также отрицательной. Однако по физическому смыслу плотность энергии должна быть положительной, поэтому надо во всей формуле (1.340) изменить знаки на противоположные. В результате баланс энергии принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{u^2 + v^2}{2} \right) = -a \frac{\partial}{\partial x} (uv) + 2\beta u^2. \quad (1.342)$$

Получаем плотность энергии поля одномерной волны в виде:

$$\begin{aligned} w &= -\frac{u^2 + v^2}{2} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{a^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i(\omega t - kx)}) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial x} (Ae^{i(\omega t - kx)}) \right]^2 \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{a^2} [i\omega Ae^{i(\omega t - kx)}]^2 + [-ikAe^{i(\omega t - kx)}]^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2}{a^2} + k^2 \right) A^2 e^{2i(\omega t - kx)}. \end{aligned} \quad (1.343)$$

Учитывая, что $\omega/a = k$, получаем:

$$w = k^2 A^2 e^{2i(\omega t - kx)}. \quad (1.344)$$

Здесь множитель $e^{2i(\omega t - kx)}$ происходит из-за квадратичного вида соотношения баланса (1.342) и входит во все его слагаемые, поэтому в соотношении (1.342) его можно опустить и рассматривать это соотношение, как соотношение для амплитуд.

Заметим, что такой же множитель получается и при классическом определении соотношения баланса (1.323) и вектора Пойнтинга (1.324) для электромагнитной волны. При этом плотность энергии одномерной волны принимает вид:

$$w = A^2 k^2. \quad (1.345)$$

Поток энергии в выражении (1.342) имеет вид:

$$S = -a(uv). \quad (1.346)$$

Учитывая (1.333), (1.334) и (1.341), получаем:

$$S = -a \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial G}{\partial t} \cdot \frac{\partial G}{\partial x} = -A^2 (i\omega)(-ik) e^{2i(\omega t - kx)}. \quad (1.347)$$

Опуская экспоненту $e^{2i(\omega t - kx)}$, получаем поток энергии одномерной волны в виде:

$$S = \omega A^2 k. \quad (1.348)$$

Это выражение можно рассматривать как аналог вектора Пойнтинга для одномерной волны. При этом баланс энергии (1.342) принимает вид:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x} + 2\beta u^2. \quad (1.349)$$

Заметим, что формулы для плотности и потока энергии одномерной волны (1.345) и (1.348) совпадают с аналогичными выражениями (1.195), (1.196), (1.197), полученными другим методом в разделе 1.3.2.

1.5. Традиционные методы расчета распространения волн через многослойные структуры

Рассмотрим некоторые методы, которые на протяжении уже многих лет успешно используются в исследованиях распространения волн через тонкие слои и многослойные структуры. Среди таких методов прежде всего следует упомянуть прямой метод, метод усреднения, метод характеристической матрицы, метод импеданса. Приведем краткую сводку этих методов с основными их характеристиками.

1.5.1. Прямой метод

Этот метод является наиболее последовательным и широко применяется для расчета распространения волн в структурах с небольшим числом слоев. Реализация метода состоит в независимом решении волновых уравнений в каждом слое по отдельности с последующим сшиванием полученных решений на границах раздела слоев. Для одномерной волны граничные условия состоят в равенстве волновых функций и их первых производных по координате на границе раздела. Для электромагнитной волны приравниваются касательные составляющие электрического и магнитного полей. Метод приводит к системе линейных алгебраических уравнений для амплитуд волн, порядок которой равен удвоенному числу границ раздела сред. Например, в случае двух границ приходится решать систему четвертого порядка, в случае трех границ — шестого порядка, четырех — восьмого и так далее. Метод применим при любых параметрах и толщинах слоев, в том числе, для многослойных структур, однако при увеличении числа слоев больше двух резко растет громоздкость вычислений. В случае наклонного падения волны на плоскость раздела сред задача дополнительно значительно усложняется [5, 57].

Ввиду крайней громоздкости подобных вычислений были разработаны более простые методы, такие как метод учета последовательных переотражений, сводящийся к вычислению суммы бесконечной геометрической прогрессии [2], метод характеристической матрицы, включающий перемножение матриц отдельных слоев [2, 108, 109], метод импеданса, состоящий в пересчете импедансов отдельных слоев

к входному импедансу системы в целом [3] и другие. Эти методы также являются достаточно универсальными, то есть пригодны для слоистых сред с любыми параметрами и любой толщиной слоев.

Несколько особняком стоит метод усреднения, являющийся вариантом прямого, отличающийся тем, что при малой толщине слоя распределение амплитуды волны по толщине такого слоя не испытывает периодичности и приближается к прямолинейному.

Охарактеризуем некоторые из перечисленных методов более подробно, для чего начнем с метода усреднения.

1.5.2. Метод усреднения

Метод усреднения применим в тех случаях, когда по толщине слоя укладывается меньше половины длины распространяющейся волны. Основу метода составляет замена неоднородного, как правило, синусоидального распределения волны по толщине слоя линейным. При этом амплитуды волны внутри слоя заменяются средним арифметическим от их значений на поверхностях, в результате чего вместо четырех остаются всего два граничных условия и задача сводится к системе двух линейных уравнений.

Метод усреднения, приводящий к более простым вычислениям по сравнению с прямым, впервые был применен Друде в конце 19 века в работе об отражении света от металла под углом Брюстера. Этот же метод со ссылкой на Друде подробно описал Розенберг [8] в 1958 году. На рубеже XX и XXI веков метод усреднения применялся для расчета волноводов с ферритовым заполнением [110]. В дальнейшем этот метод получил развитие для различных слоев [29, 56, 111–115], а в обзоре [111] был дан подробный анализ применимости метода усреднения к различным ситуациям и сравнение его с точным решением.

1.5.3. Метод характеристической матрицы

Стремление избежать необходимости раскрытия определителей высоких порядков породило различные методы последовательных вычислений. Одним из таких методов является метод характеристической матрицы [2, 108, 109].

Суть метода характеристической матрицы [2] состоит в перемножении матриц отдельных слоев. То есть каждая матрица соответствует отдельному слою. Компоненты матрицы получаются из обычных граничных условий, тех же, что при прямом методе. Для каждого последующего слоя произведение увеличивается на одну матрицу. Количество матриц и соответственно число их перемножений растет пропорционально количеству слоев.

Метод матрицы широко используется в оптике [2], где толщина слоя обычно значительно превышает длину волны света. Тем не менее, начиная уже с двухслойной структуры, сложность вычислений значительно возрастает. Трудности расчетов резко растут при учете проводимости слоя. По существу, более или менее удобно решаются

лишь задачи для диэлектриков и металлов, то есть для двух крайних случаев нулевой или очень большой проводимости, а промежуточный случай приводит к весьма сложным комплексным выражениям [5, 58].

1.5.4. Метод импеданса

Достаточно часто анализ отражения электромагнитных волн от поверхности раздела двух сред проводится на основе нахождения импеданса, характеризующего электромагнитные свойства среды [116–124]. В частности, для характеристики свойств металла в высокочастотном поле вводится поверхностное сопротивление — импеданс. Он определяется как отношение электрического поля на поверхности металла к плотности тока проводимости, проинтегрированного по толщине металла [125]. Импеданс можно представить в комплексной форме, где действительная и мнимая части определяются по изменению амплитуды и фазы волны, отраженной от поверхности [116, 117, 125]. Однако этот подход дает корректный результат только для полубесконечных сред и не всегда может быть использован для рассмотрения тонких ограниченных структур.

В общем случае импеданс является характеристикой материала среды без учета граничных условий, причем для одной волны зависит только от волнового числа этой волны, а для двух волн, распространяющихся во встречных направлениях — также еще и от соотношения амплитуд этих волн.

В случае многослойной структуры импедансы рассчитываются отдельно для каждого слоя, после чего сшиваются с использованием граничных условий равенства амплитуд и импедансов на каждой границе.

Упрощение по сравнению с прямым методом достигается путем последовательного вычисления импедансов шаг за шагом от слоя к слою. То есть сначала вычисляется суммарный импеданс первого и второго слоев, после чего к полученному решению добавляется третий слой, затем четвертый и так далее.

Более подробно перечисленные методы рассматриваются в дальнейших главах настоящей монографии, а также в последующих монографиях, являющихся продолжением настоящей.

1.6. Некоторые математические приемы, полезные при рассмотрении распространения волн

Приведем некоторые математические приемы, полезные для дальнейшего рассмотрения. Ввиду наблюдаемых в литературе разночтений, по возможности будем указывать основные ссылки.

1.6.1. Комплексная амплитуда

Важнейшим инструментом при теоретическом рассмотрении волновых процессов является метод комплексных амплитуд. Иллюстрацию весьма эффективного его применения можно найти, например

в [94, с. 63–65]. Однако в литературе нет единства относительно знака экспоненциальной зависимости от времени. Так, в [3, 126, 127] принята зависимость от времени в виде $e^{-i\omega t}$, тогда как в [94, 96, 128] используется зависимость в виде $e^{i\omega t}$. Ввиду подобных разночтений, рассмотрим этот вопрос несколько подробнее.

Комплексные амплитуды вводятся для величин, имеющих гармоническую зависимость от времени вида $\cos \omega t$ или $\sin \omega t$.

Предположим, что имеется зависящая от времени величина:

$$E(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (1.350)$$

Возможны два вида комплексной зависимости гармонической величины от времени: $e^{-i\omega t}$ и $e^{i\omega t}$.

При этом

$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t; \quad (1.351)$$

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t. \quad (1.352)$$

Рассмотрим сначала зависимость от времени в виде $e^{-i\omega t}$. Согласно определению [126, с. 12–17] комплексная амплитуда $E(\omega)$ — величина, определяемая соотношением:

$$E(t) = \operatorname{Re} [E(\omega)e^{-i\omega t}]. \quad (1.353)$$

Предположим, что

$$E(\omega) = x + iy, \quad (1.354)$$

где величины x и y — действительные.

Подставляя (1.350), (1.354) и (1.351) в (1.353), получаем:

$$\begin{aligned} A \cos \omega t + B \sin \omega &= \operatorname{Re} [(x + iy)(\cos \omega t - i \sin \omega t)] = \\ &= \operatorname{Re} [(x \cos \omega t + y \sin \omega t) + i(-x \sin \omega t + y \cos \omega t)] = \\ &= x \cos \omega t + y \sin \omega t. \end{aligned} \quad (1.355)$$

Отсюда получаем:

$$x = A, \quad y = B, \quad (1.356)$$

то есть

$$E(\omega) = A + iB. \quad (1.357)$$

Это — комплексная амплитуда величины $E(t)$ при зависимости от времени в виде $e^{-i\omega t}$.

Чтобы по комплексной амплитуде (1.357) найти исходную функцию (1.350), надо воспользоваться формулой (1.353) с учетом соотношения (1.351):

$$\begin{aligned} E(t) &= \operatorname{Re} [E(\omega)e^{-i\omega t}] = \operatorname{Re} [(A + iB)(\cos \omega t - i \sin \omega t)] = \\ &= \operatorname{Re} [(A \cos \omega t + B \sin \omega t) + i(-A \sin \omega t + B \cos \omega t)] = \\ &= A \cos \omega t + B \sin \omega t. \end{aligned} \quad (1.358)$$

Рассмотрим теперь зависимость от времени в виде $e^{i\omega t}$. При этом комплексная амплитуда $E(\omega)$ вместо (1.353) будет определяться соотношением

$$E(t) = \operatorname{Re} [E(\omega)e^{i\omega t}]. \quad (1.359)$$

При этом вместо (1.355) получаем:

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t = x \cos \omega t - y \sin \omega t, \quad (1.360)$$

откуда

$$x = A, \quad y = -B, \quad (1.361)$$

то есть

$$E(\omega) = A - iB. \quad (1.362)$$

Это комплексная амплитуда величины $E(t)$ при зависимости от времени в виде $e^{i\omega t}$.

Чтобы по комплексной амплитуде (1.362) найти исходную функцию (1.350), надо воспользоваться формулой (1.359) с учетом соотношения (1.352):

$$\begin{aligned} E(t) &= \operatorname{Re} [E(\omega)e^{i\omega t}] = \operatorname{Re} [(A - iB)(\cos \omega t + i \sin \omega t)] = \\ &= \operatorname{Re} [(A \cos \omega t + B \sin \omega t) + i(A \sin \omega t - B \cos \omega t)] = \\ &= A \cos \omega t + B \sin \omega t. \end{aligned} \quad (1.363)$$

Из сравнения (1.357) с (1.362) видно, что с точки зрения удобства работы с суммой, а не с разностью, предпочтительнее выбор зависимости от времени в виде $e^{-i\omega t}$. С другой стороны, положительный знак в показателе экспоненты также представляется более удобным, чем отрицательный. Ввиду того, что в дальнейшем рассмотрении волновых процессов формулы типа (1.355) или (1.362) будут использоваться достаточно редко, тогда как экспонента в явном виде — практически постоянно, в рамках настоящей работы будем пользоваться зависимостью от времени в виде $e^{i\omega t}$.

1.6.2. Квадратный корень из комплексного числа

Приведем полезные во многих вычислениях формулы, соответствующие извлечению квадратного корня из комплексного числа:

$$\sqrt{a + ib} = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right), \quad (1.364)$$

$$\sqrt{a - ib} = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right), \quad (1.365)$$

$$\sqrt{-a + ib} = \pm \left(\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right), \quad (1.366)$$

$$\sqrt{-a - ib} = \pm \left(\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right), \quad (1.367)$$

где a и b — действительные числа, причем $a > 0$ и $b > 0$.

Покажем, как выводятся эти формулы. Рассмотрим для примера первую из них (1.364).

Пусть дано комплексное число:

$$Z = a + ib, \quad (1.368)$$

где a и b — действительные числа, причем $a > 0$ и $b > 0$.

Требуется найти число

$$\sqrt{Z} = x + iy, \quad (1.369)$$

где x и y — действительные числа.

Подставляя (1.368) в (1.369), имеем:

$$\sqrt{a + ib} = x + iy. \quad (1.370)$$

Возведем в квадрат:

$$a + ib = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy. \quad (1.371)$$

Приравняв действительную и мнимую части, получаем систему двух уравнений для определения x и y :

$$x^2 - y^2 = a; \quad (1.372)$$

$$2xy = b. \quad (1.373)$$

Из второго уравнения находим:

$$y = \frac{b}{2x}. \quad (1.374)$$

Подставляя в первое, получаем уравнение для x вида:

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0, \quad (1.375)$$

откуда находим

$$x_{1-4} = \pm \sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}. \quad (1.376)$$

Из выражения для y получаем:

$$y_{1-4} = \pm \sqrt{\frac{-a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}. \quad (1.377)$$

Итак, возможны 4 решения:

$$1) x_1 = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad y_1 = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}; \quad (1.378)$$

$$2) x_2 = -\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad y_2 = -\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}; \quad (1.379)$$

$$3) x_3 = \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad y_3 = \sqrt{\frac{-a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}; \quad (1.380)$$

$$4) x_4 = -\sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad y_4 = -\sqrt{\frac{-a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}. \quad (1.381)$$

Решения 3 и 4 не подходят, так как в них в выражении для y под внешним корнем — отрицательная величина.

Поэтому остаются только два решения:

$$1) x_1 = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad y_1 = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}; \quad (1.382)$$

$$2) x_2 = -\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad y_2 = -\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}. \quad (1.383)$$

Итак, получаем:

$$\sqrt{a + ib} = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right). \quad (1.384)$$

Остальные формулы (1.365)–(1.367) выводятся аналогично.

1.6.3. Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями

Приведем полезные соотношения, связывающие тригонометрические и гиперболические функции с мнимым и комплексным аргументом.

Следующие далее соотношения выводятся с помощью формулы Эйлера [99, с. 76, форм. (408.04)]:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x). \quad (1.385)$$

Тригонометрические функции с мнимым аргументом имеют вид [99, с. 76, форм. (408.10)–(408.13)]:

$$\sin(ix) = i \operatorname{sh}(x); \quad (1.386)$$

$$\cos(ix) = \operatorname{ch}(x); \quad (1.387)$$

$$\operatorname{tg}(ix) = i \operatorname{th}(x); \quad (1.388)$$

$$\operatorname{ctg}(ix) = -i \operatorname{cth}(x). \quad (1.389)$$

Гиперболические функции с мнимым аргументом имеют вид [99, с. 132, форм. (654.6)–(654.8)]:

$$\operatorname{sh}(ix) = i \sin(x); \quad (1.390)$$

$$\operatorname{ch}(ix) = \cos(x); \quad (1.391)$$

$$\operatorname{th}(ix) = i \operatorname{tg}(x); \quad (1.392)$$

$$\operatorname{cth}(ix) = -i \operatorname{ctg}(x). \quad (1.393)$$

Тригонометрические функции с комплексным аргументом:

$$\sin(a + ib) = i \operatorname{sh}(b - ia); \quad (1.394)$$

$$\sin(a - ib) = -i \operatorname{sh}(b + ia); \quad (1.395)$$

$$\cos(a + ib) = \operatorname{ch}(b - ia); \quad (1.396)$$

$$\cos(a - ib) = \operatorname{ch}(b + ia). \quad (1.397)$$

Гиперболические функции с комплексным аргументом:

$$\operatorname{sh}(a + ib) = i \sin(b - ia); \quad (1.398)$$

$$\operatorname{sh}(a - ib) = -i \sin(b + ia); \quad (1.399)$$

$$\operatorname{ch}(a + ib) = \cos(b - ia); \quad (1.400)$$

$$\operatorname{ch}(a - ib) = \cos(b + ia). \quad (1.401)$$

Функции (1.394)–(1.401) могут быть преобразованы по обычным формулам тригонометрических и гиперболических функций для суммы и разности аргументов. При этом правые части будут содержать комбинации из тригонометрических и гиперболических функций. Некоторые из таких формул можно найти в [99, с. 132, форм. (655.1)–(655.4)]. Проверку приведенных соотношений авторы могут рекомендовать любознательному читателю в качестве весьма полезного упражнения.

1.6.4. Преобразование суммы синуса и косинуса в единый косинус

Требуется преобразовать сумму косинуса и синуса с одинаковыми аргументами, но разными коэффициентами, в единый косинус с тем же аргументом и со сдвигом фазы. Общая формула имеет вид [99, с. 71, форм. (401.2)]:

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = \frac{a}{|a|} \sqrt{a^2 + b^2} \cos \left(\alpha - \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right). \quad (1.402)$$

Получим эту формулу. Выносим a за скобку:

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = a \left(\cos \alpha + \frac{b}{a} \sin \alpha \right). \quad (1.403)$$

Введем угол β с помощью соотношения:

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, \text{ то есть: } \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \beta. \quad (1.404)$$

Подставляем (1.404) в (1.403), раскрываем тангенс через синус и косинус и выносим $1/\cos\beta$ за скобку:

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = \frac{a}{\cos \beta} (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta). \quad (1.405)$$

Сворачиваем круглую скобку в правой части:

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = \frac{a}{\cos \beta} \cos(\alpha - \beta). \quad (1.406)$$

Выражаем косинус β через тангенс и подставляем (1.404):

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (b/a)^2}} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (1.407)$$

Подставляем (1.407) и (1.404) в (1.406):

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = \frac{a}{|a|} \sqrt{a^2 + b^2} \cos \left(\alpha - \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right). \quad (1.408)$$

Эта формула тождественно совпадает с искомой формулой (1.402).

Переведем арктангенс в арккосинус. Из (1.407) следует:

$$\beta = \arccos \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (1.409)$$

Из формулы (1.408) с учетом (1.404), пользуясь (1.409), получаем:

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = \frac{a}{|a|} \sqrt{a^2 + b^2} \cos \left(\alpha - \arccos \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right). \quad (1.410)$$

1.6.5. Представление комплексного числа в виде произведения действительного числа на экспоненту с мнимым показателем

В гармоническом колебательном процессе сдвиг фазы — мнимая добавка в показателе экспоненты: $e^{i(\omega t + \varphi)}$, $e^{i(kx + \varphi)}$ или $e^{i(\omega t - kx + \varphi)}$, причем амплитуда колебаний предполагается действительной.

Однако, при решении алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами, амплитуда обычно получается в виде комплексного числа. Поэтому, чтобы найти сдвиг фазы, надо представить это комплексное число в виде произведения действительного числа на экспоненту с мнимым показателем.

Произвольное комплексное число можно представить в виде $a + ib$, где a и b — действительные числа, причем могут иметь различные знаки. Сначала рассмотрим влияние знака b . Положим $b = \pm \alpha$, где $\alpha > 0$.

При $b = \alpha$, то есть $b > 0$ комплексное число имеет вид $a + i\alpha$. При этом знак второго слагаемого положителен.

При $b = -\alpha$, то есть $b < 0$ комплексное число имеет вид: $a - i\alpha$.

Умножая на -1 получаем $-a + i\alpha$, то есть знак второго слагаемого также становится положительным.

Таким образом, достаточно рассмотреть комплексное число, знак второго слагаемого которого положителен, то есть $b > 0$, а знак первого слагаемого может быть как положительным, так и отрицательным.

Итак, в дальнейшем рассмотрении будем полагать, что $b > 0$.

Стандартная формула представления комплексного числа в виде экспоненты с мнимым показателем имеет вид:

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i \operatorname{arctg} \frac{b}{a}}. \quad (1.411)$$

Это — развернутый вариант формулы

$$a + ib = r e^{i\varphi}, \quad (1.412)$$

где

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}. \quad (1.413)$$

Эта формула хорошо работает только при $a > 0$ из-за того, что функция арктангенса определена только в правой полуплоскости плоскости единичной окружности, а положительные значения a также соответствуют правой полуплоскости комплексной плоскости.

При $a < 0$ справедлива формула

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i(\operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi)}. \quad (1.414)$$

Здесь как угол, в показателе экспоненты, так и значение a соответствуют левым полуплоскостям плоскости комплексной и плоскости единичной окружности.

Универсальная формула, справедливая при всех действительных значениях величины a , имеет вид:

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i \left[\operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \right]}. \quad (1.415)$$

В виде (1.415) можно представить любое комплексное число — при любых действительных a и b .

При $b = 0$ формула (1.415) принимает вид:

$$a = \sqrt{a^2} e^{i \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2}} \right)}. \quad (1.416)$$

В виде (1.416) можно представить любое действительное число.

При $a = 0$ формула (1.415) принимает вид:

$$ib = \sqrt{b^2} e^{i \frac{\pi}{2}}. \quad (1.417)$$

В виде (1.417) можно представить любое мнимое число.

Знак Z действительного числа a (где $a = Z|a|$) можно представить в виде коэффициента, равного $+1$, когда $a > 0$, и -1 , когда $a < 0$, для чего воспользоваться формулой, получаемой из (1.416):

$$Z = \frac{a}{\sqrt{a^2}} = e^{i\frac{\pi}{2} \cdot \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2}}\right)}. \quad (1.418)$$

С помощью этой формулы можно перевести изменение знака действительного числа a в показатель мнимой экспоненты, то есть представить число a в виде:

$$a = |a|e^{i\frac{\pi}{2} \cdot \left(1 - \frac{a}{|a|}\right)}. \quad (1.419)$$

Пример для задачи об отражении волны

Так, например, в задаче об отражении одномерной волны от одной границы раздела сред получаются амплитуды отраженной и проходящей волн в виде:

$$B = A \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad (1.420)$$

$$C = A \frac{2k_1}{k_1 + k_2}. \quad (1.421)$$

Здесь по физическому смыслу $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Для удобства также можно положить, что $A > 0$. При этом знак C всегда совпадает со знаком A , то есть в нашем случае $C > 0$ при любых значениях k_1 и k_2 . Знак B совпадает со знаком A только при $k_1 > k_2$ (отражение от менее плотной среды), а при $k_1 < k_2$ (отражение от более плотной среды) ему противоположен.

Такое поведение знака B по отношению к знаку A можно интерпретировать как изменение фазы отраженной волны по отношению к фазе падающей: совпадение знаков означает неизменность фазы, противоположность знаков — изменение фазы на π .

Чтобы выделить изменение фазы в явном виде, надо перевести изменение знака в показатель мнимой экспоненты, то есть представить B в виде:

$$B = A|B|e^{i\alpha}, \quad (1.422)$$

где α — действительное число.

Для этого можно воспользоваться представлением знака Z действительного числа a (где $a = Z|a|$) в виде коэффициента, равного $+1$, когда $a > 0$ и -1 , когда $a < 0$, в виде:

$$Z = \frac{a}{|a|} = e^{i\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{a}{|a|}\right)}. \quad (1.423)$$

При этом получаем:

$$B = A \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = A \frac{|k_1 - k_2|}{k_1 + k_2} e^{i\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{k_1 - k_2}{|k_1 - k_2|}\right)}. \quad (1.424)$$

Из этого выражения видно, что при $k_1 > k_2$ (отражение от менее плотной среды) показатель экспоненты равен нулю, то есть фаза

отраженной волны не меняется, а при $k_1 < k_2$ (отражение от более плотной среды) показатель экспоненты равен $i\pi$, то есть фаза отраженной волны меняется на π . Заметим, что такое же соотношение между фазами отраженной и падающей волн в случае различной плотности сред имеет место в оптике для случая нормального падения света на границу раздела [4, с. 475–476].

1.6.6. Связь между волновым числом, показателем преломления, импедансом и фазовой скоростью волны

Приведем краткую сводку формул, связывающих основные параметры, характеризующие распространение электромагнитной волны. Все формулы далее даны в системе СИ.

Волновое число

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}. \quad (1.425)$$

Для свободного пространства

$$k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}. \quad (1.426)$$

Отсюда

$$k = k_0 \sqrt{\varepsilon \mu}. \quad (1.427)$$

Показатель преломления

$$n = \sqrt{\varepsilon \mu}. \quad (1.428)$$

Отсюда

$$k = k_0 n, \quad (1.429)$$

а также

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}. \quad (1.430)$$

Фазовая скорость

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}}. \quad (1.431)$$

Для свободного пространства получаем скорость света

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (1.432)$$

Отсюда

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c}{n}. \quad (1.433)$$

Импеданс (волновое сопротивление)

$$Z = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}}. \quad (1.434)$$

Для свободного пространства

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}. \quad (1.435)$$

Отсюда

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} Z_0. \quad (1.436)$$

Связь волнового числа с импедансом

$$k = \omega \varepsilon \varepsilon_0 Z = \frac{\omega \mu \mu_0}{Z}. \quad (1.437)$$

Или

$$Z = \frac{k}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} = \frac{\omega \mu \mu_0}{k}. \quad (1.438)$$

Связь показателя преломления с импедансом

$$Z = \frac{n}{\varepsilon} Z_0 = \frac{\mu}{n} Z_0. \quad (1.439)$$

Отсюда

$$n = \frac{\varepsilon Z}{Z_0} = \frac{\mu Z_0}{Z}. \quad (1.440)$$

Связь фазовой скорости с импедансом

$$v = \frac{Z}{\mu \mu_0} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0 Z}. \quad (1.441)$$

Комплексная диэлектрическая проницаемость в проводящей среде

$$\varepsilon = \varepsilon_r - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}, \quad (1.442)$$

где ε_r — действительная диэлектрическая проницаемость.

1.6.7. Основные физические величины электродинамики

Приведем краткую сводку основных констант, их размерностей и некоторых физических величин, участвующих в описании распространения электромагнитной волны. Все параметры будут даны в системе СИ. В качестве литературных источников используем [129, с. 230–237], [130, с. 196–197].

Константы и их размерности

Электрическая постоянная

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м (фарад на метр)} \approx 8,842 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}. \quad (1.443)$$

Магнитная постоянная

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м (генри на метр)} \approx 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}. \quad (1.444)$$

Импеданс (волновое сопротивление) свободного пространства

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \text{ Ом}. \quad (1.445)$$

Скорость света

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с (метр в секунду)}. \quad (1.446)$$

Размерности и наименования величин, входящих в уравнения электродинамики:

$$[\text{фарад}] = L^{-2}M^{-1}T^4I^2. \quad (1.447)$$

$$[\text{генри}] = L^2M^1T^{-2}I^{-2}. \quad (1.448)$$

$$[\text{ом}] = L^2M^1T^{-3}I^{-2}. \quad (1.449)$$

$$[\text{сименс}] = L^{-2}M^{-1}T^3I^2. \quad (1.450)$$

E — напряженность электрического поля — В/м (вольт на метр):

$$[E] = L^1M^1T^{-3}I^{-1}. \quad (1.451)$$

D — электрическое смещение (индукция) — Кл/м² (кулон на квадратный метр)

$$[D] = L^{-2}T^1I^1. \quad (1.452)$$

H — напряженность магнитного поля — А/м (ампер на метр)

$$[H] = L^{-1}I^1. \quad (1.453)$$

B — магнитная индукция — Тл (тесла)

$$[B] = M^1T^{-2}I^{-1}. \quad (1.454)$$

ε_0 — электрическая постоянная — Ф/м (фарад на метр)

$$[\varepsilon_0] = L^{-3}M^{-1}T^4I^2. \quad (1.455)$$

μ_0 — магнитная постоянная — Гн/м (генри на метр)

$$[\mu_0] = L^1M^1T^{-2}I^{-2}. \quad (1.456)$$

σ — удельная электрическая проводимость — См/м (сименс на метр) (эквивалентно Ом⁻¹ · м⁻¹)

$$[\sigma] = L^{-3}M^{-1}T^3I^2. \quad (1.457)$$

ε — относительная диэлектрическая проницаемость — безразмерная

$$[\varepsilon] = 1. \quad (1.458)$$

μ — относительная магнитная проницаемость — безразмерная

$$[\mu] = 1. \quad (1.459)$$

Выводы по главе 1

Данная глава посвящена краткому обзору физических представлений, необходимых для рассмотрения материала, излагаемого в последующих главах монографии. Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. В качестве введения к главе кратко обозреваются общие вопросы колебаний и распространения волн.

2. Рассмотрены свободные и вынужденные колебания гармонического осциллятора без затухания и с затуханием. Для всех случаев

приведены экспоненциальное и тригонометрическое решения, показана их эквивалентность.

3. Приведено общее определение одномерной волны. Рассмотрено свободное распространение одномерной волны в среде без затухания и с затуханием. Рассмотрено вынужденное распространение одномерной волны заданной частоты в среде с затуханием.

4. Рассмотрено распространение одномерной волны в рамках задачи без начальных условий, соответствующее установившемуся режиму. Отмечены особенности установившегося режима, отличающие его от режима свободного распространения. Во всех перечисленных случаях получены дисперсионные соотношения, фазовые и групповые скорости.

5. На основе классической системы уравнений Максвелла для проводящей среды в отсутствие свободных зарядов получено волновое уравнение для электромагнитной волны в диэлектрической и проводящей среде. Продемонстрирована возможность приведения уравнения для электромагнитной волны к уравнению для одномерной волны.

6. На физическом примере волны в струне, являющейся частным случаем одномерной волны, рассмотрены энергетические характеристики распространения волны. Получены два основных положения: плотность энергии волны пропорциональна произведению квадрата амплитуды на квадрат волнового числа, поток энергии волны пропорционален произведению квадрата амплитуды волны на волновое число.

7. Рассмотрены плотность и поток энергии в общем случае одномерной волны. С привлечением решения задачи о падении одномерной волны на одну границу раздела получены выражения, совпадающие с таковыми для волны в струне. Отмечены особенности энергетических характеристик в случае комплексных волновых чисел.

8. Приведена схема получения вектора Пойнтинга для электромагнитной волны. Рассмотрен аналог вектора Пойнтинга для одномерной волны.

9. Кратко рассмотрены основные характеристики традиционных методов расчета распространения волн через многослойные структуры. Отмечены методы: прямой, усреднения, матрицы и импеданса.

10. Приведены некоторые математические приемы, полезные при рассмотрении распространения волн. Основное внимание уделено работе с комплексными параметрами, соотношению между экспоненциальными и тригонометрическими функциями. Приведена связь между волновым числом, показателем преломления, импедансом и фазовой скоростью волны, а также размерности и наименования величин, входящих в уравнения электродинамики.

Глава 2

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ЧЕРЕЗ ДВЕ СРЕДЫ, РАЗДЕЛЕННЫЕ ОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Глава посвящена рассмотрению падения одномерной и электромагнитной волн на одну границу между двумя средами с различными параметрами. Получены амплитуды распространяющихся волн, а также коэффициенты отражения и прохождения. Приведена векторная модель падения одномерной волны на одну границу между средами, обладающими диссипацией.

В тексте главы использованы материалы монографий [47, 48], а также ряда статей из списка [56–93], в том числе по векторной модели [77, 92]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

2.1. Одномерная волна

Основным объектом рассмотрения в настоящем разделе будет одномерная волна. Общее понятие о такой волне и основные характеристики приведены в разделе 1.2. Для многослойных структур распространение, отражение и прохождение одномерных волн обладает значительной простотой в сочетании с высокой степенью общности. Задачи для таких волн содержат те же общие приемы, что и для волн с более сложной структурой, в том числе электромагнитных. Таким образом, случай одномерных волн является как бы фундаментом для более сложных задач, поэтому обратимся к нему в первую очередь и начнем с падения волны на единственную границу, окруженную двумя средами с различными параметрами.

2.1.1. Падение одномерной волны на одну границу раздела сред

В качестве предварительной задачи рассмотрим нормальное падение волны на одну границу раздела сред. Геометрия задачи показана на рис. 2.1. Обратимся к наиболее простому случаю без затухания.

На этом рисунке показаны заполненные волноведущей средой две области пространства 1 и 2 , разделенные плоской границей, причем внутри каждой области пространства параметры среды сохраняются постоянными, а на границе между областями скачкообразно меняются. Ось координат Ox выбрана перпендикулярной границе раздела областей 1 и 2 , координата границы равна a . Волна падает из области 1 на плоскую границу раздела между областями 1 и 2 , частично проходит в область 2 и частично отражается обратно в область 1 .

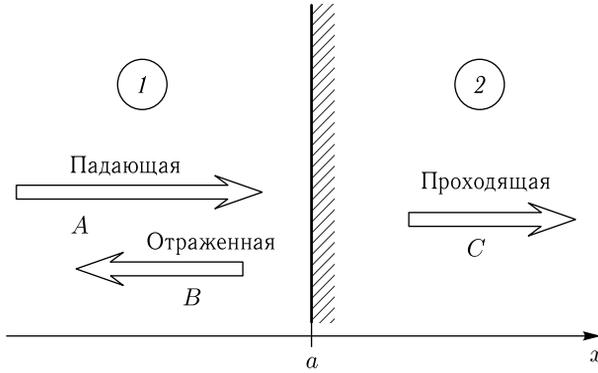


Рис. 2.1. Геометрия задачи о нормальном падении волны на одну границу раздела сред. Точка « a » — координата границы

В обеих областях волна подчиняется одному и тому же волновому уравнению вида:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0, \quad (2.1)$$

где $G(x, t)$ — волновая функция, например отклонение координаты точки струны от равновесного положения, t — время, x — координата, v — фазовая скорость волны.

Поскольку среда не является безграничной, для решения уравнения (2.1) наиболее уместно использовать метод разделения переменных (раздел 1.2.2), то есть положить решение в виде:

$$G(x, t) = T(t)U(x). \quad (2.2)$$

Подстановка (2.2) в уравнение (2.1) позволяет получить зависимость от времени в виде $e^{\pm i\omega t}$, из которой далее будем использовать только $e^{i\omega t}$. Для $U(x)$ получаем уравнение:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + k^2 U = 0, \quad (2.3)$$

где

$$k = \frac{\omega}{v}. \quad (2.4)$$

Это уравнение выполняется в любой области задачи, но величина волнового числа k в каждой области определяется конкретными параметрами данной среды. Здесь — это значение v , которое для струны равно [45, с. 26, форм. (5)]:

$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \quad (2.5)$$

где T_0 — сила натяжения струны вдоль оси Ox , ρ — линейная плотность струны (масса на единицу длины).

Общее решение уравнения (2.3) имеет вид

$$U(x) = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}, \quad (2.6)$$

так что полное решение уравнения (2.1) принимает вид

$$G(x, t) = B_1 e^{i(\omega t - kx)} + B_2 e^{i(\omega t + kx)}. \quad (2.7)$$

В этом выражении первое слагаемое — волна, распространяющаяся в положительном направлении оси Ox , второе — в отрицательном.

В рассматриваемом на рис. 2.1 случае в среде 1 присутствуют две волны, падающая и отраженная, в среде 2 — только одна проходящая. Таким образом, координатные составляющие решения имеют вид:

$$U_1 = Ae^{-ik_1 x} + Be^{ik_1 x}, \quad (2.8)$$

$$U_2 = Ce^{-ik_2 x}, \quad (2.9)$$

где волна с амплитудой A — падающая, с амплитудой B — отраженная, с амплитудой C — проходящая, а индексы 1 и 2 соответствуют номерам сред.

Наиболее общими граничными условиями при падении волны на границу являются непрерывность волновых функций и их производных по координате [131, с. 494, 497]. То есть граничные условия имеют вид:

$$U_1|_{x=a} = U_2|_{x=a}, \quad (2.10)$$

$$\left. \frac{dU_1}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{dU_2}{dx} \right|_{x=a}. \quad (2.11)$$

Подставляя решение (2.8)–(2.9) в граничные условия (2.10)–(2.11), получаем:

$$Ae^{-ik_1 a} + Be^{ik_1 a} = Ce^{-ik_2 a}, \quad (2.12)$$

$$-Ak_1 e^{-ik_1 a} + Bk_1 e^{ik_1 a} = -Ck_2 e^{-ik_2 a}. \quad (2.13)$$

Отсюда

$$Be^{ik_1 a} - Ce^{-ik_2 a} = -Ae^{-ik_1 a}, \quad (2.14)$$

$$Bk_1 e^{ik_1 a} + Ck_2 e^{-ik_2 a} = Ak_1 e^{-ik_1 a}. \quad (2.15)$$

Для простоты рассмотрения положим $a = 0$. Уравнений два, а постоянных — три, поэтому одну из них можно положить произвольной и выразить две другие через нее. Полагая заданной величину A , то есть амплитуду падающей волны, получаем систему двух уравнений для определения B и C :

$$B - C = -A; \quad (2.16)$$

$$Bk_1 + Ck_2 = Ak_1. \quad (2.17)$$

Решая эту систему, находим B и C через A :

$$B = A \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}; \quad (2.18)$$

$$C = A \frac{2k_1}{k_1 + k_2}. \quad (2.19)$$

Можно видеть, что найденные здесь амплитуды отраженной B и проходящей C волн совпадают с полученными при рассмотрении прохождения частицы через барьер [131, с. 497, форм. (153.10)].

2.1.2. Коэффициенты отражения и прохождения по амплитуде

Для общей характеристики падения волны на одну границу можно ввести коэффициенты отражения и прохождения, определяемые отношением амплитуд соответствующих волн. Так, коэффициент отражения по амплитуде равен

$$R_a = \frac{B}{A} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}; \quad (2.20)$$

а коэффициент прохождения по амплитуде равен соответственно

$$T_a = \frac{C}{A} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}. \quad (2.21)$$

2.1.3. Коэффициенты отражения и прохождения по энергии

Другой важнейшей характеристикой являются коэффициенты отражения и прохождения по энергии, определяемые как соотношения потоков энергии отраженной и проходящей волн к потоку энергии падающей волны. Для таких коэффициентов в оптике используются названия «отражательной» и «пропускательной» способностей [2, с. 67, форм. (27)].

Согласно показанному в разделе 1.3.2, поток энергии волны пропорционален произведению квадрата амплитуды волны на волновое число. При этом в геометрии рис. 2.1 получаем отражательную способность равной

$$R_e = \frac{B^2 k_1}{A^2 k_1} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} \quad (2.22)$$

и пропускательную способность равной

$$T_e = \frac{C^2 k_2}{A^2 k_1} = \frac{4k_1^2}{(k_1 + k_2)^2} \frac{k_2}{k_1} = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}. \quad (2.23)$$

Из формул (2.22) и (2.23) можно видеть, что имеет место соотношение

$$R_e + T_e = 1, \quad (2.24)$$

которое отражает закон сохранения энергии, то есть поток энергии падающей волны переходит в потоки энергии отраженной и проходящей волн, а их сумма остается равной потоку исходной волны.

2.2. Электромагнитная волна

В предыдущем разделе рассмотрена задача о падении одномерной волны на одну границу раздела сред. Полученные там закономерности носят довольно общий характер. Обратимся теперь к случаю электромагнитных волн. Этот случай является более сложным из-за трехмерного характера распространяющихся волн. Наиболее простая геометрия получается при падении электромагнитной волны по нормали на единственную границу раздела двух сред с различными параметрами. Тем не менее, такая задача имеет много общего с более сложными, поэтому в первую очередь обратимся именно к этому случаю.

2.2.1. Падение электромагнитной волны по нормали на одну границу раздела двух сред

Рассмотрим отражение и прохождение электромагнитной волны через плоскую границу раздела двух сред при нормальном падении. Затухание учитывать не будем. Геометрия задачи показана на рис.2.2.

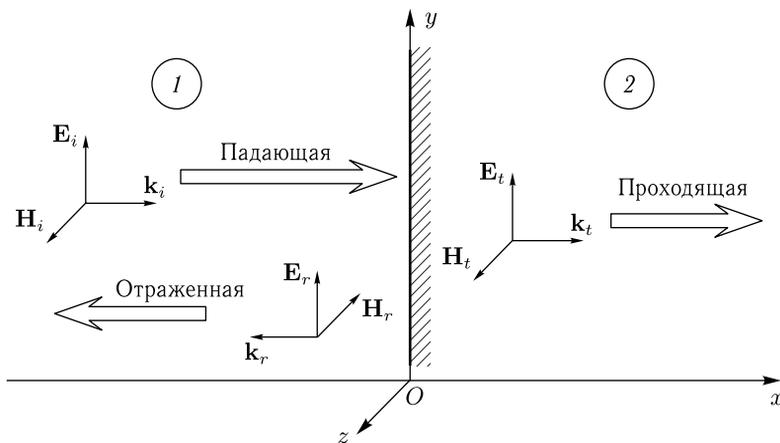


Рис. 2.2. Геометрия задачи о нормальном падении электромагнитной волны на одну границу раздела двух сред

На рисунке показаны заполненные волноведущей средой две области пространства 1 и 2, разделенные плоской границей между ними, причем внутри каждой области пространства параметры среды сохраняются постоянными, а на границе между областями меняются скачком. Волна падает из области 1 на границу раздела между областями 1 и 2, частично проходит в область 2 и частично отражается обратно в область 1. Волновые векторы падающей \mathbf{k}_i , проходящей \mathbf{k}_t и отраженной \mathbf{k}_r волн перпендикулярны границе раздела сред. Электрические и магнитные поля всех волн параллельны плоскости раздела.

Ось координат Ox ориентирована перпендикулярно границе раздела, координата границы: $x = 0$. Координатная плоскость Oyz параллельна плоскости раздела сред. Ось Oy выбрана параллельной вектору электрического поля падающей волны \mathbf{E}_i . При этом ось Oz параллельна вектору магнитного поля \mathbf{H}_i той же волны.

Полные решения волновых уравнений имеют вид:

$$\text{для падающей волны: } \mathbf{A} e^{i(\omega t - k_1 x)}; \quad (2.25)$$

$$\text{для отраженной волны: } \mathbf{B} e^{i(\omega t + k_1 x)}; \quad (2.26)$$

$$\text{для проходящей волны: } \mathbf{C} e^{i(\omega t - k_2 x)}. \quad (2.27)$$

Координатные составляющие полей имеют вид:

для падающей волны

$$E_{ix} = 0; \quad (2.28)$$

$$E_{iy} = E_{i0} e^{-ik_1 x} \text{ — задано}; \quad (2.29)$$

$$E_{iz} = 0; \quad (2.30)$$

$$H_{ix} = 0; \quad (2.31)$$

$$H_{iy} = 0; \quad (2.32)$$

$$H_{iz} = \frac{E_{i0}}{Z_1} e^{-ik_1 x}; \quad (2.33)$$

для отраженной волны

$$E_{rx} = 0; \quad (2.34)$$

$$E_{ry} = E_{r0} e^{ik_1 x}; \quad (2.35)$$

$$E_{rz} = 0; \quad (2.36)$$

$$H_{rx} = 0; \quad (2.37)$$

$$H_{ry} = 0; \quad (2.38)$$

$$H_{rz} = -\frac{E_{r0}}{Z_1} e^{ik_1 x}; \quad (2.39)$$

для проходящей волны

$$E_{tx} = 0; \quad (2.40)$$

$$E_{ty} = E_{t0} e^{-ik_2 x}; \quad (2.41)$$

$$E_{tz} = 0; \quad (2.42)$$

$$H_{tx} = 0; \quad (2.43)$$

$$H_{ty} = 0; \quad (2.44)$$

$$H_{tz} = \frac{E_{t0}}{Z_2} e^{-ik_2 x}; \quad (2.45)$$

В этих формулах волновые числа $k_{1,2} = \omega \sqrt{\varepsilon_{1,2} \varepsilon_0 \mu_{1,2} \mu_0}$ и импедансы $Z_{1,2} = \sqrt{\mu_{1,2} \mu_0 / \varepsilon_{1,2} \varepsilon_0}$ определяются формулами (1.253) и (1.258) соответственно (раздел 1.4.1).

Координатные составляющие полей по обе стороны от границы:

$$E_{1y} = E_{i0} e^{-k_1 x} + E_{r0} e^{ik_1 x}; \quad (2.46)$$

$$E_{2y} = E_{t0} e^{-ik_2 x}; \quad (2.47)$$

$$H_{1z} = \frac{E_{i0}}{Z_1} e^{-ik_1 x} - \frac{E_{r0}}{Z_1} e^{ik_1 x}; \quad (2.48)$$

$$H_{2x} = \frac{E_{t0}}{Z_2} e^{-ik_2 x}. \quad (2.49)$$

Граничные условия — непрерывность касательных составляющих полей на границе раздела:

$$E_{1y}|_{x=0} = E_{2y}|_{x=0}, \quad (2.50)$$

$$H_{1z}|_{x=0} = H_{2z}|_{x=0}. \quad (2.51)$$

Подставляя (2.46)–(2.49) в (2.50), (2.51), с учетом того, что на границе $x = 0$, получаем:

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0}; \quad (2.52)$$

$$\frac{E_{i0}}{Z_1} - \frac{E_{r0}}{Z_1} = \frac{E_{t0}}{Z_2}. \quad (2.53)$$

Разделяя на E_{i0} и вводя новые переменные

$$A = \frac{E_{r0}}{E_{i0}}, \quad (2.54)$$

$$B = \frac{E_{t0}}{E_{i0}}, \quad (2.55)$$

получаем систему уравнений для определения A и B :

$$1 + A = B; \quad (2.56)$$

$$Z_2 - AZ_2 = BZ_1. \quad (2.57)$$

Решая эту систему, находим (чтобы не путаться с перестановкой индексов «1» и «2», будем всегда ставить на первом месте «1», на втором «2»):

$$A = -\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad (2.58)$$

$$B = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (2.59)$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем амплитуды электрических полей:

$$E_{i0} - \text{задано}; \quad (2.60)$$

$$E_{r0} = -\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} E_{i0}; \quad (2.61)$$

$$E_{t0} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} E_{i0}. \quad (2.62)$$

Учитывая (2.60)–(2.62), находим амплитуды магнитных полей:

$$H_{i0} = \frac{1}{Z_1} E_{i0}; \quad (2.63)$$

$$H_{r0} = -\frac{E_{r0}}{Z_1} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1(Z_1 + Z_2)} E_{i0}; \quad (2.64)$$

$$H_{t0} = \frac{E_{t0}}{Z_2} = \frac{2}{Z_1 + Z_2} E_{i0}. \quad (2.65)$$

Из (2.64) и (2.65) с помощью (2.63) выразим H_{r0} и H_{t0} через H_{i0} :

$$H_{r0} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} H_{i0}; \quad (2.66)$$

$$H_{t0} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} H_{i0}. \quad (2.67)$$

2.2.2. Коэффициенты отражения и прохождения по полям

Найдем коэффициенты отражения и прохождения по полям.
Для электрического поля (2.60)–(2.62)

$$R_{fe} = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = -\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad (2.68)$$

$$T_{fe} = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad (2.69)$$

или по модулю

$$|R_{fe}| = \left| \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right|; \quad (2.70)$$

$$|T_{fe}| = \left| \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \right|. \quad (2.71)$$

Для магнитного поля (2.63)–(2.65)

$$R_{fm} = \frac{H_{r0}}{H_{i0}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad (2.72)$$

$$T_{fm} = \frac{H_{t0}}{H_{i0}} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}, \quad (2.73)$$

или по модулю

$$|R_{fm}| = \left| \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right|; \quad (2.74)$$

$$|T_{fm}| = \left| \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \right|. \quad (2.75)$$

Заметим, что $R_{fe} \neq R_{fm}$, а также $T_{fe} \neq T_{fm}$ и $|T_{fe}| \neq |T_{fm}|$.

2.2.3. Коэффициенты отражения и прохождения по энергиям

Найдем теперь коэффициенты отражения и прохождения по энергиям, учитывая, что поток энергии определяется вектором Пойнтинга, который в системе СИ определяется выражением (1.329) (раздел 1.4.3):

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & E_y & 0 \\ 0 & 0 & H_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} E_y H_z. \quad (2.76)$$

Будем считать, что поток энергии определяется модулем этого вектора. При этом с учетом (2.28)–(2.55) получаем потоки энергии:

для падающей волны

$$W_i = |E_{i0} \cdot H_{i0}|; \quad (2.77)$$

для отраженной волны

$$W_r = |E_{r0} \cdot H_{r0}| = \left| \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \right| \cdot |E_{i0} \cdot H_{i0}|; \quad (2.78)$$

для проходящей волны

$$W_t = |E_{t0} \cdot H_{t0}| = \left| \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \right| \cdot |E_{i0} \cdot H_{i0}|. \quad (2.79)$$

Отсюда находим коэффициенты отражения и прохождения:

$$R_e = \frac{W_r}{W_i} = \left| \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \right|; \quad (2.80)$$

$$T_e = \frac{W_t}{W_i} = \left| \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \right|. \quad (2.81)$$

При действительных Z_1 и Z_2 (то есть при $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$) получаем:

$$R_e = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2}; \quad (2.82)$$

$$T_e = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}. \quad (2.83)$$

Складывая (2.82) и (2.83), получаем:

$$R_e + T_e = \frac{(Z_1 - Z_2)^2 + 4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = 1, \quad (2.84)$$

что отражает закон сохранения энергии (раздел 2.1.3, форм. (2.24)).

2.2.4. Наклонное падение электромагнитной волны на одну границу раздела двух сред

Рассмотрим отражение и прохождение электромагнитной волны через плоскую границу раздела двух сред при наклонном падении.

В общем случае наклонное падение для падающей волны подразумевает произвольную ориентацию направления распространения.

Для углов падения и прохождения, то есть преломления, имеет место закон Снеллиуса [2, с. 63, форм. (8)]

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}, \quad (2.85)$$

где индексами «1» и «2» обозначены номера соответствующих сред.

Из (2.85), учитывая, что $k = \omega/v$, получаем:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{k_2}{k_1}. \quad (2.86)$$

Из этого соотношения для угла преломления, то есть прохождения, получаем:

$$\sin \theta_2 = \frac{k_1 \sin \theta_1}{k_2}, \quad (2.87)$$

а также

$$\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1}}{k_2}. \quad (2.88)$$

Здесь возможны два случая, различающиеся по соотношению плотностей первой и второй сред. Под плотностью будем иметь в виду произведение значений диэлектрической и магнитной проницаемостей среды. Согласно (1.253) волновое число равно:

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}, \quad (2.89)$$

а соответствующая длина волны определяется соотношением

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}}. \quad (2.90)$$

Таким образом, более плотной среде соответствует большее значение волнового числа, то есть меньшая длина волны, а менее плотной — меньшее значение волнового числа и большая длина волны.

Для удобства дальнейшего обращения при сравнении параметров двух сред более плотную среду будем называть «жесткой», а менее плотную — «мягкой».

Схема прохождения волны через разделяющую среды границу для обоих случаев показана на рис. 2.3.

Верхние две эпюры рисунка (а, б) соответствуют прохождению волны из мягкой среды в жесткую. Такое положение имеет место, например, при падении волны из свободного пространства на поверхность среды, параметры которой, диэлектрическая или магнитная проницаемости или сразу, обе больше единицы. При этом волновое число во второй

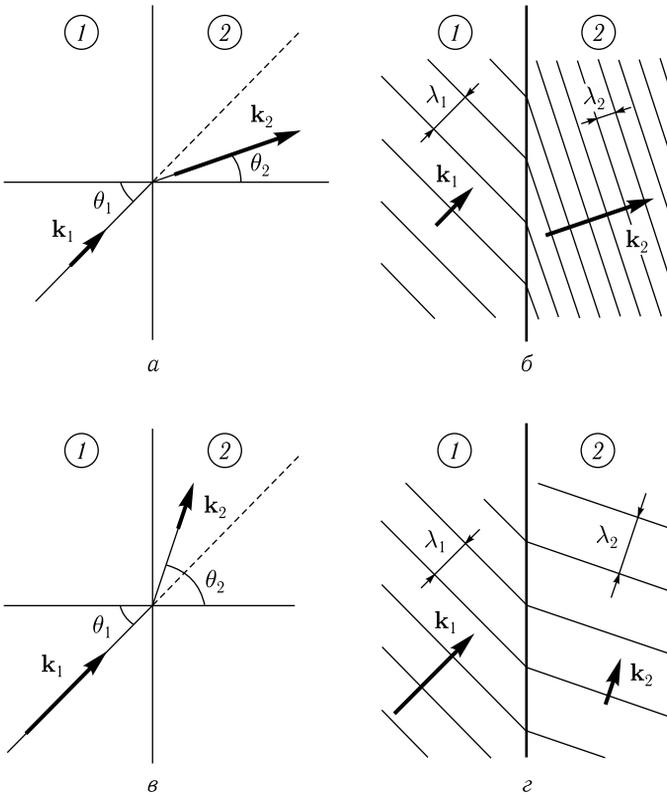


Рис. 2.3. Схема преломления волны при переходе из мягкой среды в жесткую (а, б) и их жесткой в мягкую (в, г). Левый столбец (а, в) — схема ориентации волновых векторов. Правый столбец (б, г) — схема соответствующих волновых фронтов

среде больше волнового числа в первой $k_2 > k_1$, длина волны соответственно меньше $\lambda_2 < \lambda_1$, а угол преломления, то есть прохождения θ_2 меньше, чем угол падения θ_1 .

Нижние две эпюры рисунка (в, г) соответствуют прохождению волны из жесткой среды в мягкую. Такое положение имеет место, например, когда волна выходит из среды с большими единицы проницаемостями в свободное пространство. При этом волновое число во второй среде меньше волнового числа в первой $k_2 < k_1$, длина волны соответственно больше $\lambda_2 > \lambda_1$, а угол преломления, то есть прохождения θ_2 больше, чем угол падения θ_1 .

Условием прохождения волны, то есть условием действительности $\cos \theta_2$ в формуле (2.88) является положительность подкоренного выражения. Если $k_1 < k_2$, то волна проходит из мягкой среды в жесткую. При этом проходящая волна существует при любом значении угла

падения θ_i (от 0 до 90°), так как подкоренное выражение положительно при любом значении θ_1 .

Если $k_1 > k_2$, то волна проходит из жесткой среды в мягкую. При этом условие положительности подкоренного выражения требует выполнения неравенства

$$\sin \theta_1 \leq \frac{k_2}{k_1}, \quad (2.91)$$

то есть должно быть

$$\theta_1 \leq \arcsin \left(\frac{k_2}{k_1} \right). \quad (2.92)$$

Таким образом, в этом случае максимальное значение θ_1 ограничивается величиной (2.92), выше которой наступает полное внутреннее отражение [4, с. 483–484, рис. 24.2].

Приводимое далее рассмотрение не накладывает каких-либо ограничений на соотношение между величинами k_1 и k_2 , однако в конечных формулах надо учитывать, что выражения для косинуса угла прохождения типа (2.88), справедливы только в рамках принятых ограничений, устанавливаемых условием полного внутреннего отражения.

2.2.5. Возможные варианты поляризации падающей волны

Рассматриваем задачу в сферической система координат, полярная ось которой направлена вдоль нормали к плоскости границы раздела сред. В этом случае ориентация волновых векторов падающей, отраженной и проходящей волн потребует для своего описания двух углов — полярного θ и азимутального φ . Дополнительное усложнение дает также учет поляризации всех волн, которая в результате взаимодействия с границей может меняться. В такой постановке задача становится крайне громоздкой и в традиционных случаях [2, 4] не рассматривается. Некоторые детали более полного такого рассмотрения можно найти, например, в [132]. В рамках настоящей монографии к учету азимутального угла обратимся далее только при рассмотрении универсальных граничных условий для метода усреднения (глава 3, раздел 3.2.4, рис. 3.7). Здесь же, следуя классике [2, 4], ограничимся случаем падения волны в плоскости, проходящей через нормаль и перпендикулярной плоскости раздела сред. Такая ориентация плоскости падения волны позволяет положить азимутальный угол волнового вектора падающей волны равным нулю. При этом в силу симметрии, волновые векторы отраженной и проходящей волн, а также поляризация всех волн также будут сохраняться относительно плоскости падения волны, в результате чего задача значительно упрощается.

Будем рассматривать два вида поляризации падающей волны: продольную и поперечную. Продольной поляризацией считаем далее такую, при которой вектор электрического поля падающей волны лежит в плоскости падения волны, а поперечной — такую, при которой вектор электрического поля перпендикулярен плоскости падения волны. Полагаем, что поляризация волны при отражении и прохождении

не меняется, то есть как отраженная, так и проходящая волны сохраняют ту же поляризацию, что и падающая. В силу поперечного характера электромагнитной волны при продольной поляризации векторы магнитного поля падающей, отраженной и проходящей волн перпендикулярны плоскости падения, а при поперечной лежат в этой плоскости. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

Замечание. Заметим, что используемые здесь термины «продольной» и «поперечной» поляризации, вообще говоря, не являются общепринятыми. К сожалению, в литературе на этот счет нет единства. Так, в радиотехнической практике при описании распространения волн вдоль поверхности Земли [133] для характеристики поляризации волны используются термины «вертикальная» и «горизонтальная». Другими эквивалентными терминами для поляризации являются «параллельная» и «перпендикулярная» [134], а также «р» и «s» [112, 135], «ТМ» и «ТЕ» [111, 112], «Н» и «Е» [136]. По мнению авторов, для объективной характеристики поляризации волны в рамках рассматриваемых в настоящей монографии задач наилучшим образом подходят термины «продольная» и «поперечная», которые и используются далее.

2.2.6. Продольная поляризация

Обратимся сначала к случаю продольной поляризации, геометрия задачи для которого показана на рис. 2.4.

На рисунке показаны заполненные волноведущей средой две области пространства 1 и 2, разделенные плоской границей MNPQ между ними. Декартова систем координат $Oxyz$ ориентирована таким образом, что плоскость Oyz совпадает с плоскостью границы, нормаль к границе \mathbf{n} приходится на ось Ox .

Волна падает из области 1 на границу раздела между областями 1 и 2, частично проходит в область 2 и частично отражается обратно в область 1. Плоскость падения волны ABCD перпендикулярна плоскости границы, так что нормаль \mathbf{n} тоже лежит в этой плоскости.

Ось Oy системы координат ориентирована вдоль линии EF, соответствующей пересечению плоскости границы MNPQ с плоскостью падения ABCD.

Волновые векторы падающей, отраженной \mathbf{k}_r и проходящей \mathbf{k}_t волн лежат в плоскости падения ABCD. Вектор \mathbf{k}_t составляет с нормалью к границе угол θ_i , вектор \mathbf{k}_r — угол θ_r и вектор \mathbf{k}_t — угол θ_t . В силу равенства углов падения и отражения:

$$\theta_r = \theta_i. \quad (2.93)$$

Для углов падения и прохождения, то есть преломления, имеет место закон Снеллиуса [2, с. 63, форм. (8)]:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{v_i}{v_t}, \quad (2.94)$$

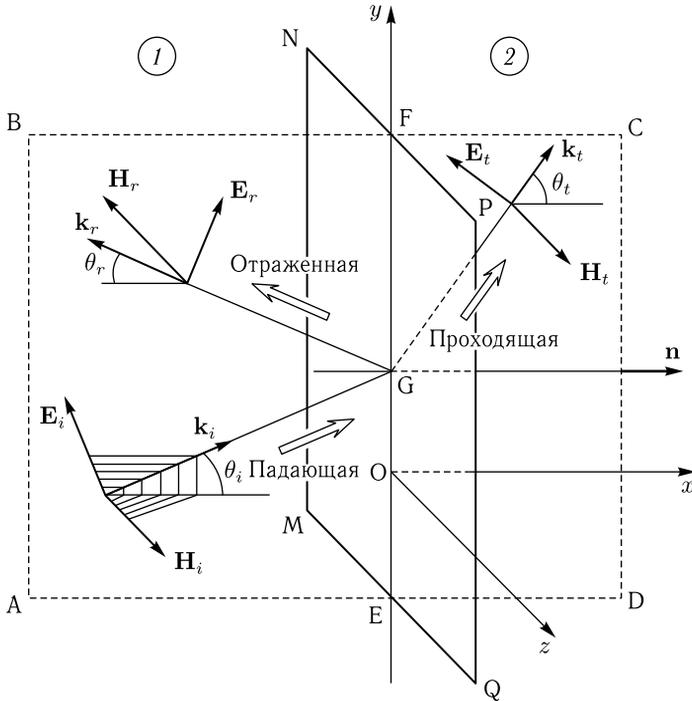


Рис. 2.4. Геометрия задачи о наклонном падении электромагнитной волны продольной поляризации на границу раздела двух сред

откуда, учитывая, что $k = \omega/v$, получаем

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{k_t}{k_i}. \quad (2.95)$$

Из этого соотношения для угла преломления, то есть прохождения, получаем

$$\sin \theta_t = \frac{k_i \sin \theta_i}{k_t}, \quad (2.96)$$

а также

$$\cos \theta_t = \frac{\sqrt{k_t^2 - k_i^2 \sin^2 \theta_i}}{k_t}. \quad (2.97)$$

Замечание. Из сравнения с (2.88) видно, что здесь индексы « i » и « t » эквивалентны номерам соответствующих сред. Сохранение далее индексов « i », « r », « t » необходимо только в тех случаях, когда надо отличить падающую волну от отраженной, обе их которых распространяются в среде 1.

В силу продольного характера задачи электрические поля всех волн лежат в плоскости падения ABCD, а магнитные поля тех же волн этой плоскости перпендикулярны.

Координатные составляющие полей имеют вид:

для падающей волны

$$E_{ix} = -E_{i0} \sin \theta_i e^{-ik_1 x}; \quad (2.98)$$

$$E_{iy} = E_{i0} \cos \theta_i e^{-ik_1 x}; \quad (2.99)$$

$$E_{iz} = 0; \quad (2.100)$$

$$H_{ix} = 0; \quad (2.101)$$

$$H_{iy} = 0; \quad (2.102)$$

$$H_{iz} = \frac{E_{i0}}{Z_1} e^{-ik_1 x}; \quad (2.103)$$

для отраженной волны

$$E_{rx} = -E_{r0} \sin \theta_r e^{ik_1 x}; \quad (2.104)$$

$$E_{ry} = E_{r0} \cos \theta_r e^{ik_1 x}; \quad (2.105)$$

$$E_{rz} = 0; \quad (2.106)$$

$$H_{rx} = 0; \quad (2.107)$$

$$H_{ry} = 0; \quad (2.108)$$

$$H_{rz} = -\frac{E_{r0}}{Z_1} e^{ik_1 x}; \quad (2.109)$$

для проходящей волны

$$E_{tx} = -E_{t0} \sin \theta_t e^{-ik_2 x}; \quad (2.110)$$

$$E_{ty} = E_{t0} \cos \theta_t e^{-ik_2 x}; \quad (2.111)$$

$$E_{tz} = 0; \quad (2.112)$$

$$H_{tx} = 0; \quad (2.113)$$

$$H_{ty} = 0; \quad (2.114)$$

$$H_{tz} = \frac{E_{t0}}{Z_2} e^{-ik_2 x}. \quad (2.115)$$

Из рис. 2.4 можно видеть, что на границе электрическое поле отлично от нуля только вдоль оси Oy , а магнитное — только вдоль оси Oz . Таким образом, граничные условия принимают вид:

$$E_{1y}|_{x=0} = E_{2y}|_{x=0}; \quad (2.116)$$

$$H_{1z}|_{x=0} = H_{2z}|_{x=0}. \quad (2.117)$$

Координатные составляющие полей по обе стороны от границы имеют вид:

$$E_{1y} = E_{i0} \cos \theta_i e^{-ik_1 x} + E_{r0} \cos \theta_r e^{ik_1 x}; \quad (2.118)$$

$$E_{2y} = E_{t0} \cos \theta_t e^{-ik_2 x}; \quad (2.119)$$

$$H_{1z} = \frac{E_{i0}}{Z_1} e^{-ik_1 x} - \frac{E_{r0}}{Z_1} e^{ik_1 x}; \quad (2.120)$$

$$H_{2z} = \frac{E_{t0}}{Z_2} e^{-ik_2 x}. \quad (2.121)$$

Подставляя поля (2.118)–(2.121) в граничные условия (2.116)–(2.117), соответствующие $x = 0$, получаем:

$$E_{i0} \cos \theta_i + E_{r0} \cos \theta_r = E_{t0} \cos \theta_t; \quad (2.122)$$

$$\frac{E_{i0}}{Z_1} - \frac{E_{r0}}{Z_1} = \frac{E_{t0}}{Z_2}. \quad (2.123)$$

Разделим на E_{i0} и введем вспомогательные обозначения:

$$A = \frac{E_{r0}}{E_{i0}}; \quad (2.124)$$

$$B = \frac{E_{t0}}{E_{i0}}. \quad (2.125)$$

В результате несложных преобразований получаем систему уравнений для определения A и B :

$$A \cos \theta_r - B \cos \theta_t = -\cos \theta_i; \quad (2.126)$$

$$AZ_2 + BZ_1 = Z_2. \quad (2.127)$$

Решая эту систему, находим:

$$A = \frac{-Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t}{Z_1 \cos \theta_r + Z_2 \cos \theta_t}; \quad (2.128)$$

$$B = \frac{Z_2 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_r}{Z_1 \cos \theta_r + Z_2 \cos \theta_t}. \quad (2.129)$$

При нормальном падении (раздел 2.2.1) все углы $\theta_{i,r,t}$ равны нулю, так что эти формулы переходят в (2.58) и (2.59).

В соответствии с (2.124) и (2.125) получаем амплитуды электрических полей отраженной и проходящей волн в виде:

$$E_{r0} = AE_{i0} = \frac{-Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t}{Z_1 \cos \theta_r + Z_2 \cos \theta_t} E_{i0}; \quad (2.130)$$

$$E_{t0} = BE_{i0} = \frac{Z_2 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_r}{Z_1 \cos \theta_r + Z_2 \cos \theta_t} E_{i0}. \quad (2.131)$$

Амплитуды соответствующих магнитных полей имеют вид:

$$H_{r0} = -\frac{E_{r0}}{Z_1} = -\frac{-Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t}{Z_1(Z_1 \cos \theta_r + Z_2 \cos \theta_t)} E_{i0}; \quad (2.132)$$

$$H_{t0} = \frac{E_{t0}}{Z_2} = \frac{Z_2 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_r}{Z_2(Z_1 \cos \theta_r + Z_2 \cos \theta_t)} E_{i0}. \quad (2.133)$$

В этих формулах углы отражения θ_r и прохождения θ_t выражаются через угол падения θ_i в соответствии с (2.93) и (2.97). Можно видеть, что при нормальном падении (раздел 2.2.1) эти формулы переходят в (2.60)–(2.65).

2.2.7. Поперечная поляризация

Обратимся теперь к случаю поперечной поляризации, геометрия задачи для которого показана на рис. 2.5.

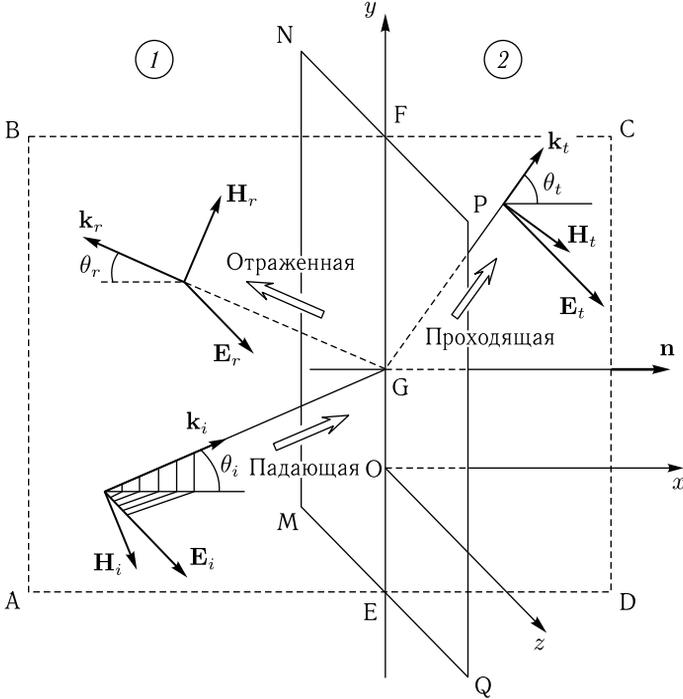


Рис. 2.5. Геометрия задачи о наклонном падении электромагнитной волны поперечной поляризации на границу раздела двух сред

Общая структура этого рисунка совпадает со структурой рис. 2.4, ориентация системы координат, плоскостей границы раздела и падения, а также направления волновых векторов и соответствующие углы —

те же самые. Различаются лишь ориентации электрического и магнитного полей падающей, отраженной и проходящей волн.

Координатные составляющие полей имеют вид:

для падающей волны

$$E_{ix} = 0; \quad (2.134)$$

$$E_{iy} = 0; \quad (2.135)$$

$$E_{iz} = E_{i0}e^{-ik_1x}; \quad (2.136)$$

$$H_{ix} = \frac{E_{i0}}{Z_1} \sin \theta_i e^{-ik_1x}; \quad (2.137)$$

$$H_{iy} = -\frac{E_{i0}}{Z_1} \cos \theta_i e^{-ik_1x}; \quad (2.138)$$

$$H_{iz} = 0; \quad (2.139)$$

для отраженной волны

$$E_{rx} = 0; \quad (2.140)$$

$$E_{ry} = 0; \quad (2.141)$$

$$E_{rz} = E_{r0}e^{ik_1x}; \quad (2.142)$$

$$H_{rx} = -\frac{E_{r0}}{Z_1} \sin \theta_r e^{ik_1x}; \quad (2.143)$$

$$H_{ry} = \frac{E_{r0}}{Z_1} \cos \theta_r e^{ik_1x}; \quad (2.144)$$

$$H_{rz} = 0; \quad (2.145)$$

для проходящей волны

$$E_{tx} = 0; \quad (2.146)$$

$$E_{ty} = 0; \quad (2.147)$$

$$E_{tz} = E_{t0}e^{-ik_2x}; \quad (2.148)$$

$$H_{tx} = -\frac{E_{t0}}{Z_2} \sin \theta_t e^{-ik_2x}; \quad (2.149)$$

$$H_{ty} = \frac{E_{t0}}{Z_2} \cos \theta_t e^{-ik_2x}; \quad (2.150)$$

$$H_{tz} = 0. \quad (2.151)$$

Из рис. 2.5 можно видеть, что на границе электрическое поле отлично от нуля только вдоль оси Oz , а магнитное — только вдоль оси Oy . Таким образом, граничные условия принимают вид:

$$E_{1z}|_{x=0} = E_{2z}|_{x=0}; \quad (2.152)$$

$$H_{1y}|_{x=0} = H_{2y}|_{x=0}. \quad (2.153)$$

Координатные составляющие полей по обе стороны от границы имеют вид:

$$E_{1z} = E_{i0}e^{-ik_1x} + E_{r0}e^{ik_1x}; \quad (2.154)$$

$$E_{2z} = E_{t0}e^{-ik_2x}; \quad (2.155)$$

$$H_{1y} = -\frac{E_{i0}}{Z_1} \cos \theta_i e^{-ik_1x} + \frac{E_{r0}}{Z_1} \cos \theta_r e^{ik_1x}; \quad (2.156)$$

$$H_{2y} = \frac{E_{t0}}{Z_2} \cos \theta_t e^{-ik_2x}. \quad (2.157)$$

Подставляя поля (2.154)–(2.157) в граничные условия (2.152)–(2.153), соответствующие $x = 0$, получаем:

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0}; \quad (2.158)$$

$$-\frac{E_{i0}}{Z_1} \cos \theta_i + \frac{E_{r0}}{Z_1} \cos \theta_r = \frac{E_{t0}}{Z_2} \cos \theta_t. \quad (2.159)$$

Разрешая эту систему относительно E_{r0} и E_{t0} подобно тому, как это было сделано для системы (2.122)–(2.123), получаем амплитуды электрических полей отраженной и проходящей волн в виде:

$$E_{r0} = \frac{-Z_1 \cos \theta_t + Z_2 \cos \theta_i}{Z_1 \cos \theta_t + Z_2 \cos \theta_r} E_{i0}; \quad (2.160)$$

$$E_{t0} = \frac{Z_2 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_r}{Z_1 \cos \theta_t + Z_2 \cos \theta_r} E_{i0}. \quad (2.161)$$

Амплитуды соответствующих магнитных полей имеют вид:

$$H_{r0} = -\frac{E_{r0}}{Z_1} = -\frac{-Z_1 \cos \theta_t + Z_2 \cos \theta_i}{Z_1(Z_1 \cos \theta_t + Z_2 \cos \theta_r)} E_{i0}; \quad (2.162)$$

$$H_{t0} = \frac{E_{t0}}{Z_2} = \frac{Z_2 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_r}{Z_2(Z_1 \cos \theta_t + Z_2 \cos \theta_r)} E_{i0}. \quad (2.163)$$

В этих формулах углы отражения θ_r и прохождения θ_t выражаются через угол падения θ_i в соответствии с (2.93) и (2.97). Можно видеть, что при нормальном падении (раздел 2.2.1) эти формулы переходят в (2.60)–(2.65).

2.2.8. Коэффициенты отражения и прохождения

Подобно задаче для нормального падения (раздел 2.2.1) теперь, когда найдены амплитуды полей при наклонном падении волны обеих поляризацій, из их отношения можно найти коэффициенты отражения и прохождения по полям, а из произведения — такие же коэффициенты по энергиям. Задача является не сложной, но несколько громоздкой, причем новых идеологических особенностей не несет, поэтому ее решение авторы оставляют на усмотрение любознательного читателя.

2.3. Векторная модель распространения одномерной волны через границу, разделяющую диссипативные среды

Важным классом волноведущих сред являются среды, в той или иной степени обладающие диссипацией. В традиционно рассматриваемой задаче о диссипативных средах используется метод комплексных амплитуд, в рамках которого волновое число представляется в виде экспоненты с комплексным показателем. Мнимая часть такого показателя как раз и определяет диссипативные свойства среды. Однако в традиционной постановке в случае падения волны на границу раздела из диссипативной среды имеет место определенный парадокс, состоящий в превышении потока энергии отраженной волны над потоком энергии волны падающей, что представляет собой нарушение закона сохранения энергии. Для преодоления такого противоречия предложен ряд методов: фиктивного слоя, интерференционного потока, действительной части отношения волновых чисел [137–139], которые, однако, носят характер искусственных приемов. В работе [62] введено понятие комплексного потока, с помощью которого баланс энергии получен естественным образом. В настоящей монографии такой подход частично рассмотрен в главе 1 (раздел 1.3). Более подробное рассмотрение авторы намереваются проделать в следующих монографиях, продолжающих настоящую, главным образом на основе работы [62]. Здесь однако не будем забегать вперед, а отметим лишь, что основная трудность работ [137–139] (и других подобных, а также библиографии к ним) кроется в применении метода комплексных амплитуд, который при вычислении квадратичного по амплитуде потока энергии испытывает определенные неудобства. В этом свете представляется важным поиск альтернативных методов расчета волновых процессов в диссипативных средах, не требующих привлечения комплексных амплитуд. В работах [77, 92] предложена векторная модель, основанная на тригонометрических функциях. В настоящем разделе показана возможность решения задач о распространении волн через границу между двумя средами с помощью подобной векторной модели без ограничений на жесткость и диссипативные свойства обеих сред.

2.3.1. Общее тригонометрическое решение

Рассмотрим отражение и прохождение одномерной волны через одну границу раздела сред с диссипацией. Будем следовать тригонометрическому решению, полученному в работах [77, 92]. Геометрия задачи показана на рис. 2.6. Волна падает со стороны среды 1, отражается от границы раздела в ту же среду 1 и частично проходит через границу в среду 2.

Волновое уравнение в среде с диссипацией имеет вид (1.136):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial G}{\partial t} - v^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0, \quad (2.164)$$

где $\beta \geq 0$.

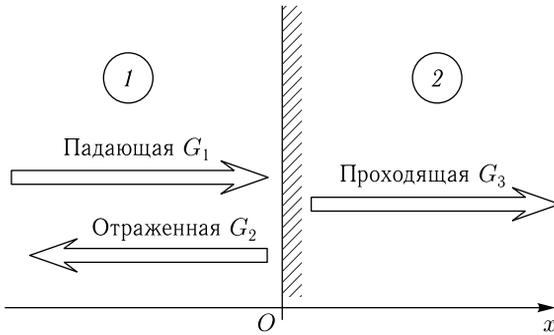


Рис. 2.6. Геометрия задачи для векторной модели

При заданной частоте ω для волны, распространяющейся в положительном направлении оси Ox , тригонометрическое решение, следующее из первого слагаемого решения (1.164), имеет вид:

$$G = e^{-\xi x} [A \cos(\omega t - \eta x) + B \sin(\omega t - \eta x)], \quad (2.165)$$

где A и B — произвольные постоянные, а η и ξ — действительные величины, определяемые формулами (1.162) и (1.163):

$$\eta = \frac{\omega}{v} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\omega^2}} \right)}; \quad (2.166)$$

$$\xi = \frac{\omega}{v} \sqrt{\frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\omega^2}} \right)}, \quad (2.167)$$

причем $\eta > 0$ и $\xi > 0$.

Решение задачи об отражении и прохождении падающей волны требует привлечения граничных условий, в качестве которых примем равенство на границе волновых функций и их координатных производных.

В соответствии с (2.165) решения для падающей, отраженной и проходящей волн имеют вид:

$$G_1 = A e^{-\xi_1 x} \cos(\omega t - \eta_1 x); \quad (2.168)$$

$$G_2 = B_1 e^{\xi_1 x} \cos(\omega t + \eta_1 x) + B_2 e^{\xi_1 x} \sin(\omega t + \eta_1 x); \quad (2.169)$$

$$G_3 = C_1 e^{-\xi_2 x} \cos(\omega t - \eta_2 x) + C_2 e^{-\xi_2 x} \sin(\omega t - \eta_2 x). \quad (2.170)$$

Подстановка (2.168)–(2.170) в граничные условия с последующим приравниванием коэффициентов при одинаковых тригонометрических функциях позволяет выразить коэффициенты $B_{1,2}$, $C_{1,2}$ через A .

Полагая для простоты $A = 1$, получаем

$$B_1 = \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2 + \xi_1^2 - \xi_2^2}{(\eta_1 + \eta_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}; \quad (2.171)$$

$$B_2 = -\frac{2(\eta_1\xi_2 - \eta_2\xi_1)}{(\eta_1 + \eta_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}. \quad (2.172)$$

$$C_1 = \frac{2[\eta_1(\eta_1 + \eta_2) + \xi_1(\xi_1 + \xi_2)]}{(\eta_1 + \eta_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}; \quad (2.173)$$

$$C_2 = -\frac{2(\eta_1\xi_2 - \eta_2\xi_1)}{(\eta_1 + \eta_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}. \quad (2.174)$$

При $x = 0$ решение (2.168)–(2.170) принимает вид:

$$G_1 = \cos \omega t; \quad (2.175)$$

$$G_2 = B_1 \cdot \cos \omega t + B_2 \cdot \sin \omega t; \quad (2.176)$$

$$G_3 = C_1 \cdot \cos \omega t + C_2 \cdot \sin \omega t. \quad (2.177)$$

Преобразуем (2.175)–(2.177) к виду:

$$G_1 = \cos \omega t; \quad (2.178)$$

$$G_2 = |G_2| \cdot \cos(\omega t + \varphi_2); \quad (2.179)$$

$$G_3 = |G_3| \cdot \cos(\omega t + \varphi_3), \quad (2.180)$$

где

$$|G_2| = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}; \quad (2.181)$$

$$|G_3| = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad (2.182)$$

$$\varphi_2 = -\operatorname{arctg} \frac{B_2}{B_1}; \quad (2.183)$$

$$\varphi_3 = -\operatorname{arctg} \frac{C_2}{C_1}. \quad (2.184)$$

Таким образом, полное решение принимает вид:

$$G_1 = \cos \omega t; \quad (2.185)$$

$$G_2 = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \cdot \cos \left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{B_2}{B_1} \right); \quad (2.186)$$

$$G_3 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \cdot \cos \left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{C_2}{C_1} \right). \quad (2.187)$$

Рассмотрим, как меняются параметры отраженной и проходящей волн при различных соотношениях жесткости и параметров диссипации в первой и второй средах. Для упрощения выкладок параметры $\eta_{1,2}$ и $\xi_{1,2}$ возьмем чисто условными, равными небольшим целым числам, по размерности соответствующим $[L^{-1}]$. При этом углы $\varphi_{1,2}$ будем отсчитывать в градусах, а амплитуды $B_{1,2}$, $C_{1,2}$, а также $G_{1,2,3}$ по размерности будут соответствовать относительным (нормированным) единицам длины $[L]$.

2.3.2. Прохождение волны из мягкой среды в жесткую при диссипации в первой среде

Соответствующие зависимости для случая прохождения волны из менее плотной (мягкой) среды ($\eta_1 = 2$) в более плотную (жесткую) среду ($\eta_2 = 6$) при изменении параметра диссипации первой среды ξ_1 иллюстрируются рис. 2.7. На рис. 2.7, *а* показаны зависимости от ξ_1 для модулей амплитуд отраженной $|G_2|$ (кривая 1) и проходящей $|G_3|$ (кривая 2) волн. На рис. 2.7, *б* показаны аналогичные зависимости для фаз отраженной φ_2 (кривая 3) и проходящей φ_3 (кривая 4) волн.

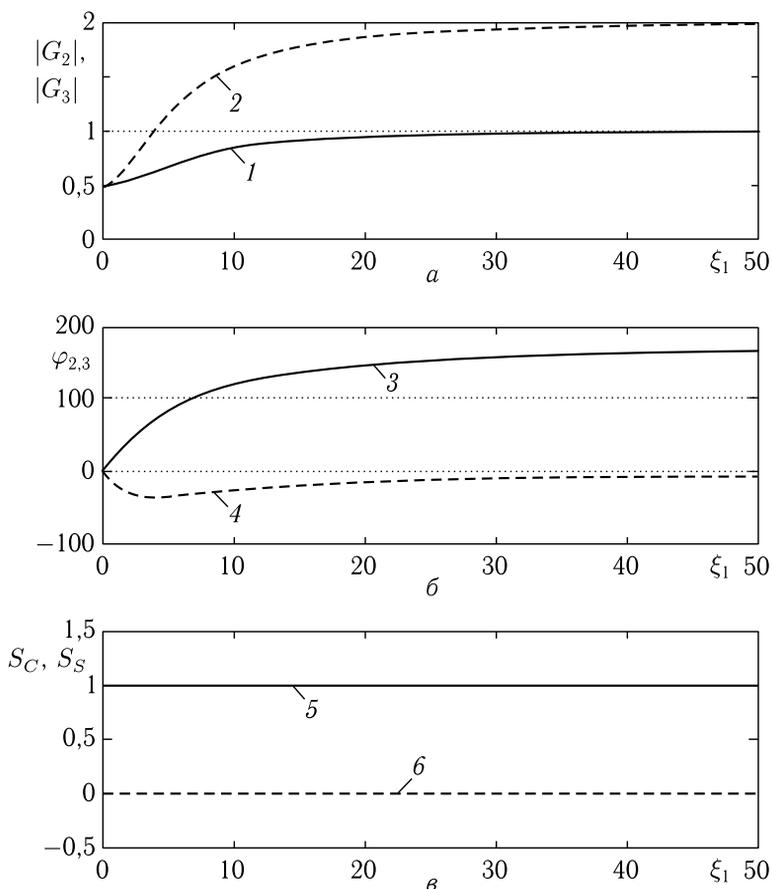


Рис. 2.7. Зависимости амплитуд, фаз и проекций векторов отраженной и проходящей волн на ось Ox от коэффициента диссипации волны в первой среде при распространении волны из мягкой среды в жесткую. Параметры сред: $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 6$; $0 \leq \xi_1 \leq 50$; $\xi_2 = 0$. *a* — амплитуды, *б* — фазы (углы $\varphi_{2,3}$ — в градусах) *в* — суммы S_C и S_S . 1 — $|G_2|$; 2 — $|G_3|$; 3 — φ_2 ; 4 — φ_3 ; 5 — S_C ; 6 — S_S

На рис. 2.7, в приведены зависимости для суммарных величин S_C (кривая 5) и S_S (кривая 6) от того же параметра ξ_1 , где

$$S_C = |G_2| \cos \varphi_2 + |G_3| \cos \varphi_3; \quad (2.188)$$

$$S_S = |G_2| \sin \varphi_2 + |G_3| \sin \varphi_3. \quad (2.189)$$

Из рис. 2.7, а и рис. 2.7, б видно, что при увеличении параметра диссипации первой среды ξ_1 как амплитуды, так и фазы отраженной и проходящей волн стремятся к стационарным значениям. При этом модуль амплитуды отраженной волны $|G_2|$ стремится к единице, а проходящей $|G_3|$ — к двойке. Сдвиг фазы отраженной волны φ_2 , будучи всегда положительным, стремится к 180° , а сдвиг фазы проходящей волны φ_3 , будучи отрицательным, стремится к нулю. Дополнительный расчет показывает, что предельные значения амплитуд и фаз обеих волн при выполнении условия $\eta_1 < \eta_2$ не зависят от конкретных величин этих параметров, причем стремление к насыщению всех кривых проявляется тем раньше, чем меньше различие между η_1 и η_2 . Из рис. 2.7, в видно, что параметры S_C и S_S от ξ_1 не зависят, причем выполняются соотношения:

$$S_C = 1; \quad (2.190)$$

$$S_S = 0. \quad (2.191)$$

Рассмотрим теперь приведенные зависимости с помощью векторной модели. Сопоставим на плоскости Oxy амплитудам и фазам отраженной и проходящей волн векторы, длины которых будут равны амплитудам соответствующих волн, а ориентация относительно оси Ox будет определяться фазами тех же волн. На рис. 2.8 показана получающаяся векторная диаграмма для распространения одномерной волны через одну границу раздела сред при фиксированном значении параметра диссипации в первой среде.

Вектор OA соответствует падающей волне, его длина принята равной 1, а фаза φ_1 равна нулю. Вектор OB соответствует отраженной волне, его длина равна 0,84, а фаза $\varphi_2 = 119,5^\circ$. Вектор OC соответствует проходящей волне, его длина равна 1,59, а фаза $\varphi_3 = -27,4^\circ$. Величинам S_C и S_S , определяемым формулами (2.188) и (2.189), соответствуют суммы проекций векторов проходящей и отраженной волн на оси Ox и Oy , то есть суммы $OD + OE$ и $OF + OG$.

Проекция вектора падающей волны на оси Ox и Oy равны: 1 и 0, проекции вектора отраженной волны на оси Ox и Oy равны: $OE = -0,413$, $OF = 0,731$, проекции вектора проходящей волны на оси Ox и Oy равны: $OD = 1,413$, $OG = -0,731$. Из этих численных значений видно, что

$$OD + OE = 1,000; \quad (2.192)$$

$$OF + OG = 0,000, \quad (2.193)$$

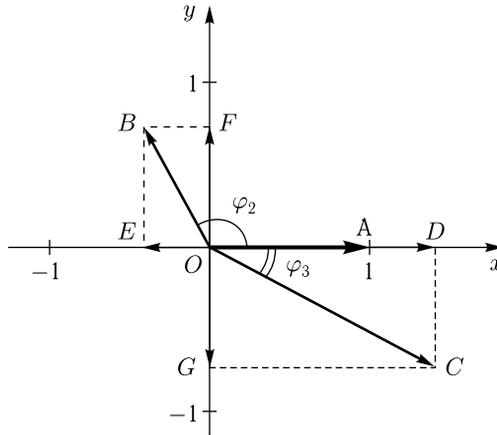


Рис. 2.8. Векторная диаграмма распространения одномерной волны через одну границу раздела сред с диссипацией в первой среде. Параметры сред: $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 6$; $\xi_1 = 10$; $\xi_2 = 0$

то есть соотношения (2.190) и (2.191) выполняются с высокой точностью, что находится в полном соответствии с кривыми 5 и 6 на рис. 2.7, в.

2.3.3. Прохождение волны из мягкой среды в жесткую при диссипации во второй среде

Соответствующие зависимости для случая прохождения волны из менее плотной (мягкой) среды ($\eta_1 = 2$) в более плотную (жесткую) среду ($\eta_2 = 6$) при изменении параметра диссипации второй среды ξ_2 иллюстрируются рис. 2.9. На рис. 2.9, а показаны зависимости для модулей амплитуд отраженной $|G_2|$ (кривая 1) и проходящей $|G_3|$ (кривая 2) волн. На рис. 2.9, б показаны аналогичные зависимости для фаз отраженной φ_2 (кривая 3) и проходящей φ_3 (кривая 4) волн. На рис. 2.9, в приведены зависимости для суммарных величин S_C (кривая 5) и S_S (кривая 6) от того же параметра ξ_2 , где:

$$S_C = |G_2| \cos \varphi_2 + |G_3| \cos \varphi_3; \quad (2.194)$$

$$S_S = |G_2| \sin \varphi_2 + |G_3| \sin \varphi_3. \quad (2.195)$$

Из рис. 2.9, а и рис. 2.9, б видно, что при увеличении параметра диссипации второй среды ξ_2 , как амплитуды, так и фазы отраженной и проходящей волн стремятся к стационарным значениям. При этом модуль амплитуды отраженной волны $|G_2|$ стремится к единице, а проходящей $|G_3|$ — к нулю. Сдвиг фазы отраженной волны φ_2 , будучи всегда отрицательным, стремится к нулю, а сдвиг фазы проходящей волны φ_3 , будучи положительным, стремится к 90° . Дополнительный расчет показывает, что предельные значения амплитуд и фаз обеих волн при выполнении условия $\eta_1 < \eta_2$ не зависят от конкретных ве-

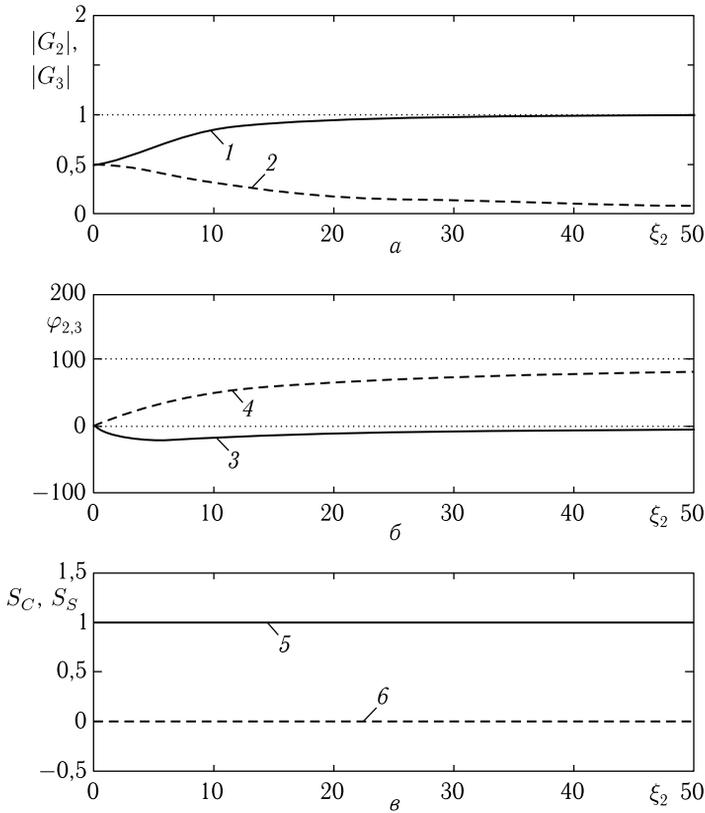


Рис. 2.9. Зависимости амплитуд, фаз и проекций векторов отраженной и проходящей волн от коэффициента диссипации волны во второй среде ξ_2 при распространении волны из мягкой среды в жесткую. Параметры сред: $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 6$; $\xi_1 = 0$; $0 \leq \xi_2 \leq 50$. a — амплитуды, b — фазы, v — суммы S_C и S_S .
 1 — $|G_2|$; 2 — $|G_3|$; 3 — φ_2 ; 4 — φ_3 ; 5 — S_C ; 6 — S_S

личин этих параметров, причем стремление к насыщению всех кривых проявляется тем раньше, чем меньше различие между η_1 и η_2 . Из рис. 2.9, v видно, что параметры S_C и S_S от ξ_2 не зависят, причем выполняются соотношения:

$$S_C = 1; \quad (2.196)$$

$$S_S = 0. \quad (2.197)$$

Рассмотрим приведенные зависимости с помощью векторной модели, которую построим подобно предыдущему случаю. На рис. 2.10 показана получающаяся векторная диаграмма для распространения одномерной волны через границу раздела двух сред при фиксированном значении параметра диссипации во второй среде.

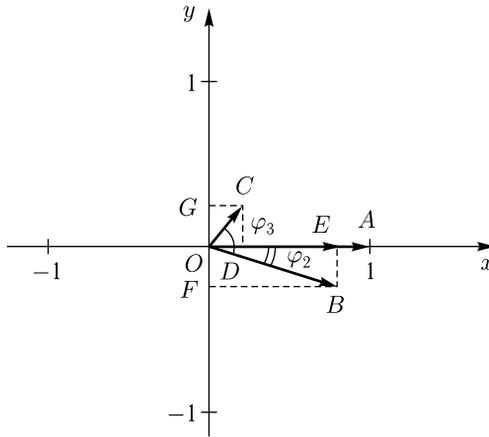


Рис. 2.10. Векторная диаграмма распространения одномерной волны через одну границу раздела сред с диссипацией во второй среде. Параметры сред: $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 6$; $\xi_1 = 0$; $\xi_2 = 10$.

Вектор OA соответствует падающей волне, его длина принята равной 1, а фаза φ_1 равна нулю. Вектор OB соответствует отраженной волне, его длина равна 0,84, а фаза $\varphi_2 = -16,8^\circ$. Вектор OC соответствует проходящей волне, его длина равна 0,31, а фаза $\varphi_3 = 51,3^\circ$. Величинам S_C и S_S , определяемым формулами (2.194) и (2.195), соответствуют суммы проекций векторов проходящей и отраженной волн на оси Ox и Oy , то есть суммы $OD + OE$ и $OF + OG$.

Проекции вектора падающей волны на оси Ox и Oy равны: 1 и 0, проекции вектора отраженной волны на оси Ox и Oy равны: $OE = 0,805$, $OF = -0,244$, проекции вектора проходящей волны на оси Ox и Oy равны: $OD = 0,195$, $OG = 0,244$. Из приведенных численных величин видно, что:

$$OD + OE = 1,000; \quad (2.198)$$

$$OF + OG = 0,000, \quad (2.199)$$

то есть соотношения (2.196) и (2.197) выполняются с высокой точностью, что находится в полном соответствии с кривыми δ и δ на рис. 2.9, δ .

2.3.4. Прохождение волны из жесткой среды в мягкую при диссипации в первой среде

Соответствующие зависимости для случая прохождения волны из более плотной (жесткой) среды ($\eta_1 = 6$) в менее плотную (мягкую) среду ($\eta_2 = 2$) при изменении параметра диссипации первой среды ξ_1 иллюстрируются рис. 2.11. На рис. 2.11, a показаны зависимости для модулей амплитуд отраженной $|G_2|$ (кривая 1) и проходящей $|G_3|$ (кривая 2) волн. На рис. 2.11, b показаны аналогичные зависимости

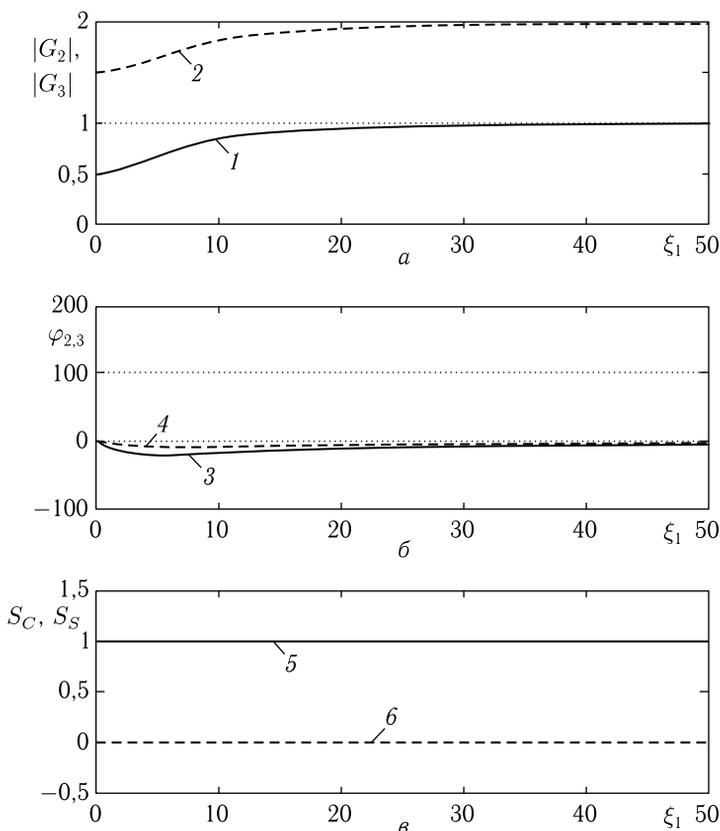


Рис. 2.11. Зависимости амплитуд, фаз и проекций векторов отраженной и проходящей волн от коэффициента диссипации волны в первой среде при распространении волны из жесткой среды в мягкую. Параметры сред: $\eta_1 = 6$, $\eta_2 = 2$; $0 \leq \xi_1 \leq 50$; $\xi_2 = 0$. a — амплитуды, b — фазы, σ — суммы S'_C и S'_S . 1 — $|G_2|$; 2 — $|G_3|$; 3 — φ_2 ; 4 — φ_3 ; 5 — S'_C ; 6 — S'_S

для фаз отраженной φ_2 (кривая 3) и проходящей φ_3 (кривая 4) волн. На рис. 2.11, σ приведены зависимости для суммарных величин S'_C (кривая 5) и S'_S (кривая 6) от того же параметра ξ_1 , причем для выполнения условий типа (2.192)–(2.193) и (2.198)–(2.199) соотношения (2.188)–(2.189) и (2.194)–(2.195) должны быть заменены на следующие:

$$S'_C = -|G_2| \cos \varphi_2 + |G_3| \cos \varphi_3; \quad (2.200)$$

$$S'_S = -|G_2| \sin \varphi_2 + |G_3| \sin \varphi_3, \quad (2.201)$$

отличающиеся от (2.188)–(2.189) и (2.194)–(2.195) знаком перед первым слагаемым.

Из рис. 2.11, *а* и рис. 2.11, *б* видно, что при увеличении параметра диссипации первой среды ξ_1 как амплитуды, так и фазы отраженной и проходящей волн стремятся к стационарным значениям. При этом модуль амплитуды отраженной волны $|G_2|$ стремится к единице, а проходящей $|G_3|$ — к двойке. Сдвиг фазы отраженной волны φ_2 , будучи всегда отрицательным, стремится к нулю, а сдвиг фазы проходящей волны φ_3 , также будучи всегда отрицательным, стремится также к нулю. Дополнительный расчет показывает, что предельные значения амплитуд и фаз обеих волн при выполнении условия $\eta_1 < \eta_2$ не зависят от конкретных величин этих параметров, причем стремление к насыщению всех кривых проявляется тем раньше, чем меньше различие между η_1 и η_2 . Из рис. 2.11, *в* видно, что определенные формулами (2.200)–(2.201) параметры S'_C и S'_S от ξ_1 не зависят, причем выполняются соотношения

$$S'_C = 1; \quad (2.202)$$

$$S'_S = 0. \quad (2.203)$$

Рассмотрим приведенные зависимости с помощью векторной модели, которую построим подобно предыдущим случаям. На рис. 2.12 показана полученная векторная диаграмма для распространения волны через границу раздела сред при фиксированном значении параметра диссипации в первой среде.

Вектор OA соответствует падающей волне, его длина принята равной 1, а фаза φ_1 равна нулю. Вектор OB соответствует отраженной

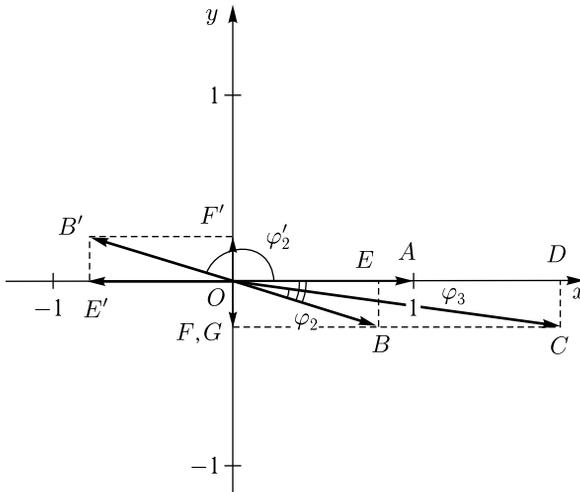


Рис. 2.12. Векторная диаграмма распространения одномерной волны через одну границу раздела сред с диссипацией в первой среде. Параметры сред: $\eta_1 = 6$, $\eta_2 = 2$; $\xi_1 = 10$; $\xi_2 = 0$.

волне, его длина равна 0,84, а фаза $\varphi_2 = -16,8^\circ$. Вектор OC соответствует проходящей волне, его длина равна 1,82, а фаза $\varphi_3 = -7,70^\circ$. Для подстановки в соотношения (2.200)–(2.201) построен вспомогательный вектор OB' , соответствующий повороту вектора OB на 180° , то есть его длина равна длине вектора OB , а фаза $\varphi'_2 = \varphi_2 + 180^\circ = 163,2^\circ$. Величинам S'_C и S'_S , определяемым формулами (2.200) и (2.201), соответствуют суммы проекций вектора проходящей и повернутого на 180° вектора отраженной волны на оси Ox и Oy , то есть суммы $OD + OE'$ и $OF' + OG$. Проекции вектора падающей волны на оси $\eta_1 = 6$ и $\eta_2 = 2$ равны: ξ_2 и $|G_2|$, проекции повернутого на $|G_3|$ вектора отраженной волны на оси φ_2 и φ_3 равны: $OE' = -0,805$, $OF' = 0,244$ S'_S , проекции вектора проходящей волны на оси Ox и Oy равны: $OD = 1,805$, $OG = -0,244$. Из этих численных значений можно видеть, что

$$OD + OE' = 1,000; \quad (2.204)$$

$$OF' + OG = 0,000, \quad (2.205)$$

то есть соотношения (2.202) и (2.203) выполняются с высокой точностью, что находится в полном соответствии с кривыми 5 и 6 на рис. 2.11, в.

2.3.5. Прохождение волны из жесткой среды в мягкую при диссипации во второй среде

Соответствующие зависимости для случая прохождения волны из более плотной (жесткой) среды ($\eta_1 = 6$) в менее плотную (мягкую) среду ($\eta_2 = 2$) при изменении параметра диссипации второй среды ξ_2 иллюстрируются рис. 2.13. На рис. 2.13, а показаны зависимости для модулей амплитуд отраженной $|G_2|$ (кривая 1) и проходящей $|G_3|$ (кривая 2) волн. На рис. 2.13, б показаны аналогичные зависимости для фаз отраженной φ_2 (кривая 3) и проходящей φ_3 (кривая 4) волн. На рис. 2.13, в приведены зависимости для суммарных величин S'_C (кривая 5) и S'_S (кривая 6) от того же параметра ξ_2 , причем для выполнения условий типа (2.192)–(2.193) и (2.198)–(2.199) соотношения (2.188)–(2.189) и (2.194)–(2.195) должны быть заменены на следующие:

$$S'_C = -|G_2| \cos \varphi_2 + |G_3| \cos \varphi_3; \quad (2.206)$$

$$S'_S = -|G_2| \sin \varphi_2 + |G_3| \sin \varphi_3, \quad (2.207)$$

отличающиеся от (2.188)–(2.189) и (2.194)–(2.195) знаком перед первым слагаемым.

Из рис. 2.13, а и рис. 2.13, б видно, что при увеличении параметра диссипации второй среды ξ_2 , как амплитуды, так и фазы отраженной и проходящей волн стремятся к стационарным значениям. При этом модуль амплитуды отраженной волны $|G_2|$ стремится к единице, а проходящей $|G_3|$ — к нулю. Сдвиг фазы отраженной волны φ_2 , будучи всегда

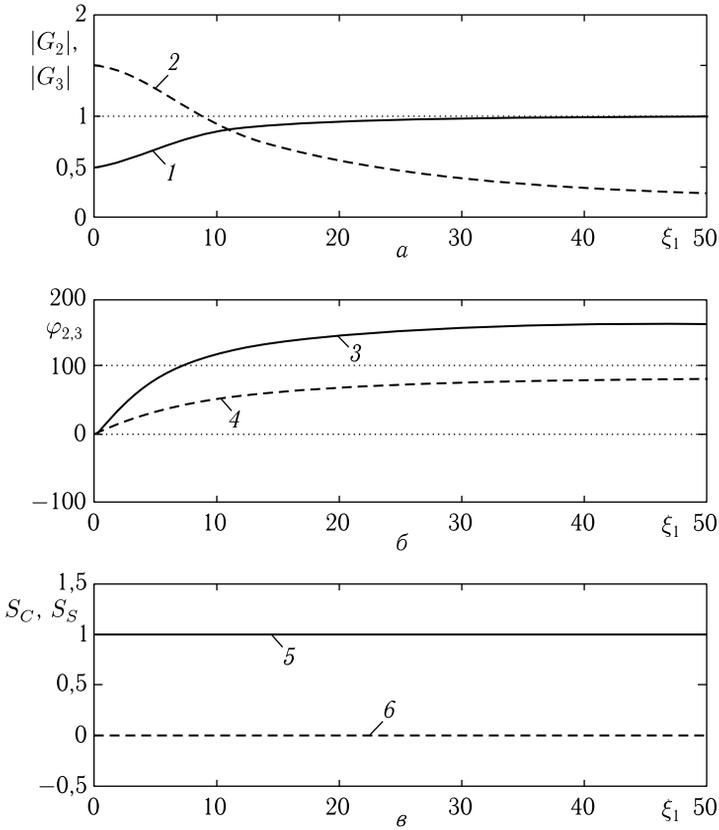


Рис. 2.13. Зависимости амплитуд, фаз и проекций векторов отраженной и проходящей волн от коэффициента диссипации волны во второй среде ξ_2 при распространении волны из жесткой среды в мягкую. Параметры сред: $\eta_1 = 6$, $\eta_2 = 2$; $\xi_1 = 0$; $0 \leq \xi_2 \leq 50$. a — амплитуды, b — фазы, v — суммы S'_C и S'_S . 1 — $|G_2|$; 2 — $|G_3|$; 3 — φ_2 ; 4 — φ_3 ; 5 — S'_C ; 6 — S'_S .

положительным, стремится к 180° , а сдвиг фазы проходящей волны φ_3 , также будучи всегда положительным, стремится к 90° . Дополнительный расчет показывает, что предельные значения амплитуд и фаз обеих волн при выполнении условия $\eta_1 < \eta_2$ не зависят от конкретных величин этих параметров, причем стремление к насыщению всех кривых проявляется тем раньше, чем меньше различие между η_1 и η_2 . Из рис. 2.13, в видно, что определенные формулами (2.206)–(2.207) параметры S'_C и S'_S от ξ_1 не зависят, причем выполняются соотношения:

$$S'_C = 1; \quad (2.208)$$

$$S'_S = 0. \quad (2.209)$$

Рассмотрим приведенные зависимости с помощью векторной модели, построенной подобно предыдущим случаям. Соответствующая векторная диаграмма для распространения одномерной волны через границу раздела сред при фиксированном значении параметра диссипации во второй среде показана на рис. 2.14.

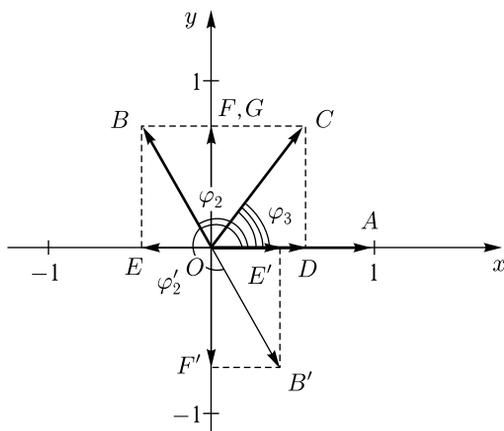


Рис. 2.14. Векторная диаграмма распространения одномерной волны через одну границу раздела сред с диссипацией во второй среде. Параметры сред: $\eta_1 = 6$, $\eta_2 = 2$; $\xi_1 = 0$; $\xi_2 = 10$.

Вектор OA соответствует падающей волне, его длина принята равной 1, а фаза φ_1 равна нулю. Вектор OB соответствует отраженной волне, его длина равна 0,84, а фаза $\varphi_2 = 119,5^\circ$. Вектор OC соответствует проходящей волне, его длина равна 0,94, а фаза $\varphi_3 = 51,34^\circ$. Для подстановки в соотношения (2.198)–(2.199) построен вспомогательный вектор OB' , соответствующий повороту вектора OB на 180° , то есть его длина равна длине вектора OB , а фаза $\varphi_2' = \varphi_2 + 180^\circ = 299,5^\circ$. Величинам S'_C и S'_S , определяемым формулами (2.206) и (2.207), соответствуют суммы проекций вектора проходящей и повернутого на 180° вектора отраженной волны на оси Ox и Oy , то есть суммы $OD + OE'$ и $OF' + OG$. Проекции вектора падающей волны на оси Ox и Oy равны: 1 и 0, проекции повернутого на 180° вектора отраженной волны на оси Ox и Oy равны: $OE' = 0,415$, $OF' = -0,732$, проекции вектора проходящей волны на оси Ox и Oy равны: $OD = 0,585$, $OG = 0,732$. Из этих численных величин видно, что

$$OD + OE' = 1,000; \quad (2.210)$$

$$OF' + OG = 0,000, \quad (2.211)$$

то есть соотношения (2.210) и (2.211) выполняются с высокой точностью, что находится в полном соответствии с кривыми 5 и 6 на рис. 2.13, в.

2.3.6. Общий вывод по векторной модели

Из проведенного рассмотрения видно, что векторная модель вполне успешно позволяет решить задачу о падении волны на одну границу, используя только тригонометрическое решение без привлечения метода комплексных амплитуд. Более того, построение векторных диаграмм обеспечивает дополнительную наглядность получаемых решений. Из рассмотрения пар соотношений (2.192)–(2.193), (2.198)–(2.199), (2.204)–(2.205), (2.210)–(2.211) видно, что во всех случаях, то есть при любых соотношениях жесткости первой и второй сред имеются два векторных инварианта, не зависящие от величин и взаимного соотношения уровней диссипации сред:

- 1) сумма проекций векторов отраженной и проходящей волн на полярную ось равна проекции вектора падающей волны на ту же ось;
- 2) сумма проекций векторов отраженной и проходящей волн на нормаль к полярной оси равна нулю.

Эти инварианты получены для случая одномерных волн. Можно полагать, что подобные векторные соотношения выполняются также для электромагнитных волн. Проверку такого предположения авторы оставляют в качестве задачи для любознательного читателя.

Дальнейшее развитие векторной модели, в том числе для случаев двух и более границ, выходит за рамки настоящей монографии. Однако можно полагать, что ее применение к энергетическим соотношениям, рассмотренным далее в главах 3 и 4, было бы полезным в плане уточнения положений, связанных с комплексным характером традиционных решений. Проверку полезности такого рассмотрения, в том числе для электромагнитных волн, в сочетании с дальнейшим развитием векторной модели на многослойные структуры, авторы оставляют в качестве дополнительной многообещающей задачи для любознательного читателя.

Выводы по главе 2

Глава посвящена вопросам распространения одномерных и электромагнитных волн через одну границу раздела между двумя средами с различными параметрами. Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Введено понятие одномерной волны, указаны его основные характеристики. Рассмотрено нормальное падение одномерной волны на одну границу раздела двух сред с разными параметрами. Записаны волновые уравнения для волн в обеих средах. Приведены граничные условия, состоящие в равенстве на границе значений волновых функций и их первых производных по координате. В результате решения

получены амплитуды отраженной и проходящей волн, выраженные через амплитуду волны падающей. Найдены коэффициенты отражения и прохождения по амплитуде и по энергии.

2. Рассмотрено падение электромагнитной волны на одну границу, разделяющую две среды с различными параметрами. Приведена геометрия задачи для случая, когда плоскость падения волны перпендикулярна к плоскости раздела сред. Рассмотрены случаи нормального и наклонного падения волны на границу. В случае наклонного падения получены углы отражения и прохождения, выраженные через угол падения исходной волны и волновые числа волн в обеих средах. Выделены два случая — продольной и поперечной поляризации волны, из которых первый соответствует ориентации векторов электрических полей падающей, отраженной и проходящей волн в плоскости падения исходной волны, а второй соответствует ориентации векторов электрических полей по нормали к плоскости падения исходной волны. Для обоих случаев записаны компоненты электрических и магнитных полей в обеих средах. Приведены граничные условия, состоящие в равенстве на границе касательных составляющих электрического и магнитного полей. Получены амплитуды полей отраженной и проходящей волн, выраженные через амплитуду падающей волны и углы падения, отражения и прохождения.

3. Показана возможность решения задачи о распространении одномерной волны через границу между двумя диссипативными средами с помощью тригонометрической векторной модели без привлечения метода комплексных амплитуд. Рассмотрены четыре возможных варианта распространения волны: прохождение из мягкой среды в жесткую и из жесткой в мягкую при диссипации в первой или второй среде. Для каждого из вариантов найдены зависимости амплитуд и фаз отраженной и проходящей волн от соответствующего параметра диссипации. На полярной плоскости построена векторная модель распространения волны, в которой длины векторов соответствуют амплитудам волн, а полярные углы — их фазам. Выявлены два инварианта, не зависящие от диссипации сред: сумма проекций на полярную ось векторов отраженной и проходящей волн, равная проекции вектора падающей волны на ту же ось, и сумма проекций векторов тех же волн на нормаль к полярной оси, равная нулю. Отмечены возможные перспективы развития векторной модели.

Глава 3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ЧЕРЕЗ ТРИ СРЕДЫ, РАЗДЕЛЕННЫЕ ДВУМЯ ГРАНИЦАМИ

Глава посвящена вопросам распространения волн через слоистую структуру, представляющую собой один слой, ограниченный двумя границами, то есть через три среды, разделенные двумя границами.

Рассмотрение проведено для одномерных волн, а также для электромагнитных при нормальном и наклонном падении волны на структуру. Получены амплитуды распространяющихся волн, а также коэффициенты отражения и прохождения. В качестве основных использованы прямой метод и метод усреднения, проведено сравнение между этими методами, выявлены их преимущества и недостатки. Установлено единство одномерных и электродинамических задач, приведены приемы сведения электродинамических задач к одномерным.

В тексте главы частично использованы материалы монографии [47], а также статей [56–65]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

3.1. Одномерная волна

Для многослойных структур распространение, отражение и прохождение одномерных волн обладает значительной простотой в сочетании с высокой степенью общности. Задачи для таких волн содержат те же общие приемы, что и для волн с более сложной структурой, в том числе электромагнитных. Таким образом, случай одномерных волн является как бы фундаментом для более сложных задач, поэтому обратимся к нему в первую очередь.

3.1.1. Падение одномерной волны на две границы раздела сред. Прямой метод

Рассмотрим падение волны на пластину, ограниченную двумя поверхностями, то есть имеющую две границы раздела сред. Эту задачу можно решить двумя методами — прямым и методом усреднения. Сначала обратимся к прямому методу, как более последовательному. Геометрия задачи показана на рис. 3.1.

Предположим, что все пространство разделено двумя параллельными плоскостями на три области 1, 2 и 3, внутри каждой из которых параметры среды сохраняются, но между областями могут различаться. Выберем ось координат Ox перпендикулярной границам раздела обла-

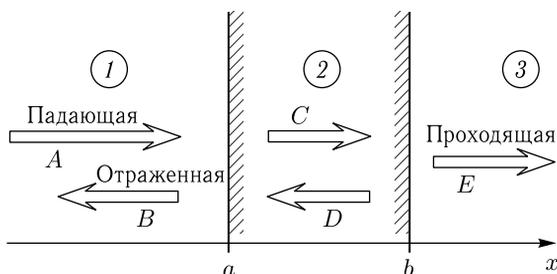


Рис. 3.1. Геометрия задачи о падении одномерной волны на две границы раздела сред. Точки a , b — координаты границ

стей, а координаты границ областей обозначим через a и b . Пусть волна падает из области 1 на плоскую границу раздела между областями 1 и 2, после чего часть ее, прошедшая в область 2, падает на плоскую границу раздела между областями 2 и 3 и частично проходит в область 3. При каждом падении волна частично отражается, причем через область 2 волна проходит многократно, испытывая при каждом падении частичное прохождение и частичное отражение. В результате такого многократного прохождения и переотражения в области 1 формируется суммарная отраженная волна, а в области 3 — суммарная проходящая.

В этом случае координатные составляющие решения имеют вид:

$$U_1 = Ae^{-ik_1x} + Be^{ik_1x}; \quad (3.1)$$

$$U_2 = Ce^{-ik_2x} + De^{ik_2x}; \quad (3.2)$$

$$U_3 = Ee^{-ik_3x}. \quad (3.3)$$

Здесь волна с амплитудой A — падающая, с амплитудой B — отраженная, волны с амплитудами C и D — распространяющиеся в обоих направлениях оси Ox внутри пластины, волна с амплитудой E — проходящая.

Находим производные:

$$\frac{dU_1}{dx} = -Aik_1e^{-ik_1x} + Bik_1e^{ik_1x}; \quad (3.4)$$

$$\frac{dU_2}{dx} = -Cik_2e^{-ik_2x} + Dik_2e^{ik_2x}; \quad (3.5)$$

$$\frac{dU_3}{dx} = -Eik_3e^{-ik_3x}. \quad (3.6)$$

Граничные условия — равенство амплитуд и производных волновых функций на границах раздела сред:

$$U_1|_{x=a} = U_2|_{x=a}; \quad (3.7)$$

$$U_2|_{x=b} = U_3|_{x=b}; \quad (3.8)$$

$$\frac{dU_1}{dx} \Big|_{x=a} = \frac{dU_2}{dx} \Big|_{x=a}; \quad (3.9)$$

$$\frac{dU_2}{dx} \Big|_{x=b} = \frac{dU_3}{dx} \Big|_{x=b}. \quad (3.10)$$

Подставляя решение и производные в граничные условия, получаем систему уравнений для определения амплитуд B , C , D , E через заданную амплитуду A :

$$Ae^{-ik_1a} + Be^{ik_1a} = Ce^{-ik_2a} + De^{ik_2a}; \quad (3.11)$$

$$Ce^{-ik_2b} + De^{ik_2b} = Ee^{-ik_3b}; \quad (3.12)$$

$$-Aik_1e^{-ik_1a} + Bik_1e^{ik_1a} = -Cik_2e^{-ik_2a} + Dik_2e^{ik_2a}; \quad (3.13)$$

$$-Cik_2e^{-ik_2b} + Dik_2e^{ik_2b} = -Eik_3e^{-ik_3b}. \quad (3.14)$$

Разделим третье и четвертое уравнения на i и перенесем слагаемые с B , C , D , E в левую часть, а слагаемые с A — в правую:

$$Be^{ik_1a} - Ce^{-ik_2a} - De^{ik_2a} = -Ae^{-ik_1a}; \quad (3.15)$$

$$Ce^{-ik_2b} + De^{ik_2b} - Ee^{-ik_3b} = 0; \quad (3.16)$$

$$Bk_1e^{ik_1a} + Ck_2e^{-ik_2a} - Dk_2e^{ik_2a} = Ak_1e^{-ik_1a}; \quad (3.17)$$

$$Ck_2e^{-ik_2b} - Dk_2e^{ik_2b} - Ek_3e^{-ik_3b} = 0. \quad (3.18)$$

Таблицы коэффициентов этой системы уравнений имеют вид:

B	C	D	E	A	
e^{ik_1a}	$-e^{-ik_2a}$	$-e^{ik_2a}$	0	$-e^{-ik_1a}$	(3.19)
0	e^{-ik_2b}	e^{ik_2b}	$-e^{-ik_3b}$	0	
$k_1e^{ik_1a}$	$k_2e^{-ik_2a}$	$-k_2e^{ik_2a}$	0	$k_1e^{-ik_1a}$	
0	$k_2e^{-ik_2b}$	$-k_2e^{ik_2b}$	$-k_3e^{-ik_3b}$	0	

Систему (3.15)–(3.19) достаточно удобно можно решить по правилу Крамера [104, с. 45, раздел 1.9–2], [140, с. 54–56], согласно которому

$$B = \frac{D_B}{D_0}; \quad (3.20)$$

$$C = \frac{D_C}{D_0}; \quad (3.21)$$

$$D = \frac{D_D}{D_0}; \quad (3.22)$$

$$E = \frac{D_E}{D_0}, \quad (3.23)$$

где D_0 — полный детерминант системы (3.15)–(3.19), а D_B , D_C , D_D , D_E — детерминанты, получаемые из полного при замене соответствующего столбца главной матрицы столбцом матрицы A .

Раскрывая таблицу (3.19), находим полный детерминант:

$$D_0 = e^{i(k_1 a - k_3 b)} \times \left[(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2(b-a)} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2(b-a)} \right]. \quad (3.24)$$

Остальные детерминанты имеют подобный вид. Находя их и подставляя в (3.20) и (3.23), получаем амплитуды волн вне B , E и внутри C , D пластины:

$$B = A e^{-2ik_1 a} \frac{(k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2(b-a)} + (k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2(b-a)}}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2(b-a)} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2(b-a)}}; \quad (3.25)$$

$$C = A \frac{2k_1(k_2 + k_3)e^{ik_2(b-a)}}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2(b-a)} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2(b-a)}}; \quad (3.26)$$

$$D = A \frac{2k_1(k_2 - k_3)e^{-ik_2(b-a)}}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2(b-a)} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2(b-a)}}; \quad (3.27)$$

$$E = A \frac{4k_1 k_2 e^{-i(k_1 a - k_3 b)}}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2(b-a)} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2(b-a)}}. \quad (3.28)$$

3.1.2. Коэффициенты отражения и прохождения

Коэффициенты отражения и прохождения по амплитудам равны отношению амплитуд отраженной и проходящей волн к амплитуде падающей, то есть определяются выражениями (3.25) и (3.28), в которых достаточно положить $A = 1$.

Полные выражения для коэффициентов отражения и прохождения по энергиям в соответствии с (3.25) и (3.28) получаются довольно громоздкими, поэтому получим их для более простого случая, а именно, в предположении, что параметры сред I и 3 совпадают, то есть $k_3 = k_1$. В силу однородности сред коэффициенты отражения и прохождения не зависят от выбора начала системы координат, поэтому можно положить $a = 0$.

При таких условиях из (3.25) и (3.28) получаем:

$$B = \frac{(k_1^2 - k_2^2)(e^{ik_2 b} - e^{-ik_2 b})}{(k_1 + k_2)^2 e^{ik_2 b} - (k_1 - k_2)^2 e^{-ik_2 b}}; \quad (3.29)$$

$$E = \frac{4k_1 k_2 e^{ik_1 b}}{(k_1 + k_2)^2 e^{ik_2 b} - (k_1 - k_2)^2 e^{-ik_2 b}}. \quad (3.30)$$

Здесь амплитуды волн — величины комплексные, поэтому положим, что поток энергии волны пропорционален квадрату модуля ее амплитуды. При этом получаем коэффициенты отражения и прохождения по энергиям в виде:

$$R_e = \frac{|B|^2}{|A|^2}; \quad (3.31)$$

$$T_e = \frac{|E|^2}{|A|^2} \frac{k_3}{k_1}, \quad (3.32)$$

откуда в силу $k_3 = k_1$ и $A = 1$, получаем

$$R_e = |B|^2; \quad (3.33)$$

$$T_e = |E|^2. \quad (3.34)$$

Замечание. Выражение (3.32) является корректным только в случае действительных волновых чисел $k_{1,3}$, а для комплексных чисел следует пользоваться формулами (1.226), (1.227). Однако следует сказать, что при принятом здесь условии $k_3 = k_1$, получение формулы (3.34) из (3.32) остается справедливым.

Представим экспоненты в выражениях для B и E как комплексные числа в тригонометрической форме и найдем модули числителей и знаменателей обоих выражений как квадратный корень из суммы квадратов действительной и мнимой частей. Полученные модули числителей разделим на модули знаменателей и полученные дроби возведем в квадрат.

В результате получим коэффициенты отражения и прохождения в виде:

$$R_e = \frac{(k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2 k_2 b}{(k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2 k_2 b + 4k_1^2 k_2^2}; \quad (3.35)$$

$$T_e = \frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2 k_2 b + 4k_1^2 k_2^2}. \quad (3.36)$$

Суммируя эти выражения, получаем

$$R_e + T_e = 1, \quad (3.37)$$

что соответствует закону сохранения энергии.

3.1.3. Нормировка амплитуды волны, проходящей через структуру

Рассмотрим падение одномерной волны на пластину, окруженную двумя средами с различными параметрами несколько более подробно.

В предыдущем разделе получены амплитуды волн, распространяющихся внутри и вне пластины в обоих направлениях (3.25)–(3.28). При решении задачи никаких предположений относительно характера волновых чисел не делалось, так что без ограничения общности они могли быть как действительными, так и комплексными. При этом волновые числа входят в показатели экспонент, будучи умноженными на мнимую единицу i . То есть в случае комплексного волнового числа умножение его мнимой части на i даст действительный показатель экспоненты, что по мере изменения координаты может означать как затухание, так и экспоненциальный рост, то есть расходимость.

Однако в главе 1 (раздел 1.2.5, форм. (1.160)–(1.164)) показано, что в среде с затуханием волновое число имеет как раз комплексный характер. При этом полное решение стационарной задачи в отсутствие границ определяется формулой (1.164), из которой следует, что при ком-

плексном волновом числе вида (1.160) решение (1.164) соответствует волнам в обоих направлениях оси Ox , которые по мере распространения затухают.

При падении волны на одну границу такое затухание остается, так что там никаких серьезных особенностей комплексный характер волнового числа не вносит. Не так однако обстоит дело при распространении волны через структуру, содержащую две границы, то есть через пластину. Здесь комплексный характер волнового числа проявляет особенность внутри пластины и на выходе из нее, так что при решении в обоих случаях получается коэффициент, содержащий экспоненту с действительным показателем, пропорциональным толщине пластины. Такой коэффициент при увеличении толщины пластины приводит к экспоненциальному росту коэффициентов отражения и прохождения, что противоречит закону сохранения энергии.

Чтобы устранить это явление, при рассмотрении пластины вводится нормировка, состоящая в сдвиге решения для проходящей волны на величину толщины пластины по координате x . Покажем, как это делается на примере задачи, рассмотренной в предыдущем разделе. Будем рассматривать задачу в геометрии, показанной на рис. 3.2. Отличие от геометрии, представленной на рис. 3.1, состоит в том, что здесь положено $a = 0$ и $b = d$, где d — толщина пластины.

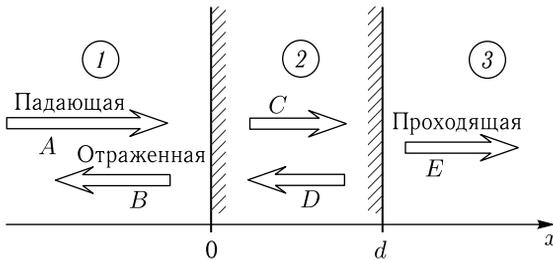


Рис. 3.2. Геометрия задачи о падении волны на пластину толщиной d

Рассмотрим два случая: сначала без нормировки, а затем с нормировкой. Для обозначения амплитуд волн в решении без нормировки будем использовать индекс « S », а с нормировкой — индекс « N ».

Решение без нормировки

Решения волновых уравнений в различных областях имеют вид:

$$U_{1S} = A_S e^{-ik_1 x} + B_S e^{ik_1 x}; \quad (3.38)$$

$$U_{2S} = C_S e^{-ik_2 x} + D_S e^{ik_2 x}; \quad (3.39)$$

$$U_{3S} = E_S e^{-ik_3 x}. \quad (3.40)$$

Здесь A_S , B_S , C_S , D_S , E_S — амплитуды волн в точке $x = 0$, из которых A_S задается изначально как A_0 , а остальные определяются из граничных условий.

При $A_0 = 1$ амплитуды B_S , C_S , D_S , E_S имеют вид:

$$B_S = \frac{(k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}; \quad (3.41)$$

$$C_S = \frac{2k_1(k_2 + k_3)e^{ik_2d}}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}; \quad (3.42)$$

$$D_S = \frac{2k_1(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}; \quad (3.43)$$

$$E_S = \frac{4k_1k_2e^{ik_3d}}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}. \quad (3.44)$$

Можно видеть, что эти формулы совпадают с (3.25)–(3.28) в которых положено $b - a = d$.

Предположим, что волновые числа являются комплексными вида (1.160), то есть:

$$k_j = \eta_j - i\xi_j, \quad (3.45)$$

где η_j и ξ_j — действительные, причем $\eta_j \geq 0$, $\xi_j \geq 0$, а $j = 1, 2, 3$.

При этом из экспонент вида $e^{ik_{2,3}d}$ в числителях выражений (3.41)–(3.44) выделяются амплитудные множители $e^{\xi_{2,3}d}$, которые при увеличении d (особенно при $d \rightarrow \infty$) дают экспоненциальную расходимость амплитуд C_S и E_S , что противоречит закону сохранения энергии.

В амплитуде D_S аналогичный множитель дает экспоненциальное стремление к нулю, что сохранению энергии не противоречит.

В амплитуде C_S экспонента вида e^{ik_2d} содержится также в знаменателе, что при увеличении d компенсирует рост амплитудного множителя этой экспоненты в числителе. Поэтому изменение C_S сохранению энергии не противоречит.

В амплитуде E_S в числителе присутствует экспонента e^{ik_3d} , а в знаменателе — e^{ik_2d} , что при больших d стремится к $e^{i(k_3 - k_2)d}$, что дает множитель $e^{(\xi_3 - \xi_2)d}$, который при $\xi_3 - \xi_2 > 0$ дает с увеличением d экспоненциальный рост амплитуды, то есть противоречит сохранению энергии. На самом деле ничего страшного в таком экспоненциальном росте нет, так как волна сама содержит экспоненту e^{-ik_3x} , которая при $k_3 = \eta_3 - i\xi_3$ дает амплитудный множитель $e^{-i\xi_3x}$, компенсирующий расходящийся множитель $e^{i\xi_3x}$, то есть никакого роста размаха колебаний при увеличении d не происходит.

В то же время, традиционное определение коэффициента прохождения волны по амплитуде имеет вид (индекс S опущен для общности):

$$T_a = \frac{|E|}{|A|}, \quad (3.46)$$

что при увеличении d в случае комплексного k_3 дает расходящийся множитель $e^{(\xi_3 - \xi_2)d}$.

Традиционное определение коэффициента прохождения по энергии, в соответствии с (1.227), имеет вид (также без индекса S):

$$T_e = \frac{|E|^2}{|A|^2} \operatorname{Re} \left(\frac{k_3}{k_1} \right), \quad (3.47)$$

что дает аналогичный расходящийся множитель $e^{2(\xi_3 - \xi_2)d}$, то есть противоречит сохранению энергии.

Замечание. Выражение (3.47) для коэффициента прохождения по энергиям является полностью корректным только для действительных волновых чисел. В приведенном здесь виде оно вполне позволяет рассмотреть появление расходящегося множителя, поэтому оставлено без уточнения. Более подробно с вопросом о вычислении коэффициентов отражения и прохождения при комплексных волновых числах можно познакомиться по работам [54, 60, 61].

Итак, из сложившегося положения возможны два выхода.

1. Введение новых определений коэффициентов прохождения по амплитуде

$$T_{aS} = \frac{|E_S e^{-\xi_3 d}|}{|A_S|} \quad (3.48)$$

и по энергии

$$T_{eS} = \frac{|E_S e^{-\xi_3 d}|^2}{|A_S|^2} \cdot \frac{|k_3|}{|k_1|}. \quad (3.49)$$

Такие определения вполне естественны, так как учитывают размах колебаний проходящей волны в точке $x = d$, в отличие от традиционных определений, куда входит размах в точке $x = 0$.

2. Введение начальной нормировки амплитуды проходящей волны с привязкой к точке $x = d$, то есть для этой волны решение вместо (3.40) надо брать в виде:

$$U_{3N} = E_N e^{-ik_3(x-d)}. \quad (3.50)$$

При таком виде решения традиционный вид определений коэффициентов прохождения по амплитудам и по энергиям (3.46) и (3.47) сохраняется.

Решение с нормировкой

Воспользуемся вторым из предложенных выходов, то есть положим за правило привязку амплитуды волны к той точке, откуда эта волна исходит. При этом решения (3.38)–(3.40) принимает вид:

$$U_{1N} = A_N e^{-ik_1 x} + B_N e^{ik_1 x}; \quad (3.51)$$

$$U_{2N} = C_N e^{-ik_2 x} + D_N e^{ik_2(x-d)}; \quad (3.52)$$

$$U_{3N} = E_N e^{-ik_3(x-d)}. \quad (3.53)$$

Возникающие при этом коэффициенты при D_N и E_N вполне допустимы в силу произвольности постоянных, определяющих решение волнового уравнения в той или иной среде.

Подстановка решения (3.51)–(3.53) в граничные условия позволяет получить амплитуды B_N , C_N , D_N , E_N в виде:

$$B_N = \frac{(k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}; \quad (3.54)$$

$$C_N = \frac{2k_1(k_2 + k_3)e^{ik_2d}}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}; \quad (3.55)$$

$$D_N = \frac{2k_1(k_2 - k_3)}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}; \quad (3.56)$$

$$E_N = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}. \quad (3.57)$$

Прямая подстановка показывает, что расходимость традиционных коэффициентов прохождения по амплитудам (3.46) и по энергиям (3.47) отсутствует.

Эквивалентность обоих решений

Покажем эквивалентность решений без нормировки и с нормировкой.

Для упрощения записи введем вспомогательные обозначения:

$$A_0 = A_0; \quad (3.58)$$

$$B_0 = \frac{(k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}; \quad (3.59)$$

$$C_0 = \frac{2k_1(k_2 + k_3)}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}; \quad (3.60)$$

$$D_0 = \frac{2k_1(k_2 - k_3)}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}; \quad (3.61)$$

$$E_0 = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}. \quad (3.62)$$

В этих обозначениях для случая без нормировки из (3.41)–(3.44) получаем:

$$A_S = A_0; \quad (3.63)$$

$$B_S = B_0; \quad (3.64)$$

$$C_S = C_0e^{ik_2d}; \quad (3.65)$$

$$D_S = D_0e^{-ik_2d}; \quad (3.66)$$

$$E_S = E_0e^{ik_3d}. \quad (3.67)$$

Подставляя (3.63)–(3.67) в (3.38)–(3.40), получаем:

$$U_{1S} = A_0e^{-ik_1x} + B_0e^{ik_1x}; \quad (3.68)$$

$$U_{2S} = C_0e^{-ik_2(x-d)} + D_0e^{ik_2(x-d)}; \quad (3.69)$$

$$U_{3S} = E_0e^{-ik_3(x-d)}. \quad (3.70)$$

Для случая с нормировкой из (3.54)–(3.57) получаем:

$$A_N = A_0; \quad (3.71)$$

$$B_N = B_0; \quad (3.72)$$

$$C_N = C_0 e^{ik_2 d}; \quad (3.73)$$

$$D_N = D_0; \quad (3.74)$$

$$E_N = E_0. \quad (3.75)$$

Подставляя (3.71)–(3.75) в (3.51)–(3.53), получаем:

$$U_{1N} = A_0 e^{-ik_1 x} + B_0 e^{ik_1 x}; \quad (3.76)$$

$$U_{2N} = C_0 e^{-ik_2(x-d)} + D_0 e^{ik_2(x-d)}; \quad (3.77)$$

$$U_{3N} = E_0 e^{-ik_3(x-d)}. \quad (3.78)$$

Из сравнения (3.68)–(3.70) с (3.76)–(3.78) видно, что, несмотря на различие амплитуд некоторых отдельных волн (C_S и C_N , D_S и D_N , E_S и E_N) при решении без нормировки и с нормировкой, амплитуды полей в обоих случаях во всех трех областях совпадают.

Экспоненциальный множитель $e^{-ik_3(x-d)}$ в выражении для U_{3S} и U_{3N} при комплексном волновом числе $k_3 = \eta_3 - i\xi_3$ принимает вид:

$$e^{-ik_3(x-d)} = e^{-i\eta_3(x-d)} e^{-\xi_3(x-d)}. \quad (3.79)$$

При этом показатель экспоненты амплитудного множителя $-\xi_3(x-d)$, имеющий смысл только при $x \geq d$ (в третьей среде), с учетом того, что $\xi_3 > 0$, всегда является отрицательным, то есть упомянутый экспоненциальный множитель расходимости дать не может.

Таким образом, введение нормировки относительно точки исхода каждой рассматриваемой волны позволяет избежать экспоненциальной расходимости амплитуд внутренних волн одного слоя при увеличении его толщины. Это утверждение остается справедливым и для структуры из любого количества слоев, в чем, если известны решения для амплитуд волн, можно убедиться непосредственной проверкой. Поэтому во всех рассматриваемых далее задачах будем всегда пользоваться нормировкой.

3.1.4. Падение одномерной волны на две границы раздела сред. Метод усреднения

Обратимся теперь к решению той же задачи методом усреднения. Рассмотрим падение одномерной волны на две границы раздела. Геометрия задачи показана на рис. 3.3. Такая геометрия совпадает с представленной на рис. 3.2, так что сразу будем рассматривать решение с учетом нормировки.

Волновые уравнения в трех областях имеют вид:
в области 1

$$\frac{d^2 U_1}{dx^2} + k_1^2 U_1 = 0; \quad (3.80)$$

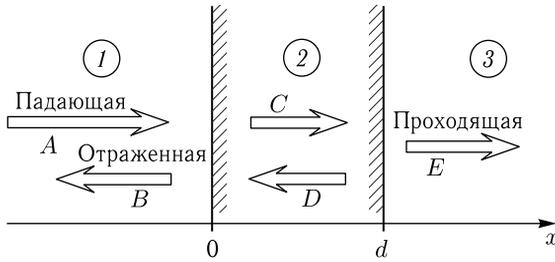


Рис. 3.3. Геометрия задачи

в области 2

$$\frac{d^2 U_2}{dx^2} + k_2^2 U_2 = 0; \quad (3.81)$$

в области 3

$$\frac{d^2 U_3}{dx^2} + k_3^2 U_3 = 0. \quad (3.82)$$

Решения волновых уравнений (3.80)–(3.82) (волновые функции) имеют вид:

$$U_1 = Ae^{-ik_1 x} + Be^{ik_1 x}; \quad (3.83)$$

$$U_2 = Ce^{-ik_2 x} + De^{ik_2(x-d)}; \quad (3.84)$$

$$U_3 = Ee^{-ik_3(x-d)}. \quad (3.85)$$

Введем вспомогательные функции:

$$V_1 = \frac{1}{k_1} \cdot \frac{dU_1}{dx} = -Aie^{-ik_1 x} + Bie^{ik_1 x}; \quad (3.86)$$

$$V_2 = \frac{1}{k_2} \cdot \frac{dU_2}{dx} = -Cie^{-ik_2 x} + Die^{ik_2(x-d)}; \quad (3.87)$$

$$V_3 = \frac{1}{k_3} \cdot \frac{dU_3}{dx} = -Eie^{-ik_3(x-d)}. \quad (3.88)$$

При этом

$$\frac{dU_1}{dx} = k_1 V_1; \quad (3.89)$$

$$\frac{dU_2}{dx} = k_2 V_2; \quad (3.90)$$

$$\frac{dU_3}{dx} = k_3 V_3. \quad (3.91)$$

Выполним теперь усреднение по области 2. Из (3.90) получаем:

$$\frac{d^2 U_2}{dx^2} = k_2 \frac{dV_2}{dx}. \quad (3.92)$$

Преобразуя (3.90) и подставляя (3.92) в (3.81), получаем систему уравнений для U_2 и V_2 в виде:

$$\frac{dU_2}{dx} - k_2 V_2 = 0; \quad (3.93)$$

$$\frac{dV_2}{dx} + k_2 U_2 = 0. \quad (3.94)$$

Интегрируем (3.93) и (3.94) по x от 0 до d :

$$\int_0^d \frac{dU_2}{dx} dx - k_2 \int_0^d V_2 dx = 0; \quad (3.95)$$

$$\int_0^d \frac{dV_2}{dx} dx + k_2 \int_0^d U_2 dx = 0. \quad (3.96)$$

Преобразуем первые слагаемые выражений (3.95) и (3.96):

$$\int_0^d \frac{dU_2}{dx} dx = \int_0^d dU_2 dx = U_2|_{x=d} - U_2|_{x=0}; \quad (3.97)$$

$$\int_0^d \frac{dV_2}{dx} dx = \int_0^d dV_2 dx = V_2|_{x=d} - V_2|_{x=0}. \quad (3.98)$$

Преобразуем вторые слагаемые тех же выражений, вводя усреднение:

$$\int_0^d V_2 dx = (V_2)_{-p} \int_0^d dx = \frac{d}{2} (V_2|_{x=d} + V_2|_{x=0}); \quad (3.99)$$

$$\int_0^d U_2 dx = (U_2)_{-p} \int_0^d dx = \frac{d}{2} (U_2|_{x=d} + U_2|_{x=0}). \quad (3.100)$$

Подставляя (3.97)–(3.100) в (3.95)–(3.96), получаем искомые граничные условия:

$$U_2|_{x=d} - U_2|_{x=0} - \frac{k_2 d}{2} (V_2|_{x=d} + V_2|_{x=0}) = 0; \quad (3.101)$$

$$V_2|_{x=d} - V_2|_{x=0} + \frac{k_2 d}{2} (U_2|_{x=d} + U_2|_{x=0}) = 0. \quad (3.102)$$

Введем вспомогательный параметр:

$$\alpha = \frac{k_2 d}{2}. \quad (3.103)$$

Подставляя (3.103) в (3.101)–(3.102), раскрывая скобки, умножая оба выражения на -1 и меняя порядок слагаемых, получаем граничные условия в виде:

$$U_2|_{x=0} - U_2|_{x=d} + \alpha V_2|_{x=0} + \alpha V_2|_{x=d} = 0; \quad (3.104)$$

$$\alpha U_2|_{x=0} + \alpha U_2|_{x=d} - V_2|_{x=0} + V_2|_{x=d} = 0. \quad (3.105)$$

Выражения (3.104)–(3.105) дают связь между граничными значениями функций U_2 и V_2 , которые относятся к волновому процессу внутри пластины, то есть эти условия по отношению к границам пластины являются «внутренними». Задача же состоит в том, чтобы получить условия связи на тех же границах между значениями функций U_1 и V_1 и U_3 и V_3 , которые описывают волновой процесс вне пластины (то есть соотношения между амплитудами падающей, отраженной и проходящей волн). Таким образом, надо преобразовать «внутренние» условия (3.104)–(3.105) во «внешние», которые давали бы искомую связь. Для этого воспользуемся обычными граничными условиями равенства волновых функций и их производных на границах раздела сред. Эти условия имеют вид:

при $x = 0$

$$U_1|_{x=0} = U_2|_{x=0}; \quad (3.106)$$

$$\frac{dU_1}{dx}|_{x=0} = \frac{dU_2}{dx}|_{x=0}; \quad (3.107)$$

при $x = d$

$$U_2|_{x=d} = U_3|_{x=d}; \quad (3.108)$$

$$\frac{dU_2}{dx}|_{x=d} = \frac{dU_3}{dx}|_{x=d}. \quad (3.109)$$

При этом из (3.107) и (3.109) с учетом (3.89)–(3.91) получаем:

$$k_1 V_1|_{x=0} = k_2 V_2|_{x=0}; \quad (3.110)$$

$$k_2 V_2|_{x=d} = k_3 V_3|_{x=d}. \quad (3.111)$$

Таким образом, для функций U и V получаем следующие традиционные граничные условия:

при $x = 0$

$$U_1|_{x=0} = U_2|_{x=0}; \quad (3.112)$$

$$k_1 V_1|_{x=0} = k_2 V_2|_{x=0}; \quad (3.113)$$

при $x = d$

$$U_2|_{x=d} = U_3|_{x=d}; \quad (3.114)$$

$$k_2 V_2|_{x=d} = k_3 V_3|_{x=d}. \quad (3.115)$$

В усредненные по области 2 граничные условия (3.104)–(3.105) входят величины: $U_2|_{x=0}$, $U_2|_{x=d}$, $V_2|_{x=0}$, $V_2|_{x=d}$. Выразим их через аналогичные величины в областях 1 и 3 с помощью (3.112)–(3.115):

$$U_2|_{x=0} = U_1|_{x=0}; \quad (3.116)$$

$$V_2|_{x=0} = \frac{k_1}{k_2} V_1|_{x=0}; \quad (3.117)$$

$$U_2|_{x=d} = U_3|_{x=d}; \quad (3.118)$$

$$V_2|_{x=d} = \frac{k_3}{k_2} V_3|_{x=d}. \quad (3.119)$$

Заменяя в (3.104)–(3.105) значения функций U_2 и V_2 на границах через значения функций U_1 , V_1 и U_3 , V_3 на тех же границах с помощью соотношений (3.116)–(3.119) и умножая на k_2 , получаем внешние граничные условия в виде:

$$k_2 U_1|_{x=0} - k_2 U_3|_{x=d} + \alpha k_1 V_1|_{x=0} + \alpha k_3 V_3|_{x=d} = 0; \quad (3.120)$$

$$\alpha k_2 U_1|_{x=0} + \alpha k_2 U_3|_{x=d} - k_1 V_1|_{x=0} + k_3 V_3|_{x=d} = 0. \quad (3.121)$$

По-видимому, это наиболее удобный вид граничных условий.

Для нахождения амплитуд отраженной и проходящей волн в эти граничные условия надо подставить решения волновых уравнений в областях 1 и 3. Найдем величины, входящие в (3.120)–(3.121). Решения U и функции V во всех областях даются формулами (3.83)–(3.88). При $x = 0$ и $x = d$, получаем:

$$U_1|_{x=0} = A + B; \quad (3.122)$$

$$U_3|_{x=d} = E; \quad (3.123)$$

$$V_1|_{x=0} = -Ai + Bi; \quad (3.124)$$

$$V_3|_{x=d} = -Ei. \quad (3.125)$$

Подставляя (3.122)–(3.125) в (3.120)–(3.121), получаем:

$$k_2(A + B) - k_2E + \alpha k_1(-Ai + Bi) - \alpha k_3Ei = 0; \quad (3.126)$$

$$\alpha k_2(A + B) + \alpha k_2E - k_1(-Ai + Bi) - k_3Ei = 0. \quad (3.127)$$

Преобразуем уравнения (3.126)–(3.127), для чего раскроем в них скобки, приведем подобные члены при A , B и E , перенесем слагаемые, содержащие A , в правую часть, умножим второе уравнение (3.127) на i и запишем коэффициенты при A , B , E так, чтобы сначала следовала действительная часть, а затем — мнимая. В результате получим систему двух уравнений с двумя неизвестными B и E при заданной величине A , в виде:

$$B(k_2 + i\alpha k_1) - E(k_2 + i\alpha k_3) = -A(k_2 - i\alpha k_1); \quad (3.128)$$

$$B(k_1 + i\alpha k_2) + E(k_3 + i\alpha k_2) = A(k_1 - i\alpha k_2). \quad (3.129)$$

Таблицы коэффициентов этой системы имеют вид:

$$\begin{array}{ccc}
 B & E & A \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline (k_2 + i\alpha k_1) & -(k_2 + i\alpha k_3) \\ \hline (k_1 + i\alpha k_2) & (k_3 + i\alpha k_2) \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|} \hline -(k_2 - i\alpha k_1) \\ \hline (k_1 - i\alpha k_2) \\ \hline \end{array}
 \end{array} \quad (3.130)$$

Из этих таблиц, подобно (3.19)–(3.23), то есть следуя правилу Крамера, находим детерминанты:

$$D_0 = (1 - \alpha^2)k_2(k_1 + k_3) + 2i\alpha(k_1k_3 + k_2^2); \quad (3.131)$$

$$D_B = (1 - \alpha^2)k_2(k_1 - k_3) + 2i\alpha(k_1k_3 - k_2^2); \quad (3.132)$$

$$D_E = 2(1 + \alpha^2)k_1k_2, \quad (3.133)$$

исходя из которых, решение принимает вид

$$B = A \frac{D_B}{D_0}; \quad (3.134)$$

$$E = A \frac{D_E}{D_0}. \quad (3.135)$$

Подставляя детерминанты (3.131)–(3.133) в (3.134)–(3.135) и полагая $A = 1$, получаем:

$$B = \frac{(1 - \alpha^2)k_2(k_1 - k_3) + 2i\alpha(k_1k_3 - k_2^2)}{(1 - \alpha^2)k_2(k_1 + k_3) + 2i\alpha(k_1k_3 + k_2^2)}; \quad (3.136)$$

$$E = \frac{2(1 + \alpha^2)k_1k_2}{(1 - \alpha^2)k_2(k_1 + k_3) + 2i\alpha(k_1k_3 + k_2^2)}. \quad (3.137)$$

Подставляя α из (3.103), умножая числители и знаменатели обоих выражений на 4 и разделяя их на k_2 , получаем:

$$B = \frac{(4 - k_2^2 d^2)(k_1 - k_3) + 4id(k_1k_3 - k_2^2)}{(4 - k_2^2 d^2)(k_1 + k_3) + 4id(k_1k_3 + k_2^2)}; \quad (3.138)$$

$$E = \frac{2k_1(4 + k_2^2 d^2)}{(4 - k_2^2 d^2)(k_1 + k_3) + 4id(k_1k_3 + k_2^2)}. \quad (3.139)$$

Это — амплитуды отраженной и проходящей волн, полученные методом усреднения.

Используя эти выражения, можно получить коэффициенты отражения и прохождения по тем же формулам (1.226), (1.227), что и при прямом методе. Выполнение такого несколько громоздкого математического упражнения авторы предоставляют любознательному читателю.

3.1.5. Сравнение методов прямого и усреднения для одномерной задачи

Из сравнения решений одномерной задачи, полученных методами прямым (раздел 3.1.1–3.1.3) и усреднения (раздел 3.1.4) можно видеть, что конечные формулы (3.138), (3.139) для амплитуд B и E отраженной

и проходящей волн, полученные методом усреднения, заметно проще подобных формул (3.54), (3.57), полученных прямым методом. Определенным преимуществом прямого метода можно считать возможность получения амплитуд C и D для волн внутри пластины (3.55), (3.56), чего метод усреднения в описанной здесь форме не обеспечивает. Прямой метод требует решения системы уравнений четвертого порядка (3.15)–(3.18), тогда как метод усреднения — всего второго порядка (3.128)–(3.129). В то же время, идеологическая структура прямого метода значительно проще. При его использовании из традиционных граничных условий сразу получается система (3.15)–(3.18), которую остается только последовательно решить, тогда как метод усреднения требует введения вспомогательных функций $V_{1,2,3}$, интегрирования уравнений для функций $U_{1,2,3}$ и $V_{1,2,3}$ с последующим усреднением. При этом получаются только внутренние граничные условия, которые еще надо преобразовать во внешние, после чего уже можно получить окончательную систему второго порядка (3.128)–(3.129) для амплитуд проходящей и отраженной волн. Таким образом, значительная часть вычислений по методу усреднения приходится на вывод внешних граничных условий, то есть реальную экономию по сравнению с прямым методом можно получить только в том случае, если такие условия известны заранее.

3.1.6. Пределы применимости метода усреднения в одномерном случае

Рассмотрим теперь корректность применения метода усреднения и сравним его с прямым методом. Для этого рассмотрим зависимости коэффициентов отражения и прохождения от толщины пластины. Построение зависимостей выполним с помощью формул: для прямого метода (3.54), (3.57), для метода усреднения — (3.138), (3.139). Для получения коэффициентов отражения и прохождения используем формулы (3.46), (3.47).

Полученные результаты иллюстрируются рис. 3.4 и рис. 3.5. При построении этих рисунков полагалось, что вне пластины в областях 1 и 3 волновое число — действительное. Для области 2 внутри пластины рассмотрены два случая: 1) волновое число чисто действительное (рис. 3.4); 2) волновое число чисто мнимое (рис. 3.5). Численные значения следующие: в обоих случаях $k_1 = 333 \text{ м}^{-1}$, то есть $\lambda_1 = \lambda_3 = 1,885 \text{ см}^{-1}$, в первом случае $k_2 = 1665 \text{ м}^{-1}$, то есть $\lambda_2 = 0,377 \text{ см}^{-1}$, во втором: $k_2 = -i \cdot 1665 \text{ м}^{-1}$. На обоих рисунках кривые 1 и 3 соответствуют коэффициенту отражения, 2 и 4 — коэффициенту прохождения. По горизонтальной оси отложена толщина пластины d , нормированная на длину волны λ_2 при действительном k_2 .

Из рассмотрения рисунков видно следующее.

При действительном волновом числе (рис. 3.4) зависимости коэффициентов отражения и прохождения от толщины, полученные прямым методом (1, 3), имеют периодический характер, причина чего состоит

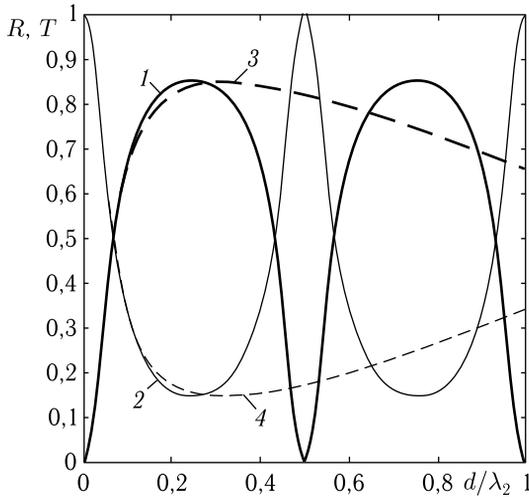


Рис. 3.4. Зависимости коэффициентов отражения и прохождения от нормированной толщины пластины при действительном волновом числе

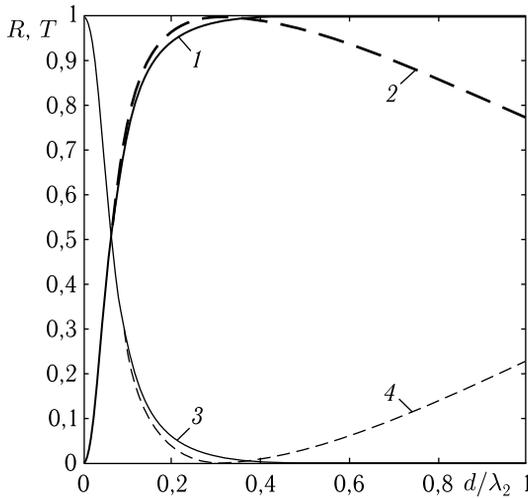


Рис. 3.5. Зависимости коэффициентов отражения и прохождения от нормированной толщины пластины при мнимом волновом числе

в интерференции волн, отраженных от двух поверхностей пластины. Математически это выражается в периодичности экспонент с мнимыми показателями, входящих в формулы (3.54), (3.57). Минимумы коэффициента отражения соответствуют целому числу полуволн, укладывающихся на толщине пластины, максимумы — нечетному числу четвертей длин волн на толщине пластины. Аналогичные кривые, построенные

по методу усреднения (2, 4), периодичности не имеют и близки к кривым, построенным по прямому методу, в области $0 \leq d/\lambda_2 \leq 0,35$, то есть метод усреднения перестает работать, когда на толщине пластины укладывается более четверти длины волны.

При мнимом волновом числе (рис. 3.5) зависимости коэффициентов отражения и прохождения от толщины, полученные прямым методом (1, 3), периодичности не проявляют, так как амплитуда волны в материале пластины сильно падает. Кривые, построенные по методу усреднения (2, 4), близки к кривым, построенным по прямому методу, в области $0 \leq d/(\lambda/2) \leq 0,45$.

Таким образом, можно сделать вывод, что метод усреднения позволяет корректно рассчитывать коэффициенты отражения и прохождения с точностью $\sim 1\%$ при $0 \leq d/\lambda_2 \leq 0,10$, $\sim 5\%$ при $0,10 \leq d/\lambda_2 \leq 0,25$ и $\sim 20\%$ при $0,25 \leq d/\lambda_2 \leq 0,35$, а при $d/\lambda_2 \geq 0,35$ точность метода резко падает и его использование недопустимо.

3.2. Электромагнитная волна

В предыдущих разделах рассмотрены задачи о падении одномерной волны на две границы раздела сред. Полученные там закономерности носят довольно общий характер. Обратимся теперь к случаю электромагнитных волн. Этот случай является более сложным из-за трехмерного характера распространяющихся волн. Наиболее простая геометрия получается при падении электромагнитной волны по нормали, более сложная — при наклонном падении. Рассмотрим эти случаи последовательно.

3.2.1. Нормальное падение электромагнитной волны на две границы раздела. Прямой метод

Рассмотрим теперь падение электромагнитной волны на структуру, содержащую две параллельные границы раздела, то есть распространение волны через три среды с различными параметрами. Сначала обратимся к наиболее простому случаю — падению волны по нормали к границам раздела сред. Будем рассматривать решение в условиях нормировки (раздел 3.1.3). Геометрия задачи приведена на рис. 3.6.

На рисунке показаны заполненные волноведущей средой три области пространства 1, 2 и 3 разделенные двумя плоскими границами между ними, причем внутри каждой области пространства параметры среды сохраняются постоянными, а на границе между областями меняются скачком. Волна падает из области 1 на границу раздела между областями 1 и 2, частично проходит в область 2 и далее через границу между областями 2 и 3 в область 3. Часть падающей волны отражается в область 1, а в области 2 присутствуют волны обоих направлений.

Ориентация декартовой системы координат $Oxyz$ — такая же, как принята на рис. 2.2 в разделе 2.2.1, посвященном падению волны на одну границу раздела. То есть ось координат Ox ориентирована

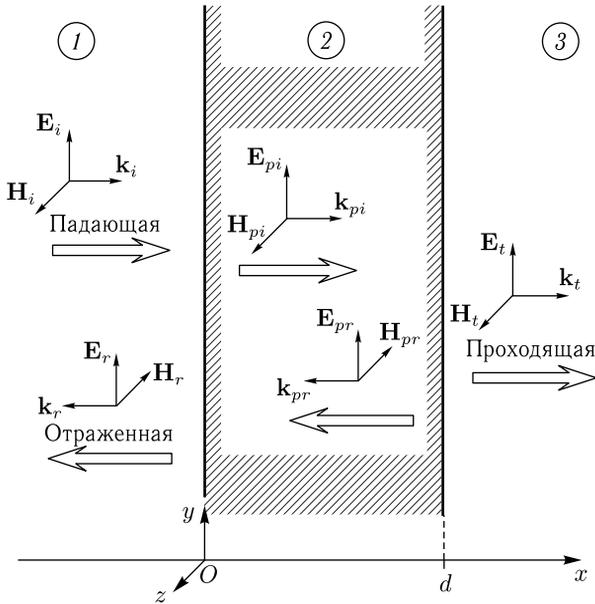


Рис. 3.6. Геометрия задачи и ориентация волнового вектора и векторов полей распространяющихся волн в случае нормального падения

перпендикулярно границам разделов, координаты границ соответствуют $x = 0$ и $x = d$. Координатная плоскость Oyz параллельна плоскости раздела сред. Ось Oy выбрана параллельной вектору электрического поля падающей волны \mathbf{E}_i . При этом ось Oz параллельна вектору магнитного поля \mathbf{H}_i той же волны. Волновые векторы падающей \mathbf{k}_i , проходящей \mathbf{k}_t и отраженной \mathbf{k}_r волн перпендикулярны границам раздела сред. Электрические и магнитные поля всех волн параллельны плоскостям раздела.

Волновое уравнение для электрического поля волны, поляризованной параллельно оси Oy и распространяющейся вдоль оси Ox в среде с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε и μ , имеет вид:

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + k^2 E_y = 0, \quad (3.140)$$

где $k = \omega \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}$ — волновое число, ω — частота волны, ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные в системе СИ. Решение уравнения (3.140) для волны, распространяющейся в положительном направлении оси Ox , имеет вид:

$$E_y = E_{y0} e^{-ikx}. \quad (3.141)$$

Магнитное поле такой волны равно:

$$H_z = \frac{E_{y0}}{Z} e^{-ikx}, \quad (3.142)$$

где $Z = \sqrt{\mu\mu_0/\varepsilon\varepsilon_0}$ — импеданс среды, в которой распространяется волна (формула (1.258), раздел 1.4.1). Для волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси Ox меняются знаки показателя экспоненты и магнитного поля.

В выбранной геометрии электрические поля всех волн направлены вдоль оси Oy , а магнитные поля — вдоль оси Oz , поэтому для упрощения дальнейшей записи индексы y и z в обозначениях координатных составляющих полей далее опустим. Для удобства записи введем также новые обозначения амплитуд электрических полей:

$$E_{i0} = A; \quad (3.143)$$

$$E_{r0} = B; \quad (3.144)$$

$$E_{pi0} = C; \quad (3.145)$$

$$E_{pr0} = D; \quad (3.146)$$

$$E_{t0} = E. \quad (3.147)$$

Учитывая (3.141) и (3.142), а также (3.143)–(3.147), записываем выражения для координатных составляющих полей:

в области 1

$$E_1 = Ae^{-ik_1x} + Be^{ik_1x}; \quad (3.148)$$

$$H_1 = \frac{A}{Z_1} e^{-ik_1x} - \frac{B}{Z_1} e^{ik_1x}; \quad (3.149)$$

в области 2

$$E_2 = Ce^{-ik_2x} + De^{ik_2(x-d)}; \quad (3.150)$$

$$H_2 = \frac{C}{Z_2} e^{-ik_2x} - \frac{D}{Z_2} e^{ik_2(x-d)}; \quad (3.151)$$

в области 3

$$E_3 = Ee^{-ik_3(x-d)}; \quad (3.152)$$

$$H_3 = \frac{E}{Z_3} e^{-ik_3(x-d)}, \quad (3.153)$$

где k_n и Z_n — волновые числа и импедансы сред при $n = 1, 2, 3$.

Граничные условия, состоящие в равенстве касательных составляющих электрического и магнитного полей на границах раздела сред имеют вид:

$$E_1|_{x=0} = E_2|_{x=0}; \quad (3.154)$$

$$H_1|_{x=0} = H_2|_{x=0}; \quad (3.155)$$

$$E_2|_{x=d} = E_3|_{x=d}; \quad (3.156)$$

$$H_2|_{x=d} = H_3|_{x=d}. \quad (3.157)$$

Подставляя поля (3.148)–(3.153) в граничные условия (3.154)–(3.157), получаем:

$$A + B = C + De^{-ik_2d}, \quad (3.158)$$

$$\frac{A}{Z_1} - \frac{B}{Z_1} = \frac{C}{Z_1} - \frac{D}{Z_1}e^{-ik_2d}, \quad (3.159)$$

$$Ce^{-ik_2d} + D = E; \quad (3.160)$$

$$\frac{C}{Z_2}e^{-ik_2d} - \frac{D}{Z_2} = \frac{E}{Z_3}. \quad (3.161)$$

Освобождаясь от дробей в (3.159) и (3.161), меняя местами (3.159) и (3.160), а также полагая $A = 1$, получаем систему уравнений для определения амплитуд B, C, D, E :

$$B - C - De^{-ik_2d} = -1; \quad (3.162)$$

$$Ce^{-ik_2d} + D - E = 0; \quad (3.163)$$

$$BZ_2 + CZ_1 - DZ_1e^{-ik_2d} = Z_2; \quad (3.164)$$

$$CZ_3e^{-ik_2d} - DZ_3 - EZ_2 = 0. \quad (3.165)$$

Путем непосредственной подстановки с учетом обозначений и условия нормировки можно видеть, что эта система переходит в аналогичную систему для одномерной задачи (3.15)–(3.18) (раздел 3.1.1) при замене:

$$Z_n \rightarrow \frac{1}{k_n}. \quad (3.166)$$

Обратная замена в коэффициентах кроме показателей экспонент:

$$k_n \rightarrow \frac{1}{Z_n}, \quad (3.167)$$

приводит систему уравнений одномерной задачи к полученной здесь.

Решим систему (3.162)–(3.165). Таблицы ее коэффициентов имеют вид:

$$\begin{array}{ccccc}
 B & C & D & E & A \\
 \hline
 1 & -1 & -e^{-ik_2d} & 0 & -1 \\
 0 & e^{-ik_2d} & 1 & -1 & 0 \\
 Z_2 & Z_1 & -Z_1e^{-ik_2d} & 0 & Z_2 \\
 0 & Z_3e^{-ik_2d} & -Z_3 & -Z_2 & 0
 \end{array}
 \quad (3.168)$$

Следуя правилу Крамера [104, с. 45, раздел 1.9–2], [140, с. 54–56], из (3.168) получаем детерминанты:

$$D_0 = (Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) + (Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)e^{-2ik_2d}, \quad (3.169)$$

$$D_B = -(Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3) - (Z_1 + Z_2)(Z_2 - Z_3)e^{-2ik_2d}, \quad (3.170)$$

$$D_C = 2Z_2(Z_2 + Z_3); \quad (3.171)$$

$$D_D = -2Z_2(Z_2 - Z_3)e^{-ik_2d}, \quad (3.172)$$

$$D_E = 4Z_2Z_3e^{-ik_2d}. \quad (3.173)$$

Решение, после умножения числителей и знаменателей всех дробей на e^{ik_2d} , принимает вид:

$$B = -\frac{(Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3)e^{ik_2d} + (Z_1 + Z_2)(Z_2 - Z_3)e^{-ik_2d}}{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3)e^{ik_2d} + (Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)e^{-ik_2d}}; \quad (3.174)$$

$$C = \frac{2Z_2(Z_2 + Z_3)e^{ik_2d}}{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3)e^{ik_2d} + (Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)e^{-ik_2d}}; \quad (3.175)$$

$$D = \frac{-2Z_2(Z_2 - Z_3)}{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3)e^{ik_2d} + (Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)e^{-ik_2d}}; \quad (3.176)$$

$$E = \frac{4Z_2Z_3}{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3)e^{ik_2d} + (Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)e^{-ik_2d}}. \quad (3.177)$$

Можно видеть, что при замене (3.166) это решение совпадает с решением для одномерной задачи с учетом нормировки (3.54)–(3.57) (раздел 3.1.3).

3.2.2. Предельные случаи структуры из двух поверхностей

Рассмотрим некоторые частные случаи полученного решения (3.174)–(3.177), а именно: предельные переходы к случаям одной границы, одинаковых внешних сред и отсутствия границ.

Для перехода к случаю одной границы в формулах (3.174)–(3.177) надо положить $Z_3 = Z_2$. При этом получаем:

$$B = -\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad (3.178)$$

$$C = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad (3.179)$$

$$D = 0; \quad (3.180)$$

$$E = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (3.181)$$

Для перехода к случаю одинаковых внешних сред в (3.174)–(3.177) надо положить $Z_3 = Z_1$. При этом получаем:

$$B = -\frac{(Z_1^2 - Z_2^2)(e^{ik_2d} - e^{-ik_2d})}{(Z_1 + Z_2)^2 e^{ik_2d} - (Z_1 - Z_2)^2 e^{-ik_2d}}; \quad (3.182)$$

$$C = \frac{2Z_2(Z_1 + Z_2)e^{ik_2d}}{(Z_1 + Z_2)^2 e^{ik_2d} - (Z_1 - Z_2)^2 e^{-ik_2d}}; \quad (3.183)$$

$$D = \frac{2Z_2(Z_1 - Z_2)}{(Z_1 + Z_2)^2 e^{ik_2 d} - (Z_1 - Z_2)^2 e^{-ik_2 d}}; \quad (3.184)$$

$$E = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2 e^{ik_2 d} - (Z_1 - Z_2)^2 e^{-ik_2 d}}. \quad (3.185)$$

Случай отсутствия границ означает $Z_1 = Z_2 = Z_3$. При этом из (3.174)–(3.177) получаем:

$$B = 0; \quad C = 1; \quad D = 0; \quad E = 1, \quad (3.186)$$

что означает, что волна не отражается и полностью проходит во вторую, а затем и в третью среду. Чтобы перейти к случаю отсутствия границ в системе (3.162)–(3.165), надо кроме $Z_1 = Z_2 = Z_3$ дополнительно положить $d = 0$. При этом получаем:

$$B - C - D = -1; \quad (3.187)$$

$$C + D - E = 0; \quad (3.188)$$

$$B + C - D = 1; \quad (3.189)$$

$$C - D - E = 0. \quad (3.190)$$

Можно видеть, что решением этой системы является набор переменных (3.186).

3.2.3. Нормальное падение электромагнитной волны на две границы раздела. Метод усреднения

Рассмотрим теперь ту же задачу, что в разделе 3.2.1, методом усреднения. Геометрия задачи совпадает с приведенной на рис. 3.6.

Волновое уравнение для электрического поля волны, поляризованной параллельно оси Oy и распространяющейся вдоль оси Ox в среде с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε и μ , имеет вид (3.140):

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + k^2 E_y = 0, \quad (3.191)$$

Решение уравнения (3.191) для волны, распространяющейся в положительном направлении оси Ox , имеет вид:

$$E_y = E_{y0} e^{-ikx}. \quad (3.192)$$

Магнитное поле такой волны равно:

$$H_z = \frac{E_{y0}}{Z} e^{-ikx}. \quad (3.193)$$

Учитывая (3.192) и (3.193), записываем выражения для координатных составляющих полей:

в области I

$$E_1 = E_{i0} e^{-ik_1 x} + E_{r0} e^{ik_1 x}; \quad (3.194)$$

$$H_1 = \frac{E_{i0}}{Z_1} e^{-ik_1 x} - \frac{E_{r0}}{Z_1} e^{ik_1 x}; \quad (3.195)$$

в области 2

$$E_2 = E_{pi0}e^{-ik_2x} + E_{pr0}e^{ik_2(x-d)}; \quad (3.196)$$

$$H_2 = \frac{E_{pi0}}{Z_2}e^{-ik_2x} - \frac{E_{pr0}}{Z_2}e^{ik_2(x-d)}; \quad (3.197)$$

в области 3

$$E_3 = E_{t0}e^{-ik_3(x-d)}; \quad (3.198)$$

$$H_3 = \frac{E_{t0}}{Z_3}e^{-ik_3(x-d)}, \quad (3.199)$$

где k_n и Z_n — волновые числа и импедансы сред при $n = 1, 2, 3$.

Для удобства записи введем новые функции:

$$U_n = E_n, \quad (3.200)$$

а также новые обозначения амплитуд электрических полей:

$$E_{i0} = A; \quad (3.201)$$

$$E_{r0} = B; \quad (3.202)$$

$$E_{pi0} = C; \quad (3.203)$$

$$E_{pr0} = D; \quad (3.204)$$

$$E_{t0} = E. \quad (3.205)$$

В этих обозначениях получаем формулы, эквивалентные электрическим полям (3.194), (3.196), (3.198), в виде:

$$U_1 = Ae^{-ik_1x} + Be^{ik_1x}; \quad (3.206)$$

$$U_2 = Ce^{-ik_2x} + De^{ik_2(x-d)}; \quad (3.207)$$

$$U_3 = Ee^{-ik_3(x-d)}. \quad (3.208)$$

Волновые уравнения в трех областях принимают вид:

$$\frac{d^2U_1}{dx^2} + k_1^2U_1 = 0; \quad (3.209)$$

$$\frac{d^2U_2}{dx^2} + k_2^2U_2 = 0; \quad (3.210)$$

$$\frac{d^2U_3}{dx^2} + k_3^2U_3 = 0. \quad (3.211)$$

Введем вспомогательные функции:

$$V_1 = \frac{1}{k_1} \cdot \frac{dU_1}{dx} = -i(Ae^{-ik_1x} - Be^{ik_1x}); \quad (3.212)$$

$$V_2 = \frac{1}{k_2} \cdot \frac{dU_2}{dx} = -i(Ce^{-ik_2x} - De^{ik_2(x-d)}); \quad (3.213)$$

$$V_3 = \frac{1}{k_3} \cdot \frac{dU_3}{dx} = -iEe^{-ik_3(x-d)}. \quad (3.214)$$

При этом

$$\frac{dU_1}{dx} = k_1 V_1; \quad (3.215)$$

$$\frac{dU_2}{dx} = k_2 V_2; \quad (3.216)$$

$$\frac{dU_3}{dx} = k_3 V_3. \quad (3.217)$$

Из сравнения (3.212), (3.213), (3.214) с формулами (3.195), (3.197), (3.199) можно видеть, что введенные здесь функции V_n связаны с магнитными полями H_n соотношениями:

$$V_n = -iZ_n H_n, \quad (3.218)$$

то есть

$$H_n = \frac{i}{Z_n} V_n. \quad (3.219)$$

Таким образом, исходная задача с полями E_n , H_n эквивалентна задаче с функциями U_n , V_n . Такая замена позволяет свести задачу для электромагнитных волн к задаче для одномерной волны, где используются те же обозначения.

Для вывода усредненных граничных условий будем следовать далее ходу решения одномерной задачи. Действуя аналогично выкладкам раздела 3.1.4, начиная с (3.92), получаем подобные (3.104)–(3.105) граничные условия в виде:

$$U_2|_{x=0} - U_2|_{x=d} + \alpha V_2|_{x=0} + \alpha V_2|_{x=d} = 0; \quad (3.220)$$

$$\alpha U_2|_{x=0} + \alpha U_2|_{x=d} - V_2|_{x=0} + V_2|_{x=d} = 0, \quad (3.221)$$

где используется обозначение (3.103)

$$\alpha = \frac{k_2 d}{2}. \quad (3.222)$$

Выражения (3.220)–(3.221) дают связь между граничными значениями функций U_2 и V_2 , которые по отношению к границам пластины являются «внутренними». Задача состоит в том, чтобы получить условия связи на тех же границах между значениями функций U_1 и V_1 , а также U_3 и V_3 , которые описывают волновой процесс вне пластины. Таким образом, надо преобразовать «внутренние» условия (3.220)–(3.221) во «внешние», которые давали бы искомую связь.

Для этого воспользуемся обычными граничными условиями равенства касательных составляющих электрического и магнитного полей на границах раздела сред:

$$E_1|_{x=0} = E_2|_{x=0}; \quad (3.223)$$

$$H_1|_{x=0} = H_2|_{x=0}; \quad (3.224)$$

$$E_2|_{x=d} = E_3|_{x=d}; \quad (3.225)$$

$$H_2|_{x=d} = H_3|_{x=d}. \quad (3.226)$$

Пользуясь выражениями (3.223)–(3.226) и учитывая (3.193), получаем:

$$U_2|_{x=0} = U_1|_{x=0}; \quad (3.227)$$

$$V_2|_{x=0} = \frac{Z_2}{Z_1} V_1|_{x=0}; \quad (3.228)$$

$$U_2|_{x=d} = U_3|_{x=d}; \quad (3.229)$$

$$V_2|_{x=d} = \frac{Z_2}{Z_3} V_3|_{x=d}. \quad (3.230)$$

При замене

$$Z_n \rightarrow \frac{1}{k_n} \quad (3.231)$$

эти граничные условия переходят в условия равенства волновых функций и их производных на границах раздела сред, которые используются в одномерной задаче. Обратная замена

$$k_n \rightarrow \frac{1}{Z_n} \quad (3.232)$$

приводит условия одномерной задачи к полученным здесь.

Подставляя (3.227)–(3.230) в (3.220) и (3.221) получаем внешние граничные условия в виде:

$$\frac{1}{Z_2} U_1|_{x=0} - \frac{1}{Z_2} U_3|_{x=d} + \frac{\alpha}{Z_1} V_1|_{x=0} + \frac{\alpha}{Z_3} V_3|_{x=d} = 0; \quad (3.233)$$

$$\frac{\alpha}{Z_2} U_1|_{x=0} + \frac{\alpha}{Z_2} U_3|_{x=d} - \frac{1}{Z_1} V_1|_{x=0} + \frac{1}{Z_3} V_3|_{x=d} = 0, \quad (3.234)$$

где α определяется формулой (3.222).

Из сравнения с аналогичными формулами для одномерной задачи видно, что полученные здесь электродинамические граничные условия эквивалентны одномерным с точностью до замен (3.231) и (3.232). Как и в одномерной задаче, граничные условия вида (3.233) и (3.234), по-видимому, являются наиболее удобными.

Пользуясь (3.206)–(3.208) и (3.212)–(3.214) найдем теперь входящие в граничные условия (3.233)–(3.234) амплитуды волн в первой и третьей средах:

$$U_1|_{x=0} = A + B; \quad (3.235)$$

$$U_3|_{x=d} = E; \quad (3.236)$$

$$V_1|_{x=0} = -i(A - B); \quad (3.237)$$

$$V_3|_{x=d} = -iE. \quad (3.238)$$

Подставляя (3.235)–(3.238) в (3.233)–(3.234), получаем:

$$\frac{1}{Z_2}(A + B) - \frac{1}{Z_2}E - \alpha \frac{1}{Z_1}i(A - B) - \alpha \frac{1}{Z_3}iE = 0; \quad (3.239)$$

$$\alpha \frac{1}{Z_2}(A + B) + \alpha \frac{1}{Z_2}E + \frac{1}{Z_1}i(A - B) - \frac{1}{Z_3}iE = 0. \quad (3.240)$$

Преобразуем уравнения (3.239)–(3.240), для чего раскроем в них скобки, приведем подобные члены при A , B и E , перенесем слагаемые, содержащие A , в правую часть, умножим уравнение (3.240) на i и запишем коэффициенты при A , B , E так, чтобы сначала следовала действительная часть, а затем — мнимая. В результате получим систему двух уравнений с двумя неизвестными B и E при заданной величине A , в виде:

$$BZ_3(Z_1 + i\alpha Z_2) - EZ_1(Z_3 + i\alpha Z_2) = -AZ_3(Z_1 - i\alpha Z_2); \quad (3.241)$$

$$BZ_3(Z_2 + i\alpha Z_1) + EZ_1(Z_2 + i\alpha Z_3) = AZ_3(Z_2 - i\alpha Z_1). \quad (3.242)$$

Таблицы коэффициентов этой системы имеют вид:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline B & E & A \\ \hline \frac{Z_3(Z_1 + i\alpha Z_2)}{Z_3(Z_2 + i\alpha Z_1)} & \frac{-Z_1(Z_3 + i\alpha Z_2)}{Z_1(Z_2 + i\alpha Z_3)} & \frac{-Z_3(Z_1 - i\alpha Z_2)}{Z_3(Z_2 - i\alpha Z_1)} \\ \hline \end{array}. \quad (3.243)$$

Следуя правилу Крамера, из этих таблиц получаем детерминанты:

$$D_0 = Z_1 Z_3 [(1 - \alpha^2) Z_2 (Z_1 + Z_3) + 2i\alpha (Z_1 Z_3 + Z_2^2)]; \quad (3.244)$$

$$D_B = -Z_1 Z_3 [(1 - \alpha^2) Z_2 (Z_1 - Z_3) + 2i\alpha (Z_1 Z_3 - Z_2^2)]; \quad (3.245)$$

$$D_E = 2Z_1 Z_2 Z_3^2 (1 + \alpha^2), \quad (3.246)$$

которые определяют решение в следующем виде:

$$B = A \frac{D_B}{D_0}; \quad (3.247)$$

$$E = A \frac{D_E}{D_0}. \quad (3.248)$$

Подставляя детерминанты (3.244)–(3.246) в (3.247)–(3.248) и полагая $A = 1$, получаем:

$$B = -\frac{(1 - \alpha^2) Z_2 (Z_1 - Z_3) + 2i\alpha (Z_1 Z_3 - Z_2^2)}{(1 - \alpha^2) Z_2 (Z_1 + Z_3) + 2i\alpha (Z_1 Z_3 + Z_2^2)}; \quad (3.249)$$

$$E = \frac{2(1 + \alpha^2) Z_2 Z_3}{(1 - \alpha^2) Z_2 (Z_1 + Z_3) + 2i\alpha (Z_1 Z_3 + Z_2^2)}. \quad (3.250)$$

В этих формулах в соответствии с (3.222):

$$\alpha = \frac{k_2 d}{2}. \quad (3.251)$$

Это амплитуды отраженной и проходящей электромагнитных волн при нормальном падении, полученные методом усреднения. Амплитуды электрических полей отраженной и проходящей волн получаются с помощью соотношений (3.202) и (3.205), а магнитных — из амплитуд электрических с помощью соотношения (3.193).

Формулы (3.249), (3.250) при заменах (3.231), (3.232) совпадают с аналогичными формулами для одномерной задачи.

Классические коэффициенты отражения и прохождения по энергиям (при $A = 1$), имеют вид:

$$R_e = |B|^2; \quad (3.252)$$

$$T_e = |E|^2 \frac{k_3}{k_1}. \quad (3.253)$$

Согласно закону сохранения энергии, по крайней мере для диэлектрических сред без потерь, должно выполняться соотношение:

$$R_e + T_e = 1. \quad (3.254)$$

Проверку выполнимости этого соотношения авторы предоставляют любознательному читателю.

3.2.4. Электродинамические граничные условия для тонкой пластины. Метод усреднения

В случае двух и более границ раздела возможно использование метода усреднения. В разделе 3.1.4, посвященном одномерной волне, показано, что для этого требуются граничные условия особого вида — внутренние и внешние. Рассмотрим получение таких условий для электромагнитной волны.

Будем исходить из классической системы уравнений электродинамики в системе СИ имеющей вид, приведенной в разделе 1.4.1 (формулы (1.228)–(1.231)). Задачу рассмотрим в декартовой системе координат $Oxyz$, такой же, как использовалась при решении задачи об одной границе раздела, геометрия которой приведена на рис. 2.2. Следуя выкладкам раздела 1.4.1, введем комплексную диэлектрическую проницаемость (1.232), после чего, пользуясь определением ротора (1.233), получим систему уравнений (1.234)–(1.239) для компонент полей E_x , E_y , E_z , H_x , H_y , H_z которую для удобства обращения приведем здесь еще раз:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega\mu\mu_0 H_x; \quad (3.255)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu\mu_0 H_y; \quad (3.256)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu\mu_0 H_z; \quad (3.257)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = i\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_x; \quad (3.258)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_y; \quad (3.259)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_z. \quad (3.260)$$

Замечание. Для упрощения дальнейшей записи здесь и далее для обозначения комплексной диэлектрической проницаемости вместо символа ε_c используется символ ε (то есть опущен индекс c), не забывая, однако, что так обозначаемая диэлектрическая проницаемость является комплексной.

Система (3.255)–(3.260) содержит шесть уравнений с шестью неизвестными: E_x , E_y , E_z , H_x , H_y , H_z . Покажем, что из системы шести уравнений (3.255)–(3.260) можно выделить замкнутую часть из четырех уравнений, содержащую только четыре неизвестных E_y , E_z , H_y , H_z . Для этого выполним ряд последовательных подстановок.

Из (3.258) выразим E_x :

$$E_x = -\frac{i}{\omega\varepsilon\varepsilon_0} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right); \quad (3.261)$$

которое подставим сначала в (3.257):

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{i}{\omega\varepsilon\varepsilon_0} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \right] = -i\omega\mu\mu_0 H_z, \quad (3.262)$$

а затем в (3.256):

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{i}{\omega\varepsilon\varepsilon_0} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu\mu_0 H_y. \quad (3.263)$$

После этого из (3.255) выразим H_x :

$$H_x = \frac{i}{\omega\mu\mu_0} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right), \quad (3.264)$$

которое подставим сначала в (3.260):

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{i}{\omega\mu\mu_0} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \right] = i\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_z, \quad (3.265)$$

а затем в (3.259):

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{i}{\omega\mu\mu_0} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_y. \quad (3.266)$$

Далее, в каждом из выражений (3.262), (3.263), (3.265), (3.266) слева оставим только производную по x , а все остальное перенесем в правую часть, где вынесем i за квадратную скобку, а внутри квадратных скобок сгруппируем слагаемые, содержащие y и z компоненты соответствующих полей и вынесем их за круглые скобки. Заменяем также каждые две последовательные производные первого порядка

одной производной второго порядка. В результате таких преобразований из (3.262), (3.263), (3.265), (3.266) получим:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = i \left[- \left(\omega \mu \mu_0 + \frac{1}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) H_z + \frac{1}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial^2 H_y}{\partial y \partial z} \right], \quad (3.267)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = i \left[\left(\omega \mu \mu_0 + \frac{1}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) H_y - \frac{1}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial z} \right], \quad (3.268)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = i \left[\left(\omega \varepsilon \varepsilon_0 + \frac{1}{\omega \mu \mu_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_z - \frac{1}{\omega \mu \mu_0} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial z} \right], \quad (3.269)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = i \left[- \left(\omega \varepsilon \varepsilon_0 + \frac{1}{\omega \mu \mu_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_y + \frac{1}{\omega \mu \mu_0} \cdot \frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial z} \right]. \quad (3.270)$$

Это и есть искомая замкнутая система четырех уравнений с четырьмя неизвестными E_y , E_z , H_y , H_z , которую можно решить независимо. Когда такие решения будут получены, компоненты полей E_x и H_x можно найти из выражений (3.261) и (3.264).

Поскольку при выводе (3.267)–(3.270) никаких предположений о границах не делалось, то эти выражения справедливы во всем пространстве. Предположим теперь, что мы решаем задачу для плоскопараллельной пластины, плоскости которой перпендикулярны оси Ox (то есть параллельны координатной плоскости Oyz).

Пусть x -координаты поверхностей пластины равны a и b (где $a < b$), а толщина равна d (то есть $d = b - a$). Предположим далее, что все компоненты полей E_x , E_y , E_z , H_x , H_y , H_z в пределах толщины пластины меняются таким образом, что их первые производные при этом только возрастают или убывают. В этом случае каждое значение той или иной производной от компоненты поля при изменении координаты x в пределах толщины пластины встречается только один раз. Это условие накладывает ограничение на толщину пластины. Так, например, если мы решаем задачу о падении волны на пластину, то толщина пластины не должна превышать половину длины волны. При выполнении этих условий уравнения (3.267)–(3.270) можно проинтегрировать по x без опасения возникновения неоднозначности.

Таким образом, интегрируя (3.267)–(3.270) по x и разделяя полученные выражения на d , получаем:

$$\frac{1}{d} \int_a^b \frac{\partial E_y}{\partial x} dx = i \left[- \left(\omega \mu \mu_0 + \frac{1}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{1}{d} \int_a^b H_z dx \right) + \frac{1}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{1}{d} \int_a^b H_y dx \right) \right]; \quad (3.271)$$

$$\frac{1}{d} \int_a^b \frac{\partial E_z}{\partial x} dx = i \left[\left(\omega \mu \mu_0 + \frac{1}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{1}{d} \int_a^b H_y dx \right) - \frac{1}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{1}{d} \int_a^b H_z dx \right) \right]; \quad (3.272)$$

$$\frac{1}{d} \int_a^b \frac{\partial H_y}{\partial x} dx = i \left[\left(\omega \varepsilon \varepsilon_0 + \frac{1}{\omega \mu \mu_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{1}{d} \int_a^b E_z dx \right) - \frac{1}{\omega \mu \mu_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{1}{d} \int_a^b E_y dx \right) \right]; \quad (3.273)$$

$$\frac{1}{d} \int_a^b \frac{\partial H_z}{\partial x} dx = i \left[- \left(\omega \varepsilon \varepsilon_0 + \frac{1}{\omega \mu \mu_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{1}{d} \int_a^b E_y dx \right) + \frac{1}{\omega \mu \mu_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{1}{d} \int_a^b E_z dx \right) \right]. \quad (3.274)$$

Интегралы, входящие в (3.271)–(3.274), можно преобразовать. Так, интегралы от производных по x равны:

$$\frac{1}{d} \int_a^b \frac{\partial E_y}{\partial x} dx = \frac{E_{yb} - E_{ya}}{d}; \quad (3.275)$$

$$\frac{1}{d} \int_a^b \frac{\partial E_z}{\partial x} dx = \frac{E_{zb} - E_{za}}{d}; \quad (3.276)$$

$$\frac{1}{d} \int_a^b \frac{\partial H_y}{\partial x} dx = \frac{H_{yb} - H_{ya}}{d}; \quad (3.277)$$

$$\frac{1}{d} \int_a^b \frac{\partial H_z}{\partial x} dx = \frac{H_{zb} - H_{za}}{d}, \quad (3.278)$$

где E_{ya} , E_{yb} , E_{za} , E_{zb} , H_{ya} , H_{yb} , H_{za} , H_{zb} — значения компонент полей на поверхностях пластины при $x = a$ и $x = b$.

Для вычисления интегралов от x и y -компонент полей, заменим эти компоненты их средними значениями по толщине пластины, которые

найдем в предположении, что они меняются по толщине пластины линейно. Учтем также, что

$$\int_a^b dx = d. \quad (3.279)$$

При этом получаем:

$$\frac{1}{d} \int_a^b H_z dx = \overline{H}_z \frac{1}{d} \int_a^b dx = \frac{H_{zb} + H_{za}}{2}; \quad (3.280)$$

$$\frac{1}{d} \int_a^b H_y dx = \overline{H}_y \frac{1}{d} \int_a^b dx = \frac{H_{yb} + H_{ya}}{2}; \quad (3.281)$$

$$\frac{1}{d} \int_a^b E_z dx = \overline{E}_z \frac{1}{d} \int_a^b dx = \frac{E_{zb} + E_{za}}{2}; \quad (3.282)$$

$$\frac{1}{d} \int_a^b E_y dx = \overline{E}_y \frac{1}{d} \int_a^b dx = \frac{E_{yb} + E_{ya}}{2}, \quad (3.283)$$

где черта над символом означает среднюю величину по толщине пластины.

Подставляя (3.275)–(3.278) и (3.280)–(3.283) в (3.271)–(3.274), получим искомые граничные условия в виде:

$$\begin{aligned} \frac{E_{yb} - E_{ya}}{d} = i \left[- \left(\omega \mu \mu_0 + \frac{1}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{H_{zb} + H_{za}}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{H_{yb} + H_{ya}}{2} \right) \right]; \quad (3.284) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{E_{zb} - E_{za}}{d} = i \left[\left(\omega \mu \mu_0 + \frac{1}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{H_{yb} + H_{ya}}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{H_{zb} + H_{za}}{2} \right) \right]; \quad (3.285) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{H_{yb} - H_{ya}}{d} = i \left[- \left(\omega \varepsilon \varepsilon_0 + \frac{1}{\omega \mu \mu_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{E_{zb} + E_{za}}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\omega \mu \mu_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{E_{yb} + E_{ya}}{2} \right) \right]; \quad (3.286) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{H_{zb} - H_{za}}{d} = i \left[- \left(\omega \varepsilon \varepsilon_0 + \frac{1}{\omega \mu \mu_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{E_{yb} + E_{ya}}{2} \right) + \right. \\ \left. - \frac{1}{\omega \mu \mu_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{E_{zb} + E_{za}}{2} \right) \right]. \quad (3.287) \end{aligned}$$

Полученные здесь граничные условия (3.284)–(3.287) являются внутренними, то есть входящие в них поля и проницаемости соответствуют среде 2 (что, вообще говоря, должно быть отмечено соответствующими индексами). Задача перехода от внутренних условий к внешним состоит в получении связи между полями в средах 1 и 3, то есть в замене полей в среде 2 на поля в средах 1 и 3.

Для перехода от внутренних условий к внешним выполним по шагам следующие действия.

1) Заменяем буквенные индексы a и b полей на границах на граничные обозначения: $a \rightarrow |_{x=0}$, $b \rightarrow |_{x=d}$, а также проставим недостающие индексы «2» в обозначениях полей и проницаемостей внутри пластины. При этом получаем внутренние условия в виде:

$$\begin{aligned} \frac{E_{2y}|_{x=d} - E_{2y}|_{x=0}}{d} = \\ = i \left[- \left(\omega \mu_2 \mu_0 + \frac{1}{\omega \varepsilon_2 \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{H_{2z}|_{x=d} + H_{2z}|_{x=0}}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega \varepsilon_2 \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \cdot \left(\frac{H_{2y}|_{x=d} + H_{2y}|_{x=0}}{2} \right) \right]; \quad (3.288) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{E_{2z}|_{x=d} - E_{2z}|_{x=0}}{d} = \\ = i \left[- \left(\omega \mu_2 \mu_0 + \frac{1}{\omega \varepsilon_2 \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{H_{2y}|_{x=d} + H_{2y}|_{x=0}}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega \varepsilon_2 \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \cdot \left(\frac{H_{2z}|_{x=d} + H_{2z}|_{x=0}}{2} \right) \right]; \quad (3.289) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{H_{2y}|_{x=d} - H_{2y}|_{x=0}}{d} = \\ = i \left[- \left(\omega \varepsilon_2 \varepsilon_0 + \frac{1}{\omega \mu_2 \mu_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{E_{2z}|_{x=d} + E_{2z}|_{x=0}}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\omega \mu_2 \mu_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \cdot \left(\frac{E_{2y}|_{x=d} + E_{2y}|_{x=0}}{2} \right) \right]; \quad (3.290) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{H_{2z}|_{x=d} - H_{2z}|_{x=0}}{d} = \\ = i \left[- \left(\omega \varepsilon_2 \varepsilon_0 + \frac{1}{\omega \mu_2 \mu_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{E_{2y}|_{x=d} + E_{2y}|_{x=0}}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\omega \mu_2 \mu_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \cdot \left(\frac{E_{2z}|_{x=d} + E_{2z}|_{x=0}}{2} \right) \right]. \quad (3.291) \end{aligned}$$

2) Введем замены частот и проницаемостей через волновые числа и импедансы:

$$\omega \varepsilon_2 \varepsilon_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_0} \sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_0} \cdot \frac{\sqrt{\mu_2 \mu_0}}{\sqrt{\mu_2 \mu_0}} = \frac{k_2}{Z_2}; \quad (3.292)$$

$$\omega \mu_2 \mu_0 = \omega \sqrt{\mu_2 \mu_0} \sqrt{\mu_2 \mu_0} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_0}} = k_2 Z_2. \quad (3.293)$$

Соответственно

$$\frac{1}{\omega \varepsilon_2 \varepsilon_0} = \frac{Z_2}{k_2}; \quad (3.294)$$

$$\frac{1}{\omega \mu_2 \mu_0} = \frac{1}{k_2 Z_2}. \quad (3.295)$$

3) Предположим, что зависимости всех полей от координат y и z одинаковы и имеют вид:

$$YZ = e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}, \quad (3.296)$$

то есть для производных по тем же координатам получаем замены:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \rightarrow -k_y^2; \quad (3.297)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \rightarrow -k_z^2; \quad (3.298)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \rightarrow -k_y k_z. \quad (3.299)$$

4) Введем сферическую систему координат, связанную с границей раздела сред, схема которой показана на рис. 3.7.

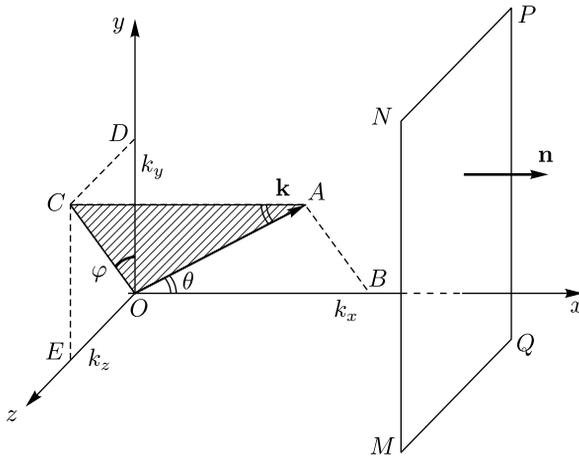


Рис. 3.7. Сферическая система координат для задачи о волне, падающей на плоскую границу раздела сред под произвольными углами

Здесь $MNPQ$ — граница раздела сред, \mathbf{n} — вектор нормали к плоскости границы. $Oxyz$ — исходная декартова система координат: ось Ox перпендикулярна плоскости границы раздела (параллельна нормали \mathbf{n}), плоскость Oyz параллельна плоскости границы раздела. $O'r\theta\varphi$ — вводимая здесь сферическая система координат: полярная ось параллельна

нормали к пластине, угол θ отсчитывается от оси Ox , угол φ — в плоскости Oyz от оси Oy к оси Oz . Волновой вектор волны — \mathbf{k} , его длина — отрезок OA , его проекции на оси декартовой системы координат: $k_x = OB$, $k_y = OD$, $k_z = OE$, проекция волнового вектора на плоскость Oyz — отрезок OC . Заштрихованная плоскость OAC — плоскость падения волны, проходящая через нормаль \mathbf{n} и волновой вектор \mathbf{k} . Угол падения волны: $\angle OAC = \angle AOB = \theta$.

В такой геометрии компоненты волнового вектора в среде 2 имеют вид:

$$k_{2x} = k_2 \cos \theta_2; \quad (3.300)$$

$$k_{2y} = k_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2; \quad (3.301)$$

$$k_{2z} = k_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_2, \quad (3.302)$$

где

$$k_2 = \sqrt{k_{2x}^2 + k_{2y}^2 + k_{2z}^2}. \quad (3.303)$$

5) Умножим обе части выражений (3.288)–(3.291) на d , в правых частях (3.288), (3.289) вынесем за скобки множитель $k_2 Z_2/2$, в правых частях (3.290) и (3.291) — множитель $k_2/2Z_2$, после чего введем обозначение, подобное (3.103):

$$\alpha = \frac{k_2 d}{2}. \quad (3.304)$$

6) Разделим (3.288) и (3.289) на Z_2 , умножим все выражения на -1 , перенесем все слагаемые в левую часть, которую приравняем нулю, после чего изменим порядок следования полей от $x = 0$ до $x = d$. В результате преобразуем внутренние условия (3.288)–(3.291) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_2} E_{2y} \Big|_{x=0} - \frac{1}{Z_2} E_{2y} \Big|_{x=d} + i\alpha \left[- (1 - \sin^2 \theta_2 \cos^2 \varphi_2) (H_{2z} \Big|_{x=0} + H_{2z} \Big|_{x=d}) - \right. \\ \left. - \sin^2 \theta_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 (H_{2y} \Big|_{x=0} + H_{2y} \Big|_{x=d}) \right] = 0; \quad (3.305) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_2} E_{2z} \Big|_{x=0} - \frac{1}{Z_2} E_{2z} \Big|_{x=d} + i\alpha \left[(1 - \sin^2 \theta_2 \sin^2 \varphi_2) (H_{2y} \Big|_{x=0} + H_{2y} \Big|_{x=d}) + \right. \\ \left. + \sin^2 \theta_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 (H_{2z} \Big|_{x=0} + H_{2z} \Big|_{x=d}) \right] = 0; \quad (3.306) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{2y} \Big|_{x=0} - H_{2y} \Big|_{x=d} + i\frac{\alpha}{Z_2} \left[(1 - \sin^2 \theta_2 \cos^2 \varphi_2) (E_{2z} \Big|_{x=0} + E_{2z} \Big|_{x=d}) + \right. \\ \left. + \sin^2 \theta_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 (E_{2y} \Big|_{x=0} + E_{2y} \Big|_{x=d}) \right] = 0; \quad (3.307) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{2z} \Big|_{x=0} - H_{2z} \Big|_{x=d} + i\frac{\alpha}{Z_2} \left[- (1 - \sin^2 \theta_2 \sin^2 \varphi_2) (E_{2y} \Big|_{x=0} + E_{2y} \Big|_{x=d}) - \right. \\ \left. - \sin^2 \theta_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 (E_{2z} \Big|_{x=0} + E_{2z} \Big|_{x=d}) \right] = 0. \quad (3.308) \end{aligned}$$

7) Заменяем теперь поля на границах в области 2 через поля на тех же границах в областях 1 и 3 с помощью обычных граничных условий — равенства касательных составляющих полей на границах:

$$E_2|_{x=0} = E_1|_{x=0}; \quad (3.309)$$

$$H_2|_{x=0} = H_1|_{x=0}; \quad (3.310)$$

$$E_2|_{x=d} = E_3|_{x=d}; \quad (3.311)$$

$$H_2|_{x=d} = H_3|_{x=d}. \quad (3.312)$$

8) Преобразуем (3.305) и (3.306) с помощью (3.309)–(3.313):

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_2} E_{1y}|_{x=0} - \frac{1}{Z_2} E_{3y}|_{x=d} - i\alpha H_{1z}|_{x=0} - i\alpha H_{3z}|_{x=d} - \\ - i\alpha [-\sin^2 \theta_2 \cos^2 \varphi_2 (H_{1z}|_{x=0} + H_{3z}|_{x=d}) + \\ + \sin^2 \theta_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 (H_{1y}|_{x=0} + H_{3y}|_{x=d})] = 0; \end{aligned} \quad (3.313)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_2} E_{1z}|_{x=0} - \frac{1}{Z_2} E_{3z}|_{x=d} + i\alpha H_{1y}|_{x=0} + i\alpha H_{3y}|_{x=d} + \\ + i\alpha [-\sin^2 \theta_2 \sin^2 \varphi_2 (H_{1y}|_{x=0} + H_{3y}|_{x=d}) + \\ + \sin^2 \theta_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 (H_{1z}|_{x=0} + H_{3z}|_{x=d})] = 0; \end{aligned} \quad (3.314)$$

9) Умножим (3.307) и (3.308) на i и учтем (3.309)–(3.312) а также вынесем за скобки поля, коэффициенты которых не зависят от углов:

$$\begin{aligned} iH_{1y}|_{x=0} - iH_{3y}|_{x=d} - \frac{\alpha}{Z_2} E_{1z}|_{x=0} - \frac{\alpha}{Z_2} E_{3z}|_{x=d} - \\ - \frac{\alpha}{Z_2} [-\sin^2 \theta_2 \cos^2 \varphi_2 (E_{1z}|_{x=0} + E_{3z}|_{x=d}) + \\ + \sin^2 \theta_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 (E_{1y}|_{x=0} + E_{3y}|_{x=d})] = 0; \end{aligned} \quad (3.315)$$

$$\begin{aligned} iH_{1z}|_{x=0} - iH_{3z}|_{x=d} + \frac{\alpha}{Z_2} E_{1y}|_{x=0} + \frac{\alpha}{Z_2} E_{3y}|_{x=d} + \\ + \frac{\alpha}{Z_2} [-\sin^2 \theta_2 \sin^2 \varphi_2 (E_{1y}|_{x=0} + E_{3y}|_{x=d}) + \\ + \sin^2 \theta_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 (E_{1z}|_{x=0} + E_{3z}|_{x=d})] = 0. \end{aligned} \quad (3.316)$$

Полученные здесь выражения (3.313)–(3.316) представляют собой полные (универсальные) внешние граничные условия для y и z компонент электрического и магнитного полей по обе стороны от поверхностей пластины толщиной d (то есть в средах 1 и 3), записанные в симметричном виде.

3.2.5. Получение граничных условий задачи о нормальном падении волны из общих условий для метода усреднения

Рассмотрим теперь более общий случай — получение граничных условий вида (3.220)–(3.221) из универсальных граничных условий метода усреднения (3.284)–(3.287), где такие условия относятся к среде 2, поэтому в них $\varepsilon = \varepsilon_2$, $\mu = \mu_2$, а также $a = 0$, $b = d$.

В выбранной геометрии нормального падения зависимости полей от y и z отсутствуют, поэтому граничные условия (3.284)–(3.287) принимают вид:

$$\frac{E_{yb} - E_{ya}}{d} = -i\omega\mu_2\mu_0 \frac{H_{zb} + H_{za}}{2}; \quad (3.317)$$

$$\frac{E_{zb} - E_{za}}{d} = i\omega\mu_2\mu_0 \frac{H_{yb} + H_{ya}}{2}; \quad (3.318)$$

$$\frac{H_{yb} - H_{ya}}{d} = i\omega\varepsilon_2\varepsilon_0 \frac{E_{zb} + E_{za}}{2}; \quad (3.319)$$

$$\frac{H_{zb} - H_{za}}{d} = -i\omega\varepsilon_2\varepsilon_0 \frac{E_{yb} + E_{ya}}{2}. \quad (3.320)$$

При поляризации падающей волны вдоль оси Oy и сохранении такой поляризации для всех волн, электрические поля вдоль оси Oz и магнитные вдоль оси Oy отсутствуют, так что обе части условий (3.318) и (3.319) тождественно равняются нулю, поэтому остаются только два условия (3.317) и (3.320), для которых E_y и H_z от нуля отличны:

$$\frac{E_{yb} - E_{ya}}{d} = -i\omega\mu_2\mu_0 \frac{H_{zb} + H_{za}}{2}; \quad (3.321)$$

$$\frac{H_{zb} - H_{za}}{d} = -i\omega\varepsilon_2\varepsilon_0 \frac{E_{yb} + E_{ya}}{2}. \quad (3.322)$$

Из этих условий при $x = 0$ и $x = d$, получаем:

$$E_{2y}|_{x=d} - E_{2y}|_{x=0} + \frac{i\omega\mu_2\mu_0 d}{2} (H_{2z}|_{x=d} + H_{2z}|_{x=0}) = 0; \quad (3.323)$$

$$H_{2z}|_{x=d} - H_{2z}|_{x=0} + \frac{i\omega\varepsilon_2\varepsilon_0 d}{2} (E_{2y}|_{x=d} + E_{2y}|_{x=0}) = 0. \quad (3.324)$$

Это — внутренние граничные условия для полей в области 2.

Заменим теперь поля E_{2y} и H_{2z} функциями U_2 и V_2 с помощью соотношений:

$$E_{2y} = U_2; \quad (3.325)$$

$$H_{2z} = \frac{i}{Z_2} V_2, \quad (3.326)$$

а также введем обозначение, аналогичное (3.103):

$$\alpha = \frac{k_2 d}{2} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_0\mu_2\mu_0} d}{2}. \quad (3.327)$$

При этом из (3.323)–(3.324), меняя в обоих выражениях порядок следования слагаемых, а также в (3.323) меняя знаки, получаем:

$$U_2|_{x=0} - U_2|_{x=d} + \alpha V_2|_{x=0} + \alpha V_2|_{x=d} = 0; \quad (3.328)$$

$$\alpha U_2|_{x=0} + \alpha U_2|_{x=d} - V_2|_{x=0} + V_2|_{x=d} = 0. \quad (3.329)$$

Это — внутренние граничные условия для функций U_2 и V_2 в области 2. Они полностью совпадают с условиями (3.220)–(3.221), полученными прямым усреднением.

3.2.6. Наклонное падение электромагнитной волны на две границы раздела

В этом разделе продолжим рассмотрение падения электромагнитной волны на структуру, содержащую две параллельные границы раздела, то есть распространение волны через три среды с различными параметрами. Теперь обратимся к более сложному случаю — наклонному падению волны на структуру. То есть будем считать, что направление распространения волны ориентировано относительно нормали к границам раздела сред произвольным образом. Ограничимся случаем изотропных сред, при котором направление распространения волны совпадает с направлением ее волнового вектора. Плоскость, проходящую через нормаль и направление распространения волны, будем называть плоскостью падения волны. Будем рассматривать два вида поляризации падающей волны: «продольную», когда вектор электрического поля волны лежит в плоскости, проходящей через нормаль и плоскость падения волны, а также «поперечную», когда вектор электрического поля волны перпендикулярен плоскости, проходящей через нормаль и плоскость падения волны. Выбор таких видов поляризации совпадает с принятым в главе 2 при рассмотрении задачи о наклонном падении электромагнитной волны на одну границу раздела сред (разделы 2.2.5–2.2.7).

Общая геометрия задачи

Будем рассматривать задачу в геометрии, показанной на рис. 3.8. Здесь приведена ориентация векторов волновых \mathbf{k} и электрического поля \mathbf{E} падающей, отраженной и проходящей волн в трех средах. Обозначения — те же, что в работах [56–58, 65], [47, с. 60, рис. 4.2]. Угол падения — θ_1 , угол преломления — θ_2 , угол прохождения — θ_3 . Выбор системы координат $Oxyz$ аналогичен принятому на рис. 3.6, а также рис. 2.3 и рис. 2.4: плоскость Oyz параллельна плоскости пластины, ось Ox ей перпендикулярна. Начало координат приходится на первую границу пластины, плоскость Oxy совпадает с плоскостью падения волны. Толщина пластины равна d . Вне пластины падающей волне соответствует индекс i , отраженной — r , проходящей — t . Внутри пластины индексы падающей и отраженной волн — pi и pr . При продольной поляризации векторы электрического поля всех волн \mathbf{E}_{vi} , \mathbf{E}_{vr} , \mathbf{E}_{vpi} , \mathbf{E}_{vpr} , \mathbf{E}_{vt} лежат в плоскости Oxy , а магнитного (не показаны) — вдоль оси Oz . При поперечной поляризации в плоскости Oxy лежат векторы магнитного поля (также не показаны), а векторы электрического поля \mathbf{E}_{gi} , \mathbf{E}_{gr} , \mathbf{E}_{gpi} , \mathbf{E}_{gpr} , \mathbf{E}_{gt} параллельны оси Oz .

Для ориентационных характеристик векторов будем использовать ту же сферическую систему координат, что и в задаче о падении волны на одну границу. Такая система представлена на рис. 3.7. В такой системе компоненты волнового вектора в среде 2 имеют вид (3.300)–(3.303).

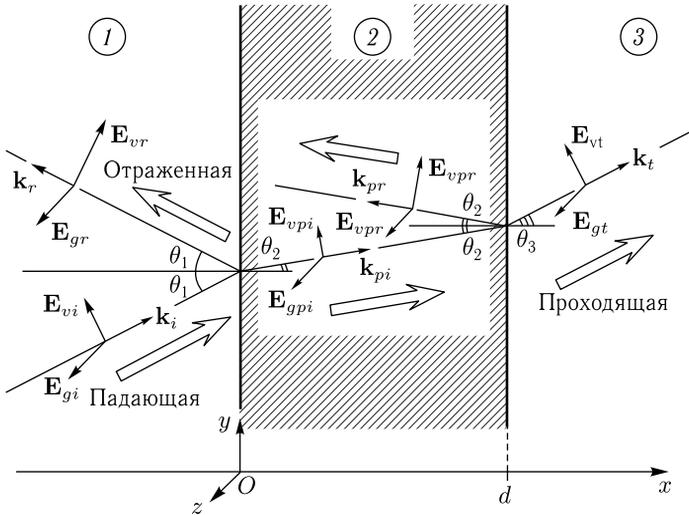


Рис. 3.8. Геометрия задачи о наклонном падении электромагнитной волны на пластину. Для обоих вариантов поляризации показаны только электрические поля. Продольной поляризации соответствует индекс «v», поперечной — индекс «g». Индекс «i» — волна падающая, индекс «r» — отраженная, индекс «t» — проходящая, индекс «p» — соответствует волнам обоих направлений внутри слоя

3.2.7. Наклонное падение, продольная поляризация. Прямой метод

Рассмотрим случай наклонного падения волны с продольной поляризацией прямым методом. Ориентации электрического и магнитного полей волн аналогичны показанным на рис. 2.3, соответствующем случаю одной границы.

В этом случае при заданном θ_1 , в соответствии с законом Снеллиуса [2, с. 63, форм. (6), (8)] и формулой (2.88), получаем:

$$\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1}}{k_2}; \quad (3.330)$$

$$\cos \theta_3 = \frac{\sqrt{k_3^2 - k_2^2 \sin^2 \theta_2}}{k_3}. \quad (3.331)$$

Далее, в силу изотропности всех сред, плоскость падения волны сохраняется, поэтому $\varphi_{1,2,3} = 0$. Для волнового числа и импеданса будем использовать стандартные выражения (1.253) и (1.258):

$$k_{1,2,3} = \omega \sqrt{\varepsilon_{1,2,3} \varepsilon_0 \mu_{1,2,3} \mu_0}; \quad (3.332)$$

$$Z_{1,2,3} = \sqrt{\frac{\mu_{1,2,3} \mu_0}{\varepsilon_{1,2,2} \varepsilon_0}}. \quad (3.333)$$

Проектируя векторы электрического и магнитного полей на оси координат, подобно тому, как это было сделано в разделе 2.2.6 при получении формул (2.98)–(2.115), соответствующих рис. 2.4, здесь, используя рис. 3.8, запишем отличные от нуля координатные составляющие полей в областях 1–3:

$$E_{1x} = -A \sin \theta_1 e^{-ik_1 x \cos \theta_1} + B \sin \theta_1 e^{ik_1 x \cos \theta_1}; \quad (3.334)$$

$$E_{iy} = A \cos \theta_1 e^{-ik_1 x \cos \theta_1} + B \cos \theta_1 e^{ik_1 x \cos \theta_1}; \quad (3.335)$$

$$H_{1z} = \frac{A}{Z_1} e^{-ik_1 x \cos \theta_1} - \frac{B}{Z_1} e^{ik_1 x \cos \theta_1}; \quad (3.336)$$

$$E_{2x} = -C \sin \theta_2 e^{-ik_2 x \cos \theta_2} + D \sin \theta_2 e^{ik_2(x-d) \cos \theta_2}; \quad (3.337)$$

$$E_{2y} = C \cos \theta_2 e^{-ik_2 x \cos \theta_2} + D \cos \theta_2 e^{ik_2(x-d) \cos \theta_2}; \quad (3.338)$$

$$H_{2z} = \frac{C}{Z_2} e^{-ik_2 x \cos \theta_2} - \frac{D}{Z_2} e^{ik_2(x-d) \cos \theta_2}; \quad (3.339)$$

$$E_{3x} = -E \sin \theta_3 e^{-ik_3(x-d) \cos \theta_3}; \quad (3.340)$$

$$E_{3y} = E \cos \theta_3 e^{-ik_3(x-d) \cos \theta_3}; \quad (3.341)$$

$$H_{3z} = \frac{E}{Z_3} e^{-ik_3(x-d) \cos \theta_3}. \quad (3.342)$$

В этих выражениях амплитуды B , C , D , E подлежат определению с помощью граничных условий равенства касательных составляющих полей на границах:

$$E_{2y,2z}|_{x=0} = E_{1y,1z}|_{x=0}; \quad (3.343)$$

$$H_{2y,2z}|_{x=0} = H_{1y,1z}|_{x=0}; \quad (3.344)$$

$$E_{2y,2z}|_{x=d} = E_{3y,3z}|_{x=d}; \quad (3.345)$$

$$H_{2y,2z}|_{x=d} = H_{3y,3z}|_{x=d}. \quad (3.346)$$

В этих условиях электрические поля содержат только компоненты по оси Oy , а магнитные — только по оси Oz .

Подставляя поля (3.334)–(3.342) в граничные условия (3.343)–(3.346), получаем систему уравнений для определения амплитуд B , C , D , E через A :

$$B \cos \theta_1 - C \cos \theta_2 - D \cos \theta_2 e^{-ik_2 d \cos \theta_2} = -A \cos \theta_1; \quad (3.347)$$

$$C \cos \theta_2 e^{-ik_2 d \cos \theta_2} + D \cos \theta_2 - E \cos \theta_3 = 0; \quad (3.348)$$

$$BZ_2 + CZ_1 - DZ_1 e^{-ik_2 d \cos \theta_2} = AZ_2; \quad (3.349)$$

$$CZ_3 e^{-ik_2 d \cos \theta_2} - DZ_3 - EZ_2 = 0. \quad (3.350)$$

Введем новые переменные:

$$A_p = A \cos \theta_1; \quad (3.351)$$

$$B_p = B \cos \theta_1; \quad (3.352)$$

$$C_p = C \cos \theta_2; \quad (3.353)$$

$$D_p = D \cos \theta_2; \quad (3.354)$$

$$E_p = E \cos \theta_3, \quad (3.355)$$

нормированное волновое число

$$k_{2p} = k_2 \cos \theta_2, \quad (3.356)$$

а также нормированные импедансы

$$Z_{1p} = Z_1 \cos \theta_1; \quad (3.357)$$

$$Z_{2p} = Z_2 \cos \theta_2; \quad (3.358)$$

$$Z_{3p} = Z_3 \cos \theta_3. \quad (3.359)$$

Подставляя (3.351)–(3.359) в (3.347)–(3.350), получаем:

$$B_p - C_p - D_p \cdot e^{-ik_{2p}d} = -A_p; \quad (3.360)$$

$$C_p e^{-ik_{2p}d} + D_p - E_p = 0; \quad (3.361)$$

$$B_p Z_{2p} + C_p Z_{1p} - D_p Z_{1p} \cdot e^{-ik_{2p}d} = A_p Z_{2p}; \quad (3.362)$$

$$C_p Z_{3p} e^{-ik_{2p}d} - D_p Z_{3p} - E_p Z_{2p} = 0. \quad (3.363)$$

Эта система по форме аналогична системе (3.162)–(3.165) для случая нормального падения (раздел 3.2.1), поэтому, пользуясь полученным там решением (3.174)–(3.177), находим:

$$B = -\frac{(Z_{1p} - Z_{2p})(Z_{2p} + Z_{3p})e^{ik_{2p}d} + (Z_{1p} + Z_{2p})(Z_{2p} - Z_{3p})e^{-ik_{2p}d}}{(Z_{1p} + Z_{2p})(Z_{2p} + Z_{3p})e^{ik_{2p}d} + (Z_{1p} - Z_{2p})(Z_{2p} - Z_{3p})e^{-ik_{2p}d}} A; \quad (3.364)$$

$$C = \frac{2Z_{2p}(Z_{2p} + Z_{3p})e^{ik_{2p}d}}{(Z_{1p} + Z_{2p})(Z_{2p} + Z_{3p})e^{ik_{2p}d} + (Z_{1p} - Z_{2p})(Z_{2p} - Z_{3p})e^{-ik_{2p}d}} \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} A; \quad (3.365)$$

$$D = \frac{-2Z_{2p}(Z_{2p} - Z_{3p})}{(Z_{1p} + Z_{2p})(Z_{2p} + Z_{3p})e^{ik_{2p}d} + (Z_{1p} - Z_{2p})(Z_{2p} - Z_{3p})e^{-ik_{2p}d}} \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} A; \quad (3.366)$$

$$E = \frac{4Z_{2p}Z_{3p}}{(Z_{1p} + Z_{2p})(Z_{2p} + Z_{3p})e^{ik_{2p}d} + (Z_{1p} - Z_{2p})(Z_{2p} - Z_{3p})e^{-ik_{2p}d}} \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_3} A, \quad (3.367)$$

где входящие в (3.364)–(3.367) величины определяются формулами (3.351)–(3.359).

Решение (3.364)–(3.367) можно получить из аналогичного решения (3.54)–(3.57) одномерной задачи с помощью замен коэффициентов при амплитудах:

$$k_n \rightarrow \frac{1}{Z_n \cos \theta_n}, \quad (3.368)$$

ЭКСПОНЕНТ

$$e^{ik_2x} \rightarrow e^{ik_2x \cos \theta_2}, \quad (3.369)$$

а также амплитуд

$$A \rightarrow A_p = A \cos \theta_1; \quad (3.370)$$

$$D \rightarrow B_p = B \cos \theta_1; \quad (3.371)$$

$$C \rightarrow C_p = C \cos \theta_2; \quad (3.372)$$

$$D \rightarrow D_p = D \cos \theta_2; \quad (3.373)$$

$$E \rightarrow E_p = E \cos \theta_3. \quad (3.374)$$

3.2.8. Наклонное падение, продольная поляризация. Метод усреднения

Рассмотрим теперь наклонное падение волны с продольной поляризацией методом усреднения. В этом случае $\varphi_{1-3} = 0$, а $\cos \theta_2$ и $\cos \theta_3$ определяются формулами (3.330), (3.331). Из четырех внешних граничных условий (3.313)–(3.316) отличными от нуля остаются только два (3.313) и (3.316), которые принимают вид:

$$\frac{1}{Z_2} E_{1y} \Big|_{x=0} - \frac{1}{Z_2} E_{3y} \Big|_{x=d} - i\alpha H_{1z} \Big|_{x=0} - i\alpha H_{3z} \Big|_{x=d} + \\ + i\alpha \cdot \sin^2 \theta_2 (H_{1z} \Big|_{x=0} + H_{3z} \Big|_{x=d}) = 0; \quad (3.375)$$

$$iH_{1z} \Big|_{x=0} - iH_{3z} \Big|_{x=d} + \frac{\alpha}{Z_2} E_{1y} \Big|_{x=0} + \frac{\alpha}{Z_2} E_{3y} \Big|_{x=d} = 0. \quad (3.376)$$

Аналогично решению прямым методом введем нормированные амплитуды (3.351)–(3.355) и нормированные импедансы (3.357)–(3.359), а также используем обозначение, имеющее то же содержание, что (3.103), но несколько расширенную форму:

$$\alpha_g = \frac{k_2 \cos \theta_2 d}{2}. \quad (3.377)$$

В результате из (3.375)–(3.376) после несложных преобразований получаем систему уравнений для нормированных амплитуд:

$$B_p Z_{3p} (Z_{1p} + i\alpha_g Z_{2p}) - E_p Z_{1p} (Z_{3p} + i\alpha_g Z_{2p}) = \\ = -A_p Z_{3p} (Z_{1p} - i\alpha_g Z_{2p}); \quad (3.378)$$

$$B_p Z_{3p} (Z_{2p} + i\alpha_g Z_{1p}) + E_p Z_{1p} (Z_{2p} + i\alpha_g Z_{3p}) = \\ = A_p Z_{3p} (Z_{2p} - i\alpha_g Z_{1p}). \quad (3.379)$$

Эта система по форме совпадает с системой (3.241)–(3.242) в задаче о нормальном падении (раздел 3.2.1), поэтому воспользуемся полученным там решением (3.249)–(3.250) с учетом (3.351)–(3.355):

$$B = -\frac{(1 - \alpha_g^2)Z_{2p}(Z_{1p} - Z_{3p}) + 2i\alpha_g(Z_{1p}Z_{3p} - Z_{2p}^2)}{(1 - \alpha_g^2)Z_{2p}(Z_{1p} + Z_{3p}) + 2i\alpha_g(Z_{1p}Z_{3p} + Z_{2p}^2)}A; \quad (3.380)$$

$$E = \frac{2(1 + \alpha_g^2)Z_{2p}Z_{3p}}{(1 - \alpha_g^2)Z_{2p}(Z_{1p} + Z_{3p}) + 2i\alpha_g(Z_{1p}Z_{3p} + Z_{2p}^2)} \cdot \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_3}A. \quad (3.381)$$

В этих выражениях Z_{1p} , Z_{2p} , Z_{3p} определяются выражениями (3.357)–(3.359), α_g — выражением (3.377), а $\cos \theta_2$, $\cos \theta_3$ определяются по заданному значению θ_1 с помощью формул (3.330)–(3.331).

Из сравнения с одномерной задачей можно видеть, что приведенные там формулы переходят в полученные здесь при заменах (3.368)–(3.374), а также в соответствии с (3.377):

$$\alpha \rightarrow \alpha_g. \quad (3.382)$$

3.2.9. Наклонное падение, поперечная поляризация. Прямой метод

Рассмотрим теперь случай наклонного падения волны с поперечной поляризацией прямым методом. При этом $\varphi_{1-3} = 0$, а углы θ_2 и θ_3 определяются соотношениями (3.330)–(3.331). Как и ранее, плоскость падения волны совпадает с координатной плоскостью Oxy , однако теперь отличны от нуля компоненты электрического поля E_z и магнитного H_x и H_y :

$$E_{1z} = Ae^{-ik_1x \cos \theta_1} + Be^{ik_1x \cos \theta_1}; \quad (3.383)$$

$$H_{1x} = \frac{A}{Z_1} \sin \theta_1 e^{-ik_1x \cos \theta_1} + \frac{B}{Z_1} \sin \theta_1 e^{ik_1x \cos \theta_1}; \quad (3.384)$$

$$H_{1y} = -\frac{A}{Z_1} \cos \theta_1 e^{-ik_1x \cos \theta_1} + \frac{B}{Z_1} \cos \theta_1 e^{ik_1x \cos \theta_1}; \quad (3.385)$$

$$E_{2z} = Ce^{-ik_2x \cos \theta_2} + De^{ik_2(x-d) \cos \theta_2}; \quad (3.386)$$

$$H_{2x} = \frac{C}{Z_2} \sin \theta_2 e^{-ik_2x \cos \theta_2} + \frac{D}{Z_2} \sin \theta_2 e^{ik_2(x-d) \cos \theta_2}; \quad (3.387)$$

$$H_{2y} = -\frac{C}{Z_2} \cos \theta_2 e^{-ik_2x \cos \theta_2} + \frac{D}{Z_2} \cos \theta_2 e^{ik_2(x-d) \cos \theta_2}; \quad (3.388)$$

$$E_{3z} = Ee^{-ik_3(x-d) \cos \theta_3}; \quad (3.389)$$

$$H_{3x} = \frac{E}{Z_3} \sin \theta_3 e^{-ik_3(x-d) \cos \theta_3}; \quad (3.390)$$

$$H_{3y} = -\frac{E}{Z_3} \cos \theta_3 e^{-ik_3(x-d) \cos \theta_3}. \quad (3.391)$$

Подставляя поля (3.383)–(3.391) в граничные условия (3.343)–(3.346), получаем систему уравнений для определения амплитуд B , C , D , E через A :

$$B - C - De^{-ik_2d \cos \theta_2} = -A; \quad (3.392)$$

$$Ce^{-ik_2d \cos \theta_2} + D - E = 0; \quad (3.393)$$

$$BZ_2 \cos \theta_1 + CZ_1 \cos \theta_2 - DZ_1 \cos \theta_2 e^{-ik_2d \cos \theta_2} = AZ_2 \cos \theta_1; \quad (3.394)$$

$$CZ_3 \cos \theta_2 e^{-ik_2d \cos \theta_2} - DZ_3 \cos \theta_2 - EZ_2 \cos \theta_3 = 0. \quad (3.395)$$

Введем нормированное волновое число (аналогично (3.356)):

$$k_{2s} = k_2 \cos \theta_2, \quad (3.396)$$

а также нормированные импедансы

$$Z_{1s} = \frac{Z_1}{\cos \theta_1}; \quad (3.397)$$

$$Z_{2s} = \frac{Z_2}{\cos \theta_2}; \quad (3.398)$$

$$Z_{3s} = \frac{Z_3}{\cos \theta_3}. \quad (3.399)$$

Подставляя (3.396)–(3.399) в (3.392)–(3.395), получаем:

$$B - C - De^{-ik_{2s}d} = -A; \quad (3.400)$$

$$Ce^{-ik_{2s}d} + D - E = 0; \quad (3.401)$$

$$BZ_{2s} + CZ_{1s} - DZ_{1s}e^{-ik_{2s}d} = AZ_{2s}; \quad (3.402)$$

$$CZ_{3s}e^{-ik_{2s}d} - DZ_{3s} - EZ_{2s} = 0. \quad (3.403)$$

Эта система по форме аналогична системе (3.162)–(3.165) для случая нормального падения (раздел 3.2.1), поэтому, пользуясь полученным там решением (3.174)–(3.177), находим:

$$B = -\frac{(Z_{1s} - Z_{2s})(Z_{2s} + Z_{3s})e^{ik_{2s}d} + (Z_{1s} + Z_{2s})(Z_{2s} - Z_{3s})e^{-ik_{2s}d}}{(Z_{1s} + Z_{2s})(Z_{2s} + Z_{3s})e^{ik_{2s}d} + (Z_{1s} - Z_{2s})(Z_{2s} - Z_{3s})e^{-ik_{2s}d}}A; \quad (3.404)$$

$$C = \frac{2Z_{2s}(Z_{2s} + Z_{3s})e^{ik_{2s}d}}{(Z_{1s} + Z_{2s})(Z_{2s} + Z_{3s})e^{ik_{2s}d} + (Z_{1s} - Z_{2s})(Z_{2s} - Z_{3s})e^{-ik_{2s}d}}A; \quad (3.405)$$

$$D = \frac{-2Z_{2s}(Z_{2s} - Z_{3s})}{(Z_{1s} + Z_{2s})(Z_{2s} + Z_{3s})e^{ik_{2s}d} + (Z_{1s} - Z_{2s})(Z_{2s} - Z_{3s})e^{-ik_{2s}d}}A; \quad (3.406)$$

$$(3.407)$$

$$E = \frac{4Z_{2s}Z_{3s}}{(Z_{1s} + Z_{2s})(Z_{2s} + Z_{3s})e^{ik_{2s}d} + (Z_{1s} - Z_{2s})(Z_{2s} - Z_{3s})e^{-ik_{2s}d}}A, \quad (3.408)$$

где входящие в (3.404)–(3.408) величины определяются формулами (3.396)–(3.399).

Решение (3.404)–(3.408) можно получить из аналогичного решения (3.54)–(3.57) одномерной задачи с помощью замен коэффициентов при амплитудах:

$$k_n \rightarrow \frac{\cos \theta_n}{Z_n}, \quad (3.409)$$

а также экспонент

$$e^{ik_2x} \rightarrow e^{ik_2x \cos \theta_2}. \quad (3.410)$$

При этом амплитуды замены не требуют.

3.2.10. Наклонное падение, поперечная поляризация. Метод усреднения

Рассмотрим теперь наклонное падение волны с поперечной поляризацией методом усреднения. В этом случае $\varphi_{1-3} = 0$, а $\cos \theta_2$ и $\cos \theta_3$ определяются формулами (3.330), (3.331). Из внешних граничных условий (3.313)–(3.316) отличными от нуля остаются только (3.314) и (3.315), которые принимают вид:

$$\frac{1}{Z_2} E_{1z} \Big|_{x=0} - \frac{1}{Z_2} E_{3z} \Big|_{x=d} + i\alpha H_{1y} \Big|_{x=0} + i\alpha H_{3y} \Big|_{x=d} = 0; \quad (3.411)$$

$$iH_{1y} \Big|_{x=0} - iH_{3y} \Big|_{x=d} - \frac{\alpha}{Z_2} E_{1z} \Big|_{x=0} - \frac{\alpha}{Z_2} E_{3z} \Big|_{x=d} + \frac{\alpha}{Z_2} \sin^2 \theta_2 (E_{1z} \Big|_{x=0} + E_{3z} \Big|_{x=d}) = 0. \quad (3.412)$$

Введем нормированные импедансы (3.397)–(3.399), а также величину α_g , определяемую формулой (3.377). При этом из (3.411)–(3.412) получаем:

$$BZ_{3s} (Z_{1s} + i\alpha_g Z_{2s}) - EZ_{1s} (Z_{3s} + i\alpha_g Z_{2s}) = -AZ_{3s} (Z_{1s} - i\alpha_g Z_{2s}); \quad (3.413)$$

$$BZ_{3s} (Z_{2s} + i\alpha_g Z_{1s}) + EZ_{1s} (Z_{2s} + i\alpha_g Z_{3s}) = AZ_{3s} (Z_{2s} - i\alpha_g Z_{1s}). \quad (3.414)$$

Эта система по форме совпадает с системой (3.241)–(3.242) для задачи о нормальном падении (раздел 3.2.1), поэтому воспользуемся полученным там решением (3.249)–(3.250):

$$B = - \frac{(1 - \alpha_g^2) Z_{2s} (Z_{1s} - Z_{3s}) + 2i\alpha_g (Z_{1s} Z_{3s} - Z_{2s}^2)}{(1 - \alpha_g^2) Z_{2s} (Z_{1s} + Z_{3s}) + 2i\alpha_g (Z_{1s} Z_{3s} + Z_{2s}^2)} A; \quad (3.415)$$

$$E = \frac{2(1 + \alpha_s^2) Z_{2g} Z_{3g}}{(1 - \alpha_s^2) Z_{2g} (Z_{1g} + Z_{3g}) + 2i\alpha_s (Z_{1g} Z_{3g} + Z_{2g}^2)} A. \quad (3.416)$$

Из сравнения с одномерной задачей можно видеть, что приведенные там формулы (3.138), (3.139) переходят в полученные здесь при заменах (3.409), (3.410), а также (3.377).

3.2.11. Сведение электродинамических задач к одномерной

Как показано в предыдущих разделах, все электродинамические задачи о нормальном падении, а также о наклонном падении волны с продольной и поперечной поляризациями, решаемые как прямым методом, так и методом усреднения, с помощью определенных замен коэффициентов и переменных могут быть сведены к одномерной задаче.

Заметим, что введенные нами замены для импедансов при переходе от одномерной задачи к электродинамической с продольной и поперечной поляризациями, эквивалентны используемым в [134] понятиям «импеданса при перпендикулярной поляризации»:

$$Z_{\perp}(\alpha) = \frac{W}{\cos \alpha}, \quad (3.417)$$

и «импеданса при параллельной поляризации»

$$Z_{\parallel}(\alpha) = W \cdot \cos \alpha, \quad (3.418)$$

где $W = \sqrt{\mu\mu_0/\varepsilon\varepsilon_0}$ — «волновое сопротивление», то есть импеданс при нормальном падении, а угол α эквивалентен углу падения (преломления, прохождения) θ . Аналогичным образом определяется «поверхностный (полевой) импеданс» в [122].

Таким образом, вводя обозначения:

$$Z_{\parallel 1-3} = Z_{1-3} \cos \theta_{1-3}; \quad (3.419)$$

$$Z_{\perp 1-3} = \frac{Z_{1-3}}{\cos \theta_{1-3}}, \quad (3.420)$$

можно записать замены импедансов для продольной и поперечной поляризаций в форме, аналогичной случаю нормального падения

$$k_n \rightarrow \frac{1}{Z_{\parallel, \perp n}}. \quad (3.421)$$

Для удобства соответствующие замены сведены в табл. 3.1. В первом столбце приведены коэффициенты и переменные одномерной задачи.

Таблица 3.1. Эквиваленты обозначений в одномерных и электродинамических задачах

Одномерная задача	Нормальное падение	Продольная поляризация	Поперечная поляризация
k_{1-3}	$\frac{1}{Z_{1-3}}$	$\frac{1}{Z_{1-3} \cos \theta_{1-3}}$	$\frac{\cos \theta_{1-3}}{Z_{1-3}}$
k_{1-3}	$\frac{1}{Z_{1-3}}$	$\frac{1}{Z_{\parallel 1-3}}$	$\frac{1}{Z_{\perp 1-3}}$
$\exp(ik_2x)$	$\exp(ik_2x)$	$\exp(ik_2x \cos \theta_2)$	$\exp(ik_2x \cos \theta_2)$

Окончание табл. 3.1

Одномерная задача	Нормальное падение	Продольная поляризация	Поперечная поляризация
$\alpha = \frac{k_2 d}{2}$	$\alpha = \frac{k_2 d}{2}$	$\alpha_s = \frac{k_2 d \cos \theta_2}{2}$	$\alpha_s = \frac{k_2 d \cos \theta_2}{2}$
A	A	$A \cos \theta_1$	A
B	B	$B \cos \theta_1$	B
C	C	$C \cos \theta_2$	C
D	D	$D \cos \theta_2$	D
E	E	$E \cos \theta_3$	E

Для получения решения электродинамических задач достаточно в конечных формулах одномерной задачи соответствующие коэффициенты и переменные заменить коэффициентами и переменными, приведенными в остальных столбцах таблицы.

3.2.12. Оценка корректности метода усреднения для электромагнитной волны

Сравним теперь результаты, получаемые прямым методом и методом усреднения на некоторых числовых примерах. Прежде всего отметим, что прямой метод требует решения системы уравнений четвертого порядка (3.162)–(3.165), тогда как при методе усреднения решается система всего второго порядка (3.241)–(3.242), что несколько проще. Далее, конечные выражения для коэффициентов отражения и прохождения, находимые из отношения амплитуд, полученных методом усреднения (3.249), (3.250), также заметно проще аналогичных коэффициентов, находимых из амплитуд (3.174) и (3.177), полученных прямым методом, причем не содержат экспонент или тригонометрических функций. Таким образом, метод усреднения приводит к определенной экономии вычислений. Недостатком метода усреднения является невозможность получения амплитуд волн внутри пластины, а также определенная сложность получения внешних граничных условий.

Рассмотрим область применимости метода усреднения в сравнении с прямым методом. Ограничимся случаем нормального падения волны на плоскости раздела сред. Будем рассматривать зависимости коэффициентов отражения и прохождения от толщины пластины в соответствии с формулами (3.252) и (3.253). Полученные результаты представлены на рис. 3.9–3.13. При построении всех кривых полагалось, что пластина с обеих сторон окружена свободным пространством, то есть параметры среды в областях 1 и 3 следующие: $\varepsilon_{1,3} = 1$, $\mu_{1,3} = 1$, $\sigma_{1,3} = 0$. При этом для частоты $\omega = 10^{11} \text{ с}^{-1}$ получаем: $k_1 = 333 \text{ м}^{-1}$, то есть $\lambda_1 = \lambda_3 = 1,885 \text{ см}$, где $\lambda_{1,2,3}$ — длины волн в соответствующих средах. В области 2 параметры среды меняются, кроме магнитной проницаемости, которая всегда равна единице ($\mu_2 = 1$).

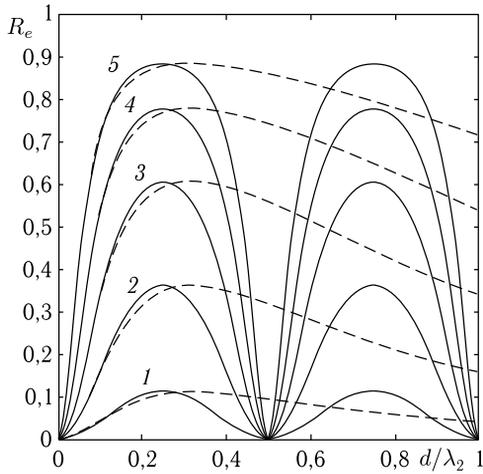


Рис. 3.9. Зависимости коэффициента отражения от нормированной толщины пластины в отсутствие проводимости при различных значениях действительной диэлектрической проницаемости: 1 — $\epsilon_2 = 2$, 2 — $\epsilon_2 = 4$, 3 — $\epsilon_2 = 8$, 4 — $\epsilon_2 = 16$, 5 — $\epsilon_2 = 32$

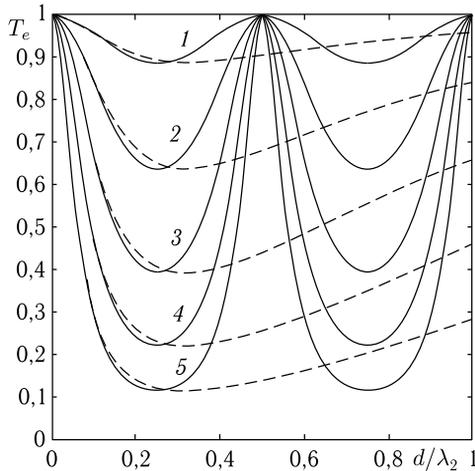


Рис. 3.10. Зависимости коэффициента прохождения от нормированной толщины пластины в отсутствие проводимости при значениях действительной диэлектрической проницаемости — тех же, что на рис. 3.9

Рассмотрим сначала случай диэлектрика, то есть $\sigma_2 = 0$. Этот случай иллюстрируется рис. 3.9 и рис. 3.10.

На рис. 3.9 показаны зависимости коэффициента отражения от нормированной толщины пластины при различных значениях действительной диэлектрической проницаемости ϵ_2 . Сплошные кривые получены

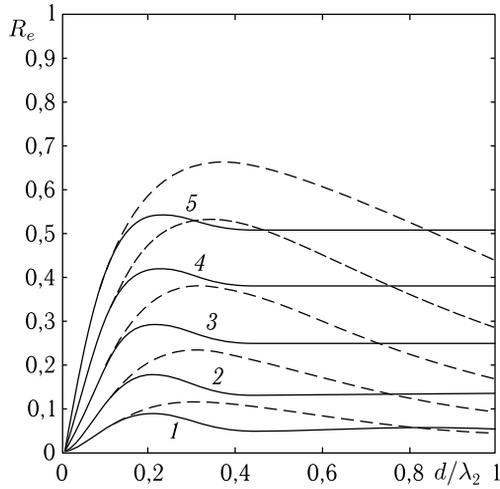


Рис. 3.11. Зависимости коэффициента отражения от нормированной толщины пластины при различных значениях проводимости: 1 — $\sigma_2 = 1 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, 2 — $\sigma_2 = 2 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, 3 — $\sigma_2 = 4 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, 4 — $\sigma_2 = 8 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, 5 — $\sigma_2 = 16 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ (столь малые значения проводимости выбраны для удобства сохранения масштаба по горизонтальной оси)

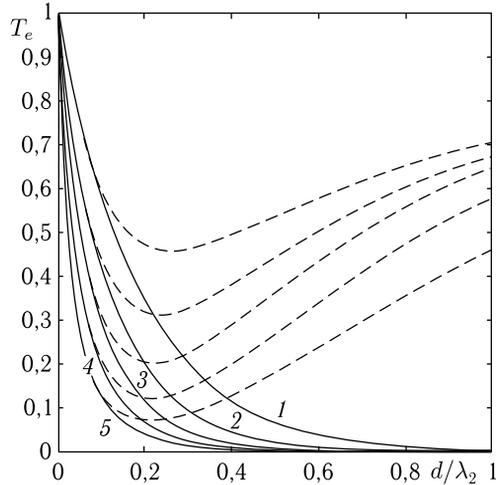


Рис. 3.12. Зависимости коэффициента прохождения от нормированной толщины пластины при тех же значениях проводимости — что на рис. 3.11

прямым методом с использованием формул (3.174) и (3.177), пунктирные — методом усреднения с помощью (3.249), (3.250). В обоих случаях коэффициент отражения рассчитывался по формуле (3.252).

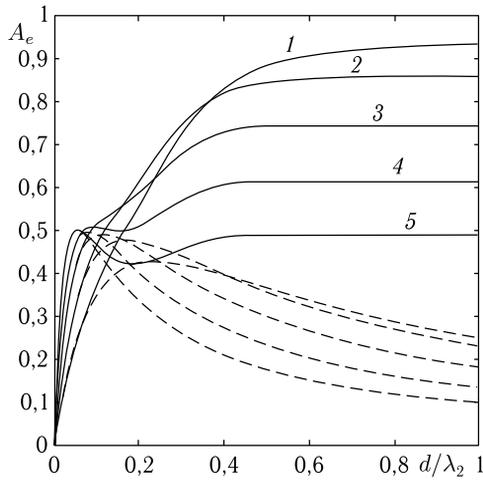


Рис. 3.13. Зависимости коэффициента поглощения от нормированной толщины пластины при значениях проводимости — тех же, что на рис. 3.11

Из рисунка видно, что с увеличением диэлектрической проницаемости коэффициент отражения растет в соответствии с классическими представлениями. Кривые, полученные прямым методом, имеют периодический характер, аналогичный таким же кривым на рис. 3.4 (раздел 3.1.6). Кривые, полученные методом усреднения, близки к полученным прямым методом в области $0 \leq d/\lambda_2 \leq 0,35$, причем верхняя граница этой области от ε_2 практически не зависит. При нормированной толщине большей 0,35 кривые, полученные методом усреднения, не проявляя никакого стремления к периодичности, плавно спадают, причем в области $d/\lambda_2 \sim 0,75$ они довольно близко подходят к кривым, полученным прямым методом: меньше на 15–40%, тем ближе, чем больше ε_2 .

На рис. 3.10 показаны зависимости коэффициента прохождения от нормированной толщины пластины в тех же условиях, что на рис. 3.9. Сплошные кривые получены прямым методом по формулам (3.174) и (3.177) с использованием (3.253), пунктирные — методом усреднения по формулам (3.249), (3.250) с использованием (3.253). Из рисунка видно, что ход всех кривых аналогичен показанному на рис. 3.9 с точностью до зеркального отражения относительно горизонтальной оси. Такой характер кривых обусловлен отсутствием потерь энергии благодаря отсутствию проводимости ($\sigma_2 = 0$). При этом сумма коэффициентов отражения и прохождения равна единице.

Рассмотрим теперь характер тех же зависимостей в случае проводящей среды, то есть $\sigma_2 \neq 0$. Для выявления роли проводимости в чистом виде положим далее $\varepsilon_2 = 1$. Полученные результаты иллюстрируются рис. 3.11–3.13.

На рис. 3.11 показаны зависимости коэффициента отражения от нормированной толщины пластины при различных значениях проводимости. Как и ранее, сплошные кривые получены прямым методом по формулам (3.174), (3.177) и (3.252), пунктирные — методом усреднения по формулам (3.249), (3.250) и (3.252). Из рисунка видно, что с увеличением проводимости коэффициент отражения растет в соответствии с классическими представлениями. При малых толщинах $d/\lambda_2 \leq 0,15$ коэффициент отражения растет пропорционально толщине пластины тем сильнее, чем больше проводимость. В этой области метод усреднения дает те же результаты, что и прямой. Далее кривые, полученные прямым методом, с увеличением толщины после небольшого максимума вблизи $d/\lambda_2 \sim 0,20$ слегка спадают и при $d/\lambda_2 \sim 0,40$ выходят на горизонтальный участок. Такое насыщение кривых наступает тогда, когда толщина пластины превышает величину скин-слоя: дальше волна просто не проникает и отражение не меняется. Кривые, полученные методом усреднения, также имеют максимум, несколько смещенный в область больших толщин — до $d/\lambda_2 \sim 0,35$, причем величина этого максимума несколько (на 15–20 %) превышает максимум кривых, полученных прямым методом, тем меньше, чем больше проводимость. Далее эти кривые плавно спадают и вблизи $d/\lambda_2 \sim 0,80$ пересекают кривые, полученные прямым методом. Во всей области $0,20 \leq d/\lambda_2 \leq 1,00$ значения коэффициента отражения, полученные методом усреднения, отличаются от значений, полученных прямым методом, не более чем на 20–25 %.

На рис. 3.12 представлены зависимости коэффициента прохождения от нормированной толщины пластины при тех же параметрах, что на рис. 3.11. Здесь также сплошные кривые получены прямым методом по формулам (3.174), (3.177), (3.253), пунктирные — методом усреднения по формулам (3.249), (3.250), (3.253). Из рисунка видно, что в соответствии с классическими представлениями большим значениям проводимости соответствуют меньшие значения коэффициента прохождения. При увеличении толщины коэффициент прохождения уменьшается тем сильнее, чем больше проводимость. При малых толщинах $d/\lambda_2 \leq 0,15$ это уменьшение пропорционально толщине пластины тем сильнее, чем больше проводимость. В этой области результаты, полученные как прямым методом, так и методом усреднения, хорошо совпадают друг с другом. При дальнейшем увеличении толщины кривые, полученные прямым методом, спадают до нуля: при большой толщине через пластину ничего не проходит. Однако кривые, полученные методом усреднения, пройдя через минимум вблизи $d/\lambda_2 \sim 0,20$, заметно возрастают. Таким образом, в этом случае метод усреднения дает приемлемые результаты только при $d/\lambda_2 \leq 0,20$.

Поскольку при наличии проводимости в среде происходит потеря энергии, в результате чего $R_e + T_e < 1$, то представляет интерес рассмотреть также коэффициент поглощения, в соответствии с классическим определением равный: $A_e = 1 - R_e - T_e$. В соответствии с этим,

на рис. 3.13 представлены зависимости коэффициента поглощения от нормированной толщины пластины при тех же значениях параметров, что и на рис. 3.11 и рис. 3.12. Здесь также сплошные кривые получены прямым методом с помощью формул (3.174), (3.177). Пунктирные — методом усреднения с помощью формул (3.249) и (3.250). Из рис. 3.13 видно, что в области малых толщин до $d/\lambda_2 \leq 0,05$ с увеличением проводимости поглощение возрастает, что соответствует хорошему проникновению волны в толщу пластины. При больших толщинах вступает в действие скин-эффект, в результате чего амплитуда волны внутри пластины падает и удельный вес поглощения по сравнению с отражением становится меньше. Поэтому рост поглощения замедляется и в области толщин порядка $d/\lambda_2 \sim 0,40$ кривые, построенные прямым методом, выходят на горизонтальный участок. В этой области через пластину уже ничего не проходит и сумма коэффициентов поглощения и отражения (рис. 3.11) стремится к единице. В отличие от начального участка здесь большей проводимости соответствует меньшее поглощение, так как с увеличением проводимости возрастает отражение волны от внешней поверхности пластины и на долю поглощения уже ничего не остается. Кривые, построенные методом усреднения, в этой области плавно спадают и сильно отходят от кривых, построенных прямым методом. Таким образом, для коэффициента поглощения метод усреднения дает хорошие результаты также только для $0,0 \leq d/\lambda_2 \leq 0,20$, а далее кривые сильно расходятся.

Анализ полученных результатов показывает следующее.

В случае диэлектрика метод усреднения позволяет рассчитывать коэффициенты отражения и прохождения с точностью $\sim 1\%$ при $0,0 \leq d/\lambda_2 \leq 0,10$, $\sim 5\%$ при $0,10 \leq d/\lambda_2 \leq 0,25$, $\sim 10\%$ при $0,25 \leq d/\lambda_2 \leq 0,35$. При $0,35 \leq d/\lambda_2 \leq 1,00$ кривые, полученные методом усреднения, удаляются от кривых, полученных прямым методом более чем на 50% кроме области $0,60 \leq d/\lambda_2 \leq 0,80$, где они проходят ниже кривых, полученных прямым методом всего на 15–40%, тем ближе, чем больше ε_2 .

Для проводника метод усреднения позволяет рассчитывать коэффициент отражения при малых толщинах $0,0 \leq d/\lambda_2 \leq 0,15$ с точностью не хуже 5%. В интервале толщин $0,15 \leq d/\lambda_2 \leq 0,35$ метод усреднения дает тот же максимум кривых, что и прямой метод, однако он смещен в область больших толщин на $\sim 10\%$ и превышает максимум кривых, полученных прямым методом на 15–25%. Во всей области $0,20 \leq d/\lambda_2 \leq 1,00$ значения коэффициента отражения, полученные методом усреднения, отличаются от значений, полученных прямым методом, не более чем на 20–25%. Коэффициент прохождения метод усреднения позволяет рассчитывать с точностью не хуже 5% в интервале толщин $0,0 \leq d/\lambda_2 \leq 0,15$. При $0,15 \leq d/\lambda_2 \leq 0,20$ его точность составляет около 10% и далее резко ухудшается. При расчете коэффициента поглощения метод усреднения обеспечивает точность

не хуже 5% в области $0,0 \leq d/\lambda_2 \leq 0,05$, и не хуже 15% в области $0,05 \leq d/\lambda_2 \leq 0,20$.

Приведенные здесь данные получены при нормальном падении волны на границы раздела. Более подробно, в том числе случаи наклонного падения, рассмотрены в монографии [47, с. 90–115]. Однако проверка показывает, что при наклонном падении подобные тенденции соотношения между данными, получаемыми прямым методом и методом усреднения, как по характеру, так и по величине в основном сохраняются. Таким образом, метод усреднения можно считать пригодным для расчета коэффициентов отражения, прохождения и поглощения только при малых толщинах пластины, то есть для диэлектрика — не более 0,20 от длины волны, а для проводящей среды — не более 0,10 от длины волны.

Выводы по главе 3

Глава посвящена вопросам распространения одномерных и электромагнитных волн через три среды, разделенные двумя границами. Рассмотрение проведено методами прямым и усреднения. Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрено падение одномерной волны на пластину, ограниченную двумя параллельными поверхностями, то есть имеющую две границы раздела сред. Решение задачи выполнено прямым методом. Записаны волновые уравнения во всех трех средах, получены их решения и выполнено сшивание решений с помощью граничных условий, состоящих в равенстве значений функций и их производных. Получены амплитуды проходящей и отраженной волн, а также прямо и обратно направленных волн внутри пластины, выраженные через амплитуду падающей волны. Получены коэффициенты отражения и прохождения для случая равенства параметров внешних относительно пластины сред. Показано, что сумма энергетических коэффициентов отражения и прохождения равна единице, что соответствует закону сохранения энергии.

2. Рассмотрено падение одномерной волны на структуру, обладающую диссипацией. Показано, что комплексный характер волновых чисел, соответствующий диссипативной среде, при увеличении толщины пластины может привести к экспоненциальной расходимости амплитуды проходящей волны, что противоречит закону сохранения энергии. Для устранения расходимости введена нормировка амплитуды волны, проходящей через первую границу раздела, состоящая в привязке амплитуды волны к точке, откуда эта волна исходит. Показано, что при введении такой нормировки расходимость отсутствует, так что закон сохранения энергии полностью выполняется.

3. Рассмотрено падение одномерной волны на пластину, ограниченную двумя параллельными поверхностями, то есть имеющую две границы раздела сред. Решение задачи выполнено методом усредне-

ния. Записаны волновые уравнения во всех трех средах, получены их решения. Введены вспомогательные функции, пропорциональные производным от основных функций, разделенных на соответствующие волновые числа. С помощью таких функций получены усредненные внутренние граничные условия. С использованием равенства волновых функций и их производных на границах раздела сред из внутренних граничных условий получены внешние, усредненные по толщине пластины. Путем подстановки решений волновых уравнений во внешние граничные условия, получены амплитуды проходящей и отраженной волн, выраженные через амплитуду падающей волны.

4. Выполнено сравнение методов прямого и усреднения для одномерной задачи о падении волны на структуру, содержащую две границы раздела, то есть три среды. Отмечено, что метод усреднения приводит к более простым выражениям для амплитуд волн, однако требует более трудоемкого получения внешних граничных условий. Выполнен анализ зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от нормированной на длину волны толщины пластины. Показано, что при действительном волновом числе внутри пластины зависимости коэффициентов отражения и прохождения от толщины, полученные прямым методом, имеют периодический характер, причина чего состоит в интерференции волн, отраженных от двух поверхностей пластины. Аналогичные зависимости, построенные по методу усреднения, периодичности не имеют и близки к кривым, построенным по прямому методу, при толщине пластины не более четверти длины волны, после чего коэффициент прохождения плавно стремится к нулю, а отражения — к единице. Таким образом, показано, что метод усреднения применим для расчета амплитуд проходящей и отраженной волн только в пределах толщины пластины меньшей четверти длины волны в среде пластины.

5. Рассмотрено нормальное падение электромагнитной волны на одну границу раздела двух сред с разными параметрами. Приведены решения волновых уравнений для электрического и магнитного полей волны, отражающие поперечный характер волны и связь между электрическим и магнитным полями через импедансы. Записаны граничные условия, состоящие в непрерывности касательных составляющих электрического и магнитного полей на границе раздела сред. Найдены амплитуды электрического и магнитного полей проходящей и отраженной волны, выраженные через амплитуду волны падающей. Найдены коэффициенты отражения и прохождения по полям и по потокам энергии. Отмечено, что коэффициенты по полям, полученные из электрического и магнитно полей, различаются на множитель, равный отношению импедансов сред. При этом сумма коэффициентов отражения и прохождения по потокам энергии равна единице.

6. Рассмотрено нормальное падение электромагнитной волны на пластину, ограниченную двумя параллельными поверхностями, то есть имеющую две границы раздела сред. Решение задачи выполнено прямым методом. Записаны волновые уравнения во всех трех средах,

получены их решения и выполнено сшивание решений с помощью граничных условий, состоящих в равенстве касательных составляющих электрического и магнитного полей на границах раздела сред. Получены амплитуды проходящей и отраженной волн, а также прямо и обратно направленных волн внутри пластины, выраженные через амплитуду падающей волны. Получены коэффициенты отражения и прохождения для случая равенства параметров внешних относительно пластины сред. Показано, что сумма энергетических коэффициентов отражения и прохождения равна единице, что соответствует закону сохранения энергии. Продемонстрированы предельные переходы к случаям одной границы, одинаковых внешних сред и отсутствия границ. Отмечено единство полученного решения с решением для одномерной волны.

7. Рассмотрено нормальное падение электромагнитной волны на пластину, ограниченную двумя параллельными поверхностями, то есть имеющую две границы раздела сред. Решение задачи выполнено методом усреднения. Записаны волновые уравнения для электрических полей во всех трех средах. Введены вспомогательные функции, равные отношению производных электрического поля к волновому числу в соответствующей среде. Показана пропорциональность вспомогательных функций магнитным полям с учетом соответствующих импедансов сред. В результате выполнении действий, аналогичных одномерному случаю, то есть усреднения полей по толщине пластины, получены внутренние граничные условия. С использованием равенства касательных составляющих электрического и магнитного полей на границах раздела внутренние граничные условия преобразованы во внешние. Путем подстановки решений волновых уравнений в граничные условия получены амплитуды электрического и магнитного полей отраженной и проходящей волн. Получены коэффициенты отражения и прохождения, сумма которых равна единице. Отмечено единство полученного решения с решением для одномерной волны.

8. Рассмотрено применение метода усреднения для получения общих электродинамических граничных условий для тонкой пластины. Главной задачей является получение граничных условий, имеющих силу при любом направлении распространения волны относительно нормали к плоскости пластины. На основе полной системы уравнений электродинамики получена система уравнений для компонент электрического и магнитного полей волны в общем случае. Путем усреднения полей по толщине пластины получены внутренние граничные условия, которые затем, с учетом непрерывности касательных составляющих электрического и магнитного полей на границе раздела сред, преобразованы во внешние граничные условия. Полученные условия записаны в сферической системе координат, полярная ось которой совпадает с нормалью к поверхности пластины. Отмечено, что введение сферических координат позволяет записать внешние граничные условия в терминах полярного и азимутального углов полей и волнового вектора. Показано, что полученные ранее прямым усреднением в декартовой

системе координат граничные условия для случая нормального падения являются частным случаем полных граничных условий при соответствующем выборе значений полярного и азимутального углов.

9. Рассмотрена постановка задачи о наклонном падении электромагнитной волны на пластину, содержащую две границы раздела. Выделены два принципиально отличающихся случая — продольной и поперечной поляризации волны. Отмечено, что продольная поляризация соответствует ориентации электрического поля падающей волны в плоскости, проходящей через волновой вектор и нормаль к плоскости пластины, а поперечная соответствует ориентации электрического поля перпендикулярно плоскости, проходящей через волновой вектор и нормаль к плоскости пластины. Отмечено, что в силу изотропности всех сред продольный или поперечный характер сохраняется для всех волн, распространяющихся внутри и вне структуры. Задачи о наклонном падении волн для случаев продольной и поперечной поляризаций решены методами прямым и усреднения. Во всех случаях получены амплитуды электрического и магнитного полей для отраженной и проходящей волн, а при использовании прямого метода также амплитуд волн внутри пластины. Отмечено единство полученных решение со случаем одномерной волны, приведены соотношения, позволяющие свести решения электродинамических задач к решению задачи одномерной с учетом импедансов и ориентационных характеристик распространяющихся волн.

10. Выполнена численная оценка корректности метода усреднения для случая нормального падения электромагнитной волны на плоскость пластины. Получены зависимости коэффициентов отражения и прохождения от нормированной на длину волны толщины пластины в отсутствие проводимости при различных значениях действительной диэлектрической проницаемости. Показано, что с увеличением диэлектрической проницаемости коэффициент отражения растет, а коэффициент прохождения падает, причем кривые, полученные прямым методом, имеют периодический характер, аналогичный таковому для одномерной задачи. Кривые, полученные методом усреднения, близки к полученным прямым методом, при толщине пластины не более $0,20$ от длины волны в пластине, после чего плавно стремятся к асимптотическим значениям. Учет проводимости материала пластины приводит к затуханию периодического характера кривых, полученных прямым методом, причем соответствие между зависимостями, полученным методом усреднения, с таковыми, полученными прямым методом, имеет место при толщине пластины не более $0,10$ от длины волны в пластине. Отмечено, что при наклонном падении подобные тенденции соотношения между данными, получаемыми прямым методом и методом усреднения, как по характеру, так и по величине, в основном, сохраняются. Таким образом, установлено, что метод усреднения можно считать пригодным для расчета коэффициентов отражения, прохождения и поглощения только при малых толщинах пластины, то есть для диэлектрика — не более $0,20$ от длины волны, а для проводящей среды — не более $0,10$ от длины волны.

Глава 4

КОЭФФИЦИЕНТЫ ОТРАЖЕНИЯ И ПРОХОЖДЕНИЯ ПРИ НАКЛОННОМ ПАДЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ТРИ СРЕДЫ, РАЗДЕЛЕННЫЕ ДВУМЯ ГРАНИЦАМИ

Глава посвящена рассмотрению коэффициентов отражения и прохождения для электромагнитных волн в достаточно общем виде. Приведены обобщенные определения обоих коэффициентов и даны конкретные примеры расчета их характеристик для случая наклонного падения электромагнитной волны продольной и поперечной поляризации на три среды, разделенные двумя границами.

В тексте главы частично использованы некоторые материалы монографий [47, 48], а также статей [56–65]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

4.1. Общие определения коэффициентов отражения и прохождения

Весьма важными с практической стороны характеристиками прохождения волны через многослойную структуру являются коэффициенты отражения и прохождения. Классическое определение этих коэффициентов применительно к теории длинных линий можно найти, например, в [141, с. 219–226], где они определены как отношения амплитуд напряжений соответствующих волн в определенном сечении линии, как правило, приходящимся на скачкообразную неоднородность (конец линии или точка размещения локальной неоднородности). В оптике для характеристик отражения и прохождения по энергиям используются понятия «отражательной» и «пропускательной способностей» [2, с. 66–72].

Применительно к задачам, рассматриваемым в настоящей монографии, понятия коэффициентов отражения и прохождения для случая падения одномерной волны на одну границу раздела двух сред в отсутствие диссипации, введены в разделах 2.1.2–2.1.3. Определены коэффициенты по амплитудам (2.20), (2.21) и по энергиям (2.22), (2.23). Показано, что в соответствии с законом сохранения энергии

сумма коэффициентов отражения и прохождения по энергиям, то есть отражательной и пропускательной способностей, равна единице (2.24).

В разделах 2.2.2–2.2.3 для случая нормального падения электромагнитной волны на одну границу раздела введены коэффициенты отражения и прохождения по электрическому (2.68), (2.69) и по магнитному полям (2.72) и (2.73), причем отмечено их некоторое различие. Более общее для этого случая рассмотрение коэффициентов отражения и прохождения по энергиям (2.82), (2.83) устанавливает равенство их суммы единице (2.84).

В разделе 3.1.2 для случая падения одномерной волны на две границы раздела сред, то есть распространения волны через три среды, приведены коэффициенты отражения (3.31) и прохождения (3.32) по энергиям, выраженные через амплитуды распространяющихся волн в первой и третьей средах. Отмечено, что при равенстве параметров первой и третьей сред выражения для амплитуд волн значительно упрощаются, что позволяет записать коэффициенты отражения и прохождения в явном виде через волновые числа сред (3.35) и (3.36). Показано, что в отсутствие затухания сумма этих коэффициентов равна единице.

В разделе 3.2.1 для случая нормального падения волны на структуру из трех сред прямым методом получены амплитуды отраженной (3.174) и проходящей (3.177) волн, выраженные через импедансы соответствующих сред. Подобные выражения получены также методом усреднения (3.249), (3.250). В обоих случаях отмечена возможность получения коэффициентов отражения и прохождения по энергиям с помощью стандартных выражений (3.252) и (3.253), сумма которых равняется единице (3.254).

Обобщение приведенных случаев с учетом физического смысла коэффициентов как отношения потоков энергии соответствующих волн позволяет записать достаточно универсальные (при амплитуде падающей волны $A = 1$) выражения для коэффициентов отражения и прохождения по энергиям для одномерных волн в случае структуры, содержащей N сред, в виде (3.252), (3.253):

$$R_e = |B_1|^2; \quad (4.1)$$

$$T_e = |A_N|^2 \frac{k_N}{k_1}, \quad (4.2)$$

где B_1 и A_N — амплитуды отраженной и проходящей волн в первой и третьей средах соответственно.

Для электромагнитных волн с учетом эквивалентных замен, приведенных в разделе 3.2.11 (табл. 3.1), выражения для коэффициентов отражения и прохождения принимают вид:

$$R_e = |B_1|^2; \quad (4.3)$$

$$T_e = |A_N|^2 \frac{Z_1}{Z_N}, \quad (4.4)$$

то есть волновые числа заменяются на обратные импедансы, причем амплитуды волн также представляются выраженными через импедансы.

Сумма этих выражений должна равняться единице:

$$R_e + T_e = 1, \quad (4.5)$$

что соответствует закону сохранения энергии. Проверку этого соотношения авторы предоставляют любознательному читателю.

4.1.1. Коэффициенты отражения и прохождения относительно произвольных точек пространства

Традиционное определение коэффициентов отражения и прохождения предполагает, что амплитуды волн обоих направлений в процессе распространения внутри той или другой среды не меняются. Однако это положение имеет место только в бездиссипативной среде, то есть в отсутствие потерь при распространении. В самом деле, падающая волна, исходящая из какой-то точки, удаленной от первой границы раздела, уже частично может затухнуть, так что ее амплитуда изменится. То же касается проходящей волны, если ее амплитуда измеряется на некотором расстоянии от последней границы раздела. Для электромагнитной волны в случае наклонного падения направление распространения отраженной волны может не совпадать с направлением распространения волны падающей. То же касается волн, распространяющихся внутри каждой из сред. В случае диссипативной среды при одной и той же координате относительно нормали к границе раздела сред, вследствие различия путей, проходимых волнами между противоположными границами, затухание волн противоположных направлений может различаться.

В таких случаях традиционные определения коэффициентов отражения и прохождения становятся неоднозначными. Для определенности следует рассматривать коэффициенты отражения и прохождения в какой-то заранее определенной точке пространства относительно амплитуды падающей волны в точке ее исхода.

В качестве примера рассмотрим падение одномерной волны на одну границу раздела из точки, отстоящей на расстояние a от начала координат. При этом отраженная волна еще в процессе падения проходит расстояние от точки $x = -a$ до точки $x = 0$, а после отражения еще раз то же расстояние уже от точки $x = 0$ до точки $x = -a$. То есть набег фазы такой волны относительно точки исхода падающей волны, то есть $x = -a$, увеличивается на $2k_1a$, так что коэффициент отражения приобретает вид:

$$R_a(x = -a) = \frac{U_r|_{x=-a}}{U_i|_{x=-a}} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{-2ik_1a}. \quad (4.6)$$

Если проходящая волна наблюдается в точке, отстоящей от границы раздела на расстояние b , то есть при $x = b$, то к набегу фазы падающей

волны до границы добавляется набег фазы после границы, так что коэффициент прохождения приобретает вид:

$$T_{ab}(x=b) = \frac{U_t|_{x=b}}{U_i|_{x=-a}} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} e^{-i(k_1 a + k_2 b)}. \quad (4.7)$$

Заметим, что в приведенных выражениях волновые числа предполагаются действительными, а в случае их комплексного характера следует рассматривать дробные сомножители выражений (4.6), (4.7) и показатели экспонент также в комплексном виде.

В случае электромагнитных волн, особенно при наклонном падении, определение коэффициентов отражения и прохождения еще более усложняется (например, в геометрии, показанной далее на рис. 5.6 и рис. 5.8), так что должно рассматриваться относительно каждого конкретного случая. Подробное развитие таких положений в известной авторам литературе отсутствует, поэтому они представляют такую задачу в качестве полезного упражнения любознательному читателю. В рамках же настоящей монографии далее будут рассматриваться определения коэффициентов отражения и прохождения в классическом виде (4.1), (4.2) и (4.3), (4.4).

В случае комплексных волновых чисел или импедансов будем использовать варианты:

$$R_e = |B_1|^2; \quad (4.8)$$

$$T_e = |A_N|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{k_N}{k_1} \right), \quad (4.9)$$

а также

$$R_e = |B_1|^2; \quad (4.10)$$

$$T_e = |A_N|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{Z_1}{Z_N} \right). \quad (4.11)$$

Замечание. Здесь второй сомножитель в выражениях (4.9) и (4.11) представлен как действительная часть волновых чисел, тогда как в монографиях [47, с. 83, форм. (5.14)], [48, с. 94, форм. (5.12)], [49, глава 5, форм. (5.2)–(5.23)] в качестве второго сомножителя присутствует отношение действительных частей волновых чисел или импедансов. Такое разночтение не является критичным при действительных волновых числах или импедансах, однако при комплексных может породить определенную ошибку. Частично об этом упоминалось в разделе 1.3.3 при выводе формулы (1.227). Более подробно энергетические соотношения между потоками энергии волн обоих направлений обсуждаются в монографии [54] и в работах [60, 62, 63]. Авторы предполагают подробно осветить этот вопрос в следующей монографии, в главе, посвященной энергетическим характеристикам распространяющихся волн. На данном же этапе при определении коэффициента прохождения по энергии

будем следовать выражениям (4.9) и (4.11), которые в соответствии с (1.227) являются более корректными.

4.1.2. Обобщенные коэффициенты выхода

Еще одной полезной характеристикой процесса распространения волн через многослойные структуры могут явиться «обобщенные коэффициенты выхода», которые вводятся для случая падения двух встречных волн с обеих сторон многослойной структуры.

Отличие от традиционных коэффициентов отражения и прохождения состоит в том, что учитываются не только волны, порожденные одной волной того или иного направления, но и волны, порожденные встречной волной, падающей на другую сторону структуры. Схема формирования обобщенных коэффициентов выхода показана на рис. 4.1.

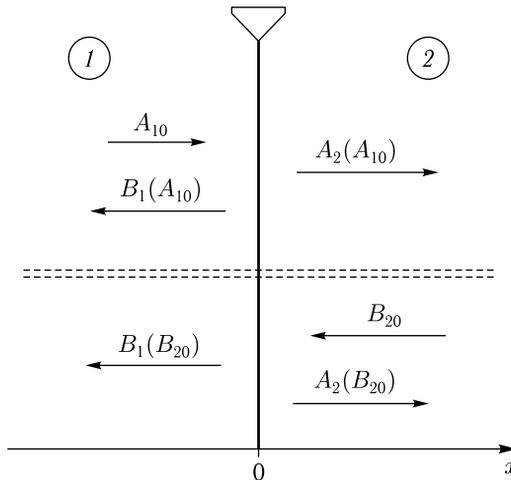


Рис. 4.1. Схема формирования коэффициентов выхода для двух сред, разделенных одной границей

Здесь изображены две среды, разделенные одной границей. Волны, распространяющиеся в положительном направлении оси Ox , обозначены буквами « A », в отрицательном — буквами « B ». На границу из среды 1 падает волна с амплитудой A_{10} . Эта волна порождает две волны: отраженную в среду 1 с амплитудой $B_1(A_{10})$ и проходящую в среду 2 с амплитудой $A_2(A_{10})$. Из среды 2 в отрицательном направлении оси Ox падает встречная волна с амплитудой B_{20} , которая также порождает две волны: отраженную в среду 2 с амплитудой $A_2(B_{20})$ и проходящую в среду 1 с амплитудой $B_1(B_{20})$. Таким образом, в среде 1, кроме волны A_{10} , распространяющейся в положительном направлении, присутствуют две волны $B_1(A_{10})$ и $B_1(B_{20})$, распространяющиеся в отрицательном направлении.

Беря отношение потоков энергии в положительном и отрицательном направлениях, получаем обобщенный коэффициент выхода в первую среду в виде:

$$P_1 = \frac{|B_1(A_{10})|^2}{|A_{10}|^2} + \frac{|B_1(B_{20})|^2}{|B_{20}|^2} \operatorname{Re} \left(\frac{k_1}{k_2} \right). \quad (4.12)$$

Видно, что этот коэффициент представляет собой сумму коэффициента отражения волны из первой среды обратно в первую и коэффициента прохождения волны из второй среды в первую.

Аналогичным образом получаем коэффициент выхода во вторую среду в виде:

$$P_2 = \frac{|A_2(A_{10})|^2}{|A_{10}|^2} \operatorname{Re} \left(\frac{k_1}{k_2} \right) + \frac{A_2(B_{20})}{|B_{20}|^2}. \quad (4.13)$$

Видно, что этот коэффициент представляет собой сумму коэффициента прохождения волны из первой среды во вторую и коэффициента отражения волны из второй среды обратно во вторую.

Приведенная схема формирования обобщенных коэффициентов выхода для случая двух сред, разделенных одной границей, аналогичным образом может быть обобщена на произвольное число сред, в том числе для электромагнитных волн. Такое упражнение авторы также предоставляют любознательному читателю.

4.2. Некоторые численные примеры расчета коэффициентов отражения и прохождения

Приведем некоторые численные примеры расчета коэффициентов отражения и прохождения при наклонном падении электромагнитной волны на многослойную структуру. Будем пользоваться описанным в предыдущей главе аппаратом прямого метода. Ограничимся наиболее простым случаем трех сред. Такое рассмотрение позволит выявить основные закономерности отражения и прохождения волны через структуру, которые в случае большего числа сред будут в основном сохраняться. Некоторые результаты для трех сред в более подробном виде приведены в статье [57]. Для рассмотрения более сложных случаев читатель может обратиться к монографиям [47, с. 90–115], [48, с. 91–117]. Сначала рассмотрим случай продольной поляризации падающей волны, а затем обратимся к поперечной.

4.2.1. Амплитуды волн при продольной поляризации

Сначала рассмотрим наклонное падение волны продольной поляризации на структуру из трех сред, геометрия задачи для которого приведена на рис. 4.2.

Будем использовать обозначения полей и индексов — те же, что на рис. 3.8. Поляризацию всех волн положим продольной. При этом векторы электрических полей всех волн — падающей \mathbf{E}_i , отраженной \mathbf{E}_r ,

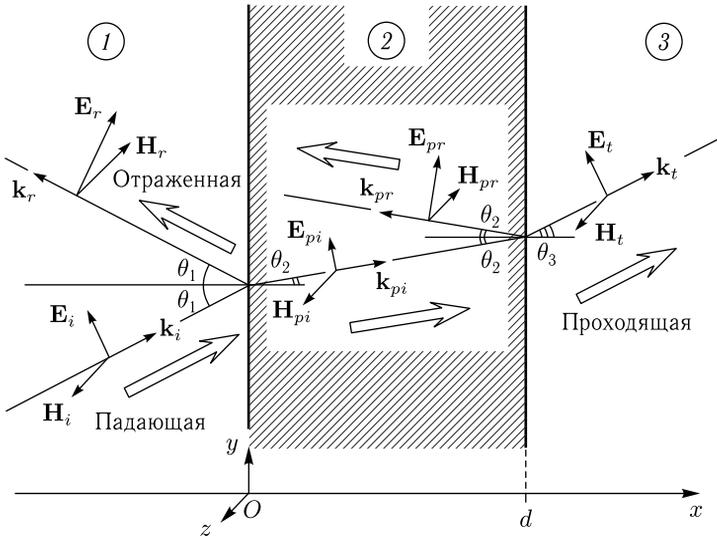


Рис. 4.2. Геометрия задачи о наклонном падении электромагнитной волны продольной поляризации на структуру из трех сред

проходящей \mathbf{E}_t , а также внутренних волн обоих направлений \mathbf{E}_{pi} и \mathbf{E}_{pr} лежат в плоскости Oxy , а векторы магнитных полей тех же волн \mathbf{H}_i , \mathbf{H}_r , \mathbf{H}_t , \mathbf{H}_{pi} , \mathbf{H}_{pr} ориентированы вдоль оси Oz .

Из первой среды падает электромагнитная волна с волновым вектором \mathbf{k}_i . Падение полагаем наклонным, определяемым углом падения θ_1 . При этом, в силу равенства параметров первой и третьей сред, на выходе из второй среды, то есть в третьей среде, угол наклона волны будет тем же самым, равным θ_1 , а внутри второй среды угол θ_2 будет определяться законом преломления Снеллиуса [2, с. 63, форм. (6), (8)], то есть формулой (3.330):

$$\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1}}{k_2}. \quad (4.14)$$

Для волновых чисел и импедансов используем стандартные выражения (1.253) и (1.258):

$$k_{1,2,3} = \omega \sqrt{\varepsilon_{1,2,3} \varepsilon_0 \mu_{1,2,3} \mu_0}; \quad (4.15)$$

$$Z_{1,2,3} = \sqrt{\frac{\mu_{1,2,3} \mu_0}{\varepsilon_{1,2,3} \varepsilon_0}}. \quad (4.16)$$

Амплитуды распространяющихся волн приведены в разделе 3.2.7 и определяются формулами (3.364)–(3.367). Будем рассматривать коэффициенты отражения и прохождения по энергиям, которые определяются формулами (4.3)–(4.4).

Для простоты, параметры первой и третьей сред положим равными друг другу, то есть

$$Z_3 = Z_1; \quad (4.17)$$

$$\theta_3 = \theta_1, \quad (4.18)$$

а также

$$\cos \theta_3 = \cos \theta_1. \quad (4.19)$$

При этом, в соответствии с (3.364), (3.367), амплитуды отраженной и проходящей волн принимают вид:

$$B = \frac{-(Z_{1p}^2 - Z_{2p}^2)(e^{ik_{2p}d} - e^{-ik_{2p}d})}{(Z_{1p} + Z_{2p})^2 e^{ik_{2p}d} - (Z_{1p} - Z_{2p})^2 e^{-ik_{2p}d}} A; \quad (4.20)$$

$$E = \frac{4Z_{1p}Z_{2p}}{(Z_{1p} + Z_{2p})^2 e^{ik_{2p}d} - (Z_{1p} - Z_{2p})^2 e^{-ik_{2p}d}} A, \quad (4.21)$$

где

$$Z_{1p,2p} = Z_{1,2} \cos \theta_{1,2}; \quad (4.22)$$

$$k_{2p} = k_2 \cos \theta_2, \quad (4.23)$$

а угол θ_2 связан с углом θ_1 соотношением (4.14).

Таким образом, в соответствии с (4.3) и (4.4) получаем коэффициенты отражения и прохождения в виде:

$$R_e = \left| \frac{-(Z_{1p}^2 - Z_{2p}^2)(e^{ik_{2p}d} - e^{-ik_{2p}d})}{(Z_{1p} + Z_{2p})^2 e^{ik_{2p}d} - (Z_{1p} - Z_{2p})^2 e^{-ik_{2p}d}} \right|^2; \quad (4.24)$$

$$T_e = \left| \frac{4Z_{1p}Z_{2p}}{(Z_{1p} + Z_{2p})^2 e^{ik_{2p}d} - (Z_{1p} - Z_{2p})^2 e^{-ik_{2p}d}} \right|^2. \quad (4.25)$$

Запись полученных выражений непосредственно через проницаемости сред и углы падения и преломления получается довольно громоздкой, поэтому приведем ее в сокращенном виде с помощью вспомогательных обозначений. Так, числитель дроби, входящей в (4.24), с учетом (4.22), (4.23), равен:

$$G_1 = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} (\varepsilon_2 \mu_1 \cos^2 \theta_1 - \varepsilon_1 \mu_2 \cos^2 \theta_2) \times \\ \times (e^{ik_2 d \cos \theta_2} - e^{-ik_2 d \cos \theta_2}), \quad (4.26)$$

а знаменатель той же дроби равен

$$G_2 = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} (B_1 - B_2), \quad (4.27)$$

где

$$B_1 = (\mu_1 \varepsilon_2 \cos^2 \vartheta_1 + \mu_2 \varepsilon_1 \cos^2 \vartheta_2 + 2\mu_1 \mu_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2) e^{ik_2 d \cos \theta_2}; \quad (4.28)$$

$$B_2 = (\mu_1 \varepsilon_2 \cos^2 \vartheta_1 + \mu_2 \varepsilon_1 \cos^2 \vartheta_2 - 2\mu_1 \mu_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2) e^{-ik_2 d \cos \theta_2}. \quad (4.29)$$

Так что коэффициент отражения (4.24) принимает вид:

$$R_e = \left| \frac{G_1}{G_2} \right|^2. \quad (4.30)$$

Соответственно числитель дроби, входящей в (4.25), равен:

$$H = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} \cos \theta_1 \cos \theta_2, \quad (4.31)$$

так что коэффициент прохождения (4.25) с учетом (4.27) принимает вид:

$$T_e = \left| \frac{H}{G_2} \right|^2. \quad (4.32)$$

Замечание. Практика численных расчетов коэффициентов отражения и прохождения по приведенным формулам показывает, что более удобной последовательностью действий в плане вычислительного алгоритма является на использование конечных формул (4.26)–(4.32), а вычисление импедансов и волновых чисел по формулам (4.15), (4.16) и косинусов по формуле (4.14) с последующей их подстановкой непосредственно в формулы (4.24) и (4.25). Так что приведенные здесь формулы (4.26)–(4.32) можно рассматривать как не более чем вспомогательную иллюстрацию.

Обратимся теперь непосредственно к расчету зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от угла падения и параметров сред. Для простоты положим, что первая и третья среды являются свободными пространствами, то есть в них диэлектрическая и магнитная проницаемости равны единице, а проводимость отсутствует. Во второй среде на данном этапе магнитную проницаемость будем полагать равной единице, а диэлектрическую равной пяти. Вариации подвергнем толщину второй среды и угол падения волны на структуру, то есть θ_1 .

На рис. 4.3 приведены зависимости коэффициентов отражения (1) и прохождения (2) от нормированной на длину волны толщины центральной (второй) среды d при различных углах падения волны в первой среде θ_1 . Эпюры в левом столбце соответствуют среде, в которой проводимость отсутствует, так что свойства отражения и прохождения определяются только ее диэлектрической проницаемостью. Эпюры в правом столбце соответствуют среде, в которой диэлектрическая проницаемость остается той же самой, но присутствует еще определенная проводимость.

При построении рис. 4.3 выбраны три характерных значения угла падения θ_1 . Рассмотрим их несколько более подробно.

Случай $\theta_1 = 0$ (α , ε) соответствует нормальному падению волны на структуру. При этом энергия падающей волны целиком проникает во вторую среду, то есть процессы отражения и прохождения проявляются наиболее эффективным образом. Зависимости имеют осциллирующий характер, причем в отсутствие затухания (левый столбец) амплитуда

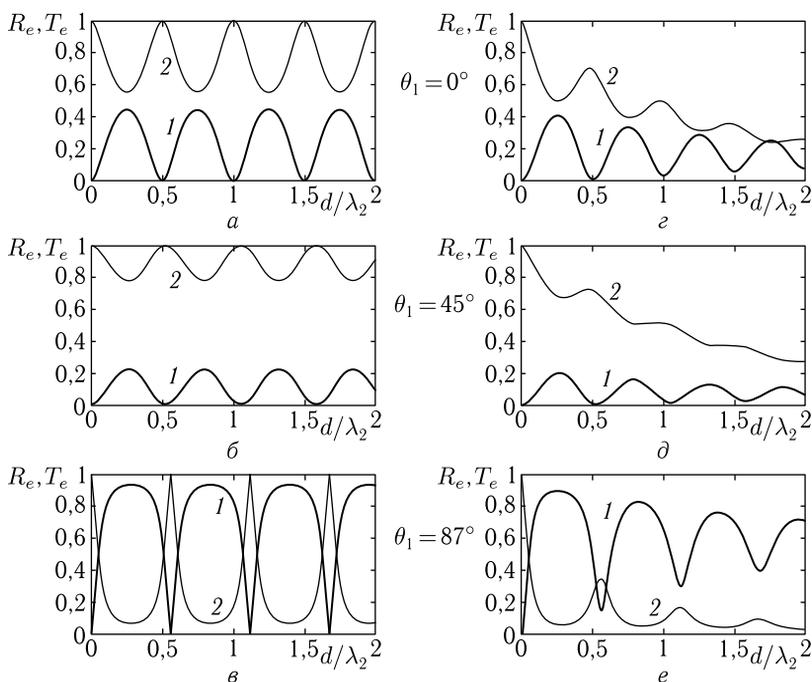


Рис. 4.3. Зависимости коэффициентов отражения (кривые 1) и прохождения (кривые 2) от нормированной толщины центральной (второй) среды d при различных углах падения волны в первой среде θ_1 ($a, г - 0^\circ$, $б, д - 45^\circ$, $в, е - 87^\circ$), в отсутствие проводимости ($a, б, в - \sigma_2 = 0$) и при ее наличии ($г, д, е - \sigma_2 = 0,4$ отн. ед.). Параметры: $\epsilon_{1,3} = 1$; $\mu_{1,3} = 1$; $\epsilon_2 = 5$; $\mu_2 = 1$; $\sigma_{1,3} = 0$. Частота: $\omega = 10^{11} \text{ с}^{-1}$, $f = 15,915 \text{ ГГц}$. Длина волны: $\lambda_{1,3} = 0,0188 \text{ м}$, $\lambda_2 = 0,0084 \text{ м}$

осцилляций сохраняется, а при наличии затухания (правый столбец) по мере увеличения толщины амплитуда осцилляций уменьшается. Первый максимум кривой 1 соответствует укладыванию по толщине второй среды четверти длины волны, первый минимум той же кривой — укладыванию половины длины волны. Далее чередование максимумов и минимумов повторяется. Расстояние между соседними максимумами или соседними минимумами равно половине длины волны. Такое распределение амплитуды аналогично установлению стоячих волн в длинной линии [141, с. 218–219, рис. 253].

Случай $\theta_1 = 87^\circ$ ($в, е$) близок к крайнему, соответствующему 90° , при котором волна просто скользит по поверхности структуры, не проникая в нее. При 87° проникновение есть. Почти все отражается (скользящее отражение). Прохождение мало, только при укладывании целой длины волны.

Случай $\theta_1 = 45^\circ$ (б, з) является промежуточным между нормальным ($\theta_1 = 0^\circ$) и скольльзящим ($\theta_1 = 90^\circ$) падением, так что кривые занимают промежуточное положение между кривыми для крайних случаев.

Из рис. 4.3, а, б, в, соответствующих отсутствию затухания, можно видеть, что амплитуда и конфигурация зависимостей как для коэффициента отражения (1), так и для коэффициента прохождения (2) при изменении толщины второй среды сохраняются постоянными. При этом кривые 2, соответствующие коэффициенту прохождения T , являются как бы «зеркальным отражением» кривых 1, соответствующих коэффициенту отражения R . Такое их соотношение отвечает закону сохранения энергии, согласно которому в отсутствие затухания должно быть (1.24), (2.84):

$$T_e + R_e = 1. \quad (4.33)$$

Из рис. 4.3, г, д, е, соответствующих присутствию проводимости во второй среде, видно, что по мере увеличения толщины амплитуда колебаний всех зависимостей постепенно убывает. Особенно сильно такое затухание проявляется для коэффициента прохождения (кривые 2). Периодичность сохраняется только при малом затухании. При проводимости σ_2 около 1 отн. ед. амплитуда колебаний коэффициента отражения уже резко падает, отражение стремится к малой постоянной величине (около 0,59 отн. ед.), а прохождение — к нулю.

Для характеристики такого затухания, исходя из требования сохранения энергии, можно ввести коэффициент поглощения A , такой, чтобы сумма коэффициентов отражения, прохождения и поглощения равнялась единице:

$$T_e + R_e + A_e = 1, \quad (4.34)$$

так что коэффициент поглощения получается равным

$$A_e = 1 - T_e - R_e. \quad (4.35)$$

Таким образом, при большой проводимости прохождение равно нулю, отражение все же может иметь какую-то небольшую величину, а поглощение равно падающей энергии минус отражение.

4.2.2. Коэффициенты отражения и прохождения при продольной поляризации

Из сопоставления амплитуд кривых для коэффициента отражения (кривые 1) на эпюрах левого столбца рис. 4.3 можно видеть, что при переходе от угла падения 0° к 45° (от «а» к «б») амплитуда осцилляций падает, а далее при переходе от угла 45° к углу 87° (от «б» к «в») снова увеличивается. По коэффициенту прохождения (кривые 2) наблюдается та же картина в зеркальном отражении. Такой характер изменения амплитуды осцилляций, то есть сначала уменьшение, затем увеличение, ставит вопрос о непрерывном характере зависимости коэффициентов отражения и прохождения от угла падения.

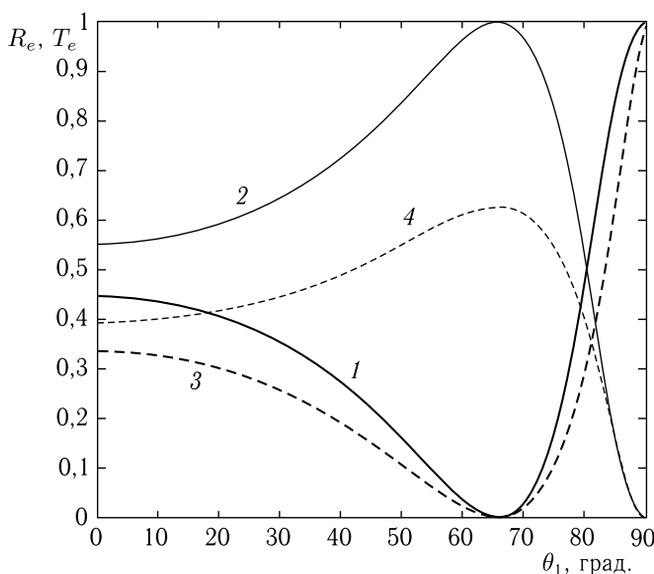


Рис. 4.4. Зависимости коэффициентов отражения (кривые 1, 3) и прохождения (кривые 2, 4) от угла падения волны в первой среде в отсутствие проводимости (кривые 1, 2 — $\sigma = 0$) и при ее наличии (кривые 3, 4 — $\sigma = 0,4$ отн. ед.). Нормированная толщина второй среды — $d/\lambda_2 = 0,75$ отн. ед. Остальные параметры — те же, что на рис. 4.3

На этот вопрос отвечает рис. 4.4, где приведены зависимости коэффициентов отражения и прохождения от угла падения волны в первой среде в отсутствие проводимости (сплошные кривые) и при ее наличии (пунктирные кривые). Нормированная толщина второй среды выбрана соответствующей второму максимуму кривых 1 на рис. 4.3.

Из рисунка видно, что кривые по отражению (1, 3) по мере увеличения угла падения сначала падают, достигая нуля вблизи 66° , после чего, пройдя через минимум, резко возрастают, достигая при 90° единицы. Кривые по прохождению (2, 4) имеют вид зеркального отражения, однако в случае затухания (кривые 3, 4) проходят несколько ниже кривых в его отсутствие (2, 4).

Характерным свойством кривых для отражения является минимум, приходящийся на угол Брюстера [4, с. 477—482]. Рассмотрим минимизацию отражения при угле Брюстера несколько более подробно.

4.2.3. Обращение в нуль коэффициента отражения при угле Брюстера

Обращение в нуль коэффициента отражения соответствует обращению в нуль амплитуды отраженной волны. Рассмотрим такое явление для случаев двух и трех сред.

Две среды, разделенные одной границей

В предыдущем разделе показано, что в случае наклонного падения электромагнитной волны продольной поляризации на плоскую границу раздела двух сред при определенном угле падения амплитуда отраженной волны падает до нуля. Классическая трактовка этого явления носит название «закона Брюстера», а угол, при котором амплитуда отраженной волны равняется нулю, называется «углом Брюстера» [4, с. 477].

В свете изложенного в предыдущих разделах, рассмотрим минимизацию отражения при угле Брюстера несколько более подробно.

В соответствии с классическими представлениями, обращение в нуль отражения происходит при наклонном падении волны продольной поляризации на единственную границу, разделяющую две среды. Согласно данным, полученным в разделе 2.2.6, амплитуда электрического поля отраженной волны в этом случае имеет вид (2.130):

$$E_{r0} = \frac{-Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2} E_{i0}, \quad (4.36)$$

где для удобства рассмотрения индексы «*i*» и «*t*» заменены на «1» и «2» соответственно.

Обращение в нуль отражения соответствует равенству нулю числителя этого выражения, то есть должно быть:

$$-Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2 = 0. \quad (4.37)$$

Запишем это выражение через параметры материала первой и второй сред $\varepsilon_{1,2}$, $\mu_{1,2}$. Прежде всего учтем, что, согласно (1.434), импедансы $Z_{1,2}$ имеют вид:

$$Z_{1,2} = \sqrt{\frac{\mu_{1,2}\mu_0}{\varepsilon_{1,2}\varepsilon_0}}, \quad (4.38)$$

а угол преломления θ_2 связан с углом падения θ_1 и волновыми числами волн в первой и второй средах $k_{1,2}$ законом Снеллиуса (2.88), (3.330)

$$\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1}}{k_2}, \quad (4.39)$$

в котором волновые числа связаны с параметрами материала соотношением

$$k_{1,2} = \omega \sqrt{\varepsilon_{1,2}\varepsilon_0\mu_{1,2}\mu_0}. \quad (4.40)$$

Подставляя (4.38)–(4.40) в (4.37), получаем условие обращения амплитуды отраженной волны в нуль в виде:

$$\varepsilon_1\mu_2 \cos^2 \theta_2 - \varepsilon_2\mu_1 \cos^2 \theta_1 = 0. \quad (4.41)$$

Выражая из этого соотношения θ_1 , получаем угол Брюстера, выраженный через параметры материала первой и второй сред:

$$\theta_B = \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon_2(\varepsilon_1\mu_2 - \varepsilon_2\mu_1)}{\mu_1(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)}}. \quad (4.42)$$

Например, при принятых при построении рис. 4.4 параметрах, то есть $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 5$, получаем: $\theta_B = 65,9052$ градусов.

В случае поперечной поляризации, согласно данным, полученным в разделе 2.2.7, амплитуда отраженной волны в этом случае имеет вид (2.160):

$$E_{r0} = \frac{-Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1}{Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1} E_{i0}. \quad (4.43)$$

Обращение в нуль отражения соответствует равенству нулю числителя этого выражения, то есть должно быть:

$$-Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1 = 0. \quad (4.44)$$

Выполняя те же действия, что при получении выражения (4.42), приходим к соотношению:

$$\theta_B = \arcsin \sqrt{\frac{\mu_2(\varepsilon_2\mu_1 - \varepsilon_1\mu_2)}{\varepsilon_1(\mu_1^2 - \mu_2^2)}}. \quad (4.45)$$

В классической оптике магнитные проницаемости обеих сред обычно полагаются равными единице, так что выражение (4.45) является расходящимся. Этим объясняется наблюдаемое в классических экспериментах [2, 4] отсутствие обращения отражения в нуль при поперечной поляризации. Более того, явление Брюстера служит основой для выделения из луча естественного света составляющей, имеющей единственную, именно продольную поляризацию [4, с. 479–482],

Замечание. Заметим однако, что при падении света на среду, обладающую магнитной проницаемостью, отличной от единицы на частоте падающего света, обращение отражения в нуль возможно и при поперечной поляризации падающей волны, как это следует из соотношения (4.45) при $\mu_1 \neq \mu_2$. К таким средам относятся, например, ферриты, магнитная проницаемость которых может быть весьма высокой на частотах, соответствующих ферромагнитному резонансу [16–18, 22–25], то есть в диапазоне электромагнитных волн сверхвысоких частот. Достаточно подробное рассмотрение отражения электромагнитных волн в условиях наклонного падения в известной авторам литературе отсутствует. Некоторые особенности обращения в нуль отражения от магнитных сред рассмотрены в работе [63]. Более подробное исследование этого вопроса авторы предоставляют любознательному читателю.

Три среды, разделенные двумя границами

Рассмотрим теперь более общую задачу о наклонном падении волны продольной поляризации на структуру из трех сред, разделенных двумя границами.

Воспользуемся решением для амплитуды отраженной волны продольной поляризации от структуры из трех сред (3.364), полученным в разделе 3.2.7:

$$B = -\frac{(Z_{1p} - Z_{2p})(Z_{2p} + Z_{3p})e^{ik_{2p}d} + (Z_{1p} + Z_{2p})(Z_{2p} - Z_{3p})e^{-ik_{2p}d}}{(Z_{1p} + Z_{2p})(Z_{2p} + Z_{3p})e^{ik_{2p}d} + (Z_{1p} - Z_{2p})(Z_{2p} - Z_{3p})e^{-ik_{2p}d}} A, \quad (4.46)$$

где импедансы, с учетом углов падения, имеют вид (3.357)–(3.359)

$$Z_{1p} = Z_1 \cos \theta_1; \quad (4.47)$$

$$Z_{2p} = Z_2 \cos \theta_2; \quad (4.48)$$

$$Z_{3p} = Z_3 \cos \theta_3, \quad (4.49)$$

причем

$$Z_{1,2,3} = \sqrt{\frac{\mu_{1,2,4}\mu_0}{\varepsilon_{1,2,3}\varepsilon_0}}, \quad (4.50)$$

а углы θ_2 и θ_3 связаны с углом падения θ_1 и друг с другом соотношениями Снеллиуса (2.89), (3.330), (3.331)

$$\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1}}{k_2}, \quad (4.51)$$

$$\cos \theta_3 = \frac{\sqrt{k_3^2 - k_2^2 \sin^2 \theta_2}}{k_3}, \quad (4.52)$$

волновые числа в которых, в соответствии с (3.332), равны

$$k_{1,2,3} = \omega \sqrt{\varepsilon_{1,2,3}\varepsilon_0\mu_{1,2,3}\mu_0}. \quad (4.53)$$

Обращение амплитуды отраженной волны B в нуль соответствует обращению в нуль числителя дроби (4.46), то есть условию

$$(Z_{1p} - Z_{2p})(Z_{2p} + Z_{3p})e^{ik_{2p}d} + (Z_{1p} + Z_{2p})(Z_{2p} - Z_{3p})e^{-ik_{2p}d} = 0. \quad (4.54)$$

Вынося за скобку $e^{ik_{2p}d}$ и вводя обозначение

$$e_{p2} = e^{-ik_{2p}d}, \quad (4.55)$$

после чего, сокращая полученное выражение на $e^{ik_{2p}d}$, а также используя (4.47)–(4.49), приводим (4.54) к виду:

$$(Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) + (Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3)e_{p2}^2 = 0. \quad (4.56)$$

Полагаем параметры первой и третьей сред равными:

$$Z_3 = Z_1; \quad (4.57)$$

$$\theta_3 = \theta_1, \quad (4.58)$$

после чего, разделяя полученное соотношение на все отличные от нуля множители, преобразуем условие обращения амплитуды отраженной волны в нуль к виду

$$Z_1^2 \cos^2 \theta_1 - Z_2^2 \cos^2 \theta_2 = 0. \quad (4.59)$$

Подставляя (4.50) в (4.59), получаем условие обращения амплитуды отраженной волны в нуль в виде

$$\varepsilon_1 \mu_2 \cos^2 \theta_2 - \varepsilon_2 \mu_1 \cos^2 \theta_1 = 0. \quad (4.60)$$

Как видим, это условие полностью тождественно (4.41), так что угол Брюстера определяется тем же выражением (4.42). Это обстоятельство свидетельствует в пользу положения о том, что явление Брюстера при падении волны на слой конечной толщины с выходом в ту же среду определяется свойствами только этого слоя.

Замечание. Заметим однако, что выражение (4.60) получено в предположении равенства параметров первой и третьей сред (4.57)–(4.58). Если эти параметры различаются, то в обращении в нуль выражения (4.56) могут участвовать параметры также третьей среды. В классической оптике параметры первой и третьей сред полагаются равными (как правило, это — свободное пространство), поэтому в законе Брюстера участвует единственное условие (4.59). Однако в случае отличия параметров третьей среды от параметров первой, для анализа обращения в нуль амплитуды отраженной волны следует учитывать полное условие (4.56), которое содержит экспоненциальный множитель e_{p2}^2 , определяемый выражением (4.55), так что отражение может приобрести осциллирующий характер, зависящий от длины волны во второй среде. Более подробное рассмотрение этого вопроса авторы предоставляют любознательному читателю.

Сравнение выражения для угла Брюстера с классическим

Классическое выражение, традиционно используемое в оптике [4, с. 477, форм. (135.14)], [2, с. 68, форм. (39)],

$$\varphi_B = \arctg \frac{n_2}{n_1}, \quad (4.61)$$

где $n_{1,2}$ — показатели преломления первой и второй сред соответственно, откуда следует

$$\tg \varphi_B = \frac{n_2}{n_1}. \quad (4.62)$$

Классическое выражения для коэффициента преломления имеет вид (1.428) [2, с. 37, форм. (14)]:

$$n = \sqrt{\varepsilon \mu}. \quad (4.63)$$

Подставляя

$$n_{1,2} = \sqrt{\varepsilon_{1,2}\mu_{1,2}} \quad (4.64)$$

в (4.62) и используя тригонометрическую формулу

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad (4.65)$$

получаем

$$\sin \varphi_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1 + \varepsilon_2 \mu_2}}. \quad (4.66)$$

В оптике обычно рассматривается случай $\mu_1 = \mu_2 = 1$. При этом из (4.66) получаем:

$$\varphi_B = \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}. \quad (4.67)$$

С другой стороны, полагая в (4.42) $\mu_1 = \mu_2 = 1$, получаем:

$$\theta_B = \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}, \quad (4.68)$$

то есть то же выражение, что и классическое (4.67).

Соотношение между углами падения и прохождения при падении волны под углом Брюстера

Выше получено, что условием обращения в нуль коэффициента отражения является падение волны под углом Брюстера (формула (4.42)):

$$\theta_{1B} = \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon_2(\varepsilon_1 \mu_2 - \varepsilon_2 \mu_1)}{\mu_1(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)}}. \quad (4.69)$$

Здесь введен индекс «1», чтобы подчеркнуть, что волна падает из первой среды.

Найдем угол прохождения θ_{2B} , соответствующий углу падения θ_{1B} , для чего подставим (4.42) в (4.39). В результате получаем:

$$\theta_{2B} = \arccos \sqrt{\frac{\varepsilon_2(\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2)}{\mu_2(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)}}. \quad (4.70)$$

Из (4.69) и (4.70) получаем соотношение между θ_{1B} и θ_{2B} :

$$\frac{\sin \theta_{1B}}{\cos \theta_{2B}} = \sqrt{\frac{\mu_2(\varepsilon_1 \mu_2 - \varepsilon_2 \mu_1)}{\mu_1(\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2)}}. \quad (4.71)$$

Переход к классике

При $\mu_1 = \mu_2 = 1$ из (4.71) получаем:

$$\frac{\sin \theta_{1B}}{\cos \theta_{2B}} = 1. \quad (4.72)$$

откуда, учитывая, что

$$\cos \theta_{2B} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{2B} \right), \quad (4.73)$$

получаем классическое соотношение

$$\theta_{1B} + \theta_{2B} = \frac{\pi}{2}, \quad (4.74)$$

то есть сумма углов падения и преломления при падении волны под углом Брюстера равна 90 градусам [4, с. 481, рис. 23.4].

4.2.4. Большая толщина второй среды при продольной поляризации

Проведенное выше рассмотрение (рис. 4.3, рис. 4.4) выполнено для случая, когда по толщине второй среды укладывается лишь небольшое число длин волн. Так, рис. 4.3 охватывает лишь две нормированных длины волны d/λ_2 , а рис. 4.4 построен при нормированной толщине второй среды $-d/\lambda_2 = 0,75$ отн. ед. Рассмотрим теперь случай, когда по толщине второй среды укладывается достаточно большое число длин волн. При этом реальная толщина пластины d должна превышать нормированную d/λ_2 в несколько раз. Для простоты будем полагать диссипацию отсутствующей, так что волна при многократных повторных отражениях между границами не затухает.

На рис. 4.5 показаны зависимости коэффициентов отражения (1) и прохождения (2) от угла падения волны в первой среде в отсутствие

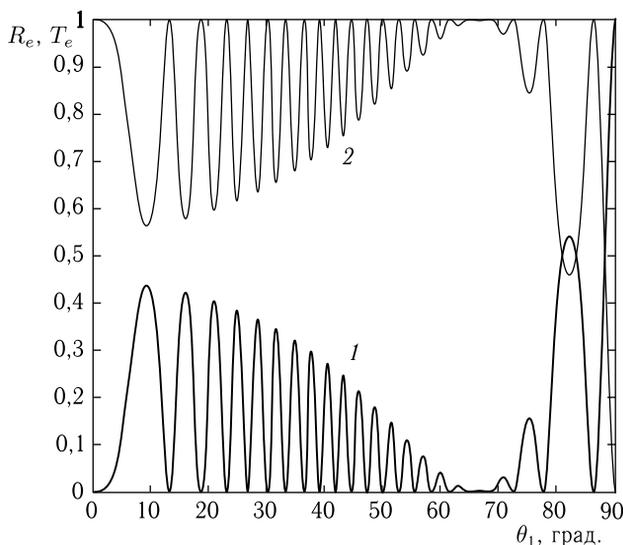


Рис. 4.5. Зависимости коэффициентов отражения (1) и прохождения (2) от угла падения волны в первой среде в отсутствие проводимости ($\sigma = 0$) при большой толщине центральной (второй) среды: $d/\lambda_2 = 100$ отн. ед. Остальные параметры — те же, что на рис. 4.4

проводимости ($\sigma = 0$) при большой толщине центральной (второй) среды: $d/\lambda_2 = 100$ отн. ед.

Из рисунка видно, что оба коэффициента относительно изменения угла падения имеют осциллирующий характер. Проверка показывает, что при увеличении толщины второй среды период осцилляций уменьшается. Кривая 2 для коэффициента прохождения по-прежнему является зеркальным отражением кривой 1 для коэффициента отражения.

Огибающая зависимости для коэффициента отражения имеет четко выраженный минимум около 66 градусов, соответствующий углу Брюстера, Огибающая для коэффициента прохождения при этом имеет максимум. Сумма значений коэффициентов для обеих кривых при любом значении угла θ_1 всегда равна единице в соответствии с соотношением (4.33). Введение затухания во второй среде приводит к такому же изменению огибающих кривых, как на рис. 4.4 (кривые 3 и 4).

4.2.5. Амплитуды волн при поперечной поляризации

Теперь рассмотрим наклонное падение волны поперечной поляризации на структуру из трех сред, геометрия задачи для которого приведена на рис. 4.6.

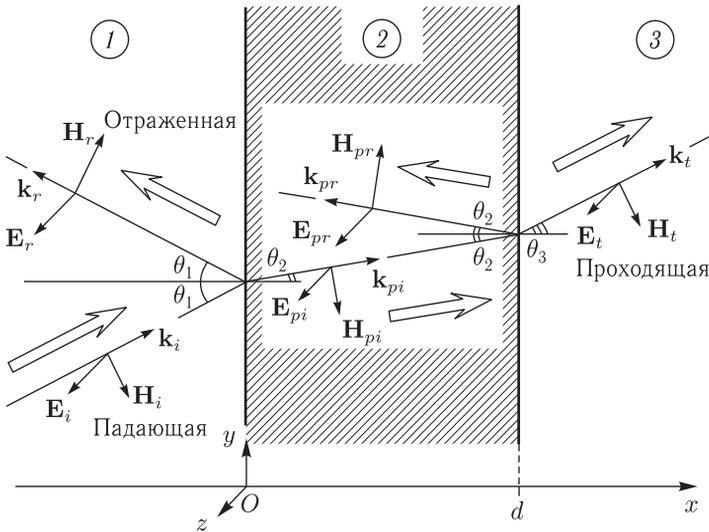


Рис. 4.6. Геометрия задачи о наклонном падении электромагнитной волны поперечной поляризации на структуру из трех сред

Будем использовать обозначения полей и индексов те же, что на рис. 3.8 и рис. 4.2. Поляризацию всех волн положим продольной. При этом векторы электрических полей всех волн — падающей E_i , отраженной E_r , проходящей E_t , а также внутренних волн обоих направ-

лений \mathbf{E}_{pi} и \mathbf{E}_{pr} ориентированы вдоль оси Oz , а векторы магнитных полей тех же волн $\mathbf{H}_i, \mathbf{H}_r, \mathbf{H}_t, \mathbf{H}_{pi}, \mathbf{H}_{pr}$ лежат в плоскости Oxy .

Из первой среды падает электромагнитная волна с волновым вектором \mathbf{k}_i . Падение полагаем наклонным, определяемым углом падения θ_1 . При этом, в силу равенства параметров первой и третьей сред, на выходе из второй среды, то есть в третьей среде угол наклона волны будет тем же самым, равным θ_1 , а внутри второй среды угол θ_2 будет определяться законом преломления Снеллиуса [2, с. 63, форм. (6), (8)], то есть формулой (3.330):

$$\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1}}{k_2}. \quad (4.75)$$

Для волновых чисел и импедансов используем стандартные выражения (1.253) и (1.258):

$$k_{1,2,3} = \omega \sqrt{\varepsilon_{1,2,3} \mu_{1,2,3} \mu_0}; \quad (4.76)$$

$$Z_{1,2,3} = \sqrt{\frac{\mu_{1,2,3} \mu_0}{\varepsilon_{1,2,2} \varepsilon_0}}. \quad (4.77)$$

Амплитуды распространяющихся волн приведены в разделе 3.2.9 и определяются формулами (3.404)–(3.408). Будем рассматривать коэффициенты отражения и прохождения по энергиям, которые определяются формулами (4.3)–(4.4).

Для простоты, в качестве первой и третьей сред положим свободное пространство, Дополнительно, также для простоты, параметры первой и третьей сред положим равными друг другу, то есть

$$Z_3 = Z_1; \quad (4.78)$$

$$\theta_3 = \theta_1, \quad (4.79)$$

а также

$$\cos \theta_3 = \cos \theta_1. \quad (4.80)$$

При этом, в соответствии с (3.404), (3.408), амплитуды отраженной и проходящей волн принимают вид:

$$B = \frac{-(Z_{1s}^2 - Z_{2s}^2)(e^{ik_{2s}d} - e^{-ik_{2s}d})}{(Z_{1s} + Z_{2s})^2 e^{ik_{2s}d} - (Z_{1s} - Z_{2s})^2 e^{-ik_{2s}d}} A; \quad (4.81)$$

$$E = \frac{4Z_{1s}Z_{2s}}{(Z_{1s} + Z_{2s})^2 e^{ik_{2s}d} - (Z_{1s} - Z_{2s})^2 e^{-ik_{2s}d}} A, \quad (4.82)$$

где

$$Z_{1s,2s} = \frac{Z_{1,2}}{\cos \theta_{1,2}}; \quad (4.83)$$

$$k_{2s} = k_2 \cos \theta_2. \quad (4.84)$$

4.2.6. Коэффициенты отражения и прохождения при поперечной поляризации

Используя (4.81)–(4.84), в соответствии с (4.3) и (4.4) получаем коэффициенты отражения и прохождения в виде:

$$R_e = \left| \frac{-(Z_{1s}^2 - Z_{2s}^2)(e^{ik_{2s}d} - e^{-ik_{2s}d})}{(Z_{1s} + Z_{2s})^2 e^{ik_{2s}d} - (Z_{1s} - Z_{2s})^2 e^{-ik_{2s}d}} \right|^2; \quad (4.85)$$

$$T_e = \left| \frac{4Z_{1s}Z_{2s}}{(Z_{1s} + Z_{2s})^2 e^{ik_{2s}d} - (Z_{1s} - Z_{2s})^2 e^{-ik_{2s}d}} \right|^2. \quad (4.86)$$

Можно видеть, что формулы (4.81), (4.82), а также (4.85), (4.86) по структуре совпадают с (4.20), (4.21) и (4.24), (4.25) с заменой индекса «*p*» на индекс «*s*», волновые числа (4.84) и (4.23) полностью совпадают, а импедансы (4.83), в отличие от (4.22), содержат косинус вместо числителя в знаменателе.

При этом выражение коэффициентов (4.85), (4.86) через проницаемости материалов сред, подобно (4.26)–(4.32), также вполне осуществимо, однако получаются довольно громоздким, поэтому авторы предоставляют такое упражнение любознательному читателю.

С точки зрения машинного алгоритмирования здесь также удобнее сначала вычислить импедансы, после чего воспользоваться непосредственно выражениями (4.85) и (4.86).

Обратимся теперь непосредственно к расчету зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от угла падения и параметров сред. Для простоты положим, что первая и третья среды являются свободными пространствами, то есть в них диэлектрическая и магнитная проницаемости равны единице, а проводимость отсутствует. Во второй среде на данном этапе магнитную проницаемость будем полагать равной единице, а диэлектрическую равной пяти. Вариации подвергнем толщину второй среды и угол падения волны на структуру, то есть θ_1 .

Общий характер зависимостей амплитуд осцилляций коэффициентов отражения и прохождения от толщины второй среды, в том числе с учетом затухания, подобен таковому, приведенному на рис. 4.4, поэтому подробно останавливаться на нем не будем. В то же время, зависимости коэффициентов отражения и прохождения от угла падения волны в первой среде здесь значительным образом отличаются от таковых в случае продольной поляризации.

Обратимся к рис. 4.7, где приведены зависимости коэффициентов отражения и прохождения от угла падения волны в первой среде в отсутствие проводимости (сплошные кривые) и при ее наличии (пунктирные кривые). Нормированная толщина второй среды выбрана соответствующей второму максимуму кривых *I* на рис. 4.3.

Из рисунка видно, что кривые по отражению (1, 3) по мере увеличения угла падения, начиная с $\theta_1 = 0$, все время вплоть до $\theta_1 = 90^\circ$, монотонно возрастают, а кривые по прохождению (2, 4), соответственно,

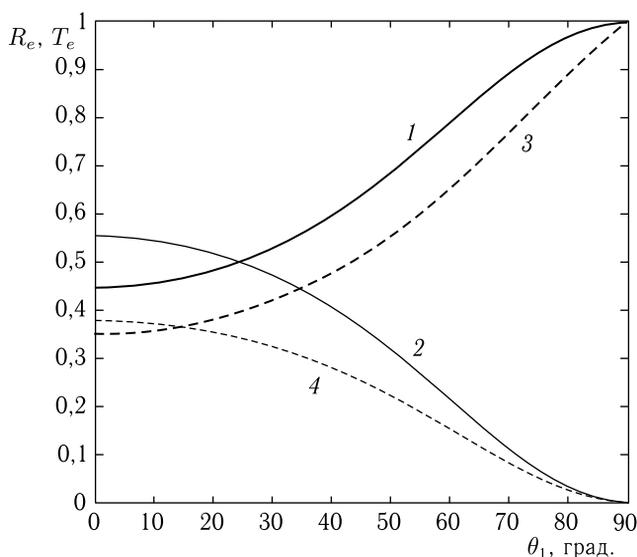


Рис. 4.7. Зависимости коэффициентов отражения (кривые 1, 3) и прохождения (кривые 2, 4) от угла падения волны в первой среде в отсутствие проводимости (кривые 1, 2 — $\sigma = 0$) и при ее наличии (кривые 3, 4 — $\sigma = 0,4$ отн. ед.). Нормированная толщина второй среды — $d/\lambda_2 = 0,75$ отн. ед. Остальные параметры — те же, что на рис. 4.4

падают. Провал на кривых отражения и максимум на кривых прохождения полностью отсутствуют. Кривые с учетом затухания (3, 4) ведут себя полностью подобно кривым без затухания (1, 2), проходя лишь на несколько более низком уровне. Таким образом, можно считать, что при поперечной поляризации явление Брюстера полностью отсутствует, как это и следует из классических представлений [4, с. 478, рис. 23.2].

4.2.7. Большая толщина второй среды при поперечной поляризации

Проведенное выше рассмотрение (рис. 4.7) выполнено для случая, когда по толщине второй среды укладывается лишь небольшое число длин волн. Рассмотрим теперь случай, когда по толщине второй среды укладывается достаточно большое число длин волн. При этом для проявления интерференционных явлений реальная толщина пластины d должна превышать нормированную d/λ_2 в несколько раз. Для простоты будем полагать диссипацию отсутствующей, так что волна при многократных повторных отражениях между границами не затухает.

На рис. 4.8 показаны зависимости коэффициентов отражения (1) и прохождения (2) от угла падения волны в первой среде в отсутствие проводимости ($\sigma = 0$) при большой толщине центральной (второй) среды: $d/\lambda_2 = 100$ отн. ед.

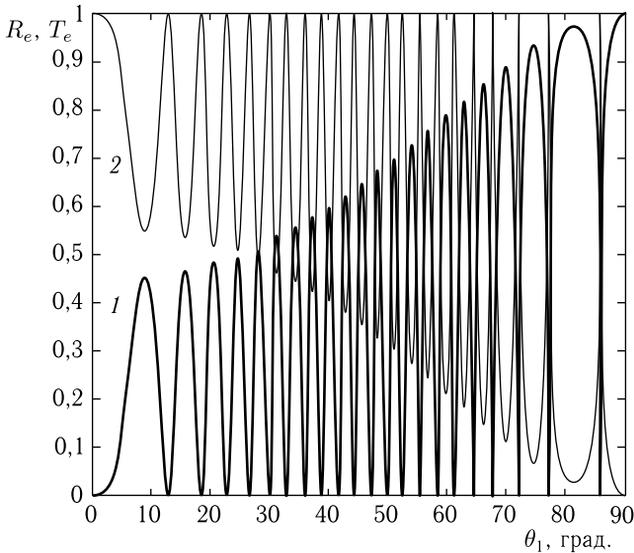


Рис. 4.8. Зависимости коэффициентов отражения (1) и прохождения (2) от угла падения волны в первой среде в отсутствие проводимости ($\sigma = 0$) при большой толщине центральной (второй) среды: $d/\lambda_2 = 100$ отн. ед. Остальные параметры — те же, что на рис. 4.7

Из рисунка видно, что осциллирующий характер обеих зависимостей аналогичен таковому на рис. 4.5, однако теперь огибающая осцилляций для коэффициента отражения плавно возрастает, а для коэффициента прохождения плавно снижается. То есть по огибающим обе зависимости ведут себя подобно приведенным на рис. 4.7, всего лишь с учетом осциллирующего характера. Таким образом, можно видеть, что и при большой толщине в случае поперечной поляризации явление Брюстера полностью отсутствует.

4.3. Отражение и прохождение волны в случае магнитной среды

Выполненное в предыдущих разделах рассмотрение падения электромагнитной волны на структуру из трех сред, разделенных двумя границами, ограничено случаем, когда внутренняя (вторая) среда является классическим диэлектриком, то есть проводимость у такой среды отсутствует, а магнитная проницаемость равна единице. Такой подход типичен для классической оптики, где диапазон частот падающих волн соответствует видимому свету, на которых в подавляющем большинстве материалов магнитная проницаемость действительно равняется единице.

Однако в области электромагнитных волн более длинных, чем световые, имеется немало диэлектрических сред, магнитная проницаемость которых довольно высока и даже проявляет гиротропные свойства. К таким средам относятся, например, ферриты в условиях ферромагнитного резонанса, проявляющегося в диапазоне СВЧ [18, с. 23–25]. Законы отражения и прохождения электромагнитных волн при наклонном падении на такие среды, имеют особенности.

Главной причиной, вызывающей такие особенности, являются различные виды ферромагнитного резонанса.

Значительное число исследований раннего периода (50–60-е годы XX века), касающихся распространения электромагнитных волн в магнитной среде, относится к работам типа «феррит в волноводе», давшим начало широкому классу волноводных невзаимных устройств, таких как вентили, фазовращатели, циркуляторы и другие. Довольно подробный обзор таких исследований можно найти, например, в [15–18], а также в прямо ориентированной на устройства монографии [14].

Однако в те времена вопросы отражения мало интересовали исследователей, так как для оптимальной работы устройств требовалось лишь максимальное прохождение или полное затухание. Во всех случаях поперечные размеры среды ограничивались поперечным сечением волновода или даже частью этого сечения. О наклонном падении волны вопрос вообще не ставился.

В более поздней монографии [142, глава 5, с. 139–180] довольно подробно рассмотрены вопросы отражения электромагнитных волн от поверхности ферромагнитного диэлектрика. Главное внимание уделено аналитическому и численному исследованию коэффициента отражения электромагнитных волн от поверхности магнитодиэлектрика, как правило, кубической симметрии, в том числе вблизи ориентационного перехода, а также при учете магнитоупругого взаимодействия и магнитной релаксации, когда магнитная среда занимает полупространство, имеет форму пластины или слой магнитодиэлектрика находится на металле. Рассмотрены в основном зависимости коэффициента отражения от частоты и внешнего магнитного поля в перечисленных условиях.

Несмотря на столь подробное и весьма глубокое исследование отражения, вопросы прохождения волны через слой магнитодиэлектрика обойдены вниманием. Подавляющее число приведенных примеров относится к случаю нормального падения волны на поверхность магнетика. Сходные с оптическими эффекты типа явления Брюстера также не рассмотрены.

Исчерпывающее исследование особенностей распространения волн через магнитные среды выходит за рамки настоящей монографии. Авторы здесь ограничиваются лишь некоторыми частными вопросами, не затронутыми в цитированной литературе, наиболее близкими к теме настоящего изложения. То есть основное внимание далее будет уделено лишь отражению и прохождению волны при наклонном ее падении на структуру из трех сред, центральная из которых обладает изотропными

магнитными свойствами, без какого-либо учета их резонансного характера. Как и ранее, отдельно рассмотрены случаи продольной и поперечной поляризации падающей волны.

4.3.1. Продольная поляризация

Рассмотрим наиболее простой случай структуры из трех сред, в которой параметры первой и третьей сред совпадают (в простейшем случае это — свободные пространства), а параметры второй среды могут варьироваться. Положим диэлектрическую проницаемость второй среды равной 5, проводимость равной нулю, а магнитную проницаемость будем менять от 1 до 100.

Для расчета коэффициентов отражения и прохождения воспользуемся формулами (4.24), (4.25), полученными в разделе 4.2.1 для случая продольной поляризации:

$$R_e = \left| \frac{-(Z_{1p}^2 - Z_{2p}^2)(e^{ik_{2p}d} - e^{-ik_{2p}d})}{(Z_{1p} + Z_{2p})^2 e^{ik_{2p}d} - (Z_{1p} - Z_{2p})^2 e^{-ik_{2p}d}} \right|^2; \quad (4.87)$$

$$T_e = \left| \frac{4Z_{1p}Z_{2p}}{(Z_{1p} + Z_{2p})^2 e^{ik_{2p}d} - (Z_{1p} - Z_{2p})^2 e^{-ik_{2p}d}} \right|^2, \quad (4.88)$$

где

$$Z_{1p,2p} = Z_{1,2} \cos \theta_{1,2}; \quad (4.89)$$

$$k_{2p} = k_2 \cos \theta_2, \quad (4.90)$$

угол θ_2 связан с углом θ_1 соотношением (4.14)

$$\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1}}{k_2}, \quad (4.91)$$

а волновые числа и импедансы, в соответствии с (4.15), (4.16) равны

$$k_{1,2} = \omega \sqrt{\varepsilon_{1,2} \varepsilon_0 \mu_{1,2} \mu_0}; \quad (4.92)$$

$$Z_{1,2} = \sqrt{\frac{\mu_{1,2} \mu_0}{\varepsilon_{1,2} \varepsilon_0}}. \quad (4.93)$$

На рис. 4.9 приведены зависимости коэффициента отражения от угла падения волны в первой среде при различных значениях магнитной проницаемости второй среды.

Из рисунка видно, что при увеличении магнитной проницаемости от 1 до 5 кривые 1–3 имеют минимум, соответствующий углу Брюстера. При этом по мере увеличения магнитной проницаемости угол Брюстера уменьшается. При увеличении магнитной проницаемости более 5 кривые 5–9 монотонно возрастают, причем проходят тем выше, чем магнитная проницаемость больше.

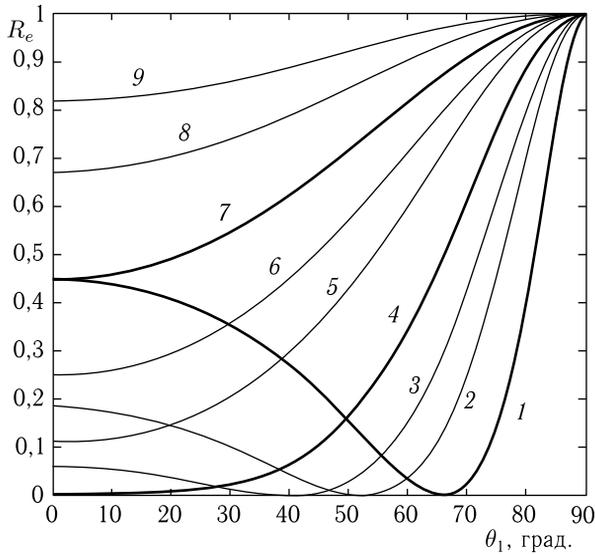


Рис. 4.9. Зависимости коэффициента отражения от угла падения волны в первой среде при различных значениях магнитной проницаемости второй среды: 1 — $\mu_2 = 1$; 2 — $\mu_2 = 2$; 3 — $\mu_2 = 3$; 4 — $\mu_2 = 5$; 5 — $\mu_2 = 10$; 6 — $\mu_2 = 15$; 7 — $\mu_2 = 25$; 8 — $\mu_2 = 50$; 9 — $\mu_2 = 100$. Остальные параметры второй среды: $\varepsilon_2 = 5$, $\sigma_2 = 0$. Нормированная толщина второй среды — $d/\lambda_2 = 0,75$ отн. ед. Первая и третья среды — свободное пространство ($\varepsilon_1 = 1$, $\mu_1 = 1$, $\sigma_1 = 0$)

По величине магнитной проницаемости можно выделить некоторые характерные кривые (показаны утолщенными линиями):

Кривая 1 — магнитная проницаемость равна единице $\mu_2 = 1$. Поскольку диэлектрическая проницаемость равна пяти $\varepsilon_2 = 5$, то магнитная проницаемость в пять раз меньше диэлектрической. По мере увеличения угла падения θ_1 кривая сначала спадает, обращается в нуль при угле Брюстера, после чего возрастает, стремясь к единице. Угол Брюстера равен 66 градусам. Эта кривая совпадает с кривой 1 на рис. 4.4.

Кривая 4 — магнитная проницаемость равна диэлектрической (обе равны пяти $\varepsilon_2 = 5$, $\mu_2 = 5$). Угол Брюстера приходится на $\theta_1 = 0$. То есть в случае равенства обеих проницаемостей при нормальном падении отражение отсутствует. Соответственно коэффициент прохождения равен единице, то есть от структуры ничего не отражается и вся падающая волна из первой среды полностью проходит в третью.

Кривая 7 — магнитная проницаемость равна $\mu_2 = 25$, что в пять раз больше диэлектрической ($\varepsilon_2 = 5$). По мере увеличения угла падения θ_1 кривая все время только возрастает, явление Брюстера полностью отсутствует. Эта кривая совпадает с кривой 1 на рис. 4.7.

Коэффициент прохождения в том же интервале изменения магнитной проницаемости является зеркальным отражением приведенных зависимостей для коэффициента отражения, то есть картина подобна показанной на рис. 4.4 и рис. 4.7. Ввиду тривиальности изображения зависимости от угла падения для этого коэффициента здесь не приводятся.

4.3.2. Поперечная поляризация

В случае поперечной поляризации падающей волны для расчета коэффициентов отражения и прохождения воспользуемся формулами (4.85), (4.86):

$$R_e = \left| \frac{-(Z_{1s}^2 - Z_{2s}^2)(e^{ik_{2s}d} - e^{-ik_{2s}d})}{(Z_{1s} + Z_{2s})^2 e^{ik_{2s}d} - (Z_{1s} - Z_{2s})^2 e^{-ik_{2s}d}} \right|^2; \quad (4.94)$$

$$T_e = \left| \frac{4Z_{1s}Z_{2s}}{(Z_{1s} + Z_{2s})^2 e^{ik_{2s}d} - (Z_{1s} - Z_{2s})^2 e^{-ik_{2s}d}} \right|^2, \quad (4.95)$$

где

$$Z_{1s,2s} = \frac{Z_{1,2}}{\cos \theta_{1,2}}; \quad (4.96)$$

$$k_{2s} = k_2 \cos \theta_2, \quad (4.97)$$

угол θ_2 связан с углом θ_1 соотношением (4.14)

$$\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1}}{k_2}, \quad (4.98)$$

а волновые числа и импедансы, в соответствии с (4.15), (4.16) равны

$$k_{1,2} = \omega \sqrt{\varepsilon_{1,2} \varepsilon_0 \mu_{1,2} \mu_0}; \quad (4.99)$$

$$Z_{1,2} = \sqrt{\frac{\mu_{1,2} \mu_0}{\varepsilon_{1,2} \varepsilon_0}}. \quad (4.100)$$

Построение зависимостей R_e и T_e от θ_1 по приведенным формулам показывает, что при поперечной поляризации зависимости коэффициента отражения R_e от угла падения θ_1 при увеличении магнитной проницаемости меняются в порядке, обратном приведенному на рис. 4.9. По причине простоты явления рисунок приводить не будем, а поясним его на примере характерных кривых, приведенных на рис. 4.9 утолщенными линиями.

Так, при $\mu_2 = 1$, то есть магнитная проницаемость в пять раз меньше диэлектрической, зависимость коэффициента отражения от угла падения соответствует кривой 7 на рис. 4.9.

При $\mu_2 = 5$, то есть магнитная проницаемость равна диэлектрической, зависимость коэффициента отражения от угла падения соответствует кривой 4 на рис. 4.9, то есть при поперечной поляризации отражение по нормали также отсутствует.

При $\mu_2 = 25$, то есть магнитная проницаемость в пять раз больше диэлектрической, зависимость коэффициента отражения от угла падения соответствует кривой 1 на рис. 4.9. В этом случае магнитная проницаемость обеспечивает падение амплитуды отражения до нуля при угле Брюстера. Таким образом, в случае поперечной поляризации магнитная проницаемость при достаточной ее величине обеспечивает реализацию явления Брюстера, то есть играет такую же роль, какую играла диэлектрическая проницаемость при продольной поляризации.

Коэффициент прохождения в том же интервале изменения магнитной проницаемости является зеркальным отражением приведенных зависимостей для коэффициента отражения, то есть картина подобна показанной на рис. 4.4 и рис. 4.7. Ввиду тривиальности изображения зависимости от угла падения для этого коэффициента здесь не приводятся.

4.3.3. Отрицательная магнитная проницаемость

Проведенное рассмотрение предполагает, что магнитная проницаемость является изотропной и положительной. Однако в реальных магнетиках в диапазоне СВЧ, где реализуются условия для ферромагнитного резонанса, магнитная проницаемость за счет гиротропии среды может иметь как отрицательные, так и комплексные значения. Так, по мере увеличения постоянного поля действительная часть магнитной проницаемости, начиная со значения, равного единице, сначала убывает, затем, проходя через нуль в поле «антирезонанса», принимает отрицательные значения и стремится к минус бесконечности при стремлении поля к величине ω/γ . По прохождении полем этой величины магнитная проницаемость, исходя из плюс бесконечности, постепенно убывает, в пределе снова приближаясь к единице. Мнимая часть магнитной проницаемости ведет себя сходным образом: в нулевом поле, исходя из малой отрицательной величины в поле ω/γ , стремится к минус бесконечности, после чего меняет знак и из плюс бесконечности далее стремится к нулю. Зависимость магнитной проницаемости от частоты имеет подобный характер с точностью до обратных значений [18, с. 23–25, рис. 1.6, 1.7].

Подробный расчет отражения и прохождения при столь сложной зависимости магнитной проницаемости от поля и частоты представляет собой отдельную задачу, выходящую за рамки настоящей монографии. Определенные результаты, касающиеся отражения электромагнитных волн от феррита при нормальном падении, приведены в цитированной выше монографии [142]. Более подробное рассмотрение отражения и прохождения в известной авторам литературе отсутствует, так что, можно полагать, ожидает нового исследователя.

4.3.4. Волны в сложных магнитных структурах

Отдельного внимания требуют вопросы о распространении волн в некоторых сложных магнитных структурах, где важнейшую роль играет ферромагнитный резонанс [22, с. 37–46]. Особую группу

составляют поверхностные и объемные магнитоэлектростатические волны, в том числе волны Дэймона–Эшбаха, распространяющиеся только внутри магнитной среды [23, с. 46–118]. Определенные свойства электромагнитных волн в среде с тензорными параметрами, в том числе в бигиротропной среде, рассмотрены в монографии [23, разделы 2.5–2.8, с. 46–68]. Приведены поля и дисперсионные соотношения для гиромангнитной и гироэлектрической волн. Для гиромангнитной волны найдены характерные частоты, параметр расходимости и рассмотрены три интервала параметра затухания.

В монографии [24, глава 8, с. 337–385] рассмотрен ферромагнитный резонанс в композиционной среде, состоящей из анизотропных ферритовых частиц, находящихся в условиях ориентационного перехода. Получен тензор магнитной восприимчивости, а также приведены способы формирования его заданных свойств. В монографии [25, глава 15, с. 399–428] рассмотрено распространение электромагнитных волн в многослойной структуре, выполненной на основе композиционной среды из анизотропных ферритовых частиц. Рассмотрено отражение и прохождение электромагнитных волн при нормальном падении на границу между двумя композиционными средами [25, с. 412–419], а также на структуру, состоящую из трех композиционных сред, разделенных двумя границами [25, с. 419–425]. Получены амплитуды волн во всех средах, найдены коэффициенты отражения и прохождения, а также их частотные и полевые зависимости.

Перечисленные выше результаты в основном базируются на статьях [143–163]. Трактовка вопросов отражения и прохождения опирается на монографии [47, 48] и статьи [56–65].

Во всех перечисленных случаях для решения задач о распространении волн использовался прямой метод. Другие методы расчета, а также структуры, содержащие больше трех сред, не рассматривались. Важным достоинством перечисленных работ является учет тензорного характера магнитной проницаемости, обеспечивающий возможность подробного выявления частотно-полевых и резонансных характеристик распространения волн. Подобные вопросы в более сложных структурах, в том числе наклонное падение электромагнитных волн и распространение волн в структурах, содержащих больше трех сред, а также использование других методов расчета, кроме прямого, в известной авторам литературе отсутствуют. Авторы могут лишь рекомендовать их в качестве новых задач для любознательного исследователя.

4.4. Аномальное влияние проводимости первой среды

В проведенном до сих пор рассмотрении предполагалось, что первая и, соответственно, третья среда являются бездиссипативными, то есть проводимость в этих средах отсутствует. Рассмотрим теперь случай, когда первая среда является диссипативной, то есть ее проводимость отлична от нуля и имеет конечное положительное значение. Как будет

показано далее, распространение волны при этом проявляет определенную аномалию, не свойственную наличию проводимости в любой другой, кроме первой, среде.

Достаточно характерным при этом является случай наклонного падения волны с продольной поляризацией на структуру, толщина второй среды которой значительно превышает нормированную длину волны в этой среде.

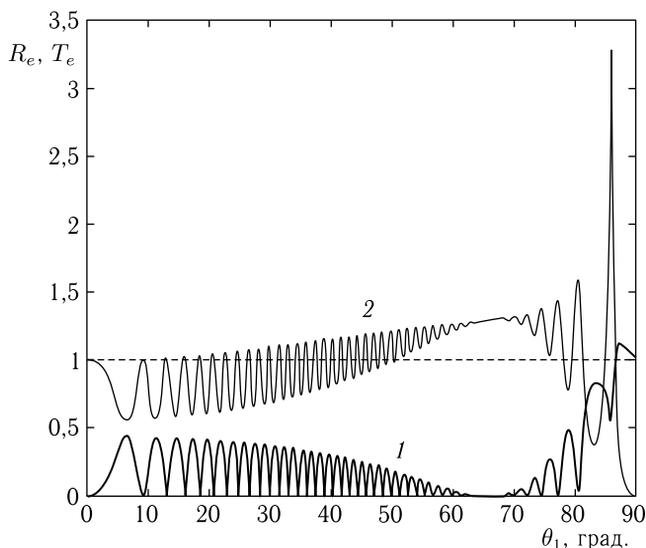


Рис. 4.10. Зависимости коэффициентов отражения (1) и прохождения (2) от угла падения волны при наличии проводимости в первой среде: $\sigma_1 = 0,001$ См. Уровень R_e, T_e равный единице, отмечен горизонтальной двойной пунктирной линией. Толщина центральной (второй) среды: $d/\lambda_2 = 200$ отн. ед. Остальные параметры — те же, что на рис. 4.5 ($\varepsilon_1 = 1, \mu_1 = 1; \varepsilon_2 = 5, \mu_2 = 1, \sigma_2 = 0; \varepsilon_3 = \varepsilon_1, \mu_3 = \mu_1, \sigma_3 = \sigma_1$)

Обратимся к рис. 4.10, где показаны зависимости коэффициентов отражения (1) и прохождения (2) от угла падения волны при наличии проводимости в первой среде. Коэффициенты отражения и прохождения рассчитаны в предположении равенства параметров первой и третьей сред, то есть по формулам (4.24) и (4.25). Заметим, что величина проводимости третьей среды на приведенных кривых никак не сказывается, поэтому для простоты она положена равной проводимости в первой среде.

Из рисунка можно видеть, что зависимость для коэффициента отражения I полностью подобна зависимости I , приведенной на рис. 4.5 с учетом того, что здесь отношение d/λ_2 принято равным 200 отн. ед, в отличие от 100 отн. ед., принятом на рис. 4.5. Такое различие

в толщине второй среды дало лишь сгущение осцилляций коэффициента отражения, обусловленное уменьшением их периода в два раза. Минимум кривой также приходится на тот же угол Брюстера, равный 66 градусам.

Не так однако веден себя зависимость 2, соответствующая коэффициенту прохождения. Осцилляции — такие же, однако отражение относительно кривой 1 не является точно зеркальным. Так, на рис. 4.5 вершины осцилляций кривой 2 приходились точно на значение коэффициента прохождения, равное единице. Здесь же вершины осцилляций кривой 2 по мере увеличения угла падения θ_1 превышают единицу, причем степень превышения растет тем сильнее, чем величина θ_1 больше, достигая вблизи 87° величины около 3,2 отн. ед. В этой же области коэффициент отражения составляет около 0,6 отн. ед. Однако сумма коэффициентов отражения и прохождения, даже если бы коэффициент отражения равнялся нулю, все равно значительно превышает единицу.

Такое превышение над единицей означает нарушение равенства (4.5), то есть получается, что

$$R_e + T_e \gg 1. \quad (4.101)$$

Это соотношение противоречит закону сохранения энергии, так как поток энергии проходящей волны никак не может превышать поток энергии волны падающей. Факт превышения обусловлен именно наличием проводимости, то есть диссипации в первой среде. То есть вместо того, чтобы поток энергии по мере прохождения структуры уменьшался, он возрастает.

Заметим, что толщина первой среды в проводимом рассмотрении не участвует, так что учитывается амплитуда падающей волны в точке входа ее во вторую среду. Тем не менее диссипация первой среды участвует в формировании коэффициента прохождения за счет граничных условий между первой и второй средами.

Причина такого аномального поведения коэффициента прохождения заключается в недостаточно корректном использовании метода комплексных амплитуд при вычислении потоков энергии распространяющихся волн. О наличии подобной аномалии, то есть превышении суммы энергетических коэффициентов отражения и прохождения, указывалось ранее в других ситуациях [137–139]. Для устранения аномалии были предложены различные искусственные приемы, такие как введение «фиктивного» слоя, фазового множителя и интерференционного потока [164]. Однако, по-видимому, наиболее естественным следует считать подход, учитывающий активную, реактивную и локализованную составляющие потоков энергии, предложенный в работе [62]. Там этот подход реализован для одномерной волны. Довольно подробное рассмотрение балансов энергии проведено в монографии [54]. Для электромагнитной волны в среде с магнитной проницаемостью то же проделано в работе [63].

Подробное рассмотрение нейтрализации аномалии превышения потока энергии проходящей волны над единицей за рамки настоящей монографии выходит. Здесь авторы ограничиваются лишь констатацией самого факта превышения в приведенных здесь условиях, а подробнее предполагают рассмотреть в предполагаемой к написанию второй или третьей части настоящей монографии (см. Введение).

Выводы по главе 4

Глава посвящена рассмотрению характеристик коэффициентов отражения и прохождения при наклонном падении электромагнитной волны на три среды, разделенные двумя границами. Для расчета использован прямой метод. Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Выполнен обзор характеристик коэффициентов отражения и прохождения для частных случаев, рассмотренных в предыдущих главах, в том числе для одномерной волны, а также для электромагнитной волны при нормальном падении на плоскость раздела сред. Приведены общие определения коэффициентов отражения и прохождения по энергии, распространенные на произвольное число сред. Рассмотрены характеристики коэффициентов отражения и прохождения относительно произвольных точек пространства. Получены фазовые соотношения, образованные дополнительным пробегом волны между поверхностями раздела и точками исхода волны или ее регистрации. Для случая одновременного падения на структуру двух волн с обеих ее сторон, приведено определение обобщенных коэффициентов выхода, включающих в себя как отраженную волну основного источника, так и проходящую, образованную встречным падением дополнительной волны.

2. Для некоторых важных для практики случаев выполнено количественное рассмотрение наклонного падения электромагнитной волны продольной и поперечной поляризации на структуру из трех сред. В качестве первой и третьей сред положено свободное пространство, в котором диэлектрическая и магнитная проницаемости равны единице, а проводимость отсутствует. Во второй среде отличной от единицы положена только диэлектрическая проницаемость. Рассмотрены зависимости коэффициентов отражения и прохождения от толщины второй среды. Показано, что в случае отсутствия проводимости второй среды зависимости коэффициентов от толщины имеют периодический синусоидальный характер, обусловленный установлением стоячих волн по толщине второй среды. Первый максимум отражения соответствует укладыванию по толщине второй среды четверти длины волны, первый минимум той же кривой — укладыванию половины длины волны. Далее чередование максимумов и минимумов повторяется. Расстояние между соседними максимумами или соседними минимумами равно половине длины волны. Зависимости коэффициента прохождения от толщины являются зеркальным отражением таких же зависимостей

для коэффициента отражения, так что сумма обоих коэффициентов всегда остается равной единице. При наличии проводимости во второй среде периодичность обеих зависимостей от толщины сохраняется, а амплитуда падает. Для характеристики затухания осцилляций, исходя из требования сохранения энергии, введен коэффициент поглощения, равный отлчию от единицы суммы коэффициентов отражения и прохождения. Установлено, что при значительном увеличении проводимости коэффициент прохождения стремится к нулю, а коэффициент отражения — к постоянной величине, зависящей от угла падения исходной волны.

3. Для случая волны продольной поляризации выявлено сильное изменение амплитуды зависимостей от толщины при изменении угла падения волны в первой среде. Показано, что по мере увеличения угла падения от нормали отражение сначала уменьшается вплоть до нуля, после чего снова возрастает, а при увеличении угла падения до 90° градусов стремится к единице. Прохождение при этом ведет себя зеркальным образом, так что сумма коэффициентов отражения и прохождения всегда остается равной единице. Установлено, что падение амплитуды отражения до нуля с соответствующим увеличением прохождения до единицы соответствует падению исходной волны под углом Брюстера. Для случая трех сред, разделенных двумя границами, получено обобщенное выражение для угла Брюстера через параметры сред, включающее в себя как диэлектрическую, так и магнитную проницаемости. Выполнено сравнение полученного выражения с классическим, известным в оптике. Установлено полное совпадение в случае стремления магнитной проницаемости к единице.

4. Для случая волны поперечной поляризации выявлено сильное изменение амплитуды зависимостей от толщины при изменении угла падения волны в первой среде. Показано, что по мере увеличения угла падения от нормали отражение все время монотонно увеличивается, при увеличении угла падения до 90° градусов стремясь к единице. Прохождение при этом ведет себя зеркальным образом, так что сумма коэффициентов отражения и прохождения всегда остается равной единице. Отмечено, что такой характер зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от угла падения соответствует отсутствию явления Брюстера, обусловленному поперечной поляризацией падающей волны. В качестве замечания отмечено, что установленная безусловная корреляция между явлением Брюстера и характером поляризации падающей волны имеет место только в случае отсутствия учета магнитной проницаемости второй среды.

5. Рассмотрены особенности коэффициентов отражения и прохождения при толщине второй среды, многократно превышающей длину волны в этой среде. Показано, что в случае как продольной, так и поперечной поляризации зависимости коэффициентов отражения и прохождения от угла падения имеют периодический характер со множеством осцилляций. Проверка показывает, что при увеличе-

нии толщины второй среды период осцилляций уменьшается, а их количество увеличивается. При продольной поляризации огибающая зависимости для коэффициента отражения имеет четко выраженный минимум, соответствующий углу Брюстера, Огибающая для коэффициента прохождения при этом имеет максимум. Сумма значений коэффициентов для обеих кривых при любом значении угла падения всегда равна единице. При поперечной поляризации огибающая зависимости для коэффициента отражения имеет монотонно возрастающий характер, соответствующий отсутствию явления Брюстера. Огибающая для коэффициента прохождения при этом монотонно спадает, сохраняя зеркальное отражение кривой для отражения. Сумма значений коэффициентов для обеих кривых при любом значении угла падения всегда равна единице.

6. Рассмотрены особенности коэффициентов отражения и прохождения в случае, когда вторая среда обладает магнитными свойствами. Для случая наклонного падения волны продольной поляризации выделены три характерных соотношения между значениями магнитной и диэлектрической проницаемостей: первое — когда магнитная проницаемость меньше диэлектрической, второе, когда обе проницаемости между собой равны и третье — когда магнитная проницаемость превышает диэлектрическую. Показано, что в первом случае, то есть когда магнитная проницаемость, больше единицы, но меньше диэлектрической, по мере увеличения магнитной проницаемости происходит сдвиг минимума зависимости коэффициента отражения от угла падения в сторону уменьшения угла падения, то есть к уменьшению угла Брюстера. При равенстве величины магнитной проницаемости величине диэлектрической проницаемости минимум отражения сдвигается до нулевого значения угла падения, то есть при нормальном падении в случае равенства обеих проницаемостей отражение отсутствует, так что волна полностью проходит через структуру. При магнитной проницаемости, большей диэлектрической, минимум на кривой отражения полностью отсутствует и вся зависимость коэффициента отражения от угла падения является монотонно возрастающей. Отмечено, что во всех этих случаях зависимость коэффициента прохождения от магнитной проницаемости в том же интервале ее изменения является зеркальным отражением зависимости для коэффициента отражения. Отмечены некоторые особенности отрицательной и комплексной магнитной проницаемости, подробное рассмотрение влияния которых на отражение и прохождение может составить предмет для отдельной работы.

7. Рассмотрены зависимости коэффициентов отражения и прохождения от магнитной проницаемости второй среды при поперечной поляризации падающей волны. Установлено, что в этом случае имеются те же три характерных соотношения между значениями магнитной и диэлектрической проницаемостей, однако теперь по мере увеличения магнитной проницаемости трансформация зависимостей коэффициентов

отражения и прохождения происходит в порядке, обратном случаю продольной поляризации.

8. Перечислены некоторые вопросы, касающиеся распространения электромагнитных волн в сложных структурах, обладающих магнитными свойствами в условиях ферромагнитного резонанса. Приведен обзор статей и монографий, где рассматривается отражение и прохождение электромагнитных волн через композиционные структуры, содержащие анизотропные магнитные частицы в условиях ориентационного перехода. Отмечена ограниченность проделанного рассмотрения, состоящая в использовании прямого метода в приложении к структуре, содержащей не более трех сред. Приведены некоторые вопросы, требующие более подробного рассмотрения.

9. Рассмотрены особенности явлений отражения и прохождения при наличии диссипации, то есть проводимости в первой среде. В качестве характерного примера выбран случай наклонного падения волны продольной поляризации на структуру, толщина центральной среды которой значительно превышает нормированную длину волны в этой среде. Выявлено аномальное поведение зависимости коэффициента прохождения от угла падения волны, а именно — значительное превышение потока энергии проходящей волны над потоком энергии падающей волны, что противоречит закону сохранения энергии. Приведены ссылки на традиционные методы устранения такого противоречия, отмечен их искусственный характер и определенная недостаточность. Предложено для устранения превышения коэффициента прохождения единицы использовать баланс, учитывающий активную, реактивную и локализованную составляющие потоков энергии. Приведена ссылка на работы, где подробный баланс рассмотрен для случая одномерной волны. Применение описанного там аппарата предложено в качестве задачи для отдельного рассмотрения.

Глава 5

ПРЯМОЙ МЕТОД ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУР

Глава посвящена вопросам методологии расчета распространения одномерных и электромагнитных волн через многослойные структуры с использованием прямого метода. На основе единства одномерных и электродинамических задач приведены приемы сведения электродинамических задач к одномерным. В качестве наиболее общего случая рассмотрено падение на структуру двух встречных волн, распространяющихся по обе стороны от структуры. Получены амплитуды прямо и обратно направленных волн для случаев трех-пяти сред. Приведены коэффициенты отражения и прохождения. Обсуждена возможность применения метода для большего числа сред.

В тексте главы использованы материалы монографий [47, 48], а также статей [56–65]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

5.1. Общая схема прямого метода

Для задач о распространении волн через слоистые структуры наиболее естественным является прямой метод. При использовании этого метода волновое уравнение в каждом слое решается независимо от других слоев, причем находят решения как для прямо, так и обратно направленных волн. Волновые поля внутри каждого слоя представляют в виде суммы полей прямо и обратно направленных волн, после чего полученные суммарные поля сшиваются на границах между слоями с помощью граничных условий. Эти условия состоят в равенстве волновых полей и их первых производных по обе стороны от границы.

Прямой метод является наиболее универсальным и пригоден для решения задач о распространении волн любой природы в том случае, если распространение волн в пределах каждого слоя можно описать с помощью какого-либо волнового уравнения. При этом отдельные среды, составляющие слои, могут быть неоднородными, обладать нелинейными, невзаимными или какими-либо другими свойствами.

Наиболее простой вид прямой метод принимает в случае линейных однородных изотропных сред, волновые свойства которых можно описать линейными уравнениями второго порядка по координате и времени, имеющими решения в виде экспоненциальных функций. При этом подстановка таких решений в граничные условия приводит к алгебраической системе линейных уравнений, порядок которой получается

равным удвоенному числу границ между средами. Например, в случае двух границ приходится решать систему четвертого порядка, для трех границ — шестого, четырех — восьмого и так далее. Эта система может быть решена, например, методом Крамера [104, с. 45, раздел 1.9–2], [140, с. 54–56], состоящим в раскрытии алгебраических детерминантов, порядок которых равен числу уравнений, а количество — на единицу больше. В результате получаются амплитуды всех прямо и обратно направленных волн внутри и вне структуры. Если же нахождение амплитуд внутри слоев не требуется, а достаточно определить амплитуды только отраженной и проходящей волн относительно всей структуры в целом, количество требуемых детерминантов уменьшается до трех.

Определенное ограничение метода состоит в росте порядков раскрываемых детерминантов при возрастании числа сред, составляющих слоистую структуру. В результате чего вычисления становятся довольно громоздкими.

Рассмотрим далее применение прямого метода для решения различных задач о распространении одномерных и электромагнитных волн для случаев от трех до пяти сред.

5.2. Одномерная волна. Распространение двух встречных волн

В рамках настоящей монографии прямой метод уже применялся для решения задач о распространении одномерных волн через две среды, разделенные одной границей (глава 2, раздел 2.1.1), а также через три среды, разделенные двумя границами (глава 3, раздел 3.1.1). Приведенные там вычисления имеют довольно частный характер, не всегда применимый при большем числе сред. Поэтому рассмотрим здесь подобные задачи в более общем едином ключе, начиная со случая двух сред. С целью максимально общности будем рассматривать симметричную задачу, то есть одновременное падение на структуру двух волн встречных направлений, исходящих из источников, расположенных по обе стороны от структуры в целом.

5.2.1. Две среды, разделенные одной границей

Рассмотрим сначала симметричную задачу о распространении двух волн противоположных направлений через структуру из двух сред, разделенных одной границей, схема которой показана на рис. 5.1.

Структура состоит из двух сред (номера 1 и 2 в кругах), разделенных одной границей (номер 1 в треугольнике). Параметры обеих сред могут быть различными, волновые числа k_1 и k_2 в общем случае могут быть действительными или комплексными.

В рамках настоящей монографии рассматривается режим установившегося во времени распространения волны, соответствующий решению задачи без начальных условий. Порядок рассмотрения такой

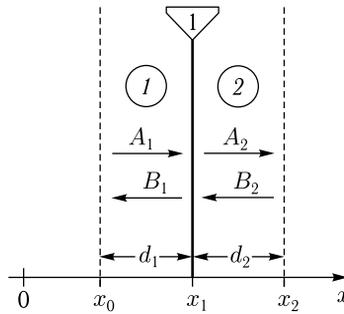


Рис. 5.1. Геометрия симметричной задачи о распространении для двух встречных волн через структуру из двух сред, разделенных одной границей

задачи приведен в разделе 1.2.5. В среде с диссипацией, описываемой уравнением (1.137), волновое число может быть комплексным, то есть иметь вид (1.160):

$$k = \eta - i\xi, \tag{5.1}$$

где η и ξ — действительные параметры, равные (1.162), (1.163)

$$\eta = \frac{\omega}{v} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\omega^2}} \right)}; \tag{5.2}$$

$$\xi = \frac{\omega}{v} \sqrt{\frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\omega^2}} \right)}. \tag{5.3}$$

На рис. 5.1 амплитуды волн, распространяющихся в положительном направлении оси Ox , обозначены буквами A_1 и A_2 , где $i = 1, 2$ — номера сред. Амплитуды волн, распространяющихся в отрицательном направлении той же оси, обозначены буквами B_1 и B_2 . В среде 1 распространяются волны A_1 и B_1 , в среде 2 — волны A_2 и B_2 . Амплитуды A_1 и B_2 заданы, то есть на структуру падают две встречные волны: одна слева направо из точки с координатой x_0 , имеющая амплитуду A_{10} , другая справа налево из точки с координатой x_2 , имеющая амплитуду B_{20} и сдвиг по фазе относительно первой волны на угол φ .

Таким образом,

$$A_1 = A_{10}; \tag{5.4}$$

$$B_2 = B_{20}e^{i\varphi}. \tag{5.5}$$

Амплитуды и фазы двух других волн определяются амплитудами и соотношением фаз этих волн в сочетании с параметрами сред.

Решения волновых уравнений в различных областях, нормированные относительно точек исхода соответствующих волн, имеют вид:

$$U_1 = A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + B_1 e^{ik_1(x-x_1)}; \tag{5.6}$$

$$U_2 = A_2 e^{-ik_2(x-x_1)} + B_2 e^{ik_2(x-x_2)}. \tag{5.7}$$

Производные решений имеют вид:

$$\frac{dU_1}{dx} = -iA_1k_1e^{-ik_1(x-x_0)} + iB_1k_1e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (5.8)$$

$$\frac{dU_2}{dx} = -iA_2k_2e^{-ik_2(x-x_1)} + iB_2k_2e^{ik_2(x-x_2)}. \quad (5.9)$$

Граничные условия при $x = x_1$ имеют вид:

$$U_1|_{x=x_1} = U_2|_{x=x_1}; \quad (5.10)$$

$$\frac{dU_1}{dx}\Big|_{x=x_1} = \frac{dU_2}{dx}\Big|_{x=x_1}. \quad (5.11)$$

Для упрощения дальнейшей записи введем обозначения:

$$e_1 = e^{-ik_1(x_1-x_0)}; \quad (5.12)$$

$$e_2 = e^{-ik_2(x_2-x_1)}; \quad (5.13)$$

а также

$$e_0 = e^{i\varphi}. \quad (5.14)$$

Подставляя решение и производные в граничные условия, учитывая (5.12)–(5.13) и записывая уравнения в порядке следования неизвестных, получаем систему для определения B_1 и A_2 :

$$B_1 - A_2 = -A_1e_1 + B_2e_2; \quad (5.15)$$

$$B_1k_1 + A_2k_2 = A_1k_1e_1 + B_2k_2e_2. \quad (5.16)$$

Таблицы коэффициентов этой системы имеют вид:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline B_1 & A_2 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline k_1 & k_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline A_1, B_2 \\ \hline -A_1e_1 + B_2e_2 \\ \hline A_1k_1e_1 + B_2k_2e_2 \\ \hline \end{array} \quad (5.17)$$

Решая систему (5.15)–(5.16) по правилу Крамера [104, с. 45, раздел 1.9–2], [140, с. 54–56], получаем детерминанты:

$$D_0 = k_1 + k_2; \quad (5.18)$$

$$D_{B_1} = (A_1e_1)(k_1 - k_2) + (B_2e_2)2k_2; \quad (5.19)$$

$$D_{A_2} = (A_1e_1)2k_1 - (B_2e_2)(k_1 - k_2). \quad (5.20)$$

Учитывая (5.4), (5.5) и (5.14), приводим детерминанты к виду:

$$D_0 = k_1 + k_2; \quad (5.21)$$

$$D_{B_1} = (A_{10}e_1)(k_1 - k_2) + (B_{20}e_0e_2)2k_2; \quad (5.22)$$

$$D_{A_2} = (A_{10}e_1)2k_1 - (B_{20}e_0e_2)(k_1 - k_2). \quad (5.23)$$

Для упрощения записи введем вспомогательные обозначения:

$$A = A_{10}e_1; \quad (5.24)$$

$$B = B_{20}e_0e_2. \quad (5.25)$$

С этими обозначениями детерминанты принимают вид:

$$D_0 = k_1 + k_2; \tag{5.26}$$

$$D_{B1} = A(k_1 - k_2) + B2k_2; \tag{5.27}$$

$$D_{A2} = A2k_1 - B(k_1 - k_2). \tag{5.28}$$

При этом амплитуды волн B_1 и A_2 имеют вид:

$$B_1 = \frac{D_{B1}}{D_0}; \quad A_2 = \frac{D_{A2}}{D_0}. \tag{5.29}$$

Можно видеть, что при падении только одной волны прямого направления, то есть при $A \neq 0$, но $B = 0$, полученные здесь выражения (5.29) переходят в приведенные в разделе 2.1.1 выражения (2.18)–(2.19). При $A = 0$, но $B \neq 0$ получаются те же выражения с точностью до изменения направления падающей волны относительно оси координат.

5.2.2. Три среды, разделенные двумя границами

Рассмотрим симметричную задачу о распространении двух волн противоположных направлений через структуру из трех сред, разделенных двумя границами, схема которой показана на рис. 5.2.

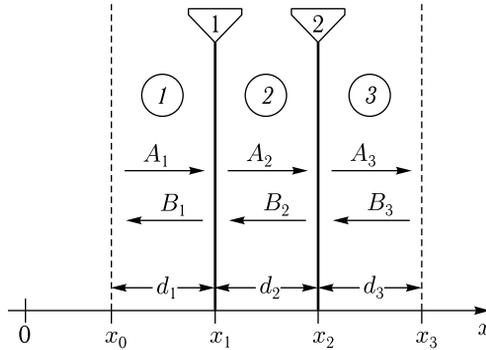


Рис. 5.2. Геометрия симметричной задачи о распространении двух встречных волн через структуру из трех сред, разделенных двумя границами

Структура состоит из трех сред (номера 1–3 в кругах), разделенных двумя границами (номера 1 и 2 в треугольниках). В старой терминологии среды 1 и 3 полагались свободными пространствами, а среда 2 — слоем с заданными параметрами, то есть задача соответствовала однослойной структуре с двумя границами 1 и 2. Здесь параметры всех трех сред могут быть различными, все волновые числа, обозначаемые k_1 , k_2 , k_3 , могут быть действительными или комплексными. Амплитуды волн, распространяющихся в положительном направлении оси Ox , обозначены буквами A_i , где i — номер среды. Амплитуды волн, распространяющихся в отрицательном направлении той же оси, обозначены

буквами B_i . Таким образом, внутри среды 1 распространяются волны с амплитудами A_1 и B_1 , внутри среды 2 — волны с амплитудами A_2 и B_2 , внутри среды 3 — волны с амплитудами A_3 и B_3 . Амплитуды волн A_1 и B_3 являются заданными, то есть на структуру падают две встречные волны: одна слева направо из точки с координатой x_0 , имеющая амплитуду A_{10} , другая справа налево из точки с координатой x_3 , имеющая амплитуду B_{30} и сдвиг по фазе относительно первой волны на угол φ .

Таким образом,

$$A_1 = A_{10}; \quad (5.30)$$

$$B_3 = B_{30}e^{i\varphi}. \quad (5.31)$$

Амплитуды и фазы всех остальных волн определяются амплитудами и соотношением фаз этих двух волн в сочетании с параметрами сред.

Решения волновых уравнений в различных областях, нормированные относительно точек исхода соответствующих волн, имеют вид:

$$U_1 = A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + B_1 e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (5.32)$$

$$U_2 = A_2 e^{-ik_2(x-x_1)} + B_2 e^{ik_2(x-x_2)}; \quad (5.33)$$

$$U_3 = A_3 e^{-ik_3(x-x_2)} + B_3 e^{ik_3(x-x_3)}. \quad (5.34)$$

Производные решений имеют вид:

$$\frac{dU_1}{dx} = -iA_1 k_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + iB_1 k_1 e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (5.35)$$

$$\frac{dU_2}{dx} = -iA_2 k_2 e^{-ik_2(x-x_1)} + iB_2 k_2 e^{ik_2(x-x_2)}; \quad (5.36)$$

$$\frac{dU_3}{dx} = -iA_3 k_3 e^{-ik_3(x-x_2)} + iB_3 k_3 e^{ik_3(x-x_3)}. \quad (5.37)$$

Граничные условия при $x = x_1$ и $x = x_2$ имеют вид:

$$U_1|_{x=x_1} = U_2|_{x=x_1}; \quad (5.38)$$

$$U_2|_{x=x_2} = U_3|_{x=x_2}; \quad (5.39)$$

$$\left. \frac{dU_1}{dx} \right|_{x=x_1} = \left. \frac{dU_2}{dx} \right|_{x=x_1}; \quad (5.40)$$

$$\left. \frac{dU_2}{dx} \right|_{x=x_2} = \left. \frac{dU_3}{dx} \right|_{x=x_2}. \quad (5.41)$$

Для упрощения дальнейшей записи введем обозначения:

$$e_1 = e^{-ik_1(x_1-x_0)}; \quad (5.42)$$

$$e_2 = e^{-ik_2(x_2-x_1)}; \quad (5.43)$$

$$e_3 = e^{-ik_3(x_3-x_2)}; \quad (5.44)$$

а также

$$e_0 = e^{i\varphi}. \quad (5.45)$$

Подставляя решение и производные в граничные условия, учитывая (5.42)–(5.44) и записывая уравнения в порядке следования неизвестных, получаем систему уравнений для определения B_1, A_2, B_2, A_3 :

$$B_1 - A_1 - B_2 e_2 = -A_1 e_1; \quad (5.46)$$

$$A_2 e_2 + B_2 - A_3 = B_3 e_3; \quad (5.47)$$

$$B_1 k_1 + A_2 k_2 - B_2 k_2 e_2 = A_1 k_1 e_1; \quad (5.48)$$

$$-A_2 k_2 e_2 + B_2 k_2 + A_3 k_3 = B_3 k_3 e_3. \quad (5.49)$$

Таблицы коэффициентов этой системы уравнений имеют вид:

$$\begin{array}{cccc|cc} B_1 & A_2 & B_2 & A_3 & A_1, B_3 & \\ \hline 1 & -1 & -e_2 & 0 & -A_1 e_1 & \\ \hline 0 & e_2 & 1 & -1 & B_3 e_3 & \\ \hline k_1 & k_2 & -k_2 e_2 & 0 & A_1 k_1 e_1 & \\ \hline 0 & -k_2 e_2 & k_2 & k_3 & B_3 k_3 e_3 & \end{array}. \quad (5.50)$$

Решая эту систему уравнений по правилу Крамера, получаем детерминанты (все детерминанты имеют знак минус, который при вычислении амплитуд сокращается, поэтому здесь они записаны без этого знака):

$$D_0 = (k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2; \quad (5.51)$$

$$D_{B1} = (A_1 e_1)[(k_1 - k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e_2^2] + (B_3 e_3)4k_2 k_3 e_2; \quad (5.52)$$

$$D_{A2} = (A_1 e_1)2k_1(k_2 + k_3) - (B_3 e_3)2(k_1 - k_2)k_3 e_3; \quad (5.53)$$

$$D_{B2} = (A_1 e_1)2k_1(k_2 - k_3)e_2 + (B_3 e_3)2(k_1 + k_2)k_3; \quad (5.54)$$

$$D_{A3} = (A_1 e_1)4k_2 k_3 e_2 - (B_3 e_3)[(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e_2^2]. \quad (5.55)$$

Учитывая (5.30), (5.31) и (5.45), приводим детерминанты к виду:

$$D_0 = (k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2; \quad (5.56)$$

$$D_{B1} = (A_{10} e_1)[(k_1 - k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e_2^2] + (B_{30} e_0 e_3)4k_2 k_3 e_2; \quad (5.57)$$

$$D_{A2} = (A_{10} e_1)2k_1(k_2 + k_3) - (B_{30} e_0 e_3)2(k_1 - k_2)k_3 e_3; \quad (5.58)$$

$$D_{B2} = (A_{10} e_1)2k_1(k_2 - k_3)e_2 + (B_{30} e_0 e_3)2(k_1 + k_2)k_3; \quad (5.59)$$

$$D_{A3} = (A_{10} e_1)4k_2 k_3 e_2 - (B_{30} e_0 e_3)[(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e_2^2]. \quad (5.60)$$

Для упрощения записи введем вспомогательные обозначения:

$$A = A_{10} e_1; \quad (5.61)$$

$$B = B_{30} e_0 e_3. \quad (5.62)$$

С этими обозначениями детерминанты принимают вид:

$$D_0 = (k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2; \quad (5.63)$$

$$D_{B1} = A[(k_1 - k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e_2^2] + B4k_2k_3e_2; \quad (5.64)$$

$$D_{A2} = A2k_1(k_2 + k_3) - B2(k_1 - k_2)k_3e_3; \quad (5.65)$$

$$D_{B2} = A2k_1(k_2 - k_3)e_2 + B2(k_1 + k_2)k_3; \quad (5.66)$$

$$D_{A3} = A4k_2k_3e_2 - B[(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e_2^2]. \quad (5.67)$$

Во всех случаях амплитуды волн B_1, A_2, B_2, A_3 имеют вид:

$$B_1 = \frac{D_{B1}}{D_0}; \quad A_2 = \frac{D_{A2}}{D_0}; \quad B_2 = \frac{D_{B2}}{D_0}; \quad A_3 = \frac{D_{A3}}{D_0}. \quad (5.68)$$

Можно видеть, что при падении только одной волны прямого направления, то есть при $A \neq 0$, но $B = 0$, полученные здесь выражения (5.68) переходят в приведенные в разделе 3.1.3 выражения (3.54)–(3.57). При $A = 0$, но $B \neq 0$ получаются те же выражения с точностью до изменения направления падающей волны относительно оси координат.

5.2.3. Четыре среды, разделенные тремя границами

Рассмотрим симметричную задачу о распространении двух волн противоположных направлений через структуру, содержащую четыре среды, разделенные тремя границами, схема которой показана на рис. 5.3.

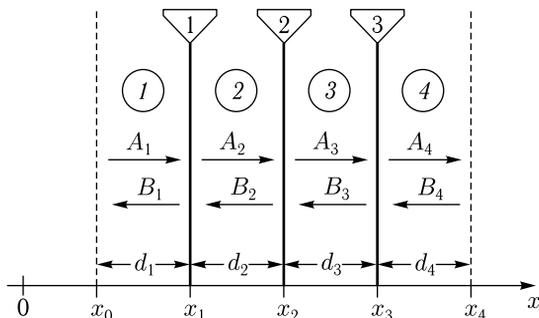


Рис. 5.3. Геометрия симметричной задачи о распространении двух встречных волн через структуру из четырех сред, разделенных тремя границами

Структура состоит из четырех сред (номера 1–4 в кругах), разделенных тремя границами (номера 1–3 в треугольниках). Параметры всех четырех сред могут быть различными, все волновые числа, обозначаемые k_1, k_2, k_3, k_4 , могут быть действительными или комплексными. Амплитуды волн, распространяющихся в положительном направлении оси Ox , обозначены буквами A_i , в отрицательном — B_i , где i — номер среды. Амплитуды волн A_1 и B_4 являются заданными,

то есть на структуру падают две встречные волны: одна слева направо из точки с координатой x_0 , имеющая амплитуду A_{10} , другая справа налево из точки с координатой x_4 , имеющая амплитуду B_{40} и сдвиг по фазе относительно первой волны на угол φ .

Таким образом:

$$A_1 = A_{10}; \quad (5.69)$$

$$B_4 = B_{40}e^{i\varphi}. \quad (5.70)$$

Амплитуды и фазы всех остальных волн определяются амплитудами и соотношением фаз этих двух волн в сочетании с параметрами сред.

Решения волновых уравнений в областях 1–4, нормированные относительно точек исхода соответствующих волн, имеют вид:

$$U_1 = A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + B_1 e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (5.71)$$

$$U_2 = A_2 e^{-ik_2(x-x_1)} + B_2 e^{ik_2(x-x_2)}; \quad (5.72)$$

$$U_3 = A_3 e^{-ik_3(x-x_2)} + B_3 e^{ik_3(x-x_3)}; \quad (5.73)$$

$$U_4 = A_4 e^{-ik_4(x-x_3)} + B_4 e^{ik_4(x-x_4)}. \quad (5.74)$$

Производные решений имеют вид:

$$\frac{dU_1}{dx} = -iA_1 k_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + iB_1 k_1 e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (5.75)$$

$$\frac{dU_2}{dx} = -iA_2 k_2 e^{-ik_2(x-x_1)} + iB_2 k_2 e^{ik_2(x-x_2)}; \quad (5.76)$$

$$\frac{dU_3}{dx} = -iA_3 k_3 e^{-ik_3(x-x_2)} + iB_3 k_3 e^{ik_3(x-x_3)}; \quad (5.77)$$

$$\frac{dU_4}{dx} = -iA_4 k_4 e^{-ik_4(x-x_3)} + iB_4 k_4 e^{ik_4(x-x_4)}. \quad (5.78)$$

Граничные условия при x_1 , x_2 и x_3 имеют вид:

$$U_1|_{x=x_1} = U_2|_{x=x_1}; \quad (5.79)$$

$$U_2|_{x=x_2} = U_3|_{x=x_2}; \quad (5.80)$$

$$U_3|_{x=x_3} = U_4|_{x=x_3}; \quad (5.81)$$

$$\left. \frac{dU_1}{dx} \right|_{x=x_1} = \left. \frac{dU_2}{dx} \right|_{x=x_1}; \quad (5.82)$$

$$\left. \frac{dU_2}{dx} \right|_{x=x_2} = \left. \frac{dU_3}{dx} \right|_{x=x_2}; \quad (5.83)$$

$$\left. \frac{dU_3}{dx} \right|_{x=x_3} = \left. \frac{dU_4}{dx} \right|_{x=x_3}. \quad (5.84)$$

Для упрощения дальнейшей записи введем обозначения:

$$e_1 = e^{-ik_1(x_1-x_0)}; \quad (5.85)$$

$$e_2 = e^{-ik_2(x_2-x_1)}; \quad (5.86)$$

$$e_3 = e^{-ik_3(x_3-x_2)}; \quad (5.87)$$

$$e_4 = e^{-ik_4(x_4-x_3)}; \quad (5.88)$$

а также

$$e_0 = e^{i\varphi}. \quad (5.89)$$

Подставляя решение и производные в граничные условия, учитывая (5.85)–(5.89) и записывая уравнения в порядке следования неизвестных, получаем систему для определения $B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4$ через A_1 и B_4 :

$$B_1 - A_2 - B_2 e_2 = -A_1 e_1; \quad (5.90)$$

$$A_2 e_2 + B_2 - A_3 - B_3 e_3 = 0; \quad (5.91)$$

$$A_3 e_3 + B_3 - A_4 = B_4 e_4; \quad (5.92)$$

$$B_1 k_1 + A_2 k_2 - B_2 k_2 e_2 = A_1 k_1 e_1; \quad (5.93)$$

$$-A_2 k_2 e_2 + B_2 k_2 + A_3 k_3 - B_3 k_3 e_3 = 0. \quad (5.94)$$

$$-A_3 k_3 e_3 + B_3 k_3 + A_4 k_4 = B_4 k_4 e_4. \quad (5.95)$$

Таблицы коэффициентов этой системы уравнений имеют вид:

B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	A_4	A_1, B_4
1	-1	$-e_2$	0	0	0	$-A_1 e_1$
0	e_2	1	-1	$-e_3$	0	0
0	0	0	e_3	1	-1	$B_4 e_4$
k_1	k_2	$-k_2 e_2$	0	0	0	$A_1 k_1 e_1$
0	$-k_2 e_2$	k_2	k_3	$-k_3 e_3$	0	0
0	0	0	$-k_2 e_2$	k_3	k_4	$B_4 k_4 e_4$

(5.96)

Все детерминанты, получаемые из этих таблиц, имеют знак минус, который при вычислении амплитуд сокращается, поэтому далее запишем их без этого знака. Учтем также обозначения (5.69), (5.70) и приведем детерминант D_0 в двух эквивалентных вариантах. Итак, в результате таких действий детерминанты принимают вид:

$$D_0 = (k_1 + k_2)[(k_2 + k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 - k_3)(k_3 - k_4)e_3^2] + (k_1 - k_2)[(k_2 - k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 + k_3)(k_3 - k_4)e_3^2]e_2^2; \quad (5.97)$$

$$D_{B1} = A_{10} \left\{ (k_1 - k_2)[(k_2 + k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 - k_3)(k_3 - k_4)e_3^2] + (k_1 + k_2)[(k_2 - k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 + k_3)(k_3 - k_4)e_3^2]e_2^2 \right\} e_1 + B_{40} e_0 8 k_2 k_3 k_4 e_2 e_3 e_4; \quad (5.98)$$

$$D_{A2} = A_{10} 2 k_1 [(k_2 + k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 - k_3)(k_3 - k_4)e_3^2] e_1 - B_{40} e_0 4 (k_1 - k_2) k_3 k_4 e_2 e_3 e_4; \quad (5.99)$$

$$D_{B2} = A_{10} 2 k_1 [(k_2 - k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 + k_3)(k_3 - k_4)e_3^2] e_1 e_2 + B_{40} e_0 4 (k_1 + k_2) k_3 k_4 e_3 e_4; \quad (5.100)$$

$$D_{A3} = A_{10}4k_1k_2(k_3 + k_4)e_1e_2 - B_{40}e_02[(k_1+k_2)(k_2-k_3) + (k_1-k_2)(k_2+k_3)e_2^2]k_4e_3e_4; \quad (5.101)$$

$$D_{B3} = A_{10}4k_1k_2(k_3 - k_4)e_1e_2e_3 + B_{40}e_02[(k_1+k_2)(k_2+k_3) + (k_1-k_2)(k_2-k_3)e_2^2]k_4e_4; \quad (5.102)$$

$$D_{A4} = A_{10}8k_1k_2k_3e_1e_2e_3 - B_{40}e_0\left\{[(k_1+k_2)(k_2+k_3) + (k_1-k_2)(k_2-k_3)e_2^2](k_3-k_4) + [(k_1+k_2)(k_2-k_3) + (k_1-k_2)(k_2+k_3)e_2^2](k_3+k_4)e_3^2\right\}e_4; \quad (5.103)$$

$$D_0 = [(k_1+k_2)(k_2+k_3) + (k_1-k_2)(k_2-k_3)e_2^2](k_3+k_4) + [(k_1+k_2)(k_2-k_3) + (k_1-k_2)(k_2+k_3)e_2^2](k_3-k_4)e_3^2. \quad (5.104)$$

С учетом этих детерминантов, амплитуды волн $B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4$ имеют вид:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{D_{B1}}{D_0}; & A_2 &= \frac{D_{A2}}{D_0}; & B_2 &= \frac{D_{B2}}{D_0}; \\ A_3 &= \frac{D_{A3}}{D_0}; & B_3 &= \frac{D_{B3}}{D_0}; & A_4 &= \frac{D_{A4}}{D_0}. \end{aligned} \quad (5.105)$$

5.2.4. Пять сред, разделенные четырьмя границами

Рассмотрим симметричную задачу о распространении двух волн противоположных направлений через структуру, содержащую пять сред, разделенных четырьмя границами, схема которой показана на рис. 5.4.

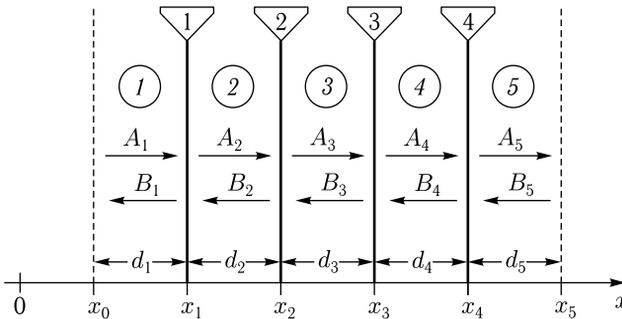


Рис. 5.4. Геометрия симметричной задачи о распространении двух встречных волн через структуру из пяти сред, разделенных четырьмя границами

Структура состоит из пяти сред (номера 1–5 в кругах), разделенных четырьмя границами (номера 1–4 в треугольниках). Параметры всех четырех сред могут быть различными, все волновые числа, обозначаемые k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 могут быть действительными или комплексными. Амплитуды волн, распространяющихся в положительном направлении

оси Ox , обозначены буквами A_i , в отрицательном — B_i , где i — номер среды. Амплитуды волн A_1 и B_5 являются заданными, то есть на структуру падают две встречные волны: одна слева направо из точки с координатой x_0 , имеющая амплитуду A_{10} , другая справа налево из точки с координатой x_5 , имеющая амплитуду B_{50} и сдвиг по фазе относительно первой волны на угол φ .

Таким образом,

$$A_1 = A_{10}; \quad (5.106)$$

$$B_5 = B_{50}e^{i\varphi}. \quad (5.107)$$

Амплитуды и фазы всех остальных волн определяются амплитудами и соотношением фаз этих двух волн в сочетании с параметрами сред.

Решения волновых уравнений в областях 1–5, нормированные относительно точек исхода соответствующих волн, имеют вид:

$$U_1 = A_1e^{-ik_1(x-x_0)} + B_1e^{-ik_1(x-x_1)}; \quad (5.108)$$

$$U_2 = A_2e^{-ik_2(x-x_1)} + B_2e^{-ik_2(x-x_2)}; \quad (5.109)$$

$$U_3 = A_3e^{-ik_3(x-x_2)} + B_3e^{-ik_3(x-x_3)}; \quad (5.110)$$

$$U_4 = A_4e^{-ik_4(x-x_3)} + B_4e^{-ik_4(x-x_4)}; \quad (5.111)$$

$$U_5 = A_5e^{-ik_5(x-x_4)} + B_5e^{-ik_5(x-x_5)}. \quad (5.112)$$

Производные решений имеют вид:

$$\frac{dU_1}{dx} = -iA_1k_1e^{-ik_1(x-x_0)} + iB_1k_1e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (5.113)$$

$$\frac{dU_2}{dx} = -iA_2k_2e^{-ik_2(x-x_1)} + iB_2k_2e^{ik_2(x-x_2)}; \quad (5.114)$$

$$\frac{dU_3}{dx} = -iA_3k_3e^{-ik_3(x-x_2)} + iB_3k_3e^{ik_3(x-x_3)}; \quad (5.115)$$

$$\frac{dU_4}{dx} = -iA_4k_4e^{-ik_4(x-x_3)} + iB_4k_4e^{ik_4(x-x_4)}; \quad (5.116)$$

$$\frac{dU_5}{dx} = -iA_5k_5e^{-ik_5(x-x_4)} + iB_5k_5e^{ik_5(x-x_5)}. \quad (5.117)$$

Граничные условия при x_1 , x_2 , x_3 и x_4 имеют вид:

$$U_1|_{x=x_1} = U_2|_{x=x_1}; \quad (5.118)$$

$$U_2|_{x=x_2} = U_3|_{x=x_2}; \quad (5.119)$$

$$U_3|_{x=x_3} = U_4|_{x=x_3}; \quad (5.120)$$

$$U_4|_{x=x_4} = U_5|_{x=x_4}; \quad (5.121)$$

$$\left. \frac{dU_1}{dx} \right|_{x=x_1} = \left. \frac{dU_2}{dx} \right|_{x=x_1}; \quad (5.122)$$

$$\left. \frac{dU_2}{dx} \right|_{x=x_2} = \left. \frac{dU_3}{dx} \right|_{x=x_2}; \quad (5.123)$$

$$\left. \frac{dU_3}{dx} \right|_{x=x_3} = \left. \frac{dU_4}{dx} \right|_{x=x_3}; \quad (5.124)$$

$$\left. \frac{dU_4}{dx} \right|_{x=x_4} = \left. \frac{dU_5}{dx} \right|_{x=x_4}. \quad (5.125)$$

Для упрощения дальнейшей записи введем обозначения:

$$e_1 = e^{-ik_1(x_1-x_0)}; \quad (5.126)$$

$$e_2 = e^{-ik_2(x_2-x_1)}; \quad (5.127)$$

$$e_3 = e^{-ik_3(x_3-x_2)}; \quad (5.128)$$

$$e_4 = e^{-ik_4(x_4-x_3)}; \quad (5.129)$$

$$e_5 = e^{-ik_5(x_5-x_4)}; \quad (5.130)$$

а также

$$e_0 = e^{i\varphi}. \quad (5.131)$$

Введем также вспомогательные обозначения для амплитуд падающих волн:

$$A = A_1 e_1 = A_{10} e_1; \quad (5.132)$$

$$B = B_5 e_5 = B_{50} e_0 e_5. \quad (5.133)$$

При этом

$$A_{10} = A_1; \quad (5.134)$$

$$B_{50} = \frac{B_5}{e_0}. \quad (5.135)$$

Подставляя решение и производные в граничные условия, учитывая (5.126)–(5.130) и записывая уравнения в порядке следования неизвестных, получаем систему уравнений для определения $B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, A_5$ через A_1 и B_5 :

$$B_1 - A_2 - B_2 e_2 = -A_1 e_1; \quad (5.136)$$

$$A_2 e_2 + B_2 - A_3 - B_3 e_3 = 0; \quad (5.137)$$

$$A_3 e_3 + B_3 - A_4 - B_4 e_4 = 0; \quad (5.138)$$

$$A_4 e_4 + B_4 - A_5 = B_5 e_5; \quad (5.139)$$

$$B_1 k_1 + A_2 k_2 - B_2 k_2 e_2 = A_1 k_1 e_1; \quad (5.140)$$

$$-A_2 k_2 e_2 + B_2 k_2 + A_3 k_3 - B_3 k_3 e_3 = 0. \quad (5.141)$$

$$-A_3 k_3 e_3 + B_3 k_3 + A_4 k_4 - B_4 k_4 e_4 = 0. \quad (5.142)$$

$$-A_4 k_4 e_4 + B_4 k_4 + A_5 k_5 = B_5 k_5 e_5. \quad (5.143)$$

Таблицы коэффициентов этой системы уравнений имеют вид:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc|cc}
 B_1 & A_2 & B_2 & A_3 & B_3 & A_4 & B_4 & A_5 & A_1, B_5 \\
 \hline
 1 & -1 & -e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_1 e_1 \\
 0 & e_2 & 1 & -1 & -e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & e_3 & 1 & -1 & -e_4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_4 & 1 & -1 & B_5 e_5 \\
 \hline
 k_1 & k_2 & -k_2 e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1 e_1 k_1 \\
 0 & -k_2 e_2 & k_2 & k_3 & -k_3 e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -k_3 e_3 & k_3 & k_4 & -k_4 e_4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_4 e_4 & k_4 & k_5 & B_5 e_5 k_5 \\
 \hline
 \end{array} \\
 \end{array} \quad (5.144)$$

Все детерминанты, получаемые из этих таблиц, имеют знак минус, который при вычислении амплитуд сокращается, поэтому далее запишем их без этого знака. Учтем также обозначения (5.132), (5.133) и приведем детерминант D_0 в двух эквивалентных вариантах. Итак, получаемые детерминанты принимают вид:

$$\begin{aligned}
 D_0 = & (k_1 + k_2) \left\{ (k_2 + k_3) [(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] + \right. \\
 & + (k_2 - k_3) [(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] e_3^2 \left. \right\} + \\
 & + (k_1 - k_2) \left\{ (k_2 - k_3) [(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] + \right. \\
 & + (k_2 + k_3) [(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] e_3^2 \left. \right\} e_2^2; \quad (5.145)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{B1} = & A_{10} \left\langle (k_1 - k_2) \left\{ (k_2 + k_3) [(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] + \right. \right. \\
 & + (k_2 - k_3) [(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] e_3^2 \left. \right\} + \\
 & + (k_1 + k_2) \left\{ (k_2 - k_3) [(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] + \right. \\
 & + (k_2 + k_3) [(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] e_3^2 \left. \right\} e_2^2 \left. \right\rangle e_1 + \\
 & + B_{50} e_0 16 k_2 k_3 k_4 k_5 e_2 e_3 e_4 e_5; \quad (5.146)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{A2} = & A_{10} 2 k_1 \left\{ (k_2 + k_3) [(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] + \right. \\
 & + (k_2 - k_3) [(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] e_3^2 \left. \right\} e_1 - \\
 & - B_{50} e_0 8 (k_1 - k_2) k_3 k_4 k_5 e_2 e_3 e_4 e_5; \quad (5.147)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{B2} = & A_{10} 2 k_1 \left\{ (k_2 - k_3) [(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] + \right. \\
 & + (k_2 + k_3) [(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] e_3^2 \left. \right\} e_1 e_2 + \\
 & + B_{50} e_0 8 (k_1 + k_2) k_3 k_4 k_5 e_2 e_3 e_4 e_5; \quad (5.148)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{A3} = & A_{10} 4 k_1 k_2 [(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] e_1 e_2 - \\
 & - B_{50} e_0 4 [(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2] k_4 k_5 e_3 e_4 e_5; \quad (5.149)
 \end{aligned}$$

$$D_{B3} = A_{10}4k_1k_2[(k_3-k_4)(k_4+k_5) + (k_3+k_4)(k_4-k_5)e_4^2]e_1e_2e_3 + B_{50}e_04[(k_1+k_2)(k_2+k_3) + (k_1-k_2)(k_2-k_3)e_2^2]k_4k_5e_4e_5; \quad (5.150)$$

$$D_{A4} = A_{10}8k_1k_2k_3(k_4+k_5)e_1e_2e_3 - B_{50}e_02\left\{[(k_1+k_2)(k_2+k_3) + (k_1-k_2)(k_2-k_3)e_2^2](k_3-k_4) + [(k_1+k_2)(k_2-k_3) + (k_1-k_2)(k_2+k_3)e_2^2](k_3+k_4)e_3^2\right\}k_5e_4e_5; \quad (5.151)$$

$$D_{B4} = A_{10}8k_1k_2k_3(k_4-k_5)e_1e_2e_3e_4 - B_{50}e_02\left\{[(k_1+k_2)(k_2+k_3) + (k_1-k_2)(k_2-k_3)e_2^2](k_3+k_4) + [(k_1+k_2)(k_2-k_3) + (k_1-k_2)(k_2+k_3)e_2^2](k_3-k_4)e_3^2\right\}k_5e_5; \quad (5.152)$$

$$D_{A5} = A_{10}16k_1k_2k_3k_4e_1e_2e_3e_4 - B_{50}e_0 \cdot \left\{[(k_1+k_2)(k_2+k_3) + (k_1-k_2)(k_2-k_3)e_2^2](k_3+k_4) + [(k_1+k_2)(k_2-k_3) + (k_1-k_2)(k_2+k_3)e_2^2](k_3-k_4)e_3^2\right\}(k_4-k_5) + \left\{[(k_1+k_2)(k_2+k_3) + (k_1-k_2)(k_2-k_3)e_2^2](k_3-k_4) + [(k_1+k_2)(k_2-k_3) + (k_1-k_2)(k_2+k_3)e_2^2](k_3+k_4)e_3^2\right\} \times (k_4+k_5)e_4^2 \cdot e_5; \quad (5.153)$$

$$D_0 = \left\{[(k_1+k_2)(k_2+k_3) + (k_1-k_2)(k_2-k_3)e_2^2](k_3+k_4) + [(k_1+k_2)(k_2-k_3) + (k_1-k_2)(k_2+k_3)e_2^2](k_3-k_4)e_3^2\right\}(k_4+k_5) + \left\{[(k_1+k_2)(k_2+k_3) + (k_1-k_2)(k_2-k_3)e_2^2](k_3-k_4) + [(k_1+k_2)(k_2-k_3) + (k_1-k_2)(k_2+k_3)e_2^2](k_3+k_4)e_3^2\right\} \times (k_4-k_5)e_4^2. \quad (5.154)$$

При этом амплитуды волн определяются выражениями:

$$B_1 = \frac{D_{B1}}{D_0}; \quad A_2 = \frac{D_{A2}}{D_0}; \quad B_2 = \frac{D_{B2}}{D_0}; \quad A_3 = \frac{D_{A3}}{D_0}; \quad (5.155)$$

$$B_3 = \frac{D_{B3}}{D_0}; \quad A_4 = \frac{D_{A4}}{D_0}; \quad B_4 = \frac{D_{B4}}{D_0}; \quad A_5 = \frac{D_{A5}}{D_0}.$$

5.2.5. Алгоритмическая схема последовательного вычисления коэффициентов отражения и прохождения

В предыдущих разделах получены аналитические выражения для амплитуд распространяющихся волн обоих направлений. Приведем теперь краткую схему численного расчета коэффициентов отражения

и прохождения. В качестве примера рассмотрим наиболее сложный из приведенных случаев, когда число сред равно пяти.

Будем считать, что изначально заданы:

— координаты границ разделов между средами

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5;$$

— волновые числа во всех средах

$$k_1, k_2, k_3, k_4, k_5,$$

которые могут быть действительными или комплексными (раздел 1.2.5, форм. (1.160), (1.162), (1.163));

— начальные амплитуды A_1, B_5 , а также сдвиг фазы между падающими волнами φ .

Приведем последовательность расчета по шагам.

Шаг № 1.

Вычисление вспомогательных функций e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 по формулам (5.126)–(5.130), а также параметра e_0 по формуле (5.131).

Шаг № 2.

Вычисление амплитудных параметров A_{10} и B_{50} с помощью формул (5.134), (5.135).

Шаг № 3.

Вычисление детерминанта D_0 по формуле (5.145) или (5.154), а также детерминантов $D_{B1}, D_{A2}, D_{B2}, D_{A3}, D_{B3}, D_{A4}, D_{B4}, D_{A5}$ по формулам (5.146)–(5.153).

Шаг № 4.

Вычисление амплитуд распространяющихся волн $B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, A_5$ по формулам (5.155).

Шаг № 5.

Вычисление коэффициентов отражения и прохождения по формулам (1.226) и (1.227), которые для структуры из пяти сред принимают вид:

$$R_e = |B_1|^2; \quad (5.156)$$

$$T_e = |A_5|^2 \frac{k_5}{k_1}, \quad (5.157)$$

Замечание. Заметим, что формулы (5.156) и (5.157) полностью корректны только в случае действительных волновых чисел в первой и пятой средах. При комплексных волновых числах непосредственное использование этих формул приводит к превышению потока энергии проходящей волны над потоком энергии падающей, как это наглядно показано в разделе 4.4 (рис. 4.10). В этом случае следует учитывать не только падающую и проходящую волны, а также активную, реактивную и локализованную составляющие потоков энергии распространяющихся волн в соответствии с механизмом баланса энергии, рассмотренным в работе [62], а также в монографии [54].

5.3. Электромагнитная волна. Распространение двух встречных волн

Обратимся теперь к задаче о распространении электромагнитных волн через слоистые структуры. Как отмечено в главе 2 (разделы 2.2.1, 2.2.5–2.2.7), здесь наиболее характерными являются три случая падения волны на плоскость структуры: нормальное падение, а также наклонное с продольной и поперечной поляризациями. Рассмотрим эти случаи последовательно, для чего начнем с общей геометрии перечисленных задач.

5.3.1. Геометрия распространения электромагнитных волн через слоистые структуры

Плоская электромагнитная волна имеет плоский волновой фронт, в изотропной однородной среде, перпендикулярный направлению распространения волны, которое в этом случае совпадает с направлением волнового вектора. Если волновой вектор параллелен нормали к плоскости структуры, то можно говорить о нормальном падении волны. Если направление волнового вектора не совпадает с направлением той же нормали, то падение волны является наклонным. Как и в случае одномерной волны будем рассматривать задачу в симметричном виде, то есть падение на структуру двух волн встречных направлений. Итак, рассмотрим перечисленные случаи по отдельности.

5.3.2. Нормальное падение

Геометрия задачи о нормальном падении иллюстрируется рис. 5.5.

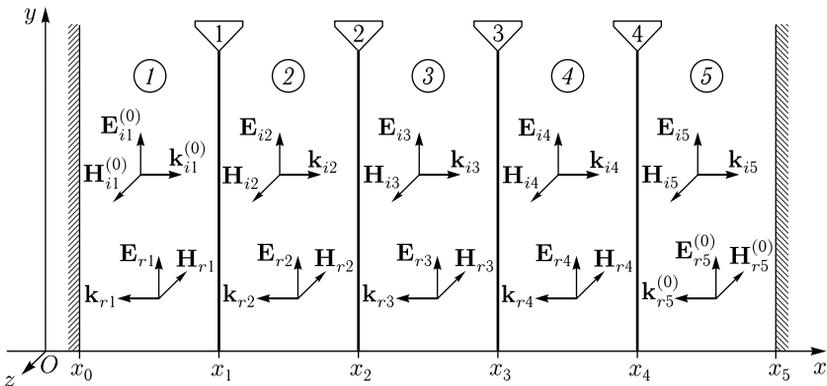


Рис. 5.5. Геометрия задачи о нормальном падении электромагнитной волны на слоистую структуру

Рассматривается распространение плоской электромагнитной волны через структуру, состоящую из плоскопараллельных слоев. Внутри каждого слоя параметры среды сохраняются, а на границах раздела

между слоями могут скачкообразно меняться. Структура содержит пять сред (номера 1–5 в кругах), разделенных четырьмя границами (номера 1–4 в треугольниках). Электродинамические параметры всех сред могут быть различными.

Декартова система координат $Oxyz$ выбрана таким образом, что плоскость Oyz параллельна плоскостям слоев, а ось Ox им перпендикулярна.

Все волны распространяются вдоль оси Ox в положительном или отрицательном направлении. При этом волновые векторы всех волн направлены вдоль этой оси, а векторы электрического и магнитного полей волн ей перпендикулярны.

На рисунке показана ориентация волновых векторов и векторов электрического и магнитного полей этих волн. Векторы, соответствующие волнам, распространяющимся в положительном направлении оси Ox , обозначены индексом « i » (incident), векторы, соответствующие волнам, распространяющимся в отрицательном направлении оси Ox , обозначены индексом « r » (reflected). Второй индекс соответствует номеру среды. Верхний индекс «(0)» относится к волнам, входящим в структуру.

Предполагается, что при распространении волны ее поляризация не меняется, то есть направление вектора электрического поля сохраняется постоянным.

При прохождении через границу направления векторов электрического и магнитного полей волны сохраняются. При отражении от границы направление вектора электрического поля сохраняется, а направление вектора магнитного поля меняется на противоположное. Отражение волн на краях структуры при x_0 и x_5 отсутствует.

В структуру входят две волны: одна — волна прямого направления, распространяющаяся в положительном направлении оси Ox в среде 1, ее волновой вектор: $\mathbf{k}_{i1}^{(0)}$, поля: $\mathbf{E}_{i1}^{(0)}$ и $\mathbf{H}_{i1}^{(0)}$, а начальная амплитуда задана в точке x_0 , другая — обратного направления, распространяющаяся в отрицательном направлении оси Ox в среде 5, ее волновой вектор: $\mathbf{k}_{r5}^{(0)}$, поля: $\mathbf{E}_{r5}^{(0)}$ и $\mathbf{H}_{r5}^{(0)}$, а начальная амплитуда задана в точке x_5 .

Временной сдвиг фазы между падающими волнами задается для волны обратного направления в точке x_5 относительно фазы волны прямого направления в точке x_0 .

5.3.3. Наклонное падение

Геометрия задачи о наклонном падении иллюстрируется рис. 5.6.

Рассматривается распространение плоской электромагнитной волны через структуру, состоящую из плоскопараллельных слоев.

Внутри каждого слоя параметры среды сохраняются, а на границах раздела между слоями могут скачкообразно меняться. Структура содержит пять сред (номера 1–5 в кругах), разделенных четырьмя границами (номера 1–4 в треугольниках). Электродинамические параметры всех сред могут быть различными.

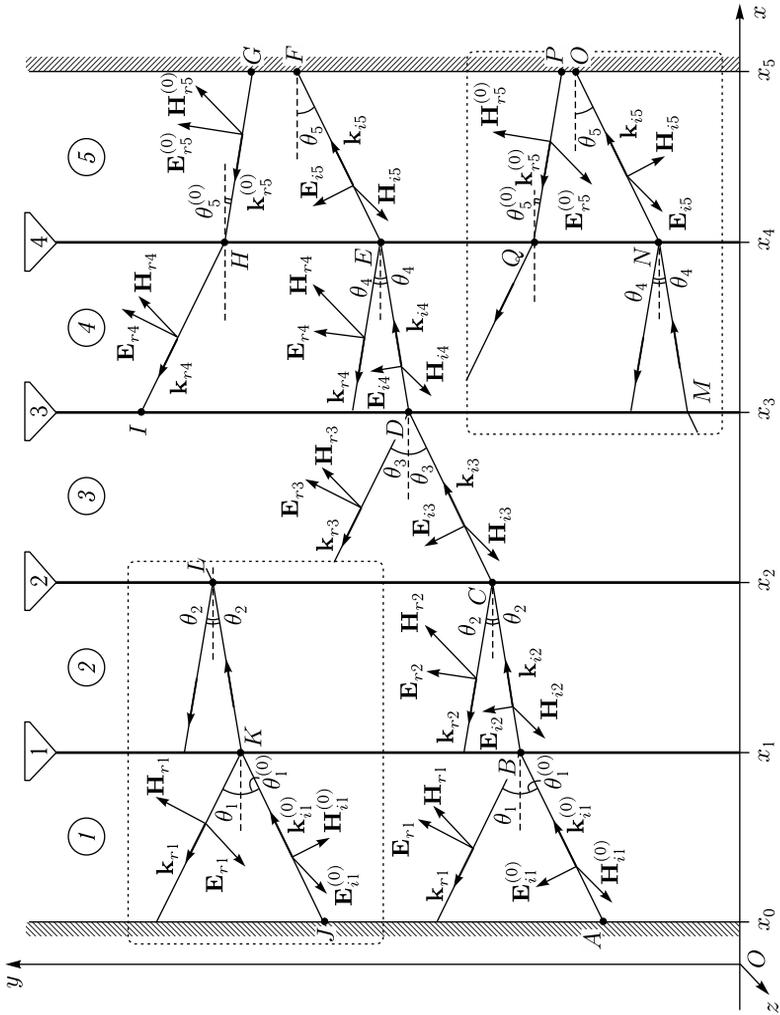


Рис. 5.6. Геометрия задачи о наклонном падении электромагнитной волны на слоистую структуру

Волновые векторы волн, входящих в структуру, лежат в плоскости Oxy , которая является плоскостью падения волны.

Рассматриваются два вида поляризации падающей волны:

1) *продольная* поляризация, при которой вектор электрического поля лежит в плоскости падения, а вектор магнитного поля ей перпендикулярен;

2) *поперечная* поляризация, при которой вектор электрического поля перпендикулярен плоскости падения, а вектор магнитного поля лежит в этой плоскости.

В обоих этих случаях начальная поляризация волны сохраняется во всей структуре, то есть в первом случае электрические векторы всех волн внутри структуры остаются параллельными плоскости падения, а во втором — перпендикулярными той же плоскости. На рисунке показана ориентация волновых векторов и векторов электрического и магнитного полей этих волн. Векторы, соответствующие волнам, распространяющимся в положительном направлении оси Ox , обозначены индексом « i » (incident), векторы, соответствующие волнам, распространяющимся в отрицательном направлении оси Ox , обозначены индексом « r » (reflected). Второй индекс соответствует номеру среды. Верхний индекс «(0)» относится к волнам, входящим в структуру.

В структуру входят две волны: одна — волна прямого направления, распространяющаяся в положительном направлении оси Ox в среде 1, ее волновой вектор: $\mathbf{k}_{i1}^{(0)}$, поля: $\mathbf{E}_{i1}^{(0)}$ и $\mathbf{H}_{i1}^{(0)}$, а начальная амплитуда задана в точке x_0 , другая — обратного направления, распространяющаяся в отрицательном направлении оси Ox в среде 5, ее волновой вектор: $\mathbf{k}_{r5}^{(0)}$, поля: $\mathbf{E}_{r5}^{(0)}$ и $\mathbf{H}_{r5}^{(0)}$, а начальная амплитуда задана в точке x_5 .

Временной сдвиг фазы между падающими волнами задается для волны обратного направления в точке x_5 относительно фазы волны прямого направления в точке x_0 .

Отражение волн на краях структуры при x_0 и x_5 отсутствует.

На основной части рисунка вне пунктирных рамок из нижнего левого угла от среды 1 к верхнему правому углу в среде 5 показано распространение волны прямого направления с продольной поляризацией — траектория луча, выходящего из точки А, показана линией А-В-С-D-E-F. Распространение этой волны сопровождается многократными переотражениями внутри каждого слоя, которые для простоты рисунка не показаны. Волна обратного направления продольной поляризации, начинаясь в среде 1, распространяется вдоль точек G-H-I и далее. Многократные переотражения также не показаны.

В пунктирных рамках показаны крайние фрагменты распространения волн поперечной поляризации. Волна прямого направления распространяется через точки J-K-L, а также M-N-O, волна обратного направления — через точки P-Q и далее. При прохождении через границу направления векторов электрического и магнитного полей

волны сохраняются. При отражении от границы направление вектора электрического поля сохраняется, а направление вектора магнитного поля меняется на противоположное.

5.3.4. Особенности трехмерного характера задач о распространении электромагнитных волн

Рассмотрим некоторые особенности задач о распространении электромагнитных волн через многослойные среды. Основным отличием электромагнитных волн от одномерных является их трехмерный характер, что требует для их изучения использовать трехмерную систему координат. При этом расчет амплитуд электрического и магнитного полей распространяющейся электромагнитной волны в сравнении со случаем одномерной волны значительно усложняется.

В то же время, основные закономерности распространения волн, состоящие в описании их свойств с помощью волнового уравнения в совокупности с граничными условиями, требующими непрерывности волновой функции и ее первой производной по координате на границах раздела сред, в целом сохраняются.

Такое обстоятельство позволяет для решения задач об электромагнитных волнах использовать решение одномерной задачи с соответствующими дополнениями.

По аналогии со случаем одномерной задачи будем считать, что структура состоит из N плоскопараллельных слоев, плоскость которых перпендикулярна оси Ox . При этом координатная плоскость Oyz совпадает с плоскостью слоев структуры. Положение границ слоев определяется координатами x_0, \dots, x_N .

В работе [65] для случая трех сред выявлено единство электродинамических задач с одномерной, показана возможность получения решений электродинамических задач из решения одномерной с помощью определенных замен коэффициентов и переменных. Следуя этой работе, а также данным раздела 3.2.11 (таблица 3.1) настоящей монографии, приведем таблицу соответствующих замен для произвольного числа сред. В первом столбце таблицы содержатся параметры для одномерной задачи. Для получения решения электродинамических задач достаточно в конечных формулах одномерной задачи соответствующие параметры заменить приведенными в остальных столбцах таблицы.

В этой таблице используются параметры среды с номером n :

волновое число

$$k_n = \omega \sqrt{\varepsilon_n \varepsilon_0 \mu_n \mu_0}, \quad (5.158)$$

импеданс (волновое сопротивление)

$$Z_n = \sqrt{\frac{\mu_n \mu_0}{\varepsilon_n \varepsilon_0}}. \quad (5.159)$$

Электродинамические постоянные в системе СИ, согласно (1.443), (1.444), равны:

электрическая

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м} \approx 8,842 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}, \quad (5.160)$$

магнитная

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} \approx 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}. \quad (5.161)$$

В приведенной таблице амплитуды A_n соответствуют волнам, распространяющимся в положительном направлении оси Ox , амплитуды B_n — волнам, распространяющимся в отрицательном направлении той же оси.

В случае нормального падения волны на структуру, амплитуды поперечных компонент электрического и магнитного полей волны в слое n определяются через величины A_n и B_n следующим образом:

$$E_{ny} = A_n, B_n; \quad (5.162)$$

$$H_{nz} = \frac{A_n}{Z_n}, \frac{B_n}{Z_n}. \quad (5.163)$$

В случае продольной поляризации те же амплитуды равны:

$$E_{nx} = -A_n \sin \theta_n, B_n \sin \theta_n; \quad (5.164)$$

$$E_{ny} = A_n \cos \theta_n, B_n \cos \theta_n; \quad (5.165)$$

$$H_{1n} = \frac{A_n}{Z_n}, -\frac{B_n}{Z_n}. \quad (5.166)$$

В случае поперечной поляризации амплитуды равны:

$$E_{nz} = A_n, B_n; \quad (5.167)$$

$$H_{nx} = \frac{A_n}{Z_n} \sin \theta_n, \frac{B_n}{Z_n} \sin \theta_n; \quad (5.168)$$

$$H_{ny} = -\frac{A_n}{Z_n} \cos \theta_n, \frac{B_n}{Z_n} \cos \theta_n. \quad (5.169)$$

В случае падения встречных волн с обоих концов структуры их параметры в крайних слоях считаются заданными: в слое 1 заданы A_1 и θ_1 , в слое N заданы B_N и θ_N . При этом волновые числа k_n и координаты границ x_n заданы для всех слоев.

Не заданные заранее углы θ_n между направлением распространения волны в слое n и осью Ox подчиняются закону Снеллиуса:

$$k_n \sin \theta_n = \text{const}, \quad (5.170)$$

то есть

$$k_{n-1} \sin \theta_{n-1} = k_n \sin \theta_n = k_{n+1} \sin \theta_{n+1}. \quad (5.171)$$

Из этих соотношений можно получить рекуррентные формулы для определения углов θ_n . Так, для волн, распространяющихся в положи-

тельном направлении оси Ox , начиная с k_1 и θ_1 , увеличивая индекс на единицу, последовательно получаем

$$\cos \theta_n = \frac{\sqrt{k_n^2 - k_{n-1}^2 \cos^2 \theta_{n-1}}}{k_n}. \quad (5.172)$$

Для волн, распространяющихся в отрицательном направлении оси Ox , начиная с k_N и θ_N , уменьшая индекс на единицу, последовательно получаем

$$\cos \theta_{n-1} = \frac{\sqrt{k_{n-1}^2 - k_n^2 \cos^2 \theta_n}}{k_{n-1}}. \quad (5.173)$$

Таким образом, для сведения задачи для электромагнитной волны к задаче для одномерной волны, надо сначала найти все углы θ_n , после чего воспользоваться заменами, приведенными в таблице.

Забегая несколько вперед, в качестве примера можно увидеть, что систему (5.204)–(5.211) для пяти сред при нормальном падении электромагнитной волны, получаемую далее в разделе 5.3.6, с помощью замен, приведенных в табл. 5.1, можно свести к системе (5.136)–(5.143)

Таблица 5.1. Эквиваленты обозначений в одномерных и электродинамических задачах при произвольном числе сред

Одномерная задача	Нормальное падение	Продольная поляризация	Поперечная поляризация
k_n	$\frac{1}{Z_n}$	$\frac{1}{Z_n \cos \theta_n}$	$\frac{\cos \theta_n}{Z_n}$
$e_n = e^{-ik_n(x_n - x_{n-1})}$	$e_n = e^{-ik_n(x_n - x_{n-1})}$	$e_{pn} = e^{-ik_n \cos \theta_n (x_n - x_{n-1})}$	$e_{pn} = e^{-ik_n \cos \theta_n (x_n - x_{n-1})}$
A_n	A_n	$A_n \cos \theta_n$	A_n
B_n	B_n	$B_n \cos \theta_n$	B_n

для одномерной задачи. То же касается и других систем, а также соответствующих детерминантов, относящихся к случаю электромагнитных волн. Таким образом, решение задач для электромагнитных волн, особенно при наклонном падении, значительно упрощается. Более подробную проверку такого положения авторы предоставляют любознательному читателю.

5.3.5. Некоторые особенности геометрии распространения электромагнитных волн

Рассмотренные в предыдущих разделах задачи о распространении электромагнитных волн через многослойные среды, получены чисто аналитическим путем. С другой стороны, распространение волн с равными частотами внутри сред может приводить к их взаимодействию, проявляющемуся в различных явлениях интерференционного характера. Не вдаваясь в подробное количественное рассмотрение этого

вопроса, приведем некоторые качественные соображения, касающиеся взаимодействия распространяющихся волн.

Для пояснения качественной стороны вопроса рассмотрим схематическую геометрию некоторых частных случаев электромагнитных задач. Для простоты ограничимся случаем падения двух встречных волн с разных сторон на одну границу.

Нормальное падение

Случай нормального падения иллюстрируется рис. 5.7.

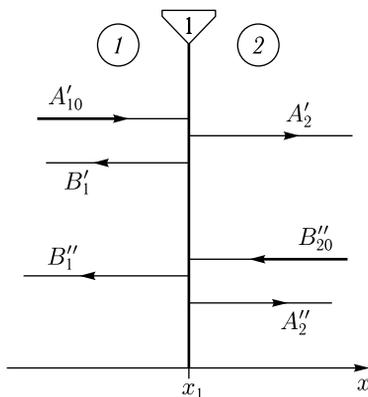


Рис. 5.7. Схема нормального падения встречных волн на одну границу

Здесь показана одна граница, разделяющая две среды 1 и 2. В среде 1 задана волна A'_{10} . Эта волна порождает в той же среде 1 отраженную волну B'_1 и в среде 2 — проходящую волну A'_2 . В среде 2 задана волна B''_{20} . Эта волна порождает в той же среде 2 отраженную волну A''_2 и в среде 1 — проходящую волну B''_{10} .

Суммарное волновое поле в среде 1 равно:

$$U_1 = A'_{10} + (B'_1 + B''_{10}). \quad (5.174)$$

Суммарное волновое поле в среде 2 равно:

$$U_2 = B''_{20} + (A'_2 + A''_2). \quad (5.175)$$

Для этих полей должны выполняться граничные условия, состоящие в равенстве полей и их производных.

Здесь все волны распространяются в одном направлении — вдоль оси Ox , поэтому их волновые фронты перпендикулярны этой оси и в результате интерференции дают картину стоячих волн, узлы и пучности которых будут параллельны плоскости границы.

Наклонное падение

В случае наклонного падения волны на плоскость структуры картина значительно усложняется. Некоторые возможные случаи иллюстрируются рис. 5.8. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

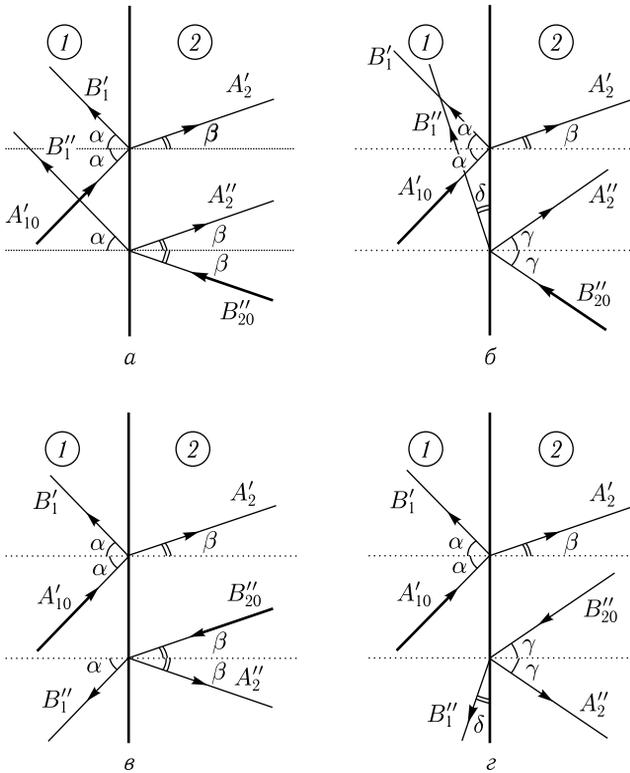


Рис. 5.8. Схемы наклонного падения встречных волн на одну границу. Обозначения падающих, отраженных и проходящих волн — те же самые, что и на рис. 5.7

На рис. 5.8,а показан случай, когда угол β падения встречной волны в среде 2 равен углу преломления прямой волны β в той же среде 2. При этом в среде 1 волна B''_{20} , порожденная встречной волной B'_1 , распространяется в том же направлении, что и волна A'_{10} , порожденная прямой волной A'_2 , а в среде 2 волна A'_2 , порожденная прямой волной A'_{10} , распространяется в том же направлении, что и волна B''_{20} , порожденная встречной волной B'_1 .

В среде 1 волны B'_1 и B''_{20} в сумме дадут волну, распространяющуюся в том же направлении, которая, интерферируя с волной A'_{10} , опять даст картину стоячих волн, узлы и пучности которых будут параллельны плоскости границы. Аналогично в среде 2 будет формироваться подобная картина стоячих волн, узлы и пучности которых также будут параллельны плоскости границы.

Не то однако получится, если угол γ падения встречной волны в среде 2 не будет равен углу преломления прямой волны β в той же

среде 2. Этот случай иллюстрируется рис. 5.8, б. При этом в среде 1 волны B'_1 и B''_1 распространяются по разным направлениям, то есть стоячая волна не формируется, а суммарная интерференционная картина бежит вдоль плоскости границы.

На рис. 5.8, в показана ситуация, когда встречная волна B''_{20} в среде 2 распространяется точно вдоль направления преломленной волны A'_2 , формируемой волной A'_{10} в среде 1. При этом волны B'_1 и B''_1 в среде 1 распространяются в направлениях, симметричных относительно нормали к плоскости границы, поэтому суммарная интерференционная картина опять имеет вид стоячих волн, узлы и пучности которых параллельны плоскости границы. Аналогичная картина стоячих волн формируется и в среде 2 за счет интерференции волн A'_2 и A''_2 .

Если же направление распространения встречной волны B''_{20} в среде 2 не совпадает с направлением волны A'_2 , как показано на рис. 5.8, г, то картина стоячих волн как в среде 1, так и в среде 2 опять не формируется.

Приведенные здесь особенности распространения электромагнитных волн при наклонном падении проявляются в любом слое многослойной структуры. При этом суммарная картина распределения амплитуд прямых и встречных волн может быть весьма сложной и совершенно отличной от распределения амплитуд в случае нормального падения, непосредственным образом сводимого в случае одномерной волны. Однако и в случае наклонного падения использование решения задачи для одномерной волны с соответствующими заменами вполне возможно. Для этого надо учесть, что, как видно из решения одномерной задачи, выражения для амплитуды всех волн представляют собой сумму двух слагаемых, одно из которых в качестве коэффициента содержит заданную условием задачи амплитуду прямой волны в первом слое A_{10} , а второе — в качестве такого же коэффициента содержит также заданную амплитуду встречной волны B_{N0} в последнем слое. Таким образом, полная задача как бы распадается на две независимых задачи, которые решаются совместно, не мешая друг другу, что и позволяет получить искомые амплитуды волн во всех слоях структуры с помощью замен, приведенных в табл. 5.1. Рассмотрение образования стоячих волн и соответствующих интерференционных явлений авторы оставляют в качестве полезного упражнения для любознательного читателя.

5.3.6. Нормальное падение электромагнитной волны на структуру, состоящую из пяти сред

В главах 2 и 3 прямой метод применялся для случаев нормального падения электромагнитной волны на структуру, состоящую из двух или трех сред, разделенных, соответственно, одной и двумя границами (разделы 2.2.1 и 3.2.1). Общая идеология рассмотрения структуры из произвольного числа сред остается такой же, как в этих двух простейших случаях. Поэтому не будем подробно проделывать выкладки для

трех и четырех сред, а обратимся сразу к случаю пяти сред, расчет которого является еще не особенно громоздким.

Будем предполагать, что на структуру падают две встречные волны: одна слева направо из точки с координатной x_0 , имеющая амплитуду A_{10} , другая справа налево из точки с координатой x_5 , имеющая амплитуду B_{50} и сдвиг по фазе относительно первой волны на угол φ (где положим $\varphi > 0$).

Подобно (3.148)–(3.153) запишем соотношения для координатных составляющих полей с учетом нормировки на точку выходы волны (раздел 3.2.1):

в области 1

$$E_{1y} = A_{10}e^{-ik_1(x-x_0)} + B_1e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (5.176)$$

$$H_{1z} = \frac{A_{10}}{Z_1}e^{-ik_1(x-x_0)} - \frac{B_1}{Z_1}e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (5.177)$$

в области 2

$$E_{2y} = A_2e^{-ik_2(x-x_1)} + B_2e^{ik_2(x-x_2)}; \quad (5.178)$$

$$H_{2z} = \frac{A_2}{Z_2}e^{-ik_2(x-x_1)} - \frac{B_2}{Z_2}e^{ik_2(x-x_2)}; \quad (5.179)$$

в области 3

$$E_{3y} = A_3e^{-ik_3(x-x_2)} + B_3e^{ik_3(x-x_3)}; \quad (5.180)$$

$$H_{3z} = \frac{A_3}{Z_3}e^{-ik_3(x-x_2)} - \frac{B_3}{Z_3}e^{ik_3(x-x_3)}; \quad (5.181)$$

в области 4

$$E_{4y} = A_4e^{-ik_4(x-x_3)} + B_4e^{ik_4(x-x_4)}; \quad (5.182)$$

$$H_{4z} = \frac{A_4}{Z_4}e^{-ik_4(x-x_3)} - \frac{B_4}{Z_4}e^{ik_4(x-x_4)}; \quad (5.183)$$

в области 5

$$E_{5y} = A_5e^{-ik_5(x-x_4)} + B_{50}e^{ik_5(x-x_5)}; \quad (5.184)$$

$$H_{5z} = \frac{A_5}{Z_5}e^{-ik_5(x-x_4)} - \frac{B_{50}}{Z_5}e^{ik_5(x-x_5)}. \quad (5.185)$$

Можно видеть, что поля, определяемые (5.176)–(5.185), в общем случае имеют вид:

$$E_{ny} = A_n e^{-ik_n(x-x_{n-1})} + B_n e^{ik_n(x-x_n)}; \quad (5.186)$$

$$H_{nz} = \frac{A_n}{Z_n} e^{-ik_n(x-x_{n-1})} - \frac{B_n}{Z_n} e^{ik_n(x-x_n)}, \quad (5.187)$$

где n — номер соответствующей области, причем в первой и последней областях надо вместо A_1 записывать A_{10} , в вместо B_n записывать B_{n0} (подобно (5.4), (5.5), раздел 5.2.1). Во всех формулах (5.176)–(5.187) волновые числа $k_n = \omega \sqrt{\varepsilon_n \mu_n \mu_0}$ и импедансы

$Z_n = \sqrt{\mu_n \mu_0 / \varepsilon_n \varepsilon_0}$ определяются формулами (1.253) и (1.258) соответственно (раздел 1.4.1).

Граничные условия, состоящие в равенстве касательных составляющих полей на границах для пяти сред, то есть на четырех границах, имеют вид:

$$E_{1y}|_{x=x_1} = E_{2y}|_{x=x_1}; \quad (5.188)$$

$$H_{1z}|_{x=x_1} = H_{2z}|_{x=x_1}; \quad (5.189)$$

$$E_{2y}|_{x=x_2} = E_{3y}|_{x=x_2}; \quad (5.190)$$

$$H_{2z}|_{x=x_2} = H_{3z}|_{x=x_2}; \quad (5.191)$$

$$E_{3y}|_{x=x_3} = E_{4y}|_{x=x_3}; \quad (5.192)$$

$$H_{3z}|_{x=x_3} = H_{4z}|_{x=x_3}; \quad (5.193)$$

$$E_{4y}|_{x=x_4} = E_{5y}|_{x=x_4}; \quad (5.194)$$

$$H_{4z}|_{x=x_4} = H_{5z}|_{x=x_4}. \quad (5.195)$$

В общем случае отдельная пара граничных условий имеет вид:

$$E_{ny}|_{x=x_n} = E_{(n+1)y}|_{x=x_n}; \quad (5.196)$$

$$H_{nz}|_{x=x_n} = H_{(n+1)z}|_{x=x_n}. \quad (5.197)$$

Введем вспомогательные обозначения, подобные (5.42)–(5.45) (раздел 5.2.2):

$$e_1 = e^{-ik_1(x-x_0)}; \quad (5.198)$$

$$e_2 = e^{-ik_2(x_2-x_1)}; \quad (5.199)$$

$$e_3 = e^{-ik_3(x_3-x_2)}; \quad (5.200)$$

$$e_4 = e^{-ik_4(x_4-x_3)}; \quad (5.201)$$

$$e_5 = e^{-ik_5(x_5-x_4)}, \quad (5.202)$$

а также

$$e_0 = e^{i\varphi}. \quad (5.203)$$

Подставляя поля (5.176)–(5.185) в граничные условия (5.188)–(5.195) и учитывая обозначения (5.198)–(5.203), получаем систему уравнений для определения $B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, A_5$ через A_{10} и B_{50} в виде:

$$B_1 - A_2 - B_2 e_2 = -A_{10} e_1; \quad (5.204)$$

$$A_2 e_2 + B_2 - A_3 - B_3 e_3 = 0; \quad (5.205)$$

$$A_3 e_3 + B_3 - A_4 - B_4 e_4 = 0; \quad (5.206)$$

$$A_4 e_4 + B_4 - A_5 = B_{50} e_5; \quad (5.207)$$

$$B_1 Z_2 + A_2 Z_1 - B_2 Z_1 e_2 = A_{10} Z_2 e_1; \quad (5.208)$$

$$-A_2 Z_3 e_2 + B_2 Z_3 + A_3 Z_2 - B_3 Z_2 e_3 = 0; \quad (5.209)$$

$$-A_3 Z_4 e_3 + B_3 Z_4 + A_4 Z_3 - B_4 Z_3 e_4 = 0; \quad (5.210)$$

$$-A_4 Z_5 e_4 + B_4 Z_5 + A_5 Z_5 = B_{50} Z_4 e_5. \quad (5.211)$$

Таблицы коэффициентов этой системы имеют вид:

B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	A_4	B_4	A_5	$A_{10} B_{50}$
1	-1	$-e_2$	0	0	0	0	0	$-A_{10} e_1$
0	e_2	1	-1	$-e_3$	0	0	0	0
0	0	0	e_3	1	-1	$-e_3$	0	0
0	0	0	0	0	e_4	1	-1	$B_{50} e_5$
Z_2	Z_1	$-Z_1 e_2$	0	0	0	0	0	$A_{10} e_1 Z_2$
0	$-Z_3 e_2$	Z_3	Z_2	$-Z_2 e_3$	0	0	0	0
0	0	0	$-Z_4 e_3$	Z_4	Z_3	$-Z_3 e_4$	0	0
0	0	0	0	0	$-Z_5 e_4$	Z_5	Z_4	$B_{50} e_5 Z_4$

(5.212)

Решая систему уравнений (5.204)–(5.211), подобно тому, как это было сделано в разделе 5.2.4, находим детерминанты: D_0 , D_{B1} , D_{A2} , D_{B2} , D_{A3} , D_{B3} , D_{A4} , D_{B4} , D_{A5} . Во все детерминанты входит множитель $(Z_1 Z_2^2 Z_3^2 Z_4^2 Z_5)^{-1}$. При вычислении амплитуд он сокращается, поэтому записывать его не будем. Итак, детерминанты без этого множителя имеют вид:

$$\begin{aligned}
 D_0 = & (Z_1 + Z_2) \left\{ (Z_2 + Z_3) [(Z_3 + Z_4)(Z_4 + Z_5) + (Z_3 - Z_4)(Z_4 - Z_5)e_4^2] + \right. \\
 & + (Z_2 - Z_3) [(Z_3 - Z_4)(Z_4 - Z_5) + (Z_3 + Z_4)(Z_4 + Z_5)e_4^2] e_3^2 \left. \right\} + \\
 & + (Z_1 - Z_2) \left\{ (Z_2 - Z_3) [(Z_3 + Z_4)(Z_4 + Z_5) + (Z_3 - Z_4)(Z_4 - Z_5)e_4^2] + \right. \\
 & + (Z_2 + Z_3) [(Z_3 - Z_4)(Z_4 + Z_5) + (Z_3 + Z_4)(Z_4 - Z_5)e_4^2] e_3^2 \left. \right\} e_2^2; \quad (5.213)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{B1} = & -A_{10} \left\langle (Z_1 - Z_2) \times \right. \\
 & \times \left\{ (Z_2 + Z_3) [(Z_3 + Z_4)(Z_4 + Z_5) + (Z_3 - Z_4)(Z_4 - Z_5)e_4^2] + \right. \\
 & + (Z_2 - Z_3) [(Z_3 - Z_4)(Z_4 - Z_5) + (Z_3 + Z_4)(Z_4 + Z_5)e_4^2] e_3^2 \left. \right\} + \\
 & + (Z_1 + Z_2) \left\{ (Z_2 - Z_3) [(Z_3 + Z_4)(Z_4 + Z_5) + (Z_3 - Z_4)(Z_4 - Z_5)e_4^2] + \right. \\
 & + (Z_2 + Z_3) [(Z_3 - Z_4)(Z_4 + Z_5) + (Z_3 + Z_4)(Z_4 - Z_5)e_4^2] e_3^2 \left. \right\rangle e_2^2 \left. \right\rangle e_1 + \\
 & + B_{50} e_0 16 Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 e_2 e_3 e_4 e_5; \quad (5.214)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{A2} = & A_{10}2Z_2 \left\{ (Z_2 + Z_3) [(Z_3 + Z_4)(Z_4 + Z_5) + (Z_3 - Z_4)(Z_4 - Z_5)e_4^2] + \right. \\
& + (Z_2 - Z_3) [(Z_3 - Z_4)(Z_4 + Z_5) + (Z_3 + Z_4)(Z_4 - Z_5)e_4^2] e_3^2 \left. \right\} e_1 + \\
& + B_{50}e_08(Z_1 - Z_2)Z_2Z_3Z_4e_2e_3e_4e_5; \tag{5.215}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{B2} = & -A_{10}2Z_2 \left\{ (Z_2 - Z_3) [(Z_3 + Z_4)(Z_4 + Z_5) + (Z_3 - Z_4)(Z_4 - Z_5)e_4^2] + \right. \\
& + (Z_2 + Z_3) [(Z_3 - Z_4)(Z_4 + Z_5) + (Z_3 + Z_4)(Z_4 - Z_5)e_4^2] e_3^2 \left. \right\} e_1e_2 + \\
& + B_{50}e_08(Z_1 + Z_2)Z_2Z_3Z_4e_3e_4e_5; \tag{5.216}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{A3} = & A_{10}4Z_2Z_3 [(Z_3 + Z_4)(Z_4 + Z_5) + (Z_3 - Z_4)(Z_4 - Z_5)e_4^2] e_1e_2 + \\
& + B_{50}e_04 [(Z_1 + Z_2)(Z_2 - Z_3) + (Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3)e_4^2] Z_3Z_4e_3e_4e_5; \tag{5.217}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{B3} = & -A_{10}4Z_2Z_3 [(Z_3 - Z_4)(Z_4 + Z_5) + (Z_3 + Z_4)(Z_4 - Z_5)e_4^2] e_1e_2e_3 + \\
& + B_{50}e_04 [(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) + (Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)e_4^2] Z_3Z_4e_4e_5; \tag{5.218}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{A4} = & A_{10}8Z_2Z_3Z_4(Z_4 + Z_5)e_1e_2e_3 + \\
& + B_{50}e_02 \left\{ [(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) + (Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)e_2^2] (Z_3 - Z_4) + \right. \\
& + \left. [(Z_1 + Z_2)(Z_2 - Z_3) + (Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3)e_2^2] (Z_3 + Z_4)e_3^2 \right\} Z_4e_4e_5; \tag{5.219}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{B4} = & -A_{10}8Z_2Z_3Z_4(Z_4 - Z_5)e_1e_2e_3e_4 + \\
& + B_{50}e_02 \left\{ [(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) + (Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)e_2^2] (Z_3 + Z_4) + \right. \\
& + \left. [(Z_1 + Z_2)(Z_2 - Z_3) + (Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3)e_2^2] (Z_3 - Z_4)e_3^2 \right\} Z_4e_5; \tag{5.220}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{A5} = & A_{10}16Z_2Z_3Z_4Z_5e_1e_2e_3e_4 + \\
& + B_{50}e_0 \left\langle \left\{ [(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) + (Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)e_2^2] (Z_3 + Z_4) + \right. \right. \\
& + \left. [(Z_1 + Z_2)(Z_2 - Z_3) + (Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3)e_2^2] (Z_3 - Z_4)e_3^2 \right\} (Z_4 - Z_5) + \\
& + \left\{ [(Z_2 + Z_2)(Z_2 + Z_3) + (Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)e_2^2] (Z_3 - Z_4) + \right. \\
& + \left. [(Z_1 + Z_2)(Z_2 - Z_3) + (Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3)e_2^2] \times \right. \\
& \left. \left. \times (Z_3 + Z_4)e_3^2 \right\} (Z_4 + Z_5)e_4^2 \right\rangle e_5; \tag{5.221}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_0 = & \left\{ [(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) + (Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)e_2^2] (Z_3 + Z_4) + \right. \\
& + \left. [(Z_1 + Z_2)(Z_2 - Z_3) + (Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3)e_2^2] (Z_3 - Z_4)e_3^2 \right\} (Z_4 + Z_5) + \\
& + \left\{ [(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) + (Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)e_2^2] (Z_3 - Z_4) + \right. \\
& + \left. [(Z_1 + Z_2)(Z_2 - Z_3) + (Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3)e_2^2] (Z_3 + Z_4)e_3^2 \right\} (Z_4 - Z_5)e_4^2. \tag{5.222}
\end{aligned}$$

При этом амплитуды волн определяются выражениями:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{D_{B1}}{D_0}; & A_2 &= \frac{D_{A2}}{D_0}; & B_2 &= \frac{D_{B2}}{D_0}; & A_3 &= \frac{D_{A3}}{D_0}; \\ B_3 &= \frac{D_{B3}}{D_0}; & A_4 &= \frac{D_{A4}}{D_0}; & B_4 &= \frac{D_{B4}}{D_0}; & A_5 &= \frac{D_{A5}}{D_0}, \end{aligned} \quad (5.223)$$

где в качестве D_0 может быть использовано любое из эквивалентных выражений (5.213) или (5.222).

5.3.7. Нормальное падение электромагнитной волны на структуру, состоящую из трех и четырех сред

Рассмотренный выше случай структуры из пяти сред является достаточно общим. Для перехода к структурам из меньшего числа сред, в частности, из трех и четырех сред достаточно в полученных выражениях положить равными параметры двух или трех соседствующих сред. Поэтому не будем решать здесь задачи для трех и четырех сред отдельно, а сразу приведем получаемые детерминанты и амплитуды распространяющихся волн сначала для четырех, а затем и для трех сред.

Структура из четырех сред

В случае четырех сред достаточно положить равными параметры только двух сред, например 4 и 5 (то есть $k_5 = k_4$, $Z_5 = Z_4$, так что остаются только k_1 , k_2 , k_3 , k_4 , а также Z_1 , Z_2 , Z_3 , Z_4). Во все получаемые детерминанты входит множитель: $(Z_1 Z_2^2 Z_3^2 Z_4)^{-1}$. При вычислении амплитуд, определяемых отношениями детерминантов, он сокращается, поэтому писать его не будем. Итак, детерминанты без этого множителя имеют вид:

$$\begin{aligned} D_0 &= (Z_1 + Z_2) [(Z_2 + Z_3)(Z_3 + Z_4) + (Z_2 - Z_3)(Z_3 - Z_4)e_3^2] + \\ &+ (Z_1 - Z_2) [(Z_2 - Z_3)(Z_3 + Z_4) + (Z_2 + Z_3)(Z_3 - Z_4)e_3^2] e_2^2; \end{aligned} \quad (5.224)$$

$$\begin{aligned} D_{B1} &= -A_{10} \left\{ (Z_1 - Z_2) [(Z_2 + Z_3)(Z_3 + Z_4) + (Z_2 - Z_3)(Z_3 - Z_4)e_3^2] + \right. \\ &+ (Z_1 + Z_2) [(Z_2 - Z_3)(Z_3 + Z_4) + (Z_2 + Z_3)(Z_3 - Z_4)e_3^2] e_2^2 \left. \right\} e_1 + \\ &+ B_{40} e_0 8 Z_1 Z_2 Z_3 e_2 e_3 e_4; \end{aligned} \quad (5.225)$$

$$\begin{aligned} D_{A2} &= A_{10} 2 [(Z_2 + Z_3)(Z_3 + Z_4) + (Z_2 - Z_3)(Z_3 - Z_4)e_3^2] Z_2 e_1 + \\ &+ B_{40} e_0 4 (Z_1 - Z_2) Z_2 Z_3 e_2 e_3 e_4; \end{aligned} \quad (5.226)$$

$$\begin{aligned} D_{B2} &= -A_{10} 2 [(Z_2 - Z_3)(Z_3 + Z_4) + (Z_2 + Z_3)(Z_3 - Z_4)e_3^2] Z_2 e_1 e_2 + \\ &+ B_{40} e_0 4 (Z_1 + Z_2) Z_2 Z_3 e_3 e_4; \end{aligned} \quad (5.227)$$

$$\begin{aligned} D_{A3} &= A_{10} 4 Z_2 Z_3 (Z_3 + Z_4) e_1 e_2 + \\ &+ B_{40} e_0 2 [(Z_1 + Z_2)(Z_2 - Z_3) + (Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3)e_2^2] Z_2 e_3 e_4; \end{aligned} \quad (5.228)$$

$$\begin{aligned} D_{B3} &= -A_{10} 4 Z_2 Z_3 (Z_3 - Z_4) e_1 e_2 e_3 + \\ &+ B_{40} e_0 2 [(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) + (Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)e_2^2] Z_3 e_4; \end{aligned} \quad (5.229)$$

$$\begin{aligned}
D_{A4} = & A_{10}8Z_2Z_3Z_4e_1e_2e_3 + \\
& + B_{40}e_0 \left\{ [(Z_1+Z_2)(Z_2+Z_3) + (Z_1-Z_2)(Z_2-Z_3)e_2^2](Z_3-Z_4) + \right. \\
& \left. + [(Z_1+Z_2)(Z_2-Z_3) + (Z_1-Z_2)(Z_2+Z_3)e_2^2](Z_3+Z_4)e_3^2 \right\} e_4; \quad (5.230)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_0 = & [(Z_1+Z_2)(Z_2+Z_3) + (Z_1-Z_2)(Z_2-Z_3)e_2^2](Z_3+Z_4) + \\
& + [(Z_1+Z_2)(Z_2-Z_3) + (Z_1-Z_2)(Z_2+Z_3)e_2^2](Z_3-Z_4)e_3^2. \quad (5.231)
\end{aligned}$$

При этом амплитуды волн определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
B_1 = \frac{D_{B1}}{D_0}; \quad A_2 = \frac{D_{A2}}{D_0}; \quad B_2 = \frac{D_{B2}}{D_0}; \\
A_3 = \frac{D_{A3}}{D_0}; \quad B_3 = \frac{D_{B3}}{D_0}; \quad A_4 = \frac{D_{A4}}{D_0}, \quad (5.232)
\end{aligned}$$

где в качестве D_0 может быть использовано любое из эквивалентных выражений (5.224) или (5.231).

Структура из трех сред

В случае трех сред равными следует положить параметры трех соседствующих сред, например 3, 4, 5 (то есть $k_5 = k_4 = k_3$, $Z_5 = Z_4 = Z_3$, так что остаются только k_1 , k_2 , k_3 , а также Z_1 , Z_2 , Z_3). Во все получаемые детерминанты входит множитель: $(Z_1Z_2^2Z_3)^{-1}$. При вычислении амплитуд, определяемых отношениями детерминантов, он сокращается, поэтому писать его не будем. Итак, детерминанты без этого множителя имеют вид:

$$D_0 = (Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) + (Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)e_2^2; \quad (5.233)$$

$$\begin{aligned}
D_{B1} = & -A_{10} [(Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3) + (Z_1 + Z_2)(Z_2 - Z_3)e_2^2] e_1 + \\
& + B_{30}e_04Z_1Z_2e_2e_3; \quad (5.234)
\end{aligned}$$

$$D_{A2} = A_{10}2Z_2(Z_2 + Z_3)e_1 + B_{30}e_02(Z_1 - Z_2)Z_2e_2e_3; \quad (5.235)$$

$$D_{B2} = -A_{10}2Z_3(Z_2 - Z_3)e_1e_2 + B_{30}e_02(Z_1 + Z_2)Z_2e_3; \quad (5.236)$$

$$\begin{aligned}
D_{A3} = & A_{10}4Z_2Z_3e_1e_2 + \\
& + B_{30}e_0 [(Z_1 + Z_2)(Z_2 - Z_3) + (Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3)e_2^2] e_3. \quad (5.237)
\end{aligned}$$

При этом амплитуды волн определяются выражениями:

$$B_1 = \frac{D_{B1}}{D_0}; \quad A_2 = \frac{D_{A2}}{D_0}; \quad B_2 = \frac{D_{B2}}{D_0}; \quad A_3 = \frac{D_{A3}}{D_0}, \quad (5.238)$$

где в качестве D_0 используется выражение (5.233). Заметим, что вследствие простоты задачи эквивалентное выражение для D_0 типа (5.222) или (5.231) здесь отсутствует.

5.3.8. Схема вычисления коэффициентов отражения и прохождения для нормального падения

Рассмотрим теперь схему численного расчета коэффициентов отражения и прохождения при нормальном падении волны. Подобно случаю

одномерных волн обратимся к наиболее сложной структуре, состоящей из пяти сред.

Будем считать, что изначально заданы: координаты границ разделов между средами

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5;$$

электродинамические параметры всех сред

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5;$$

начальные амплитуды A_1, B_5 , а также сдвиг фазы между падающими волнами φ .

Будем считать также заданной частоту, которую для обеих падающих волн, а также всех распространяющихся будем считать одинаковой (случай различия частот падающих волн может быть рассмотрен аналогичным образом, с учетом соответствующего изменения волновых чисел и импедансов).

Приведем последовательность расчета по шагам.

Шаг № 1.

Вычисление волновых чисел во всех средах k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 по формулам (1.253).

Шаг № 2.

Вычисление импедансов во всех средах Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 по формулам (1.258).

Шаг № 3.

Вычисление вспомогательных функций e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 по формулам (5.198)–(5.202), а также параметра e_0 по формуле (5.203).

Шаг № 4.

Вычисление амплитудных параметров A_{10} и B_{50} по схеме, подобной формулам (5.134), (5.135).

Шаг № 5.

Вычисление детерминанта D_0 по формуле (5.213) или (5.222), а также детерминантов $D_{B1}, D_{A2}, D_{B2}, D_{A3}, D_{B3}, D_{A4}, D_{B4}, D_{A5}$ по формулам (5.214)–(5.221).

Шаг № 6.

Вычисление амплитуд распространяющихся волн $B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, A_5$ по формулам (5.223).

Шаг № 7.

Вычисление коэффициентов отражения и прохождения по формулам (5.6) и (5.7), которые для структуры из пяти сред принимают вид:

$$R_e = |B_1|^2; \quad (5.239)$$

$$T_e = |A_5|^2 \frac{Z_1}{Z_5}. \quad (5.240)$$

Замечание. Заметим, что формулы (5.239) и (5.240) полностью корректны только в случае действительных импедансов в первой и пятой

средах. При комплексных импедансах, как и в случае одномерной волны, следует учитывать активную, реактивную и локализованную составляющие потоков энергии распространяющихся волн в соответствии с механизмом баланса энергии, рассмотренным в работе [62], а также в монографии [54].

5.3.9. Наклонное падение электромагнитной волны на структуру, состоящую из пяти сред

В главах 2 и 3 прямой метод применялся для случаев наклонного падения электромагнитной волны на структуру, состоящую из двух или трех сред, разделенных соответственно одной и двумя границами (разделы 2.2.4–2.2.7 и 3.2.6, 3.2.7–3.2.9). Общая идеология рассмотрения структуры из произвольного числа сред остается такой же, как в этих двух простейших случаях. Поэтому не будем подробно проделывать выкладки для трех и четырех сред, а обратимся сразу к случаю пяти сред, расчет которого является еще не особенно громоздким.

Будем предполагать, что на структуру падают две встречные волны: одна слева направо из точки с координатной x_0 , имеющая амплитуду A_{10} , другая справа налево из точки с координатой x_5 , имеющая амплитуду B_{50} и сдвиг по фазе относительно первой волны на угол φ (где положим $\varphi > 0$).

При распространении волн углы θ_n в различных средах будут определяться в соответствии с законом Снеллиуса [2, с. 63, форм. (6), (8)], формулой (2.88), а также (3.330) и (3.331):

$$\cos \theta_{n+1} = \frac{\sqrt{k_{n+1}^2 - k_n^2 \sin^2 \theta_n}}{k_{n+1}}, \quad (5.241)$$

где n — номер предыдущей среды, а $n + 1$ — номер последующей.

Для простоты положим параметры первой и последней сред одинаковыми, так что прямая волна по выходе из структуры будет распространяться под тем же углом, что при входе. То же касается обратной волны, так что, если начальные углы падения для обеих волн в крайних средах совпадают, то они будут совпадать и во всех внутренних средах. То есть достаточно просчитать только углы θ_n для падающей волны прямого направления, а для волны обратного направления эти углы будут теми же самыми.

Для волнового числа и импеданса будем использовать стандартные выражения (1.253) и (1.258):

$$k_n = \omega \sqrt{\varepsilon_n \varepsilon_0 \mu_n \mu_0}; \quad (5.242)$$

$$Z_n = \sqrt{\frac{\mu_n \mu_0}{\varepsilon_n \varepsilon_0}}. \quad (5.243)$$

Рассмотрим далее случаи продольной и поперечной поляризации последовательно.

5.3.10. Продольная поляризация

Проектируя векторы электрического и магнитного полей на оси координат, подобно тому, как это было сделано в разделе 2.2.6 при получении формул (2.98)–(2.115), соответствующих рис. 2.3, здесь, используя рис. 5.6, запишем отличные от нуля координатные составляющие полей в областях 1–5 в обобщенном виде, используя в качестве номера среды индекс n :

$$E_{nx} = -A_n \sin \theta_n e^{-ik_n(x-x_{n-1}) \cos \theta_n} + B_n \sin \theta_n e^{ik_n(x-x_n) \cos \theta_n}; \quad (5.244)$$

$$E_{ny} = A_n \cos \theta_n e^{-ik_n(x-x_{n-1}) \cos \theta_n} + B_n \cos \theta_n e^{ik_n(x-x_n) \cos \theta_n}; \quad (5.245)$$

$$H_{nz} = \frac{A_n}{Z_n} e^{-ik_n(x-x_{n-1}) \cos \theta_n} - \frac{B_n}{Z_n} e^{ik_n(x-x_n) \cos \theta_n}. \quad (5.246)$$

Граничные условия здесь будут теми же, что в случае нормального падения, то есть (5.188)–(5.195) или в обобщенном виде (5.196)–(5.197):

$$E_{ny}|_{x=x_n} = E_{(n+1)y}|_{x=x_n}; \quad (5.247)$$

$$H_{nz}|_{x=x_n} = H_{(n+1)z}|_{x=x_n}. \quad (5.248)$$

Поскольку здесь в показатели экспонент входят углы θ_n , введем вместо (5.198)–(5.202) следующие вспомогательные обозначения:

$$e_n = e^{-ik_n(x_n-x_{n-1}) \cos \theta_n}, \quad (5.249)$$

а обозначение для e_0 сохраним прежним (5.203), то есть

$$e_0 = e^{i\varphi}. \quad (5.250)$$

Введем также нормированные обозначения для амплитуд, волновых чисел и импедансов:

$$A_{np} = A_n \cos \theta_n; \quad (5.251)$$

$$B_{np} = B_n \cos \theta_n, \quad (5.252)$$

$$k_{np} = k_n \cos \theta_n; \quad (5.253)$$

$$Z_{np} = Z_n \cos \theta_n. \quad (5.254)$$

Будем использовать для начальных амплитуд те же выражения, что и для одномерных волн (5.4), (5.5) (раздел 5.2.1):

$$A_1 = A_{10}; \quad (5.255)$$

$$B_2 = B_{20} e^{i\varphi}. \quad (5.256)$$

Подставляя поля (5.244)–(5.246) в граничные условия (5.247)–(5.248) и учитывая введенные обозначения, получаем систему уравнений для

определения амплитуд $B_{1p}, A_{2p}, B_{2p}, A_{3p}, B_{3p}, A_{4p}, B_{4p}, A_{5p}$ через A_{10} и B_{50} в виде:

$$B_{1p} - A_{2p} - B_{2p}e_{2p} = -A_{10}e_{1p}; \quad (5.257)$$

$$A_{2p}e_{2p} + B_{2p} - A_{3p} - B_{3p}e_{3p} = 0; \quad (5.258)$$

$$A_{3p}e_{3p} + B_{3p} - A_{4p} - B_{4p}e_{4p} = 0; \quad (5.259)$$

$$A_{4p}e_{4p} + B_{4p} - A_{5p} = B_{50}e_{5p}; \quad (5.260)$$

$$B_{1p}Z_{2p} + A_{2p}Z_{1p} - B_{2p}Z_{1p}e_{2p} = A_{10}Z_{2p}e_{1p}; \quad (5.261)$$

$$-A_{2p}Z_{3p}e_{2p} + B_{2p}Z_{3p} + A_{3p}Z_{2p} - B_{3p}Z_{2p}e_{3p} = 0; \quad (5.262)$$

$$-A_{3p}Z_{4p}e_{3p} + B_{3p}Z_{4p} + A_{4p}Z_{3p} - B_{4p}Z_{3p}e_{4p} = 0; \quad (5.263)$$

$$-A_{4p}Z_{5p}e_{4p} + B_{4p}Z_{5p} + A_{5p}Z_{5p} = B_{50}Z_{4p}e_{5p}. \quad (5.264)$$

Эта система по форме полностью совпадает с системой (5.204)–(5.211) (раздел 5.3.4), поэтому не будем решать ее заново, а воспользуемся полученным там решением, в котором введем в обратном порядке замены обозначений (5.251)–(5.256).

Все детерминанты, получаемые при решении этой системы, содержат множитель $(Z_1 Z_2^2 Z_3^2 Z_4^2 Z_5 \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 \cos^2 \theta_4 \cos \theta_5)^{-1}$, который при вычислении амплитуд сократится, поэтому записывать его не будем. Итак, соответствующие детерминанты имеют вид:

$$\begin{aligned} D_0 = & (Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2) \{ (Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) \times \\ & \times [(Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 + Z_5 \cos \theta_5) + \\ & + (Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 - Z_5 \cos \theta_5) e_{p4}^2] + \\ & + (Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) \times \\ & \times [(Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 + Z_5 \cos \theta_5) + \\ & + (Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 - Z_5 \cos \theta_5) e_{p4}^2] e_{p3}^2 \} + \\ & + (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2) \{ (Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) \times \\ & \times [(Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 + Z_5 \cos \theta_5) + \\ & + (Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 - Z_5 \cos \theta_5) e_{p4}^2] + \\ & + (Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) \times \\ & \times [(Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 + Z_5 \cos \theta_5) + \\ & + (Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 - Z_5 \cos \theta_5) e_{p4}^2] e_{p3}^2 \} e_{p2}^2; \end{aligned} \quad (5.265)$$

$$\begin{aligned} D_{B1} = & -A_{10} \langle (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2) \{ (Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) \times \\ & \times [(Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 + Z_5 \cos \theta_5) + \\ & + (Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 - Z_5 \cos \theta_5) e_{p4}^2] + \\ & + (Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) \times \\ & \times [(Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 + Z_5 \cos \theta_5) + \\ & + (Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 - Z_5 \cos \theta_5) e_{p4}^2] e_{p3}^2 \} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ (Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2) \{ (Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) \times \\
 &\times [(Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 + Z_5 \cos \theta_5) + \\
 &+ (Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 - Z_5 \cos \theta_5) e_{p4}^2] + \\
 &+ (Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) \times \\
 &\times [(Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 + Z_5 \cos \theta_5) + \\
 &+ (Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 - Z_5 \cos \theta_5) e_{p4}^2] e_{p3}^2 \} e_{p2}^2 \} e_{p1} + \\
 &+ B_{50} \cdot e_0 \cdot 16 Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 e_2 e_3 e_4 e_5; \quad (5.266)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{A2} = &A_{10} 2 Z_2 \cos \theta_2 \{ (Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) \times \\
 &\times [(Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 + Z_5 \cos \theta_5) + \\
 &+ (Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 - Z_5 \cos \theta_5) e_{p4}^2] + \\
 &+ (Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) \times \\
 &\times [(Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 + Z_5 \cos \theta_5) + \\
 &+ (Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 - Z_5 \cos \theta_5) e_{p4}^2] e_{p3}^2 \} e_{p1} + \\
 &+ B_{50} e_0 8 (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2) Z_2 Z_3 Z_4 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 e_2 e_3 e_4 e_5; \quad (5.267)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{B2} = &-A_{10} 2 Z_2 \cos \theta_2 \{ (Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) \times \\
 &\times [(Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 + Z_5 \cos \theta_5) + \\
 &+ (Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 - Z_5 \cos \theta_5) e_{p4}^2] + \\
 &+ (Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) \times \\
 &\times [(Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 + Z_5 \cos \theta_5) + \\
 &+ (Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 - Z_5 \cos \theta_5) e_{p4}^2] e_{p3}^2 \} e_{p1} e_{p2} + \\
 &+ B_{50} e_0 8 (Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2) Z_2 Z_3 Z_4 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 e_3 e_4 e_5; \quad (5.268)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{A3} = &A_{10} 4 Z_2 Z_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \times \\
 &\times [(Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 + Z_5 \cos \theta_5) + \\
 &+ (Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 - Z_5 \cos \theta_5) e_{p4}^2] e_{p1} e_{p2} + \\
 &+ B_{50} e_0 4 [(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2) (Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) + \\
 &+ (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2) (Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) e_{p2}^2] \times \\
 &\times Z_3 Z_4 \cos \theta_3 \cos \theta_4 e_{p3} e_{p4} e_{p5}; \quad (5.269)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{B3} = &-A_{10} 4 Z_2 Z_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \times \\
 &\times [(Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 + Z_5 \cos \theta_5) + \\
 &+ (Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) (Z_4 \cos \theta_4 - Z_5 \cos \theta_5) e_{p4}^2] e_{p1} e_{p2} e_{p3} + \\
 &+ B_{50} e_0 4 [(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2) (Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) + \\
 &+ (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2) (Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) e_{p2}^2] \times \\
 &\times Z_3 Z_4 \cos \theta_3 \cos \theta_4 e_{p4} e_{p5}; \quad (5.270)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{A4} = & A_{10}8Z_2Z_3Z_4(Z_4 \cos \theta_4 + Z_5 \cos \theta_5) \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 e_{p1} e_{p2} e_{p3} + \\
& + B_{50}e_0 2 \{ [(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) + \\
& + (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) e_{p2}^2] \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4) + \\
& + [(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) + \\
& + (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) e_{p2}^2] \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) e_{p3}^2 \} Z_4 \cos \theta_4 e_{p4} e_{p5}; \tag{5.271}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{B4} = & -A_{10}8Z_2Z_3Z_4(Z_4 \cos \theta_4 - Z_5 \cos \theta_5) \times \\
& \times \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 e_{p1} e_{p2} e_{p3} e_{p4} + \\
& + B_{50}e_0 2 \{ [(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) + \\
& + (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) e_{p2}^2] \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) + \\
& + [(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) + \\
& + (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) e_{p2}^2] \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4) e_{p3}^2 \} Z_4 \cos \theta_4 e_{p5}; \tag{5.272}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{A5} = & A_{10}16Z_2Z_3Z_4Z_5 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 \cos \theta_5 e_{p1} e_{p2} e_{p3} e_{p4} + \\
& + B_{50}e_0 \{ \{ [(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) + \\
& + (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) e_{p2}^2] \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) + \\
& + [(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) + \\
& + (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) e_{p2}^2] \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4) e_{p3}^2 \} (Z_4 \cos \theta_4 - Z_5 \cos \theta_5) + \\
& + \{ [(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) + \\
& + (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) e_{p2}^2] \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4) + \\
& + [(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) + \\
& + (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) e_{p2}^2] \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) e_{p3}^2 \} (Z_4 \cos \theta_4 + Z_5 \cos \theta_5) e_{p4}^2 \} e_{p5}; \tag{5.273}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_0 = & \{ [(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) + \\
& + (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) e_{p2}^2] \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) + \\
& + [(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) + \\
& + (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) e_{p2}^2] \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4) e_{p3}^2 \} (Z_4 \cos \theta_4 + Z_5 \cos \theta_5) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \{ [(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2) (Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) + \\
 & + (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2) (Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) e_{p2}^2] \times \\
 & \times (Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4) + \\
 & + [(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2) (Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) + \\
 & + (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2) (Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) e_{p2}^2] \times \\
 & \times (Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) e_{p3}^2 \} (Z_4 \cos \theta_4 - Z_5 \cos \theta_5) e_{p4}^2. \quad (5.274)
 \end{aligned}$$

При этом амплитуды волн определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{D_{B1}}{D_0 \cos \theta_1}; \quad A_2 = \frac{D_{A2}}{D_0 \cos \theta_2}; \quad B_2 = \frac{D_{B2}}{D_0 \cos \theta_2}; \quad A_3 = \frac{D_{A3}}{D_0 \cos \theta_3}; \\
 B_3 &= \frac{D_{B3}}{D_0 \cos \theta_3}; \quad A_4 = \frac{D_{A4}}{D_0 \cos \theta_4}; \quad B_4 = \frac{D_{B4}}{D_0 \cos \theta_4}; \quad A_5 = \frac{D_{A5}}{D_0 \cos \theta_5}, \quad (5.275)
 \end{aligned}$$

где в качестве D_0 может использоваться любое из эквивалентных выражений (5.265) или (5.274).

5.3.11. Поперечная поляризация

Этот случай во многом подобен предыдущему, в основном, переменной функциональных значений компонент электрического и магнитного полей, поэтому ограничимся приведением краткой сводки основных выражений.

Координатные составляющие полей имеют вид:

$$E_{nz} = A_n \cos \theta_n e^{-ik_n(x-x_{n-1}) \cos \theta_n} + B_n \cos \theta_n e^{ik_n(x-x_n) \cos \theta_n}; \quad (5.276)$$

$$H_{nx} = \frac{A_n}{Z_n} \sin \theta_n e^{-ik_n(x-x_{n-1}) \cos \theta_n} + \frac{B_n}{Z_n} \sin \theta_n e^{ik_n(x-x_n) \cos \theta_n}; \quad (5.277)$$

$$H_{ny} = -\frac{A_n}{Z_n} \cos \theta_n e^{-ik_n(x-x_{n-1}) \cos \theta_n} + \frac{B_n}{Z_n} \cos \theta_n e^{ik_n(x-x_n) \cos \theta_n}. \quad (5.278)$$

Граничные условия — те же, что в предыдущем случае, то есть

$$E_{ny}|_{x=x_n} = E_{(n+1)y}|_{x=x_n}; \quad (5.279)$$

$$H_{nz}|_{x=x_n} = H_{(n+1)z}|_{x=x_n}. \quad (5.280)$$

Выражения e_n сохраняются прежними, то есть (5.249)–(5.250).

Введенные выше нормированные обозначения для амплитуд и волновых чисел (5.251)–(5.253) также сохраняются, а импедансы вместо (5.254) приобретает вид:

$$Z_{np} = \frac{Z_n}{\cos \theta_n}. \quad (5.281)$$

Выражения для начальных амплитуд (5.255), (5.256) также остаются прежними. Подстановка компонент полей (5.276)–(5.278) в граничные условия (5.279)–(5.280) с учетом введенных обозначений приводит к той же системе (5.257)–(5.264). Решая эту систему и вводя в обратном порядке замены обозначений (5.251)–(5.253), (5.281),

получаем детерминанты, во все из которых будет входить множитель $(Z_1 Z_2^2 Z_3^2 Z_4^2 Z_5)^{-1}$. Без этого множителя соответствующие детерминанты имеют вид:

$$\begin{aligned}
 D_0 = & (Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1) \{ (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) \times \\
 & \times [(Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 + Z_5 \cos \theta_4) + \\
 & + (Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 - Z_5 \cos \theta_4) e_{p4}^2] + \\
 & + (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) \times \\
 & \times [(Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 + Z_5 \cos \theta_4) + \\
 & + (Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 - Z_5 \cos \theta_4) e_{p4}^2] e_{p3}^2 \} + \\
 & + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1) \{ (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) \times \\
 & \times [(Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 + Z_5 \cos \theta_4) + \\
 & + (Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 - Z_5 \cos \theta_4) e_{p4}^2] + \\
 & + (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) \times \\
 & \times [(Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 + Z_5 \cos \theta_4) + \\
 & + (Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 - Z_5 \cos \theta_4) e_{p4}^2] e_{p3}^2 \} e_{p2}^2; \quad (5.282)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{B1} = & -A_{10} \langle (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1) \{ (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) \times \\
 & \times [(Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 + Z_5 \cos \theta_4) + \\
 & + (Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 - Z_5 \cos \theta_4) e_{p4}^2] + \\
 & + (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) \times \\
 & \times [(Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 + Z_5 \cos \theta_4) + \\
 & + (Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 - Z_5 \cos \theta_4) e_{p4}^2] e_{p3}^2 \} + \\
 & + (Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1) \{ (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) \times \\
 & \times [(Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 + Z_5 \cos \theta_4) + \\
 & + (Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 - Z_5 \cos \theta_4) e_{p4}^2] + \\
 & + (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) \times \\
 & \times [(Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 + Z_5 \cos \theta_4) + \\
 & + (Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 - Z_5 \cos \theta_4) e_{p4}^2] e_{p3}^2 \} e_{p2}^2 \rangle e_{p1} + \\
 & + B_{50} e_0 16 Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 \cos \theta_5 e_{p2} e_{p3} e_{p4} e_{p5}; \quad (5.283)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{A2} = & A_{10} 2 Z_2 \cos \theta_2 \{ (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) \times \\
 & \times [(Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 + Z_5 \cos \theta_4) + \\
 & + (Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 - Z_5 \cos \theta_4) e_{p4}^2] + \\
 & + (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) \times \\
 & \times [(Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 + Z_5 \cos \theta_4) + \\
 & + (Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 - Z_5 \cos \theta_4) e_{p4}^2] e_{p3}^2 \} e_{p1} + \\
 & + B_{50} e_0 8 (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1) \times \\
 & \times Z_2 Z_3 Z_4 \cos \theta_3 \cos \theta_4 \cos \theta_5 e_{p2} e_{p3} e_{p4} e_{p5}; \quad (5.284)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{B2} = & -A_{10}2Z_2 \cos \theta_1 \{ (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) \times \\
 & \times [(Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 + Z_5 \cos \theta_4) + \\
 & + (Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 - Z_5 \cos \theta_4) e_{p4}^2] + \\
 & + (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) \times \\
 & \times [(Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 + Z_5 \cos \theta_4) + \\
 & + (Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 - Z_5 \cos \theta_4) e_{p4}^2] e_{p3}^2 \} e_{p1} e_{p2} + \\
 & + B_{50} e_0 8 (Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1) Z_2 Z_3 Z_4 \cos \theta_3 \cos \theta_4 \cos \theta_5 e_{p3} e_{p4} e_{p5};
 \end{aligned} \tag{5.285}$$

$$\begin{aligned}
 D_{A3} = & A_{10}4Z_2 Z_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \times \\
 & \times [(Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 + Z_5 \cos \theta_4) + \\
 & + (Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 - Z_5 \cos \theta_4) e_{p4}^2] e_{p1} e_{p2} + \\
 & + B_{50} e_0 \cdot 4 [(Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) + \\
 & + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) e_{p2}^2] \times \\
 & \times Z_3 Z_4 \cos \theta_4 \cos \theta_5 e_{p3} e_{p4} e_{p5};
 \end{aligned} \tag{5.286}$$

$$\begin{aligned}
 D_{B3} = & -A_{10}4Z_2 Z_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \times \\
 & \times [(Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 + Z_5 \cos \theta_4) + \\
 & + (Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) (Z_4 \cos \theta_5 - Z_5 \cos \theta_4) e_{p4}^2] e_{p1} e_{p2} e_{p3} + \\
 & + B_{50} e_0 4 [(Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) + \\
 & + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) e_{p2}^2] \times \\
 & \times Z_3 Z_4 \cos \theta_4 \cos \theta_5 e_{p4} e_{p5};
 \end{aligned} \tag{5.287}$$

$$\begin{aligned}
 D_{A4} = & A_{10}8Z_2 Z_3 Z_4 (Z_4 \cos \theta_5 + Z_5 \cos \theta_4) \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 e_{p1} e_{p2} e_{p3} + \\
 & + B_{50} e_0 2 \{ [(Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) + \\
 & + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) e_{p2}^2] \times \\
 & \times (Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) + \\
 & + [(Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) + \\
 & + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) e_{p2}^2] \times \\
 & \times (Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) e_{p3}^2 \} Z_4 \cos \theta_5 e_{p4} e_{p5};
 \end{aligned} \tag{5.288}$$

$$\begin{aligned}
 D_{B4} = & -A_{10}8Z_2 Z_3 Z_4 (Z_4 \cos \theta_5 - Z_5 \cos \theta_4) \times \\
 & \times \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 e_{p1} e_{p2} e_{p3} e_{p4} + \\
 & + B_{50} e_0 2 \{ [(Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) + \\
 & + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) e_{p2}^2] \times \\
 & \times (Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) + \\
 & + [(Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) + \\
 & + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) e_{p2}^2] \times \\
 & \times (Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) e_{p3}^2 \} Z_4 \cos \theta_5 e_{p5};
 \end{aligned} \tag{5.289}$$

$$\begin{aligned}
D_{A5} = & A_{10}16Z_2Z_3Z_4Z_5 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 e_{p1} e_{p2} e_{p3} e_{p4} + \\
& + B_{50}e_0 \{ [(Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) + \\
& + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) e_{p2}^2] \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) + \\
& + [(Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) + \\
& + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) e_{p2}^2] \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) e_{p3}^2 \} (Z_4 \cos \theta_5 - Z_5 \cos \theta_4) + \\
& + \{ [(Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) + \\
& + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) e_{p2}^2] \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) + \\
& + [(Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) + \\
& + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) e_{p2}^2] \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) e_{p3}^2 \} (Z_4 \cos \theta_5 + Z_5 \cos \theta_4) e_{p4}^2 e_{p5};
\end{aligned} \tag{5.290}$$

$$\begin{aligned}
D_0 = & \{ [(Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) + \\
& + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) e_{p2}^2] \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) + \\
& + [(Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) + \\
& + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) e_{p2}^2] \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) e_{p3}^2 \} (Z_4 \cos \theta_5 + Z_5 \cos \theta_4) + \\
& + \{ [(Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) + \\
& + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) e_{p2}^2] \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) + \\
& + [(Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) + \\
& + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) e_{p2}^2] \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) e_{p3}^2 \} (Z_4 \cos \theta_5 - Z_5 \cos \theta_4) e_{p4}^2.
\end{aligned} \tag{5.291}$$

При этом амплитуды волн определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
B_1 = \frac{D_{B1}}{D_0}; \quad A_2 = \frac{D_{A2}}{D_0}; \quad B_2 = \frac{D_{B2}}{D_0}; \quad A_3 = \frac{D_{A3}}{D_0}; \\
B_3 = \frac{D_{B3}}{D_0}; \quad A_4 = \frac{D_{A4}}{D_0}; \quad B_4 = \frac{D_{B4}}{D_0}; \quad A_5 = \frac{D_{A5}}{D_0}.
\end{aligned} \tag{5.292}$$

где в качестве D_0 может использоваться любое из эквивалентных выражений (5.282) или (5.291).

5.3.12. Наклонное падение электромагнитной волны на структуру, состоящую из трех и четырех сред

Рассмотренные выше случаи наклонного падения электромагнитной волны с продольной и поперечной поляризациями на структуру из пяти сред является достаточно общим. Для перехода к структурам из мень-

шего числа сред, в частности из трех и четырех сред, достаточно в полученных выражениях положить равными параметры двух или трех соседствующих сред, Поэтому не будем решать здесь задачи для трех и четырех сред отдельно, а сразу приведем получаемые детерминанты и амплитуды распространяющихся волн сначала для четырех, а затем и для трех сред.

Структура из четырех сред. Продольная поляризация

Общий множитель: $(Z_1 Z_2^2 Z_3^2 Z_4 \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 \cos \theta_4)^{-1}$. При вычислении амплитуд он сокращается, поэтому писать его не будем. Детерминанты без этого множителя имеют вид:

$$D_0 = (Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2) [(Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3)(Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) + (Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3)(Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4)e_{p3}^2] + (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2) [(Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) \times (Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) + (Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3)(Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4)e_{p3}^2] e_{p2}^2; \quad (5.293)$$

$$D_{B1} = -A_{10} \{ (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2) [(Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) \times (Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) + (Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3)(Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4)e_{p3}^2] + (Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2) [(Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) \times (Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) + (Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3)(Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4)e_{p3}^2] e_{p2}^2 \} \cdot e_{p1} + B_{40} e_0 \cdot 8 Z_1 Z_2 Z_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 e_{p2} e_{p3} e_{p4}; \quad (5.294)$$

$$D_{A2} = A_{10} 2 [(Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3)(Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) + (Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3)(Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4)e_{p3}^2] Z_2 \cos \theta_2 e_{p2} - B_{40} e_0 4 (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2) Z_2 Z_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 e_{p2} e_{p3} e_{p4}; \quad (5.295)$$

$$D_{B2} = -A_{10} 2 [(Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3)(Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) + (Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3)(Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4)e_{p3}^2] Z_2 \cos \theta_2 e_{p1} e_{p2} + B_{40} e_0 4 (Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2) Z_2 Z_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 e_{p3} e_{p4}; \quad (5.296)$$

$$D_{A3} = A_{10} 4 Z_2 Z_3 (Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) \cos \theta_2 \cos \theta_3 e_{p1} e_{p2} + B_{40} e_0 2 [(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) + (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3)e_{p2}^2] Z_3 \cos \theta_3 e_{p3} e_{p4}; \quad (5.297)$$

$$D_{B3} = -A_{10} 4 Z_2 Z_3 (Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4) \cos \theta_2 \cos \theta_3 e_{p1} e_{p2} e_{p3} + B_{40} e_0 2 [(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) + (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3)e_{p2}^2] Z_3 \cos \theta_3 e_{p4}; \quad (5.298)$$

$$\begin{aligned}
D_{A4} = & A_{10} 8 Z_2 Z_3 Z_4 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 e_{p1} e_{p2} e_{p3} - \\
& - B_{40} e_0 \{ [(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) + \\
& + (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) e_{p2}^2] \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4) + \\
& + [(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) + \\
& + (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) e_{p2}^2] \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) e_{p3}^2 \} e_{p4}; \tag{5.299}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_0 = & [(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) + \\
& + (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) e_{p2}^2] \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4) + \\
& + [(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) + \\
& + (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2)(Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) e_{p2}^2] \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4) e_{p3}^2. \tag{5.300}
\end{aligned}$$

Амплитуды волн определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
B_1 = \frac{D_{B1}}{D_0 \cos \theta_1}; \quad A_2 = \frac{D_{A2}}{D_0 \cos \theta_2}; \quad B_2 = \frac{D_{B2}}{D_0 \cos \theta_2}; \\
A_3 = \frac{D_{A3}}{D_0 \cos \theta_3}; \quad B_3 = \frac{D_{B3}}{D_0 \cos \theta_3}; \quad A_4 = \frac{D_{A4}}{D_0 \cos \theta_4}. \tag{5.301}
\end{aligned}$$

Структура из четырех сред. Поперечная поляризация

Во все детерминанты входит множитель: $(Z_1 Z_2^2 Z_3^2 Z_4)^{-1}$. При вычислении амплитуд он сокращается, поэтому его опускаем. Соответствующие детерминанты имеют вид:

$$\begin{aligned}
D_0 = & (Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1) [(Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) + \\
& + (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2)(Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) e_{p3}^2] + \\
& + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1) [(Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) + \\
& + (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2)(Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) e_{p3}^2] e_{p2}^2; \tag{5.302}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{B1} = & -A_{10} \{ (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1) [(Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) + \\
& + (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2)(Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) e_{p3}^2] + \\
& + (Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1) [(Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) + (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) \times \\
& \times (Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) e_{p3}^2] e_{p2}^2 \} e_{p1} + \\
& + B_{40} e_0 8 Z_1 Z_2 Z_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 e_{p2} e_{p3} e_{p4}; \tag{5.303}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{A2} = & A_{10}2 [(Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2)(Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) + \\
 & + (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2)(Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3)e_{p3}^2] Z_2 \cos \theta_1 e_{p2} - \\
 & - B_{40}e_04(Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1)Z_2Z_3 \cos \theta_3 \cos \theta_4 e_{p2}e_{p3}e_{p4}; \quad (5.304)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{B2} = & -A_{10}2 [(Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2)(Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) + \\
 & + (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2)(Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3)e_{p3}^2] Z_2 \cos \theta_1 e_{p1}e_{p2} + \\
 & + B_{40}e_04(Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1)Z_2Z_3 \cos \theta_3 \cos \theta_4 e_{p3}e_{p4}; \quad (5.305)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{A3} = & A_{10}4Z_2Z_3(Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) \cos \theta_1 \cos \theta_2 e_{p1}e_{p2} + \\
 & + B_{40}e_02 [(Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1)(Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) + \\
 & + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1)(Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2)e_{p2}^2] Z_3 \cos \theta_4 e_{p3}e_{p4}; \quad (5.306)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{B3} = & -A_{10}4Z_2Z_3(Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) \cos \theta_1 \cos \theta_2 e_{p1}e_{p2}e_{p3} + \\
 & + B_{40}e_02 [(Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1)(Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) + \\
 & + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1)(Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2)e_2^2] Z_3 \cos \theta_4 e_{p4}; \quad (5.307)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{A4} = & A_{10}8Z_2Z_3Z_4 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 e_{p1}e_{p2}e_{p3} - \\
 & - B_{40}e_0 \{ [(Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1)(Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) + \\
 & + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1)(Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2)e_{p2}^2] \times \\
 & \times (Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3) + \\
 & + [(Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1)(Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) + \\
 & + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1)(Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2)e_{p2}^2] \times \\
 & \times (Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3)e_{p3}^2 \} e_{p4}; \quad (5.308)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_0 = & [(Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1)(Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) + \\
 & + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1)(Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2)e_{p2}^2] \times \\
 & \times (Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3) + \\
 & + [(Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1)(Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) + \\
 & + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1)(Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2)e_{p2}^2] \times \\
 & \times (Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3)e_{p3}^2. \quad (5.309)
 \end{aligned}$$

При этом амплитуды волн определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
 B_1 = \frac{D_{B1}}{D_0}; \quad A_2 = \frac{D_{A2}}{D_0}; \quad B_2 = \frac{D_{B2}}{D_0}; \\
 A_3 = \frac{D_{A3}}{D_0}; \quad B_3 = \frac{D_{B3}}{D_0}; \quad A_4 = \frac{D_{A4}}{D_0}. \quad (5.310)
 \end{aligned}$$

Структура из трех сред. Продольная поляризация

Во все детерминанты входит множитель $(Z_1 Z_2 Z_3)^{-1}$. При вычислении амплитуд он сокращается, поэтому его опускаем.

Соответствующие детерминанты имеют вид:

$$D_0 = (Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2) (Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) + (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2) (Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) e_{p2}^2; \quad (5.311)$$

$$D_{B1} = -A_{10} [(Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2) (Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) + (Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2) (Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) e_{p2}^2] e_{p1} + B_{30} e_0 \cdot 4 Z_1 Z_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 e_{p2} e_{p3}; \quad (5.312)$$

$$D_{A2} = A_{10} 2 Z_2 (Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) \cos \theta_2 e_{p1} + B_{30} e_0 2 (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2) Z_2 \cos \theta_2 e_{p2} e_{p3}; \quad (5.313)$$

$$D_{B2} = -A_{10} 2 Z_2 (Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) \cos \theta_2 e_{p1} e_{p2} + B_{30} e_0 2 (Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2) Z_2 \cos \theta_2 e_{p3}; \quad (5.314)$$

$$D_{A3} = A_{10} 4 Z_2 Z_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 e_{p1} e_{p2} + B_{30} e_0 [(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2) (Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3) + (Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2) (Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3) e_{p2}^2] e_{p3}. \quad (5.315)$$

Амплитуды волн определяются выражениями:

$$B_1 = \frac{D_{B1}}{D_0 \cos \theta_1}; \quad A_2 = \frac{D_{A2}}{D_0 \cos \theta_2}; \quad (5.316)$$

$$B_2 = \frac{D_{B2}}{D_0 \cos \theta_2}; \quad A_3 = \frac{D_{A3}}{D_0 \cos \theta_3}.$$

Структура из трех сред. Поперечная поляризация

Во все детерминанты входит множитель: $(Z_1 Z_2^2 Z_3)^{-1}$. При вычислении амплитуд он сокращается, поэтому его опускаем.

Соответствующие детерминанты имеют вид:

$$D_0 = (Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) e_{p2}^2; \quad (5.317)$$

$$D_{B1} = -A_{10} [(Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) + (Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) e_{p2}^2] e_{p1} + B_{30} e_0 4 Z_1 Z_2 \cos \theta_2 \cos \theta_3 e_{p2} e_{p3}; \quad (5.318)$$

$$D_{A2} = A_{10} 2 Z_2 (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) \cos \theta_1 e_{p1} + B_{30} e_0 2 (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1) Z_2 \cos \theta_3 e_{p2} e_{p3}; \quad (5.319)$$

$$D_{B2} = -A_{10} 2 Z_2 (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) \cos \theta_1 e_{p1} e_{p2} + B_{30} e_0 2 (Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1) Z_2 \cos \theta_3 e_{p3}; \quad (5.320)$$

$$D_{A3} = A_{10} 4 Z_2 Z_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 e_{p1} e_{p2} + B_{30} e_0 [(Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2) + (Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1) (Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2) e_{p2}^2] e_{p3}. \quad (5.321)$$

Амплитуды волн определяются выражениями:

$$B_1 = \frac{D_{B1}}{D_0}; \quad A_2 = \frac{D_{A2}}{D_0}; \quad B_2 = \frac{D_{B2}}{D_0}; \quad A_3 = \frac{D_{A3}}{D_0}. \quad (5.322)$$

5.3.13. Схема вычисления коэффициентов отражения и прохождения для наклонного падения

Последовательность вычисления коэффициентов отражения и прохождения для наклонного падения в случае как продольной, так и поперечной поляризаций подобна схеме для нормального падения. Рассмотрим в качестве примера случай продольной поляризации.

Аналогично считаются заданными координаты границ разделов между средами, электродинамические параметры всех сред, начальные амплитуды и сдвиг фазы между падающими волнами φ , а также частоты падающих волн.

Дополнительно заданными следует считать углы падения падающих волн того и другого направлений, то есть θ_1 и θ_5 , которые для простоты рассмотрения положим равными.

Последовательность расчета будет той же самой, однако в нее войдет вычисление углов падения распространяющихся волн в отдельных средах.

Приведем последовательность расчета по шагам.

Шаг № 1.

Вычисление волновых чисел во всех средах k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 по формулам (1.253) или (5.242).

Шаг № 2.

Последовательное вычисление углов падения во всех средах, начиная с θ_1 , и далее в соответствии с законом Снеллиуса по формулам (5.241).

Шаг № 3.

Вычисление импедансов во всех средах Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 по формулам (1.258) или (5.243).

Шаг № 4.

Вычисление вспомогательных функций e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 по формулам (5.249), а также параметра e_0 по формуле (5.250).

Шаг № 5.

Вычисление амплитудных параметров A_{10} и B_{50} по схеме, подобной формулам (5.134), (5.135).

Шаг № 6.

Вычисление детерминанта D_0 по формуле (5.265) или (5.274), а также детерминантов $D_{B1}, D_{A2}, D_{B2}, D_{A3}, D_{B3}, D_{A4}, D_{B4}, D_{A5}$ по формулам (5.265)–(5.274).

Шаг № 7.

Вычисление амплитуд распространяющихся волн $B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, A_5$ по формулам (5.275).

Шаг № 8.

Вычисление коэффициентов отражения и прохождения по формулам (5.6) и (5.7), которые для структуры из пяти сред принимают вид:

$$R_e = |B_1|^2; \quad (5.323)$$

$$T_e = |A_5|^2 \frac{Z_1}{Z_5}. \quad (5.324)$$

Замечание. Заметим, что формулы (5.323) и (5.324) полностью корректны только в случае действительных импедансов в первой и пятой средах. При комплексных импедансах, как и в случае одномерной волны, следует учитывать балансы энергии, рассмотренные в работе [62], а также в монографии [54].

Проведенное рассмотрение относится к случаю наклонного падения волны продольной поляризации. В случае поперечной поляризации схема расчета та же самая, поэтому ее реализацию авторы предоставляют в качестве упражнения для любознательного читателя.

5.4. Общий характер коэффициентов отражения и прохождения для многослойных структур

Полученные в предыдущих разделах амплитуды волн и соответствующие коэффициенты отражения и прохождения для структуры из пяти сред позволяют определить зависимости таких коэффициентов от параметров структуры.

В качестве переменных в первую очередь могут выступать параметры самих сред, такие как волновое число, диэлектрическая и магнитная проницаемости, а для проводящей среды еще и проводимость. Другую группу варьируемых параметров составляют геометрические параметры, то есть толщины сред, а также углы падения исходных волн прямого и обратного направлений.

Отдельным параметром является частота волны, которая в совокупности со скоростью для одномерной волны дает волновое число, а в совокупности с диэлектрической и магнитной проницаемостями и проводимостью дает волновые числа и импедансы сред.

В качестве дополнительного параметра, представляющего интерес при возбуждении встречных волн, следует упомянуть сдвиг фазы между падающими волнами, а также, если их частоты различны, то конкретные значения этих частот.

В случае, если углы падения исходных волн прямого и обратного направлений (то есть в первой и последней средах) равны друг другу, то углы падения встречных волн в каждой отдельной среде структуры также совпадают, так что расчет углов падения по закону Снеллиуса достаточно провести один раз в том или ином направлении.

В случае, если углы падения исходных волн прямого и обратного направлений различаются, то углы падения волн обоих направлений внут-

ри слоев структуры также будут друг от друга отличаться. В этом случае уже нельзя будет пользоваться общими формулами, приведенными в предыдущих разделах для случаев наклонного падения, а надо рассчитывать каждую из совокупностей волн того и другого направлений по отдельности. При этом расчет каждой группы волн следует начинать с последовательного определения углов падения волн в каждой среде по закону Снеллиуса, для волн прямого направления — начиная с первой среды, а для волн обратного (встречного) направления — начиная с последней среды.

В общем случае зависимости коэффициентов отражения и прохождения от нормированной толщины любой из внутренних (кроме первой и последней) сред многослойной структуры имеют осциллирующий характер, аналогичный представленному на рис. 4.3. Причиной осцилляций является установление стоячих волн по толщине той или иной из сред. При этом в отсутствие затухания амплитуда осцилляций сохраняется, а при наличии затухания по мере увеличения толщины амплитуда осцилляций уменьшается. Первый максимум зависимости для коэффициента отражения соответствует укладыванию по толщине второй среды четверти длины волны, первый минимум той же кривой — укладыванию половины длины волны. Далее чередование максимумов и минимумов повторяется. Расстояние между соседними максимумами или соседними минимумами равно половине длины волны.

Увеличение электродинамических параметров любой из сред приводит к уменьшению длины волны в этой среде, так что период осцилляций зависимости от толщины этой среды уменьшается.

Характер изменения коэффициентов отражения и прохождения при изменении параметров любой из внутренних сред (кроме первой и последней), в основном, одинаков, так что также остается подобным изображенному на рис. 4.3. Изменение толщины первой или последней из сред не дает осцилляций, так как обе среды не являются замкнутыми и стоячие волны на них не образуются. Некоторые частные случаи зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от нормированных толщин различных сред пятислойной структуры приведены в работе [48, с. 95–117].

Зависимости коэффициентов отражения и прохождения от угла падения значительно различаются в зависимости от характера поляризации падающих волн. Так, для волн с продольной поляризацией наблюдается явление Брюстера, а для волн с поперечной поляризацией это явление отсутствует. То есть картина, в основном, получается близкой к наблюдаемой на рис. 4.4 и рис. 4.7. Отличительным моментом для случая продольной поляризации является тот факт, что равенство нулю косинуса угла падения в соотношении Снеллиуса типа (5.241), то есть реализация явления Брюстера, может происходить не на первой границе, а где-то внутри структуры, так что обращение в нуль отражения будет происходить не при одном значении угла, соответствующем выполнению условия Брюстера на первой границе, а при стольких

значениях, сколько раз оно будет выполняться на протяжении нескольких внутренних сред.

В случае продольной поляризации особое значение принимает магнитная проницаемость, влияние которой проявляется в изменении условий реализации явления Брюстера. Общие положения о характере такого влияния приведены в разделе 4.3 предыдущей главы. При этом, если значения магнитной проницаемости в различных средах друг от друга отличаются, то это может привести к довольно сложной картине зависимости коэффициентов отражения и прохождения от угла падения исходной волны.

Влияние проводимости (или диссипации в одномерном случае) в любой из сред, кроме первой и последней, приводит только к уменьшению амплитуды осцилляций зависимости того и другого коэффициентов от толщины. Для волны прямого направления проводимость (или диссипация) в первой среде приводит к превышению коэффициента прохождения над единицей, особенно ярко проявляющемуся при достаточно большой толщине других сред. Один из частных случаев такого превышения наглядно продемонстрирован на рис. 4.10. Для его нейтрализации следует учитывать активную, реактивную и локализованную составляющие потоков энергии в соответствии с работами [54, 62, 63]. То же относится и к случаю встречной волны, когда проводимостью или диссипацией обладает последняя среда.

Выводы по главе 5

Глава посвящена применению прямого метода для расчета характеристик распространения волн через многослойные структуры, содержащие от двух до пяти сред. Ограничение пятью средами принципиальным не является и вызвано только увеличением громоздкости вычисления при дальнейшем увеличении числа сред. Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрена общая схема прямого метода для прямо и обратно направленных волн. Отмечено, что при использовании этого метода волновое уравнение в каждом слое решается независимо от других слоев, волновые поля внутри каждого слоя представляются в виде суммы полей прямо и обратно направленных волн, после чего полученные суммарные поля сшиваются на границах между слоями с помощью граничных условий, которые состоят в равенстве волновых полей и их первых производных по обе стороны от границы.

2. Рассмотрено применение прямого метода для решения задач о распространении прямо и обратно направленных одномерных волн. Получены решения для следующих структур: две среды, разделенные одной границей, три среды, разделенные двумя границами, четыре среды, разделенные тремя границами, и пять сред, разделенные четырьмя границами. Во всех случаях записаны волновые уравнения для волн обоих направлений распространения, а также условия на границах раздела сред.

Путем подстановки решений в граничные условия получены системы уравнений для амплитуд волн, распространяющихся во всех средах.

3. Приведена алгоритмическая схема последовательного вычисления коэффициентов отражения и прохождения. Отмечена особенность решения в случае, когда начальная среда (первая для прямой волны и последняя для обратной) имеет диссипативный характер. Установлено, что в этом случае коэффициент прохождения может превышать единицу, то есть поток энергии волны, проходящий через структуру, превышает поток энергии падающей волны. Отмечено, что для устранения такого противоречия следует использовать баланс энергий, учитывающий активную, реактивную и локализованную составляющие.

4. Рассмотрена геометрия распространения электромагнитных волн через многослойные структуры. Отдельно выделены случаи нормального падения, а также наклонного падения волн с продольной и поперечной поляризациями. Рассмотрена ориентация волновых векторов, а также векторов электрического и магнитного полей волн прямого и обратного направлений, распространяющихся в перечисленных случаях во всех средах. Отмечено, что при прохождении через границу направления векторов электрического и магнитного полей волны сохраняются, а при отражении от границы направление вектора электрического поля сохраняется, а направление вектора магнитного поля меняется на противоположное.

5. Рассмотрены особенности трехмерного характера распространяющихся электромагнитных волн. Отмечено, что основные закономерности распространения волн, состоящие в описании их свойств с помощью волнового уравнения в совокупности с граничными условиями, требующими непрерывности волновой функции и ее первой производной по координате на границах раздела сред, в целом сохраняются. Такое обстоятельство позволяет для решения задач об электромагнитных волнах использовать решение одномерной задачи с соответствующими дополнениями. Так одномерное волновое уравнение заменяется на уравнения для электрического и магнитного полей волны, а граничные условия — на равенство электрического и магнитного полей на границах раздела. Приведены эквиваленты обозначений переменных в одномерных и электродинамических задачах при произвольном числе сред. Отмечено отличие наклонного распространения волн от нормального, состоящее в необходимости учитывать изменение углов падения волн в отдельных слоях структуры на основе закона преломления Снеллиуса. Предложен алгоритм сведения задачи для электромагнитной волны к задаче для одномерной волны, состоящий в предварительном последовательном по ходу волны вычислении углов падения волн внутри сред, после чего в использовании эквивалентов обозначений переменных. Отмечено, что результатом таких преобразований являются амплитуды распространяющихся волн во всех средах с возможностью получения на их основе коэффициентов отражения и прохождения для структуры в целом.

6. Рассмотрены некоторые особенности геометрии наклонного пространства электромагнитных волн. Рассмотрены две ситуации: первая, когда встречная волна распространяется точно вдоль направления распространения прямой волны, и вторая, когда эти направления различаются. Отмечено, что в первом случае в среде формируется неподвижная интерференционная картина, тогда как во втором такая картина не формируется или имеет бегущий характер, поэтому в первом случае задачи о распространении прямо и обратно направленных волн являются сходными и могут решаться совместно, тогда как во втором задачи должны решаться отдельно.

7. Рассмотрено применение прямого метода для решения задач о распространении прямо и обратно направленных электромагнитных волн в условиях нормального падения. Получены решения для следующих структур: три среды, разделенные двумя границами, четыре среды, разделенные тремя границами и пять сред, разделенные четырьмя границами. В качестве базовой задачи рассмотрена структура из пяти сред. Записаны волновые уравнения для волн обоих направлений распространения, в также условия на границах раздела сред. Путем подстановки решений в граничные условия получена система уравнений для амплитуд волн, распространяющихся во всех средах. Отмечено сходство полученной системы с системой для одномерной задачи. Путем использования соответствующих замен задача сведена к одномерной, на основе которой получены амплитуды распространяющихся волн обоих направлений во всех средах. Решение, полученное для пяти сред, путем приравнивания параметров соседних сред приведено к решениям для четырех и трех сред. Во всех случаях найдены амплитуды волн во всех средах. Приведена алгоритмическая схема последовательного вычисления коэффициентов отражения и прохождения. Отмечена особенность решения в случае, когда начальная среда (первая для прямой волны и последняя для обратной) имеет диссипативный характер, для устранения которой предложено использовать баланс энергий по активной, реактивной и локализованной составляющим.

8. Рассмотрено применение прямого метода для решения задач о распространении прямо и обратно направленных волн. Выполнено решение по схеме, аналогичной таковой для случая нормального падения. Отмечено, что начальным этапом решения должно быть определение углов падения волн в соответствии с законом Снеллиуса во всех средах, для прямых волн начиная с первой среды, для обратных — с последней. Отдельно рассмотрено падение волн с продольной и поперечной поляризациями. В обоих случаях получены решения для структур, содержащих от трех до пяти сред. В качестве базовой задачи рассмотрена структура из пяти сред. Записаны волновые уравнения для волн обоих направлений распространения, в также условия на границах раздела сред. Получена система уравнений для амплитуд волн, распространяющихся во всех средах. Отмечено сходство полученной системы с системой для одномерной задачи. Путем использования соответствующих замен

задача сведена к одномерной, на основе которой получены амплитуды распространяющихся волн обоих направлений во всех средах. Решение, полученное для пяти сред, приведено к решениям для четырех и трех сред. Во всех случаях найдены амплитуды волн во всех средах. Приведена общая алгоритмическая схема последовательного вычисления коэффициентов отражения и прохождения. Для случая наличия диссипации в первой среде отмечена необходимость учета баланса энергий по активной, реактивной и локализованной составляющим.

9. Рассмотрен общий характер задач об определении коэффициентов отражения и прохождения для многослойных структур. Приведены особенности задаваемых и варьируемых параметров, таких как механические, электродинамические и геометрические параметры сред. Отмечена особая роль частоты как переменного параметра, отвечающего за установление стоячих волн по толщине слоев структуры. В качестве дополнительного параметра, важного при рассмотрении встречных волн, отмечен сдвиг фазы между падающими волнами, а также, если их частоты различны, то конкретные значения этих частот. Отмечено, что в случае равенства углов падения исходных волн того и другого направлений углы падения встречных волн в каждой отдельной среде структуры совпадают, тогда как в случае различия исходных углов внутри каждой среды получаются два направления, по одному из которых распространяется прямая волна, а по другому обратная. При этом в первом случае достаточен один расчет углов падения волн внутри структуры, тогда как во втором следует для волн того и другого направлений расчеты углов, а следовательно и амплитуд волн, должны выполняться по отдельности.

10. Отмечен осциллирующий характер зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от параметров каждой из сред, кроме первой и последней, связанный с установлением стоячих волн по толщине сред. Для случая наличия диссипации в первой среде для прямой волны или в последней среде для обратной волны отмечена важность учета баланса энергии по активной, реактивной и локализованной составляющим.

11. Отмечено различие зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от угла падения в зависимости от характера поляризации падающих волн, которое обусловлено наличием эффекта Брюстера при продольной поляризации и его отсутствием при поперечной поляризации. При продольной поляризации эффекта Брюстера может иметь место не только на крайних границах структуры, но и на внутренних границах между отдельными средами, так что зависимости коэффициентов от угла падения могут иметь не одни, а несколько минимумов или максимумов, определяемых параметрами внутренних сред. Отмечена особенность влияния магнитной проницаемости, состоящая в изменении условий Брюстера в том числе на внутренних границах сред, что может привести к значительному усложнению картины зависимости коэффициентов отражения и прохождения от угла падения исходной волны.

Глава 6

ОСНОВЫ МЕТОДА МАТРИЦЫ НА ПРИМЕРЕ ПРОСТЫХ СТРУКТУР

Глава посвящена основам методологии расчета распространения волн через многослойные структуры с использованием метода матриц. Рассмотрению предшествует краткий обзор необходимых далее математических сведений из теории матричного исчисления. В основной части главы приведены общие основания матричного метода, состоящего в нахождении характеристических матриц для отдельных сред с последующим их перемножением. Приведены примеры, иллюстрирующие применение метода матрицы для расчета распространения и отражения одномерных волн в простейших структурах.

В тексте главы использованы материалы монографии [49], а также статей [67, 74]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

6.1. Некоторые полезные сведения из теории матриц

Приведем некоторые сведения из теории матриц, полезные для последующего изложения. Для дальнейшего рассмотрения важны матрицы второго порядка (ранга), поэтому ограничимся только такими матрицами. Будем в основном следовать [165, с. 171–237].

6.1.1. Матрица, как инструмент преобразования

В общем случае матричный метод является способом преобразования одной функции в другую.

Приведем пример простейшего преобразования двух векторов один в другой.

Пусть имеется вектор \mathbf{u} , компоненты которого равны u_1 и u_2 . Требуется его преобразовать в вектор \mathbf{v} с компонентами v_1 и v_2 , причем закон преобразования имеет следующий вид:

$$v_1 = a_{11}u_1 + a_{12}u_2; \quad (6.1)$$

$$v_2 = a_{21}u_1 + a_{22}u_2. \quad (6.2)$$

Запишем коэффициенты преобразования в виде квадратной таблицы:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & \\ \hline a_{21} & a_{22} & \end{array} \right) \quad (6.3)$$

и назовем ее «матрицей преобразования», которую обозначим через \hat{A} . То есть

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Векторы \mathbf{u} и \mathbf{v} запишем в виде столбцов:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

При этом закон преобразования (6.1)–(6.2) можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

где вектор \mathbf{v} имеет вид

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Из структуры (6.7) видно, что для получения строк вектора \mathbf{v} строки матрицы \hat{A} умножаются на столбец вектора \mathbf{u} .

Таким образом, выражение (6.6) можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{v} = \hat{A}\mathbf{u}, \quad (6.8)$$

что является эквивалентом закона преобразования (6.1)–(6.2).

6.1.2. Правила действий над матрицами и векторами в матричной записи

Матричный метод включает в себя различные математические операции над матрицами. Рассмотрим некоторые из них, необходимые для дальнейшего изложения. Далее будут важны матрицы и векторы только второго порядка, поэтому на них и остановимся. Будем следовать монографии [166, с. 111–117].

Вектор, содержащий две компоненты, в матричной записи имеет вид:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Умножение вектора на произвольное число α выполняется следующим образом:

$$\alpha\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \alpha D_1 \\ \alpha D_2 \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Произведение вектора на вектор имеет два варианта — скалярное и векторное. В матричной форме оба варианта можно записать, пользуясь стандартными приемами аналитической геометрии [167]. Пример

скалярного произведения, в системе прямоугольных декартовых координат дающего число, можно найти в [165, с. 179]:

$$\begin{pmatrix} -\frac{D_1}{D_2} \\ -\frac{G_1}{G_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{G_1}{G_2} \\ -\frac{D_1}{D_2} \end{pmatrix} = D_1 G_1 + D_2 G_2. \quad (6.11)$$

Для векторов в системе трех измерений соответствующие выражения того и другого произведений можно найти в [104, с. 164–165]. В рамках дальнейшего изложения такие произведения не используются, поэтому здесь не приводятся.

Матрица второго порядка имеет вид:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Умножение матрицы на произвольное число β выполняется следующим образом:

$$\beta \widehat{A} = \begin{pmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Умножение матрицы на вектор производится путем умножения строки на столбец, причем сначала (слева) записывается матрица, а затем (справа) записывается вектор. Результатом перемножения является вектор:

$$\widehat{A} \mathbf{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{D_1}{D_2} \\ -\frac{D_1}{D_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a_{11}D_1 + a_{12}D_2}{D_2} \\ -\frac{a_{21}D_1 + a_{22}D_2}{D_2} \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Умножение одной матрицы на другую матрицу производится также путем умножения строки на столбец, в результате чего получается матрица [166, с. 114]:

$$\widehat{A} \widehat{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Замечание. В общем случае действие умножения матрицы на матрицу типа (6.15) производится подобно аналогичному действию над определителями (детерминантами). При этом из четырех возможных способов перемножения двух детерминантов второго порядка следует выбирать третий — «комбинирование строк со столбцами» [140, с. 30, способ № 3]. Проверку приведенных соотношений авторы предоставляют любознательному читателю. Подробнее об аналогии между действиями над матрицами и определителями можно найти в [165, с. 182].

Произведение матриц переместительным свойством не обладает, однако действует сочетательный закон:

$$\widehat{A} \widehat{B} \widehat{C} = \widehat{A}(\widehat{B} \widehat{C}) = (\widehat{A} \widehat{B}) \widehat{C}. \quad (6.16)$$

Произведение матриц $\widehat{A}\widehat{B}\widehat{C}$ на вектор $\begin{pmatrix} -\frac{D_1}{D_2} \\ - \end{pmatrix}$ можно записать в виде:

$$\widehat{A}\widehat{B}\widehat{C} \begin{pmatrix} -\frac{D_1}{D_2} \\ - \end{pmatrix} = \widehat{G} \begin{pmatrix} -\frac{D_1}{D_2} \\ - \end{pmatrix}, \quad (6.17)$$

где результирующая матрица \widehat{G} равна

$$\widehat{G} = \widehat{A}\widehat{B}\widehat{C}. \quad (6.18)$$

В общем случае произведение цепочки матриц на вектор производится от конца к началу, то есть справа налево:

$$\widehat{A}\widehat{B}\widehat{C}\widehat{H}\widehat{K} \begin{pmatrix} -\frac{D_1}{D_2} \\ - \end{pmatrix} = \widehat{A} \left\langle \widehat{B} \left\{ \widehat{C} \left[\widehat{H} \left(\widehat{K} \begin{pmatrix} -\frac{D_1}{D_2} \\ - \end{pmatrix} \right) \right] \right\} \right\rangle, \quad (6.19)$$

где сначала выполняется умножение в круглых скобках, затем в квадратных, после чего в фигурных и далее в угловых.

Точно таким же образом результирующая матрица рассчитывается справа налево:

$$\widehat{G} = \widehat{A}\widehat{B}\widehat{C}\widehat{H}\widehat{K} = \widehat{A} \left\{ \widehat{B} \left[\widehat{C} \left(\widehat{H}\widehat{K} \right) \right] \right\}. \quad (6.20)$$

Замечание. Следует заметить, что, благодаря сочетательному закону (6.16), перемножение матриц можно выполнять не строго последовательно друг за другом, как это представлено с помощью скобок в формуле (6.20), а, например, исходя из удобства счета соседствующие матрицы как-то группировать, подобно (6.16), однако необходимо строго соблюдать последовательность записи матриц в цепочку справа налево, не допуская каких-либо перестановок. То же касается произведения цепочки на вектор типа (6.19). При этом вектор всегда располагается по правую сторону от матрицы или цепочки матриц.

Замечание. Относительно терминологии заметим, что здесь и далее для матриц употребляются два термина: «характеристическая» и «результирующая». Эти термины не имеют специфического характера и используются не более чем для удобства. Так, первый из них означает, что речь идет о матрице, которая связывает выходные параметры объекта со входными, а второй относится к тем матрицам, которые получаются в результате каких-то действий над несколькими матрицами. При этом результирующая матрица может быть одновременно характеристической, а тот или другой термин в очевидных случаях могут вообще опускаться.

6.1.3. Некоторые полезные определения

Приведем еще некоторые полезные для дальнейшего определения [165, с. 176–182]. Будем исходить из матрицы общего вида (6.12):

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & | & a_{12} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & | & - \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

Элементы a_{11} и a_{22} , расположенные по нисходящей диагонали слева направо, называются «диагональными» и образуют «главную диагональ» матрицы.

Симметричная матрица

Симметричная матрица — такая, элементы которой, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны между собой:

$$\hat{A}_S = \begin{pmatrix} -a_{11} & | & a_{12} \\ a_{12} & | & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

Соответственно антисимметричная (или по [165, с. 176] «кососимметричная») матрица — такая, симметричные элементы которой имеют противоположные знаки:

$$\hat{A}_{AS} = \begin{pmatrix} -a_{11} & | & a_{12} \\ -a_{12} & | & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (6.23)$$

Единичная матрица

Единичная матрица — такая, все элементы которой, кроме диагональных, равны нулю, а диагональные — единице

$$\hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 \\ 0 & | & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.24)$$

Путем умножения можно убедиться, что произведение любой матрицы на единичную в любом порядке равно исходной матрице, а произведение единичной матрицы на саму себя равно единичной матрице.

Нулевая матрица

Нулевая матрица — такая, все элементы которой равны нулю:

$$\hat{0} = \begin{pmatrix} 0 & | & 0 \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.25)$$

Заметим, что в отличие от алгебры, где равенство $a \cdot b = 0$ влечет за собой одно из равенств $a = 0$ или $b = 0$, произведение двух матриц может равняться нулевой матрице даже в том случае, когда оба сомножителя от нулевой матрицы отличны. Примеры таких произведений можно найти в [165, с. 178].

Транспонированная матрица

Транспонированная матрица — такая, в которой столбцы исходной матрицы заменены строками и наоборот. Так, для матрицы \hat{A} вида (6.22) транспонированная матрица \hat{A}_T имеет вид:

$$\hat{A}_T = \begin{pmatrix} -a_{11} & | & a_{21} \\ a_{12} & | & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (6.26)$$

Обратная матрица

Обратная матрица — такая, произведение которой на исходную матрицу равно единичной матрице. Для матрицы, обратной относительно \widehat{A} , используется обозначение \widehat{A}^{-1} . Таким образом, должно выполняться соотношение:

$$\widehat{A}\widehat{A}^{-1} = \widehat{1}. \quad (6.27)$$

Матрица обратная к обратной снова становится прямой, то есть в этом случае перестановочный закон выполняется:

$$\widehat{A}^{-1}\widehat{A} = \widehat{1}. \quad (6.28)$$

6.1.4. Способ вычисления обратной матрицы

Ввиду довольно частого использования обратных матриц, приведем схему вычисления такой матрицы более подробно. Пусть дана прямая (исходная) матрица (6.22):

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array} \right). \quad (6.29)$$

Обратную к ней \widehat{A}^{-1} временно обозначим через \widehat{B} , где

$$\widehat{A}^{-1} \rightarrow \widehat{B} = \left(\begin{array}{c|c} b_{11} & b_{12} \\ \hline b_{21} & b_{22} \end{array} \right). \quad (6.30)$$

Потребуем выполнения условия:

$$\widehat{A}\widehat{B} = \widehat{1}. \quad (6.31)$$

Выполняя умножение, получаем:

$$\widehat{A}\widehat{B} = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} b_{11} & b_{12} \\ \hline b_{21} & b_{22} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ \hline a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{array} \right). \quad (6.32)$$

Сравнивая с (6.24), получаем:

$$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1; \quad (6.33)$$

$$a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 0; \quad (6.34)$$

$$a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 0; \quad (6.35)$$

$$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 1. \quad (6.36)$$

Рассматриваем (6.33)–(6.36) как систему уравнений относительно b_{11} , b_{12} , b_{21} , b_{22} , решая которую получаем:

$$b_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; \quad (6.37)$$

$$b_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; \quad (6.38)$$

$$b_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; \quad (6.39)$$

$$b_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad (6.40)$$

то есть, в соответствии с (6.30), матрица \hat{A}^{-1} , обратная к \hat{A} , имеет вид:

$$\hat{A}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \hline -\frac{a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{array} \right). \quad (6.41)$$

Учитывая правило умножения матрицы на число (6.13), это выражение можно записать в виде:

$$\hat{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \left(\begin{array}{c|c} a_{22} & -a_{12} \\ \hline -a_{21} & a_{11} \end{array} \right). \quad (6.42)$$

Путем умножения \hat{A} на \hat{A}^{-1} в соответствии с (6.15) можно убедиться, что условие (6.28) выполняется.

Укороченное вычисление обратной матрицы

Вычисление обратной матрицы путем решения системы (6.33)–(6.36) может оказаться довольно громоздким, поэтому, следуя [165, с. 181], приведем укороченную последовательность действий, полезную для применения на практике. Эта последовательность действий следующая:

1. В соответствии с (6.26) записать матрицу \hat{A}_T , транспонированную относительно исходной матрицы \hat{A} .

2. Заменить каждый элемент матрицы \hat{A}_T определителем, получаемым в результате вычеркивания строки и столбца, на которых расположен данный элемент.

3. Этот определитель сопроводить знаком плюс, если сумма индексов элемента четная, и знаком минус, если сумма нечетная.

4. Разделить полученную матрицу на определитель исходной матрицы $[\hat{A}]$, получаемый заменой элементов матрицы на элементы соответствующего детерминанта с последующим его раскрытием обычными методами [140, с. 30, способ № 3], [165, с. 182].

Можно убедиться, что эта последовательность действий приводит к тому же результату, что и решение системы (6.33)–(6.36), то есть получается матрица вида (6.41) или (6.42). Такую проверку авторы предоставляют любознательному читателю.

6.2. Общая схема метода матрицы

В предыдущей главе подробно рассмотрен прямой метод решения задач о распространении волн через многослойные структуры. При использовании этого метода амплитуды распространяющихся волн находятся путем решения единой системы линейных алгебраических уравнений, содержащих искомые амплитуды в качестве неизвестных. Для решения такой системы используется метод Крамера [104, с. 45], требующий вычисления детерминантов, порядок которых равен числу неизвестных, то есть удвоенному числу сред. Поскольку амплитуды волн ищутся одновременно во всех средах, такой метод можно считать «параллельным». Определенное неудобство метода состоит в необходимости раскрывать детерминанты, порядок которых равен удвоенному числу сред, что с повышением числа сред более пяти становится довольно громоздким.

Сложность вычислений при значительном числе сред заставляет обращаться к более простым для реализации методам, имеющим «последовательный» характер. При последовательных методах распространение волн анализируется не сразу во всей структуре в целом, а последовательно, переходя от среды к среде с одного конца структуры к другому, а затем, если есть необходимость, то еще в обратном порядке.

Одним из последовательных методов является метод матрицы. Это метод основывается на том, что в каждой отдельной среде структуры процессы распространения происходят независимо от других сред, при этом важны лишь параметры самой среды. Распространение волны внутри среды определяется параметрами самой среды, а вход и выход — согласуется с параметрами двух соседствующих сред. Такое распространение волн описывается с помощью матриц. При этом матрица каждой отдельной среды устанавливает связь между входящими в среду волнами и выходящими из нее, которая определяется параметрами среды. Общая связь между волнами, входящими в структуру в целом и выходящими из нее, также в целом создается последовательным соединением отдельных связей, формируемых каждой средой в отдельности. Такое соединение достигается путем последовательного перемножения матриц.

Методом матрицы удобно решаются задачи в оптике, где толщина среды обычно превышает длину волны или в технике СВЧ, где соотношение может быть обратным. Удобно решаются задачи для диэлектриков и металлов, то есть для двух крайних случаев нулевой или очень большой проводимости. При учете промежуточных значений проводимости вычисления требуют использования аппарата комплексных переменных.

Суть метода матрицы в его простейшем варианте [2, с. 81–85, 92–95] состоит в перемножении матриц отдельных сред. Для каждой последующей среды произведение увеличивается на одну матрицу,

то есть полное число перемножаемых матриц равняется числу сред. При этом такое перемножение производится последовательно от одного края структуры до другого, так что порядок (ранг) матрицы при каждом отдельном акте умножения не возрастает, как правило, оставаясь равным двум, так что вычисления остаются достаточно простыми, всего лишь повторяясь столько раз, сколько сред содержится в полной структуре.

Приведем вкратце основные положения матричного метода.

Постановка задачи

ИМЕЕТСЯ некоторый замкнутый конечный объект, обладающий определенными, заранее известными свойствами. В этот объект входит какой-то сигнал с заданными параметрами и из него выходит другой сигнал, параметры которого определяются параметрами входящего сигнала и свойствами объекта. Входящий сигнал может быть представлен скаляром или вектором двух, трех и более измерений. Предполагается, что выходящий сигнал также является скаляром или вектором той же размерности, что и входящий.

ТРЕБУЕТСЯ: выразить параметры выходящего сигнала через параметры входящего при условии, что параметры объекта известны.

Основная идея метода

Основная идея метода матрицы состоит в предположении, что параметры выходящего сигнала можно выразить через параметры входящего сигнала с помощью матрицы, элементы которой определяются свойствами объекта. Такая матрица называется характеристической матрицей объекта.

Если объект неизменен во времени и пространстве, то элементы матрицы постоянны. Если объект меняется под действием сторонних сил, то есть является управляемым, то элементы матрицы зависят от каких-то параметров управления.

Матрица является квадратной и содержит столько строк и столбцов, сколько измерений имеет входящий сигнал.

Достоинства метода

Представление свойств объекта в виде матрицы удобно тем, что оно легко применимо к группе объектов, соединенных последовательно таким образом, что выходящий сигнал предыдущего объекта является входящим для последующего. При этом свойства такого совокупного объекта определяются единственной матрицей, являющейся произведением матриц отдельных объектов. Таким образом, задача о прохождении сигнала через сложный объект может быть сведена к вычислению матриц для отдельных частей объекта с последующим их перемножением.

6.3. Матричные методы в различных областях применения

Приведем некоторые характеристики матричных методов, находящих применение в различных областях науки и техники.

Теория электрических цепей

Матрица четырехполюсника — связывает сигналы, входящие в два входных зажима четырехполюсника с сигналами, выходящими из двух выходных зажимов четырехполюсника. Входные зажимы могут быть связаны между собой, образуя пару из двух полюсов, также и выходные зажимы могут представлять собой подобную пару. Тогда входными сигналами четырехполюсника являются ток и напряжение на паре входных зажимов, а выходными — ток и напряжение на паре выходных зажимов [168, с. 192–202], [165, с. 210–212].

Матрица цепочки четырехполюсников — связывает сигналы, входящие в цепочку из четырехполюсников с сигналами, выходящими из нее, представляет собой произведение матриц отдельных четырехполюсников [165, с. 212–213].

Оптика

Характеристическая матрица среды — характеристика однородного участка волноведущей среды. Связывает между собой параметры одной распространяющейся волны на входе и выходе из участка [2, с. 82–83]. Пригодна для описания распространения двухкомпонентных волн, например, электромагнитных, где в качестве компонент выступают электрическое и магнитное поля волны. Может применяться при распространении волны через границу, для чего используются граничные условия или формулы Френеля [2, с. 63–66]. Может использоваться при описании многослойных сред, для чего результирующая матрица многослойной среды представляется в виде произведения матриц отдельных участков [2, с. 81–85].

Матрица преобразования лучей и ее варианты — матрица перемещения и матрица преломления — применяются для расчета параксиальных оптических систем, оптических резонаторов, распространения лазерных пучков, в том числе в кристаллах [169, с. 6]. Может использоваться при описании многокомпонентных оптических структур, для чего результирующая матрица структуры в целом представляется в виде произведения матриц отдельных ее элементов.

Матричный метод Джонса — применяется для расчета поляризационных характеристик когерентной монохроматической поляризованной электромагнитной волны, проходящей через участок среды или отражающейся от него [169].

Матрица Мюллера — применяется для расчета поляризационных характеристик электромагнитной волны, проходящей через участок среды или отражающейся от него, в несколько иной форме дает те же результаты, что матричный метод Джонса [169].

Электромагнитные волны сверхвысоких частот

Матрица передачи — характеризует передачу двух однонаправленных или противоположенных волн или одной двухкомпонентной волны через участок среды. Связывает параметры обеих волн или их компонент после прохождения участка с параметрами тех же волн или компонент до участка [108, 109, 170].

Матрица рассеяния для однородного или неоднородного участка среды — характеризует отражение двухкомпонентной волны от участка среды, протяженного или имеющего вид резкой границы. Связывает параметры волны, падающей на участок среды, с параметрами волны, отраженной от этого участка [170].

Матрица рассеяния для сложных цепей — используется для представления сложных разветвленных цепей в виде единого звена цепи с единственными входом и выходом. Применяется для расчета волноводных разветвлений, тройников, т-мостов, направленных ответвителей, взаимных и невзаимных ферритовых устройств, в том числе игрек-циркуляторов [14, с. 440–468].

Дополнительный пример для оптики

Данным перечислением области применения матричных методов далеко не исчерпываются. В качестве еще одного дополнительного примера приведем касающийся оптики весьма красочный фрагмент из книги [169, с. 6]:

«Матричные методы расчета оптических систем во многом аналогичны широко известным методам, которые уже давно используются в инженерной практике при расчетах приборов в диапазоне СВЧ и электрических схем на основе четырехполюсников. В рамках этих методов полная матрица системы записывается в виде произведения матриц составляющих ее элементов, которых, например, в оптике, формирующей изображение, всего два: 1) преломляющая или отражающая оптическая поверхность и 2) оптический промежуток, измеряемый приведенным расстоянием вдоль оптической оси между двумя такими поверхностями. С помощью этих матриц можно решать (в квазиоптическом приближении) многочисленные практически важные задачи лазерной оптики, например, вычислять параметры резонаторов лазеров по заданным параметрам пучка на выходном зеркале и решать обратную задачу согласования оптических систем лазерной оптики, рассчитывать линзовые оптические волноводы, оптимальную фокусировку лазерного излучения на мишени и т. д.»

Общий вывод

Как видно из приведенного перечисления, матричные методы широко используются для расчета характеристик распространения волн через многослойные среды весьма широко и достаточно успешно. Важным достоинством матричных методов является возможность проведения параллельных независимых вычислений по каждой среде в от-

дельности, что позволяет, последовательно переходя от слоя к слою, значительно экономить объем требуемых вычислений.

К сожалению, несмотря на огромное количество публикаций, посвященных использованию матричных методов, в этом вопросе нет исчерпывающего единства, что связано с разнообразием конкретной специфики решаемых задач.

В то же время, задачи о распространении волн через слоистые среды самой различной природы содержат много общего и их решение часто базируется на свойствах элементарного волнового уравнения для одномерной волны, простейшим видом которой является волна в струне [45, с. 23–27]. Более того, матричный аппарат, развиваемый на основе одномерной волны, является настолько общим, что допускает обобщение на задачи для электромагнитных, акустических и других волн. Такой подход позволяет рассмотреть различные задачи в едином ключе, допускающем достаточно общую и единообразную по структуре реализацию.

6.4. Общее определение характеристической матрицы

Приведем общее определение характеристической матрицы, используемое далее в настоящем изложении.

Будем рассматривать участок однородной волноведущей среды конечной протяженности. Предполагаем, что волна входит в участок с одного конца и выходит с другого.

Характеристическая матрица связывает параметры волны на одном конце этого участка с параметрами волны на другом конце того же участка.

Таким образом, характеристическая матрица отражает волноведущие свойства конечного участка однородной среды.

Структура характеристической матрицы, то есть конкретные формулы, определяющие ее элементы, связана с выбором системы координат. Традиционным выбором, который и будет использоваться далее, является декартова система координат с осью Ox вдоль направления распространения волны. При этом входным концом участка считается соответствующий меньшему значению координаты x , а выходным — большему.

Будем различать два вида характеристической матрицы:

- **прямая характеристическая матрица** — предназначена для случая, когда волна распространяется в положительном направлении оси Ox , и позволяет, зная параметры волны на входе участка, определить параметры волны на его выходе;
- **обратная характеристическая матрица** — предназначена для случая, когда волна распространяется в отрицательном направлении оси Ox , и позволяет, зная параметры волны на выходе участка, определить параметры волны на его входе.

6.5. Общая схема применения матриц для представления распространения волн через сложную структуру

Рассмотрим общую схему применения матриц для представления процесса распространения волн в многосоставной волноведущей структуре. Будем считать, что такая структура состоит из некоторого определенного числа соединенных друг за другом участков. Волна распространяется вдоль такой структуры, последовательно переходя от одного участка к другому. В конструктивном отношении относительно распространения волны каждый участок имеет свои собственные, не зависящие от других участков, вход и выход. Соединение участков между собой происходит с выхода предыдущего на вход последующего. На данном этапе не будем конкретизировать внутренние волноведущие свойства участка, а ограничимся только констатацией факта наличия у участка входа и выхода, связанных посредством определенной матрицы наиболее общего вида.

Главная задача состоит том, чтобы определить, что происходит в волной в результате прохождения всей структуры в целом, то есть какая часть волны проходит через структур насквозь и какая часть волны от структуры отражается. Далее рассматривается представление решения этой задачи с помощью аппарата матриц.

6.5.1. Прямая и обратная матрицы для единичного участка волноведущей структуры

Рассмотрим сначала единичный участок волноведущей среды, схема которого показана на рис. 6.1

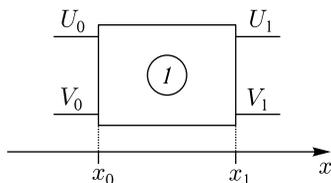


Рис. 6.1. Схема распространения волны через ограниченный участок волноведущей структуры

Для конкретности рассмотрения введем ось Ox , относительно которой будем предполагать, что волна распространяется именно вдоль такой оси. На рис. 6.1 схематически показан участок волноведущей структуры I , заключенный между координатами x_0 и x_1 , внутри которого волна распространяется слева направо, то есть от x_0 до x_1 . На вход участка поступает волна с параметрами U_0 и V_0 , при этом на его выходе образуется волна с параметрами U_1 и V_1 .

В качестве параметров U и V может фигурировать, например, для одномерного случая амплитуда волны и ее производная с каким-то

постоянным коэффициентом, а для электромагнитной волны — ее электрическое и магнитное поле.

Связь между входными и выходными параметрами волны задается с помощью матрицы, элементы которой являются функциями от координат. Поскольку аргументы всех элементов матрицы одни и те же, то можно говорить об аргументах этих элементов как о едином аргументе матрицы.

Для простоты рассмотрения будем считать, что аргумент матрицы равен разности между последующей и предыдущей координатами по ходу распространения волны. Это означает, что все функции, входящие в матрицу в качестве ее элементов, для волны, распространяющейся в положительном направлении оси Ox , имеют аргумент $x_1 - x_0$, где $x_1 > x_0$, а для волны, распространяющейся в отрицательном направлении — аргумент $x_0 - x_1$.

Замечание. Такое предположение правомерно только в случае однородной среды при волне, описываемой классическим волновым уравнением с постоянными коэффициентами, например, для одномерных или электромагнитных волн. В неоднородной среде или при подчинении волны другому волновому уравнению, в том числе такому, коэффициенты которого (например, волновое число или скорость распространения волны) зависят от координаты x , заданными следует считать только координаты начала и конца участка x_0 и x_1 , а связь между параметрами волны при этих координатах следует определять из решения соответствующих волновых уравнений с учетом неоднородных параметров среды. В рамках настоящей монографии такие случаи не рассматриваются, однако они могут составить полезную задачу для любознательного читателя. Весьма интересным может быть рассмотрение решения уравнения Рэлея для волны, волновое число которой обратно координате [171]. Некоторые волновые уравнения и их решения для структур с периодическими неоднородностями приведены в [23, с. 118–142]. Ряд довольно сложных моделей можно найти в обзоре [12].

Представим параметры входящей в участок волны в виде вектора:

$$\begin{pmatrix} U_0(x_0) \\ -\frac{U_0(x_0)}{V_0(x_0)} \end{pmatrix}, \quad (6.43)$$

и параметры выходящей из участка волны также в виде вектора

$$\begin{pmatrix} U_1(x_1) \\ -\frac{U_1(x_1)}{V_1(x_1)} \end{pmatrix}. \quad (6.44)$$

Будем считать, что **прямая характеристическая матрица** $\hat{N}(x_1 - x_0)$ позволяет определить параметры волны, распространяющейся в положительном направлении оси Ox , выражая эти параметры

на выходе участка через аналогичные параметры на его входе с помощью соотношения:

$$\begin{pmatrix} U_1(x_0) \\ -\frac{U_1(x_0)}{V_1(x_1)} \end{pmatrix} = \widehat{N}(x_1 - x_0) \begin{pmatrix} U_0(x_0) \\ -\frac{U_0(x_0)}{V_0(x_0)} \end{pmatrix}, \quad (6.45)$$

или, для компактности записи опуская обозначения аргументов в скобках, получаем

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ -\frac{U_1}{V_1} \end{pmatrix} = \widehat{N} \begin{pmatrix} U_0 \\ -\frac{U_0}{V_0} \end{pmatrix}, \quad (6.46)$$

где аргументом матрицы является $x_1 - x_0$.

Аналогичным образом считаем, что **обратная характеристическая матрица** $\widehat{M}(x_0 - x_1)$ позволяет определить параметры волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси Ox , выражая эти параметры на выходе участка через аналогичные параметры на его входе с помощью соотношения:

$$\begin{pmatrix} U_0(x_0) \\ -\frac{U_0(x_0)}{V_0(x_0)} \end{pmatrix} = \widehat{M}(x_0 - x_1) \begin{pmatrix} U_1(x_1) \\ -\frac{U_1(x_1)}{V_1(x_1)} \end{pmatrix}, \quad (6.47)$$

или, для компактности записи опуская обозначения аргументов в скобках, получаем

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ -\frac{U_0}{V_0} \end{pmatrix} = \widehat{M} \begin{pmatrix} U_1 \\ -\frac{U_1}{V_1} \end{pmatrix}, \quad (6.48)$$

где аргументом матрицы является $x_0 - x_1$.

6.5.2. Прямая и обратная матрицы для произвольного числа участков волноведущей среды

Распространим теперь введенные в предыдущем разделе понятия прямой и обратной характеристической матриц на произвольное число участков волноведущей цепи.

6.5.3. Прямая матрица для двух участков волноведущей структуры

Сначала рассмотрим наиболее простой случай двух участков, иллюстрируемый рис. 6.2.

На рисунке схематически показаны два участка волноведущей структуры 1 и 2, заключенные: первый между координатами x_0 и x_1 , второй — между координатами x_2 и x_3 . Параметры участков полагаем различными. Внутри каждого участка слева направо распространяется волна.

Рассмотрим сначала определение выходных волн через входные, для чего будем использовать прямую характеристическую матрицу.

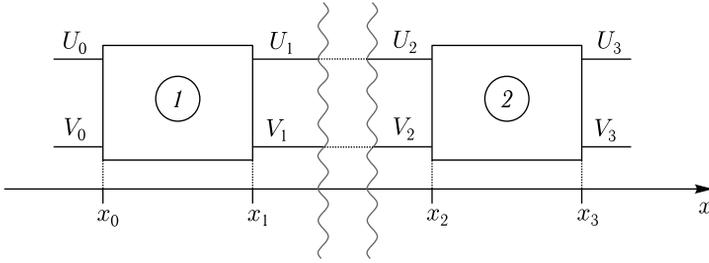


Рис. 6.2. Схема распространения волны через два участка волноведущей структуры

При этом для первого участка можно записать:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ -\frac{U_1}{V_1} \end{pmatrix} = \hat{N}_1 \begin{pmatrix} U_0 \\ -\frac{U_0}{V_0} \end{pmatrix}, \quad (6.49)$$

где индекс «1» у характеристической матрицы означает принадлежность ее к участку 1, а аргумент матрицы в соответствии со сформулированным выше правилом равен $x_1 - x_0$.

Аналогично для участка 2 имеем:

$$\begin{pmatrix} U_3 \\ -\frac{U_3}{V_3} \end{pmatrix} = \hat{N}_2 \begin{pmatrix} U_2 \\ -\frac{U_2}{V_2} \end{pmatrix}, \quad (6.50)$$

где аргумент матрицы равен $x_3 - x_2$.

Предположим далее, что участки связаны друг с другом непосредственно, то есть выходные параметры волны, выходящей из первого участка, являются входными параметрами волны, входящей во второй участок, то есть

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ -\frac{U_2}{V_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ -\frac{U_1}{V_1} \end{pmatrix}. \quad (6.51)$$

Подставляя (6.51) в (6.50) и учитывая (6.49), получаем:

$$\begin{pmatrix} U_3 \\ -\frac{U_3}{V_3} \end{pmatrix} = \hat{N}_2 \left[\hat{N}_1 \begin{pmatrix} U_0 \\ -\frac{U_0}{V_0} \end{pmatrix} \right]. \quad (6.52)$$

В этом соотношении сначала надо выполнить умножение в квадратных скобках, а затем умножить матрицу \hat{N}_2 на полученный результат. Однако путем прямой проверки для двух произвольных матриц можно убедиться, что то же самое можно получить, если сначала, не меняя порядка следования, перемножить матрицы \hat{N}_2 и \hat{N}_1 , а затем полученную матрицу умножить на вектор волны, входящей в первый участок, то есть

$$\begin{pmatrix} U_3 \\ -\frac{U_3}{V_3} \end{pmatrix} = (\hat{N}_2 \hat{N}_1) \begin{pmatrix} U_0 \\ -\frac{U_0}{V_0} \end{pmatrix}, \quad (6.53)$$

где аргумент матрицы \hat{N}_1 равен $x_1 - x_0$, а матрицы \hat{N}_2 равен $x_3 - x_2$.

Обозначая результирующую матрицу через

$$\widehat{N}_{21} = \widehat{N}_2 \widehat{N}_1, \quad (6.54)$$

можно записать (6.53) в виде:

$$\begin{pmatrix} U_3 \\ - \\ V_3 \end{pmatrix} = \widehat{N}_{21} \begin{pmatrix} U_0 \\ - \\ V_0 \end{pmatrix}. \quad (6.55)$$

Отметим, что при вычислении результирующей матрицы (6.54) умножение записывается и производится справа налево (так как при умножении матриц перестановочный закон не имеет места).

6.5.4. Прямая матрица при произвольном числе участков

Распространим теперь полученные результаты на произвольное число сред. Действуя последовательно тем же порядком, получаем выражение для параметров выходящей волны через параметры входящей для произвольного числа S сред:

$$\begin{pmatrix} U_S \\ - \\ V_S \end{pmatrix} = (\widehat{N}_S \widehat{N}_{S-1} \dots N_1) \begin{pmatrix} U_0 \\ - \\ V_0 \end{pmatrix} = \left(\prod_{n=0}^{S-1} \widehat{N}_{S-n} \right) \begin{pmatrix} U_0 \\ - \\ V_0 \end{pmatrix}, \quad (6.56)$$

то есть результирующая прямая характеристическая матрица имеет вид

$$\widehat{N}_S = \prod_{n=0}^{S-1} \widehat{N}_{S-n}, \quad (6.57)$$

где аргументы входящих в это выражение матриц берутся в соответствии с тем же правилом (раздел 6.5.1).

Важно подчеркнуть, что при вычислении результирующей матрицы последовательные умножения записываются и производятся справа налево.

6.5.5. Обратная матрица для двух участков волноведущей структуры

Рассмотрим теперь обратную задачу, то есть определение входных волн через выходные, для чего будем использовать обратную характеристическую матрицу.

При этом для первого участка можно записать:

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ - \\ V_0 \end{pmatrix} = \widehat{M}_1 \begin{pmatrix} U_1 \\ - \\ V_1 \end{pmatrix}, \quad (6.58)$$

где индекс «1» у характеристической матрицы означает принадлежность ее к участку 1, а аргумент равен $x_0 - x_1$.

Аналогично для участка 2 имеем:

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ - \\ V_2 \end{pmatrix} = \widehat{M}_2 \begin{pmatrix} U_3 \\ - \\ V_3 \end{pmatrix}, \quad (6.59)$$

где аргумент матрицы равен $x_2 - x_3$.

Предположим далее, что участки связаны друг с другом непосредственно, то есть выходные параметры волны, выходящей из первого участка, являются входными параметрами волны, входящей во второй участок, то есть

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ -V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2 \\ -V_2 \end{pmatrix}. \quad (6.60)$$

Подставляя (6.60) в (6.58) и учитывая (6.59), получаем:

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ -V_0 \end{pmatrix} = \widehat{M}_1 \left[\widehat{M}_2 \begin{pmatrix} U_3 \\ -V_3 \end{pmatrix} \right]. \quad (6.61)$$

В этом соотношении сначала надо выполнить умножение в квадратных скобках, а затем умножить матрицу \widehat{M}_1 на полученный результат. Однако путем прямой проверки для двух произвольных матриц можно убедиться, что то же самое можно получить, если сначала, не меняя порядка следования, перемножить матрицы \widehat{M}_1 и \widehat{M}_2 , а затем полученную матрицу умножить на вектор волны, выходящей из второго участка, то есть

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ -V_0 \end{pmatrix} = (\widehat{M}_1 \widehat{M}_2) \begin{pmatrix} U_3 \\ -V_3 \end{pmatrix}, \quad (6.62)$$

где аргумент матрицы \widehat{M}_1 равен $x_0 - x_1$, а матрицы \widehat{M}_2 равен $x_2 - x_3$.

Обозначая результирующую матрицу через

$$\widehat{M}_{12} = \widehat{M}_1 \widehat{M}_2 \quad (6.63)$$

можно записать (6.62) в виде

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ -V_0 \end{pmatrix} = \widehat{M}_{12} \begin{pmatrix} U_3 \\ -V_3 \end{pmatrix}. \quad (6.64)$$

Отметим, что при вычислении результирующей матрицы (6.63) умножение, как и ранее, записывается и производится справа налево.

6.5.6. Обратная матрица при произвольном числе участков

Аналогичным образом можно получить выражение для параметров входящей волны через параметры выходящей для произвольного числа S сред:

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ -V_0 \end{pmatrix} = (\widehat{M}_1 \widehat{M}_2 \dots \widehat{M}_S) \begin{pmatrix} U_S \\ -V_S \end{pmatrix} = \left(\prod_{n=1}^S \widehat{M}_n \right) \begin{pmatrix} U_S \\ -V_S \end{pmatrix}, \quad (6.65)$$

то есть результирующая обратная характеристическая матрица имеет вид

$$\widehat{M}_S = \prod_{n=1}^S \widehat{M}_n, \quad (6.66)$$

где аргументы входящих в это выражение матриц берутся в соответствии с тем же правилом (раздел 6.5.1).

Как и ранее, при вычислении этой результирующей матрицы последовательные умножения производятся справа налево.

6.6. Характеристическая матрица для волны, определяемой уравнением второго порядка

В предыдущих разделах рассмотрено распространение волны в среде, состоящей из единичных участков, внутренние параметры которых не заданы, а характеристикой каждого отдельного участка является лишь соотношение амплитуд волн на его входе и выходе, задаваемое определенной матрицей. Такое представление является достаточно общим и может применяться к участкам с любыми внутренними свойствами. Например, распространение волны внутри участка может быть нелинейным, может описываться уравнением третьего, четвертого и более высоких порядков, в пределах участка среда может быть неоднородной, диссипативной, активной, дискретной, случайной и так далее. Важно лишь, чтобы свойства участка описывались квадратной матрицей второго порядка, а элементы этой матрицы могут быть произвольными, в том числе комплексными.

Обратимся теперь к рассмотрению более конкретных случаев, когда распространение волны внутри участка может быть описано уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Будем следовать принятому в оптике [2, с. 82–83] классическому определению характеристической матрицы как характеристики однородной среды, описывающей прямолинейное распространение плоской монохроматической волны. Ориентируем ось координат Ox вдоль направления распространения волны. Будем считать, что характеристическая матрица связывает поле волны на плоскости, расположенной в начале координат, то есть при $x = 0$, с полем на плоскости, соответствующей произвольной координате x .

Итак, положим, что в пределах участка, ограниченного координатами 0 и x , распространяется волна, координатная часть которой описываемая простым волновым уравнением второго порядка:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + k^2 U = 0, \quad (6.67)$$

где $U = U(x)$, причем на данном этапе будем считать, что волновое число k может иметь произвольную зависимость от координаты.

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию:

$$V(x) = -\frac{i}{k} \cdot \frac{dU(x)}{dx}. \quad (6.68)$$

Замечание. Математический смысл введения такой функции становится особенно ясным при постоянном значении волнового числа k . В этом случае $V(x)$ соответствует введению в прямое рассмотрение наряду с исходной функцией $U(x)$ также ее производной по координате. Наиболее очевидно такой смысл выявляется при экспоненциальном виде решения уравнения (6.67), однако на настоящем этапе рассмотрения конкретизировать его не будем.

6.6.1. Прямая характеристическая матрица

Предположим, что исходное уравнение (6.67) имеет два линейно независимых решения $U_1(x)$ и $U_2(x)$, то есть полное решение имеет вид:

$$U(x) = AU_1(x) + BU_2(x), \quad (6.69)$$

где A и B — произвольные постоянные.

При этом, в соответствии с (6.68), получаем:

$$V(x) = AV_1(x) + BV_2(x), \quad (6.70)$$

где введены обозначения

$$V_1(x) = -\frac{i}{k} \cdot \frac{dU_1(x)}{dx}; \quad (6.71)$$

$$V_2(x) = -\frac{i}{k} \cdot \frac{dU_2(x)}{dx}. \quad (6.72)$$

Для значений функций $U(x)$ и $V(x)$ в начальной точке $x = 0$ введем обозначения:

$$U(0) = U_0; \quad (6.73)$$

$$V(0) = V_0. \quad (6.74)$$

При этом из (6.69) и (6.70) получаем:

$$U_0 = AU_1(0) + BU_2(0); \quad (6.75)$$

$$V_0 = AV_1(0) + BV_2(0). \quad (6.76)$$

Следуя [2, с. 82, форм. (27)–(28)], положим, что начальную точку можно выбрать так, чтобы выполнялись соотношения (для тригонометрического вида решения уравнения (6.67) возможность такого предположения очевидна):

$$U_1(0) = 0; \quad (6.77)$$

$$U_2(0) = 1; \quad (6.78)$$

$$V_1(0) = 1; \quad (6.79)$$

$$V_2(0) = 0. \quad (6.80)$$

Подставляя (6.77)–(6.80) в (6.75)–(6.76), из полученных выражений определяем A и B :

$$A = V_0; \quad (6.81)$$

$$B = U_0. \quad (6.82)$$

Подставляя (6.81)–(6.82) в (6.69)–(6.70) и меняя порядок слагаемых, получаем:

$$U(x) = U_2(x)U_0 + U_1(x)V_0, \quad (6.83)$$

$$V(x) = V_2(x)U_0 + V_1(x)V_0. \quad (6.84)$$

Применяя правило умножения матрицы на вектор (6.14) (получаемое из (6.6)–(6.7)), это соотношения можно записать в векторно-матричном виде:

$$\begin{pmatrix} U(x) \\ V(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2(x) & U_1(x) \\ V_2(x) & V_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}, \quad (6.85)$$

где матрица, связывающая функции U и V в произвольной точке x со значениями тех же функций при $x = 0$, имеет вид

$$\widehat{N}(x) = \begin{pmatrix} U_2(x) & U_1(x) \\ V_2(x) & V_1(x) \end{pmatrix}, \quad (6.86)$$

то есть

$$\begin{pmatrix} U(x) \\ V(x) \end{pmatrix} = \widehat{N}(x) \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}. \quad (6.87)$$

Эта матрица позволяет найти параметры волны при произвольной координате x , лежащей после начальной $x = 0$, то есть прямо по ходу распространения волны. Будем называть ее **прямой характеристической матрицей**.

6.6.2. Обратная характеристическая матрица

Для задач о распространении волн через многослойные среды важна обратная матрица

$$\widehat{M}(x) = \widehat{N}(x)^{-1}, \quad (6.88)$$

позволяющая выразить значения функций U и V в начальной точке $x = 0$ через значения тех же функций в произвольной точке x . Для того, чтобы найти эту матрицу, надо систему (6.83)–(6.84) разрешить относительно U_0 и V_0 , в результате чего получаем:

$$U_0 = \frac{V_1(x)}{D(x)}U(x) - \frac{U_1(x)}{D(x)}V(x); \quad (6.89)$$

$$V_0 = -\frac{V_2(x)}{D(x)}U(x) + \frac{U_2(x)}{D(x)}V(x), \quad (6.90)$$

где

$$D(x) = U_2(x)V_1(x) - U_1(x)V_2(x). \quad (6.91)$$

Таким образом,

$$\widehat{M}(x) = \begin{pmatrix} \frac{V_1(x)}{D(x)} & -\frac{U_1(x)}{D(x)} \\ -\frac{V_2(x)}{D(x)} & \frac{U_2(x)}{D(x)} \end{pmatrix}, \quad (6.92)$$

или

$$\widehat{M}(x) = \frac{1}{D(x)} \begin{pmatrix} V_1(x) & -U_1(x) \\ -V_2(x) & U_2(x) \end{pmatrix}, \quad (6.93)$$

Матрицу вида (6.92) будем называть **обратной характеристической матрицей** среды. При этом соотношение (6.89)–(6.90) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = \widehat{M}(x) \begin{pmatrix} U(x) \\ V(x) \end{pmatrix}. \quad (6.94)$$

Можно видеть, что правила получения обратной характеристической матрицы — те же, что приведены в разделе 6.1.4, относительно получения обратной матрицы из прямой в общем математическом случае. То есть здесь допустимо как полное решение системы уравнений (6.83)–(6.84), так и использование укороченной схемы приведенной в том же разделе 6.1.4 (подраздел «укороченное вычисление обратной матрицы»). Легко убедиться, что произведение матриц (6.86) и (6.92) равно единичной матрице, как того и требует соотношение (6.88).

Замечание. Рассмотрение, проделанное в настоящем разделе, носит довольно общий характер. Так, входными параметрами объекта являются сама функция U и ее производная по координате V с точностью до множителя $-i/k$. В случае одномерной волны при постоянном k , например для струны, это будет поперечное смещение заданной точки струны и угол наклона касательной к профилю струны в этой точке. Для электромагнитной волны это может быть электрическое поле и соответствующее ему магнитное поле, с точностью до постоянного коэффициента равное производной по координате от электрического поля той же волны, как это можно видеть из соотношений (1.241), (1.242). В случае, если в качестве основной переменной выступает магнитное поле, то в качестве дополнительной может выступать электрическое, соответствующее производной от магнитного по координате (1.244), (1.245).

6.7. Характеристическая матрица для одномерной волны в экспоненциальном виде

Рассмотрим теперь получение характеристической матрицы для той же задачи, но исходя из конкретного экспоненциального вида решений уравнения (6.67):

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + k^2 U = 0, \quad (6.95)$$

где волновое число k является постоянным.

6.7.1. Прямая характеристическая матрица

В общем случае это уравнение имеет два линейно независимых решения в виде экспонент e^{-ikx} и e^{ikx} , так что полное решение имеет вид:

$$U(x) = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}, \quad (6.96)$$

где A и B — произвольные постоянные.

При этом в качестве вспомогательной функции, в соответствии с (6.68), получаем:

$$V(x) = -Ae^{-ikx} + Be^{ikx}. \quad (6.97)$$

Можно видеть, что эта функция соответствует производной от $U(x)$ по x , умноженной на постоянный множитель $-i/k$.

При $x = 0$ получаем:

$$U(0) = A + B; \quad (6.98)$$

$$V(0) = -A + B. \quad (6.99)$$

Вводя обозначения

$$U(0) = U_0; \quad (6.100)$$

$$V(0) = V_0, \quad (6.101)$$

получаем систему уравнений для A и B :

$$A + B = U_0; \quad (6.102)$$

$$A - B = -V_0, \quad (6.103)$$

решая которую, находим

$$A = \frac{U_0 - V_0}{2}; \quad (6.104)$$

$$B = \frac{U_0 + V_0}{2}. \quad (6.105)$$

Подставляя (6.104)–(6.105) в (6.94)–(6.97), получаем:

$$U(x) = \frac{U_0 - V_0}{2}e^{-ikx} + \frac{U_0 + V_0}{2}e^{ikx}; \quad (6.106)$$

$$V(x) = -\frac{U_0 - V_0}{2}e^{-ikx} + \frac{U_0 + V_0}{2}e^{ikx}. \quad (6.107)$$

Выделяя в правой части этих выражений U_0 и V_0 , получаем:

$$U(x) = U_0 \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + V_0 \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2}; \quad (6.108)$$

$$V(x) = U_0 \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2} + V_0 \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}. \quad (6.109)$$

Из этих выражений, учитывая, что [99, с. 75, форм. 408.01, 408.02]

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}; \quad (6.110)$$

$$\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}, \quad (6.111)$$

получаем

$$U(x) = U_0 \cos kx + iV_0 \sin kx; \quad (6.112)$$

$$V(x) = iU_0 \sin kx + V_0 \cos kx. \quad (6.113)$$

Записывая (6.112)–(6.113) в векторно-матричном виде, получаем:

$$\begin{pmatrix} -\frac{U(x)}{V(x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos kx & i \sin kx \\ i \sin kx & \cos kx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{U_0}{V_0} \end{pmatrix}. \quad (6.114)$$

Входящая в это выражение матрица имеет вид:

$$\widehat{N}(x) = \begin{pmatrix} \cos kx & i \sin kx \\ i \sin kx & \cos kx \end{pmatrix}. \quad (6.115)$$

С помощью (6.115) можно записать (6.114) в виде:

$$\begin{pmatrix} -\frac{U(x)}{V(x)} \end{pmatrix} = \widehat{N}(x) \begin{pmatrix} -\frac{U_0}{V_0} \end{pmatrix}. \quad (6.116)$$

Так как эта матрица позволяет найти параметры волны при произвольной координате x , лежащей после начальной $x = 0$, то есть прямо по ходу распространения волны, будем называть ее **прямой характеристической матрицей**. Эта матрица аналогична введенной для общего случая матрице (6.86). Ее определитель равен единице:

$$\left| \widehat{N}(x) \right| = \left| \begin{pmatrix} \cos kx & i \sin kx \\ i \sin kx & \cos kx \end{pmatrix} \right| = 1. \quad (6.117)$$

6.7.2. Обратная характеристическая матрица

Для задач, связанных с распространением волн через слоистую структуру, важно знать обратную матрицу, подобную (6.88):

$$\widehat{M}(x) = \widehat{N}(x)^{-1}. \quad (6.118)$$

Для ее нахождения надо разрешить систему (6.112)–(6.113) относительно U_0 и V_0 , в результате чего получаем:

$$U_0 = U(x) \cos kx - iV(x) \sin kx; \quad (6.119)$$

$$V_0 = -iU(x) \sin kx + V(x) \cos kx. \quad (6.120)$$

Записывая (6.119)–(6.120) в векторно-матричном виде, получаем:

$$\begin{pmatrix} -\frac{U_0}{V_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos kx & -i \sin kx \\ -i \sin kx & \cos kx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{U(x)}{V(x)} \end{pmatrix}. \quad (6.121)$$

Входящая в это выражение матрица имеет вид:

$$\widehat{M}(x) = \begin{pmatrix} \cos kx & -i \sin kx \\ -i \sin kx & \cos kx \end{pmatrix}. \quad (6.122)$$

С помощью (6.122) можно записать (6.121) в виде:

$$\begin{pmatrix} -\frac{U_0}{V_0} \end{pmatrix} = \widehat{M}(x) \begin{pmatrix} -\frac{U(x)}{V(x)} \end{pmatrix}. \quad (6.123)$$

Так как эта матрица позволяет найти параметры волны при начальной координате $x = 0$, лежащей позади произвольной координаты x , то есть обратно относительно хода распространения волны, будем называть ее **обратной характеристической матрицей**. Эта матрица аналогична введенной для общего случая матрице (6.92). Ее определитель также равен единице:

$$\left| \widehat{M}(x) \right| = \left| \begin{array}{c|c} \cos kx & -i \sin kx \\ \hline -i \sin kx & \cos kx \end{array} \right| = 1. \quad (6.124)$$

Можно видеть, что перемножение матриц $\widehat{N}(x)$ и $\widehat{M}(x)$ в любом порядке дает единичную матрицу, а произведение их определителей равно единице.

6.7.3. Упрощенный пример применения характеристических матриц

Рассмотрим применение прямой и обратной характеристических матриц для определения амплитуд распространяющихся волн.

Ограничимся рассмотрением волны, распространяющейся в положительном направлении оси Ox :

$$U(x) = Ae^{-ikx}, \quad (6.125)$$

$$V(x) = -Ae^{-ikx}, \quad (6.126)$$

где значение A положим известным.

При $x = 0$ имеем:

$$U_0 = A; \quad (6.127)$$

$$V_0 = -A, \quad (6.128)$$

то есть значения U_0 и V_0 также будут известными. Найдем значения функций $U(x)$ и $V(x)$ при произвольном значении x . Так как задача состоит в нахождении параметров волны при координате $x > 0$, то есть прямо по ходу распространения волны, то воспользуемся прямой характеристической матрицей, которая, согласно (6.115), имеет вид:

$$\widehat{N}(x) = \left(\begin{array}{c|c} \cos kx & i \sin kx \\ \hline i \sin kx & \cos kx \end{array} \right). \quad (6.129)$$

Находим $U(x)$ и $V(x)$ при произвольном x с помощью (6.116), а также с учетом (6.127)–(6.128):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U(x) \\ -V(x) \end{pmatrix} &= \widehat{N}(x) \begin{pmatrix} U_0 \\ -V_0 \end{pmatrix} = \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \cos kx & i \sin kx \\ \hline i \sin kx & \cos kx \end{array} \right) \begin{pmatrix} A \\ -(-A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cos kx - iA \sin kx \\ iA \sin kx - A \cos kx \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.130)$$

Учитывая соотношения (6.110)–(6.111), получаем:

$$\begin{pmatrix} U(x) \\ V(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ae^{-ikx} \\ -Ae^{-ikx} \end{pmatrix}, \quad (6.131)$$

то есть

$$U(x) = Ae^{-ikx}, \quad (6.132)$$

$$V(x) = -Ae^{-ikx}, \quad (6.133)$$

или

$$U(x) = U_0 e^{-ikx}, \quad (6.134)$$

$$V(x) = V_0 e^{-ikx}, \quad (6.135)$$

что совпадает с (6.125)–(6.128).

Таким образом, использование прямой характеристической матрицы (6.129) позволило из начальных значений волновой (6.127) и вспомогательной (6.128) функций при $x = 0$ найти значение тех же функций при произвольных значениях координаты x (6.134) и (6.135).

Рассмотрим теперь обратную задачу. Предположим, что известны значения функций $U(x)$ и $V(x)$ при произвольном заданном значении $x = x_0$:

$$U(x_0) = Ae^{-ikx_0}, \quad (6.136)$$

$$V(x_0) = -Ae^{-ikx_0}. \quad (6.137)$$

Требуется найти значения U_0 и V_0 , соответствующие $x = 0$.

Так как координата $x = 0$ лежит позади координаты x_0 , то есть обратному ходу распространения волны, то воспользуемся обратной характеристической матрицей, которая, согласно (6.122), имеет вид:

$$\widehat{M}(x) = \begin{pmatrix} \cos kx & -i \sin kx \\ -i \sin kx & \cos kx \end{pmatrix}. \quad (6.138)$$

При этом в соответствии с (6.123), учитывая (6.136)–(6.137), получаем:

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = \widehat{M}(x) \begin{pmatrix} U(x) \\ V(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos kx & -i \sin kx \\ -i \sin kx & \cos kx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ae^{-ikx_0} \\ -Ae^{-ikx_0} \end{pmatrix}. \quad (6.139)$$

Выполняя умножение и учитывая (6.110)–(6.111), находим:

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = Ae^{-ikx_0} \begin{pmatrix} e^{ikx_0} \\ -e^{ikx_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}, \quad (6.140)$$

то есть

$$U_0 = A, \quad (6.141)$$

$$V_0 = -A, \quad (6.142)$$

что совпадает с исходными значениями (6.127)–(6.128).

6.8. Применение метода матриц для задач о падении волны на границу

В предыдущих разделах для экспоненциального решения (6.96) волнового уравнения (6.95) в единичном участке структуры получены прямая (6.115) и обратная (6.122) матрицы, выраженные через тригонометрические функции. Эти матрицы получены для одномерной волны, однако они имеют универсальный характер в том отношении, что применимы для участков структуры, обладающих различными значениями волнового числа. Случай сложной структуры, подобный рассмотренному в разделах 6.5.4, 6.5.6, сводится к перемножению таких матриц в последовательности, соответствующей расположению единичных участков структуры. При этом расчет по сравнению с прямым методом значительно упрощается.

Приведем некоторые примеры применения полученных матриц для решения задач, касающихся распространения волны в структуре, содержащей границы раздела между единичными участками, так как эти задачи кроме простого перемножения матриц, имеют некоторую специфику, состоящую в необходимости учета фазовых соотношений при взаимодействии волны с границами раздела.

6.8.1. Отражение волны от границы

Рассмотрим методом характеристической матрицы отражение волны от границы. Геометрия задачи поясняется рис. 6.3.

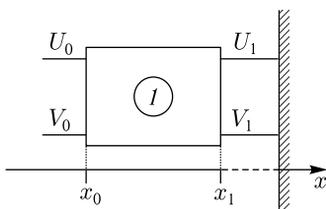


Рис. 6.3. Геометрия задачи об отражении волны от границы

На рисунке схематически показан участок волноведущей среды, начало которого соответствует координате x_0 , а конец — x_1 . На конце участка при $x = x_1$ расположена граница, при падении на которую волна претерпевает отражение. Исходная волна распространяется в положительном направлении оси Ox , отраженная — в отрицательном. За начальную точку исхода волны примем x_0 .

Сначала сформулируем два важных для настоящей задачи правила для работы с матрицами.

Правило № 1.

Аргумент матрицы равен разности между последующей и предыдущей координатами по ходу распространения волны. Это означает, что все входящие в матрицу функции для волны, распространяющейся

в положительном направлении оси Ox , в качестве аргумента имеют $x_1 - x_0$, где $x_1 > x_0$, а для волны, распространяющейся в отрицательном направлении — аргумент $x_0 - x_1$.

Правило № 2.

При отражении волны от границы производная волны меняет знак. Для одномерной волны это соответствует изменению знака функции V , для электромагнитной — изменению знака магнитного поля.

Положим исходную волну и ее производную в виде:

$$U = Ae^{-ik(x-x_0)}; \quad (6.143)$$

$$V = -Ae^{-ik(x-x_0)}. \quad (6.144)$$

В точке x_0 имеем:

$$U_0 = A; \quad (6.145)$$

$$V_0 = -A. \quad (6.146)$$

Находим эту волну в точке x_1 с помощью прямой матрицы (6.115), аргумент которой задаем в соответствии с правилом № 1:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos k(x_1 - x_0) & i \sin k(x_1 - x_0) \\ i \sin k(x_1 - x_0) & \cos k(x_1 - x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} Ae^{-ik(x_1-x_0)} \\ -Ae^{-ik(x_1-x_0)} \end{pmatrix} = Ae^{-ik(x_1-x_0)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.147)$$

Здесь величина $Ae^{-ik(x_1-x_0)}$ представляет собой амплитуду исходной волны на границе, то есть при $x = x_1$.

Рассмотрим теперь отраженную волну:

$$U_{r1} = Be^{ik(x-x_1)}; \quad (6.148)$$

$$V_{r1} = -Be^{ik(x-x_1)}. \quad (6.149)$$

Здесь в (6.149), согласно правилу № 2, учтено изменение знака производной при отражении.

В точке x_1 отраженная волна имеет вид:

$$U_{r1} = B; \quad (6.150)$$

$$V_{r1} = -B. \quad (6.151)$$

Найдем параметры этой волны в начальной точке x_0 с помощью обратной матрицы (6.122), аргумент которой задаем также в соответствии с правилом № 1:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_{r0} \\ V_{r0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos k(x_0 - x_1) & -i \sin k(x_0 - x_1) \\ -i \sin k(x_0 - x_1) & \cos k(x_0 - x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ -B \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} B \cdot e^{ik(x_0-x_1)} \\ -B \cdot e^{ik(x_0-x_1)} \end{pmatrix} = Be^{ik(x_0-x_1)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.152)$$

Здесь величина $Be^{ik(x_0-x_1)}$ представляет собой амплитуду отраженной волны в точке падения исходной, то есть при $x = x_0$.

Предположим теперь, что при отражении амплитуда исходной волны меняется в соответствии с коэффициентом отражения, равным R , в результате чего, исходя из (6.147), получаем:

$$B = AR \cdot e^{-ik(x_1-x_0)}. \quad (6.153)$$

Таким образом, получаем отраженную волну в точке $x = x_0$ в виде:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{U_{r0}}{V_{r0}} \right) &= AR e^{-ik(x_1-x_0)} e^{ik(x_0-x_1)} \left(-\frac{1}{-1} \right) = \\ &= AR e^{-2ik(x_1-x_0)} \left(-\frac{1}{-1} \right), \end{aligned} \quad (6.154)$$

то есть

$$U_{r0} = AR e^{-2ik(x_1-x_0)}, \quad (6.155)$$

$$V_{r0} = -AR e^{-2ik(x_1-x_0)}, \quad (6.156)$$

или с учетом (6.145)–(6.146)

$$U_{r0} = U_0 e^{-2ik(x_1-x_0)}, \quad (6.157)$$

$$V_{r0} = -V_0 e^{-2ik(x_1-x_0)}. \quad (6.158)$$

Из полученных формул следует, что исходная волна при отражении в ту же точку приобретает набег фазы, обусловленный двукратным прохождением расстояния между этой точкой и границей:

$$\Delta\varphi = 2k(x_1 - x_0). \quad (6.159)$$

При необходимости найти отраженную волну не в точке x_0 , а в какой-то другой точке x_2 , где $x_2 < x_1$, надо в формуле (6.152) заменить x_0 на x_2 , в результате чего получаем:

$$\left(-\frac{U_{r2}}{V_{r2}} \right) = B e^{ik(x_2-x_1)} \left(-\frac{1}{-1} \right). \quad (6.160)$$

При этом B по-прежнему определяется формулой (6.153), подставляя которую в (6.160), получаем отраженную волну в точке $x = x_2$ в виде:

$$\left(-\frac{U_{r2}}{V_{r2}} \right) = AR e^{-ik(x_1-x_0)} e^{-ik(x_1-x_2)} \left(-\frac{1}{-1} \right), \quad (6.161)$$

то есть

$$U_{r2} = AR e^{-ik(x_1-x_0)} e^{-ik(x_1-x_2)}, \quad (6.162)$$

$$V_{r2} = -AR e^{-ik(x_1-x_0)} e^{-ik(x_1-x_2)}, \quad (6.163)$$

или, с учетом (6.145)–(6.146),

$$U_{r2} = U_0 R e^{-ik(x_1-x_0)} e^{-ik(x_1-x_2)}; \tag{6.164}$$

$$V_{r2} = V_0 R e^{-ik(x_1-x_0)} e^{-ik(x_1-x_2)}. \tag{6.165}$$

Здесь видно, что исходная волна при отражении приобретает набег фазы, обусловленный суммарным прохождением расстояния от точки исхода до границы и от границы до точки наблюдения:

$$\Delta\varphi = k(2x_1 - x_0 - x_2). \tag{6.166}$$

Можно видеть, что при $x_2 = x_0$ эта формула переходит в (6.159).

6.8.2. Прохождение волны через границу

В качестве другого важного для практики примера рассмотрим ситуацию, когда на пути распространения волны присутствует граница, причем в отличие от предыдущей задачи, волна не отражается, а проходит через границу насквозь. Отраженную волну при этом рассматривать не будем, а ограничимся только волной, проходящей через структуру в прямом направлении.

Рассмотрим структуру, геометрия которой представлена на рис. 6.4.

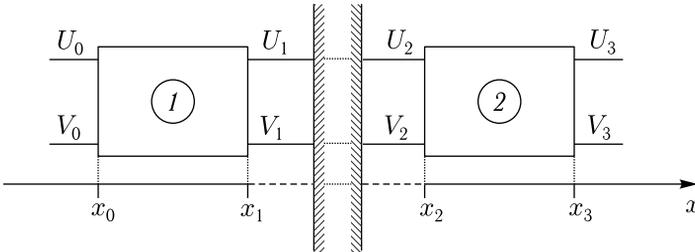


Рис. 6.4. Геометрия задачи о прохождении волны через границу

Здесь схематически показаны два участка волноведущей среды 1 и 2, разделенные границей. Начало первого участка соответствует координате x_0 , а конец — x_1 . Начало второго участка соответствует координате x_2 , а конец — x_3 . Волновое число волны, распространяющейся в пределах первого участка обозначим через k_1 , в пределах второго — через k_2 . Будем считать далее границу бесконечно тонкой. В этом случае точки x_1 и x_2 совпадают, а граница находится в месте совпадения этих точек, которое будем обозначать с помощью координаты x_g (где $x_g = x_1 = x_2$). Исходная волна распространяется в положительном направлении оси Ox . За начальную точку волны примем x_0 .

Согласно общему правилу работы с матрицами, аргумент матрицы равен разности между последующей и предыдущей координатами по ходу распространения волны. Это означает, что для участка 1 аргумент матрицы равен $x_1 - x_0$, а для участка 2 аргумент равен $x_3 - x_2$.

Положим исходную волну и ее производную в виде:

$$U = Ae^{-ik_1(x-x_0)}; \quad (6.167)$$

$$V = -Ae^{-ik_1(x-x_0)}. \quad (6.168)$$

В точке x_0 имеем:

$$U_0 = A; \quad (6.169)$$

$$V_0 = -A. \quad (6.170)$$

Находим эту волну в точке x_1 с помощью прямой матрицы, аргумент которой задаем в соответствии с упомянутым правилом:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos k_1(x_1 - x_0) & i \sin k_1(x_1 - x_0) \\ i \sin k_1(x_1 - x_0) & \cos k_1(x_1 - x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} Ae^{-ik_1(x_1-x_0)} \\ -Ae^{-ik_1(x_1-x_0)} \end{pmatrix} = Ae^{-ik_1(x_1-x_0)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.171)$$

Здесь величина $Ae^{-ik_1(x_1-x_0)}$ представляет собой амплитуду исходной волны в точке границы, то есть при $x = x_1$.

Положим волну во втором участке в виде:

$$P = Ce^{-ik_2(x-x_2)}; \quad (6.172)$$

$$Q = -Ce^{-ik_2(x-x_2)}. \quad (6.173)$$

В точке x_2 имеем:

$$P_2 = C; \quad (6.174)$$

$$V_0 = -C. \quad (6.175)$$

Находим эту волну в точке x_3 с помощью прямой матрицы, аргумент которой задаем в соответствии с упомянутым правилом:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_3 \\ Q_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos k_2(x_3 - x_2) & i \sin k_2(x_3 - x_2) \\ i \sin k_2(x_3 - x_2) & \cos k_2(x_3 - x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ -C \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} Ce^{-ik_2(x_3-x_2)} \\ -Ce^{-ik_2(x_3-x_2)} \end{pmatrix} = Ce^{-ik_2(x_3-x_2)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.176)$$

Здесь величина $Ce^{-ik_2(x_3-x_2)}$ представляет собой амплитуду проходящей волны в точке границы, то есть при $x = x_2$.

Будем считать границу бесконечно тонкой, то есть не имеющей толщины, так что координаты x_1 и x_2 сливаются. Такую слившуюся координату обозначим через x_g , то есть будем считать:

$$x_1 = x_2 = x_g. \quad (6.177)$$

Предположим теперь, что при прохождении амплитуда исходной волны меняется в соответствии с коэффициентом прохождения, равным T , в результате чего, исходя из (6.171), получаем:

$$C = ATe^{-ik(x_g - x_0)}. \quad (6.178)$$

Подставляя (6.178) в (6.176) и учитывая (6.177), получаем:

$$\begin{pmatrix} -\frac{P_3}{Q_3} \end{pmatrix} = Te^{-ik_1(x_g - x_0)} e^{-ik_2(x_3 - x_g)} \begin{pmatrix} -\frac{A}{-A} \end{pmatrix}, \quad (6.179)$$

то есть

$$P_3 = ATe^{-ik_1(x_g - x_0)} e^{-ik_2(x_3 - x_g)}; \quad (6.180)$$

$$Q_3 = -ATE^{-ik_1(x_g - x_0)} e^{-ik_2(x_3 - x_g)}, \quad (6.181)$$

или, с учетом (6.169)–(6.170),

$$P_3 = U_0 T e^{-ik_1(x_g - x_0)} e^{-ik_2(x_3 - x_g)}; \quad (6.182)$$

$$Q_3 = V_0 T e^{-ik_1(x_g - x_0)} e^{-ik_2(x_3 - x_g)}. \quad (6.183)$$

Здесь видно, что исходная волна при прохождении приобретает набег фазы, обусловленный суммарным прохождением расстояния от точки исхода до границы и от границы до точки наблюдения:

$$\Delta\varphi = k_1(x_g - x_0) + k_2(x_3 - x_g) = (k_2x_3 - k_1x_0) + (k_1 - k_2)x_g. \quad (6.184)$$

В случае если волноведущие свойства обоих участков одинаковы, то есть их волновые числа равны друг другу, так что $k_1 = k_2 = k_S$, где k_S — обозначение единого волнового числа, из (6.184) получаем:

$$\Delta\varphi_S = k_S(x_3 - x_1), \quad (6.185)$$

так что набег фазы определяется суммарной длиной обоих участков. При этом граница вклада в набег фазы не дает, а лишь меняет амплитуду проходящей волны в соответствии с коэффициентом прохождения T .

Замечание. Вообще говоря, можно вообразить такую границу, при прохождении волны через которую, несмотря на ее исчезающе малую толщину, фаза волны все же меняется. Примером такой границы может явиться просветляющая пленка в оптике. В этом случае в соотношении (6.184), а также (6.182) и (6.183) следует добавить соответствующий набег фазы, определяемый такой границей.

Выводы по главе 6

Глава посвящена основам методологии расчета распространения волны через многослойные структуры с использованием метода матриц. Приведены примеры построения матриц для одномерных волн

в простых структурах. Основные результаты, полученные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. В качестве математического введения приведены некоторые сведения из теории матриц второго порядка, необходимые для последующего изложения. Отражена роль матрицы как инструмента для преобразования одного вектора в другой. Приведены правила действий над матрицами и векторами в матричной записи. Отмечена возможность построения цепочки из матриц и установлен порядок перемножения матриц в такой цепочке «от конца к началу». Приведены определения матриц: единичной, нулевой, симметричной, транспонированной и обратной. Отмечено, что произведение прямой и обратной матриц равно единичной матрице, а также приведен подробный и упрощенный способы получения обратной матрицы из прямой.

2. Приведена общая схема применения метода матрицы для решения задач о распространении волн через многослойные структуры. Отмечено выгодное преимущество метода матриц перед прямым методом, состоящее в значительном упрощении вычислений за счет отсутствия необходимости вычислять детерминанты высоких порядков, требуемые при использовании прямого метода. При методе матрицы распространение волны анализируется не сразу во всей структуре в целом, как это имеет место при прямом методе, а последовательно, переходя от одного участка структуры к другому, в результате чего получаются отдельные матрицы для каждого участка, которые впоследствии перемножаются. Частичные матрицы, как правило, имеют второй порядок, поэтому их вычисление и перемножение выполняются достаточно простыми средствами.

3. Кратко упомянуты некоторые характеристики матричных методов, находящих применение в различных областях науки и техники. К таким областям относятся: теория электрических цепей, где используются матрицы четырехполюсника, оптика, где матрицы преломления, отражения и оптической среды используются для решения разнообразных задач лазерной оптики, техника сверхвысоких частот, где матричные методы используются для расчета различных волноводных цепей и невзаимных устройств. Отмечено единство перечисленных задач, решение которых часто базируется на свойствах элементарного волнового уравнения для одномерной волны. Такой подход позволяет рассмотреть различные задачи в едином ключе, допускающем достаточно общую и единообразную по структуре реализацию.

4. Приведено общее определение характеристической матрицы как инструмента, связывающего параметры волны на одном конце участка волноведущей среды с параметрами волны на другом конце того же участка. Отмечено, что структура характеристической матрицы, то есть конкретные формулы, определяющие ее элементы, связана с выбором системы координат, в качестве которой, как правило, используется декартова система с осью Ox вдоль направления распространения волны. При этом входным концом участка считается соответствующий

меньшему значению координаты x , а выходным — большему. Введено понятие прямой характеристической матрицы, которая позволяет, зная параметры волны на входе участка, определить параметры волны на его выходе. Введено понятие обратной характеристической матрицы, которая позволяет, зная параметры волны на выходе участка, определить параметры волны на его входе.

5. Приведена общая схема применения матриц для представления распространения волн через сложную структуру. Получены прямая и обратная матрицы для единичного участка волноведущей структуры. Параметры волны на входе и выходе участка представлены в виде векторов, то есть матриц второго порядка, имеющих единственный столбец, элементы которого являются компонентами вектора. Матрица, связывающая входной и выходной векторы, представлена в виде квадратной таблицы с двумя строками и двумя столбцами. Приведен расчет распространения волны через участок, включающая в себя умножение той или иной матрицы на соответствующий вектор. Получены прямая и обратная матрицы для структуры, содержащей произвольное число участков, представляющие собой произведение матриц единичных участков.

6. Получена характеристическая матрица для волны, определяемой дифференциальным уравнением второго порядка с произвольной зависимостью волнового числа от координаты. В качестве рабочего инструмента введена вспомогательная функция, с точностью до постоянного множителя равная производной от исходной волны в случае постоянного волнового числа. В качестве компонент входящего в структуру вектора приведены амплитуды основной функции падающей волны и сформированной вспомогательной функции. Получена система двух линейных алгебраических уравнений, связывающая компоненты вектора на входе и на выходе структуры. Из решения этой системы получены компоненты характеристической матрицы, связывающей входящую и выходящую волны. На основе рассмотрения обратного соотношения между входящей и выходящей волнами, получена обратная матрица. Показано, что произведение прямой и обратной матриц равно единичной матрице.

7. Получена характеристическая матрица для одномерной волны, являющейся решением дифференциального уравнения второго порядка с постоянным волновым числом. Рассмотрены два решения экспоненциального вида, соответствующие прямо и обратно направленным волнам. В качестве вспомогательной функции выбрана производная от основного решения. Приведена система уравнений для амплитуды основной волны и ее производной, из решения которой получены прямая и обратная характеристические матрицы, компоненты которых выражены через тригонометрические функции. Для произведения прямой и обратной матриц установлено равенство единичной матрице. Рассмотрен упрощенный пример обобщения решенной задачи на случай падения на структуру единственной волны прямого направления, в результате

которого получена зависимость амплитуды и фазы проходящей волны при любом значении координаты в прямом направлении. Для той же задачи получена обратная матрица, позволяющая по значению волны при произвольной координате определить ее параметры в начальной точке.

8. Приведены примеры применения полученных матриц для решения задач, касающихся распространения волны в структуре, содержащей границы раздела между единичными участками. Отмечено, что специфика таких задач требует учета фазовых соотношений между падающей, отраженной и проходящей волнами. Отмечено, что при отражении волны от границы производная волновой функции меняет знак, что для одномерной волны соответствует изменению знака вспомогательной функции, а для электромагнитной — изменению знака магнитного поля. Рассмотрена структура, состоящая из одного элементарного участка и одной границы. Получены матрицы распространения и отражения для прямой и отраженной волн. Показано, что исходная волна при отражении приобретает набег фазы, обусловленный суммарным прохождением расстояния от точки исхода до границы и от границы до точки наблюдения:

9. В качестве другого важного для практики примера рассмотрена ситуация, когда волна не отражается, а проходит через границу насквозь. Для волны, распространяющейся в прямом направлении, получены матрицы распространения для обоих прилежащих к границе участков структуры, а также матрица связи, соответствующая границе, из произведения которых получена результирующая матрица для структуры в целом. Установлено, что набег фазы проходящей волны определяется суммарной длиной обоих участков, а граница вклада в набег фазы не дает, а лишь меняет амплитуду проходящей волны в соответствии с коэффициентом прохождения. Отмечена возможность существования специфических случаев, когда граница, имея в сравнении с длиной прилегающих к границе участков исчезающе малую толщину, все же вносит дополнительный набег фазы, обусловленный физическими свойствами границы. Отмечено, что примером такой границы может явиться просветляющая пленка в оптике.

Глава 7

МЕТОД РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ ВОЛНЫ

Глава посвящена применению метода матрицы для задач о распространении одномерной волны через многослойные структуры. В качестве предварительной задачи рассмотрено применение метода матрицы для расчета распространения волн через структуру, состоящую из четырехполюсников. Методология расчета четырехполюсников распространена на случай одномерных волн. Рассмотрено получение результирующей матрицы для распространения встречных волн через структуру с произвольным числом слоев. В качестве упрощенного варианта приведена схема получения матрицы передачи.

В тексте главы использованы материалы монографии [49], а также статей [67, 74]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

7.1. Метод матрицы для четырехполюсников

Рассмотрим сначала в качестве полезной иллюстрации применение метода матрицы на примере четырехполюсника, под которым будем понимать объект, имеющий два независимых входа и два независимых выхода. Заметим, что введенное так понятие четырехполюсника не вполне соответствует традиционному [165, 168], при котором четырехполюсником именуется объект, имеющий четыре контакта, из которых два являются входными (сигнальный и заземленный) и два других — выходными (также сигнальный и другой заземленный). Применяемое здесь определение в традиционной трактовке можно отнести к восьмиполюснику, однако, чтобы не загромождать дальнейшее рассмотрение, ограничимся для наших нужд термином «четыреполюсник».

7.1.1. Определение четырехполюсников по их функциональному назначению

В общем случае один сигнал поступает на четырехполюсник, а другой выходит из него. Выходной сигнал является продуктом входного, то есть в процессе прохождения через четырехполюсник сигнал претерпевает обработку, определяемую свойствами четырехполюсника.

Для практических целей обработки сигналов четырехполюсники соединяются друг за другом последовательно, образуя непрерывную

цепочку. В такой цепочке четырехполюсники могут выполнять две функции:

- первая — функция распространения, при которой сигнал каким-то образом трансформируется, распространяясь внутри четырехполюсника по законам, определяемым внутренними параметрами четырехполюсника;
- вторая — функция связи, при которой четырехполюсник осуществляет передачу сигнала с предыдущего четырехполюсника на последующий, следуя определенным правилам связи между собственным входом и выходом.

Свойства тех и других четырехполюсников могут быть описаны соответствующими матрицами.

Назовем четырехполюсники, выполняющие первую функцию, «четыреполюсниками распространения», а соответствующие матрицы «матрицами распространения».

Назовем четырехполюсники, выполняющие вторую функцию, «четыреполюсниками связи», а соответствующие матрицы «матрицами связи».

Для полной цепочки из четырехполюсников путем последовательного перемножения матриц того и другого видов, можно получить общую матрицу, связывающую входные и выходные сигналы для структуры в целом. Такую матрицу будем называть «результирующей матрицей».

7.1.2. Два вида четырехполюсников по входам и выходам

Будем рассматривать четырехполюсник как объект, связывающий две пары контактов — первичную и вторичную. С этой позиции могут существовать два вида четырехполюсников, различающиеся ролью этих контактов. Схемы двух таких видов иллюстрируются рис. 7.1.

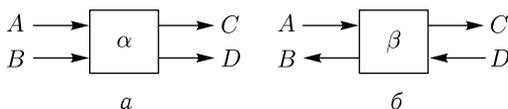


Рис. 7.1. Два вида четырехполюсников, различающиеся ролью контактов

Для четырехполюсника, показанного на рис. 7.1, *a*, оба контакта первичной пары *A* и *B* являются входными, а оба контакта вторичной *C* и *D* — выходными. Будем называть такой объект четырехполюсником α -типа.

Относительно распространяющейся волны возможны два варианта.

Первый, когда сигналы *A* и *B* соответствуют волновой функции и ее производной, или двум функциям *U* и *V*, определяемым соотношениями (6.69) и (6.70) (раздел 6.6.1). При этом сигналы *C* и *D* являются результатами преобразования исходных сигналов внутри четырехполюсника в соответствии с единым волновым уравнением. Такой четырехполюсник можно считать соответствующим среде, то есть четырехполюс-

ником распространения, а матрицу, его описывающую, — **матрицей распространения**.

Второй возможный вариант — когда сигналы A и B , каждый в отдельности, соответствуют двум отдельным функциям, а сигналы C и D — результатам какого-то преобразования каждой из этих функций по своему собственному закону. Такой четырехполюсник можно считать соответствующим границе, на которой сигнал A преобразуется в сигнал C , а сигнал B — в сигнал D , то есть после его прохождения сигнал A становится связанным с сигналом C , а сигнал B — с сигналом D . Такой четырехполюсник является четырехполюсником связи, а его матрица — **матрицей связи**.

Для четырехполюсника типа α будем полагать, что выходные сигналы C и D связаны с входными A и B линейными соотношениями:

$$C = \alpha_{11}A + \alpha_{12}B; \quad (7.1)$$

$$D = \alpha_{21}A + \alpha_{22}B, \quad (7.2)$$

где $\alpha_{i,k}$ — постоянные.

Эти же соотношения можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} - & C & - \\ - & D & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & A & - \\ - & B & - \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Введем матрицу α -типа:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad (7.4)$$

при которой (7.3) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} - & C & - \\ - & D & - \end{pmatrix} = \hat{A} \begin{pmatrix} - & A & - \\ - & B & - \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

Для четырехполюсника, показанного на рис. 7.1, б, один контакт первичной пары A являются входным, а другой B — выходным. Для вторичной пары один контакт C является выходным, а другой D — входным. Назовем такой объект четырехполюсником β -типа.

При этом сигналы A и D можно считать входящими в четырехполюсник, сигнал C — результатом прохождения сигнала A и отражения сигнала D , а сигнал B — результатом отражения сигнала A и прохождения сигнала D .

Относительно распространяющейся волны здесь возможны два варианта, диктуемые тем, что имеются две входящие волны: слева A и справа D .

Рассмотрим такие варианты по отдельности.

Пусть сначала входящим является только один сигнал A , а сигнал D отсутствует. При этом из четырехполюсника выходят два сигнала: C в положительном направлении B в отрицательном. То есть в четырехполюсник входит волна A , проходит через него волна C и отражается волна B .

При этом свойства прохождения и отражения могут определяться как волновыми уравнениями для волн A , B и C по отдельности, так и граничными условиями внутри четырехполюсника.

В первом случае это будет четырехполюсник распространения, а во втором — четырехполюсник связи. Матрицы будут иметь соответствующие названия.

Если входящим является только один сигнал D , а сигнал A отсутствует, то из четырехполюсника выходят два сигнала C в положительном направлении и B в отрицательном. То есть в четырехполюсник входит волна D , проходит через него волна B и отражается волна C .

При этом свойства прохождения и отражения могут определяться как волновыми уравнениями для волн A , B и C по отдельности, так и граничными условиями внутри четырехполюсника.

В первом случае это будет четырехполюсник распространения, а во втором — четырехполюсник связи. Матрицы будут иметь соответствующие названия.

Для четырехполюсника типа β будем полагать, что выходные сигналы B и C связаны с входными A и D линейными соотношениями:

$$B = \beta_{11}A + \beta_{12}D; \quad (7.6)$$

$$C = \beta_{21}A + \beta_{22}D, \quad (7.7)$$

где $\beta_{i,k}$ — постоянные.

Эти же соотношения можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} - & B & - \\ - & C & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & \beta_{11} & | & \beta_{12} & - \\ - & \beta_{21} & | & \beta_{22} & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & A & - \\ - & D & - \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

Введем матрицу β -типа:

$$\widehat{B} = \begin{pmatrix} - & \beta_{11} & | & \beta_{12} & - \\ - & \beta_{21} & | & \beta_{22} & - \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

при которой (7.8) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} - & B & - \\ - & C & - \end{pmatrix} = \widehat{B} \begin{pmatrix} - & A & - \\ - & D & - \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

7.1.3. Функциональный характер четырехполюсника

Отвлечемся от назначения контактов как входных и выходных и рассмотрим четырехполюсник как объект, осуществляющий функциональную связь между четырьмя переменными величинами A , B , C , D . Такую связь можно задать любой из матриц \widehat{A} или \widehat{B} . Например, будем исходить из соотношения (7.5), в котором матрица \widehat{A} определяется выражением (7.4). То есть вектор $\begin{pmatrix} - & C & - \\ - & D & - \end{pmatrix}$ является неизвестным, определяемым через вектор $\begin{pmatrix} - & A & - \\ - & B & - \end{pmatrix}$ с помощью матрицы \widehat{A} . То есть A

и B известны, а C и D требуется найти. Положим теперь, что те же величины A , B , C , D связаны соотношением (7.8), то есть известен вектор $\begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$, а неизвестен вектор $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$. Связь определяется матрицей \hat{B} , даваемой выражением (7.9). Чтобы выразить матрицу \hat{B} через элементы матрицы A воспользуемся соотношениями (7.1)–(7.2), которые разрешим относительно B и C . Таким образом, запишем (7.1)–(7.2) в виде:

$$\alpha_{12}B - 1C = -\alpha_{11}A; \quad (7.11)$$

$$\alpha_{22}B + 0C = D - \alpha_{21}A. \quad (7.12)$$

Решим эту систему относительно B и C по правилу Крамера [104, с. 45]:

$$D_0 = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & -1 \\ \alpha_{22} & 0 \end{vmatrix} = \alpha_{22}; \quad (7.13)$$

$$D_B = \begin{vmatrix} -\alpha_{11}A & -1 \\ D - \alpha_{21}A & 0 \end{vmatrix} = D - \alpha_{21}A; \quad (7.14)$$

$$D_C = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & -\alpha_{11}A \\ \alpha_{22} & D - \alpha_{21}A \end{vmatrix} = \alpha_{12}(D - \alpha_{21}A) + \alpha_{11}\alpha_{22}A. \quad (7.15)$$

При этом

$$B = \frac{D_B}{D_0} = -\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}}A + \frac{1}{\alpha_{22}}D; \quad (7.16)$$

$$C = \frac{D_C}{D_0} = \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{22}}A + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}D. \quad (7.17)$$

Сравнивая правые части этих соотношений с (7.10), получаем выраженные матрицы \hat{B} через элементы α_{ik} в виде:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} & \frac{1}{\alpha_{22}} \\ \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{22}} & \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} \end{pmatrix}. \quad (7.18)$$

Аналогичным образом, исходя из соотношения (7.10) с матрицей (7.9) разрешая (7.6)–(7.7) относительно C и D , можно выразить матрицу \hat{A} через элементы β_{ik} в виде:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_{12}\beta_{21} - \beta_{11}\beta_{22}}{\beta_{12}} & \frac{\beta_{22}}{\beta_{12}} \\ -\frac{\beta_{11}}{\beta_{12}} & \frac{1}{\beta_{12}} \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

Это полезное упражнение предоставляем любознательному читателю.

7.1.4. Замечание о направлении прохождения четырехполюсника

Отметим еще одно обстоятельство, важное для дальнейшего рассмотрения.

Обратимся сначала к четырехполюснику типа \hat{G} (рис. 7.1, а). В записанном выше соотношении (7.5) полагается, что известен вектор $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, а вектор $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$ определяется через него посредством матрицы \hat{A} , имеющей вид (7.4). То есть мы рассматриваем четырехполюсник слева направо, то есть в него входят сигналы A и B , а выходят C и D . Однако тот же четырехполюсник можно рассматривать в обратном направлении, то есть справа налево, так что в него входят сигналы C и D , а выходят A и B . При этом соотношение (7.5) заменяется на следующее:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \hat{K} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}. \quad (7.20)$$

При этом, как показано в разделе 6.5.1, матрица \hat{K} является обратной относительно матрицы \hat{A} , то есть выполняется соотношение:

$$\hat{K} = \hat{A}^{-1}, \quad (7.21)$$

а также

$$\hat{A} = \hat{K}^{-1}, \quad (7.22)$$

причем произведение матриц \hat{A} и \hat{K} равно единичной матрице, то есть

$$\hat{A}\hat{K} = \hat{K}\hat{A} = \hat{1}. \quad (7.23)$$

Таким образом, порядок рассмотрения четырехполюсника слева направо или справа налево значения не имеет, надо лишь четко учитывать роль прямой и обратной матриц.

Рассмотрение четырехполюсника типа β (рис. 7.1, б) показывает то же самое. То есть порядок прохождения слева направо и справа налево описывается прямой и обратной матрицами. Здесь следует отметить его определенную симметрию, то есть в левую грань один сигнал входит (A) и один выходит (B), а в правую грань также один сигнал входит (D) и один сигнал выходит (C). Так что рассмотрение его слева направо или справа налево не привязывается к направлению оси координат, а может быть осуществлено в том или другом виде, исходя из соображений удобства для конкретной задачи.

7.1.5. Результирующая матрица для цепочки из четырехполюсников

Не будем теперь задаваться конкретной задачей распространения волны, а рассмотрим математическую сторону получения матрицы для цепочки последовательно соединенных четырехполюсников.

Для начала обратимся к случаю, когда соединяются четырехполюсники одного и того же типа, то есть получаются два вида цепочек:

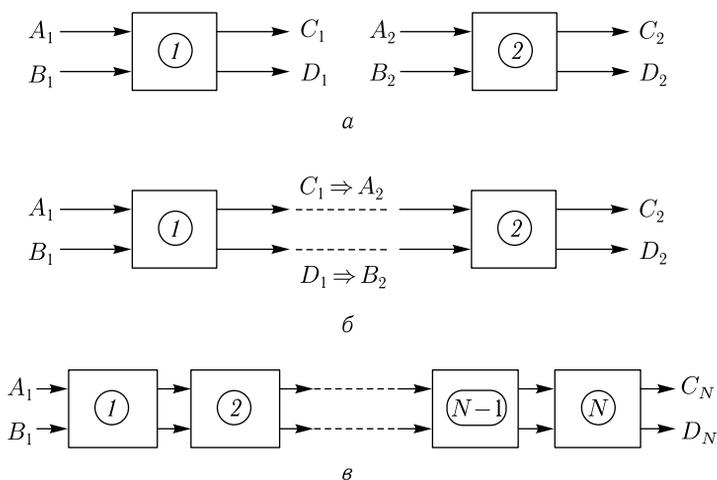


Рис. 7.2. Схемы последовательного соединения четырехполюсников

из четырехполюсников только α или только β типа. Схема соединения четырехполюсников α -типа иллюстрируется рис. 7.2.

На рис. 7.2, а показаны два независимых четырехполюсника 1 и 2 со входящими сигналами A_1, B_1, A_2, B_2 и выходящими C_1, D_1, C_2, D_2 . Представляя входящие и выходящие сигналы в виде векторов, можно записать связь между входами и выходами каждого из четырехполюсников с помощью матриц \hat{A}_1 и \hat{A}_2 :

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = \hat{A}_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad (7.24)$$

$$\begin{pmatrix} C_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = \hat{A}_2 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}. \quad (7.25)$$

Соотношения (7.24) и (7.25) означают, что сигналы C_1, D_1 с помощью матрицы \hat{A}_1 выражаются через A_1, B_1 , а сигналы C_2, D_2 с помощью матрицы \hat{A}_2 выражаются через A_2, B_2 . Если теперь соединить эти четырехполюсники напрямую, как показано на рис. 7.2, б, то выходящие сигналы первого станут входящими для второго, то есть будут выполняться равенства

$$A_2 = C_1, \quad (7.26)$$

$$B_2 = D_1, \quad (7.27)$$

или для векторов

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \end{pmatrix}. \quad (7.28)$$

Главной задачей при соединении четырехполюсников является выражение выходящих из второго четырехполюсника сигналов C_2 , D_2 через входящие в первый сигналы A_1 , B_1 . Это можно сделать, если в соотношение (7.25) подставить (7.28), после чего в полученное соотношение подставить (7.24). В результате получим:

$$\begin{pmatrix} C_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = \hat{A}_2 \left[\hat{A}_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \right]. \quad (7.29)$$

Следуя обычным правилам работы с матрицами (раздел 6.1, а также [104, 140, 165, 172]), освобождаемся от квадратных скобок:

$$\begin{pmatrix} C_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = (\hat{A}_2 \hat{A}_1) \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad (7.30)$$

или

$$\begin{pmatrix} C_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = \hat{G}_2 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad (7.31)$$

где

$$\hat{G}_2 = \hat{A}_2 \hat{A}_1. \quad (7.32)$$

Поскольку матрица \hat{G}_2 описывает конечный результат действия на входные сигналы двух матриц \hat{A}_1 и \hat{A}_2 , то есть является результатом их совместного последовательного действия, то такую матрицу следует считать **результлирующей**.

Для произвольного числа N последовательно соединенных четырехполюсников, показанных на рис. 7.2, в, для двух соседствующих четырехполюсников с номерами n и $n+1$ получаем:

$$\begin{pmatrix} C_n \\ D_n \end{pmatrix} = \hat{A}_n \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}; \quad (7.33)$$

$$\begin{pmatrix} C_{n+1} \\ D_{n+1} \end{pmatrix} = \hat{A}_{n+1} \begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix}; \quad (7.34)$$

а также

$$A_{n+1} = C_n; \quad (7.35)$$

$$B_{n+1} = D_n. \quad (7.36)$$

При этом для полной цепочки, подобно (7.30), получаем:

$$\begin{pmatrix} C_N \\ D_N \end{pmatrix} = (\hat{A}_N \hat{A}_{N-1} \dots \hat{A}_2 \hat{A}_1) \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \left(\prod_{n=1}^N \hat{A}_n \right) \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad (7.37)$$

то есть в этом случае результирующая матрица равна:

$$\hat{G}_N = \hat{A}_N \hat{A}_{N-1} \dots \hat{A}_2 \hat{A}_1 = \prod_{n=1}^N \hat{A}_n, \quad (7.38)$$

где перемножение отдельных матриц производится от конца к началу (справа налево), то есть сначала матрица \widehat{A}_2 умножается на матрицу \widehat{A}_1 , затем матрица \widehat{A}_3 умножается на полученное произведение и так далее, причем порядок сомножителей строго сохраняется.

Для четырехполюсников β -типа нахождение результирующей матрицы производится аналогичным образом. При этом для произвольного числа N последовательно соединенных четырехполюсников β -типа получаем:

$$\begin{pmatrix} B_N \\ -C_N \end{pmatrix} = (\widehat{B}_N \widehat{B}_{N-1} \dots \widehat{B}_2 \widehat{B}_1) \begin{pmatrix} A_1 \\ -D_1 \end{pmatrix} = \left(\prod_{n=1}^N \widehat{B}_n \right) \begin{pmatrix} A_1 \\ -D_1 \end{pmatrix}, \quad (7.39)$$

то есть результирующая матрица равна:

$$\widehat{H}_N = \widehat{B}_N \widehat{B}_{N-1} \dots \widehat{B}_2 \widehat{B}_1 = \prod_{n=1}^N \widehat{B}_n, \quad (7.40)$$

где перемножение отдельных матриц производится от конца к началу (справа налево), то есть сначала матрица \widehat{B}_2 умножается на матрицу \widehat{B}_1 , затем матрица \widehat{B}_3 умножается на полученное произведение и так далее, причем порядок сомножителей строго сохраняется.

7.1.6. Замечание о порядке связи четырехполюсников

Как и в предыдущем случае (раздел 7.1.4), порядок связи четырехполюсников может иметь два варианта. Поясним это на примере четырехполюсников типа α .

В настоящем рассмотрении предполагается, что цепочка четырехполюсников проходит слева направо, причем связь между соседствующими четырехполюсниками осуществляется посредством соотношений типа (7.24), (7.25) и других с большими номерами, так что матрицы \widehat{A}_n являются прямыми. То есть вся цепочка произведений матриц (7.38) состоит из прямых матриц.

Однако возможен и другой вариант, когда связь между соседствующими четырехполюсниками осуществляется в обратном порядке, то есть например вместо соотношений (7.33) и (7.34) будут иметь место соотношения

$$\begin{pmatrix} A_n \\ -B_n \end{pmatrix} = \widehat{K}_n \begin{pmatrix} C_n \\ -D_n \end{pmatrix}; \quad (7.41)$$

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ -B_{n+1} \end{pmatrix} = \widehat{K}_{n+1} \begin{pmatrix} C_{n+1} \\ -D_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (7.42)$$

а соотношения (7.35) и (7.36) остаются прежними, но записываются в обратном порядке:

$$C_n = A_{n+1}; \quad (7.43)$$

$$D_n = B_{n+1}. \quad (7.44)$$

При этом матрицы \widehat{K}_n являются обратными к матрицам \widehat{A}_n , то есть

$$\widehat{K}_n = \widehat{A}_n^{-1}, \quad (7.45)$$

а матрицы \widehat{A}_n являются обратными к матрицам \widehat{K}_n , то есть

$$\widehat{A}_n = \widehat{K}_n^{-1}. \quad (7.46)$$

В этом случае цепочка (7.37) принимает вид:

$$\left(\begin{array}{c} C_N \\ -D_N \end{array} \right) = \left(\widehat{K}_N^{-1} \widehat{K}_{N-1}^{-1} \dots \widehat{K}_2^{-1} \widehat{K}_1^{-1} \right) \left(\begin{array}{c} A_1 \\ -B_1 \end{array} \right) = \left(\prod_{n=1}^N \widehat{K}_n^{-1} \right) \left(\begin{array}{c} A_1 \\ -B_1 \end{array} \right), \quad (7.47)$$

а результирующая матрица (7.38) принимает вид:

$$\widehat{G}_N = \widehat{K}_N^{-1} \widehat{K}_{N-1}^{-1} \dots \widehat{K}_2^{-1} \widehat{K}_1^{-1} = \prod_{n=1}^N \widehat{K}_n^{-1}. \quad (7.48)$$

Как и ранее, здесь перемножение отдельных матриц производится от конца к началу (справа налево), то есть сначала матрица \widehat{K}_2^{-1} умножается на матрицу \widehat{K}_1^{-1} , затем матрица \widehat{K}_3^{-1} умножается на полученное произведение и так далее, причем порядок сомножителей строго сохраняется.

Таким образом, как при выборе связи (7.33)–(7.34), так и при выборе связи (7.41)–(7.42), то есть при составлении результирующей матрицы из только прямых или только обратных матриц, в любом случае вектор $\left(\begin{array}{c} C_N \\ -D_N \end{array} \right)$ является выходным, а вектор $\left(\begin{array}{c} A_1 \\ -B_1 \end{array} \right)$ — входным.

В обоих случаях перемножение отдельных матриц производится от конца к началу, то есть справа налево. Таким образом, выбор того или иного вида связи может быть сделан, исходя из удобства конкретной задачи, а результат в обоих случаях получается одинаковым.

Для четырехполюсников типа β подобное изменение порядка связи также производится аналогичным образом. Такое полезное упражнение авторы предоставляют любознательному читателю.

7.1.7. Цепочки из функционально различных видов четырехполюсников

До сих пор мы рассматривали четырехполюсники только как объекты, имеющие два входа и два выхода, безотносительно к функциональным свойствам самих этих объектов.

Введем классификацию четырехполюсников по функциональным свойствам, то есть будем считать четырехполюсники принадлежащими к одному классу, если их функциональные свойства сходны. Сходство функциональных свойств означает выполнение одних и тех же действий над сигналами, например, описываемых одними и теми же алгебраическими функциями, но с различными коэффициентами. Различие

функциональных свойств означает, что эти функции являются принципиально различными.

Важным случаем является последовательное соединение четырехполюсников двух различных классов, когда эти классы чередуются друг с другом.

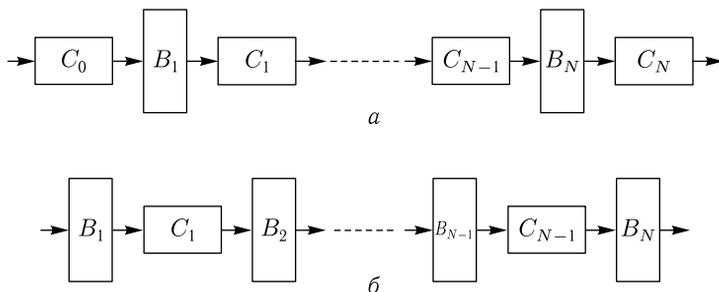


Рис. 7.3. Цепочки из четырехполюсников, чередующихся по функциональным свойствам

Два характерных вида таких цепочек показаны на рис. 7.3. Четырехполюсники одного из классов обозначены буквами C , для определенности будем считать их четырехполюсниками распространения α -типа. Эти четырехполюсники описываются матрицами распространения типа (7.4):

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} -\gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}, \quad (7.49)$$

где γ_{ik} — элементы матрицы, определяемые волновым уравнением.

Четырехполюсники другого класса обозначены буквами B . Будем считать, что эти четырехполюсники характеризуют связь сигналов в промежутках между четырехполюсниками распространения \hat{B} . Пусть матрицы этих четырехполюсников связи имеют вид:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}, \quad (7.50)$$

где δ_{ik} — элементы матрицы, определяемые граничными условиями.

Показанные на рисунке четырехполюсники связаны только единичными стрелками одного направления, что сделано для простоты рисунка. При необходимости можно ввести пары стрелок единого или встречных направлений, однако для данного рассмотрения это дела не меняет.

Номерные индексы тех и других четырехполюсников соответствуют порядковым номерам элементов цепочек.

Примем за основу нумерации порядковые номера элементов класса B от 1 до N . По отношению к данному номеру элемента B каждый

предыдущий элемент класса C будет иметь номер на единицу меньший, а последующий — тот же номер, что и элемент класса B .

Цепочка на рис. 7.3, *a* начинается и заканчивается четырехполюсниками класса C . Будем называть ее цепочкой CBC -типа. Эта цепочка содержит N элементов класса B и $N + 1$ элементов класса C . Результирующая матрица такой цепочки равна:

$$\widehat{G}_{CBC}^{(N)} = \widehat{C}_0 \widehat{B}_1 \widehat{C}_1 \widehat{B}_1 \dots \widehat{B}_{N-1} \widehat{C}_{N-1} \widehat{B}_N \widehat{C}_N, \quad (7.51)$$

или

$$\widehat{G}_{CBC}^{(N)} = \widehat{C}_0 \prod_{n=1}^N \widehat{B}_n \widehat{C}_n. \quad (7.52)$$

Цепочка на рис. 7.3, *б* начинается и заканчивается четырехполюсниками класса B . Будем называть ее цепочкой BCB -типа. Эта цепочка содержит N элементов класса B и $N - 1$ элементов класса C . Результирующая матрица такой цепочки равна:

$$\widehat{G}_{BCB}^{(N)} = \widehat{B}_1 \widehat{C}_1 \widehat{B}_2 \widehat{C}_2 \dots \widehat{B}_{N-1} \widehat{C}_{N-1} \widehat{B}_N, \quad (7.53)$$

или:

$$\widehat{G}_{BCB}^{(N)} = \left(\prod_{n=1}^{N-1} \widehat{B}_n \widehat{C}_n \right) \widehat{B}_N. \quad (7.54)$$

Для четырехполюсников β -типа, образующих CBC и BCB цепочки, подобные результирующие матрицы имеют вид:

$$\widehat{H}_{CBC}^{(N)} = \widehat{C}_0 \prod_{n=1}^N \widehat{B}_n \widehat{C}_n; \quad (7.55)$$

$$\widehat{H}_{BCB}^{(N)} = \left(\prod_{n=1}^{N-1} \widehat{B}_n \widehat{C}_n \right) \widehat{B}_N. \quad (7.56)$$

Относительно распространяющейся волны цепочку, показанную на рис. 7.3, *a*, можно рассматривать как структуру, состоящую из последовательно соединенных участков сред, разделенных границами. Цепочку, показанную на рис. 7.3, *б*, можно рассматривать аналогично с тем отличием, что эта цепочка начинается с границы и кончается границей. В каждом из этих случаев начало и конец структуры следует рассматривать с учетом возбуждения и конечного приема волны, то есть учитывать свойства (например, внутреннее сопротивление) возбуждающего генератора и регистрирующего приемника.

7.2. Применение матричного аппарата четырехполюсников для волноведущей структуры

Описанный в предыдущих разделах матричный аппарат для четырехполюсников можно довольно эффективно использовать для решения задач о распространении волн через многослойную структуру.

При этом структура предполагается состоящей из участков различных сред, разделенных границами.

В общем случае такая структура может быть представлена в виде цепочки из четырехполюсников. При этом четырехполюсникам распространения будут соответствовать единичные участки волноведущих сред, а четырехполюсникам связи — границы между такими участками.

Представление волноведущей структуры в виде цепочки из четырехполюсников позволяет не учитывать конкретные параметры самих сред и границ, а рассмотреть распространение волны в общем виде, подобно тому, как это было сделано для единичного участка в разделе 6.5.1.

Итак, вся структура представляется в виде цепочки из чередующихся волноведущих участков и границ между ними. В этом случае матрица распространения связывает амплитуды и фазы волн на концах единичного волноведущего участка, а матрица связи — амплитуды и фазы волн на обеих сторонах единичной границы. Таким образом, элементы матриц распространения должны быть получены путем решения соответствующих волновых уравнений в различных участках структуры, а матрицы связи — из соответствующих граничных условий.

Как и для случая четырехполюсников в задаче о распространении волн матрицу для полной структуры будем называть «результурующей».

Рассмотрим далее постановку задачи в наиболее общем виде.

7.2.1. Общая постановка задачи

Описанный матричный аппарат применим в том случае, если каждый отдельный объект можно представить в виде четырехполюсника α или β типа, показанных на рис. 7.1, причем соединение четырехполюсников происходит в соответствии со схемами, изображенными на рис. 7.2 и рис. 7.3. Такая ситуация обычно имеет место, если четырехполюсники являются элементами электрической цепи. Однако описанный аппарат можно успешно применить и к задаче о распространении волны через слоистую структуру. Рассмотрим особенности такого случая на примере одномерной волны.

Прежде всего сформулируем постановку задачи. Имеется слоистая структура, состоящая из N плоскопараллельных слоев, разделенных $N - 1$ границами. Ось координат Ox перпендикулярна общей плоскости структуры. Каждый слой, именуемый далее средой, имеет конечную толщину, причем среды в общем случае могут быть однородными или неоднородными, нелинейными, невзаимными, киральными или обладать еще какими-то специфическими свойствами. Главным условием является возможность существования в каждой среде двух собственных волн встречного направления, являющихся решениями одномерного волнового уравнения с волновым числом, которое в общем случае может зависеть от координаты x . Границы между средами предполагаются бесконечно тонкими. На структуру падают с двух сторон две встречных волны противоположного направления относительно

оси Ox . Падающая на каждую границу волна частично отражается и частично проходит насквозь. В результате внутри каждой среды распространяются две волны встречного направления, являющиеся суперпозицией проходящих и отраженных от границ волн.

Основная задача состоит в том, чтобы, зная параметры сред, определить амплитуды отраженной и проходящей волн относительно всей структуры в целом.

Для решения такой задачи представим многослойную среду в виде цепочки из четырехполюсников. Поскольку с каждой стороны в структуру в целом одна волна входит и одна выходит, то все составляющие ее четырехполюсники должны быть β -типа и описываться матрицами \hat{B} вида (7.50). Поскольку структура начинается одной средой и кончается другой средой, то она должна описываться цепочкой четырехполюсников CBC типа, показанной на рис. 7.3, а.

Рассмотрим применения предложенного аппарата на примере некоторых задач для одномерной волны наиболее общего вида.

7.2.2. Результирующая матрица для двух сред, разделенных одной границей

Рассмотрим основные особенности задачи на примере структуры из двух сред, разделенных одной границей, схема которой иллюстрируется рис. 7.4.

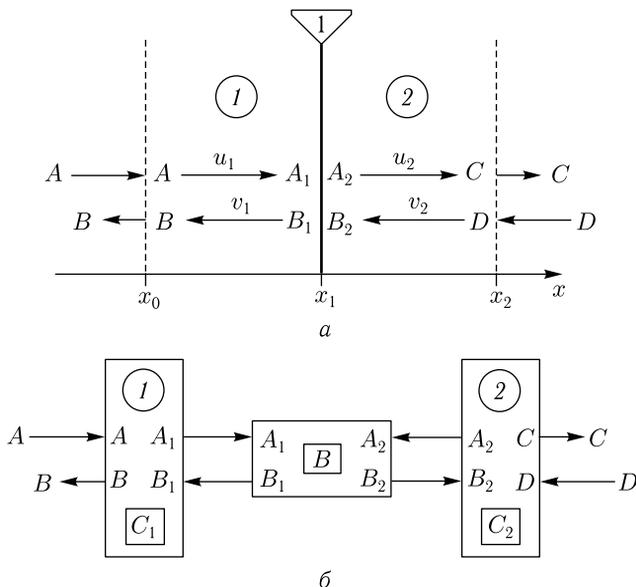


Рис. 7.4. Схема двухслойной волноведущей структуры и эквивалентной цепочки из четырехполюсников

На рис. 7.4, *a* показаны две среды 1 и 2 (цифры в кругах), разделенные одной границей (цифра 1 в треугольнике). Среда 1 заключена между координатами x_0 и x_1 , среда 2 — между координатами x_1 и x_2 . Границе соответствует координата x_1 .

На структуру слева при координате x_0 падает волна A , при этой же координате из структуры выходит волна B . Справа при координате x_2 на структуру падает волна D и выходит при той же координате волна C .

Внутри среды 1 во встречных направлениях распространяются две волны u_1 и v_1 , являющиеся решением волнового уравнения, соответствующего параметрам этой среды. Волна u_1 распространяется в положительном направлении оси Ox и при координате x_0 имеет амплитуду A , а при координате x_1 амплитуду A_1 . Волна v_1 распространяется в отрицательном направлении оси Ox и при координате x_1 имеет амплитуду B_1 , а при координате x_0 амплитуду B .

Внутри среды 2 также во встречных направлениях распространяются две волны u_2 и v_2 , являющиеся решением волнового уравнения в этой среде. Волна u_2 распространяется в положительном направлении оси Ox и при координате x_1 имеет амплитуду A_2 , а при координате x_2 амплитуду C . Волна v_2 распространяется в отрицательном направлении оси Ox и при координате x_2 имеет амплитуду D , а при координате x_1 амплитуду B_2 .

Распространению волн в такой структуре соответствует распространение сигналов в CBC цепочке из четырехполюсников β -типа, показанной на рис. 7.4, *б*. Здесь 1 и 2 — четырехполюсники типа распространения, описываемые матрицами распространения \hat{N}_1 и \hat{N}_2 . Включенный между ними четырехполюсник имеет тип связи и описывается матрицей связи \hat{B} .

К цепочке слева подводится сигнал A и справа — сигнал D . Выводится слева сигнал B и справа — сигнал C .

На левых контактах четырехполюсника распространения C_1 сигналы равны A и B , на правых — A_1 и B_1 . На левых контактах четырехполюсника связи B сигналы равны A_1 и B_1 , на правых — A_2 и B_2 . На левых контактах четырехполюсника распространения C_2 сигналы равны A_2 и B_2 , на правых — C и D .

В таком виде приведенная на рис. 7.4, *б* цепочка четырехполюсников эквивалентна слоистой структуре на рис. 7.4, *a*. При этом справедливы соотношения:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \hat{C}_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}; \quad (7.57)$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \hat{A} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}; \quad (7.58)$$

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \hat{C}_2 \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \quad (7.59)$$

где элементы матрицы \hat{A} центрального четырехполюсника связаны с элементами матрицы \hat{B} того же четырехполюсника соотношениями типа (7.18)–(7.19).

Из (7.57)–(7.59) следует:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \hat{C}_1 \hat{A} \hat{C}_2 \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \quad (7.60)$$

или

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \hat{G} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \quad (7.61)$$

где результирующая матрица равна:

$$\hat{G} = \hat{C}_1 \hat{A} \hat{C}_2. \quad (7.62)$$

Запишем результирующую матрицу через элементы:

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad (7.63)$$

где g_{ik} определяются значениями элементов матриц $\hat{C}_{1,2}$.

С помощью (7.63) представим (7.61) в виде:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \quad (7.64)$$

откуда получаем

$$A = g_{11}C + g_{12}D; \quad (7.65)$$

$$B = g_{21}C + g_{22}D. \quad (7.66)$$

В задаче о волноведущей структуре требуется найти волны B и C при заданных A и D . Для этого систему (7.65)–(7.66) надо разрешить относительно B и C подобно тому, как это было сделано в разделе 7.1.3 при рассмотрении системы (7.1)–(7.2), записанной в виде (7.11)–(7.12), в результате чего получаем:

$$B = \frac{g_{21}}{g_{11}}A + \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}{g_{11}}D; \quad (7.67)$$

$$C = \frac{1}{g_{11}}A - \frac{g_{12}}{g_{11}}D. \quad (7.68)$$

Таким образом, результирующая матрица принимает вид:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \frac{g_{21}}{g_{11}} & \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}{g_{11}} \\ \frac{1}{g_{11}} & -\frac{g_{12}}{g_{11}} \end{pmatrix}. \quad (7.69)$$

Записанное с ее помощью решение волновой задачи имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -\frac{B}{C} \\ - \end{pmatrix} = \hat{H} \begin{pmatrix} \frac{A}{D} \\ - \end{pmatrix}. \quad (7.70)$$

Замечание. Ввиду эквивалентности записей типа (7.5) и (7.20) (раздел 7.1.3) здесь на начальном этапе для удобства обращения (то есть как бы в прямом направлении слева направо) использована вторая запись (типа (7.20)) в виде (7.57)–(7.59), а получение вектора выходных сигналов относительно вектора входных с соответствующей матрицей производится на конечном этапе из решения системы (7.65)–(7.66), в результате чего получается матрица \hat{H} , определяемая формулой (7.69). Проверку возможности использования записи вида (7.5), а также тождественность получаемой при этом результирующей матрицы виду (7.69) авторы предоставляют любознательному читателю.

7.2.3. Результирующая матрица для произвольного числа сред

Результаты, полученные при решении волновой задачи для двух сред, легко можно обобщить на произвольное число N сред, разделенных $N - 1$ границами. Результирующая матрица $\hat{G}_{CAC}^{(N)}$, аналогично (7.51)–(7.52), имеет вид:

$$\hat{G}_{CAC}^{(N)} = \hat{C}_0 \hat{A}_1 \hat{C}_1 \hat{A}_2 \dots \hat{C}_{N-1} \hat{A}_{N-1} \hat{C}_N, \quad (7.71)$$

или

$$\hat{G}_{CAC}^{(N)} = \left(\prod_{n=1}^{N-1} \hat{C}_n \hat{A}_n \right) \hat{C}_N. \quad (7.72)$$

Нахождение матрицы типа \hat{H} из матрицы \hat{G} на каждом последовательном шаге расчета, хотя и возможно, но приводит к неоправданно громоздким вычислениям, поэтому проще сначала найти результирующую матрицу $\hat{G}_{CAC}^{(N)}$, из которой на конечном этапе расчета найти матрицу $\hat{H}_{CAC}^{(N)}$ с помощью соотношений (7.67)–(7.69).

Так, полагая:

$$\hat{G}_{CAC}^{(N)} = \begin{pmatrix} \frac{g_{11}^{(N)}}{g_{21}^{(N)}} & \frac{g_{12}^{(N)}}{g_{22}^{(N)}} \\ \frac{g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} & \frac{g_{22}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \end{pmatrix}, \quad (7.73)$$

где значения элементов этой матрицы определяются значениями элементов соответствующих матриц \hat{A}_n и \hat{C}_n .

При этом, подобно (7.63)–(7.69), получаем результирующую матрицу в виде:

$$\hat{H}_{CAC}^{(N)} = \begin{pmatrix} \frac{g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} & \frac{g_{11}^{(N)} g_{22}^{(N)} - g_{12}^{(N)} g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \\ \frac{1}{g_{11}^{(N)}} & -\frac{g_{12}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \end{pmatrix}. \quad (7.74)$$

При такой записи полное решение волновой задачи принимает вид:

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \widehat{H}_{CAC}^{(N)} \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}. \quad (7.75)$$

Таким образом, главной задачей при получении результирующей матрицы является нахождение матрицы распространения (матрицы среды) \widehat{C}_n и матрицы связи (матрицы границы) \widehat{A}_n для произвольной среды и произвольной границы структуры.

7.2.4. Общая структура матрицы распространения (матрицы среды)

Рассмотрим общую структуру матрицы распространения на примере среды 1 на рис. 7.4, а. Здесь u_1 и v_1 являются двумя линейно независимыми решениями волнового уравнения в среде 1, коэффициенты которого в общем случае могут зависеть от координаты x .

Не будем здесь вдаваться в возможный вид решения, а предположим, что амплитуды волн после прохождения среды связаны с амплитудами тех же волн до прохождения среды соотношениями:

$$A_1 = Au_1(x_1 - x_0); \quad (7.76)$$

$$B = B_1v_1(x_1 - x_0), \quad (7.77)$$

где круглые скобки означают функциональную зависимость.

Разрешая соотношение (7.76) относительно A , получаем:

$$A = \frac{1}{u_1(x_1 - x_0)} A_1. \quad (7.78)$$

Запишем (7.78) и (7.77) в векторной форме:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \widehat{C}_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad (7.79)$$

где \widehat{C}_1 — искомая матрица распространения для среды 1, имеющая вид

$$\widehat{C}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{u_1(x_1 - x_0)} & 0 \\ 0 & v_1(x_1 - x_0) \end{pmatrix}. \quad (7.80)$$

Аналогично получаем матрицу распространения для среды 2:

$$\widehat{C}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{u_2(x_2 - x_1)} & 0 \\ 0 & v_2(x_2 - x_1) \end{pmatrix}. \quad (7.81)$$

7.2.5. Общая структура матрицы связи (матрицы границы)

Рассмотрим общую структуру матрицы связи на примере границы между средами 1 и 2, показанной на рис. 7.4, а.

На границе функция u_1 переходит в функцию u_2 , а функция v_2 переходит в функцию v_1 . Граничные условия требуют сохранения на границе амплитуд волновых полей и их производных.

Поле слева от границы является суперпозицией двух волн с волновыми функциями u_1 и v_1 , имеющими амплитуды A_1 и B_1 :

$$U_1(x_1) = A_1 u_1(x_1) + B_1 v_1(x_1). \quad (7.82)$$

Производная этого поля имеет вид:

$$\frac{dU_1(x_1)}{dx} = A_1 \frac{du_1(x_1)}{dx} + B_1 \frac{dv_1(x_1)}{dx}. \quad (7.83)$$

Аналогично поле и его производная справа от границы имеют вид:

$$U_2(x_1) = A_2 u_2(x_1) + B_2 v_2(x_1); \quad (7.84)$$

$$\frac{dU_2(x_1)}{dx} = A_2 \frac{du_2(x_1)}{dx} + B_2 \frac{dv_2(x_1)}{dx}. \quad (7.85)$$

Приравнявая поля и производные на границе, получаем:

$$A_1 u_1(x_1) + B_1 v_1(x_1) = A_2 u_2(x_1) + B_2 v_2(x_1); \quad (7.86)$$

$$A_1 \frac{du_1(x_1)}{dx} + B_1 \frac{dv_1(x_1)}{dx} = A_2 \frac{du_2(x_1)}{dx} + B_2 \frac{dv_2(x_1)}{dx}. \quad (7.87)$$

Для получения матрицы связи \hat{A} надо систему (7.86)–(7.87) разрешить относительно A_2 и B_2 . В результате получаем:

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{c|c} u_1 \frac{dv_2}{dx} - v_2 \frac{du_1}{dx} & v_1 \frac{dv_2}{dx} - v_2 \frac{dv_1}{dx} \\ u_2 \frac{dv_2}{dx} - v_2 \frac{du_2}{dx} & u_2 \frac{dv_2}{dx} - v_2 \frac{du_2}{dx} \\ \hline u_2 \frac{du_1}{dx} - u_1 \frac{du_2}{dx} & u_2 \frac{dv_1}{dx} - v_1 \frac{du_2}{dx} \\ u_2 \frac{dv_2}{dx} - v_2 \frac{du_2}{dx} & u_2 \frac{dv_2}{dx} - v_2 \frac{du_2}{dx} \end{array} \right). \quad (7.88)$$

При этом

$$\left(\begin{array}{c} A_2 \\ -B_2 \end{array} \right) = \hat{A} \left(\begin{array}{c} A_1 \\ -B_1 \end{array} \right). \quad (7.89)$$

Аналогично, разрешая систему (7.86)–(7.87) относительно A_2 и B_1 , получаем матрицу связи \hat{B} :

$$\hat{B} = \left(\begin{array}{c|c} u_1 \frac{dv_1}{dx} - v_1 \frac{du_1}{dx} & v_1 \frac{dv_2}{dx} - v_2 \frac{dv_1}{dx} \\ u_2 \frac{dv_1}{dx} - v_1 \frac{du_2}{dx} & u_2 \frac{dv_1}{dx} - v_1 \frac{du_2}{dx} \\ \hline u_1 \frac{du_2}{dx} - u_2 \frac{du_1}{dx} & u_2 \frac{dv_2}{dx} - v_2 \frac{du_2}{dx} \\ u_2 \frac{dv_1}{dx} - v_1 \frac{du_2}{dx} & u_2 \frac{dv_1}{dx} - v_1 \frac{du_2}{dx} \end{array} \right). \quad (7.90)$$

При этом

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ -\frac{A_2}{B_1} \end{pmatrix} = \widehat{B} \begin{pmatrix} A_1 \\ -\frac{A_1}{B_2} \end{pmatrix}. \quad (7.91)$$

7.2.6. Замечание о произвольном числе сред

Приведенные здесь способы получения матриц связи и распространения пригодны и в случае произвольного числа сред N .

Так, по аналогии с выводом выражения (7.81), для среды с произвольным номером n матрицу распространения \widehat{C}_n получаем в виде:

$$\widehat{C}_n = \begin{pmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ -\frac{u_n(x_n - x_{n-1})}{0} & \vdots & \vdots \\ & \vdots & v_n(x_n - x_{n-1}) \end{pmatrix}. \quad (7.92)$$

Для границы, разделяющей среды с номерами n и $n + 1$, матрица связи \widehat{A} имеет вид:

$$\widehat{A}_n = \begin{pmatrix} \frac{u_n \frac{dv_{n+1}}{dx} - v_{n+1} \frac{du_n}{dx}}{u_{n+1} \frac{dv_{n+1}}{dx} - v_{n+1} \frac{du_{n+1}}{dx}} & \vdots & \frac{v_n \frac{dv_{n+1}}{dx} - v_{n+1} \frac{dv_n}{dx}}{u_{n+1} \frac{dv_{n+1}}{dx} - v_{n+1} \frac{du_{n+1}}{dx}} \\ \frac{u_{n+1} \frac{dv_n}{dx} - v_n \frac{du_{n+1}}{dx}}{u_{n+1} \frac{dv_{n+1}}{dx} - v_{n+1} \frac{du_{n+1}}{dx}} & \vdots & \frac{u_{n+1} \frac{dv_n}{dx} - v_n \frac{du_{n+1}}{dx}}{u_{n+1} \frac{dv_{n+1}}{dx} - v_{n+1} \frac{du_{n+1}}{dx}} \end{pmatrix}. \quad (7.93)$$

При этом

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ -\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} \end{pmatrix} = \widehat{A}_n \begin{pmatrix} A_n \\ -\frac{A_n}{B_n} \end{pmatrix}. \quad (7.94)$$

Для той же границы матрица связи \widehat{B}_n имеет вид:

$$\widehat{B}_n = \begin{pmatrix} \frac{u_n \frac{dv_n}{dx} - v_n \frac{du_n}{dx}}{u_{n+1} \frac{dv_n}{dx} - v_n \frac{du_{n+1}}{dx}} & \vdots & \frac{v_n \frac{dv_{n+1}}{dx} - v_{n+1} \frac{dv_n}{dx}}{u_{n+1} \frac{dv_n}{dx} - v_n \frac{du_{n+1}}{dx}} \\ \frac{u_{n+1} \frac{dv_{n+1}}{dx} - v_{n+1} \frac{du_{n+1}}{dx}}{u_{n+1} \frac{dv_n}{dx} - v_n \frac{du_{n+1}}{dx}} & \vdots & \frac{u_{n+1} \frac{dv_{n+1}}{dx} - v_{n+1} \frac{du_{n+1}}{dx}}{u_{n+1} \frac{dv_n}{dx} - v_n \frac{du_{n+1}}{dx}} \end{pmatrix}. \quad (7.95)$$

При этом

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ -\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} \end{pmatrix} = \widehat{B}_n \begin{pmatrix} A_n \\ -\frac{A_n}{B_{n+1}} \end{pmatrix}. \quad (7.96)$$

Отметим, что при практическом расчете распространения волн в многослойной структуре, для экономии вычислений удобнее не находить матрицу \widehat{B}_n на каждом шаге, а сначала найти матрицу \widehat{G}_N вида (7.73) для всей структуры в целом, а затем с помощью формул (7.74) преобразовать ее в матрицу \widehat{H}_N , что и даст решение задачи.

7.3. Применение матричного аппарата четырехполюсников для волн экспоненциального вида

В предыдущем разделе развит матричный метод расчета распространения одномерной волны через многослойную структуру, свойства слоев которой изначально не заданы. Задача значительно упрощается, если слои являются однородными, то есть в каждом из них распространение волн описывается линейным волновым уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение такого уравнения выражается через экспоненты или тригонометрические функции, что значительно упрощает дифференцирование, а следовательно и промежуточные и конечные выражения для матриц. Рассмотрим применение матричного аппарата четырехполюсников для волн, описываемых экспоненциальным решением волнового уравнения второго порядка.

7.3.1. Две однородные среды, разделенные одной границей

Рассмотрим сначала наиболее простой случай двух однородных сред, разделенных одной границей, иллюстрируемый рис. 7.5. Полагая частоту всех волн единой и заданной, будем характеризовать свойства каждой среды волновым числом, в пределах этой среды являющимся постоянным.

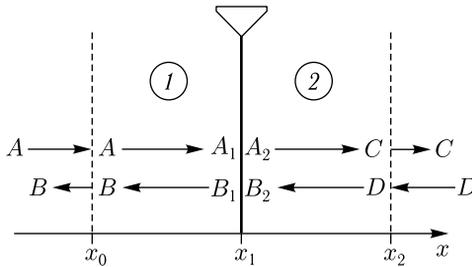


Рис. 7.5. Две однородные среды, разделенные одной границей

Как и везде на протяжении настоящей монографии, будем полагать временную зависимость в виде $e^{i\omega t}$. Координатные части полных волновых уравнений для сред 1 и 2 полагаем а виде [45, 48, 65]:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + k_1^2 U_1 = 0; \quad (7.97)$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + k_2^2 U_2 = 0, \quad (7.98)$$

где $U_{1,2}$ — волновые функции, а $k_{1,2}$ — волновые числа сред 1 и 2 соответственно.

Решения волновых уравнений (7.97) и (7.98) имеют вид:

$$u_{1,2} = e^{-ik_{1,2}x}; \quad (7.99)$$

$$v_{1,2} = e^{ik_{1,2}x}. \quad (7.100)$$

Волновые поля в средах 1 и 2 имеют вид:

$$U_1 = A_1 e^{-ik_1 x} + B_1 e^{ik_1 x}; \quad (7.101)$$

$$U_2 = A_2 e^{-ik_2 x} + B_2 e^{ik_2 x}, \quad (7.102)$$

где $A_{1,2}$, $B_{1,2}$ — постоянные коэффициенты (амплитуды).

Из (7.101)–(7.102) получаем производные волновых полей:

$$\frac{dU_1}{dx} = -A_1 ik_1 e^{-ik_1 x} + B_1 ik_1 e^{ik_1 x}; \quad (7.103)$$

$$\frac{dU_2}{dx} = -A_2 ik_2 e^{-ik_2 x} + B_2 ik_2 \cdot e^{ik_2 x}. \quad (7.104)$$

Главной задачей является нахождение результирующей матрицы \hat{H} , связывающей выходящие из структуры волны B и C с входящими A и D в соответствии с соотношением:

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \hat{H} \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}. \quad (7.105)$$

При этом, как показано в предыдущем разделе, удобнее сначала найти матрицу \hat{G} , связывающую амплитуды A и B с амплитудами C и D :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \hat{G} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \quad (7.106)$$

из которой матрица \hat{H} находится путем линейного преобразования.

Для данной задачи матрица \hat{G} является произведением трех матриц:

$$\hat{G} = \hat{C}_1 \hat{A} \hat{C}_2, \quad (7.107)$$

где матрица \hat{A} является матрицей связи и относится к границе между средами, а матрицы $\hat{C}_{1,2}$ являются матрицами распространения и относятся к средам по обе стороны от границы.

7.3.2. Матрица связи (матрица границы)

Найдем сначала матрицу \hat{A} , связывающую A_1 , B_1 с A_2 , B_2 , в соответствии с соотношением:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \hat{A} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}. \quad (7.108)$$

Так как эта матрица набег фазы волн в процессе их распространения не учитывает, а связывает только амплитуды этих волн, задаваемые на противоположных сторонах бесконечно тонкой границы, то можно

положить координату границы равной нулю, то есть $x_1 = 0$. При этом граничные условия принимают вид [45, 48, 65]:

$$U_1|_{x=0} = U_2|_{x=0}; \tag{7.109}$$

$$\frac{dU_1}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{dU_2}{dx}\Big|_{x=0}. \tag{7.110}$$

Подставляя (7.101)–(7.104) в граничные условия (7.109)–(7.110), получаем систему уравнений для амплитуд:

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2; \tag{7.111}$$

$$-A_1 k_1 + B_1 k_1 = -A_2 k_2 + B_2 k_2. \tag{7.112}$$

Решение системы (7.111)–(7.112) относительно A_1 и B_1 дает:

$$A_1 = \frac{k_1 + k_2}{2k_1} A_2 + \frac{k_1 - k_2}{2k_1} B_2; \tag{7.113}$$

$$B_1 = \frac{k_1 - k_2}{2k_1} A_2 + \frac{k_1 + k_2}{2k_1} B_2. \tag{7.114}$$

Таким образом, матрица связи \hat{A} принимает вид:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \frac{k_1 + k_2}{2k_1} & \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \\ \frac{k_1 - k_2}{2k_1} & \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \end{pmatrix}. \tag{7.115}$$

7.3.3. Матрицы распространения (матрицы сред)

Найдем теперь матрицы распространения для сред 1 и 2. Рассмотрим сначала среду 1, для которой найдем матрицу \hat{C}_1 связывающую A, B с A_1, B_1 :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \hat{C}_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}. \tag{7.116}$$

Для удобства записи обозначим толщину этой среды через d_1 , то есть будем считать:

$$x_1 - x_0 = d_1. \tag{7.117}$$

На этом отрезке распространяются во встречных направлениях две волны u_1 и v_1 .

Рассмотрим трансформацию обеих волн на этом пути. Так, выходящая из точки x_0 волна u_1 , имея в этой точке амплитуду A , при прохождении расстояния d_1 за счет набега фазы приобретает вид: $A \cdot e^{-ik_1 d_1}$, после чего входит в границу при координате x_1 уже как волна A_1 . Выходящая из границы при x_1 волна B_1 , распространяясь в противоположном направлении, то есть проходя расстояние $-d_1$, приобретает вид $B_1 \cdot e^{-ik_1 d_1}$, после чего выходит из начала структуры при x_0 уже как волна B .

Таким образом, выполняются соотношения:

$$Ae^{-ik_1d_1} = A_1; \quad (7.118)$$

$$B_1e^{-ik_1d_1} = B. \quad (7.119)$$

Из этих соотношений получаем:

$$A = A_1e^{ik_1d_1}; \quad (7.120)$$

$$B = B_1e^{-ik_1d_1}. \quad (7.121)$$

Таким образом, матрица \widehat{C}_1 принимает вид:

$$\widehat{C}_1 = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_1d_1} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_1d_1} \end{array} \right). \quad (7.122)$$

Аналогичное рассмотрение для среды 2 при обозначении:

$$x_2 - x_1 = d_2 \quad (7.123)$$

дает матрицу \widehat{C}_2 в виде

$$\widehat{C}_2 = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_2d_2} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_2d_2} \end{array} \right). \quad (7.124)$$

При этом:

$$\left(\begin{array}{c} A_2 \\ \hline B_2 \end{array} \right) = \widehat{C}_2 \left(\begin{array}{c} C \\ \hline D \end{array} \right). \quad (7.125)$$

7.3.4. Результирующие матрицы для структуры в целом

Теперь, когда получены матрица связи \widehat{A} и обе матрицы распространения \widehat{C}_1 и \widehat{C}_2 , можно получить результирующую матрицу \widehat{G} , определяемую соотношением (7.107). Так, перемножая (7.122), (7.115) и (7.124) от конца к началу (справа налево), получаем:

$$\widehat{G} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_1 + k_2}{2k_1} e^{i(k_1d_1 + k_2d_2)} & \frac{k_1 - k_2}{2k_1} e^{i(k_1d_1 - k_2d_2)} \\ \hline \frac{k_1 - k_2}{2k_1} e^{-i(k_1d_1 - k_2d_2)} & \frac{k_1 + k_2}{2k_1} e^{-i(k_1d_1 + k_2d_2)} \end{array} \right). \quad (7.126)$$

Запишем эту матрицу в виде:

$$\widehat{G} = \left(\begin{array}{c|c} g_{11} & g_{12} \\ \hline g_{21} & g_{22} \end{array} \right), \quad (7.127)$$

где составляющие ее элементы равны:

$$g_{11} = \frac{k_1 + k_2}{2k_1} e^{i(k_1 d_1 + k_2 d_2)}; \quad (7.128)$$

$$g_{12} = \frac{k_1 - k_2}{2k_1} e^{i(k_1 d_1 - k_2 d_2)}; \quad (7.129)$$

$$g_{21} = \frac{k_1 - k_2}{2k_1} e^{-i(k_1 d_1 - k_2 d_2)}; \quad (7.130)$$

$$g_{22} = \frac{k_1 + k_2}{2k_1} e^{-i(k_1 d_1 + k_2 d_2)}. \quad (7.131)$$

Результирующая матрица \hat{H} , выражается через эти элементы в виде:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} g_{21} & | & g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \\ -g_{11} & | & -g_{12} \\ \hline 1 & | & -g_{12} \\ g_{11} & | & g_{11} \end{pmatrix}. \quad (7.132)$$

Подставляя (7.128)–(7.131) в (7.132), получаем:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{-i2k_1 d_1} & | & \frac{2k_2}{k_1 + k_2} e^{-i(k_1 d_1 + k_2 d_2)} \\ -\frac{2k_1}{k_1 + k_2} e^{-i(k_1 d_1 + k_2 d_2)} & | & -\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{-i2k_2 d_2} \end{pmatrix}. \quad (7.133)$$

Записанное с помощью этой матрицы полное решение исходной волновой задачи имеет вид:

$$\begin{pmatrix} B \\ -C \end{pmatrix} = \hat{H} \begin{pmatrix} A \\ -D \end{pmatrix}. \quad (7.134)$$

При этом амплитуды волн, выходящих из структуры, равны:

$$B = A \cdot \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{-i2k_1 d_1} + D \frac{2k_2}{k_1 + k_2} \cdot e^{-i(k_1 d_1 + k_2 d_2)}; \quad (7.135)$$

$$C = A \cdot \frac{2k_1}{k_1 + k_2} e^{-i(k_1 d_1 + k_2 d_2)} - D \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \cdot e^{-i2k_2 d_2}. \quad (7.136)$$

Структура экспонент здесь следующая.

Экспонента при первом слагаемом в выражении (7.135) отражает набег фазы волны в среде 1 при двукратном прохождении в прямом и обратном направлениях отрезка d_1 , в результате чего волна A превращается в первую составляющую волны B .

Экспонента при втором слагаемом в том же выражении отражает набег фазы волны в средах 1 и 2 при ее последовательном прохождении отрезков d_2 и d_1 , в результате чего волна D дает вторую составляющую волны B .

Экспонента при первом слагаемом в выражении (7.136) отражает набег фазы волны при последовательном прохождении отрезков d_1 и d_2 , в результате чего волна A дает первую составляющую волны C .

Экспонента при втором слагаемом в том же выражении отражает набег фазы волны в среде 2 при двукратном прохождении в обратном и прямом направлениях отрезка d_2 , в результате чего волна D дает вторую составляющую волны C .

Если полагать, что волны A и D падают сразу на границу без предварительного прохождения сред 1 и 2, то есть $d_{1,2} = 0$, то из (7.135)–(7.136) получаем:

$$B = A \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} + D \frac{2k_2}{k_1 + k_2}; \quad (7.137)$$

$$C = A \frac{2k_1}{k_1 + k_2} - D \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad (7.138)$$

что совпадает с хорошо известным решением подобной задачи прямым методом [48, 65].

7.3.5. Матрицы распространения и связи для произвольного номера среды и границы

В предыдущем разделе показано, что применение аппарата четырехполюсников позволяет получить результирующие матрицы для произвольного числа N сред, разделенных $N - 1$ границами. При этом основной задачей становится нахождение при произвольном номере n матриц распространения \hat{C}_n и связи \hat{A}_n а также матрицы распространения \hat{C}_N для последней среды с номером N . Проведенное рассмотрение задачи о двух средах, разделенных одной границей, позволяет записать необходимые выражения по аналогии.

Так, для среды с номером n , полагая

$$x_n - x_{n-1} = d_n, \quad (7.139)$$

получаем матрицу распространения

$$\hat{C}_n = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_n d_n} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_n d_n} \end{array} \right) \quad (7.140)$$

и матрицу связи

$$\hat{A}_n = \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_n + k_{n+1}}{2k_n} & \frac{k_n - k_{n+1}}{2k_n} \\ \hline \frac{k_n - k_{n+1}}{2k_n} & \frac{k_n + k_{n+1}}{2k_n} \end{array} \right). \quad (7.141)$$

Для среды с номером N , полагая

$$x_N - x_{N-1} = d_N, \quad (7.142)$$

получаем матрицу распространения в виде

$$\hat{C}_N = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_N d_N} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_N d_N} \end{array} \right). \quad (7.143)$$

Результирующая матрица $\widehat{G}^{(N)}$ принимает вид:

$$\begin{aligned} \widehat{G}^{(N)} &= \left(\prod_{n=1}^{N-1} \widehat{C}_n \widehat{A}_n \right) \widehat{C}_N = \\ &= \left[\prod_{n=1}^{N-1} \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_n d_n} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_n d_n} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_n + k_{n+1}}{2k_n} & \frac{k_n - k_{n+1}}{2k_n} \\ \hline \frac{k_n - k_{n+1}}{2k_n} & \frac{k_n + k_{n+1}}{2k_n} \end{array} \right) \right] \times \\ &\quad \times \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_N d_N} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_N d_N} \end{array} \right). \end{aligned} \quad (7.144)$$

В силу общего свойства матриц (6.16)

$$\widehat{A}\widehat{B}\widehat{C} = \widehat{A}(\widehat{B}\widehat{C}) = (\widehat{A}\widehat{B})\widehat{C}, \quad (7.145)$$

где \widehat{A} , \widehat{B} , \widehat{C} — произвольные матрицы, в выражении (7.144) можно под знаком произведения произвести умножение матриц \widehat{C}_n и \widehat{A}_n друг на друга, в результате чего (7.144) принимает вид:

$$\begin{aligned} \widehat{G}^{(N)} &= \left[\prod_{n=1}^{N-1} \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_n + k_{n+1}}{2k_n} \cdot e^{ik_n d_n} & \frac{k_n - k_{n+1}}{2k_n} \cdot e^{ik_n d_n} \\ \hline \frac{k_n - k_{n+1}}{2k_n} \cdot e^{-ik_n d_n} & \frac{k_n + k_{n+1}}{2k_n} \cdot e^{-ik_n d_n} \end{array} \right) \right] \times \\ &\quad \times \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_N d_N} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_N d_N} \end{array} \right). \end{aligned} \quad (7.146)$$

Выполняя в (7.144) или (7.146) умножение и записывая матрицу $\widehat{G}^{(N)}$ через компоненты:

$$\widehat{G}^{(N)} = \left(\begin{array}{c|c} g_{11}^{(N)} & g_{12}^{(N)} \\ \hline g_{21}^{(N)} & g_{22}^{(N)} \end{array} \right), \quad (7.147)$$

находим результирующую матрицу $\widehat{H}^{(N)}$:

$$\widehat{H}^{(N)} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} & \frac{g_{11}^{(N)} g_{22}^{(N)} - g_{12}^{(N)} g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \\ \hline \frac{1}{g_{11}^{(N)}} & -\frac{g_{12}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \end{array} \right), \quad (7.148)$$

при которой полное решение волновой задачи для N сред принимает вид:

$$\left(\begin{array}{c} B \\ \hline C \end{array} \right) = \widehat{H}^{(N)} \left(\begin{array}{c} A \\ \hline D \end{array} \right), \quad (7.149)$$

то есть

$$B = \frac{g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} A + \frac{g_{11}^{(N)} g_{22}^{(N)} - g_{12}^{(N)} g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} D; \quad (7.150)$$

$$C = \frac{1}{g_{11}^{(N)}} A - \frac{g_{12}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} D. \quad (7.151)$$

7.3.6. Три однородные среды, разделенные двумя границами

В качестве примера работы описанного аппарата рассмотрим получение результирующих матриц для случая трех сред, разделенных двумя границами.

Результирующая матрица $\widehat{G}^{(3)}$ имеет вид:

$$\widehat{G}^{(3)} = \widehat{C}_1 \widehat{A}_1 \widehat{C}_2 \widehat{A}_2 \widehat{C}_3, \quad (7.152)$$

где составляющие это выражение матрицы имеют вид

$$\widehat{C}_1 = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_1 d_1} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_1 d_1} \end{array} \right); \quad (7.153)$$

$$\widehat{A}_1 = \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_1 + k_2}{2k_1} & \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \\ \hline \frac{k_1 - k_2}{2k_1} & \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \end{array} \right); \quad (7.154)$$

$$\widehat{C}_2 = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_2 d_2} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_2 d_2} \end{array} \right); \quad (7.155)$$

$$\widehat{A}_2 = \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_2 + k_3}{2k_2} & \frac{k_2 - k_3}{2k_2} \\ \hline \frac{k_2 - k_3}{2k_2} & \frac{k_2 + k_3}{2k_2} \end{array} \right); \quad (7.156)$$

$$\widehat{C}_3 = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_3 d_3} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_3 d_3} \end{array} \right). \quad (7.157)$$

Выполняя умножение от конца к началу (от \widehat{C}_3 к \widehat{C}_1), получаем компоненты матрицы $\widehat{G}^{(3)}$:

$$g_{11}^{(3)} = \frac{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)}{4k_1 k_2} e^{i(k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3)} + \frac{(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)}{4k_1 k_2} e^{i(k_1 d_1 - k_2 d_2 + k_3 d_3)}; \quad (7.158)$$

$$g_{12}^{(3)} = \frac{(k_1 + k_2)(k_2 - k_3)}{4k_1 k_2} e^{i(k_1 d_1 + k_2 d_2 - k_3 d_3)} + \frac{(k_1 - k_2)(k_2 + k_3)}{4k_1 k_2} e^{i(k_1 d_1 - k_2 d_2 - k_3 d_3)}; \quad (7.159)$$

$$g_{21}^{(3)} = \frac{(k_1 - k_2)(k_2 + k_3)}{4k_1k_2} e^{i(-k_1d_1 + k_2d_2 + k_3d_3)} + \frac{(k_1 + k_2)(k_2 - k_3)}{4k_1k_2} e^{i(-k_1d_1 - k_2d_2 + k_3d_3)}; \quad (7.160)$$

$$g_{22}^{(3)} = \frac{(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)}{4k_1k_2} e^{i(-k_1d_1 + k_2d_2 - k_3d_3)} + \frac{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)}{4k_1k_2} e^{i(-k_1d_1 - k_2d_2 - k_3d_3)}. \quad (7.161)$$

Пользуясь этими выражениями, с помощью (7.148), находим компоненты матрицы $\hat{H}^{(3)}$ в виде:

$$h_{11}^{(3)} = \frac{(k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d_2} + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d_2}}{(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d_2} + (k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d_2}} e^{-i2k_1d_1}; \quad (7.162)$$

$$h_{12}^{(3)} = \frac{4k_1k_2}{(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d_2} + (k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d_2}} e^{-i(k_1d_1 + k_3d_3)}; \quad (7.163)$$

$$h_{21}^{(3)} = \frac{4k_1k_2}{(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d_2} + (k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d_2}} e^{-i(k_1d_1 + k_3d_3)}; \quad (7.164)$$

$$h_{22}^{(3)} = \frac{(k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e^{-ik_2d_2} + (k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e^{ik_2d_2}}{(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d_2} + (k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d_2}} e^{-i2k_3d_3}. \quad (7.165)$$

С помощью этих выражений получаем амплитуды волн, выходящих из структуры:

$$B = A \frac{(k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d_2} + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d_2}}{(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d_2} + (k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d_2}} e^{-i2k_1d_1} + D \frac{4k_2k_3}{(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d_2} + (k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d_2}} e^{-i(k_1d_1 + k_3d_3)}; \quad (7.166)$$

$$C = A \frac{4k_1k_2}{(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d_2} + (k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d_2}} e^{-i(k_1d_1 + k_3d_3)} - D \frac{(k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e^{-ik_2d_2} + (k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e^{ik_2d_2}}{(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d_2} + (k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d_2}} e^{-i2k_3d_3}. \quad (7.167)$$

Здесь обособленные после дробей экспоненты имеют тот же физический смысл, что и в выражениях (7.135)–(7.136), с учетом рассмотрения трех сред вместо двух.

Если положить толщину двух крайних сред равной нулю, то есть $d_{1,3} = 0$, то выражения (7.166)–(7.167) принимают вид:

$$B = A \frac{(k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d_2} + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d_2}}{(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d_2} + (k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d_2}} + D \frac{4k_2k_3}{(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d_2} + (k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d_2}}; \quad (7.168)$$

$$C = A \frac{4k_1 k_2}{(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2 d_2} + (k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2 d_2}} - \\ - D \frac{(k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e^{-ik_2 d_2} + (k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e^{ik_2 d_2}}{(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2 d_2} + (k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2 d_2}}, \quad (7.169)$$

что с точностью до обозначений и порядка слагаемых совпадает с решением той же задачи, полученным прямым методом (раздел 5.2.2, форм. (5.63)–(5.68), раздел 3.1.3, форм. (3.54)–(3.57), а также [48, 65]).

7.3.7. Замечание об экономии вычислений

Ключом к получению решения (7.168)–(7.169) является вычисление результирующей матрицы (7.152), которая состоит из матриц \hat{C} и \hat{A} вида (7.153)–(7.157). Можно видеть, что эти матрицы являются однотипными и отличаются лишь номерами индексов. Такой расчет при любом числе сред может быть выполнен стандартным образом. Далее, если элементы результирующей матрицы g_{ik} типа (7.158)–(7.161) известны, то получение амплитуд B и C легко осуществимо с помощью формул (7.150)–(7.151).

Таким образом, при любом сколь угодно большом числе сред, расчет главным образом сводится к получению результирующей матрицы вида (7.152), состоящей в перемножении однотипных матриц второго порядка типа (7.153)–(7.157). Такое перемножение требует значительно меньше вычислительного труда, чем раскрытие определителей высокого порядка при прямом методе. Дальнейшие же вычисления не зависят от числа сред и выполняются достаточно простым образом. В этом и состоит экономия вычислительной работы в методе матриц по сравнению с прямым методом.

7.3.8. Замечание о структуре результирующих матриц при произвольном числе сред

Описанный здесь способ получения результирующих матриц типа \hat{H} с предварительным вычислением результирующих матриц типа \hat{G} пригоден для любого произвольного числа сред N . При этом полное число матриц распространения \hat{N}_n будет равно числу сред, то есть N , а полное число матриц связи \hat{A}_n будет равно числу границ, то есть $N - 1$. Общая структура элементов обеих матриц сохранится.

Для матриц $\hat{G}^{(n)}$ можно указать простой способ последовательного получения их явного вида. Так, для двух сред, согласно (7.107), имеем:

$$\hat{G}^{(2)} = \hat{C}_1 \hat{A}_1 \hat{C}_2. \quad (7.170)$$

Для трех сред, согласно (7.152), подобное выражение имеет вид:

$$G^{(3)} = \hat{C}_1 \hat{A}_1 \hat{C}_2 \hat{A}_2 \hat{C}_3. \quad (7.171)$$

Это же можно записать в виде:

$$G^{(3)} = \hat{G}^{(2)} \hat{A}_2 \hat{C}_3. \quad (7.172)$$

Аналогично для любого произвольного номера n получаем:

$$G^{(n)} = \widehat{G}^{(n-1)} \widehat{A}_{n-1} \widehat{C}_n. \quad (7.173)$$

Например, для случаев четырех и пяти сред, рассматриваемых далее в разделе электродинамики, выражения для матриц $\widehat{G}^{(4)}$ и $\widehat{G}^{(5)}$ имеют вид:

$$G^{(4)} = \widehat{G}^{(3)} \widehat{A}_3 \widehat{C}_5; \quad (7.174)$$

$$G^{(5)} = \widehat{G}^{(4)} \widehat{A}_4 \widehat{C}_5. \quad (7.175)$$

Отметим еще некоторые особенности общих выражений. Так, каждый элемент матрицы $\widehat{G}^{(N)}$ вида $g_{ik}^{(N)}$, где $i, k = 1, 2$, будет содержать $N - 1$ слагаемых, имеющих вид произведения дробей на экспоненты. Числители дробей будут представлять собой произведения сумм и разностей волновых чисел соседних сред, а знаменатели будут равняться $2^{N-1} \prod_{n=1}^{N-1} k_n$. Показатели экспонент будут содержать суммы произведений волновых чисел на соответствующие толщины для всех сред структуры, то есть от $k_1 d_1$ до $k_N d_N$.

Каждый элемент матрицы $\widehat{H}^{(N)}$ вида $h_{ik}^{(N)}$, где $i, k = 1, 2$, будет представлять собой произведение одной дроби на одну экспоненту. Числители и знаменатели этих дробей будут представлять собой суммы произведений сумм и разностей волновых чисел соседних сред на экспоненты, показатели которых будут содержать произведения волновых чисел на толщины внутренних сред структуры, то есть от $k_2 d_2$ до $k_{N-1} d_{N-1}$. Показатели умножаемых на дроби экспонент будут содержать подобные произведения только для двух крайних сред структуры, то есть $k_1 d_1$ и $k_N d_N$. Физический смысл этих экспонент также будет подобен смыслу экспонент в выражениях (7.135)–(7.136).

Итак, описанный метод результирующей матрицы в принципе полностью решает задачу для произвольного числа границ, сводя ее к элементарной процедуре перемножения матриц.

7.4. Метод матрицы передачи для одномерной волны

Упрощенным вариантом общего метода результирующей матрицы является метод матрицы передачи, применяемый обычно при рассмотрении распространения электромагнитных волн диапазона СВЧ через многослойные структуры. Довольно характерным примером применения матрицы передачи можно считать работы [108, 109], посвященные изучению отражения электромагнитного излучения от нанометровых структур типа металл–диэлектрик и металл–полупроводник. В рамках настоящей монографии авторы ограничиваются кратким изложением метода матрицы передачи для одномерной волны. Обобщение на случай электромагнитных волн авторы оставляют в качестве полезной задачи для любознательного читателя.

Отличием матрицы передачи от матриц распространения и связи является то, что здесь не делается различия между волнами, входящими в участок среды и выходящими из него, а рассматриваются волны по отношению к началу и концу участка среды, или по отношению к одной и другой сторонам границы.

7.4.1. Общая схема метода

Метод матрицы передачи для многослойной структуры позволяет, зная амплитуду одной волны, падающей на структуру извне, а также параметры составляющих структуру сред, найти амплитуды двух волн: проходящей через структуру и отраженной от нее. При этом многослойная структура рассматривается как совокупность последовательно соединенных элементарных участков, каждый из которых содержит границу между двумя средами и приграничную область, расположенную после границы по ходу распространения прямой падающей волны. Таким образом, такой элементарный участок начинается на входе в предыдущую границу и заканчивается на выходе из участка однородной среды, следующей за этой границей, то есть перед входом в последующую границу. Направление счета границ от предыдущих к последующим задается направлением распространения первичной волны, падающей извне на структуру. Для каждого элементарного участка находится элементарная матрица передачи, определяемая параметрами двух сред, между которыми находится граница, входящая в этот участок. При этом, поскольку выход предыдущего участка непосредственно подключается ко входу последующего без каких-либо элементов связи, то результирующая матрица многослойной структуры получается как последовательное произведение матриц составляющих ее элементарных участков, причем умножение составляющих матриц производится от конца результирующего произведения к его началу.

Таким образом, получение результирующей матрицы передачи полностью аналогично получению результирующей матрицы для цепочки из четырехполюсников, в которой матрицы связи являются единичными.

Начнем рассмотрение метода матрицы передачи на примере распространения одномерных волн через структуры, содержащие одну и две границы.

7.4.2. Матрица передачи для двух сред, разделенных одной границей

Рассмотрим сначала случай одной границы, геометрия которого иллюстрируется рис. 7.6. Будем считать, что внутри сред распространяются волны, описываемые волновым уравнением второго порядка с постоянным волновым числом, то есть имеющие экспоненциальный характер.

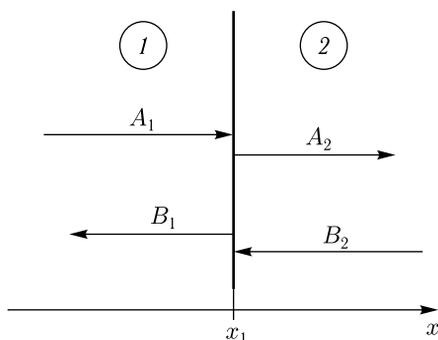


Рис. 7.6. Схема распространения волн через одну границу

Решения волновых уравнений в областях 1 и 2 дают суммарные волновые функции по обе стороны границы в виде:

$$U_1 = A_1 e^{-ik_1 x} + B_1 e^{ik_1 x}, \quad (7.176)$$

$$U_2 = A_2 e^{-ik_2 x} + B_2 e^{ik_2 x}. \quad (7.177)$$

Находим производные волновых функций:

$$\frac{dU_1}{dx} = -A_1 i k_1 e^{-ik_1 x} + B_1 i k_1 e^{ik_1 x}, \quad (7.178)$$

$$\frac{dU_2}{dx} = -A_2 i k_2 e^{-ik_2 x} + B_2 i k_2 e^{ik_2 x}. \quad (7.179)$$

Граничные условия имеют вид:

$$U_1|_{x=x_1} = U_2|_{x=x_1}; \quad (7.180)$$

$$\left. \frac{dU_1}{dx} \right|_{x=x_1} = \left. \frac{dU_2}{dx} \right|_{x=x_1}. \quad (7.181)$$

Подставляя (7.176)–(7.179) в граничные условия (7.180)–(7.181), получаем:

$$A_1 e^{-ik_1 x_1} + B_1 e^{ik_1 x_1} = A_2 e^{-ik_2 x_1} + B_2 e^{ik_2 x_1}; \quad (7.182)$$

$$-k_1 A_1 e^{-ik_1 x_1} + k_1 B_1 e^{ik_1 x_1} = -k_2 A_2 e^{-ik_2 x_1} + k_2 B_2 e^{ik_2 x_1}. \quad (7.183)$$

Выражая отсюда A_2 и B_2 , получаем:

$$A_2 = A_1 \frac{k_1 + k_2}{2k_2} e^{-i(k_1 - k_2)x_1} - B_1 \frac{k_1 - k_2}{2k_2} e^{i(k_1 + k_2)x_1}; \quad (7.184)$$

$$B_2 = -A_1 \frac{k_1 - k_2}{2k_2} e^{-i(k_1 + k_2)x_1} + B_1 \frac{k_1 + k_2}{2k_2} e^{i(k_1 - k_2)x_1}. \quad (7.185)$$

Эти соотношения можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} -\frac{A_2}{B_2} \end{pmatrix} = \widehat{T}_{12} \begin{pmatrix} -\frac{A_1}{B_1} \end{pmatrix}, \quad (7.186)$$

где матрица передачи \widehat{T}_{12} имеет вид:

$$\widehat{T}_{12} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_1 + k_2}{2k_2} e^{-i(k_1 - k_2)x_1} & -\frac{k_1 - k_2}{2k_2} e^{i(k_1 + k_2)x_1} \\ \hline -\frac{k_1 - k_2}{2k_2} e^{-i(k_1 + k_2)x_1} & \frac{k_1 + k_2}{2k_2} e^{i(k_1 - k_2)x_1} \end{array} \right). \quad (7.187)$$

При $x_1 = 0$ матрица передачи для одной границы принимает вид:

$$\widehat{T}_{12} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_1 + k_2}{2k_2} & -\frac{k_1 - k_2}{2k_2} \\ \hline -\frac{k_1 - k_2}{2k_2} & \frac{k_1 + k_2}{2k_2} \end{array} \right). \quad (7.188)$$

Полагая $B_2 = 0$, из (7.186) получаем систему уравнений для B_1 и A_2 :

$$A_2 + B_1 \frac{k_1 - k_2}{2k_2} = A_1 \frac{k_1 + k_2}{2k_2}; \quad (7.189)$$

$$B_1 \frac{k_1 + k_2}{2k_2} = A_1 \frac{k_1 - k_2}{2k_2}, \quad (7.190)$$

решая которую, получаем амплитуды отраженной и проходящей волн в виде:

$$B_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A_1; \quad (7.191)$$

$$A_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A_1, \quad (7.192)$$

что соответствует аналогичным выражениям, получаемым прямым методом (раздел 2.1.1, форм. (2.18), (2.19)).

7.4.3. Матрица передачи для трех сред, разделенных двумя границами

Рассмотрим теперь случай двух границ, геометрия которого иллюстрируется рис. 7.7.

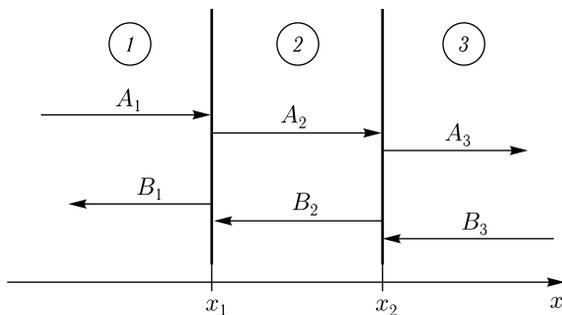


Рис. 7.7. Схема распространения волн через две границы

Матрица передачи для первой границы уже получена и имеет вид (7.187). Аналогично получаем матрицу передачи для второй границы (в силу трансляционной симметрии задачи это можно сделать путем увеличения значений всех индексов на единицу):

$$\widehat{T}_{23} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_2 + k_3}{2k_3} e^{-i(k_2 - k_3)x_2} & -\frac{k_2 - k_3}{2k_3} e^{i(k_2 + k_3)x_2} \\ \hline -\frac{k_2 - k_3}{2k_3} e^{-i(k_2 + k_3)x_2} & \frac{k_2 + k_3}{2k_3} e^{i(k_2 - k_3)x_2} \end{array} \right). \quad (7.193)$$

Полагая $x_1 = 0$ и расстояние между границами равным d , получаем $x_2 = d$. При этом (7.193) принимает вид:

$$\widehat{T}_{23} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_2 + k_3}{2k_3} e^{-i(k_2 - k_3)d} & -\frac{k_2 - k_3}{2k_3} e^{i(k_2 + k_3)d} \\ \hline -\frac{k_2 - k_3}{2k_3} e^{-i(k_2 + k_3)d} & \frac{k_2 + k_3}{2k_3} e^{i(k_2 - k_3)d} \end{array} \right). \quad (7.194)$$

Таким образом, для двух границ по отдельности выполняются два соотношения:

$$\left(\begin{array}{c} A_2 \\ B_2 \end{array} \right) = \widehat{T}_{12} \left(\begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \end{array} \right); \quad (7.195)$$

$$\left(\begin{array}{c} A_3 \\ B_3 \end{array} \right) = \widehat{T}_{23} \left(\begin{array}{c} A_2 \\ B_2 \end{array} \right). \quad (7.196)$$

Подставляя (7.195) в (7.196), получаем:

$$\left(\begin{array}{c} A_3 \\ B_3 \end{array} \right) = \widehat{T}_{23} \widehat{T}_{12} \left(\begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \end{array} \right). \quad (7.197)$$

Таким образом, матрица передачи для структуры в целом имеет вид:

$$\widehat{T}_S = \widehat{T}_{23} \widehat{T}_{12}, \quad (7.198)$$

где при $x_1 = 0$ и $x_2 = d$ в соответствии с (7.194) и (7.188) получаем

$$\widehat{T}_S = \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_2 + k_3}{2k_3} e^{-i(k_2 - k_3)d} & -\frac{k_2 - k_3}{2k_3} e^{i(k_2 + k_3)d} \\ \hline -\frac{k_2 - k_3}{2k_3} e^{-i(k_2 + k_3)d} & \frac{k_2 + k_3}{2k_3} e^{i(k_2 - k_3)d} \end{array} \right) \times \\ \times \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_1 + k_2}{2k_2} & -\frac{k_1 - k_2}{2k_2} \\ \hline -\frac{k_1 - k_2}{2k_2} & \frac{k_1 + k_2}{2k_2} \end{array} \right). \quad (7.199)$$

Выполняя умножение, получаем элементы матрицы \widehat{T}_S в виде:

$$T_{11} = \frac{e^{ik_3d}}{4k_2k_3} [(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{ik_2d} + (k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{-ik_2d}]; \quad (7.200)$$

$$T_{12} = -\frac{e^{ik_3d}}{4k_2k_3} [(k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e^{-ik_2d}]; \quad (7.201)$$

$$T_{21} = -\frac{e^{-ik_3d}}{4k_2k_3} [(k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}]; \quad (7.202)$$

$$T_{22} = \frac{e^{-ik_3d}}{4k_2k_3} [(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}]. \quad (7.203)$$

В качестве простой иллюстрации рассмотрим частный случай, когда на структуру падает волна A_1 , отражается волна B_1 и проходит насквозь волна A_3 . Волну B_3 полагаем отсутствующей.

Матрица передачи структуры в целом \widehat{T}_S при $B_3 = 0$, согласно (7.197), связывает волны в областях 1 и 3 соотношением

$$\begin{pmatrix} -A_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \widehat{T}_S \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}. \quad (7.204)$$

При этом заданной изначально является амплитуда A_1 , а требованием задачи является определение амплитуд B_1 и A_3 .

Представляя матрицу \widehat{T}_S в виде:

$$\widehat{T}_S = \begin{pmatrix} -T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}, \quad (7.205)$$

из (7.204) получаем:

$$A_3 = T_{11}A_1 + T_{12}B_1; \quad (7.206)$$

$$0 = T_{21}A_1 + T_{22}B_1. \quad (7.207)$$

Это — система двух уравнений для двух неизвестных B_1 и A_3 . Запишем ее в виде:

$$A_3 - T_{12}B_1 = T_{11}A_1; \quad (7.208)$$

$$T_{22}B_1 = -T_{21}A_1. \quad (7.209)$$

Решая эту систему относительно B_1 и A_3 , получаем:

$$B_1 = -\frac{T_{21}}{T_{22}}A_1; \quad (7.210)$$

$$A_3 = \frac{T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}}{T_{22}}A_1. \quad (7.211)$$

Подставляя в эти выражения (7.200)–(7.203), получаем амплитуды отраженной и проходящей волн в виде:

$$B_1 = \frac{(k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}A_1; \quad (7.212)$$

$$A_3 = \frac{4k_1k_2e^{ik_3d}}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}A_1. \quad (7.213)$$

Эти выражения, с точностью до нормировки на точку исхода волны, совпадают с аналогичными амплитудами, получаемыми прямым методом (раздел 3.1.3, подраздел «решение без нормировки», форм. (3.41), (3.44)). Рассмотреть введение нормировки с соответствующим обращением в ноль показателя экспоненты в числителе дроби (7.213), авторы предлагают в качестве полезного упражнения любознательному читателю.

7.4.4. Матрица передачи для многослойной структуры

Итак, если известны матрицы передачи для структуры, состоящей из N элементарных участков, а именно: $\hat{T}_{12}, T_{23}, \dots, T_{N-1N}$, где индексы соответствуют номерам сред, окружающих границу, входящую в данный элементарный участок, то результирующая матрица передачи структуры в целом имеет вид:

$$\hat{T}_S = \hat{T}_{N-1 N} \dots \hat{T}_{23} \hat{T}_{12} = \prod_{n=1}^{N-1} \hat{T}_{N-n N-n+1}, \quad (7.214)$$

где умножение производится от конца к началу, то есть справа налево.

Главной задачей рассмотрения падения волны на многослойную структуру является получение амплитуд отраженной и проходящей волн, выраженных через амплитуду падающей волны и параметры сред структуры. Так, знание этих амплитуд позволяет определить такие важные характеристики структуры, как коэффициенты отражения и прохождения по амплитудам и по энергиям. Рассмотрим, как это можно сделать с помощью матрицы передачи для структуры в целом.

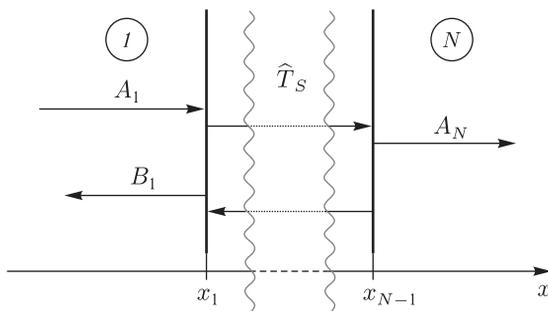


Рис. 7.8. Схема образования матрицы передачи для многослойной структуры

Схема образования матрицы передачи для многослойной структуры иллюстрируется рис. 7.8. Структура содержит N сред, разделенных границами при координатах от x_1 до x_{N-1} . На структуру слева из среды 1 падает волна с амплитудой A_1 , отражается от структуры в ту же среду волна с амплитудой B_1 , проходит насквозь через структуру в среду N волна с амплитудой A_N .

Матрица передачи структуры в целом \widehat{T}_S связывает волны в областях I и N соотношением:

$$\begin{pmatrix} -\frac{A_N}{0} \end{pmatrix} = \widehat{T}_S \begin{pmatrix} -\frac{A_1}{B_1} \end{pmatrix}. \quad (7.215)$$

При этом заданной изначально является амплитуда A_1 , а требованием задачи является определение амплитуд B_1 и A_N .

Представляя матрицу \widehat{T}_S в виде (7.205):

$$\widehat{T}_S = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}, \quad (7.216)$$

из (7.215) получаем:

$$A_N = T_{11}A_1 + T_{12}B_1; \quad (7.217)$$

$$0 = T_{21}A_1 + T_{22}B_1. \quad (7.218)$$

Это — система двух уравнений для двух неизвестных B_1 и A_N . Запишем ее в виде:

$$A_N - T_{12}B_1 = T_{11}A_1; \quad (7.219)$$

$$T_{22}B_1 = -T_{21}A_1. \quad (7.220)$$

Решая эту систему относительно B_1 и A_N , получаем:

$$B_1 = -\frac{T_{21}}{T_{22}}A_1; \quad (7.221)$$

$$A_N = \frac{T_{11} \cdot T_{22} - T_{12} \cdot T_{21}}{T_{22}}A_1. \quad (7.222)$$

Таким образом, основной задачей является нахождение результирующей матрицы передачи \widehat{T}_S для структуры в целом, представляемой выражением (7.214), которую после перемножения матриц следует записать в виде (7.216), что позволяет для нахождения амплитуд отраженной и выходящей волн использовать выражения (7.221) и (7.222).

7.4.5. Коэффициенты отражения и прохождения

Из (7.221)–(7.222) в соответствии с разделом 1.3.3 (форм. (1.226), (1.227)) можно получить коэффициенты отражения и прохождения по амплитудам:

$$R_a = \frac{|B_1|}{|A_1|} = \left| \frac{T_{21}}{T_{22}} \right|; \quad (7.223)$$

$$T_a = \frac{|A_N|}{|A_1|} = \left| \frac{T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}}{T_{22}} \right|, \quad (7.224)$$

и по энергиям:

$$R_e = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = \left| \frac{T_{21}}{T_{22}} \right|^2; \quad (7.225)$$

$$T_e = \frac{|A_N|^2}{|A_1|^2} \operatorname{Re} \left(\frac{k_N}{k_1} \right) = \left| \frac{T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}}{T_{22}} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{k_N}{k_1} \right). \quad (7.226)$$

Замечание. Более подробно о корректном получении таких коэффициентов при комплексных волновых числах можно познакомиться по работам [54, 60, 62].

7.4.6. Упрощенный вариант матрицы передачи для одного участка структуры

Рассмотрим еще более упрощенный вариант матрицы передачи на примере одного элементарного участка структуры. Обратимся к рис. 7.9, где показан такой участок, содержащий среду 2, заключенную между средами 1 и 3. Номер участка положим совпадающим с номером среды, составляющей его основу, то есть это будет участок № 2. Поскольку среды и границы между ними периодически повторяются, то рассмотрение участка с именно таким номером общности не ограничивает. Схема элементарного участка 2 иллюстрируется рис. 7.9. Границы участка показаны утолщенными пунктирными линиями, Границы 1 и 2 между средами 1, 2 и 3 показаны утолщенными сплошными линиями. Участок заключен между координатами x_1 и x_2 , то есть включает в себя границу 1 и следующую за ней среду 2.

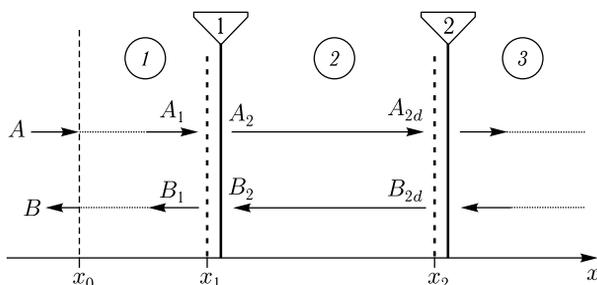


Рис. 7.9. Схема элементарного участка многослойной структуры, содержащего среду 2

На структуру слева извне при координате x_0 падает волна A . При той же координате из структуры выходит волна B . Эти волны на границе рассматриваемого элементарного участка, то есть на левой стороне границы 1, имеют амплитуды A_1 и B_1 , а на правой стороне той же границы амплитуды A_2 и B_2 . На другом конце участка, то есть при координате x_2 , после прохождения в среде 2 расстояния

$$x_2 - x_1 = d_2 \quad (7.227)$$

эти волны трансформируются в A_{2d} и B_{2d} .

Таким образом, участок представляет собой последовательное соединение границы 1 при координате x_1 и отрезка среды 2 между координатами x_1 и x_2 . Согласно методу результирующей матрицы, распространение волн на таком участке можно описать с помощью произведения матрицы связи для границы 1 и матрицы распространения для среды 2.

Матрица связи для границы 1 имеет вид:

$$\widehat{A}_1 = \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_1 + k_2}{2k_1} & \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \\ \hline -\frac{k_1 - k_2}{2k_1} & \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \end{array} \right). \quad (7.228)$$

Матрица распространения для среды 2 имеет вид:

$$\widehat{C}_2 = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_2 d_2} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_2 d_2} \end{array} \right). \quad (7.229)$$

Произведение этих матриц и дает матрицу передачи \widehat{T}_2 :

$$\begin{aligned} \widehat{T}_2 = \widehat{A}_1 \widehat{C}_2 &= \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_1 + k_2}{2k_1} & \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \\ \hline -\frac{k_1 - k_2}{2k_1} & \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_2 d_2} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_2 d_2} \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_1 + k_2}{2k_1} e^{ik_2 d_2} & \frac{k_1 - k_2}{2k_1} e^{-ik_2 d_2} \\ \hline -\frac{k_1 - k_2}{2k_1} e^{ik_2 d_2} & \frac{k_1 + k_2}{2k_1} e^{-ik_2 d_2} \end{array} \right). \quad (7.230) \end{aligned}$$

7.4.7. Результирующая матрица передачи для произвольного числа сред

Описанный в предыдущем разделе прием для одного участка можно обобщить на произвольное число сред.

Поскольку элементарные участки многослойной структуры связаны между собой непосредственно, то есть выходные сигналы одного являются входными для другого, то результирующая матрица структуры в целом является произведением матриц передачи отдельных участков, начиная с участка 2, до участка N . При этом матрица передачи участка с номером n имеет вид:

$$\widehat{T}_n = \widehat{A}_{n-1} \widehat{C}_n = \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_{n-1} + k_n}{2k_{n-1}} e^{ik_n d_n} & \frac{k_{n-1} - k_n}{2k_{n-1}} e^{-ik_n d_n} \\ \hline -\frac{k_{n-1} - k_n}{2k_{n-1}} e^{ik_n d_n} & \frac{k_{n-1} + k_n}{2k_{n-1}} e^{-ik_n d_n} \end{array} \right). \quad (7.231)$$

Кроме того, надо учесть, что среда 1 слева другой среды не имеет, поэтому волны в ней описывается матрицей распространения \hat{C}_1 , имеющей вид:

$$\hat{C}_1 = \begin{pmatrix} e^{ik_1 d_1} & 0 \\ 0 & e^{-ik_1 d_1} \end{pmatrix}. \quad (7.232)$$

Таким образом, результирующая матрица получается в виде:

$$\hat{G}^{(N)} = \hat{C}_1 \hat{T}_2 T_3 \dots \hat{T}_{N-1} T_N = \hat{C}_1 \prod_{n=2}^N \hat{T}_n. \quad (7.233)$$

Эта матрица описывает следующее преобразование волн:

$$\begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix} = \hat{G}^{(N)} \begin{pmatrix} -C \\ D \end{pmatrix}. \quad (7.234)$$

Связь между входящими в структуру и выходящими из нее волнами дается матрицей $\hat{H}^{(N)}$ типа (7.69), которая может быть получена из матрицы $\hat{G}^{(N)}$ таким же образом, как это описано в разделе 7.2.2 (форм. (7.61)–(7.70)).

7.5. Общая схема расчета распространения одномерных волн через многослойные структуры

В рамках настоящей главы рассмотрено несколько задач, касающихся распространения одномерных волн через многослойные структуры. С первого взгляда может показаться, что решенные задачи являются довольно разнообразными. Однако, несмотря на видимое разнообразие, как постановка, так и ход решения приведенных задач имеют много общего. Поэтому в настоящем разделе перечислим наиболее общие правила, которыми следует руководствоваться при решении подобных задач. Последовательность действий представлена в виде следующих друг за другом шагов.

Сначала будем предполагать, что отдельные участки структуры являются однородными, то есть волновое число в пределах каждого участка остается постоянным. Шаги решения следующие.

Шаг № 1.

Из полной структуры выделить единичные участки и границы между ними. Полагается, что в пределах каждого участка волновое число остается постоянным.

Шаг № 2.

Для каждого участка определить волновое уравнение. Благодаря однородности участка это будет обычное волновое уравнение второго порядка с постоянным волновым числом.

Шаг № 3.

Для каждого участка решить волновое уравнение, найти два частных решения, соответствующие волнам, распространяющимся во встречных направлениях. В силу постоянства волнового числа в отсутствие диссипации это будут две экспоненты с противоположными по знаку показателями.

Шаг № 4.

Записать общую волновую функцию в виде суммы двух частных решений с постоянными коэффициентами.

Шаг № 5.

Найти производную по координате от основной волновой функции.

Шаг № 6.

Исходя из волноведущих свойств участка, записать волновые функции и их производные на обоих концах участка.

Шаг № 7.

Исходя из данных, полученных на шаге № 6, найти матрицы распространения, учитывая расстояние, проходимое волной в пределах участка. При этом следует учитывать порядок связи функций на концах участка, а также порядок связи распространяющихся волн, как это отмечено в разделах 7.1.4, 7.1.6.

Шаг № 8.

Записать граничные условия для всех границ. Для каждой отдельной границы это будет равенство волновых функций и равенство их производных по разные стороны от границы.

Шаг № 9.

Исходя из данных, записанных на шаге № 8, найти матрицы связи, соответствующие каждой границе.

Шаг № 10.

Записать результирующую матрицу в виде последовательного произведения матриц распространения и связи.

Шаг № 11.

Вычислить результирующую матрицу, выполняя умножение частных матриц от конца к началу. Если участки на шаге № 7 связывались в прямом направлении, то полученная результирующая матрица остается окончательной, если в обратном, то следует найти обратную результирующую матрицу.

Шаг № 12.

С помощью результирующей матрицы, исходя из амплитуд и фаз входящих в структуру волн, найти амплитуды и фазы волн, выходящих из структуры.

Приведенная последовательность шагов относится к случаю, когда участки являются однородными, то есть в пределах каждого участка волновое число остается постоянным. Если волновое число зависит от координаты, то решения волнового уравнения уже не будут напрямую выражаться через экспоненты, поэтому далее во все выражения, в том числе в результирующую матрицу, будут входить производные волно-

вых функций в общем виде. При этом следует пользоваться аппаратом, описанным в разделах 7.2.3–7.2.6. В любом случае действия шагов № 6–№ 12 будут оставаться прежними.

7.5.1. Замечание о волновых уравнениях высоких порядков

Следует заметить, что перечень приведенных в настоящей главе задач, даже в рамках одномерной волны, отнюдь не является исчерпывающим. Так, совершенно не затронуты вопросы диссипации, не рассмотрены какие-либо конкретные виды зависимости волнового числа от координаты. Волновое уравнение предполагается имеющим лишь второй порядок, свойственный струне, не сопротивляющейся изгибу [45, с. 23], тогда как при учете жесткости струны уравнение приобретает уже третий порядок [173, раздел 10, форм. (99)], [174, гл. 8, раздел 8.4.1, форм. (8.99)]:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - p \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + r \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 0. \tag{7.235}$$

Задача о поперечных колебаниях стержня приводит к уравнению четвертого порядка [45, с. 143, форм. (1)]:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \tag{7.236}$$

Четвертый порядок имеет также широко известное в теории упругости бигармоническое уравнение (например, статика изгиба пластинки, нагруженной по периметру [175, с. 53–56] и др.), структура которого, подобна координатной части волнового уравнения [175, с. 50, форм. (30)]:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \tag{7.237}$$

Замечание. Вообще говоря, авторам не известны динамические задачи, приводящие к волновому уравнению с координатной частью вида (7.237), однако поиск таких задач авторы могут предложить на выбор любознательному читателю.

Итак, можно полагать, что во всех приведенных выше случаях и других им подобных, порядок векторов и соответствующих матриц может быть больше двух, а количество граничных условий также увеличивается. Так, упомянутая выше задача о поперечных колебаниях стержня (7.236) требует четырех граничных условий [45, с. 145, форм. (4)–(5)], то есть в этом случае как векторы, так и матрицы могут иметь четвертый порядок. В то же время уравнение высоких порядков имеет больше двух частных решений (например, три или четыре), так что его решение может содержать кроме одной отраженной и одной проходящей дополнительные отраженные и проходящие волны.

Рассмотрение таких задач, в том числе возможной множественности дополнительных волн, выходит за рамки настоящей монографии, причем авторам неизвестны случаи их решения как для однородной

среды, так и для распространения волн в многослойных структурах, однако авторы рекомендуют любознательному читателю учитывать упомянутые выше возможности и не упускать случая познакомиться с ними, в том числе путем самостоятельных изысканий.

Выводы по главе 7

Глава посвящена применению метода матрицы для задач о распространении одномерной волны через многослойные структуры. Рассмотрено распространение волн в структуре из четырехполюсников. Полученные результаты обобщены на случай распространения встречных одномерных волн через структуру с произвольным числом слоев. Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрено применение метода матрицы на примере четырехполюсника, под которым понимается объект, имеющий два независимых входа и два независимых выхода. Соотношение между выходными и входными сигналами обусловлено свойствами четырехполюсника. По функциональному назначению выделены две осуществляемые четырехполюсником функции: распространение и связь. Согласно функции распространения входящий сигнал, распространяясь внутри четырехполюсника, трансформируется по законам, определяемым внутренними параметрами этого четырехполюсника. Согласно функции связи четырехполюсник осуществляет передачу сигнала с предыдущего четырехполюсника на последующий, следуя определенным правилам связи между собственным входом и выходом. Свойства тех и других видов четырехполюсников описываются матрицами распространения и матрицами связи. Четырехполюсники могут соединяться последовательно друг с другом, образуя цепочку, свойства которой определяются перемножением соответствующих матриц четырехполюсников, образуя единую результирующую матрицу.

2. Выявлена аналогия между распространением сигнала через цепочку четырехполюсников и распространением волны через многослойную волноведущую структуру. При этом четырехполюсникам распространения соответствуют единичные участки волноведущих сред, а четырехполюсникам связи — границы между такими участками, причем перемножение таких матриц дает единую результирующую матрицу.

3. Для четырехполюсника, как объекта, связывающего две пары контактов, первичную и вторичную, выделены два вида четырехполюсников, различающиеся ролью этих контактов. Если оба контакта первичной пары являются входными, а оба контакта вторичной — выходными, то такой четырехполюсник назван четырехполюсником α -типа. Если один из контактов первичной пары является входным, а другой — выходным, а для вторичной пары также один контакт является входным, а другой выходным, то такой четырехполюсник назван четырехполюсником β -типа. Показано, что свойства четырехполюсников

обоих видов могут быть описаны системой двух линейных алгебраических уравнений, решение которой дает матрицу распространения или матрицу связи, в зависимости от решаемой задачи и функционального назначения данного четырехполюсника.

4. Рассмотрена роль четырехполюсника как объекта, осуществляющего функциональную связь между четырьмя переменными величинами, в роли которых могут выступать входные или выходные сигналы, а также распространяющиеся волны и их производные. Показано, что в этом случае свойства четырехполюсников α и β типа описываются сходными системами уравнений, причем элементы матрицы, полученной для четырехполюсников одного типа могут быть выражены через элементы матрицы, полученной для четырехполюсников другого типа, причем такое выражение является взаимным.

5. Рассмотрена роль направления прохождения четырехполюсника. Показано, что прохождение четырехполюсника в прямом и обратном направлении описывается взаимно обратными матрицами, произведение которых равно единичной матрице.

6. Рассмотрено получение результирующей матрицы для цепочки из последовательно соединенных четырехполюсников. Отмечено, что в случае цепочки из четырехполюсников единого того или другого типа результирующая матрица представляет собой последовательное произведение матриц отдельных четырехполюсников, причем при вычислении результирующей матрицы умножение должно производиться от конца цепочки к ее началу, то есть от общего выхода к общему входу. Показано, что изменение направления прохождения каждого из четырехполюсников в отдельности при условии сохранения общего порядка прохождения цепочки в целом, приводит к получению результирующей матрицы, обратной той, которая получается при прямом прохождении каждого из четырехполюсников. Отмечено, что произведение прямой и обратной матриц равно единичной матрице.

7. Рассмотрено получение результирующей матрицы для цепочки, состоящей из четырехполюсников функционально различных видов. Отмечен важный случай цепочки из чередующихся четырехполюсников распространения и связи. Установлено, что результирующая матрица в этом случае также представляет собой последовательное произведение матриц следующих друг за другом четырехполюсников, причем при вычислении результирующей матрицы умножение должно производиться от конца цепочки к ее началу. Выявлены два вида цепочек: первый — цепочки, начинающиеся или заканчивающиеся матрицами распространения, второй — цепочки, начинающиеся или заканчивающиеся матрицами связи. Относительно распространяющихся волн первый вид соответствует цепочки, начинающейся со среды, второй — с границы. То же касается окончания цепочки. Отмечено, что в каждом из этих случаев начало и конец структуры следует рассматривать с учетом возбуждения и конечного приема волны, то есть учитывать

свойства (например, внутреннее сопротивление) возбуждающего генератора и регистрирующего приемника.

8. Рассмотрено применение матричного аппарата четырехполюсников для задач о распространении волны в структуре, состоящей из сред, разделенных границами. Относительно волны предполагается, что она является одномерной и описывается дифференциальным уравнением второго порядка, причем волновое число может иметь произвольную зависимость от координаты. При этом на структуру падают две волны встречных направлений и внутри каждой среды также распространяются встречные волны двух направлений. Встречные волны в единичной среде рассмотрены как два решения единого волнового уравнения для такой среды, причем входными сигналами для каждого участка являются исходная волновая функция и ее производная по координате. Получена результирующая матрица для двух сред, разделенных одной границей. Рассмотрены случаи прохождения единичных сред в прямом и обратном направлениях при условии сохранения порядка перемножения матриц от конца к началу. Установлено, что в обоих случаях получающиеся результирующие матрицы являются взаимно обратными, а их произведение равно единичной матрице. Рассмотрена общая структура матриц распространения (среды) и связи (границы), выраженных через исходные функции и их производные. Получена результирующая матрица для произвольного числа сред, представляющая собой произведение всей совокупности единичных матриц

9. Рассмотрено применение матричного аппарата четырехполюсников для задач о распространении волны в структуре, состоящей из сред, разделенных границами. Относительно волны предполагается, что она является одномерной и описывается дифференциальным уравнением второго порядка, причем волновое число является постоянным и может иметь различную величину для различных участков структуры. Отмечено, что в этом случае решением волнового уравнения являются две встречные волны, имеющие экспоненциальную зависимость от координаты. Для случая двух сред, разделенных одной границей, получены матрицы распространения и матрицы связи, а также результирующая матрица, являющаяся произведением обоих видов матриц. Задача решена для случая падения двух встречных волн на оба конца структуры. Отмечено, что по амплитудам полученное решение соответствует найденному ранее прямым методом. Для рассматриваемой задачи определены фазовые соотношения между падающей, проходящей и отраженной волнами, причем учтен выход падающей волны и ее прием в произвольных точках координатной оси. Показано, что набег фазы всех волн соответствует прохождению тех или других участков структуры в том или ином направлении. Полученные матрицы распространения и связи обобщены на случай произвольного номера среды и границы. Для случая трех сред, разделенных двумя границами, получены матрицы распространения и связи, а также результирующая матрица с учетом фазовых соотношений. Определены амплитуды

распространяющихся волн и отмечено их совпадение с результатами, найденными ранее прямым методом. Отмечено, что применение метода матрицы в этом случае приводит по сравнению с прямым методом к значительному уменьшению объема требуемых вычислений. Отмечено, что метод результирующей матрицы в принципе полностью решает задачу для произвольного числа границ, сводя ее к элементарной процедуре перемножения матриц.

10. Рассмотрен метод матрицы передачи, являющийся упрощенным вариантом полного метода результирующей матрицы. Отличием матрицы передачи от матриц распространения и связи является то, что здесь не делается различия между волнами, входящими в участок среды и выходящими из него, а рассматриваются волны по отношению к началу и концу участка среды, или по отношению к одной и другой сторонам границы. Отмечено, что получение результирующей матрицы передачи полностью аналогично получению результирующей матрицы для цепочки из четырехполюсников, в которой матрицы связи являются единичными. Рассмотрены матрицы передачи для распространения встречных одномерных волн экспоненциального типа в структурах из двух сред, разделенных одной границей, а также из трех сред, разделенных двумя границами. Установлена тождественность получаемых решений с таковыми, найденными для тех же задач прямым методом. Полученные результаты обобщены на случай падения одной волны на многослойную структуру. Получены амплитуды проходящей и отраженной волн, на основе которых найдены коэффициенты отражения и прохождения по амплитудам и по энергиям. В качестве еще более упрощенного варианта предложено использовать в качестве единичного элемента структуры единичный участок среды с прилегающей к нему границей. Для этого случая приведено получение матрицы передачи для произвольного числа сред. Отмечено совпадение амплитуд волн, получаемых методом матрицы передачи, с подобными амплитудами, получаемыми прямым методом.

11. Приведена общая схема расчета распространения одномерных волн через многослойные структуры. Отмечена общность рассмотренных задач и приведен подробный пошаговый алгоритм использования матричного метода для случая волнового уравнения второго порядка с постоянным волновым числом. Отмечена возможность использования подобного алгоритма в случае, когда волновое число зависит от координаты. Рассмотрена возможность расширения круга рассматриваемых задач для одномерных волн. Приведены примеры волновых уравнений третьего и четвертого порядков. Отмечено, что при решении подобных задач как векторы, так и матрицы приобретают порядок, соответствующий порядку уравнения, а число граничных условий также должно равняться порядку уравнения. Рассмотрение подобных задач предложено в качестве перспективы для дальнейшего развития работы.

Глава 8

МЕТОД РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Глава посвящена применению метода матрицы для задач о распространении электромагнитной волны через многослойные структуры. Рассмотрены случаи нормального и наклонного падения волны с продольной и поперечной поляризациями. Для всех случаев получены результирующие матрицы для структур, содержащих от двух до пяти сред, а также общая структура матрицы для произвольного числа сред. Получены коэффициенты прохождения, отражения и обобщенного выхода.

В тексте главы использованы материалы монографии [49], а также статей [67, 74]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

8.1. Особенности распространения электромагнитных волн через многослойные структуры

Настоящая глава посвящена применению метода матрицы для решения задач о распространении электромагнитных волн через многослойные структуры. Как и для прямого метода (глава 5), аппарат для электромагнитных волн, в основном базируется на аппарате для одномерных волн. Главная особенность состоит в том, что в качестве двух элементов при матричном представлении компонент волнового вектора здесь используются не основная волновая функция и ее производная, как это было для одномерных волн, а электрическое и магнитное поля единой электромагнитной волны, связанные уравнениями электродинамики.

В качестве элемента связи этих полей для гармонической волны выступает волновой импеданс (1.258), позволяющий связать электрическое и магнитное поля волны линейными соотношениями, в декартовой системе координат имеющими вид (1.268)–(1.279). При этом магнитное поле с точностью до постоянного коэффициента равно производной по координате от электрического, а электрическое — аналогичной производной от магнитного в соответствии с соотношениями (1.240)–(1.245).

Таким образом, как показано в разделе 3.2.11, электродинамические задачи в значительной степени могут быть сведены к задачам одномерным путем замены волновых чисел соответствующими импе-

дансами с учетом углов, определяющих величину наклона и характер поляризации распространяющихся волн (таблица 3.1).

Единство задач об одномерных и электромагнитных волнах позволяет обобщить результаты, полученные в предыдущей главе для одномерных волн на случай электромагнитных волн. Поэтому не будем далее вдаваться в излишние подробности, а приведем лишь основную схему расчета и главные результаты для случаев нормального и наклонного падения электромагнитных волн продольной и поперечной поляризации. Начнем с нормального падения, после чего перейдем к наклонному.

8.2. Нормальное падение электромагнитной волны на структуру, содержащую произвольное число сред

Начнем рассмотрение распространения электромагнитных волн через многослойную структуру с наиболее простого случая нормального падения исходной волны.

8.2.1. Общая геометрия нормального падения

Рассмотрим нормальное падение электромагнитной волны на структуру, состоящую из N плоскопараллельных сред, разделенных $N - 1$ границами. Геометрия задачи совпадает с рассмотренной в разделе 5.3.2 и на примере пяти сред, разделенных четырьмя границами, представлена на рис. 5.5 [[48, с. 60, рис. 4.1], [49, с. 80, рис. 4.1]]. Ввиду тождественности геометрии, рис. 5.5 здесь не повторяем, а кратко охарактеризуем геометрию словами.

Так, декартова система координат $Oxyz$ выбрана таким образом, что плоскость Oxy параллельна плоскостям слоев, а ось Ox им перпендикулярна. Структура начинается при координате x_0 и заканчивается при координате x_N . Начальное значение координаты соответственно обозначено как x_0 , конечное — x_N . Все волны распространяются вдоль оси Ox в положительном или отрицательном направлении. Заданные изначально направления векторов электрического поля вдоль оси Oy и магнитного поля вдоль оси Oz в течение всего процесса распространения волны сохраняются постоянными. При прохождении через границу направления векторов электрического и магнитного полей волны сохраняются. При отражении от границы направление вектора электрического поля сохраняется, а направление вектора магнитного поля меняется на противоположное. Отражение волн на краях структуры при x_0 и x_N отсутствует. Координаты границ обозначены через x_n , где n — номер соответствующей границы.

На структуру падают две встречные волны одинаковой поляризации: одна из точки x_0 в положительном направлении оси Ox , имеющая амплитуду A_1 , другая — из точки x_N в отрицательном направлении с амплитудой B_N .

8.2.2. Результирующая матрица при произвольном числе сред

Поскольку метод матрицы позволяет вычислять матрицы распространения и связи для каждой отдельной границы и среды независимо друг от друга, рассмотрим границу с номером n , разделяющую среды с номерами n и $n + 1$.

Координатные составляющие полей по обе стороны от этой границы имеют вид:

$$E_{ny} = A_n e^{-ik_n x} + B_n e^{ik_n x}; \quad (8.1)$$

$$H_{nz} = \frac{A_n}{Z_n} e^{-ik_n x} - \frac{B_n}{Z_n} e^{ik_n x}; \quad (8.2)$$

$$E_{(n+1)y} = A_{n+1} e^{-ik_{n+1} x} + B_{n+1} e^{ik_{n+1} x}; \quad (8.3)$$

$$H_{(n+1)z} = \frac{A_{n+1}}{Z_{n+1}} e^{-ik_{n+1} x} - \frac{B_{n+1}}{Z_{n+1}} e^{ik_{n+1} x}. \quad (8.4)$$

Граничные условия имеют вид:

$$E_{ny}|_{x=0} = E_{(n+1)y}|_{x=0}; \quad (8.5)$$

$$H_{nz}|_{x=0} = H_{(n+1)z}|_{x=0}. \quad (8.6)$$

Подстановка решений (8.1)–(8.4) в граничные условия (8.5)–(8.6) дает систему уравнений для амплитуд:

$$A_n + B_n = A_{n+1} + B_{n+1}; \quad (8.7)$$

$$\frac{A_n}{Z_n} - \frac{B_n}{Z_n} = \frac{A_{n+1}}{Z_{n+1}} - \frac{B_{n+1}}{Z_{n+1}}, \quad (8.8)$$

решение которой относительно A_n и B_n , аналогично решению системы (7.111)–(7.112) в виде (7.113)–(7.114), дает матрицу связи подобную (7.115), для границы с номером n :

$$\hat{A}_n = \left(\begin{array}{c|c} \frac{Z_n + Z_{n+1}}{2Z_{n+1}} & -\frac{Z_n - Z_{n+1}}{2Z_{n+1}} \\ \hline -\frac{Z_n - Z_{n+1}}{2Z_{n+1}} & \frac{Z_n + Z_{n+1}}{2Z_{n+1}} \end{array} \right). \quad (8.9)$$

Записывая соотношения, подобные (7.118)–(7.121), из которых выделяем матрицу, подобную (7.122), получаем матрицу распространения для среды с номером n :

$$\hat{C}_n = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_n d_n} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_n d_n} \end{array} \right), \quad (8.10)$$

где

$$d_n = x_n - x_{n-1}. \quad (8.11)$$

Матрица распространения для среды с номером N , имеет вид:

$$\hat{C}_N = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_N d_N} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_N d_N} \end{array} \right), \quad (8.12)$$

где

$$d_N = x_N - x_{N-1}. \quad (8.13)$$

Таким образом, аналогично (7.144), получаем результирующую матрицу $\widehat{G}^{(N)}$ в виде:

$$\begin{aligned} \widehat{G}^{(N)} &= \left(\prod_{n=1}^{N-1} \widehat{C}_n \widehat{A}_n \right) \widehat{C}_N = \\ &= \left[\prod_{n=1}^{N-1} \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_n d_n} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_n d_n} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \frac{Z_n + Z_{n+1}}{2Z_{n+1}} & -\frac{Z_n - Z_{n+1}}{2Z_{n+1}} \\ \hline -\frac{Z_n - Z_{n+1}}{2Z_{n+1}} & \frac{Z_n + Z_{n+1}}{2Z_{n+1}} \end{array} \right) \right] \times \\ &\quad \times \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_N d_N} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_N d_N} \end{array} \right). \quad (8.14) \end{aligned}$$

Подобно (7.146), это выражение можно привести к виду:

$$\begin{aligned} \widehat{G}^{(N)} &= \left[\prod_{n=1}^{N-1} \left(\begin{array}{c|c} \frac{Z_n + Z_{n+1}}{2Z_{n+1}} e^{ik_n d_n} & -\frac{Z_n - Z_{n+1}}{2Z_{n+1}} e^{ik_n d_n} \\ \hline -\frac{Z_n - Z_{n+1}}{2Z_{n+1}} e^{-ik_n d_n} & \frac{Z_n + Z_{n+1}}{2Z_{n+1}} e^{-ik_n d_n} \end{array} \right) \right] \times \\ &\quad \times \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_N d_N} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_N d_N} \end{array} \right). \quad (8.15) \end{aligned}$$

Полученная матрица $\widehat{G}^{(N)}$ связывает амплитуды A_1 , B_1 с амплитудами A_N , B_N соотношением вида:

$$\left(\begin{array}{c} A_1 \\ -B_1 \end{array} \right) = \widehat{G}^{(N)} \left(\begin{array}{c} A_N \\ -B_N \end{array} \right), \quad (8.16)$$

тогда как основной целью задачи является нахождение амплитуд A_N и B_1 , при условии, что заданы амплитуды A_1 и B_N , то есть надо найти результирующую матрицу $\widehat{H}^{(N)}$ такую, что:

$$\left(\begin{array}{c} B_1 \\ A_N \end{array} \right) = \widehat{H}^{(N)} \left(\begin{array}{c} A_1 \\ -B_N \end{array} \right). \quad (8.17)$$

Это можно сделать, выполняя в (8.14) или (8.15) все последовательные умножения от конца к началу и записывая получившуюся матрицу $\widehat{G}^{(N)}$ через ее элементы:

$$\widehat{G}^{(N)} = \left(\begin{array}{c|c} g_{11}^{(N)} & g_{12}^{(N)} \\ \hline g_{21}^{(N)} & g_{22}^{(N)} \end{array} \right). \quad (8.18)$$

После этого искомая результирующая матрица $\widehat{H}^{(N)}$ находится из (8.18) с помощью соотношения, подобного (7.148):

$$\widehat{H}^{(N)} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} & \frac{g_{11}^{(N)}g_{22}^{(N)} - g_{12}^{(N)}g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \\ \hline \frac{1}{g_{11}^{(N)}} & -\frac{g_{12}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \end{array} \right), \quad (8.19)$$

подстановка которого в (8.17), подобно (7.150)–(7.151), дает полное решение исходной электродинамической задачи для N сред в виде:

$$B_1 = \frac{g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} A_1 + \frac{g_{11}^{(N)}g_{22}^{(N)} - g_{12}^{(N)}g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} B_N; \quad (8.20)$$

$$A_N = \frac{1}{g_{11}^{(N)}} A_1 - \frac{g_{12}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} B_N. \quad (8.21)$$

При этом поля волн в крайних средах структуры в соответствии с (8.1)–(8.4) равны:

$$E_{1y} = A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + B_1 e^{ik_1(x-x_0)}; \quad (8.22)$$

$$H_{1z} = \frac{A_1}{Z_1} e^{-ik_1(x-x_0)} - \frac{B_1}{Z_1} e^{ik_1(x-x_0)}; \quad (8.23)$$

$$E_{Ny} = A_N e^{-ik_N(x-x_N)} + B_N e^{ik_N(x-x_N)}; \quad (8.24)$$

$$H_{Nz} = \frac{A_N}{Z_N} e^{-ik_N(x-x_N)} - \frac{B_N}{Z_N} e^{ik_N(x-x_N)}, \quad (8.25)$$

где амплитуды A_1 и B_N полагаются заданными, а амплитуды B_1 и A_N определяются выражениями (8.20)–(8.21).

8.2.3. Нормальное падение в случае двух–пяти сред

Рассмотрим теперь приложение описанного матричного метода к частным случаям двух–пяти сред.

Две среды

В случае двух сред и одной границы $N = 2$, $N - 1 = 1$.

Результирующая матрица $\widehat{G}^{(2)}$ имеет вид:

$$\widehat{G}^{(2)} = \widehat{C}_1 \widehat{A}_1 \widehat{C}_2, \quad (8.26)$$

где

$$\widehat{C}_1 = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_1 d_1} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_1 d_1} \end{array} \right); \quad (8.27)$$

$$\widehat{A}_1 = \left(\begin{array}{c|c} \frac{Z_1 + Z_2}{2Z_2} & -\frac{Z_1 - Z_2}{2Z_2} \\ \hline -\frac{Z_1 - Z_2}{2Z_2} & \frac{Z_1 + Z_2}{2Z_2} \end{array} \right); \quad (8.28)$$

$$\widehat{C}_2 = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_2 d_2} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_2 d_2} \end{array} \right). \quad (8.29)$$

Выполняя умножение, получаем элементы матрицы $\widehat{G}^{(2)}$:

$$g_{11}^{(2)} = \frac{Z_1 + Z_2}{2Z_2} e^{i(k_1 d_1 + k_2 d_2)}; \quad (8.30)$$

$$g_{12}^{(2)} = -\frac{Z_1 - Z_2}{2Z_2} e^{i(k_1 d_1 - k_2 d_2)}; \quad (8.31)$$

$$g_{21}^{(2)} = -\frac{Z_1 - Z_2}{2Z_2} e^{i(-k_1 d_1 + k_2 d_2)}; \quad (8.32)$$

$$g_{22}^{(2)} = \frac{Z_1 + Z_2}{2Z_2} e^{i(-k_1 d_1 - k_2 d_2)}. \quad (8.33)$$

С помощью (8.19) получаем элементы матрицы $\widehat{H}^{(2)}$:

$$h_{11} = -\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} e^{-i2k_1 d_1}; \quad (8.34)$$

$$h_{12} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} e^{i(-k_1 d_1 - k_2 d_2)}; \quad (8.35)$$

$$h_{21} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} e^{i(-k_1 d_1 - k_2 d_2)}; \quad (8.36)$$

$$h_{22} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} e^{-i2k_2 d_2}. \quad (8.37)$$

Таким образом, получаем амплитуды волн, выходящих из структуры, в виде:

$$B_1 = -A_1 \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} e^{-i2k_1 d_1} + B_2 \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} e^{-i(k_1 d_1 + k_2 d_2)}; \quad (8.38)$$

$$A_2 = A_1 \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} e^{-i(k_1 d_1 + k_2 d_2)} + B_2 \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} e^{-i2k_2 d_2}. \quad (8.39)$$

При этом поля волн в крайних средах структуры определяются выражениями (8.1)–(8.4) при $N = 2$.

Из сравнения с данными раздела 2.2.1 (формулы (2.58)–(2.67)), можно видеть, что полученные выражения (8.38)–(8.39) с точностью до показателей экспонент совпадают с полученными прямым методом. Особенно ясное совпадение видно, если в формулах (8.38)–(8.39) положить $B_2 = 0$ и подставить их в выражения для полей (8.1)–(8.4). Некоторое различие показателей обусловлено различием точек исхода волн в обеих задачах, а физический смысл полученных здесь экспонент совпадает с таковым для выражений (7.135)–(7.136) с приведенной в разделе 7.3.4 расшифровкой.

Три среды

В случае трех сред и двух границ $N = 3$, $N - 1 = 2$.

Результирующая матрица $\widehat{G}^{(3)}$ имеет вид:

$$\widehat{G}^{(3)} = \widehat{C}_1 \widehat{A}_1 \widehat{C}_2 \widehat{A}_2 \widehat{C}_3, \quad (8.40)$$

то есть

$$\widehat{G}^{(3)} = \widehat{G}^{(2)} \widehat{A}_2 \widehat{C}_3, \quad (8.41)$$

где

$$\widehat{A}_2 = \left(\begin{array}{c|c} \frac{Z_2 + Z_3}{2Z_3} & -\frac{Z_2 - Z_3}{2Z_3} \\ \hline -\frac{Z_2 - Z_3}{2Z_3} & \frac{Z_2 + Z_3}{2Z_3} \end{array} \right); \quad (8.42)$$

$$\widehat{C}_3 = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_3 d_3} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_3 d_3} \end{array} \right), \quad (8.43)$$

а $\widehat{G}^{(2)}$ определяется выражением (8.26).

Выполняя умножение, получаем:

$$g_{11}^{(3)} = g_{11}^{(2)} \frac{Z_2 + Z_3}{2Z_3} e^{ik_3 d_3} - g_{12}^{(2)} \frac{Z_2 - Z_3}{2Z_3} e^{ik_3 d_3}; \quad (8.44)$$

$$g_{12}^{(3)} = -g_{11}^{(2)} \frac{Z_2 - Z_3}{2Z_3} e^{-ik_3 d_3} + g_{12}^{(2)} \frac{Z_2 + Z_3}{2Z_3} e^{-ik_3 d_3}; \quad (8.45)$$

$$g_{21}^{(3)} = g_{21}^{(2)} \frac{Z_2 + Z_3}{2Z_3} e^{ik_3 d_3} - g_{22}^{(2)} \frac{Z_2 - Z_3}{2Z_3} e^{ik_3 d_3}; \quad (8.46)$$

$$g_{22}^{(3)} = -g_{21}^{(2)} \frac{Z_2 - Z_3}{2Z_3} e^{-ik_3 d_3} + g_{22}^{(2)} \frac{Z_2 + Z_3}{2Z_3} e^{-ik_3 d_3}. \quad (8.47)$$

Раскрывая эти выражения с помощью (8.30)–(8.33), получаем:

$$g_{11}^{(3)} = \frac{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3)}{4Z_2 Z_3} e^{i(k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3)} + \frac{(Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)}{4Z_2 Z_3} e^{i(k_1 d_1 - k_2 d_2 + k_3 d_3)}; \quad (8.48)$$

$$g_{12}^{(3)} = -\frac{(Z_1 + Z_2)(Z_2 - Z_3)}{4Z_2 Z_3} e^{i(k_1 d_1 + k_2 d_2 - k_3 d_3)} - \frac{(Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3)}{4Z_2 Z_3} e^{i(k_1 d_1 - k_2 d_2 - k_3 d_3)}; \quad (8.49)$$

$$g_{21}^{(3)} = -\frac{(Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3)}{4Z_2 Z_3} e^{i(-k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3)} - \frac{(Z_1 + Z_2)(Z_2 - Z_3)}{4Z_2 Z_3} e^{i(-k_1 d_1 - k_2 d_2 + k_3 d_3)}; \quad (8.50)$$

$$g_{22}^{(3)} = \frac{(Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)}{4Z_2 Z_3} e^{i(-k_1 d_1 + k_2 d_2 - k_3 d_3)} + \frac{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3)}{4Z_2 Z_3} e^{i(-k_1 d_1 - k_2 d_2 - k_3 d_3)}. \quad (8.51)$$

Из этих выражений находим элементы матрицы $\widehat{H}^{(3)}$ в виде:

$$h_{11} = -\frac{(Z_1 + Z_2)(Z_2 - Z_3) \cdot e^{-ik_2 d_2} + (Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3) \cdot e^{ik_2 d_2}}{(Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3) \cdot e^{-ik_2 d_2} + (Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) \cdot e^{ik_2 d_2}} e^{-i2k_1 d_1}; \quad (8.52)$$

$$h_{12} = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)e^{-ik_2d_2} + (Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3)e^{ik_2d_2}} e^{-i(k_1d_1 + k_3d_3)}; \quad (8.53)$$

$$h_{21} = \frac{4Z_2Z_3}{(Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)e^{-ik_2d_2} + (Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3)e^{ik_2d_2}} e^{-i(k_1d_1 + k_3d_3)}; \quad (8.54)$$

$$h_{22} = -\frac{(Z_1 + Z_2)(Z_2 - Z_3) \cdot e^{-ik_2d_2} + (Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3) \cdot e^{ik_2d_2}}{(Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3) \cdot e^{-ik_2d_2} + (Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) \cdot e^{ik_2d_2}} e^{-i2k_3d_3}. \quad (8.55)$$

Из этих выражений, аналогично (8.38)–(8.39), можно найти амплитуды волн, выходящих из структуры, совпадающие с полученными прямым методом (раздел 5.3.7, подраздел «структура из трех сред»).

Четыре среды

В случае четырех сред и трех границ $N = 4$, $N - 1 = 3$.

Результирующая матрица $\hat{G}^{(4)}$ имеет вид:

$$\hat{G}^{(3)} = \hat{C}_1 \hat{A}_1 \hat{C}_2 \hat{A}_2 \hat{C}_3 \hat{A}_3 \hat{C}_4, \quad (8.56)$$

то есть

$$\hat{G}^{(4)} = \hat{G}^{(3)} \hat{A}_3 \hat{C}_4, \quad (8.57)$$

где

$$\hat{A}_3 = \begin{pmatrix} \frac{Z_3 + Z_4}{2Z_4} & -\frac{Z_3 - Z_4}{2Z_4} \\ -\frac{Z_3 - Z_4}{2Z_4} & \frac{Z_3 + Z_4}{2Z_4} \end{pmatrix}; \quad (8.58)$$

$$\hat{C}_4 = \begin{pmatrix} e^{ik_4d_4} & 0 \\ 0 & e^{-ik_4d_4} \end{pmatrix}, \quad (8.59)$$

а $\hat{G}^{(3)}$ определяется выражением (8.41).

При этом получаем:

$$g_{11}^{(4)} = g_{11}^{(3)} \frac{Z_3 + Z_4}{2Z_4} e^{ik_4d_4} - g_{12}^{(3)} \frac{Z_3 - Z_4}{2Z_4} e^{ik_4d_4}; \quad (8.60)$$

$$g_{12}^{(4)} = -g_{11}^{(3)} \frac{Z_3 - Z_4}{2Z_4} e^{-ik_4d_4} + g_{12}^{(3)} \frac{Z_3 + Z_4}{2Z_4} e^{-ik_4d_4}; \quad (8.61)$$

$$g_{21}^{(4)} = g_{21}^{(3)} \frac{Z_3 + Z_4}{2Z_4} e^{ik_4d_4} - g_{22}^{(3)} \frac{Z_3 - Z_4}{2Z_4} e^{ik_4d_4}; \quad (8.62)$$

$$g_{22}^{(4)} = -g_{21}^{(3)} \frac{Z_3 - Z_4}{2Z_4} e^{-ik_4d_4} + g_{22}^{(3)} \frac{Z_3 + Z_4}{2Z_4} e^{-ik_4d_4}. \quad (8.63)$$

Использование этих выражений для нахождения матрицы $\hat{H}^{(4)}$, аналогично приведенному выше для двух и трех сред, дает амплитуды волн, совпадающие с полученными прямым методом (раздел 5.3.7, подраздел «структура из четырех сред»). Эти выражения ввиду их громоздкости здесь не приводятся.

Пять сред

В случае пяти сред и четырех границ $N = 5$, $N - 1 = 4$.

Результирующая матрица $\widehat{G}^{(5)}$ имеет вид:

$$\widehat{G}^{(5)} = \widehat{G}^{(4)} \widehat{A}_3 \widehat{C}_4, \quad (8.64)$$

где элементы матрицы $G^{(4)}$ определяются выражениями (8.60)–(8.63).

Все остальные действия аналогичны, поэтому приведем здесь только элементы матрицы $\widehat{G}^{(5)}$, которые получаются из (8.60)–(8.63) увеличением всех индексов на единицу:

$$g_{11}^{(5)} = g_{11}^{(4)} \frac{Z_4 + Z_5}{2Z_5} e^{ik_5 d_5} - g_{12}^{(4)} \frac{Z_4 - Z_5}{2Z_5} e^{ik_5 d_5}; \quad (8.65)$$

$$g_{12}^{(5)} = -g_{11}^{(4)} \frac{Z_4 - Z_5}{2Z_5} e^{-ik_5 d_5} + g_{12}^{(4)} \frac{Z_4 + Z_5}{2Z_5} e^{-ik_5 d_5}; \quad (8.66)$$

$$g_{21}^{(5)} = g_{21}^{(4)} \frac{Z_4 + Z_5}{2Z_5} e^{ik_5 d_5} - g_{22}^{(4)} \frac{Z_4 - Z_5}{2Z_5} e^{ik_5 d_5}; \quad (8.67)$$

$$g_{22}^{(5)} = -g_{21}^{(4)} \frac{Z_4 - Z_5}{2Z_5} e^{-ik_5 d_5} + g_{22}^{(4)} \frac{Z_4 + Z_5}{2Z_5} e^{-ik_5 d_5}. \quad (8.68)$$

Остальные вычисления аналогичны и приводят к выражениям для амплитуд, совпадающим с полученными прямым методом (раздел 5.3.6).

8.2.4. Замечание о произвольном числе сред

Как видим, процедура последовательно получения элементов результирующих матриц $\widehat{G}^{(N)}$ для случая трех, четырех и пяти сред аналогична и сводится к последовательному увеличению на единицу индексов переменных, входящих в выражения типа (8.60)–(8.63) и (8.65)–(8.68). Общий вид последовательных выражений для элементы матрицы $\widehat{G}^{(n+1)}$, получаемых из элементов матрицы $\widehat{G}^{(n)}$, следующий:

$$g_{11}^{(n+1)} = g_{11}^{(n)} \frac{Z_n + Z_{n+1}}{2Z_{n+1}} e^{ik_{n+1} d_{n+1}} - g_{12}^{(n)} \frac{Z_n - Z_{n+1}}{2Z_{n+1}} e^{ik_{n+1} d_{n+1}}; \quad (8.69)$$

$$g_{12}^{(n+1)} = -g_{11}^{(n)} \frac{Z_n - Z_{n+1}}{2Z_{n+1}} e^{-ik_{n+1} d_{n+1}} + g_{12}^{(n)} \frac{Z_n + Z_{n+1}}{2Z_{n+1}} e^{-ik_{n+1} d_{n+1}}; \quad (8.70)$$

$$g_{21}^{(n+1)} = g_{21}^{(n)} \frac{Z_n + Z_{n+1}}{2Z_4} e^{ik_{n+1} d_{n+1}} - g_{22}^{(n)} \frac{Z_n - Z_{n+1}}{2Z_{n+1}} e^{ik_{n+1} d_{n+1}}; \quad (8.71)$$

$$g_{22}^{(n+1)} = -g_{21}^{(n)} \frac{Z_n - Z_{n+1}}{2Z_{n+1}} e^{-ik_{n+1} d_{n+1}} + g_{22}^{(n)} \frac{Z_n + Z_{n+1}}{2Z_{n+1}} e^{-ik_{n+1} d_{n+1}}. \quad (8.72)$$

Единообразность этой процедуры позволяет путем последовательных вычислений получить матрицу $\widehat{G}^{(N)}$ для любого произвольного числа сред. После этого для окончательного решения задачи остается только преобразовать эту матрицу в матрицу типа $\widehat{H}^{(N)}$, что также достигается стандартной процедурой с использованием общего вида этой матрицы (8.19).

Заметим, что такой прием последовательного вычисления матриц фактически является аналогом подобного приема последовательных вычислений элементов матрицы $\widehat{G}^{(N)}$ для одномерной волны, даваемого соотношением (7.146). Этот прием является универсальным и применим как к одномерной волне, так и к различным типам других волн, задача о распространении которых может быть сведена к одномерной.

8.3. Наклонное падение электромагнитной волны продольной поляризации

В этом разделе обратимся к более сложным случаям падения волны на плоскость структуры, а именно — наклонного падения волны сначала с продольной, а затем и поперечной поляризациями. При распространении волн через границы между средами их геометрические параметры, такие как углы отражения, остаются равными углам падения, а углы прохождения, то есть преломления, определяются законом Снеллиуса. При этом ни те, ни другие от характера поляризации не зависят, поэтому начнем с их рассмотрения в общем виде.

8.3.1. Общая геометрия наклонного падения

Рассмотрим наклонное падение электромагнитной волны продольной поляризации на структуру, состоящую из N плоскопараллельных сред, разделенных $N - 1$ границами. Геометрия задачи совпадает с рассмотренной в разделе 5.3.3 и на примере пяти сред, разделенных четырьмя границами, представлена на рис. 5.6 [48, с. 62, рис. 4.2], [49, с. 91, рис. 4.2]. Ввиду тождественности геометрии, рис. 5.6 здесь не повторяем, а кратко охарактеризуем геометрию словами.

Выбор декартовой системы координат $Oxyz$ и принцип обозначения волновых векторов и полей аналогичен случаю нормального падения. Ось Ox ориентирована по нормали к плоскостям сред, ось Oy определяет плоскость падения волны. Ось Oz этой плоскости перпендикулярна. При продольной поляризации векторы электрических полей всех волн лежат в плоскости падения, то есть в плоскости Oxy . Векторы магнитных полей всех сред направлены вдоль оси Oz . При этом траектории распространяющихся волн показаны на рис. 5.6 вне пунктирных рамок.

Рассматривается падение на структуру двух встречных волн: одна из точки x_0 в положительном направлении оси Ox , имеющая амплитуду A_1 , другая — из точки x_N в отрицательном направлении с амплитудой B_N .

Обозначим угол входа волны A_1 в структуру в среде 1 (угол падения) через θ_1 , а угол выхода той же волны после прохождения структуры в среде N через ϑ_N . Для волны B_N угол входа обозначим через θ_N , а угол выхода через ϑ_N . Ограничимся случаем, когда $\theta_N = \vartheta_1$. При этом в силу симметрии задачи также будет $\vartheta_N = \theta_1$,

то есть обе волны, преломляясь, будут распространяться внутри структуры по одной и той же траектории во встречных направлениях. При этом в каждой среде волновые фронты волн обоих направлений будут параллельны друг другу и углы преломления обеих волн также будут совпадать. Будем обозначать такие совпадающие углы через θ_n , где n — номер среды.

8.3.2. Углы прохождения и отражения

Так как обе волны при распространении испытывают многочисленные преломления, то в качестве предварительного этапа решения задачи следует определить углы преломления в соответствии с законом Снеллиуса. Как это сделать, подробно пояснено в разделе 2.2.4. Так, для падения волны на одну границу между двумя средами № 1 и № 2, угол преломления θ_2 связан с углом падения θ_1 соотношениями (2.87), (2.88):

$$\sin \theta_2 = \frac{k_1 \sin \theta_1}{k_2}; \quad (8.73)$$

$$\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1}}{k_2}. \quad (8.74)$$

В случае электромагнитной волны волновое число определяется параметрами среды в соответствии с соотношением (1.253):

$$k_{1,2} = \omega \sqrt{\varepsilon_{1,2} \varepsilon_0 \mu_{1,2} \mu_0}. \quad (8.75)$$

При этом условие действительности θ_2 требует положительности подкоренного выражения в формуле (8.74), откуда получается ограничение максимального значения θ_1 величиной (2.92)

$$\theta_{1 \max} = \arcsin \left(\frac{k_2}{k_1} \right), \quad (8.76)$$

выше которой волна не проходит, а целиком отражается, так что наступает полное внутреннее отражение [4, с. 483–484, рис. 24.2].

В настоящей монографии более подробно этот вопрос рассмотрен в разделе 2.2.4, так что здесь будем заведомо предполагать, что угол падения θ_1 меньше максимума, определяемого формулой (8.76), так что волна не только отражается, но и проходит.

В рамках настоящего рассмотрения будем полагать, что это же предположение касается всех границ полной волноведущей структуры, так что в конечном результате волна проходит насквозь через всю структуру.

Итак, далее будем полагать, что все углы θ_n уже известны.

8.3.3. Результирующая матрица при произвольном числе сред

Действуя аналогично случаю нормального падения с учетом замен коэффициентов и переменных для случая продольной поляризации, приведенных в разделе 3.2.11 (таблица 3.1), аналогично случаю нор-

мального падения для среды с номером n получаем матрицу распространения:

$$\widehat{C}_n = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_n d_n \cos \theta_n} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_n d_n \cos \theta_n} \end{array} \right), \quad (8.77)$$

а для границы с тем же номером, разделяющей среды с номерами n и $n + 1$, получаем матрицу связи:

$$\widehat{A}_n = \left(\begin{array}{c|c} \frac{Z_n \cos \theta_n + Z_{n+1} \cos \theta_{n+1}}{2Z_{n+1} \cos \theta_{n+1}} & -\frac{Z_n \cos \theta_n - Z_{n+1} \cos \theta_{n+1}}{2Z_{n+1} \cos \theta_{n+1}} \\ \hline -\frac{Z_n \cos \theta_n - Z_{n+1} \cos \theta_{n+1}}{2Z_{n+1} \cos \theta_{n+1}} & \frac{Z_n \cos \theta_n + Z_{n+1} \cos \theta_{n+1}}{2Z_{n+1} \cos \theta_{n+1}} \end{array} \right). \quad (8.78)$$

Матрица распространения для среды с номером N имеет вид:

$$\widehat{C}_N = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_N d_N \cos \theta_N} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_N d_N \cos \theta_N} \end{array} \right). \quad (8.79)$$

Таким образом, результирующая матрица $\widehat{G}^{(N)}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \widehat{G}^{(N)} &= \left(\prod_{n=1}^{N-1} \widehat{C}_n \widehat{A}_n \right) \widehat{C}_N = \\ &= \left[\prod_{n=1}^{N-1} \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_n d_n \cos \theta_n} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_n d_n \cos \theta_n} \end{array} \right) \times \right. \\ &\quad \times \left. \left(\begin{array}{c|c} \frac{Z_n \cos \theta_n + Z_{n+1} \cos \theta_{n+1}}{2Z_{n+1} \cos \theta_{n+1}} & -\frac{Z_n \cos \theta_n - Z_{n+1} \cos \theta_{n+1}}{2Z_{n+1} \cos \theta_{n+1}} \\ \hline -\frac{Z_n \cos \theta_n - Z_{n+1} \cos \theta_{n+1}}{2Z_{n+1} \cos \theta_{n+1}} & \frac{Z_n \cos \theta_n + Z_{n+1} \cos \theta_{n+1}}{2Z_{n+1} \cos \theta_{n+1}} \end{array} \right) \right] \times \\ &\quad \times \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_N d_N \cos \theta_N} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_N d_N \cos \theta_N} \end{array} \right). \quad (8.80) \end{aligned}$$

Записывая матрицу $\widehat{G}^{(N)}$ через элементы, с помощью матрицы $\widehat{H}^{(N)}$ можно найти амплитуды волн в виде, аналогичном (8.20)–(8.21), откуда опять с помощью замен определяем амплитуды волн продольной поляризации:

$$B_1 = \frac{g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} A_1 + \frac{g_{11}^{(N)} g_{22}^{(N)} - g_{12}^{(N)} g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} B_N \frac{\cos \theta_N}{\cos \theta_1}; \quad (8.81)$$

$$A_N = \frac{1}{g_{11}^{(N)}} A_1 \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_N} - \frac{g_{12}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} B_N. \quad (8.82)$$

При этом поля волн в крайних средах структуры, определяются выражениями, подобными (5.244)–(5.246):

$$E_{1x} = A_1 \sin \theta_1 e^{-ik_1(x-x_0) \cos \theta_1} + B_1 \sin \theta_1 e^{ik_1(x-x_0) \cos \theta_1}; \quad (8.83)$$

$$E_{1y} = A_1 \cos \theta_1 e^{-ik_1(x-x_0) \cos \theta_1} + B_1 \cos \theta_1 e^{ik_1(x-x_0) \cos \theta_1}; \quad (8.84)$$

$$H_{1z} = \frac{A_1}{Z_1} e^{-ik_1(x-x_0) \cos \theta_1} - \frac{B_1}{Z_1} e^{ik_1(x-x_0) \cos \theta_1}; \quad (8.85)$$

$$E_{Nx} = A_N \sin \theta_N e^{-ik_N(x-x_N) \cos \theta_N} + B_N \sin \theta_N e^{ik_N(x-x_N) \cos \theta_N}; \quad (8.86)$$

$$E_{Ny} = A_N \cos \theta_N e^{-ik_N(x-x_N) \cos \theta_N} + B_N \cos \theta_N e^{ik_N(x-x_N) \cos \theta_N}; \quad (8.87)$$

$$H_{Nz} = \frac{A_N}{Z_N} e^{-ik_N(x-x_N) \cos \theta_N} - \frac{B_N}{Z_N} e^{ik_N(x-x_N) \cos \theta_N}. \quad (8.88)$$

В этих выражениях амплитуды A_1 и B_N полагаются заданными, а амплитуды B_1 и A_N определяются согласно (8.81)–(8.82).

8.3.4. Наклонное падение в случае двух–пяти сред

Рассмотрим теперь приложение описанного матричного метода к частным случаям двух–пяти сред.

Две среды

В случае двух сред и одной границы $N = 2$, $N - 1 = 1$.

Результирующая матрица $\widehat{G}^{(2)}$ имеет вид:

$$\widehat{G}^{(2)} = \widehat{C}_1 \widehat{A}_1 \widehat{C}_2, \quad (8.89)$$

где

$$\widehat{C}_1 = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_1 d_1 \cos \theta_1} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_1 d_1 \cos \theta_1} \end{array} \right); \quad (8.90)$$

$$\widehat{A}_1 = \left(\begin{array}{c|c} \frac{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2}{2Z_2 \cos \theta_2} & -\frac{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2}{2Z_2 \cos \theta_2} \\ \hline -\frac{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2}{2Z_2 \cos \theta_2} & \frac{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2}{2Z_2 \cos \theta_2} \end{array} \right); \quad (8.91)$$

$$\widehat{C}_2 = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_2 d_2 \cos \theta_2} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_2 d_2 \cos \theta_2} \end{array} \right). \quad (8.92)$$

Выполняя умножение, получаем элементы матрицы $\widehat{G}^{(2)}$:

$$g_{11}^{(2)} = \frac{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2}{2Z_2 \cos \theta_2} e^{i(k_1 d_1 \cos \theta_1 + k_2 d_2 \cos \theta_2)}; \quad (8.93)$$

$$g_{12}^{(2)} = -\frac{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2}{2Z_2 \cos \theta_2} e^{i(k_1 d_1 \cos \theta_1 - k_2 d_2 \cos \theta_2)}; \quad (8.94)$$

$$g_{21}^{(2)} = -\frac{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2}{2Z_2 \cos \theta_2} e^{i(-k_1 d_1 \cos \theta_1 + k_2 d_2 \cos \theta_2)}; \quad (8.95)$$

$$g_{22}^{(2)} = \frac{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2}{2Z_2 \cos \theta_2} e^{i(-k_1 d_1 \cos \theta_1 - k_2 d_2 \cos \theta_2)}. \quad (8.96)$$

С помощью (8.19) получаем элементы матрицы $\widehat{H}^{(2)}$:

$$h_{11}^{(2)} = -\frac{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2} e^{-i2k_1 d_1 \cos \theta_1}; \quad (8.97)$$

$$h_{12}^{(2)} = \frac{2Z_1 \cos \theta_1}{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2} e^{-i(-k_1 d_1 \cos \theta_1 - k_2 d_2 \cos \theta_2)}; \quad (8.98)$$

$$h_{21}^{(2)} = \frac{2Z_2 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2} e^{-i(-k_1 d_1 \cos \theta_1 - k_2 d_2 \cos \theta_2)}; \quad (8.99)$$

$$h_{22}^{(2)} = \frac{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2} e^{-i2k_2 d_2 \cos \theta_2}. \quad (8.100)$$

Таким образом, получаем амплитуды волн, выходящих из структуры в виде:

$$B_1 = -A_1 \frac{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2} e^{-i2k_1 d_1 \cos \theta_1} + \\ + B_2 \frac{2Z_1 \cos \theta_1}{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2} e^{-i(-k_1 d_1 \cos \theta_1 - k_2 d_2 \cos \theta_2)}; \quad (8.101)$$

$$A_2 = A_1 \frac{2Z_2 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2} e^{-i(-k_1 d_1 \cos \theta_1 - k_2 d_2 \cos \theta_2)} + \\ + B_2 \frac{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2} e^{-i2k_2 d_2 \cos \theta_2}. \quad (8.102)$$

При этом поля волн в крайних средах структуры определяются выражениями, аналогичными (8.83)–(8.88) при $N = 2$.

Из сравнения с (2.128)–(2.129), а также (2.130)–(2.133), учитывая, что угол отражения равен углу падения (то есть $\theta_r = \theta_i$ в обозначениях разделов 2.2.6–2.2.7), можно видеть, что эти выражения с точностью до показателей экспонент совпадают с полученными прямым методом. Некоторое различие показателей обусловлено различием точек исхода волн в обеих задачах, а физический смысл полученных здесь экспонент совпадает с таковым для выражений (7.135)–(7.136) при условии учета углов падения, отражения и прохождения.

Три среды

В случае трех сред и двух границ $N = 3$, $N - 1 = 2$.

Результирующая матрица $\widehat{G}^{(3)}$ имеет вид:

$$\widehat{G}^{(3)} = \widehat{C}_1 \widehat{A}_1 \widehat{C}_2 \widehat{A}_2 \widehat{C}_3, \quad (8.103)$$

то есть

$$\widehat{G}^{(3)} = \widehat{G}^{(2)} \widehat{A}_2 \widehat{C}_3, \quad (8.104)$$

где

$$\widehat{A}_2 = \left(\begin{array}{c|c} \frac{Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3}{2Z_3 \cos \theta_3} & -\frac{Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3}{2Z_3 \cos \theta_3} \\ \hline -\frac{Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3}{2Z_3 \cos \theta_3} & \frac{Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3}{2Z_3 \cos \theta_3} \end{array} \right); \quad (8.105)$$

$$\widehat{C}_3 = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_3 d_3 \cos \theta_3} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_3 d_3 \cos \theta_3} \end{array} \right), \quad (8.106)$$

а $\widehat{G}^{(2)}$ определяется выражениями (8.93)–(8.96).

Выполняя умножение, получаем:

$$g_{11}^{(3)} = g_{11}^{(2)} \frac{Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3}{2Z_3 \cos \theta_3} e^{ik_3 d_3 \cos \theta_3} - g_{12}^{(2)} \frac{Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3}{2Z_3 \cos \theta_3} e^{ik_3 d_3 \cos \theta_3}; \quad (8.107)$$

$$g_{12}^{(3)} = -g_{11}^{(2)} \frac{Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3}{2Z_3 \cos \theta_3} e^{-ik_3 d_3 \cos \theta_3} - g_{12}^{(2)} \frac{Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3}{2Z_3 \cos \theta_3} e^{-ik_3 d_3 \cos \theta_3}; \quad (8.108)$$

$$g_{21}^{(3)} = g_{21}^{(2)} \frac{Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3}{2Z_3 \cos \theta_3} e^{ik_3 d_3 \cos \theta_3} - g_{22}^{(2)} \frac{Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3}{2Z_3 \cos \theta_3} e^{ik_3 d_3 \cos \theta_3}; \quad (8.109)$$

$$g_{22}^{(3)} = -g_{21}^{(2)} \frac{Z_2 \cos \theta_2 - Z_3 \cos \theta_3}{2Z_3 \cos \theta_3} e^{-ik_3 d_3 \cos \theta_3} + g_{22}^{(2)} \frac{Z_2 \cos \theta_2 + Z_3 \cos \theta_3}{2Z_3 \cos \theta_3} e^{-ik_3 d_3 \cos \theta_3}. \quad (8.110)$$

Эти выражения позволяют, зная элементы матрицы $\widehat{G}^{(2)}$, найти элементы матрицы $\widehat{G}^{(3)}$, которые позволяют найти амплитуды волн, выходящих из структуры, с помощью соотношений (8.81)–(8.82) при $N = 3$. При этом компоненты полей получаются аналогично (8.83)–(8.88), что полностью соответствует аналогичным полям, полученным прямым методом. Получаемые выражения здесь не приводятся ввиду их громоздкости. Их явный вид, а также соотношение с результатами, получаемыми прямым методом (глава 5), авторы рекомендуют проанализировать любознательному читателю.

Четыре среды

В случае четырех сред и трех границ $N = 4$, $N - 1 = 3$.

Результирующая матрица $\widehat{G}^{(4)}$ имеет вид:

$$\widehat{G}^{(4)} = \widehat{C}_1 \widehat{A}_1 \widehat{C}_2 \widehat{A}_2 \widehat{C}_3 \widehat{A}_3 \widehat{C}_4, \quad (8.111)$$

то есть

$$\widehat{G}^{(4)} = \widehat{G}^{(3)} \widehat{A}_3 \widehat{C}_4, \quad (8.112)$$

где элементы матрицы $G^{(3)}$ определяются выражениями (8.107)–(8.110).

Все остальные действия аналогичны, поэтому приведем здесь только элементы матрицы $\widehat{G}^{(4)}$, которые получаются из (8.107)–(8.110) увеличением всех индексов на единицу:

$$g_{11}^{(4)} = g_{11}^{(3)} \frac{Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4}{2Z_4 \cos \theta_4} e^{ik_4 d_4 \cos \theta_4} - g_{12}^{(3)} \frac{Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4}{2Z_4 \cos \theta_4} e^{ik_4 d_4 \cos \theta_4}; \quad (8.113)$$

$$g_{12}^{(4)} = -g_{11}^{(3)} \frac{Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4}{2Z_4 \cos \theta_4} e^{-ik_4 d_4 \cos \theta_4} + g_{12}^{(3)} \frac{Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4}{2Z_4 \cos \theta_4} e^{-ik_4 d_4 \cos \theta_4}; \quad (8.114)$$

$$g_{21}^{(4)} = g_{21}^{(3)} \frac{Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4}{2Z_4 \cos \theta_4} e^{ik_4 d_4 \cos \theta_4} - g_{22}^{(3)} \frac{Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4}{2Z_4 \cos \theta_4} e^{ik_4 d_4 \cos \theta_4}; \quad (8.115)$$

$$g_{22}^{(4)} = -g_{21}^{(3)} \frac{Z_3 \cos \theta_3 - Z_4 \cos \theta_4}{2Z_4 \cos \theta_4} e^{-ik_4 d_4 \cos \theta_4} + g_{22}^{(3)} \frac{Z_3 \cos \theta_3 + Z_4 \cos \theta_4}{2Z_4 \cos \theta_4} e^{-ik_4 d_4 \cos \theta_4}. \quad (8.116)$$

Остальные действия аналогичны, поэтому здесь не приводятся. Проверку и окончательный вывод авторы предоставляют любознательному читателю.

Пять сред

В случае пяти сред и четырех границ $N = 5$, $N - 1 = 4$.

Результирующая матрица $\widehat{G}^{(5)}$ имеет вид:

$$\widehat{G}^{(5)} = \widehat{G}^{(4)} \widehat{A}_4 \widehat{C}_5, \quad (8.117)$$

где элементы $\widehat{G}^{(4)}$ определяются выражениями (8.113)–(8.116).

Все остальные действия аналогичны, поэтому приведем здесь только элементы матрицы $\widehat{G}^{(5)}$, которые получаются из (8.113)–(8.116) увеличением всех индексов на единицу:

$$g_{11}^{(5)} = g_{11}^{(4)} \frac{Z_4 \cos \theta_4 + Z_5 \cos \theta_5}{2Z_5 \cos \theta_5} e^{ik_5 d_5 \cos \theta_5} - g_{12}^{(4)} \frac{Z_4 \cos \theta_4 - Z_5 \cos \theta_5}{2Z_5 \cos \theta_5} e^{ik_5 d_5 \cos \theta_5}; \quad (8.118)$$

$$g_{12}^{(5)} = -g_{11}^{(4)} \frac{Z_4 \cos \theta_4 - Z_5 \cos \theta_5}{2Z_5 \cos \theta_5} e^{-ik_5 d_5 \cos \theta_5} + g_{12}^{(4)} \frac{Z_4 \cos \theta_4 + Z_5 \cos \theta_5}{2Z_5 \cos \theta_5} e^{-ik_5 d_5 \cos \theta_5}; \quad (8.119)$$

$$g_{21}^{(5)} = g_{21}^{(4)} \frac{Z_4 \cos \theta_4 + Z_5 \cos \theta_5}{2Z_5 \cos \theta_5} e^{ik_5 d_5 \cos \theta_5} - g_{22}^{(4)} \frac{Z_4 \cos \theta_4 - Z_5 \cos \theta_5}{2Z_5 \cos \theta_5} e^{ik_5 d_5 \cos \theta_5}; \quad (8.120)$$

$$g_{22}^{(5)} = -g_{21}^{(4)} \frac{Z_4 \cos \theta_4 - Z_5 \cos \theta_5}{2Z_5 \cos \theta_5} e^{-ik_5 d_5 \cos \theta_5} + g_{22}^{(4)} \frac{Z_4 \cos \theta_4 + Z_5 \cos \theta_5}{2Z_5 \cos \theta_5} e^{-ik_5 d_5 \cos \theta_5}. \quad (8.121)$$

Остальные действия также аналогичны и здесь не приводятся.

Проверку и окончательный вывод авторы также предоставляют любознательному читателю.

8.4. Наклонное падение электромагнитной волны поперечной поляризации

8.4.1. Общая геометрия наклонного падения

Рассмотрим наклонное падение электромагнитной волны поперечной поляризации на структуру, состоящую из N плоскопараллельных сред, разделенных $N - 1$ границами. Геометрия задачи совпадает с рассмотренной в разделе 5.3.3 и на примере пяти сред, разделенных четырьмя границами, представлена на рис. 5.6 [48, с. 62, рис. 4.2], [49, с. 91, рис. 4.2]. В отличие от предыдущего случая (продольной поляризации) здесь ориентация полей волн на рис. 5.6 приведена в пунктирных рамках. При этом вектор магнитного поля лежит в плоскости падения волны, а вектор электрического поля — перпендикулярно этой плоскости, что и соответствует случаю поперечной поляризации.

Как и для продольной поляризации, рассматриваем падение на структуру двух встречных волн: одна из точки x_0 в положительном направлении оси Ox , имеющая амплитуду A_1 , другая — из точки x_N в отрицательном направлении с амплитудой B_N . Угол распространения волны в среде с номером n обозначаем через θ_n .

8.4.2. Углы прохождения и отражения

Так как обе волны при распространении испытывают многочисленные преломления, то в качестве предварительного этапа решения задачи следует определить углы преломления в соответствии с законом Снеллиуса. Здесь действия полностью аналогичны приведенным в разделе 8.3.2, так что углы получаются теми же самыми. Таким образом, аналогично предыдущему случаю, полагаем, что углы θ_n определены заранее и уже известны.

8.4.3. Результирующая матрица при произвольном числе сред

Действуя аналогично случаю нормального падения с учетом замен коэффициентов и переменных, приведенных в разделе 3.2.11 (таблица 3.1), для среды с номером n получаем матрицу распространения:

$$\hat{C}_n = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_n d_n \cos \theta_n} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_n d_n \cos \theta_n} \end{array} \right), \quad (8.122)$$

а для границы с тем же номером, разделяющей среды с номерами n и $n + 1$, получаем матрицу связи:

$$\hat{A}_n = \left(\begin{array}{c|c} \frac{Z_n \cos \theta_{n+1} + Z_{n+1} \cos \theta_n}{2Z_{n+1} \cos \theta_n} & \frac{Z_n \cos \theta_{n+1} - Z_{n+1} \cos \theta_n}{2Z_{n+1} \cos \theta_n} \\ \hline -\frac{Z_n \cos \theta_{n+1} - Z_{n+1} \cos \theta_n}{2Z_{n+1} \cos \theta_n} & \frac{Z_n \cos \theta_{n+1} + Z_{n+1} \cos \theta_n}{2Z_{n+1} \cos \theta_n} \end{array} \right). \quad (8.123)$$

Матрица распространения для среды с номером N имеет вид:

$$\widehat{C}_N = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_N d_N \cos \theta_N} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_N d_N \cos \theta_N} \end{array} \right). \quad (8.124)$$

Таким образом, результирующая матрица $\widehat{G}^{(N)}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \widehat{G}^{(N)} &= \left(\prod_{n=1}^{N-1} \widehat{C}_n \widehat{A}_n \right) \widehat{C}_N = \\ &= \left[\prod_{n=1}^{N-1} \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_n d_n \cos \theta_n} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_n d_n \cos \theta_n} \end{array} \right) \times \right. \\ &\quad \times \left. \left(\begin{array}{c|c} \frac{Z_n \cos \theta_{n+1} + Z_{n+1} \cos \theta_n}{2Z_{n+1} \cos \theta_n} & -\frac{Z_n \cos \theta_{n+1} - Z_{n+1} \cos \theta_n}{2Z_{n+1} \cos \theta_n} \\ \hline -\frac{Z_n \cos \theta_{n+1} - Z_{n+1} \cos \theta_n}{2Z_{n+1} \cos \theta_n} & \frac{Z_n \cos \theta_{n+1} + Z_{n+1} \cos \theta_n}{2Z_{n+1} \cos \theta_n} \end{array} \right) \right] \times \\ &\quad \times \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_N d_N \cos \theta_N} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_N d_N \cos \theta_N} \end{array} \right). \quad (8.125) \end{aligned}$$

Записывая матрицу $\widehat{G}^{(N)}$ через ее элементы, с помощью матрицы $\widehat{H}^{(N)}$ можно найти амплитуды волн в виде, аналогичном (8.19), откуда опять с помощью замен (раздел 3.2.11, таблица 3.1) определить амплитуды волн продольной поляризации:

$$B_1 = \frac{g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} A_1 + \frac{g_{11}^{(N)} g_{22}^{(N)} - g_{12}^{(N)} g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} B_N; \quad (8.126)$$

$$A_N = \frac{1}{g_{11}^{(N)}} A_1 - \frac{g_{12}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} B_N. \quad (8.127)$$

При этом поля волн в крайних средах структуры, определяемые выражениями, подобными приведенным в предыдущем разделе, равны:

$$E_{1z} = A_1 e^{-ik_1(x-x_0) \cos \theta_1} + B_1 e^{ik_1(x-x_0) \cos \theta_1}; \quad (8.128)$$

$$H_{1x} = \frac{A_1}{Z_1} \sin \theta_1 e^{-ik_1(x-x_0) \cos \theta_1} + \frac{B_1}{Z_1} \sin \theta_1 e^{ik_1(x-x_0) \cos \theta_1}; \quad (8.129)$$

$$H_{1y} = -\frac{A_1}{Z_1} \cos \theta_1 e^{-ik_1(x-x_0) \cos \theta_1} + \frac{B_1}{Z_1} \cos \theta_1 e^{ik_1(x-x_0) \cos \theta_1}; \quad (8.130)$$

$$E_{Nz} = A_N e^{-ik_N(x-x_N) \cos \theta_N} + B_N e^{ik_N(x-x_N) \cos \theta_N}; \quad (8.131)$$

$$H_{Nx} = \frac{A_N}{Z_N} \sin \theta_N e^{-ik_N(x-x_N) \cos \theta_N} + \frac{B_N}{Z_N} \sin \theta_N e^{ik_N(x-x_N) \cos \theta_N} \quad (8.132)$$

$$H_{Ny} = -\frac{A_N}{Z_N} \cos \theta_N e^{-ik_N(x-x_N) \cos \theta_N} + \frac{B_N}{Z_N} \cos \theta_N e^{ik_N(x-x_N) \cos \theta_N}. \quad (8.133)$$

В этих выражениях амплитуды A_1 и B_N полагаются заданными, а амплитуды B_1 и A_N определяются согласно (8.126)–(8.127).

8.4.4. Наклонное падение в случае двух–пяти сред

Рассмотрим теперь приложение описанного матричного метода к частным случаям двух–пяти сред.

Две среды

В случае двух сред и одной границы $N = 2$, $N - 1 = 1$.

Результирующая матрица $\widehat{G}^{(2)}$ имеет вид:

$$\widehat{G}^{(2)} = \widehat{C}_1 \widehat{A}_1 \widehat{C}_2, \quad (8.134)$$

где

$$\widehat{C}_1 = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_1 d_1 \cos \theta_1} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_1 d_1 \cos \theta_1} \end{array} \right), \quad (8.135)$$

$$\widehat{A}_1 = \left(\begin{array}{c|c} \frac{Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1}{2Z_2 \cos \theta_1} & -\frac{Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1}{2Z_2 \cos \theta_1} \\ \hline -\frac{Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1}{2Z_2 \cos \theta_1} & \frac{Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1}{2Z_2 \cos \theta_1} \end{array} \right); \quad (8.136)$$

$$\widehat{C}_2 = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_2 d_2 \cos \theta_2} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_2 d_2 \cos \theta_2} \end{array} \right). \quad (8.137)$$

Выполняя умножение, получаем элементы матрицы $\widehat{G}^{(2)}$:

$$g_{11}^{(2)} = \frac{Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1}{2Z_2 \cos \theta_1} e^{i(k_1 d_1 \cos \theta_1 + k_2 d_2 \cos \theta_2)}; \quad (8.138)$$

$$g_{12}^{(2)} = -\frac{Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1}{2Z_2 \cos \theta_1} e^{i(k_1 d_1 \cos \theta_1 - k_2 d_2 \cos \theta_2)}; \quad (8.139)$$

$$g_{21}^{(2)} = -\frac{Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1}{2Z_2 \cos \theta_1} e^{i(-k_1 d_1 \cos \theta_1 + k_2 d_2 \cos \theta_2)}; \quad (8.140)$$

$$g_{22}^{(2)} = \frac{Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1}{2Z_2 \cos \theta_1} e^{i(-k_1 d_1 \cos \theta_1 - k_2 d_2 \cos \theta_2)}. \quad (8.141)$$

С помощью (8.19) получаем элементы матрицы $\widehat{H}^{(2)}$:

$$h_{11}^{(2)} = -\frac{Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1}{Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1} e^{-i2k_1 d_1 \cos \theta_1}; \quad (8.142)$$

$$h_{12}^{(2)} = \frac{2Z_1 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1} e^{-i(-k_1 d_1 \cos \theta_1 - k_2 d_2 \cos \theta_2)}; \quad (8.143)$$

$$h_{21}^{(2)} = \frac{2Z_2 \cos \theta_1}{Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1} e^{-i(-k_1 d_1 \cos \theta_1 - k_2 d_2 \cos \theta_2)}; \quad (8.144)$$

$$h_{22}^{(2)} = \frac{Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1}{Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1} e^{-i2k_2 d_2 \cos \theta_2}. \quad (8.145)$$

Таким образом, получаем амплитуды волн, выходящих из структуры в виде:

$$B_1 = -A_1 \frac{Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1}{Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1} e^{-i2k_1 d_1 \cos \theta_1} + \\ + B_2 \frac{2Z_1 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1} e^{-i(-k_1 d_1 \cos \theta_1 - k_2 d_2 \cos \theta_2)}, \quad (8.146)$$

$$A_2 = A_1 \frac{2Z_2 \cos \theta_1}{Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1} e^{-i(-k_1 d_1 \cos \theta_1 - k_2 d_2 \cos \theta_2)} + \\ + B_2 \frac{Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1}{Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1} e^{-i2k_2 d_2 \cos \theta_2}. \quad (8.147)$$

При этом поля волн в крайних средах структуры определяются выражениями аналогичными (8.128)–(8.133) при $N = 2$.

Из сравнения с данными раздела 2.2.7 (формулы (2.160)–(2.163)), можно видеть, что эти выражения с точностью до показателей экспонент совпадают с полученными прямым методом. Некоторое различие показателей обусловлено различием точек исхода волн в обеих задачах, а физический смысл полученных здесь экспонент совпадает с таковым для выражений (7.135)–(7.136) при условии учета углов падения, отражения и прохождения.

Три среды

В случае трех сред и двух границ $N = 3$, $N - 1 = 2$.

Результирующая матрица $\hat{G}^{(3)}$ имеет вид:

$$\hat{G}^{(3)} = \hat{C}_1 \hat{A}_1 \hat{C}_2 \hat{A}_2 \hat{C}_3, \quad (8.148)$$

то есть

$$\hat{G}^{(3)} = \hat{G}^{(2)} \hat{A}_2 \hat{C}_3, \quad (8.149)$$

где

$$\hat{A}_2 = \begin{pmatrix} \frac{Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2}{2Z_3 \cos \theta_2} & -\frac{Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2}{2Z_3 \cos \theta_2} \\ -\frac{Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2}{2Z_3 \cos \theta_2} & \frac{Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2}{2Z_3 \cos \theta_2} \end{pmatrix}; \quad (8.150)$$

$$\hat{C}_3 = \begin{pmatrix} e^{ik_3 d_3 \cos \theta_3} & 0 \\ 0 & e^{-ik_3 d_3 \cos \theta_3} \end{pmatrix}, \quad (8.151)$$

а $\hat{G}^{(2)}$ определяется выражениями (8.138)–(8.141).

Выполняя умножение, получаем:

$$g_{11}^{(3)} = g_{11}^{(2)} \frac{Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2}{2Z_3 \cos \theta_2} e^{ik_3 d_3 \cos \theta_3} - \\ - g_{12}^{(2)} \frac{Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2}{2Z_3 \cos \theta_2} e^{ik_3 d_3 \cos \theta_3}; \quad (8.152)$$

$$g_{12}^{(3)} = -g_{11}^{(2)} \frac{Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2}{2Z_3 \cos \theta_2} e^{-ik_3 d_3 \cos \theta_3} + g_{12}^{(2)} \frac{Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2}{2Z_3 \cos \theta_2} e^{-ik_3 d_3 \cos \theta_3}; \quad (8.153)$$

$$g_{21}^{(3)} = g_{21}^{(2)} \frac{Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2}{2Z_3 \cos \theta_2} e^{ik_3 d_3 \cos \theta_3} - g_{22}^{(2)} \frac{Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2}{2Z_3 \cos \theta_2} e^{ik_3 d_3 \cos \theta_3}; \quad (8.154)$$

$$[g_{22}^{(3)} = -g_{21}^{(2)} \frac{Z_2 \cos \theta_3 - Z_3 \cos \theta_2}{2Z_3 \cos \theta_2} e^{-ik_3 d_3 \cos \theta_3} + g_{22}^{(2)} \frac{Z_2 \cos \theta_3 + Z_3 \cos \theta_2}{2Z_3 \cos \theta_2} e^{-ik_3 d_3 \cos \theta_3}. \quad (8.155)$$

Эти выражения позволяют, зная элементы матрицы $\widehat{G}^{(2)}$, найти элементы матрицы $\widehat{G}^{(3)}$, которые позволяют найти амплитуды волн, выходящих из структуры с помощью соотношений (8.126)–(8.127) при $N = 3$. При этом компоненты полей получаются аналогично (8.128)–(8.133), что полностью соответствует аналогичным полям, полученным прямым методом. Получаемые выражения здесь не приводятся ввиду их громоздкости. Проверку и окончательный вывод авторы предоставляют на выбор любознательному читателю.

Четыре среды

Для случая четырех сред все действия аналогичны, поэтому приведем здесь только элементы матрицы $\widehat{G}^{(4)}$, которые получаются из (8.152)–(8.155) увеличением всех индексов на единицу:

$$g_{11}^{(4)} = g_{11}^{(3)} \frac{Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3}{2Z_4 \cos \theta_3} e^{ik_4 d_4 \cos \theta_4} - g_{12}^{(3)} \frac{Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3}{2Z_4 \cos \theta_3} e^{ik_4 d_4 \cos \theta_4}; \quad (8.156)$$

$$g_{12}^{(4)} = -g_{11}^{(3)} \frac{Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3}{2Z_4 \cos \theta_3} e^{-ik_4 d_4 \cos \theta_4} + g_{12}^{(3)} \frac{Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3}{2Z_4 \cos \theta_3} e^{-ik_4 d_4 \cos \theta_4}; \quad (8.157)$$

$$g_{21}^{(4)} = g_{21}^{(3)} \frac{Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3}{2Z_4 \cos \theta_3} e^{ik_4 d_4 \cos \theta_4} - g_{22}^{(3)} \frac{Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3}{2Z_4 \cos \theta_3} e^{ik_4 d_4 \cos \theta_4}; \quad (8.158)$$

$$g_{22}^{(4)} = -g_{21}^{(3)} \frac{Z_3 \cos \theta_4 - Z_4 \cos \theta_3}{2Z_4 \cos \theta_3} e^{-ik_4 d_4 \cos \theta_4} + g_{22}^{(3)} \frac{Z_3 \cos \theta_4 + Z_4 \cos \theta_3}{2Z_4 \cos \theta_3} e^{-ik_4 d_4 \cos \theta_4}. \quad (8.159)$$

Остальные действия аналогичны предыдущим случаям, поэтому здесь не приводятся. Проверку и окончательный вывод авторы предоставляют на выбор любознательному читателю.

Пять сред

Для пяти сред также приведем только элементы матрицы $\widehat{G}^{(5)}$, получаемые из (8.156)–(8.159) увеличением всех индексов на единицу:

$$g_{11}^{(5)} = g_{11}^{(4)} \frac{Z_4 \cos \theta_5 + Z_5 \cos \theta_4}{2Z_5 \cos \theta_4} e^{ik_5 d_5 \cos \theta_5} - g_{12}^{(4)} \frac{Z_4 \cos \theta_5 - Z_5 \cos \theta_4}{2Z_5 \cos \theta_4} e^{ik_5 d_5 \cos \theta_5}; \quad (8.160)$$

$$g_{12}^{(5)} = -g_{11}^{(4)} \frac{Z_4 \cos \theta_5 - Z_5 \cos \theta_4}{2Z_5 \cos \theta_4} e^{-ik_5 d_5 \cos \theta_5} + g_{12}^{(4)} \frac{Z_4 \cos \theta_5 + Z_5 \cos \theta_4}{2Z_5 \cos \theta_4} e^{-ik_5 d_5 \cos \theta_5}; \quad (8.161)$$

$$g_{21}^{(5)} = g_{21}^{(4)} \frac{Z_4 \cos \theta_5 + Z_5 \cos \theta_4}{2Z_5 \cos \theta_4} e^{ik_5 d_5 \cos \theta_5} - g_{22}^{(4)} \frac{Z_4 \cos \theta_5 - Z_5 \cos \theta_4}{2Z_5 \cos \theta_4} e^{ik_5 d_5 \cos \theta_5}; \quad (8.162)$$

$$g_{22}^{(5)} = -g_{21}^{(4)} \frac{Z_4 \cos \theta_5 - Z_5 \cos \theta_4}{2Z_5 \cos \theta_4} e^{-ik_5 d_5 \cos \theta_5} + g_{22}^{(4)} \frac{Z_4 \cos \theta_5 + Z_5 \cos \theta_4}{2Z_5 \cos \theta_4} e^{-ik_5 d_5 \cos \theta_5}. \quad (8.163)$$

Остальные действия также аналогичны предыдущим случаям и здесь не приводятся. Проверку и окончательный вывод авторы предоставляют на выбор любознательному читателю.

8.5. Коэффициенты отражения, прохождения и выхода

Для задач о распространении электромагнитных волн через многослойные структуры обычно бывают важны не только амплитуды волн, но и коэффициенты отражения и прохождения по энергиям, а также обобщенные коэффициенты выхода в том ключе, как они определены в разделах 4.1.1 и 4.1.2.

8.5.1. Коэффициенты отражения и прохождения

Рассмотрим падение электромагнитной волны на структуру, состоящую из произвольного числа сред N . Геометрия задачи, граничные условия и амплитуды волн для случая нормального падения приведены в разделе 8.2, для наклонного падения при продольной поляризации волны — в разделе 8.3, для наклонного падения при поперечной поляризации — в разделе 8.4.

Сначала предположим, что на структуру, падает только одна волна A_1 или B_N . Согласно классике [2, 3, 47, 48], в этом случае можно ввести коэффициенты отражения и прохождения по энергиям.

Так, при $B_N = 0$, в соответствии с (8.20)–(8.21), получаем коэффициент отражения

$$R_A^{(N)} = \left| \frac{B_1|_{B_N=0}}{A_1} \right|^2 = \left| \frac{g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \right|^2 \quad (8.164)$$

и прохождения

$$T_A^{(N)} = \left| \frac{A_N|_{B_N=0}}{A_1} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{Z_1}{Z_N} \right) = \left| \frac{1}{g_{11}^{(N)}} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{Z_1}{Z_N} \right), \quad (8.165)$$

где величины $g_{ik}^{(N)}$ определяются как элементы матрицы $\widehat{G}^{(N)}$ вида (8.18), получаемой путем перемножения соответствующих матриц связи и распространения (8.15). Например, для одномерной волны в случае двух сред они в явном виде представлены выражениями (7.128)–(7.131), для трех — выражениями (7.158)–(7.161), для электромагнитной волны при нормальном падении для двух–пяти сред — формулами (8.30)–(8.33), (8.44)–(8.47), (8.60)–(8.63), (8.65)–(8.68) и для произвольного числа сред — формулами (8.69)–(8.72).

При $A_1 = 0$ коэффициенты отражения и прохождения имеют вид:

$$R_B^{(N)} = \left| \frac{B_1|_{A_1=0}}{B_N} \right|^2 = \left| \frac{g_{11}^{(N)} g_{22}^{(N)} - g_{12}^{(N)} g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \right|^2; \quad (8.166)$$

$$T_B^{(N)} = \left| \frac{A_N|_{A_1=0}}{B_N} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{Z_N}{Z_1} \right) = \left| -\frac{g_{12}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{Z_N}{Z_1} \right), \quad (8.167)$$

где величины $g_{ik}^{(N)}$ определяются тем же образом.

8.5.2. Обобщенные коэффициенты выхода

В главе 4 (раздел 4.1.2, форм. (4.12), (4.13)), введено понятие обобщенного коэффициента выхода относительно точек входа и выхода волн при падении сразу двух волн из обеих крайних сред. Отмечено, что введенные таким образом обобщенные коэффициенты позволяют оценить общий характер потоков энергии. Для их определения были использованы детерминанты, каждый из которых содержит два отдельных слагаемых, пропорциональных амплитудам входящих волн.

Пусть теперь на структуру, состоящую из произвольного числа N сред, одновременно падают две встречных электромагнитных волны. В этом случае обе величины A_1 и B_N отличны от нуля. По аналогии с (4.12), (4.13) определим обобщенные коэффициенты выхода:

в первую среду

$$P_1^{(N)} = \left| \frac{B_1|_{B_N=0}}{A_1} \right|^2 + \left| \frac{B_1|_{A_1=0}}{B_N} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{Z_N}{Z_1} \right) = R_A^{(N)} + T_B^{(N)} = \\ = \left| \frac{g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \right|^2 + \left| -\frac{g_{12}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{Z_N}{Z_1} \right); \quad (8.168)$$

в последнюю среду с номером N

$$P_N^{(N)} = \left| \frac{C_N|_{B_N=0}}{A_1} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{Z_1}{Z_N} \right) + \left| \frac{C_N|_{A_1=0}}{B_N} \right|^2 = R_D^{(N)} + T_A^{(N)} = \\ = \left| \frac{1}{g_{11}^{(N)}} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{Z_1}{Z_N} \right) + \left| \frac{g_{11}^{(N)} g_{22}^{(N)} - g_{12}^{(N)} g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \right|^2. \quad (8.169)$$

Приведем далее некоторые примеры расчета коэффициентов отражения, прохождения и выхода при нормальном и наклонном падении двух встречных электромагнитных волн на многослойную структуру, состоящую из двух–пяти сред.

8.5.3. Коэффициенты отражения, прохождения и выхода при нормальном падении двух встречных электромагнитных волн на структуру из двух–пяти сред

Общий прием определения коэффициентов отражения, прохождения и выхода состоит в нахождении элементов $g_{ik}^{(N)}$ результирующей матрицы $\hat{G}^{(N)}$ и подстановки их в выражения (8.164)–(8.169). Реализуем этот прием для случая нормального падения электромагнитных волн на структуру, состоящую из двух–пяти сред.

Две среды

В случае двух сред элементы матрицы $\hat{G}^{(2)}$ имеют вид (8.30)–(8.33):

$$g_{11}^{(2)} = \frac{Z_1 + Z_2}{2Z_2} e^{i(k_1 d_1 + k_2 d_2)}; \quad (8.170)$$

$$g_{12}^{(2)} = -\frac{Z_1 - Z_2}{2Z_2} e^{i(k_1 d_1 - k_2 d_2)}; \quad (8.171)$$

$$g_{21}^{(2)} = -\frac{Z_1 - Z_2}{2Z_2} e^{i(-k_1 d_1 + k_2 d_2)}; \quad (8.172)$$

$$g_{22}^{(2)} = \frac{Z_1 + Z_2}{2Z_2} e^{i(-k_1 d_1 - k_2 d_2)}. \quad (8.173)$$

Подставляя эти выражения в (8.164)–(8.169) и учитывая, что модуль экспоненты с мнимым показателем равен единице, получаем:

$$R_A^{(2)} = \left| -\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right|^2; \quad (8.174)$$

$$T_A^{(2)} = \left| \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right); \quad (8.175)$$

$$R_B^{(2)} = \left| \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \right|^2; \quad (8.176)$$

$$T_B^{(2)} = \left| \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{Z_2}{Z_1} \right). \quad (8.177)$$

При этом получаем:

$$P_1^{(2)} = R_A^{(2)} + T_A^{(2)} = \left| -\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right|^2 + \left| \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right); \quad (8.178)$$

$$P_N^{(2)} = R_B^{(2)} + T_B^{(2)} = \left| \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{Z_2}{Z_1} \right) + \left| \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \right|^2. \quad (8.179)$$

Три среды

В случае трех сред элементы матрицы $\widehat{G}^{(3)}$ имеют вид (8.44)–(8.47):

$$g_{11}^{(3)} = g_{11}^{(2)} \frac{Z_2 + Z_3}{2Z_3} e^{ik_3 d_3} - g_{12}^{(2)} \frac{Z_2 - Z_3}{2Z_3} e^{ik_3 d_3}; \quad (8.180)$$

$$g_{12}^{(3)} = -g_{11}^{(2)} \frac{Z_2 - Z_3}{2Z_3} e^{-ik_3 d_3} + g_{12}^{(2)} \frac{Z_2 + Z_3}{2Z_3} e^{-ik_3 d_3}; \quad (8.181)$$

$$g_{21}^{(3)} = g_{21}^{(2)} \frac{Z_2 + Z_3}{2Z_3} e^{ik_3 d_3} - g_{22}^{(2)} \frac{Z_2 - Z_3}{2Z_3} e^{ik_3 d_3}; \quad (8.182)$$

$$g_{22}^{(3)} = -g_{21}^{(2)} \frac{Z_2 - Z_3}{2Z_3} e^{-ik_3 d_3} + g_{22}^{(2)} \frac{Z_2 + Z_3}{2Z_3} e^{-ik_3 d_3}. \quad (8.183)$$

Подставляя эти выражения в (8.164)–(8.169) и учитывая, что модуль экспоненты с мнимым показателем равен единице, получаем:

$$R_A^{(3)} = \left| \frac{g_{21}^{(2)} \cdot (Z_2 + Z_3) - g_{22}^{(2)} \cdot (Z_2 - Z_3)}{g_{11}^{(2)} \cdot (Z_2 + Z_3) - g_{12}^{(2)} \cdot (Z_2 - Z_3)} \right|^2; \quad (8.184)$$

$$T_A^{(3)} = \left| \frac{2Z_3}{g_{11}^{(2)} \cdot (Z_2 + Z_3) - g_{12}^{(2)} \cdot (Z_2 - Z_3)} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{Z_1}{Z_3} \right); \quad (8.185)$$

$$R_D^{(3)} = \left| \frac{2Z_2}{g_{11}^{(2)} \cdot (Z_2 + Z_3) - g_{12}^{(2)} \cdot (Z_2 - Z_3)} \right|^2; \quad (8.186)$$

$$T_D^{(3)} = \left| -\frac{g_{11}^{(2)} \cdot (Z_2 - Z_3) + g_{12}^{(2)} \cdot (Z_2 + Z_3)}{g_{11}^{(2)} \cdot (Z_2 + Z_3) - g_{12}^{(2)} \cdot (Z_2 - Z_3)} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{Z_3}{Z_1} \right). \quad (8.187)$$

В эти выражения следует подставить (8.170)–(8.173), в результате чего получаем:

$$R_A^{(3)} = \left| -\frac{(Z_1 + Z_2)(Z_2 - Z_3)e^{-ik_2 d_2} + (Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3)e^{ik_2 d_2}}{(Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)e^{-ik_2 d_2} + (Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3)e^{ik_2 d_2}} \right|^2; \quad (8.188)$$

$$T_A^{(3)} = \left| \frac{4Z_2Z_3}{(Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)e^{-ik_2d_2} + (Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3)e^{ik_2d_2}} \right|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{Z_1}{Z_3}\right); \quad (8.189)$$

$$R_B^{(3)} = \left| \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)e^{-ik_2d_2} + (Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3)e^{ik_2d_2}} \right|^2; \quad (8.190)$$

$$T_B^{(3)} = \left| \frac{(Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3)e^{-ik_2d_2} - (Z_1 + Z_2)(Z_2 - Z_3)e^{ik_2d_2}}{(Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)e^{-ik_2d_2} + (Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3)e^{ik_2d_2}} \right|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{Z_3}{Z_1}\right). \quad (8.191)$$

Коэффициенты выхода получаются из этих выражений в соответствии с формулами (8.168)–(8.169):

$$P_1^{(3)} = R_A^{(3)} + T_B^{(3)}; \quad (8.192)$$

$$P_3^{(3)} = R_B^{(3)} + T_A^{(3)}. \quad (8.193)$$

Четыре среды

В случае четырех сред элементы матрицы $\widehat{G}^{(4)}$ имеют вид (8.60)–(8.63):

$$g_{11}^{(4)} = g_{11}^{(3)} \frac{Z_3 + Z_4}{2Z_4} e^{ik_4d_4} - g_{12}^{(3)} \frac{Z_3 - Z_4}{2Z_4} e^{ik_4d_4}; \quad (8.194)$$

$$g_{12}^{(4)} = -g_{11}^{(3)} \frac{Z_3 - Z_4}{2Z_4} e^{-ik_4d_4} + g_{12}^{(3)} \frac{Z_3 + Z_4}{2Z_4} e^{-ik_4d_4}; \quad (8.195)$$

$$g_{21}^{(4)} = g_{21}^{(3)} \frac{Z_3 + Z_4}{2Z_4} e^{ik_4d_4} - g_{22}^{(3)} \frac{Z_3 - Z_4}{2Z_4} e^{ik_4d_4}; \quad (8.196)$$

$$g_{22}^{(4)} = -g_{21}^{(3)} \frac{Z_3 - Z_4}{2Z_4} e^{-ik_4d_4} + g_{22}^{(3)} \frac{Z_3 + Z_4}{2Z_4} e^{-ik_4d_4}. \quad (8.197)$$

Эти выражения отличаются от (8.180)–(8.183) только увеличением всех индексов на единицу. Поэтому и выражения для коэффициентов можно получить таким же образом. Так, увеличивая в (8.184)–(8.187) индексы на единицу везде, кроме $\operatorname{Re}(k_1)$, получаем:

$$R_A^{(4)} = \left| \frac{g_{21}^{(3)}(Z_3 + Z_4) - g_{22}^{(3)}(Z_3 - Z_4)}{g_{11}^{(3)}(Z_3 + Z_4) - g_{12}^{(3)}(Z_3 - Z_4)} \right|^2; \quad (8.198)$$

$$T_A^{(4)} = \left| \frac{2Z_4}{g_{11}^{(3)}(Z_3 + Z_4) - g_{12}^{(3)}(Z_3 - Z_4)} \right|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{Z_1}{Z_4}\right); \quad (8.199)$$

$$R_B^{(4)} = \left| \frac{2Z_3}{g_{11}^{(3)}(Z_3 + Z_4) - g_{12}^{(3)}(Z_3 - Z_4)} \right|^2; \quad (8.200)$$

$$T_B^{(4)} = \left| -\frac{g_{11}^{(3)}(Z_3 - Z_4) + g_{12}^{(3)}(Z_3 + Z_4)}{g_{11}^{(3)}(Z_3 + Z_4) - g_{12}^{(3)}(Z_3 - Z_4)} \right|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{Z_4}{Z_1}\right). \quad (8.201)$$

Для получения коэффициентов в явном виде, надо в эти выражения подставить $g_{ik}^{(3)}$ из (8.180)–(8.183), в которые, в свою очередь, подставить $g_{ik}^{(2)}$ из (8.170)–(8.173).

Коэффициенты выхода получаются из конечных выражений в соответствии с формулами (8.168)–(8.169) при $N = 4$. Все эти выражения здесь не приводятся ввиду их громоздкости. Их получение в явном виде авторы предоставляют любознательному читателю.

Пять сред

В случае пяти сред элементы матрицы $\widehat{G}^{(4)}$ имеют вид (8.65)–(8.68):

$$g_{11}^{(5)} = g_{11}^{(4)} \frac{Z_4 + Z_5}{2Z_5} e^{ik_5 d_5} - g_{12}^{(4)} \frac{Z_4 - Z_5}{2Z_5} e^{ik_5 d_5}, \quad (8.202)$$

$$g_{12}^{(5)} = -g_{11}^{(4)} \frac{Z_4 - Z_5}{2Z_5} e^{-ik_5 d_5} + g_{12}^{(4)} \frac{Z_4 + Z_5}{2Z_5} e^{-ik_5 d_5}, \quad (8.203)$$

$$g_{21}^{(5)} = g_{21}^{(4)} \frac{Z_4 + Z_5}{2Z_5} e^{ik_5 d_5} - g_{22}^{(4)} \frac{Z_4 - Z_5}{2Z_5} e^{ik_5 d_5}, \quad (8.204)$$

$$g_{22}^{(5)} = -g_{21}^{(4)} \frac{Z_4 - Z_5}{2Z_5} e^{-ik_5 d_5} + g_{22}^{(4)} \frac{Z_4 + Z_5}{2Z_5} e^{-ik_5 d_5}. \quad (8.205)$$

Эти выражения отличаются от (8.194)–(8.197) только увеличением всех индексов на единицу. Поэтому и выражения для коэффициентов можно получить таким же образом. Так, увеличивая в (8.198)–(8.201) индексы на единицу везде, кроме $\text{Re}(k_1)$, получаем:

$$R_A^{(5)} = \left| \frac{g_{21}^{(4)}(Z_4 + Z_5) - g_{22}^{(4)}(Z_4 - Z_5)}{g_{11}^{(4)}(Z_4 + Z_5) - g_{12}^{(4)}(Z_4 - Z_5)} \right|^2; \quad (8.206)$$

$$T_A^{(5)} = \left| \frac{2Z_5}{g_{11}^{(4)}(Z_4 + Z_5) - g_{12}^{(4)}(Z_4 - Z_5)} \right|^2 \text{Re}\left(\frac{Z_1}{Z_5}\right); \quad (8.207)$$

$$R_B^{(5)} = \left| \frac{2Z_4}{g_{11}^{(4)}(Z_4 + Z_5) - g_{12}^{(4)}(Z_4 - Z_5)} \right|^2; \quad (8.208)$$

$$T_B^{(5)} = \left| \frac{-g_{11}^{(4)}(Z_4 - Z_5) + g_{12}^{(4)}(Z_4 + Z_5)}{g_{11}^{(4)}(Z_4 + Z_5) - g_{12}^{(4)}(Z_4 - Z_5)} \right|^2 \text{Re}\left(\frac{Z_5}{Z_1}\right). \quad (8.209)$$

Для получения коэффициентов в явном виде надо в эти выражения подставить $g_{ik}^{(4)}$ из (8.194)–(8.197), в которые, в свою очередь, подставить $g_{ik}^{(3)}$ из (8.180)–(8.183) и далее $g_{ik}^{(2)}$ из (8.170)–(8.173).

Коэффициенты выхода получаются из конечных выражений в соответствии с формулами (8.168)–(8.169) при $N = 5$. Все эти выражения здесь не приводятся ввиду их громоздкости. Их получение в явном виде авторы предоставляют любознательному читателю.

Замечание. В настоящем разделе получены коэффициенты для случая нормального падения электромагнитной волны. Случаи наклонного падения той и другой поляризаций могут быть рассмотрены аналогичным образом с учетом амплитуд отраженных и проходящих волн,

полученных в разделах 8.3 и 8.4. При этом будут получены коэффициенты с учетом углов прохождения и отражения. Вывод соответствующих выражений авторы могут рекомендовать любознательному читателю в качестве полезного упражнения.

Выводы по главе 8

Глава посвящена применению метода матрицы для задач о распространении электромагнитной волны при нормальном и наклонном падении через многослойные структуры с произвольным числом слоев. Получены результирующие матрицы, амплитуды волн, а также коэффициенты прохождения и обобщенного выхода. Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрены особенности задач о распространении электромагнитных волн, отличающие их от подобных задач для одномерной волны. Отмечено, что при матричном представлении волнового вектора, его компонентами являются не волновая функция и ее производная, как это было для одномерной волны, а электрическое и магнитное поля электромагнитной волны, связанные между собой уравнениями электродинамики. Для гармонической волны на границах между единичными участками волноведущей структуры в качестве элемента связи выступает волновой импеданс, позволяющий связать электрическое и магнитное поля волн соседствующих участков линейными соотношениями. Отмечено, что электродинамические задачи могут быть сведены к задачам одномерным путем замены волновых чисел соответствующими импедансами с учетом углов, определяющих величину наклона и характер поляризации распространяющихся волн.

2. Рассмотрено нормальное падение электромагнитной волны на структуру, содержащую произвольное число сред. Для границы с произвольным номером записаны координатные составляющие электрического и магнитного полей волн по обе стороны от границы, а также соответствующие граничные условия, состоящие в равенстве таких полей друг другу. Из решения соответствующих волновых уравнений по обе стороны от границы получены матрицы распространения для обеих волн, а из решения граничной задачи найдена матрица связи между ними. Путем перемножения матриц распространения в связи всех участков и границ полной структуры получена результирующая матрица для структуры в целом. Для случая падения двух встречных волн с обоих концов структуры выполнено преобразование результирующей матрицы к виду, связывающему падающие волны с волнами отраженными и проходящими для той и другой падающих волн. В качестве результата падения двух встречных волн, получены амплитуды и фазы электрического и магнитного полей объединенных волн, выходящих из структуры в целом. Рассмотрены частные случаи структур, состоящих из двух-пяти сред, для которых получены, результирующие матрицы и поля волн выходящих из структуры. Показано, что компоненты

результирующей матрицы для любого требуемого числа сред могут быть выражены через компоненты результирующей матрицы для числа сред, на единицу меньшего. Получены линейные выражения, обеспечивающие получение компонент последующей матрицы из компонент предыдущей, коэффициентами которых являются импедансы и экспоненты для обеих соседствующих сред.

3. Рассмотрена общая геометрия наклонного падения электромагнитной волны на плоскости первого и последующих слоев структуры. Отмечена особенность, отличающая наклонное падение от нормального, состоящая в изменении направления распространения волны при переходе из одной среды в другую, обусловленная преломлением волны на границе раздела сред. В качестве правила, определяющего направление распространения волны, приведен закон преломления Снеллиуса. Отмечено, что при многократных актах преломления, в первую очередь при прохождении волны из жесткой среды в мягкую, могут возникнуть условия реализации полного внутреннего отражения, в результате чего дальнейшее распространение волны будет нарушено. Приведен критерий, определяющий для двух соседствующих сред максимальное значение угла падения, выше которого распространение волны нарушается.

4. Рассмотрено наклонное падение электромагнитной волны, имеющей продольную поляризацию. Аналогично случаю нормального падения, для среды и границы с произвольным номером получены матрицы распространения и связи. Для случаев падения двух встречных волн получены результирующие матрицы для структур из двух-пяти сред. Отмечено, что компоненты результирующей матрицы для любого требуемого числа сред могут быть выражены через компоненты результирующей матрицы для числа сред, на единицу меньшего. Получены линейные выражения, обеспечивающие получение компонент последующей матрицы из компонент предыдущей, коэффициентами которых являются импедансы и экспоненты для обеих соседствующих сред. В качестве коэффициентов полученных выражений присутствуют произведения импедансов соответствующих сред на косинусы углов падения и преломления для предыдущей среды и последующей, причем показатели экспонент также содержат произведения косинусов тех же углов на длины участков соответствующих сред.

5. Рассмотрено наклонное падение электромагнитной волны, имеющей поперечную поляризацию. Аналогично случаю падения волны с продольной поляризацией, на основе матриц распространения и связи получены результирующие матрицы для структур из двух-пяти сред, а также результирующая матрица при произвольном числе сред. Отмечено, что компоненты результирующей матрицы для любого требуемого числа сред могут быть выражены через компоненты результирующей матрицы для числа сред, на единицу меньшего. Получены линейные выражения, обеспечивающие получение компонент последующей матрицы из компонент предыдущей. В качестве коэффициентов полученных выражений присутствуют произведения импедансов соответствующих сред

на косинусы углов падения и преломления для предыдущей среды и последующей, причем показатели экспонент также содержат произведения косинусов тех же углов на длины участков соответствующих сред. Отличие от случая продольной поляризации состоит в обратном порядке следования номеров углов и импедансов соседствующих сред.

6. Для случая одномерной волны получены коэффициенты отражения и прохождения по энергии, выраженные через амплитуды выходящих из структуры волн. Отмечено, что коэффициент отражения равен квадрату модуля отношений амплитуд отраженной и падающей волн, а коэффициент прохождения равен квадрату модуля отношений проходящей и падающей волн, умноженному на действительную часть отношения волновых чисел последней среды к первой. В рамках той же геометрии получены обобщенные коэффициенты выхода для случая одновременного падения двух волн встречных направлений на противоположные концы структуры. Все коэффициенты получены в общем виде для произвольного числа сред, а также рассмотрены частные случаи двух-пяти сред. Полученные результаты обобщены на случай нормального падения электромагнитной волны. Отмечено, что этот случай получается из случая одномерной волны путем замены в алгебраических выражениях волнового числа на обратный импеданс при условии сохранения в показателях экспонент волновых чисел. При этом сомножитель коэффициента прохождения, содержащий действительную часть отношения волновых чисел, также остается без изменения. Отмечена возможность и приведены рекомендации для обобщения полученных результатов на случай наклонного падения электромагнитных волн обеих поляризаций.

Глава 9

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПАДЕНИЯ ВОЛНЫ НА НАКЛОННЫЙ БАРЬЕР

Глава посвящена применению метода результирующей матрицы для решения конкретной практической задачи — рассмотрению отражения и прохождения волны при ее падении на наклонный барьер. Для простоты изложения ограничимся случаем одномерной волны гармонического характера, основным параметром которой, определяющим ее распространение, является волновое число. Под «наклонным барьером» будем понимать находящуюся на пути распространения волны неоднородность, параметры которой меняются таким образом, что волновое число по ходу волны возрастает от минимального значения в начале структуры до максимального в ее конце. Глава состоит из двух частей. В первой части рассмотрены общие вопросы, необходимые для решения поставленной задачи, приведена схема алгоритма вычисления коэффициентов отражения и прохождения. Вторая часть посвящена именно задаче о падении волны на наклонный барьер, то есть вычислению таких коэффициентов и определению их свойств.

В тексте главы использованы материалы монографии [49], а также статей [67, 74]. Основное изложение следует статьям [177–179]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

9.1. Алгоритм расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру

Описанный в предыдущих (7 и 8) главах аппарат расчета параметров волны при падении на многослойную структуру подразумевает пошаговое получение матриц распространения и связи с последующим объединением их в виде результирующей матрицы. В то же время, многие операции такого вычисления являются однообразными, что позволяет объединить их циклическим образом. Приведем общую схему такого вычисления, объединенную в единый циклический алгоритм.

9.1.1. Общая постановка задачи

Будем рассматривать волноведущую структуру, содержащую N плоскопараллельных слоев, разделенных $N - 1$ границами. Ось ко-

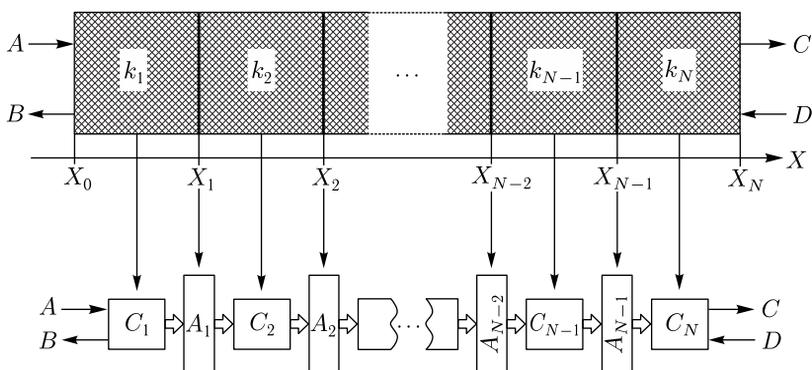


Рис. 9.1. Схема представления слоистой структуры в виде эквивалентной цепочки из четырехполюсников

ординат вдоль структуры, перпендикулярную слоям и их границам, обозначим через Ox .

Общая геометрия задачи представлена на рис. 9.1.

Здесь в верхнем ряду показана волноведущая структура, слои которой представляют собой среды с волновыми числами $k_{1,2,\dots,N}$. Координата начала структуры — x_0 , конца — x_N . Координаты границ между средами — от x_1 до x_{N-1} . Длины участков между границами, то есть толщины слоев, будем обозначать далее через d_n , где $d_n = x_n - x_{n-1}$, причем n меняется от 1 до N .

На структуру в положительном направлении оси Ox на слой 1 падает волна A , выходит из этого слоя в отрицательном направлении волна B . На ту же структуру со стороны слоя N , то есть в отрицательном направлении оси Ox , падает волна D , выходит из этого слоя в положительном направлении волна C .

Следуя [49], сопоставим структуре эквивалентную цепочку из четырехполюсников, показанную в нижнем ряду рис. 9.1. То есть каждой среде или каждой границе с номером n соответствует четырехполюсник с тем же номером, где номера n для сред меняются от 1 до N , а для границ — от 1 до $N - 1$.

Отвечающая волноведущей структуре цепочка содержит четырехполюсники двух видов — соответствующие участкам сред, обозначенные буквами C_n , и соответствующие границам между участками, обозначенные буквами A_n . Поскольку в пределах сред волны распространяются в том или ином направлении, четырехполюсники сред C_n будем называть четырехполюсниками распространения, а соответствующие им матрицы \hat{C}_n — матрицами распространения. Поскольку граница связывает между собой два соседствующих участка сред, будем называть такие четырехполюсники \hat{A}_n четырехполюсниками связи, а соответствующие им матрицы \hat{A}_n — матрицами связи.

9.1.2. Получение матриц распространения и связи

Решаем задачу в приближении одномерных волн типа волны в струне [45–48]. Координатная часть волновой функции, являющейся решением волнового уравнения второго порядка, имеет вид:

$$X_n = A_n e^{-ik_n x} + B_n e^{ik_n x}, \quad (9.1)$$

где k_n — волновое число волны в среде (слое) с номером n , A_n и B_n — соответствующие произвольные постоянные, которые должны быть определены из граничных условий. Первое слагаемое в этом выражении при зависимости от времени вида $e^{i\omega t}$ описывает волну, распространяющуюся в положительном направлении оси Ox , второе — в отрицательном.

Матрица распространения (среда)

Рассмотрим получение матрицы распространения на примере четырехполюсника типа С, общая схема которого представлена на рис. 9.2.

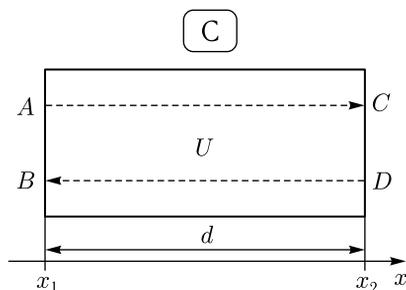


Рис. 9.2. Схема четырехполюсника распространения

На границе при координате x_1 четырехполюсник имеет два контакта A и B , на границе при координате x_2 — тоже два контакта C и D . Передача сигнала от контактов A и B к контактам C и D в матричной записи имеет вид:

$$\begin{pmatrix} - & A \\ - & B \end{pmatrix} = \hat{C} \begin{pmatrix} - & C \\ - & D \end{pmatrix}. \quad (9.2)$$

Для удобства записи будем считать, что наименования контактов соответствуют амплитудам волн с такими же обозначениями. Толщину среды обозначим через d , то есть будем считать

$$x_2 - x_1 = d. \quad (9.3)$$

Итак, на этом отрезке распространяются во встречных направлениях две волны u и v , в силу единства волнового уравнения имеющие одно и то же волновое число k .

Рассмотрим трансформацию обеих волн на этом пути.

Так, выходящая из точки x_1 волна, имея в этой точке амплитуду A , при прохождении расстояния d за счет набега (отставания) фазы при-

обретает вид: Ae^{-ikd} , после чего входит в границу при координате x_2 уже как волна C .

Выходящая из границы при x_2 волна, имея в этой точке амплитуду D , распространяясь в противоположном направлении и проходя расстояние d , испытывает такое же отставание по фазе, так что приобретает вид De^{-ikd} , после чего выходит из начала структуры при x_1 уже как волна B .

Таким образом, выполняются соотношения:

$$Ae^{-ikd} = C, \tag{9.4}$$

$$De^{-ikd} = B. \tag{9.5}$$

Из этих соотношений получаем:

$$A = Ce^{ikd}, \tag{9.6}$$

$$B = De^{-ikd}. \tag{9.7}$$

Записывая (9.6)–(9.7) в матричном виде, подобном (9.2), получаем, что матрица распространения \hat{C} имеет вид:

$$\hat{C} = \left(\begin{array}{c|c} e^{ikd} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ikd} \end{array} \right). \tag{9.8}$$

Матрица связи (граница)

Рассмотрим получение матрицы связи на примере четырехполюсника типа А, общая схема которого представлена на рис. 9.3.

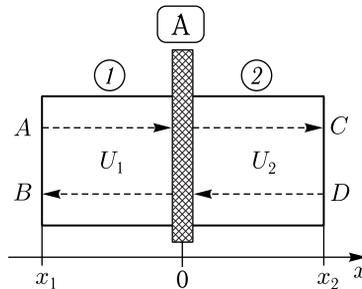


Рис. 9.3. Схема четырехполюсника связи

Как и в предыдущем случае (9.2), передача сигнала от контактов A и B к контактам C и D в матричной записи имеет вид:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \hat{A} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \tag{9.9}$$

где \hat{A} , в отличие от (9.2), является матрицей не распространения, а связи.

Итак, четырехполюсник соответствует границе между двумя средами 1 (левая часть рисунка) и 2 (правая часть рисунка), волновые функции в которых имеют вид:

$$U_1 = Ae^{-ik_1x} + Be^{ik_1x}; \quad (9.10)$$

$$U_2 = Ce^{-ik_2x} + De^{ik_2x}. \quad (9.11)$$

Производные этих волновых функций имеют вид:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = -iAk_1e^{-ik_1x} + iBk_1e^{ik_1x}; \quad (9.12)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} = -iCk_2e^{-ik_2x} + iDk_2e^{ik_2x}. \quad (9.13)$$

Поскольку нас интересует именно граница между средами, то зададим ей координату $x = 0$. При этом будем полагать, что волна U_1 на расстоянии от x_1 до 0 не меняет амплитуду и не приобретает набега фазы. Аналогично положим, что волна U_2 на расстоянии от 0 до x_2 также не меняется ни по амплитуде, ни по фазе. При этом, учитывая, что на границе $x = 0$, так что все экспоненты обращаются в единицу, из (9.10)–(9.11) находим:

$$U_1|_{x=0} = A + B; \quad (9.14)$$

$$U_2|_{x=0} = C + D, \quad (9.15)$$

а также из (9.12)–(9.13) получаем

$$\left. \frac{\partial U_1}{\partial x} \right|_{x=0} = -iAk_1 + iBk_1; \quad (9.16)$$

$$\left. \frac{\partial U_2}{\partial x} \right|_{x=0} = -iCk_2 + iDk_2. \quad (9.17)$$

Граничными условиями является равенство на границе волновых функций и их производных [45–48], то есть

$$U_1|_{x=0} = U_2|_{x=0}; \quad (9.18)$$

$$\left. \frac{dU_1}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dU_2}{dx} \right|_{x=0}. \quad (9.19)$$

Подставляя (9.14)–(9.17) в эти граничные условия, получаем систему уравнений для амплитуд:

$$A + B = C + D; \quad (9.20)$$

$$-Ak_1 + Bk_1 = -Ck_2 + Dk_2. \quad (9.21)$$

Решение этой системы относительно A и B дает:

$$A = \frac{k_1 + k_2}{2k_1}C + \frac{k_1 - k_2}{2k_1}D; \quad (9.22)$$

$$B = \frac{k_1 - k_2}{2k_1}C + \frac{k_1 + k_2}{2k_1}D. \quad (9.23)$$

Таким образом, входящая в (9.9) матрица связи \hat{A} имеет вид:

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_1 + k_2}{2k_1} & \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \\ \hline \frac{k_1 - k_2}{2k_1} & \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \end{array} \right). \quad (9.24)$$

9.1.3. Структура цепочки из четырехполюсников

На рис. 9.1 четырехполюсники, соответствующие средам, обозначены буквами C_n . Эти четырехполюсники описываются матрицами распространения, имеющими вид:

$$\hat{C}_n = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_n d_n} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_n d_n} \end{array} \right). \quad (9.25)$$

Четырехполюсники, соответствующие границам, обозначены буквами A_n . Эти четырехполюсники описываются матрицами связи, имеющими вид:

$$\hat{A}_n = \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_n + k_{n+1}}{2k_n} & \frac{k_n - k_{n+1}}{2k_n} \\ \hline \frac{k_n - k_{n+1}}{2k_n} & \frac{k_n + k_{n+1}}{2k_n} \end{array} \right). \quad (9.26)$$

Полная цепочка четырехполюсников описывается результирующей матрицей \hat{G}_N , представляющей собой последовательное соединение чередующихся матриц распространения и связи:

$$\hat{G}^{(N)} = \hat{C}_1 \hat{A}_1 \hat{C}_2 \hat{A}_2 \dots \hat{C}_{N-1} \hat{A}_{N-1} \hat{C}_N. \quad (9.27)$$

В записи через элементы результирующая матрица имеет вид

$$\hat{G}^{(N)} = \left(\begin{array}{c|c} g_{11}^{(N)} & g_{12}^{(N)} \\ \hline g_{21}^{(N)} & g_{22}^{(N)} \end{array} \right). \quad (9.28)$$

Матрица $\hat{G}^{(N)}$ связывает волны A и B в начале структуры с волнами C и D в ее конце в соответствии с соотношением

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \hat{G}^{(N)} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}. \quad (9.29)$$

В алгебраической записи эта связь имеет вид:

$$A = g_{11}^{(N)} C + g_{12}^{(N)} D; \quad (9.30)$$

$$B = g_{21}^{(N)} C + g_{22}^{(N)} D. \quad (9.31)$$

Для реализации такой связи в полном виде надо найти элементы матрицы $g_{ik}^{(N)}$ в выражении через параметры структуры, такие как волновые числа k_n и протяженности участков структуры d_n .

9.1.4. Последовательное вычисление элементов результирующей матрицы

Согласно показанному в предыдущем разделе, для получения результирующей матрицы следует найти матрицы распространения для всех сред и матрицы связи для всех границ, после чего остается только их перемножить в последовательном порядке. Однако при значительном количестве звеньев цепочки перемножение матриц может оказаться весьма громоздким. В то же время, процедура получения матриц того и другого вида для всех элементов цепочки является достаточно однообразной, что позволяет найти элементы результирующей матрицы путем последовательного перехода от одного звена цепочки к другому. Такую возможность обеспечивает предлагаемый далее алгоритм, особенно удобный при машинном счете. Начнем рассмотрение с простых случаев двух и трех сред, после чего обобщим все на произвольное число сред.

Результирующие матрицы для двух и трех сред

Начнем со среды 1 без границ. Результирующая матрица $\widehat{G}^{(1)}$ для этого случая равна просто матрице распространения для этой среды:

$$\widehat{G}^{(1)} = \widehat{C}_1^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_1 d_1} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_1 d_1} \end{array} \right). \quad (9.32)$$

Запишем эту матрицу в виде:

$$\widehat{G}^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} g_{11}^{(1)} & g_{12}^{(1)} \\ \hline g_{21}^{(1)} & g_{22}^{(1)} \end{array} \right), \quad (9.33)$$

где

$$g_{11}^{(1)} = e^{ik_1 d_1}; \quad (9.34)$$

$$g_{12}^{(1)} = 0; \quad (9.35)$$

$$g_{21}^{(1)} = 0; \quad (9.36)$$

$$g_{22}^{(1)} = e^{-ik_1 d_1}. \quad (9.37)$$

Для задачи о двух средах, разделенных одной границей, согласно (9.27), результирующая матрица имеет вид:

$$\widehat{G}^{(2)} = \widehat{C}_1^{(2)} \cdot \widehat{A}_1^{(2)} \cdot \widehat{C}_2^{(2)}, \quad (9.38)$$

где, согласно (9.25), (9.26), составляющие ее матрицы равны:

$$\widehat{C}_1^{(2)} = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_1 d_1} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_1 d_1} \end{array} \right); \quad (9.39)$$

$$\widehat{A}_1^{(2)} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_1 + k_2}{2k_1} & \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \\ \hline \frac{k_1 - k_2}{2k_1} & \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \end{array} \right); \quad (9.40)$$

$$\widehat{C}_2^{(2)} = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_2 d_2} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_2 d_2} \end{array} \right). \quad (9.41)$$

Произведение двух последних матриц имеет вид:

$$\widehat{A}_1^{(2)} \widehat{C}_2^{(2)} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \cdot e^{ik_2 d_2} & \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \cdot e^{-ik_2 d_2} \\ \hline \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \cdot e^{ik_2 d_2} & \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \cdot e^{-ik_2 d_2} \end{array} \right). \quad (9.42)$$

Учтем теперь, что матрица $\widehat{C}_1^{(2)}$ теперь занимает место матрицы $\widehat{C}_1^{(1)}$, то есть относится к той же среде 1, так что, с учетом (9.32), ее можно записать в виде (9.33):

$$\widehat{C}_1^{(2)} \rightarrow \widehat{C}_1^{(1)} = \widehat{G}^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} g_{11}^{(1)} & g_{12}^{(1)} \\ \hline g_{21}^{(1)} & g_{22}^{(1)} \end{array} \right). \quad (9.43)$$

Выполняя умножение (9.43) на (9.42), получаем:

$$\widehat{G}^{(2)} = \widehat{C}_1^{(2)} \widehat{A}_1^{(2)} \widehat{C}_2^{(2)} = \left(\begin{array}{c|c} g_{11}^{(2)} & g_{12}^{(2)} \\ \hline g_{21}^{(2)} & g_{22}^{(2)} \end{array} \right), \quad (9.44)$$

где элементы получившейся матрицы равны:

$$g_{11}^{(2)} = g_{11}^{(1)} \frac{k_1 + k_2}{2k_1} e^{ik_2 d_2} + g_{12}^{(1)} \frac{k_1 - k_2}{2k_1} e^{ik_2 d_2}; \quad (9.45)$$

$$g_{12}^{(2)} = g_{11}^{(1)} \frac{k_1 - k_2}{2k_1} e^{-ik_2 d_2} + g_{12}^{(1)} \frac{k_1 + k_2}{2k_1} e^{-ik_2 d_2}; \quad (9.46)$$

$$g_{21}^{(2)} = g_{21}^{(1)} \frac{k_1 + k_2}{2k_1} e^{ik_2 d_2} + g_{22}^{(1)} \frac{k_1 - k_2}{2k_1} e^{ik_2 d_2}; \quad (9.47)$$

$$g_{22}^{(2)} = g_{21}^{(1)} \frac{k_1 - k_2}{2k_1} e^{-ik_2 d_2} + g_{22}^{(1)} \frac{k_1 + k_2}{2k_1} e^{-ik_2 d_2}. \quad (9.48)$$

Учтем теперь, что в соответствии с (9.35) и (9.36), выполняются равенства: $g_{12}^{(1)} = 0$ и $g_{21}^{(1)} = 0$. Подставляя эти значения в (9.45)–(9.48), получаем:

$$g_{11}^{(2)} = g_{11}^{(1)} \frac{k_1 + k_2}{2k_1} e^{ik_2 d_2}; \quad (9.49)$$

$$g_{12}^{(2)} = g_{11}^{(1)} \frac{k_1 - k_2}{2k_1} e^{-ik_2 d_2}; \quad (9.50)$$

$$g_{21}^{(2)} = g_{22}^{(1)} \frac{k_1 - k_2}{2k_1} e^{ik_2 d_2}; \quad (9.51)$$

$$g_{22}^{(2)} = g_{22}^{(1)} \frac{k_1 + k_2}{2k_1} e^{-ik_2 d_2}. \quad (9.52)$$

Заменяя $g_{11}^{(1)}$ и $g_{22}^{(1)}$ их выражениями в соответствии с (9.34) и (9.37), а также объединяя показатели экспонент, получаем

$$g_{11}^{(2)} = \frac{k_1 + k_2}{2k_1} e^{i(k_1 d_1 + k_2 d_2)}; \quad (9.53)$$

$$g_{12}^{(2)} = \frac{k_1 - k_2}{2k_1} e^{i(k_1 d_1 - k_2 d_2)}; \quad (9.54)$$

$$g_{21}^{(2)} = \frac{k_1 - k_2}{2k_1} e^{-i(k_1 d_1 - k_2 d_2)}; \quad (9.55)$$

$$g_{22}^{(2)} = \frac{k_1 + k_2}{2k_1} e^{-i(k_1 d_1 + k_2 d_2)}. \quad (9.56)$$

Обратимся теперь к случаю трех сред, разделенных двумя границами. В этом случае, согласно (9.27), результирующая матрица имеет вид:

$$\widehat{G}^{(3)} = \widehat{C}_1 \widehat{A}_1 \widehat{C}_2 \widehat{A}_2 \widehat{C}_3, \quad (9.57)$$

где составляющие это выражение матрицы, в соответствии с (9.25)–(9.26), имеют вид

$$\widehat{C}_1^{(3)} = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_1 d_1} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_1 d_1} \end{array} \right); \quad (9.58)$$

$$\widehat{A}_1^{(3)} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_1 + k_2}{2k_1} & \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \\ \hline \frac{k_1 - k_2}{2k_1} & \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \end{array} \right); \quad (9.59)$$

$$\widehat{C}_2^{(3)} = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_2 d_2} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_2 d_2} \end{array} \right); \quad (9.60)$$

$$\widehat{A}_2^{(3)} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_2 + k_3}{2k_2} & \frac{k_2 - k_3}{2k_2} \\ \hline \frac{k_2 - k_3}{2k_2} & \frac{k_2 + k_3}{2k_2} \end{array} \right); \quad (9.61)$$

$$\widehat{C}_3^{(3)} = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_3 d_3} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_3 d_3} \end{array} \right). \quad (9.62)$$

Для случая трех сред, запишем матрицу $\widehat{G}^{(3)}$ в виде:

$$\widehat{G}^{(3)} = \left(\begin{array}{c|c} g_{11}^{(3)} & g_{12}^{(3)} \\ \hline g_{21}^{(3)} & g_{22}^{(3)} \end{array} \right). \quad (9.63)$$

Выполняя перемножение матриц (9.58)–(9.62), получаем ее элементы:

$$g_{11}^{(3)} = \frac{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)}{4k_1 k_2} e^{i(k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3)} + \frac{(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)}{4k_1 k_2} e^{i(k_1 d_1 - k_2 d_2 + k_3 d_3)}; \quad (9.64)$$

$$g_{12}^{(3)} = \frac{(k_1 + k_2)(k_2 - k_3)}{4k_1k_2} e^{i(k_1d_1 + k_2d_2 - k_3d_3)} + \frac{(k_1 - k_2)(k_2 + k_3)}{4k_1k_2} e^{i(k_1d_1 - k_2d_2 - k_3d_3)}; \quad (9.65)$$

$$g_{21}^{(3)} = \frac{(k_1 - k_2)(k_2 + k_3)}{4k_1k_2} e^{i(-k_1d_1 + k_2d_2 + k_3d_3)} + \frac{(k_1 + k_2)(k_2 - k_3)}{4k_1k_2} e^{i(-k_1d_1 - k_2d_2 + k_3d_3)}; \quad (9.66)$$

$$g_{22}^{(3)} = \frac{(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)}{4k_1k_2} e^{i(-k_1d_1 + k_2d_2 - k_3d_3)} + \frac{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)}{4k_1k_2} e^{i(-k_1d_1 - k_2d_2 - k_3d_3)}. \quad (9.67)$$

Перепишем те же элементы, группируя в квадратных скобках множители дробей и показатели экспонент в виде, совпадающем с (9.53)–(9.56):

$$g_{11}^{(3)} = \left[\frac{(k_1 + k_2)}{2k_1} e^{i(k_1d_1 + k_2d_2)} \right] \frac{(k_2 + k_3)}{2k_2} e^{ik_3d_3} + \left[\frac{(k_1 - k_2)}{2k_1} e^{i(k_1d_1 - k_2d_2)} \right] \frac{(k_2 - k_3)}{2k_2} e^{ik_3d_3}; \quad (9.68)$$

$$g_{12}^{(3)} = \left[\frac{(k_1 + k_2)}{2k_1} e^{i(k_1d_1 + k_2d_2)} \right] \frac{(k_2 - k_3)}{2k_2} e^{-ik_3d_3} + \left[\frac{(k_1 - k_2)}{2k_1} e^{i(k_1d_1 - k_2d_2)} \right] \frac{(k_2 + k_3)}{2k_2} e^{-ik_3d_3}; \quad (9.69)$$

$$g_{21}^{(3)} = \left[\frac{(k_1 - k_2)}{2k_1} e^{i(-k_1d_1 + k_2d_2)} \right] \frac{(k_2 + k_3)}{2k_2} e^{ik_3d_3} + \left[\frac{(k_1 + k_2)}{2k_1} e^{i(-k_1d_1 - k_2d_2)} \right] \frac{(k_2 - k_3)}{2k_2} e^{ik_3d_3}; \quad (9.70)$$

$$g_{22}^{(3)} = \left[\frac{(k_1 - k_2)}{2k_1} e^{i(-k_1d_1 + k_2d_2)} \right] \frac{(k_2 - k_3)}{2k_2} e^{-ik_3d_3} + \left[\frac{(k_1 + k_2)}{2k_1} e^{i(-k_1d_1 - k_2d_2)} \right] \frac{(k_2 + k_3)}{2k_2} e^{-ik_3d_3}. \quad (9.71)$$

Учитывая (9.53)–(9.56), эти же соотношения можно записать в виде:

$$g_{11}^{(3)} = g_{11}^{(2)} \frac{(k_2 + k_3)}{2k_2} e^{ik_3d_3} + g_{12}^{(2)} \frac{(k_2 - k_3)}{2k_2} e^{ik_3d_3}, \quad (9.72)$$

$$g_{12}^{(3)} = g_{11}^{(2)} \frac{(k_2 - k_3)}{2k_2} e^{-ik_3d_3} + g_{12}^{(2)} \frac{(k_2 + k_3)}{2k_2} e^{-ik_3d_3}, \quad (9.73)$$

$$g_{21}^{(3)} = g_{21}^{(2)} \frac{(k_2 + k_3)}{2k_2} e^{ik_3d_3} + g_{22}^{(2)} \frac{(k_2 - k_3)}{2k_2} e^{ik_3d_3}, \quad (9.74)$$

$$g_{22}^{(3)} = g_{21}^{(2)} \frac{(k_2 - k_3)}{2k_2} e^{-ik_3d_3} + g_{22}^{(2)} \frac{(k_2 + k_3)}{2k_2} e^{-ik_3d_3}. \quad (9.75)$$

Из этих выражений видно, что все элементы матрицы $\widehat{G}^{(3)}$ можно выразить через элементы матрицы для двух сред $\widehat{G}^{(2)}$, умножая их на множители, подобные элементам матрицы двух сред $\widehat{G}^{(2)}$ с учетом

увеличения индексов волновых чисел на единицу, а также замены показателя экспоненты для первых двух сред на показатель, соответствующий третьей среде.

Вынося за скобки общие множители, выражения (9.45)–(9.48) можно записать в более компактном виде:

$$g_{11}^{(2)} = \frac{1}{2k_1} \left[g_{11}^{(1)}(k_1 + k_2) + g_{12}^{(1)}(k_1 - k_2) \right] e^{ik_2 d_2}; \quad (9.76)$$

$$g_{12}^{(2)} = \frac{1}{2k_1} \left[g_{11}^{(1)}(k_1 - k_2) + g_{12}^{(1)}(k_1 + k_2) \right] e^{-ik_2 d_2}; \quad (9.77)$$

$$g_{21}^{(2)} = \frac{1}{2k_1} \left[g_{21}^{(1)}(k_1 + k_2) + g_{22}^{(1)}(k_1 - k_2) \right] e^{ik_2 d_2}; \quad (9.78)$$

$$g_{22}^{(2)} = \frac{1}{2k_1} \left[g_{21}^{(1)}(k_1 - k_2) + g_{22}^{(1)}(k_1 + k_2) \right] e^{-ik_2 d_2}. \quad (9.79)$$

К подобному же виду можно привести выражения (9.72)–(9.75):

$$g_{11}^{(3)} = \frac{1}{2k_2} \left[g_{11}^{(2)}(k_2 + k_3) + g_{12}^{(2)}(k_2 - k_3) \right] e^{ik_3 d_3}; \quad (9.80)$$

$$g_{12}^{(3)} = \frac{1}{2k_2} \left[g_{11}^{(2)}(k_2 - k_3) + g_{12}^{(2)}(k_2 + k_3) \right] e^{-ik_3 d_3}; \quad (9.81)$$

$$g_{21}^{(3)} = \frac{1}{2k_2} \left[g_{21}^{(2)}(k_2 + k_3) + g_{22}^{(2)}(k_2 - k_3) \right] e^{ik_3 d_3}; \quad (9.82)$$

$$g_{22}^{(3)} = \frac{1}{2k_2} \left[g_{21}^{(2)}(k_2 - k_3) + g_{22}^{(2)}(k_2 + k_3) \right] e^{-ik_3 d_3}. \quad (9.83)$$

Итак, выражения (9.72)–(9.75) для матрицы $\widehat{G}^{(3)}$ по структуре подобны выражениям (9.45)–(9.48) для матрицы $\widehat{G}^{(2)}$. То же можно сказать относительно выражений (9.80)–(9.83) и (9.76)–(9.79)

Таким образом, зная элементы матрицы $\widehat{G}^{(1)}$ можно найти элементы матрицы $\widehat{G}^{(2)}$, зная которые, далее можно найти элементы матрицы $\widehat{G}^{(3)}$.

Следует заметить, что при этом волновые числа $k_{1,2,3}$ и размеры сред $d_{1,2,3}$ предполагаются заранее заданными как условия исходной задачи.

Замечание. Выполненная авторами проверка получения элементов матриц для четырех и пяти сред показывает, что структура выражения элементов последующих матриц через элементы предыдущих, наблюдаемая для соотношений (9.72)–(9.75) и (9.45)–(9.48), полностью сохраняется. Дальнейшую проверку, в том числе доказательство такого положения для произвольного числа сред методом математической индукции [176], авторы рекомендуют любознательному читателю в качестве полезного упражнения.

9.1.5. Результирующая матрица для произвольного числа сред

Обобщим теперь алгоритм, приведенный в предыдущем разделе, на произвольное число сред.

Прежде всего рассмотрим вычисление отдельных матриц распространения и связи, для чего обратимся к матрицам (9.58)–(9.62). Можно видеть, что первые три матрицы (9.58)–(9.60) здесь повторяют матрицы предыдущего случая (9.39)–(9.41) с заменой верхнего индекса «2» на «3», а третья и четвертая матрицы (9.61) и (9.62) повторяют (9.59) и (9.60) с увеличением всех индексов на единицу. Путем прямой проверки можно убедиться, что при дальнейшем увеличении числа сред на единицу только последние две матрицы изменяются, приобретая индексы на единицу большие индексов предыдущих матриц подобного вида. Таким образом, при машинном вычислении матриц для произвольного числа сред можно воспользоваться циклом, обращающимся только к одной подпрограмме, которая будет вычислять только две матрицы типа $\hat{A}_{n-1}^{(n)}$ и $C_n^{(n)}$, где n — номер той среды, для которой вычисляются данные матрицы. При этом, если структура в целом содержит N сред, то последним значением n будет $n = N$.

Теперь обратимся к вычислению элементов результирующих матриц. Поскольку элементы матриц получаются из элементов предыдущих единообразным образом, подобным получению элементов $g_{ik}^{(3)}$ из элементов $g_{ik}^{(2)}$ в виде (9.80)–(9.83), учитывая увеличение соответствующих индексов на единицу, в формулах (9.80)–(9.83) выполним замены: $2 \rightarrow n$ и $3 \rightarrow n + 1$. При этом получаем для результирующей матрицы $\hat{G}^{(n+1)}$ элементы в виде:

$$g_{11}^{(n+1)} = \frac{1}{2k_n} \left[g_{11}^{(n)}(k_n + k_{n+1}) + g_{12}^{(n)}(k_n - k_{n+1}) \right] e^{ik_{n+1}d_{n+1}}; \quad (9.84)$$

$$g_{12}^{(n+1)} = \frac{1}{2k_n} \left[g_{11}^{(n)}(k_n + k_{n+1}) + g_{12}^{(n)}(k_n + k_{n+1}) \right] e^{-ik_{n+1}d_{n+1}}; \quad (9.85)$$

$$g_{21}^{(n+1)} = \frac{1}{2k_n} \left[g_{21}^{(n)}(k_n + k_{n+1}) + g_{22}^{(n)}(k_n - k_{n+1}) \right] e^{ik_{n+1}d_{n+1}}; \quad (9.86)$$

$$g_{22}^{(n+1)} = \frac{1}{2k_n} \left[g_{21}^{(n)}(k_n - k_{n+1}) + g_{22}^{(n)}(k_n + k_{n+1}) \right] e^{-ik_{n+1}d_{n+1}}. \quad (9.87)$$

Последовательно повторяя такое вычисление от $n = 1$ до $n = N$, где N — число сред в полной структуре, можно получить результирующую матрицу $\hat{G}^{(N)}$, которая связывает векторы начала и конца структуры соотношением, подобным (9.29):

$$\begin{pmatrix} -\frac{A}{B} \end{pmatrix} = \hat{G}^{(N)} \begin{pmatrix} -\frac{C}{D} \end{pmatrix}. \quad (9.88)$$

В результате последовательных вычислений по формулам (9.84)–(9.87) от 1 до N , матрица $\hat{G}^{(N)}$ приобретает вид:

$$\hat{G}^{(N)} = \begin{pmatrix} -\frac{g_{11}^{(N)}}{g_{21}^{(N)}} & \frac{g_{12}^{(N)}}{g_{22}^{(N)}} \end{pmatrix}, \quad (9.89)$$

элементы которой определяются соотношениями

$$g_{11}^{(N)} = \frac{1}{2k_{N-1}} [g_{11}^{(N-1)}(k_{N-1} + k_N) + g_{12}^{(N-1)}(k_{N-1} - k_N)] e^{ik_N d_N}; \quad (9.90)$$

$$g_{12}^{(N)} = \frac{1}{2k_{N-1}} [g_{11}^{(N-1)}(k_{N-1} + k_N) + g_{12}^{(N-1)}(k_{N-1} + k_N)] e^{-ik_N d_N}; \quad (9.91)$$

$$g_{21}^{(N)} = \frac{1}{2k_{N-1}} [g_{21}^{(N-1)}(k_{N-1} + k_N) + g_{22}^{(N-1)}(k_{N-1} - k_N)] e^{ik_N d_N}; \quad (9.92)$$

$$g_{22}^{(N)} = \frac{1}{2k_{N-1}} [g_{21}^{(N-1)}(k_{N-1} - k_N) + g_{22}^{(N-1)}(k_{N-1} + k_N)] e^{-ik_N d_N}, \quad (9.93)$$

где элементы $g_{ik}^{(N-1)}$ предполагаются вычисленными на предыдущем шаге.

Таким образом, при машинном вычислении матриц для произвольного числа сред можно воспользоваться циклом, обращающимся только к одной подпрограмме, которая будет вычислять элементы последующей матрицы $g_{ik}^{(n+1)}$ на основе элементов предыдущей матрицы $g_{ik}^{(n)}$, причем цикл будет выполняться путем последовательного перебора всех сред от 1 до номера N . При этом в качестве начальной точки следует брать элементы $g_{ik}^{(1)}$, определяемые формулами (9.34)–(9.37), после чего переходить к формулам (9.76)–(9.79), что уже сделает подпрограмма, затем к формулам (9.80)–(9.83) также с помощью той же подпрограммы и так далее, вплоть до получения формул (9.90)–(9.93).

9.1.6. Переход от цепочки четырехполюсников к волноведущей структуре

Итак, элементы результирующей матрицы $\widehat{G}^{(N)}$ можно считать найденными, то есть матрицу полностью определенной.

Однако основная задача состоит в том, чтобы получить векторы, соответствующие входу и выходу волн из структуры, что в матричной записи имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -\frac{B}{C} \\ -\frac{A}{D} \end{pmatrix} = \widehat{H}^{(N)} \begin{pmatrix} -\frac{A}{D} \\ -\frac{B}{C} \end{pmatrix}. \quad (9.94)$$

То есть теперь надо найденную матрицу $\widehat{G}^{(N)}$ преобразовать в матрицу $\widehat{H}^{(N)}$.

Запишем (9.88) с учетом (9.89) в алгебраическом виде:

$$A = g_{11}^{(N)} C + g_{12}^{(N)} D; \quad (9.95)$$

$$B = g_{21}^{(N)} C + g_{22}^{(N)} D. \quad (9.96)$$

Эти соотношения можно рассматривать как систему уравнений, в которой неизвестными являются A и B , а заданными C и D . В то же время, в волноведущую структуру входят волны A и D , а выходят волны B и C . Связь между теми и другими амплитудами определяется единичными выражениями (9.95)–(9.96), поэтому для нахождения B и C

следует из системы (9.95)–(9.96) выразить эти амплитуды через A и D . Преобразуя систему (9.95)–(9.96) к такому виду, получаем:

$$B = \frac{g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} A + \frac{g_{11}^{(N)} g_{22}^{(N)} - g_{12}^{(N)} g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} D; \quad (9.97)$$

$$C = \frac{1}{g_{11}^{(N)}} A - \frac{g_{12}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} D. \quad (9.98)$$

Таким образом, в соответствии с (9.94), результирующая матрица $\hat{H}^{(N)}$ принимает вид:

$$\hat{H}^{(N)} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} & \frac{g_{11}^{(N)} g_{22}^{(N)} - g_{12}^{(N)} g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \\ \hline \frac{1}{g_{11}^{(N)}} & -\frac{g_{12}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \end{array} \right), \quad (9.99)$$

где элементы $g_{ik}^{(N)}$ определяются формулами (9.90)–(9.93).

9.1.7. Коэффициенты отражения и прохождения

В качестве заключительного шага, теперь, когда амплитуды волн B и C , выходящих из структуры, получены, можно определить коэффициенты отражения и прохождения по энергии, равные отношениям потоков отраженной и проходящей волн к потоку волны падающей [2, 54, 60, 62]. В случае падения одной волны в положительном направлении оси Ox , эти коэффициенты определяются формулами [2, 47, 48, 54, 60, 62]:

$$R_e^{(N,A)} = \left| \frac{B(A)}{A} \right|^2 = \left| \frac{g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \right|^2; \quad (9.100)$$

$$T_e^{(N,A)} = \left| \frac{C(A)}{A} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{k_N}{k_1} \right) = \left| \frac{1}{g_{11}^{(N)}} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{k_N}{k_1} \right). \quad (9.101)$$

где амплитуды отраженной $B(A)$ и проходящей $C(A)$ волн, определяются первыми слагаемыми формул (9.97)–(9.98). Подобные коэффициенты при падении волны в отрицательном направлении оси Ox имеют вид:

$$R_e^{(N,D)} = \left| \frac{C(D)}{D} \right|^2 = \left| -\frac{g_{12}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \right|^2; \quad (9.102)$$

$$T_e^{(N,D)} = \left| \frac{B(D)}{D} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{k_1}{k_N} \right) = \left| \frac{g_{11}^{(N)} g_{22}^{(N)} - g_{12}^{(N)} g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{k_1}{k_N} \right), \quad (9.103)$$

где амплитуды $B(D)$ и $C(D)$ определяются вторыми слагаемыми формул (9.97)–(9.98).

При одновременном падении двух встречных волн A и D на оба конца структуры можно определить обобщенные коэффициенты выхода, равные сумме отношений потоков волн, выходящих в ту и другую стороны, к потокам соответствующих падающих волн:

$$\begin{aligned} P_e^{(N+)} &= R_e^{(N,A)} + T_e^{(N,D)} = \\ &= \left| \frac{B(A)}{A} \right|^2 + \left| \frac{B(D)}{D} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{k_1}{k_N} \right) = \\ &= \left| \frac{g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \right|^2 + \left| \frac{g_{11}^{(N)} g_{22}^{(N)} - g_{12}^{(N)} g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{k_1}{k_N} \right); \end{aligned} \quad (9.104)$$

$$\begin{aligned} P_e^{(N-)} &= R_e^{(N,D)} + T_e^{(N,A)} = \\ &= \left| \frac{B(D)}{D} \right|^2 + \left| \frac{C(A)}{A} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{k_N}{k_1} \right) = \\ &= \left| -\frac{g_{12}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \right|^2 + \left| \frac{1}{g_{11}^{(N)}} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{k_N}{k_1} \right). \end{aligned} \quad (9.105)$$

Замечание. В работах [47, 48] последний сомножитель в формулах для коэффициента прохождения (9.101), (9.102) представлен в виде отношения действительных частей тех же волновых чисел. Однако в работе [62] показано, что такое представление полностью корректно только при действительных волновых числах, когда мнимые части в волновых числах просто отсутствуют, так что отношение действительных частей волновых чисел и действительная часть их отношения между собой совпадают. В той же работе показано, что более корректным является представление последнего сомножителя в выражениях типа (9.101), (9.103) в виде действительной части отношения волновых чисел, которое и будет использоваться далее. То же касается формул для обобщенных коэффициентов выхода (9.104), (9.105).

9.1.8. Схема пошагового определения амплитуд выходящих волн

Приведем схему расчета амплитуд выходящих из структуры волн B и C при условии задания амплитуд входящих волн A и D , распределяя последовательные действия по шагам в виде, удобном для формирования машинного алгоритма.

Будем полагать, что все участки структуры являются однородными, причем длины и волновые числа для каждого участка известны. То есть если изначально задаются только параметры среды (например, в случае электромагнитных волн — диэлектрическая и магнитная проницаемости), то в качестве предварительного этапа надо решить волновые уравнения в каждом участке среды и найти соответствующие волновые числа.

Прежде всего следует сформировать подпрограмму, рассчитывающую в соответствии с формулами (9.84)–(9.87) элементы последую-

щей матрицы $g_{ik}^{(n+1)}$ на основе элементов предыдущей $g_{ik}^{(n)}$. При этом в качестве входных параметров подпрограммы будут выступать волновые числа k_n , k_{n+1} и длины d_n , d_{n+1} предыдущего и последующего участков структуры, а также элементы матрицы $g_{ik}^{(n)}$, выходными же параметрами будут элементы $g_{ik}^{(n+1)}$.

Дальнейшая последовательность шагов следующая.

Шаг № 1.

Из полной структуры выделить единичные участки и границы между ними. Задать длины участков и определить полное число участков. Для всех участков задать соответствующие волновые числа. Задать амплитуды волн A и D , входящих в структуру.

Шаг № 2.

При заданных длине и волновому числу первого участка, найти элементы его матрицы по формулам (9.34)–(9.37).

Шаг № 3.

Путем обращения к подпрограмме, использующей формулы (9.84)–(9.87), по заданным длинам и волновым числам первого и второго участков, а также элементам матрицы первого участка найти элементы матрицы второго участка.

Шаг № 4.

Повторение в цикле шага № 3 с увеличением всех индексов на единицу, вплоть до последнего участка структуры с номером N , в результате чего будут получены элементы $g_{ik}^{(N)}$ последней результирующей матрицы $\hat{G}^{(N)}$, в соответствии с формулами (9.90)–(9.93).

Шаг № 5.

По заданным амплитудам входящих в структуру волн A и D , с использованием элементов $g_{ik}^{(N)}$, по формулам (9.97)–(9.98), найти амплитуды выходящих из структуры волн B и C .

Шаг № 6.

Вывести полученные значения B и C , а также другие необходимые по заданию оператора на внешний носитель.

9.1.9. Блок-схема алгоритма

Для удобства машинного программирования традиционным приемом представления алгоритма является изображение последовательности действий в виде блок-схемы [180, с. 372–419]. Для рассматриваемого алгоритма такая схема приведена на рис. 9.4.

В таком виде алгоритм позволяет вычислить амплитуды выходящих волн и коэффициенты отражения и прохождения при одном наборе входных параметров, то есть в одной точке.

Если требуется получить зависимость амплитуд или коэффициентов от какого-то одного из входных параметров, меняющегося по заданному закону, например, равномерными шагами, то приведенный

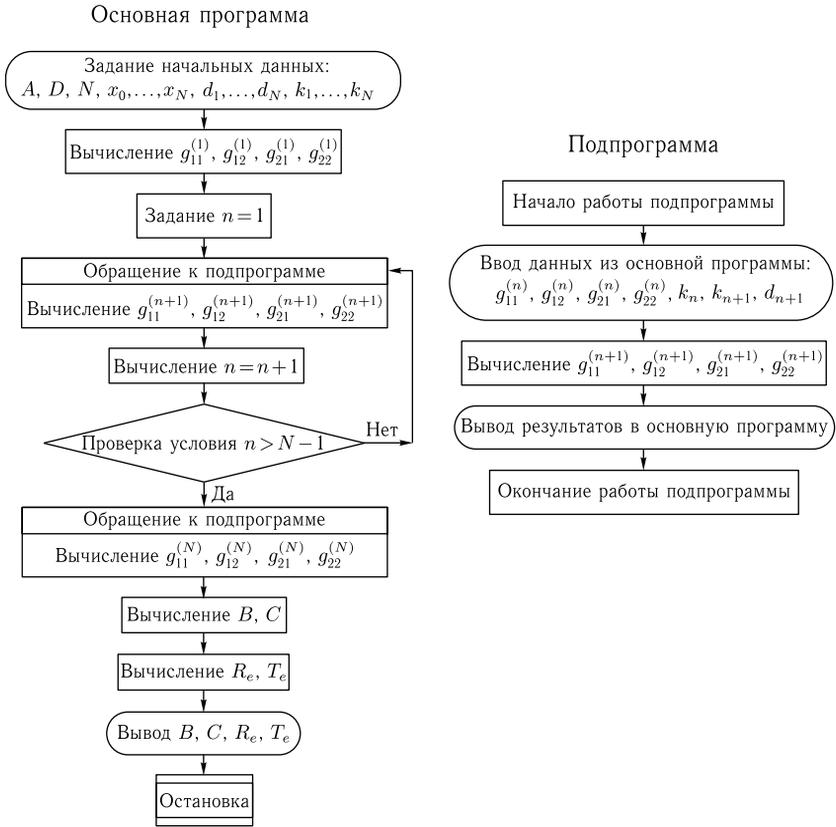


Рис. 9.4. Блок-схема алгоритма вычисления амплитуд выходящих волн и коэффициентов отражения и прохождения

алгоритм должен быть включен в цикл, состоящий в пошаговом задании требуемого параметра с соответствующим пошаговым выводом амплитуд или коэффициентов.

9.2. Применение матричного алгоритма для расчета падения волны на наклонный барьер

В качестве примера реализации предложенного алгоритма обратимся к задаче, решение которой с достаточной точностью прямым методом заведомо недостижимо по причине крайней громоздкости раскрытия требуемых детерминантов.

9.2.1. Геометрические и волноведущие параметры структуры

Будем рассматривать задачу о распространении одномерной волны через «наклонный барьер», который представим в виде структуры,

содержащей 16 однородных слоев, то есть участков, расположенных друг за другом вдоль оси Ox . Нумерацию участков введем в положительном направлении оси Ox от 1 до 16. Будем считать, что волновое число от участка к участку линейно возрастает ступенчатым образом. В силу однородности участков волновые числа всех волн являются действительными. Ограничимся случаем падения на структуру только одной волны, распространяющейся в положительном направлении оси Ox . Амплитуду такой волны обозначим через A .

Замечание. В настоящем рассмотрении число участков, на которые разбивается структура, принято равным шестнадцати. Это число не является обязательным и в общем случае может быть произвольным. Вообще говоря, увеличение числа участков позволяет рассмотреть структуру с большей подробностью, но и приводит к увеличению объема вычислений. Поэтому здесь число участков выбрано как компромисс между детальностью структуры и удобством расчета. Решение задачи с другим числом участков авторы могут рекомендовать любознательному читателю в качестве полезного упражнения.

Схема зависимости волнового числа от координаты иллюстрируется рис. 9.5. Рассмотрены восемь различных вариантов зависимости волнового числа от координаты, обозначенные цифрами от 1 до 8 (в кругах) на левом краю рисунка. Весь расчет проводится далее в условных (относительных) единицах, поэтому конкретная размерность не указывается.

Вся структура имеет полную длину вдоль оси Ox , равную 16 условным единицам, начало структуры соответствует координате x_0 , конец — координате x_{16} . Структура содержит 16 следующих друг за другом пронумерованных от 1 до 16 участков, начальные и конечные координаты которых обозначены через x_{n-1} и x_n , где n — номер участка, то есть $n = 1, 2, \dots, 16$. Длины участков обозначены через d_n , так что

$$d_n = x_n - x_{n-1}. \quad (9.106)$$

Соответствующие участкам волновые числа обозначены через k_n , так что k_n — волновое число волны на участке n , то есть между координатами x_{n-1} и x_n . Таким образом, волновое число участка 1 обозначается через k_1 , волновое число участка 16 обозначается через k_{16} .

По мере увеличения номера участка волновые числа увеличиваются ступенчатым образом с начальной величины k_1 при величине единичной ступеньки Δk , так что полное значение волнового числа на участке с номером n равно:

$$k_n = k_1 + \Delta k(n - 1), \quad (9.107)$$

где отсчет начинается с $n = 2$ и продолжается до $n = 16$.

В проводимом далее численном расчете рассматривается частный случай, когда

$$k_1 = \Delta k, \quad (9.108)$$

так что

$$k_n = \Delta k \cdot n. \quad (9.109)$$

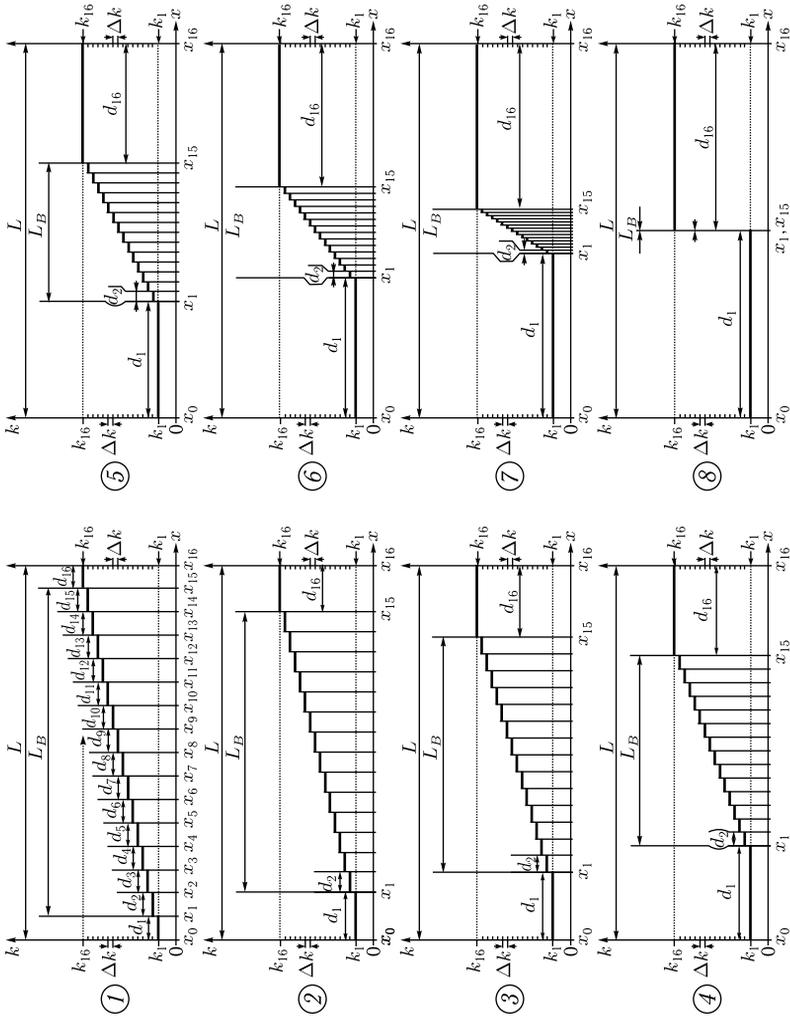


Рис. 9.5. Схема зависимости волнового числа от координаты для различных вариантов многослойной структуры

Такое условие принято для простоты рассмотрения. В общем же случае k_1 в формуле (9.107) может быть произвольным.

В рассматриваемом на рис. 9.5 частном случае длины первого и последнего участков положены равными друг другу, то есть

$$d_1 = d_{16}. \quad (9.110)$$

Длины всех остальных участков равны между собой, однако в общем случае от длин участков 1 и 16 могут отличаться. Будем считать, что совокупность участков от 2 до 15 по величине волнового числа образует «барьер», высота которого постепенно нарастает. Длина L_B такого барьера, остающаяся за вычетом из полной длины структуры L длин первого и последнего участков d_1 и d_{16} , соответственно равна:

$$L_B = L - d_1 - d_{16}. \quad (9.111)$$

Число участков, образующих барьер, равно $16 - 2 = 14$. Таким образом, часть структуры от участка 2 до участка 15, то есть между координатами x_1 и x_{15} , разделена на 14 равных по длине участков. Длину таких равных участков от 2 до 15 обозначим через Δd , то есть

$$d_2 = d_3 = \dots = d_{15} = \Delta d. \quad (9.112)$$

Ввиду равенства длин участков от 2 до 15, при условии линейного увеличения волнового числа, длина барьера L_B , равна величине, в 14 раз большей, чем Δd :

$$L_B = d_2 + d_3 + \dots + d_{15} = 14\Delta d. \quad (9.113)$$

Поскольку условиями рассматриваемой далее задачи задаются полная длина структуры L и длины первого и последнего участков d_1 и d_{16} , а величина Δd является вторичной, то она может быть определена по формуле

$$\Delta d = L_B/14 = (L - d_1 - d_{16})/14. \quad (9.114)$$

Перечисленные геометрические параметры структуры приведены в таблице 9.1.

Таблица 9.1. Геометрические параметры структуры

№	d_1	$\Delta d(d_2, \dots, d_{15})$	d_{16}	L_B
1	1,0000	1,0000	1,0000	14,0000
2	2,0000	0,8571	2,0000	12,0000
3	3,0000	0,7143	3,0000	10,0000
4	4,0000	0,5714	4,0000	8,0000
5	5,0000	0,4286	5,0000	6,0000
6	6,0000	0,2857	6,0000	4,0000
7	7,0000	0,1429	7,0000	2,0000
8	8,0000	0,0000	8,0000	1,0000

В первом столбце таблицы приведены номера вариантов структуры, отмеченные на рис. 9.5 цифрами в кругах. Во втором столбце приведена длина первого участка. В третьем столбце — длины участков от 2 до 15, внутри каждого варианта структуры равные друг другу, но между различными вариантами структуры — отличные. В четвертом столбце таблицы приведена длина последнего участка, имеющего номер 16. Длина этого участка равна длине первого. В пятом столбце таблицы приведена суммарная длина L_B всех участков от 2 до 15, определяемая формулой (9.114).

Из рассмотрения рис. 9.5, в сочетании с данными таблицы 9.1, можно видеть, что по мере увеличения координаты x волновое число сначала, в пределах первого участка, не меняется, затем на участках 2–15 ступенчатым образом растет, после чего на последнем участке № 16 снова остается постоянным. При этом ступеньки «лестницы» по высоте всегда остаются постоянными, а по длине в пределах каждого варианта структуры также сохраняются, но по мере увеличения длины участков 1 и 16 становятся короче.

Такую лестничную структуру, учитывая малость высоты отдельных ступенек Δk относительно полного перепада волнового числа от k_1 до k_{16} , можно рассматривать как приближение плавного возрастания волнового числа на ограниченном участке структуры от x_1 до x_{15} . При этом минимум волнового числа с учетом условия (9.108) равен Δk , а максимум равен $16 \cdot \Delta k$. То есть на структуре по волновому числу имеется определенный «барьер», высота которого остается постоянной, а крутизна увеличивается от достаточно плавной (структура № 1 на рис. 9.5) до ступенчатого перепада (структура № 8 на рис. 9.5) с резким скачком волнового числа от k_1 до k_{16} , происходящего в одной точке, где координаты x_1 и x_{15} сливаются.

9.2.2. Дискретная вариация длины барьера

Из рис. 9.5 можно видеть, что уменьшение длины барьера L_B от эпюры № 1 до эпюры № 8 эквивалентно увеличению крутизны барьера. До есть на эпюре № 1 барьер достаточно плавный, тогда как на эпюре № 8 — обращается в резкий перепад по волновому числу от минимума Δk до максимума $16\Delta k$.

Из качественного рассмотрения можно полагать, что увеличение крутизны барьера должно приводить к увеличению отражения падающей волны и уменьшению ее прохождения.

Количественное рассмотрение, то есть расчет коэффициентов отражения и прохождения, выполнялся в соответствии с алгоритмом, приведенном в разделах 9.1.8, 9.1.9. Программа расчета была составлена на языке FORTRAN [181, с. 140–259], содержала около 160 строк, в том числе одну подпрограмму, содержащую 12 строк. Шаг по координате при d_1 меньше 6 отн. ед. составлял от 0,02 отн. ед., при d_1 от 6 до 7 отн. ед. составлял 0,001 отн. ед. Время счета на компьютере с частотой 2400 МГц составляло от долей секунды до 2–3 с.

Для расчета коэффициентов отражения и прохождения по энергии использовались формулы (9.100)–(9.101), для 16 слоев имеющие вид:

$$R_e^{(16,A)} = \left| \frac{B(A)}{A} \right|^2; \quad (9.115)$$

$$T_e^{(16,A)} = \left| \frac{C(A)}{A} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{k_{16}}{k_1} \right), \quad (9.116)$$

где A — амплитуда падающей волны, $B(A)$ и $C(A)$ — амплитуды отраженной и проходящей волн, при $D = 0$ определяемые первыми слагаемыми формул (9.97), (9.98)

Поскольку формулы расчета элементов матрицы \hat{G} типа (9.84)–(9.87) и (9.90)–(9.93), а также формулы для определения B и C вида (9.97)–(9.98) содержат экспоненты с мнимыми показателями, весь расчет проводился с числами в комплексной форме.

Результаты расчета представлены на рис. 9.6, где приведены зависимости коэффициентов отражения и прохождения по энергии R_e и T_e (для простоты обозначений верхние индексы опущены) от длины

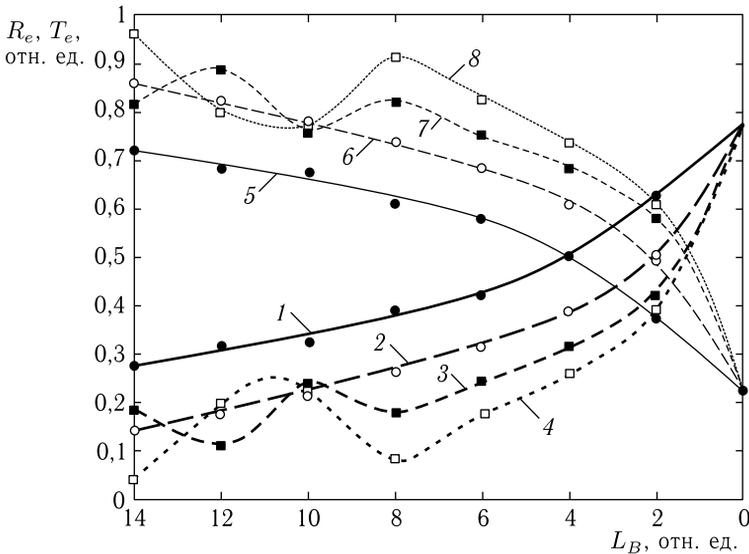


Рис. 9.6. Зависимости коэффициентов отражения и прохождения по энергии R_e и T_e от длины барьера L_B при различных значениях интервала волнового числа Δk , а также начального и конечного волновых чисел: 1, 5 — $\Delta k = 0,10$, $k_1 = 0,10$, $k_{16} = 1,60$; 2, 6 — $\Delta k = 0,20$, $k_1 = 0,20$, $k_{16} = 3,20$; 3, 7 — $\Delta k = 0,30$, $k_1 = 0,30$, $k_{16} = 4,80$; 4, 8 — $\Delta k = 0,40$, $k_1 = 0,40$, $k_{16} = 6,40$. Точки соответствуют восьми позициям по L_B на рис. 9.5. Утолщенные линии 1–4 соответствуют коэффициенту отражения R_e , тонкие 5–8 — коэффициенту прохождения T_e

барьера L_B . По рисунку слева направо величина L_B уменьшается, то есть крутизна перепада увеличивается. Приведены зависимости при различных значениях интервала волнового числа, а также начального и конечного волновых чисел.

Все зависимости для коэффициента отражения по мере уменьшения величины L_B (слева направо), то есть увеличения крутизны перепада волновых чисел, возрастают, стремясь к одной и той же величине 0,7785. Коэффициенты прохождения при этом убывают, стремясь к величине 0,2215. Числовые значения этих величин соответствуют коэффициентам отражения и прохождения для одной границы [47, 48] (см. также раздел 2.1.3, форм. (2.22), (2.23)), разделяющей две среды с волновыми числами k_1 и k_{16} (участвуют только эти два числа, так как промежуточные среды отсутствуют):

$$R_e|_{L_B=0} = \left| \frac{k_{16} - k_1}{k_{16} + k_1} \right|^2; \quad (9.117)$$

$$T_e|_{L_B=0} = \left| \frac{2k_1}{k_{16} + k_1} \right|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{k_{16}}{k_1} \right); \quad (9.118)$$

Путем прямой проверки можно убедиться, что при принятом выше условии (9.108), согласно которому $k_1 = \Delta k$ и $k_{16} = 16\Delta k$, эти величины при любой величине Δk сохраняют значения 0,7785 и 0,2215.

Из рисунка видно, что зависимости коэффициента прохождения (5–8) являются зеркальным отражением относительно уровня 0,5 зависимостей для коэффициента отражения (1–4). Проверка показывает, что сумма того и другого коэффициентов равна единице:

$$R_e + T_e = 1, \quad (9.119)$$

что является выражением закона сохранения энергии (раздел 2.1.3, форм. (2.24)).

Кривые для коэффициента отражения (1–4) по мере увеличения перепада волнового числа Δk , приходящегося на одну ступеньку, проходят тем ниже, чем больше этот перепад. В то же время чем единичный перепад больше, тем больше и полный перепад на длине барьера, равный $16\Delta k$, так что отражение при увеличении Δk отражение должно увеличиваться. То есть вся кривая при увеличении Δk должна подниматься вверх. Однако движение правого конца кривой вверх ограничено точкой $R_e(L_B = 0) = 0,7785$, поэтому основная часть кривой вынуждена снижаться. Таким образом, условие (9.108), то есть $k_1 = \Delta k$, является как бы условием нормировки, заставляющим правые концы всех кривых сходиться в одну точку, определяемую формулой (9.117). При этом чем больше единичный перепад Δk , тем крутизна правой части кривой становится больше, так что основная ее часть вынуждена располагаться ниже. Поэтому кривая 2 проходит ниже кривой 1, а кривая 3 — ниже кривой 2 и так далее. Коэффициент прохождения ведет

себя зеркальным образом, поэтому кривые 5–8, будучи вынужденными приходиться при $L_B \rightarrow 0$ в точку $T_e(L_B = 0) = 0,2215$, проходят тем выше, чем Δk больше, то есть кривая 6 проходит выше кривой 5, кривая 7 — выше кривой 6 и так далее.

9.2.3. Непрерывная вариация длины барьера

Из рис. 9.6 можно видеть, что кривые 1 и 2, а также соответственно 5 и 6 на всем протяжении сохраняют монотонный характер, тогда как кривые 3 и 7, а также 4 и 8 при L_B больше 0,8 (то есть левее этого значения) имеют осциллирующий характер. На кривых 4 и 8 осцилляции выражены заметно сильнее, чем на кривых 3 и 7. Для более подробного выявления характера осцилляции было принято исследование коэффициентов отражения и прохождения не в отдельных точках, соответствующих ступенчатому изменению длины барьера, представленному на рис. 9.5 и нашедшему свое отражение при построении кривых на рис. 9.6, а при плавном непрерывном изменении длины барьера L_B .

При расчете использовался алгоритм, предложенный в разделах 9.1.8, 9.1.9. Алгоритм в том виде, как он там описан, направлен на получение коэффициентов отражения и прохождения при одном фиксированном значении длин первого и последнего участков d_1 и d_{16} , длины же остальных участков определяются путем деления длины барьера L_B на 14 в соответствии с таблицей 9.1. Для того, чтобы получить плавные зависимости коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера, алгоритм выполнялся в цикле при изменении d_1 достаточно мелкими шагами. В качестве оптимального с точки зрения достаточной точности и малого времени счета при изменении полной длины первого участка от 1 до 8 было принято значение $\Delta d_1 = 0,02$. При этом время счета составляло 2–4 с.

На рис. 9.7 представлены результаты расчета зависимости коэффициента отражения от длины барьера при различных значениях единичной ступеньки волнового числа.

Можно видеть, что зависимости ведут себя образом, сходным с представленными на рис. 9.6 кривыми 1–4. Взаимное расположение кривых и стремление их в точку 0,7785 при $L_B \rightarrow 0$ также соответствуют тому же рисунку. Однако здесь осцилляции проявляются значительно сильнее.

Кривая 1, соответствующая малому значению ступеньки Δk , то есть малому перепаду барьера в целом, равному 0,15 отн. ед. (от Δk до $16\Delta k$), осцилляций не имеет.

На кривой 2, соответствующей высоте барьера 0,45 отн. ед., уже наблюдается заметный изгиб, который можно трактовать как одну осцилляцию с периодом, равным 14 отн. ед. На кривой 3, соответствующей высоте барьера 1,50 отн. ед., уже наблюдаются 4 четкие осцилляции с периодом около 3,5 отн. ед. На кривой 4, соответствующей высоте барьера 4,50 отн. ед. количество осцилляций возрастает до 10, а период

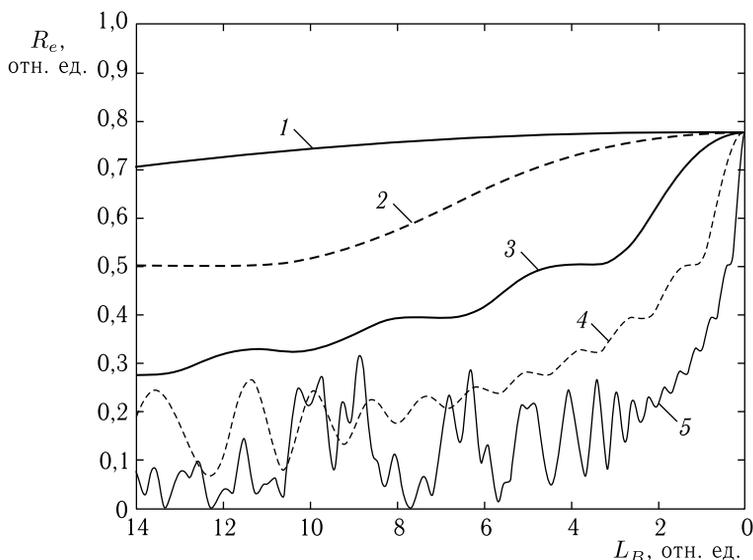


Рис. 9.7. Зависимости коэффициента отражения от длины барьера при различных значениях единичной ступеньки волнового числа Δk : 1 — 0,01; 2 — 0,03; 3 — 0,10; 4 — 0,30; 5 — 1,00. Начальная длина барьера L_{B0} равна 14 отн. ед. и далее уменьшается до нуля

падает до 0,14 отн. ед., однако осцилляции остаются еще довольно регулярными. Амплитуда осцилляций на кривых 2–4 в основном имеет одинаковый порядок, составляя от 0,05 до 0,20 отн. ед.

На кривой 5, соответствующей высоте барьера 16,00 отн. ед., амплитуда осцилляций возрастает почти на порядок (полный размах до 0,3 отн. ед.), период падает до 0,05 отн. ед., а структура приобретает в значительной степени случайный характер. Контрольная проверка показывает, что при дальнейшем увеличении перепада волнового числа (до $\Delta k = 10$) амплитуда осцилляций еще несколько нарастает (до 20%), период уменьшается до 0,005 отн. ед., а характер в целом приближается к хаотическому.

Соответствующие рис. 9.7 зависимости для коэффициента прохождения от длины барьера при различных значениях ступеньки волнового числа показаны на рис. 9.8.

Видно, что здесь кривые зеркальным образом повторяют подобные кривые для коэффициента отражения, представленные на рис. 9.7. Характер кривых остается аналогичным характеру кривых 5–8 на рис. 9.6. Стремление к величине 0,2215 отн. ед. при $L_B \rightarrow 0$ также сохраняется. Контрольная проверка показывает, что условие равенства суммы коэффициентов отражения и прохождения единице (9.119) также выполняется с высокой точностью, что соответствует закону сохранения энергии.

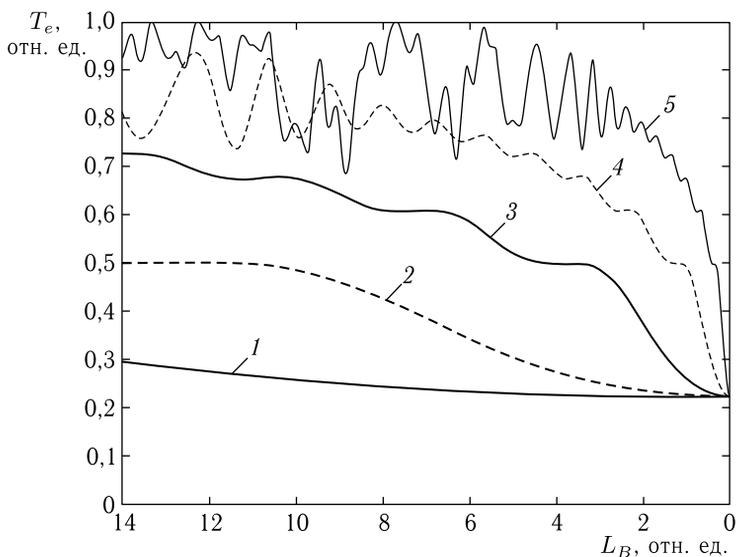


Рис. 9.8. Зависимости коэффициента прохождения от длины барьера при различных значениях единичной ступеньки волнового числа Δk : 1 — 0,01; 2 — 0,03; 3 — 0,10; 4 — 0,30; 5 — 1,00. Начальная длина барьера L_{B0} равна 14 отн. ед. и далее уменьшается до нуля

Замечание. Наблюдаемый здесь близкий к хаотическому характер зависимостей не является «хаосом» или «динамическим хаосом» в традиционно принятой трактовке нелинейных колебаний. Согласно такой трактовке, «хаотические режимы характеризуются нерегулярным, похожим на случайный процесс, изменением динамических переменных во времени» [182, с. 25]. Здесь роль переменной играют коэффициенты отражения и прохождения, в роль времени — длина барьера. В то же время, наблюдаемые зависимости типа показанных кривыми 5 на рис. 9.7 и рис. 9.8 носят заметный элемент случайности, свойственный классическим хаотическим колебаниям. Поэтому для упрощения терминологии, будем далее называть такие зависимости «хаосом». Забегая вперед, заметим, что наблюдаемый здесь «хаос» может иметь элементы периодичности, проявляющиеся при большой длине структуры. Свойство периодичности также не соответствует классическому определению хаоса, так что к используемому здесь термину «хаос» следует относиться с определенной осторожностью. Более подробно о периодичности будет сказано далее в разделе 9.2.8.

Возвратимся теперь к основному изложению. Таким образом, из общего рассмотрения рис. 9.7 и рис. 9.8 следует, что осцилляции являются неотъемлемым свойством распространения волны через барьер ступенчатого характера. Можно полагать, что такие осцилляции, нарастающие по мере увеличения перепада волнового числа Δk , обусловлены

интерференционными явлениями при распространении волны за счет многократных переотражений на границах между однородными участками.

Из рассмотрения полной геометрии волноведущей структуры, представленной на рис. 9.5, можно видеть, что среди геометрических параметров можно выделить три характерных размера:

1 — длина первого участка d_1 , то есть от начала структуры до начала барьера;

2 — длина барьера L_B ;

3 — длина единичного участка внутри барьера Δd .

Кроме того могут выступать в качестве резонансных, приводящих к образованию стоячих волн, различные комбинации перечисленных размеров в той или иной совокупности. Можно полагать, что именно такое обстоятельство в наибольшей степени проявляется при больших значениях перепада волнового числа, что и приводит к хаотизации зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера

Для более подробного выяснения роли характерных размеров в формировании зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера, рассмотрим перечисленные выше факторы по отдельности.

9.2.4. Вариация длины первого участка

Вариация длины первого участка по существу означает перемещение барьера по длине структуры.

Как будет ясно из дальнейшего, длина барьера при его перемещении критическим параметром не является, то есть можно выбрать, исходя из двух факторов. Во-первых, барьер не должен быть очень коротким, чтобы при изменении его длины осцилляции коэффициентов проявлялись достаточно ярко, то есть при уменьшении длины барьера до нуля осцилляции коэффициентов происходили хотя бы три-пять раз. Во-вторых, барьер не должен быть очень длинным, чтобы при его перемещении по длине структуры допустимая величина смещения была достаточно заметной, то есть длина барьера должна быть хотя бы в два-три раза меньше длины структуры.

Возьмем барьер, длина которого составляет четверть длины структуры в целом. Такому барьеру соответствует эпюра №6 на рис. 9.5, где при полной длине структуры в 16 отн. ед. длина барьера равна 4 отн. ед.

Будем перемещать этот барьер по длине структуры. Обратимся к рис. 9.9, где показаны некоторые положения барьера при различных значениях длины первого участка d_1 . Изменение длины первого участка соответствует перемещению барьера слева направо. Для всех этих случаев в левом столбце показана начальная длина барьера, а в правом — минимальная, когда барьер вырождается в резкий перепад между начальным и конечным значениями волнового числа. То есть длина

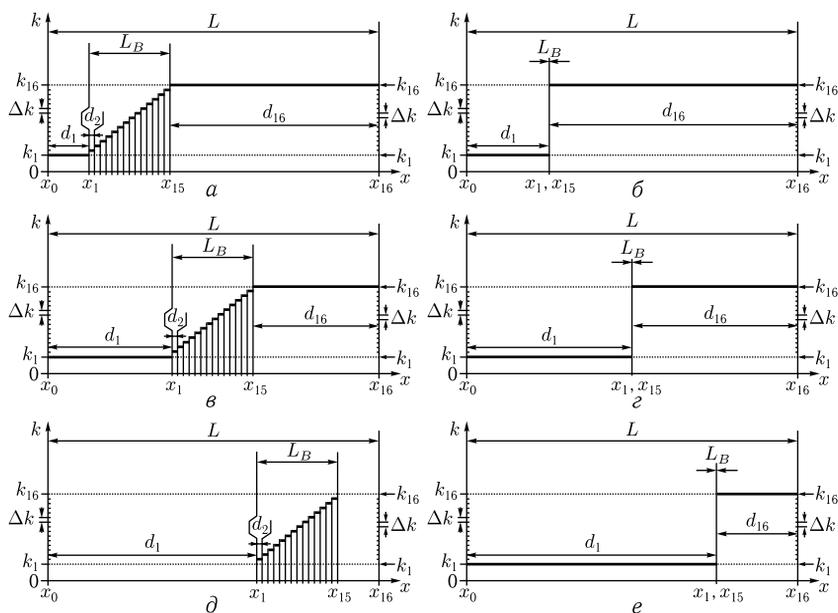


Рис. 9.9. Положение барьера при различных значениях длины первого участка d_1 . а, б — 2 отн. ед.; в, г — 6 отн. ед.; д, е — 10 отн. ед. Левый столбец (а, в, д) — начальная длина барьера — $L_B = 4$ отн. ед. Правый столбец (б, г, е) — конечная длина барьера — $L_B = 0$ отн. ед.

барьера слева направо уменьшается от начальной величины 4 отн. ед. до нуля.

Что при этом происходит с зависимостями коэффициентов отражения R_e и прохождения T_e от длины барьера L_B , показано на рис. 9.10, где приведены такие зависимости при положениях барьера, представленных на рис. 9.9, а также при различных значениях единичного перепада волнового числа Δk .

Из рисунка видно, что по мере увеличения единичного перепада волнового числа Δk (по любому из горизонтальных рядов) количество осцилляций и их дробность возрастают, что находится в соответствии с рис. 9.7 и рис. 9.8. В то же время при перемещении барьера, то есть при изменении длины первого участка (по любому из вертикальных столбцов), характер осцилляций и зависимости в целом не изменяются.

Контрольная проверка, выполненная при различных длинах барьера от 2 до 12 отн. ед. и при различных значениях перепада волнового числа от 0,05 до 10 отн. ед., показала то же самое, то есть неизменность зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от длины первого участка. То же касается длины последнего участка, который варьировался от 1 до 12 отн. ед.

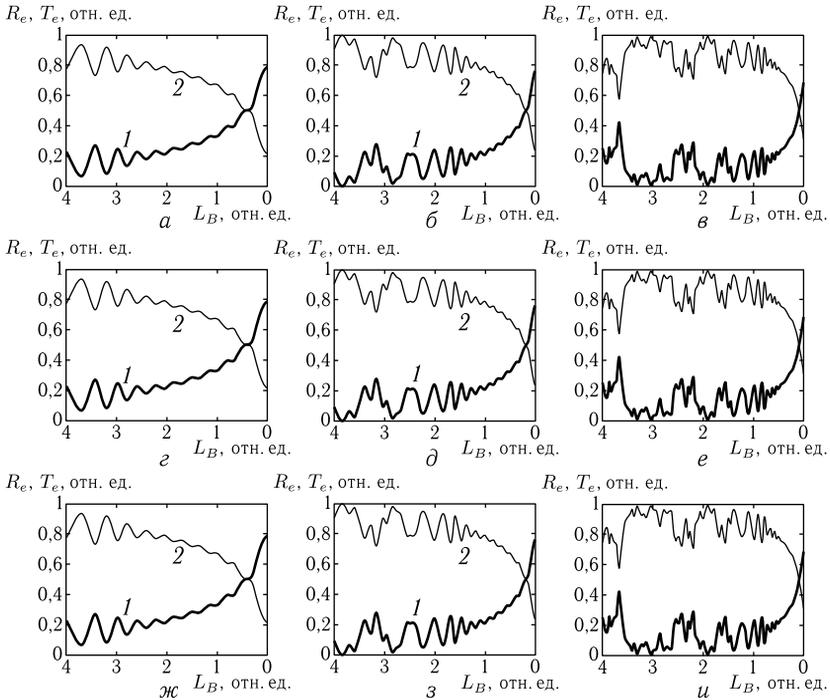


Рис. 9.10. Зависимости коэффициентов отражения R_e и прохождения T_e от длины барьера при различных вариациях длины первого участка, показанных на рис. 9.9. Верхний ряд (а, б, в) соответствует $d_1 = 2$ отн. ед. (а, б на рис. 9.9). Средний ряд (г, д, е) соответствует $d_1 = 6$ отн. ед. (в, г на рис. 9.9). Нижний ряд (ж, з, и) соответствует $d_1 = 10$ отн. ед. (д, е на рис. 9.9). Столбцы соответствуют различным значениям единичного перепада волнового числа. Левый столбец (а, г, ж) соответствует $\Delta k = 1$ отн. ед. Средний столбец (б, д, з) соответствует $\Delta k = 2$ отн. ед. Правый столбец (в, е, и) соответствует $\Delta k = 4$ отн. ед. Утолщенные линии 1 — коэффициент отражения R_e , тонкие линии 2 — коэффициент прохождения T_e

Таким образом, можно сделать вывод, что изменение длины первого или последнего участка, то есть перемещение барьера по длине структуры, в формировании зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера не участвует.

Из этого следует, что возможными причинами появления осцилляций на зависимостях коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера остаются длина единичного участка внутри барьера Δd и длина барьера L_B .

9.2.5. Характерные области изменения волнового числа

Обратимся еще раз к рис. 9.7 и рис. 9.8, где представлены зависимости коэффициента отражения и прохождения от длины барьера.

Для того, чтобы охватить большой интервал значений длины барьера, начальная его длина L_{B0} выбрана равной 14 отн. ед., как это было сделано при построении рис. 9.7 и рис. 9.8. Поскольку, как показано выше (раздел 9.2.4), характер зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от положения барьера не зависит, выбор длины барьера в 14 отн. ед. при полной длине структуры 16 отн. ед., общности рассмотрения не ограничивает.

Из рис. 9.7 и рис. 9.8 можно видеть, что по характеру зависимостей коэффициентов отражения R_e и прохождения T_e от длины барьера L_B при изменении величины ступеньки волнового числа Δk можно выделить три характерных области.

Область 1 — зависимость регулярная, осцилляции отсутствуют. Эта область соответствует $0 \leq \Delta k \leq \Delta k_1$, где $\Delta k_1 = 0,05$ отн. ед. Зависимости коэффициентов от длины барьера плавные, осцилляции отсутствуют.

Область 2 — зависимость регулярная, осциллирующая. Эта область соответствует $\Delta k_1 \leq \Delta k \leq \Delta k_2$, где $\Delta k_1 = 0,05$ отн. ед., $\Delta k_2 = 0,50$ отн. ед. Период осцилляций тем меньше, чем больше Δk .

Область 3 — зависимость нерегулярная, осциллирующая. Эта область соответствует $\Delta k_2 \leq \Delta k \leq \infty$, где $\Delta k_2 = 0,50$ отн. ед. Период осцилляций четко не выражен, меняется случайным образом. Перепады осцилляций тем чаще, чем больше Δk . При увеличении Δk выше 1,0 отн. ед. осцилляции приобретают хаотический характер.

Разграничения между областями не резкие, точность определения границ составляет порядка 20 %.

Можно полагать, что разнообразие зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера обусловлено интерференционными явлениями, сопровождающими распространение волны в многослойной структуре, имеющей множество резких границ между слоями.

В качестве причины интерференции можно полагать соотношение между длинами распространяющихся волн и геометрическими параметрами структуры, такими как длина барьера и длина его единичной ступеньки.

Длина волны обратно пропорциональна волновому числу, так что определяется по формуле

$$\lambda_k = 2\pi/(n\Delta k), \quad (9.120)$$

где n — номер ступеньки барьера.

В рассматриваемой геометрии полное волновое число на длине барьера может включать в себя от 1 до 16 ступенек, так что это число меняется от $k_{\min} = 1\Delta k$ до $k_{\max} = 16\Delta k$. Соответственно максимальное и минимальное значения длины волны равны:

$$\lambda_{\max} = 2\pi/(1\Delta k), \quad \lambda_{\min} = 2\pi/(16\Delta k). \quad (9.121)$$

Средняя величина между этими значениями равна:

$$\lambda_m = 2\pi/(8\Delta k). \quad (9.122)$$

Обратимся к рис. 9.11, иллюстрирующему соотношение между величиной ступеньки по волновому числу Δk и соответствующей длиной волны λ_k .

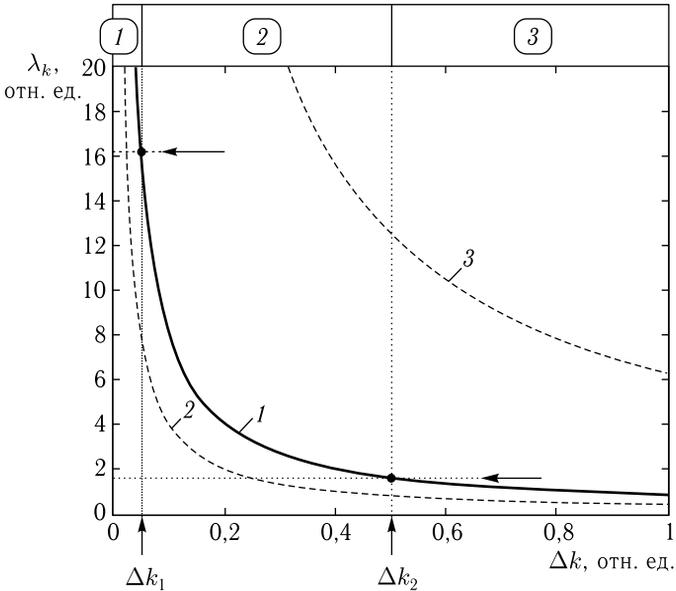


Рис. 9.11. Соотношение между величиной ступеньки по волновому числу Δk и соответствующей длиной волны. 1 — $\lambda_m(\Delta k)$; 2 — $\lambda_{\min}(\Delta k)$; 3 — $\lambda_{\max}(\Delta k)$

Из рисунка видно, что кривая 1 пересекает вертикальную линию, соответствующую Δk_1 на уровне $\lambda_k = 16,1$ отн. ед. (точка A). Эта величина близка к полной длине барьера при единичной длине ступенек, которая составляет 14 отн. ед.

Таким образом, можно полагать, что переход от области 1 к области 2, то есть начало осцилляций, происходит тогда, когда средняя величина волнового числа соответствует длине волны, равной полной длине барьера. То есть если длина волны, соответствующая среднему волновому числу, больше полной длины барьера, то осцилляции отсутствуют, а если длины волны меньше длины барьера, то осцилляции появляются.

То есть здесь при достаточно малой величине ступеньки волнового числа интерференционные явления еще не успевают развиваться и осцилляции отсутствуют.

Та же кривая 1 пересекает вертикальную линию, соответствующую Δk_2 , на уровне $\lambda_k = 1,6$ отн. ед. (точка В). Эта величина близка к единичной длине ступеньки, равной 1,0 отн. ед.

Можно полагать, что переход от области 2 к области 3, то есть нарушение регулярности осцилляций, происходит тогда, когда средняя величина волнового числа соответствует длине волны, равной длине единичной ступеньки барьера. То есть если длина волны, соответствующая среднему волновому числу, становится меньше длины одной ступеньки, то осцилляции теряют регулярность и становятся хаотическими.

То есть здесь при достаточно большой величине ступеньки волнового числа развиваются интерференционные явления на длине единичной ступеньки по длине барьера.

Таким образом, можно видеть, что в обоих случаях решающую роль играет именно среднее значение волнового числа по длине барьера, соответствующее кривой 1. В самом деле, кривая 2 проходит слишком низко, что особенно проявляется вблизи Δk_1 , а кривая 3 — слишком высоко, что также особенно заметно вблизи Δk_1 . Однако следует заметить, что кривая 2 пересекает вертикальную линию, соответствующую Δk_2 , на уровне, приемлемом для длины, соответствующей единичной ступеньке, а кривая 3 пересекает вертикальную линию, соответствующую Δk_2 на уровне, приемлемом для длины волны, соответствующей полной длине барьера. То есть в обоих этих случаях та и другая зависимости могут вносить определенный вклад в интерференционную картину, в первую очередь выше L_{B0} , что приводит к дополнительной хаотизации зависимостей коэффициентов от длины барьера.

9.2.6. Критерии осцилляций и хаоса

В разделе 9.2.3 показано, что при достаточно большой начальной длине барьера L_{B0} (там принято $L_{B0} = 14$ отн. ед.) характер зависимостей коэффициентов отражения R_e и прохождения T_e от длины барьера L_B определяется параметром, в качестве которого выступает величина ступеньки волнового числа Δk . По величине этого параметра выделены три области: первая, где зависимости регулярные без осцилляций, вторая, где зависимости регулярные с правильными осцилляциями и третья, где зависимости становятся резко нерегулярными, а характер осцилляций стремится к хаотическому. Между областями определены критические значения параметра: Δk_1 — переход от области 1 к области 2 — критерий начала осцилляций и Δk_2 — переход от области 2 к области 3 — критерий перехода от регулярных осцилляций к хаотическим. Далее будем Δk_1 называть критерием осцилляций, а Δk_2 — критерием хаоса.

В разделе 9.2.5 показано, что критерий осцилляций выполняется тогда, когда средняя величина волнового числа соответствует длине волны, равной полной длине барьера. При этом критерий хаоса выполняется

тогда, когда средняя величина волнового числа соответствует длине волны, равной длине единичной ступеньки барьера.

Если задана начальная длина барьера L_{B0} , то эта величина определяет как полную длину барьера L_B , равную L_{B0} , то есть $L_B = L_{B0}$, так и длину единичной ступеньки Δd , равную $L_{B0}/(N - 2)$, где N — полное число участков структуры, в настоящем рассмотрении равное 16, так что здесь $\Delta d = L_{B0}/14$.

При уменьшении начальной длины барьера L_{B0} обе величины L_B и Δd уменьшаются, так что длины волн, соответствующие этим величинам, также уменьшаются. При этом среднее волновое число, обратное длине волны, для выполнения обоих критериев должно увеличиваться. Это означает, что при уменьшении начальной длины барьера критерии как осцилляций, так и хаоса должны увеличиваться.

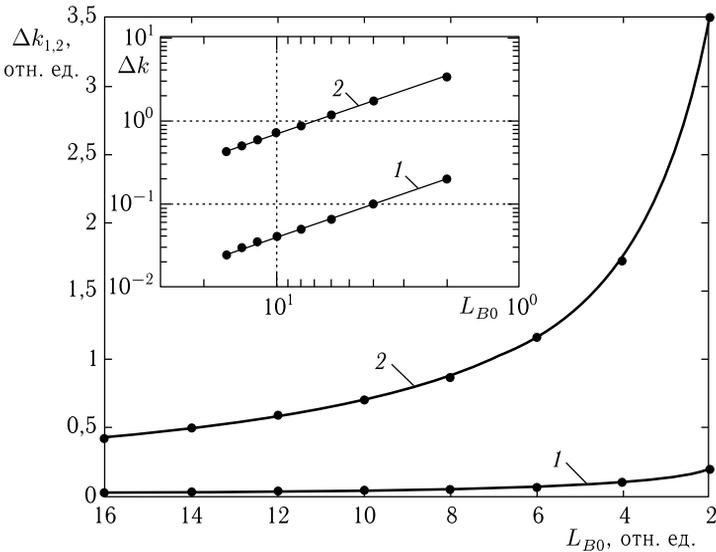


Рис. 9.12. Зависимости критериев осцилляций Δk_1 (кривые 1) и хаоса Δk_2 (кривые 2) от начальной длины барьера L_{B0} . На врезке — те же зависимости в двойном логарифмическом масштабе

Обратимся к рис. 9.12, где показаны зависимости критериев осцилляций Δk_1 (кривые 1) и хаоса Δk_2 (кривые 2) от начальной длины барьера L_{B0} . Точки рассчитаны с применением приведенного выше алгоритма (разделы 9.1.8, 9.1.9). Кривые построены по эмпирическим формулам, соответствующим обратной пропорциональности:

$$\Delta k_1 = \frac{0,40}{L_{B0}}; \quad (9.123)$$

$$\Delta k_2 = \frac{7,00}{L_{B0}}. \quad (9.124)$$

Из рисунка видно, что обе формулы приближают наблюдаемые зависимости с высокой степенью точности (доли процента). То же следует из врезки, где кривые построены в двойном логарифмическом масштабе и хорошо соответствуют прямым линиям.

Различный уровень кривых определяется соотношением между длиной барьера в целом и длиной его единичного участка. Так, при длине барьера 14 отн.ед., длина участка равна 1 отн. ед, так что их отношение равно 14. В то же время отношение коэффициентов формул (9.123) и (9.124) равно $7,00/0,40 = 17,50$, что отличается от отношения длин на 25%. Однако, как отмечено в разделе 9.2.5, точность определения коэффициентов составляет порядка 20%, так что приведенные отношения можно считать достаточно близкими.

9.2.7. Кратное изменение зависимостей коэффициентов от длины барьера

В разделе 9.2.5 показано, что зависимости критериев осцилляций и хаоса от начальной длины барьера (9.123), (9.124) с высокой степенью точности описываются законом обратной пропорциональности. То есть при увеличении длины барьера оба критерия уменьшаются, причем их уменьшение, с точностью до постоянного коэффициента, происходит одинаковым образом.

Поскольку оба критерия являются отражением характера зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера, то можно полагать, что и характер изменения таких зависимостей при изменении длины барьера происходит одинаковым образом.

На этот вопрос отвечает рис. 9.13, где показаны зависимости коэффициентов отражения R_e и прохождения T_e от длины барьера L_B при различных соотношениях между начальной длиной барьера L_{B0} и ступенчатым перепадом волнового числа Δk .

Из рисунка видно, что при увеличении начальной длины барьера в два раза и одновременном уменьшении перепада волнового числа в те же два раза общий характер кривых (а, б) полностью сохраняется. Изменяется только масштаб по горизонтальной оси в те же два раза.

Проверка показывает, что условием сохранения характера кривых является инвариантность выражения:

$$\frac{L_{B0}}{L_S} \Delta k = \frac{1}{2}, \quad (9.125)$$

где через L_S здесь обозначена полная длина структуры.

Учитывая, что для структуры, содержащей 16 участков, выполняется равенство:

$$L_{B0} = L_S - d_1 - d_{16}, \quad (9.126)$$

это же соотношение можно записать в виде:

$$\frac{L_S - d_1 - d_{16}}{L_S} \Delta k = \frac{1}{2}, \quad (9.127)$$

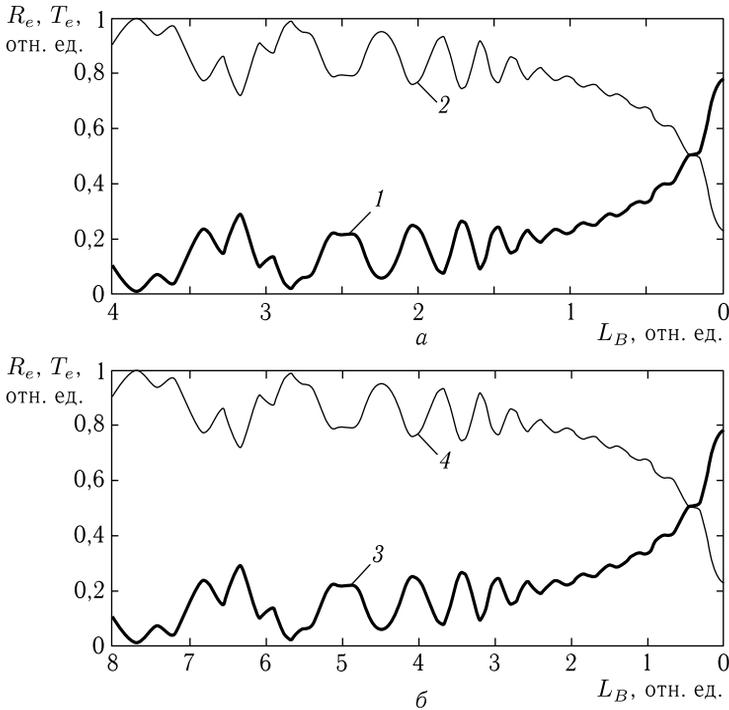


Рис. 9.13. Зависимости коэффициентов отражения (кривые 1, 3) и прохождения (кривые 2, 4) от длины барьера L_B при различных соотношениях между начальной длиной барьера L_{B0} и ступенчатым перепадом волнового числа Δk : а — $L_{B0} = 4$ отн. ед., $\Delta k = 2$ отн. ед.; б — $L_{B0} = 8$ отн. ед., $\Delta k = 1$ отн. ед.

Таким образом, можно считать, что зависимость коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера имеет определенный инвариант, определяемый приведенными формулами.

9.2.8. Отражение и прохождение при большой длине структуры

В предыдущих разделах рассматривалась структура, длина которой при значении Δk порядка 1–2 отн. ед., не превышала полутора–двух десятков средней длины волны, определяемой соотношением (9.122):

$$\lambda_m = 2\pi/(8\Delta k). \quad (9.128)$$

Типичные для этого случая зависимости коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера соответствуют показанным на рис. 9.7 и рис. 9.8. При этом интерференционные явления развиваются в полной мере уже в пределах длины единичной ступеньки барьера, обеспечивая хаос.

В то же время, характерным размером может явиться полная длина барьера, проявление которого при наличии хаоса уже не заметно.

С другой стороны, в разделе 9.2.6 выявлено кратное изменение зависимостей коэффициентов от длины барьера, так что при изменении этой длины тонкая структура хаоса (то есть его осцилляции) не меняется

Такое обстоятельство наводит на мысль, что хаос является не просто случайным, а имеет определенную упорядоченность, которая может проявиться при достаточной длине структуры.

Для проверки такого предположения было проведено исследование зависимости коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера при большой длине структуры, превышающей среднюю длину волны λ_m (9.128) более чем на два порядка.

Обратимся к рис. 9.14, где показана зависимость коэффициента отражения от длины барьера при полной длине структуры L , равной 160 отн. ед., при условии, что средняя длина волны λ_m составляет от 0,4–0,8 отн. ед. То есть L превышает λ_m в 200–400 раз.

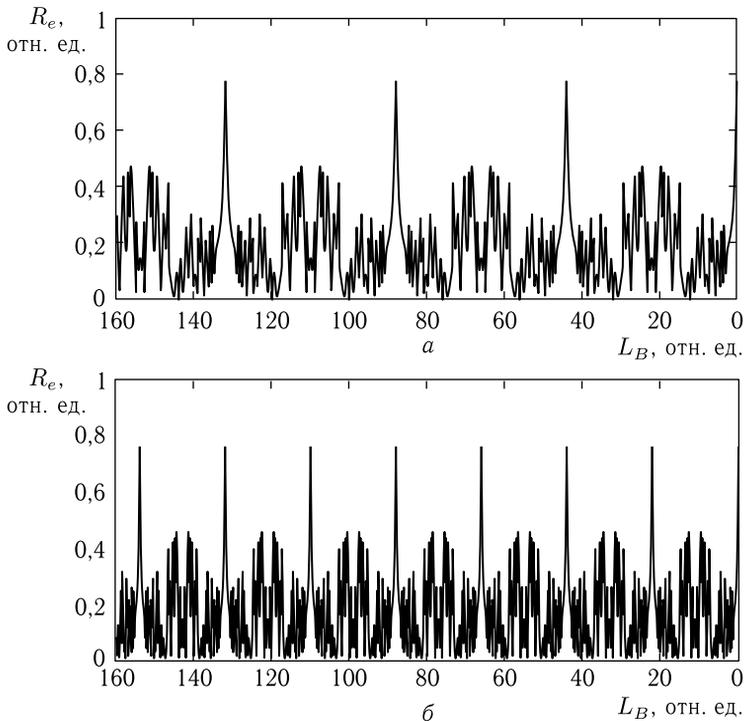


Рис. 9.14. Зависимости коэффициента отражения R_e от длины барьера L_B при различных значениях ступенчатого перепада волнового числа Δk : $a - \Delta k = 1$ отн. ед.; $b - \Delta k = 2$ отн. ед. Полная длина структуры $L = 160$ отн. ед. Начальная длина барьера $L_{B0} = 160$ отн. ед.

Из рисунка видно, что обе зависимости, несмотря на близкую к хаотической структуру, имеют четко выраженную упорядоченность. Так, при определенных значениях длины барьера отражение резко возрастает, давая острый пик, по высоте приближающийся к максимальному значению 0,7785, определяемому соотношением между перепадом волнового числа и полной высотой барьера, содержащего 16 участков (раздел 9.2.2, форм. (9.117)).

Расположение пиков имеет четкую периодичность. Так, на рис. 9.14, *a* крайний правый пик соответствует $L_B^{(1)} = 43,9978$ отн. ед, а следующий — $L_B^{(2)} = 87,9588$ отн. ед. (где верхний индекс — номер пика), то есть отношение длин барьера для этих пиков составляет 1,9992, что с высокой точностью равно двум. Между этими острыми пиками структура также в известной степени упорядочена, во всяком случае, имеет четкую симметричность относительно середины расстояния между пиками, где наблюдается локальный минимум. Точка минимума, определяющего симметрию между пиками, приходится на $L_B^{(1-2)} = 66,5983$ отн. ед., что близко к геометрической середине между ними, соответствующей $L_B = 65,9783$ отн. ед. Третий пик приходится на $L_B^{(3)} = 131,9597$ отн. ед, что близко к утроенной величине $L_B^{(1)}$ при первом пике, составляющей 131,9934 отн. ед. Минимум, определяющий симметрию, приходится на $L_B^{(2-3)} = 109,3192$ отн. ед., что близко к середине между $L_B^{(2)}$ и $L_B^{(3)}$, приходящейся на 109,9592 отн. ед.

Таким образом, видно, что периодичность выполняется с весьма высокой точностью (порядка 0,05 %).

Для характеристики наблюдаемой зависимости введем далее в качестве параметра длину ее периода L_{BR} , равную здесь $L_{BR} = L_B^{(2)} - L_B^{(1)} = 43,9610$ отн. ед.

Следует заметить, что полученная здесь величина L_{BR} превышает среднюю длину волны λ_m , составляющую здесь 0,4–0,8 отн. ед., на два порядка.

На рис. 9.14, *б* наблюдается такая же периодичность, с тем отличием, что здесь величины всех периодов в два раза меньше, чем на рис. 9.14, *a*, то есть в этом случае $L_{BR} = 21,9805$ отн. ед. Такое соотношение как раз соответствует увеличению перепада волнового числа Δk с 1 отн. ед на рис. 9.14, *a* до 2 отн. ед. на рис. 9.14, *б*, то есть в те же два раза.

На рис. 9.15 приведены такие же зависимости для коэффициента прохождения.

Из рисунка видно, что в обоих случаях эти зависимости зеркально симметричны относительно уровня 0,5 отн. ед, зависимостям, приведенным на рис. 9.14. Такое положение полностью соответствует подобной симметрии между отражением и прохождением во всех рассмотренных выше случаях, отражая закон сохранения энергии.

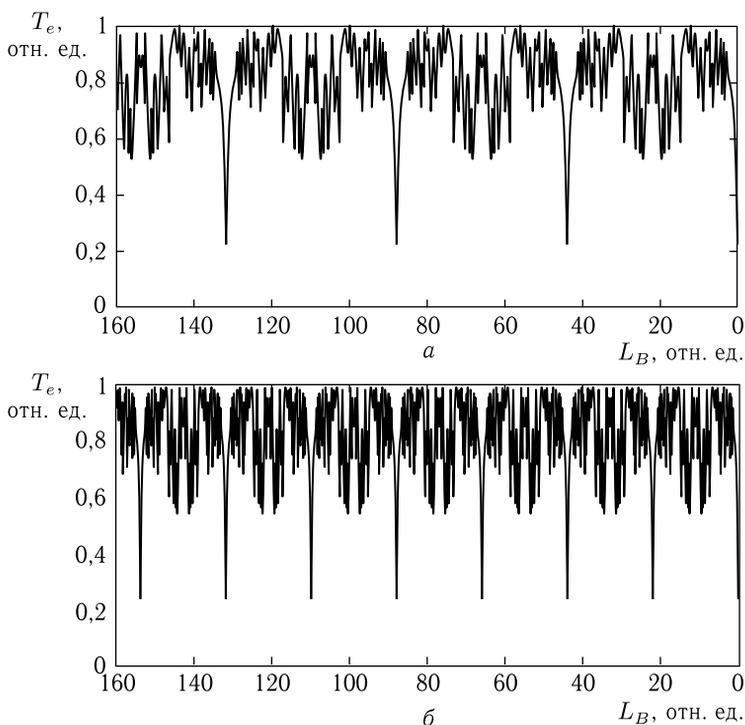


Рис. 9.15. Зависимости коэффициента отражения R_e от длины барьера L_B при тех же условиях, что и на рис. 9.14

Таким образом, из рассмотрения рис. 9.14 и рис. 9.15 можно сделать вывод, что имеется характерный размер L_{BR} , определяющий периодический резонансный характер зависимостей отражения и прохождения от длины барьера. При этом величина этого размера обратно пропорциональна перепаду волнового числа Δk , то есть

$$L_{BR} = \frac{\beta}{\Delta k}, \quad (9.129)$$

где $\beta = 43,9610$ — постоянный коэффициент пропорциональности.

Легко убедиться, что значение этого коэффициента весьма близко к величине $14\pi = 7(2\pi) = 43,9823$.

Можно полагать, что такое соответствие, выполняемое с весьма высокой точностью (порядка 0,04%), является не случайным, а обусловлено внутренней физической гармонией наблюдаемых явлений. В качестве аналогии можно упомянуть связь между волновым числом и длиной волны при гармонических колебаниях, имеющую вид [141, с. 216]:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad (9.130)$$

где длину волны λ можно сопоставить с L_{BR} , а волновое число k с Δk . В случае гармонической волны коэффициент пропорциональности равен 2π , так что здесь коэффициент β превышает эту величину в 7 раз.

Замечание. Заметим, что если в формулу (9.129) подставить не величину ступеньки Δk , а среднее значение волнового числа, равное $8\Delta k$, то для коэффициента β получим величину 5,4951, что с некоторой натяжкой можно считать близким к 2π , однако точность здесь значительно ухудшается, так что к возможности такой замены следует относиться с определенной осторожностью.

9.2.9. Модель переотражений

Для интерпретации периодического характера зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера, рассмотрим модель, учитывающую отражение волн на конечных границах барьера, то есть в точках, соответствующих $x = x_1$ и $x = x_{16}$. Будем следить за многократным отражением и прохождением волн через эти точки. При этом в результате суперпозиции выходящих из структуры волн в обе стороны формируются суммарные отраженная и проходящая волны. Используем схему переотражений, подобную предложенной в работе [51, с. 86–109].

Обратимся к рис. 9.16, в верхней части которого (а) показана схема барьера, а в нижней (б) — схема распространения волн при многократных переотражениях и прохождениях в точках x_1 и x_{15} .

Схема барьера, приведенная на рис. 9.16, а совпадает с принятой в разделе 9.2.1 на рис. 9.5 (структура 3). Отличие состоит в том, что здесь полная длина структуры L не равна 16 отн. ед., а составляет в 10 раз больше, то есть 160 отн. ед. Длина барьера здесь обозначена через L_{RB} , чтобы подчеркнуть, что именно эта величина определяет характерную длину, на концах которой происходит отражение и прохождение. Соответствующие границы при x_1 и x_{15} показаны на рис. 9.16, б вертикальными утолщенными линиями, обозначенными цифрами 1 и 2 в треугольниках наверху. Точки отражения и прохождения, то есть ветвления проходящих в эти точки волн, в порядке следования обозначены цифрами 0, 1, 2, ... в ромбических рамках.

Исходная волна, амплитуда которой равна A , падая на структуру со стороны отрицательного направления оси Ox , попадает в точку 0, где разделяется на две — отраженную B_0 и проходящую C_0 . Волна B_0 выходит из структуры, а волна C_0 продолжает движение вперед до точки 1 второй границы, где она теперь обозначается как D_1 . Здесь эта волна снова претерпевает отражение, давая волну E_1 , идущую внутрь структуры, и прохождение, давая волну F_1 , выходящую из структуры в прямом направлении. Волна E_1 устремляется к первой границе, где в точку 2 она приходит как G_2 . Эта волна снова испытывает отражение и прохождение, давая волну B_2 , выходящую из структуры в обратном направлении и волну C_2 , идущую внутри структуры

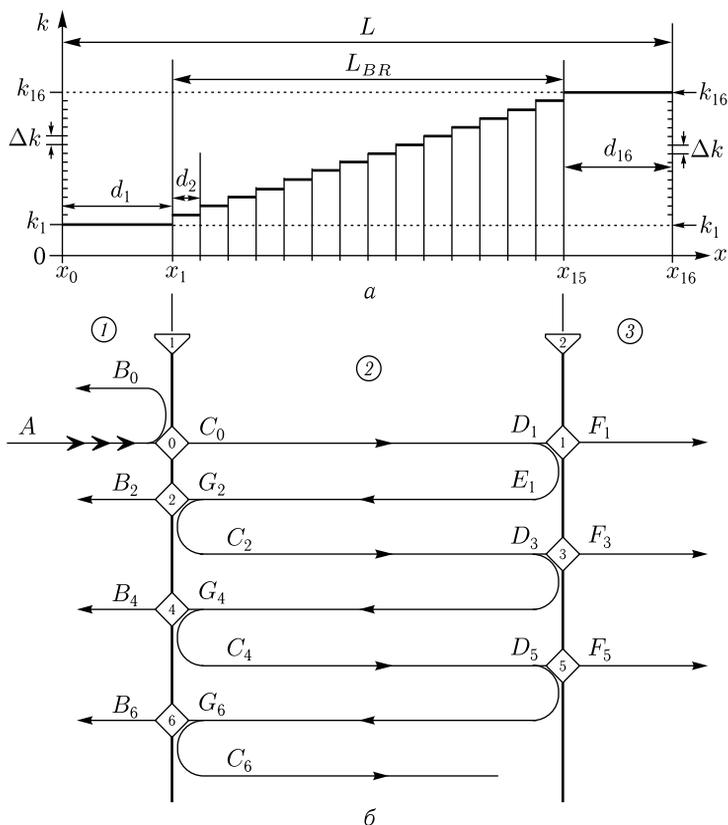


Рис. 9.16. Схема модели переотражений: *a* — схема барьера; *б* — схема распространения волн

в прямом направлении к точке 3 границы 2. Далее такое многократное переотражение продолжается, в случае отсутствия затухания вплоть до бесконечности. При каждом падении внутренней волны на ту или другую границу, амплитуда ее уменьшается за счет того, что часть ее выходит из структуры. Суперпозиция волн, выходящих из структуры в обратном направлении, таких как B_0, B_2, B_4, B_6 и так далее, образует суммарную отраженную волну, а суперпозиция волн, выходящих из структуры в прямом направлении, таких как F_1, F_3, F_5 и так далее, образует суммарную проходящую волну.

Замечание. Если известны коэффициенты отражения и прохождения одной волны при падении на единственную точку, соответствующую началу или концу структуры, то амплитуды суммарных отраженной и проходящей волн можно определить с помощью процедуры, описанной в работе [51, с. 93–95]. Следует заметить, что такая

процедура подразумевает однородность среды между границами, тогда как в рассматриваемой здесь задача барьер является многослойным и наклонным, поэтому определение амплитуд выходящих из структуры волн требует отдельного рассмотрения.

Таким образом, барьер можно представить в виде протяженного волноведущего «слоя», ограниченного двумя границами. Можно полагать, что в таком слое могут существовать волны, имеющие стоячий характер.

Так, из точки 0 в отрицательном направлении выходит волна B_0 . Из точки 2 также в отрицательном направлении выходит волна B_2 . Для эффективного отражения требуется, чтобы эти волны были в одинаковой фазе. То есть волна, выходящая из точки 0 в виде C_0 , проходящая до точки 1 в виде D_1 , возвращающаяся в точку 2 в виде G_2 и выходящая из структуры в отрицательном направлении в виде B_2 , должна иметь набег фазы, равный 2π , который соответствует длине волны. То же касается остальных волн, формирующих отражение, то есть набег фазы между волнами B_2 и B_4 также должен быть равен 2π , а набег B_4 относительно B_0 равен 4π .

Прохождение, формируемое волнами F_1 и F_3 определяется набегом фазы волн $E_1 \rightarrow G_2 \rightarrow C_2 \rightarrow D_3$, равным 2π . То же касается прохождения, формируемого остальными волнами.

Таким образом, эффективное отражение и прохождение имеет место тогда, когда расстояние между границами 1 и 2 равно половине длины волны. Именно такое отражение и прохождение формирует острые пики резонансного характера на рис. 9.13 и рис. 9.15.

Исходя из рис. 9.13, *a* и рис. 9.15, *a*, где $L_B^{(1)} \approx 44$ отн. ед., можно полагать, что длина волны в два раза больше этой величины, то есть $\lambda_B = 88$ отн. ед. В случае гармонической волны такой длине соответствует волновое число $k_B = 0,0714$ отн. ед.

Заметим, что при построении зависимостей на рис. 9.13, *a* и рис. 9.15, *a* величина Δk принята равной 1 отн. ед., то есть больше полученной величины в 14 раз.

Тем не менее, из весьма четко выраженной периодичности кривых на рис. 9.13 и рис. 9.15, *a* также обратной пропорциональности их периода величине Δk , с высокой степенью достоверности можно сделать вывод о волновой природе характера зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера.

В то же время, следует учитывать, что барьер не является однородным, то есть представление о гармоническом характере волны к нему не применимо. Можно полагать, что в процессе распространения волны внутри барьера ее длина меняется в соответствии с текущим значением волнового числа. При этом и набег фазы меняется синхронным образом, так что полный набег фазы формируется именно таким сложным образом, что и может объяснить приведенное различие по волновым числам.

9.2.10. Обобщение на электромагнитные волны

Приведенный в разделах 9.1.8, 9.1.9 алгоритм получен для случая распространения одномерных волн. Однако такой характер волн не является необходимым. Так, как показано в работах [65], [48, с. 87–90], формулы, описывающие распространение одномерных волн в слоистой структуре, легко могут быть обобщены на случай электромагнитных волн путем соответствующей замены переменных (глава 3, раздел 3.2.11, таблица 3.1). Так, для перехода от одномерной волны к электромагнитной в случае нормального падения достаточно заметить волновое число k_n на величину, обратную импедансу $1/Z_n$, причем такие замены производятся только в арифметических действиях, а показатели экспонент остаются без изменений. Поскольку ключевыми для алгоритма являются выражения (9.84)–(9.87), эти выражения при такой замене принимают вид:

$$g_{11}^{(n+1)} = \frac{1}{2Z_{n+1}} \left[g_{11}^{(n)}(Z_n + Z_{n+1}) - g_{12}^{(n)}(Z_n - Z_{n+1}) \right] e^{ik_{n+1}d_{n+1}}; \quad (9.131)$$

$$g_{12}^{(n+1)} = \frac{1}{2Z_{n+1}} \left[-g_{11}^{(n)}(Z_n - Z_{n+1}) + g_{12}^{(n)}(Z_n + Z_{n+1}) \right] e^{-ik_{n+1}d_{n+1}}; \quad (9.132)$$

$$g_{21}^{(n+1)} = \frac{1}{2Z_{n+1}} \left[g_{21}^{(n)}(Z_n + Z_{n+1}) - g_{22}^{(n)}(Z_n - Z_{n+1}) \right] e^{ik_{n+1}d_{n+1}}; \quad (9.133)$$

$$g_{22}^{(n+1)} = \frac{1}{2Z_{n+1}} \left[-g_{21}^{(n)}(Z_n - Z_{n+1}) + g_{22}^{(n)}(Z_n + Z_{n+1}) \right] e^{-ik_{n+1}d_{n+1}}. \quad (9.134)$$

Аналогичным образом, используя замены, приведенные в работах [65], [48, с. 87–90], можно получить подобные матричные элементы для случаев наклонного падения при продольной и поперечной поляризациях. При этом, однако, использованию алгоритма должно предшествовать вычисление углов преломления волн на границах сред, определяемой в соответствии с законом Снеллиуса [65], [48, с. 71]:

$$\cos \theta_{n+1} = \frac{\sqrt{k_{n+1}^2 - k_n^2 \sin^2 \theta_n}}{k_{n+1}}. \quad (9.135)$$

При этом волновое число k в случае продольной поляризации заменяется на величину $1/Z_n \cos \theta_n$, а в случае поперечной — на величину $\cos \theta_n / Z_n$. Экспоненты $e^{ik_n d_n}$ в обоих случаях заменяются на $e^{ik_n d_n \cos \theta_n}$. Для случая продольной поляризации амплитуда преломленной волны дополнительно умножается на $\cos \theta_n$. В случае поперечной поляризации умножение амплитуд на $\cos \theta_n$ отсутствует. Здесь мы не приводим получающиеся выражения ввиду их тривиальности в сочетании с высокой громоздкостью.

Замечание. В работе [65] для характеристики поляризаций при наклонном падении продольная поляризация названа «вертикальной», а поперечная — «горизонтальной». Такое различие происходит из-за различия терминологии, принимаемой в различных источниках. Здесь авторы предпочитают придерживаться терминологии, принятой в работе [48], то есть называть поляризацию продольной и поперечной. Такая терминология предполагает, что при продольной поляризации вектор электрического поля волны лежит в плоскости падения волны, а при поперечной поляризации перпендикулярен этой плоскости.

9.2.11. Замечание о возможности других решений

Приведенное решение задачи относится к случаю, когда участки структуры являются однородными, то есть в пределах каждого участка волновое число остается постоянным. При этом волновая функция на каждом участке является экспоненциальной. В случае неоднородных участков, например, если волновое число зависит от координаты, но такая зависимость для всех участков имеет одинаковый характер, волновые уравнения в пределах участков могут иметь другие решения, отличные от экспоненты. Однако в любом случае, если волновое уравнение имеет второй порядок, то будут два решения, соответствующие волнам противоположных направлений. При этом формулы, используемые алгоритмом, в том числе элементы матриц распространения и связи, будут другими, возможно, более громоздкими, так как будут включать в себя производные от волновых функций, однако общая структура алгоритма останется прежней. Для более точного выяснения этого вопроса можно пройти тем же путем что и здесь, то есть сначала найти элементы результирующей матрицы для двух, затем трех и более сред, после чего выделить общность структуры получаемых элементов и обобщить такую структуру на произвольное число сред. Переход от матрицы $\hat{G}^{(N)}$ к матрице $\hat{H}^{(N)}$ также будет сходным, хотя и претерпит некоторые изменения. Подобное выяснение этих вопросов может составить интерес для отдельной работы.

Выводы по главе 9

Глава посвящена применению метода результирующей матрицы для задачи о падении одномерной волны на наклонный барьер. Предложен алгоритм, позволяющий рассчитать коэффициенты отражения и прохождения при произвольном числе слоев барьера и структуры в целом. Полученный алгоритм применен для определения параметров распространяющейся волны. Отмечены особенности распространения при дискретном и плавном нарастании волнового числа внутри барьера. Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Предложен матричный алгоритм расчета отражения и прохождения одномерной волны через многослойную структуру. Рассмотрен случай одновременного падения на структуру двух волн во встречных

направлениях. Структура представлена в виде последовательно следующих друг за другом однородных слоев с различающимися параметрами. В основу метода положена аналогия между распространением волны в многослойной волноведущей структуре и в цепочке, состоящей из последовательно соединенных четырехполюсников. Выявлены два вида четырехполюсников, соответствующих внутренним средам структуры и границам между ними. Для четырехполюсника, соответствующего среде, получена матрица распространения, для четырехполюсника, соответствующего границе, получена матрица связи. Полная структура представлена в виде цепочки из чередующихся друг за другом четырехполюсников распространения и связи. Получена результирующая матрица структуры, образованная последовательным произведением матриц цепочки. Отмечено соответствие полученной матрицы задаче о прохождении сигнала с одного конца цепочки на другой без учета возможности встречного распространения сигналов. Полученная результирующая матрица преобразована в матрицу, соответствующую встречному распространению двух сигналов.

2. Результаты, полученные на модели четырехполюсников, обобщены на случай распространения одномерных волн в многослойной структуре. На основе решения волнового уравнения для каждого однородного участка волноведущей структуры в качестве основного параметра распространения выбрано волновое число. При этом граничные условия поставлены в виде равенства по обе стороны границы волновых функций и их первых производных по координате. Получены матрицы распространения и связи, соответствующие однородным участкам волноведущей структуры и границам между ними. Получена результирующая матрица, образованная последовательным произведением матриц распространения и связи для структуры в целом.

3. Выполнен анализ элементов результирующей матрицы для случаев структуры, состоящей из двух и трех сред, разделенных границами. Показано, что элементы результирующей матрицы для трех сред можно получить из элементов результирующей матрицы для двух сред. Полученные результаты распространены на произвольное число сред. Показано, что элементы результирующей матрицы для структуры с произвольным числом сред можно получить из элементов результирующей матрицы для структуры, соответствующей на единицу меньшему числу сред. На основе схемы получения элементов последующей матрицы из элементов предыдущей предложен алгоритм, позволяющий рекуррентным путем получить результирующую матрицу для любого произвольного числа сред. Отмечено соответствие полученной матрицы задаче о прохождении волн с одного конца структуры на другой без учета возможности встречного распространения волн. Полученная на основе реализации алгоритма результирующая матрица преобразована в матрицу, соответствующую встречному распространению двух волн, падающих на оба конца структуры. Предложенный алгоритм представлен в виде последовательности шагов. Начальный шаг состоит

в задании параметров структуры, таких как длины отдельных участков, а также волновых чисел, соответствующих распространению волн в этих участках. Следующие шаги включают в себя рекуррентный расчет элементов последующих результирующих матриц на основе предыдущих, который выполняется в цикле. Конечным шагом является преобразование полученной матрицы в результирующую матрицу для встречного распространения падающих волн. На основе этой матрицы рассчитываются амплитуды выходящих из структуры волн через амплитуды входящих, а также коэффициенты отражения и прохождения по энергии для структуры в целом. Для удобства машинного программирования представлена блок-схема реализующей алгоритм программы, включающая в себя подпрограмму, рассчитывающую элементы последующей матрицы из элементов предыдущей.

4. На основе матричного алгоритма расчета отражения и прохождения одномерной волны через многослойную структуру решена задача о падении волны на наклонный барьер. Выполнено представление барьера в виде ступенчатой структуры лестничного характера, состоящей из разделенных границами однородных участков. В качестве основного параметра, определяющего свойства волны на данном однородном участке, принято волновое число. Наклонному характеру барьера соответствует линейное возрастание волнового числа ступенчатым образом. Рассматривается падение на структуру только одной волны, распространяющейся в положительном направлении координатной оси. Вся структура предполагается насчитывающей 16 однородных участков, причем барьер, как таковой, заключен между первым и последним участками, так что его длина определяется длиной структуры в целом за вычетом длин первого и последнего участков. При этом весь барьер разбит на 14 участков одинаковой длины, волновое число в которых нарастает дискретными ступеньками одинаковой высоты. Изменение длины первого и последнего участков приводит к изменению длины барьера, которая таким способом регулируется от полной длины структуры, когда барьер является наиболее плавным, до нуля, когда барьер превращается в один ступенчатый перепад от минимального значения волнового числа до максимального. При этом крутизна барьера соответственно меняется от сравнительно малой величины до максимума, стремящегося к бесконечности.

5. Путем рассмотрения дискретного изменения длины барьера единичными шагами показано, что коэффициент отражения при максимальной длине барьера является достаточно малым и возрастает до максимума при обращении длины барьера в ноль. Зависимость коэффициента прохождения от длины барьера при этом имеет зеркально симметричный вид относительно уровня 0,5 отн. ед., так что сумма коэффициентов отражения и прохождения при любой длине барьера всегда сохраняется равной единице. Показано, что по мере увеличения высоты дискретной ступеньки волнового числа зависимость коэффициента отражения от длины барьера при большой его длине

понижается. При стремлении длины барьера к нулю эта зависимость приходит к одной и той же точке, не зависящей от высоты ступеньки и соответствующей коэффициенту отражения от одной границы между двумя средами, волновые числа в которых равны значениям таковых в первом и последнем участках.

6. Путем рассмотрения плавного изменения длины барьера установлено, что при увеличении высоты ступеньки по волновому числу зависимость коэффициента отражения от длины барьера становится осциллирующей, а при дальнейшем увеличении высоты ступеньки приобретает хаотический характер. Установлено, что характер такой зависимости не связан с положением барьера по длине структуры, то есть не меняется при сдвиге барьера как целого в ту или иную сторону, а определяется только его крутизной и высотой ступеньки волнового числа. По характеру зависимости коэффициента отражения от величины ступеньки волнового числа выделены три области: первая, когда зависимость является регулярной без осцилляций, вторая, когда зависимость является регулярной осциллирующей и третья, когда зависимость имеет нерегулярный осциллирующий характер, приближающийся к хаотическому тем сильнее, чем высота ступеньки больше. В качестве параметра, разграничивающего области, выявлены два критических значения высоты ступеньки волнового числа, первое — соответствующее переходу от плавной зависимости к осциллирующей и второе — соответствующее переходу от осциллирующей зависимости к хаотической. Полученные критические значения сопоставлены с характерными геометрическими размерами структуры. В качестве вспомогательного параметра для характеристики барьера введено среднее значение волнового числа, равное полусумме минимального и максимального его значений. Обратная величина с коэффициентом 2π определена как средняя длина волны. Установлено, что первое критическое значение ступеньки волнового числа соответствует равенству между средней длиной волны и полной длиной барьера. Второе критическое значение ступеньки волнового числа соответствует равенству между средней длиной волны и длиной единичной ступеньки по длине барьера. Относительно коэффициента прохождения отмечена полная зеркальная симметрия всех зависимостей относительно уровня 0,5 отн. ед., так что сумма коэффициентов отражения и прохождения всегда равняется единице. Для интерпретации наблюдаемых явлений высказано качественное предположение об интерференционной их природе, обусловленной многократными отражениями волны от следующих друг за другом границ структуры внутри барьера.

7. Исследованы зависимости обоих критических значений ступеньки волнового числа от начальной длины барьера. Показано, что обе зависимости с высокой точностью (доли процента) следуют закону обратной пропорциональности, причем различный уровень кривых определяется соотношением между длиной барьера в целом и длиной его единичного участка. Исследована связь между начальной длиной

барьера и величиной ступеньки волнового числа. Установлено, что при увеличении начальной длины барьера в некоторое число раз и одновременном уменьшении перепада волнового числа в то же число раз общий характер зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера сохраняется при условии кратного изменения масштаба по оси распространения волны в то же число раз. Показано, что кратный характер изменения таких зависимостей свидетельствует о наличии инварианта, равного половине отношения начальной длины барьера к полной длине структуры, умноженного на величину ступеньки волнового числа.

8. Рассмотрено отражение и прохождение волны при большой длине структуры. Показано, что при достаточно большой величине ступеньки волнового числа зависимости коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера, будучи близкими к хаотическим, имеют периодический характер, проявляющийся в наличии резких довольно узких пиков, высота которых приближается к предельной, соответствующей нулевому значению длины барьера. Установлено, что расстояние между пиками по длине барьера обратно пропорционально высоте ступеньки волнового числа, что дополнительно свидетельствует в пользу интерференционного характера наблюдаемых явлений. Отмечено, что значение периода длины барьера, соответствующего резким пикам, значительно (до двух порядков) превышает среднюю длину волны, определяемую полным перепадом волнового числа в пределах всего барьера.

9. Для интерпретации периодического характера зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера предложена модель последовательных переотражений. Отмечено, что формирование отраженной и проходящей волн происходит в результате многократного суммирования волн, распространяющихся в прямом и обратном направлениях между точками, соответствующими началу и концу барьера. В качестве характерного размера, определяющего синфазность отраженной и проходящей волн установлена длина барьера в целом. Установлено, что синфазность достигается при совпадении удвоенной длины барьера с длиной распространяющейся волны. Отмечено, что превышение длины такой волны над средней длиной волны, определяемой полным перепадом волнового числа, говорит о негармоническом характере распространяющейся волны, длина которой при распространении внутри барьера меняется в соответствии с текущим значением волнового числа.

10. Приведены рекуррентные формулы, позволяющие обобщить предложенный алгоритм на распространение электромагнитных волн для случая нормального падения волны на поверхность структуры. Высказаны рекомендации, позволяющие обобщить предложенный алгоритм на волны, не имеющие гармонического характера, в том числе описываемые волновыми уравнениями с переменными коэффициентами и имеющими более высокий порядок.

Литература

1. *Хвольсон О. Д.* Курс физики. Берлин: Госиздат РСФСР. 1923. Т. 2.
2. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука. 1970.
3. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука. 1973.
4. *Ландсберг Г. С.* Оптика. М.: Наука. 1976.
5. *Поль Р. В.* Введение в оптику. М.–Л.: ОГИЗ Гос. изд. техн.-теор. лит. 1947.
6. *Кизель В. А.* Отражение света. М.: Наука. 1973.
7. *Бреховских Л. М., Годин О. А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука. 1989.
8. *Розенберг Г. В.* Оптика тонкослойных покрытий. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит. 1958.
9. *Бреховских Л. М.* Отражение плоских волн от слоисто-неоднородных сред // ЖТФ. 1949. Т. 19. № 10. С. 1126–1135.
10. *Oksanen M. I., Hanninen J., Tretyakov S. A.* Vector circuit method for calculating reflection and transmission of electromagnetic waves in multilayered chiral structures // IEEE Proceedings. Н. 1991. V. 138. № 7. P. 513–520.
11. *Sarychev A. K., Bergman D. J., Yagil Y.* Theory of the optical and microwave properties of metal-dielectric films // PR(B). 1995. V. 51. № 8. P. 5366–5385.
12. *Шварцбург А. Б.* Дисперсия электромагнитных волн в слоистых и нестационарных средах (точно решаемые модели) // УФН. 2000. Т. 170. № 12. С. 1297–1324.
13. *Каплан А. Е.* Об отражательной способности металлических пленок в СВЧ- и радиодиапазоне // РЭ. 1964. Т. 11. № 10. С. 1781–1787.
14. *Лакс Б., Баттон К.* Сверхвысокочастотные ферриты и ферритмагнетики. М.: Мир. 1965.
15. *Микаэлян А. Л.* Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. М.: Госэнергоиздат. 1963.
16. *Гуревич А. Г.* Ферриты на сверхвысоких частотах. М.: Гос. Изд. физ.-мат. лит. 1960.
17. *Гуревич А. Г.* Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. М.: Наука. 1973.
18. *Гуревич А. Г., Мелков Г. А.* Магнитные колебания и волны. М.: ФИЗМАТЛИТ. 1994.
19. *Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В.* Спиновые волны. М.: Наука. 1967.

20. *Вашковский А. В., Стальмахов В. С., Шараевский Ю. П.* Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. Саратов: Изд. Саратовского университета. 1993.
21. *Вендик О. Г., Калиникоз Б. А.* Волновые процессы в пленочных ферритовых слоистых структурах — физические основы спин-волновой электроники // Изв. вузов. Физика. 1988. Т. 31. № 11. С. 3–5.
22. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Магнитостатические волны в неоднородных полях. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2016.
23. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Магнитостатические и электромагнитные волны в сложных структурах. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2017.
24. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Ферромагнитный резонанс в условиях ориентационного перехода. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2018.
25. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Динамика намагниченности в условиях изменения ее ориентации. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2019.
26. *Гуляев Ю. В., Тарасенко С. В., Шавров В. Г.* С спин-волновая акустика антиферромагнитных структур как магнитоакустических метаматериалов // УФН. 2011. Т. 181. № 6. С. 595–626.
27. *Гуляев Ю. В., Никитов С. А., Животовский Л. В., Климов А. А., Тайад Ф., Пресманес Л., Бонин К., Цай Ч. С., Высоцкий С. Л., Филimonov Ю. А.* Ферромагнитные пленки с периодическими структурами с магнотной запрещенной зоной — магнотные кристаллы // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 77. № 10. С. 670–674.
28. *Гуляев Ю. В., Никитов С. А., Волков А. И.* Поверхностные магнитостатические спиновые волны в двумерных магнотных кристаллах // РЭ. 2007. Т. 50. № 9. С. 1107–1113.
29. *Третьяков С. А.* Электродинамика сложных сред: киральные, биизотропные и некоторые бианизотропные материалы (обзор) // РЭ. 1994. Т. 39. № 10. С. 1457–1470.
30. *Шустер А.* Введение в теоретическую оптику. М., Л.: ОНТИ. Гл. ред. общетех. лит. 1935.
31. *Веселаго В. Г.* Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ϵ и μ // УФН. 1967. Т. 92. № 3. С. 517–526.
32. *Агранович В. М., Гартштейн Ю. Н.* Пространственная дисперсия и отрицательное преломление света // УФН. 2006. Т. 176. № 10. С. 1052–1068.
33. *Parimi P. V., Lu W. T., Vodo P., Sokoloff J., Derov J. S., Sridhar S.* Negative refraction and left-handed electromagnetism in microwave photonic crystals // Phys.Rev.Lett. 2004. V. 92. № 12. P. 127401(4).
34. *Lindell I. V., Tretyakov S. A., Nikoskinen K. I., Ilvonen S.* BW media — media with negative parameters, capable of supporting backward waves // Microwave and Optical Technology Letters. 2001. V. 31. № 2. P. 129–133.
35. *Smith D. R., Padilla W. J., Vier D. C., Nemat-Nasser S. C., Schultz S.* Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. № 18. P. 4184–4187.

36. *Pendry J.B.* Negative refraction makes a perfect lens // *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 85. № 18. P. 3966–3969.
37. *Pendry J.B., Holden A.J., Stewart W.J., Youngs I.* Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 76. № 25. P. 4773–4776.
38. *Streltniker Y.M., Bergman D.J.* Theory of magnetotransport in a composite medium with periodic microstructure for arbitrary magnetic fields. // *Phys. Rev. B.* 1994. V. 50. № 19. P. 14001–14015.
39. *Локк Э.Г.* Свойства изочастотных зависимостей и законы геометрической оптики // *УФН.* 2008. Т. 178. № 2. С. 397.
40. *Веселаго В.Г.* Волны в метаматериалах: их роль в современной физике // *УФН.* 2011. Т. 181. № 11. С. 1201–1205.
41. *Sarychev A.K., Bergman D.J., Yagil Y.* Theory of the optical and microwave properties of metal-dielectric films // *PR(B).* 1995. V. 51. № 8. P. 5366–5385.
42. *Levy-Nathansohn R., Bergman D.J.* Decoupling and testing of the generalized Ohm's law // *PR(B).* 1997. V. 55. № 8. P. 5425–5439.
43. *Антонец И.В., Котов Л.Н., Некипелов С.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Электродинамические свойства тонких металлических пленок с различной толщиной и морфологией поверхности // *РЭ.* 2004. Т. 49. № 10. С. 1243–1250.
44. *Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Проводящие и отражающие свойства пленок нанометровых толщин из различных металлов // *РЭ.* 2006. Т. 51. № 12. С. 1481–1487.
45. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972.
46. *Смирнов М.М.* Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. М.: Наука. 1964.
47. *Антонец И.В., Щеглов В.И.* Распространение волн через тонкие слои и пленки. Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2010.
48. *Антонец И.В., Щеглов В.И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть первая. Прямой метод. Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2011.
49. *Антонец И.В., Щеглов В.И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть вторая. Метод матрицы. Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2012.
50. *Антонец И.В., Щеглов В.И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть третья. Метод импеданса. Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2012.
51. *Антонец И.В., Щеглов В.И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть четвертая. Специфические методы. Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2013.
52. *Антонец И.В., Щеглов В.И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть пятая. Алгоритмические методы. Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2014.

53. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть шестая. Метод исключения. Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2015.
54. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть седьмая. Баланс энергий. Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2015.
55. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть восьмая. Периодические неоднородности. Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2017.
56. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Применение метода усреднения к расчету распространения электромагнитного излучения через тонкие пленки с различной проводимостью // РЭ. 2007. Т. 52. № 4. С. 403–414.
57. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Расчет коэффициентов отражения, прохождения и поглощения при наклонном падении электромагнитной волны на пластину // РЭ. 2008. Т. 53. № 4. С. 389–402.
58. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Падение электромагнитной волны на одну и две границы раздела сред в условиях перехода от диэлектрического типа распространения к металлическому // РЭ. 2008. Т. 53. № 8. С. 901–913.
59. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Пространственные фазовые характеристики распространения электромагнитной волны через слой с пассивными и активными свойствами // Сборник трудов XVI Международной конференции «Радиолокация и радиосвязь». Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ. 2008. С. 7–17.
60. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Энергетические параметры распространения электромагнитной волны при падении на проводящую пластину, окруженную проводящей средой // Сборник трудов XVI Международной конференции «Радиолокация и радиосвязь». Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ. 2008. С. 18–29.
61. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Анализ распространения электромагнитной волны через проводящий слой методом фазовой плоскости // РЭ. 2009. Т. 54. № 5. С. 517–530.
62. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Энергетические характеристики распространения волны через границы раздела сред с комплексными параметрами // РЭ. 2009. Т. 54. № 10. С. 1171–1183.
63. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Роль магнитной проницаемости в задаче о распространении электромагнитной волны через три магнитных среды с потерями // Сборник трудов XXI Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ)». М.: Изд. МГУ. 2009. С. 939–941.
64. *Щеглов В. И., Шавров В. Г., Зубков В. И., Антонец И. В., Котов Л. Н.* Распространение волн через двухслойную структуру из тонких пленок с граничными условиями импедансного типа // Сборник трудов XII Меж-

- дународной конференции «Магнетизм, дальнейе и ближнее спин-спиновое взаимодействие». Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ. 2009. С. 108–116.
65. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Эквивалентность скалярного одномерного и векторного электродинамического подходов к задаче о падении волны на пластину, решаемой методами прямым и усреднения // РЭ. 2010. Т. 55. № 2. С. 133–143.
 66. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Применение метода обобщенного импеданса для расчета распространения волн различной природы через слоистую структуру // Сборник трудов XVIII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва–Фирсановка: МЭИ–ПЛАНТИ. 2010. С. 144–153.
 67. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Применение метода характеристической матрицы для расчета распространения волн различной природы через слоистую структуру с произвольным числом слоев // Сборник трудов XVIII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва–Фирсановка: МЭИ–ПЛАНТИ. 2010. С. 154–172.
 68. *Antonets I. V., Kotov L. N., Shavrov V. G., Shcheglov V. I.* Electromagnetic wave propagation through multi-layer structures consist of thin magnetic films with impedance boundary conditions // Book of Abstracts of Moscow International Symposium on Magnetism (MISM). Moscow: Изд-во физ. факультета МГУ. P. 781–782.
 69. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Алгоритм определения амплитуд внешних и внутренних волн при встречном падении двух одномерных волн на многослойную структуру // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ. 2011. С. 154–165.
 70. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Энергетические характеристики распространения встречных волн через многослойную структуру // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ. 2011. С. 166–173.
 71. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Распространение волн через многослойные структуры с неоднородностью степенного вида // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ. 2011. С. 174–186.
 72. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Интерференционное отражение падающей волны от многослойной структуры при взаимодействии встречной волны // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ. 2011. С. 187–193.
 73. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Алгоритм определения амплитуд отраженных и проходящих волн при симметричном падении двух встречных волн на многослойную неоднородную структуру // РЭ. 2012. Т. 57. № 1. С. 67–79.

74. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение метода результирующей матрицы для расчета отражения и прохождения электромагнитных волн при падении на многослойные феррит-металл-диэлектрические структуры // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ. 2012. С. 187–200.
75. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Внешние и внутренние волны в многослойной ступенчато-неоднородной структуре // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ. 2012. С. 201–214.
76. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Энергетические коэффициенты выхода при падении встречных волн на многослойную структуру // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ. 2012. С. 215–229.
77. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Исследование распространения волны через границу между двумя диссипативными средами методом векторной модели // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ. 2012. С. 284–288.
78. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Алгоритм определения амплитуд внешних и внутренних волн при падении встречных волн на многослойную структуру со ступенчатой неоднородностью // РЭ. 2013. Т. 58. № 1. С. 16–27.
79. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение метода исключения для анализа распространения волн в многослойных средах со случайным распределением параметров слоев // РЭ. 2013. Т. 58. № 12. С. 1149–1159.
80. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Два простых алгоритма определения амплитуд внешних и внутренних колебаний при распространении встречных волн в многослойной неоднородной структуре // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2013. № 1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan 13/11/text.pdf>
81. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Метод исключения для расчета распространения волн через среды со ступенчатыми неоднородностями // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2013. № 4. <http://jre.cplire.ru/jre/apr13/6/text.pdf>
82. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение метода исключения для расчета распространения волн через среды со ступенчатыми неоднородностями специального вида // Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ. 2013. С. 130–144.
83. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Исследование методом исключения отражения и прохождения волн при распространении через многослойные среды с барьерными и периодическими неоднородностями // Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ. 2013. С. 145–163.

84. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Внешние и внутренние волны при распространении через ограниченную многослойную структуру с периодической неоднородностью // Сборник трудов XXII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ. 2014. С. 124–138.
85. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Исследование методом исключения распространения волн через многослойную среду с барьерными неоднородностями // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. № 1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan15/22/text.pdf>
86. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Пространственное распределение амплитуд внешних и внутренних волн в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью. Часть 1. Одномерная волна // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. № 2. <http://jre.cplire.ru/jre/feb15/1/text.pdf>
87. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Пространственное распределение амплитуд внешних и внутренних волн в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью. Часть 2. Электромагнитная волна // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. № 2. <http://jre.cplire.ru/jre/feb15/2/text.pdf>
88. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Пространственное распределение амплитуд внешних и внутренних волн в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью. Часть 3. Электромагнитная волна в магнитной среде // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. № 3. <http://jre.cplire.ru/jre/mar15/13/text.pdf>
89. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Пространственное распределение амплитуд внешних и внутренних волн в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью. Часть 4. Волна в диссипативной среде // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. № 3. <http://jre.cplire.ru/jre/mar15/14/text.pdf>
90. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Вторичная модуляция коэффициентов отражения и прохождения волны через ограниченную периодическую структуру // Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: ИНФРА-М. 2015. С. 132–144.
91. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Невзаимное распространение электромагнитных волн в многослойной структуре с магнитными элементами // Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: ИНФРА-М. 2015. С. 145–159.
92. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Векторная модель распространения волны через границу, разделяющую диссипативные среды // РЭ. 2016. Т. 61. № 3. С. 224–232.
93. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Пространственное распределение амплитуд электромагнитных волн, распространяющихся в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью // РЭ. 2017. Т. 62. № 12. С. 1224–1236.
94. *Стрелков С. П.* Введение в теорию колебаний. М.: Наука. 1964.

95. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. М.: Наука. 1978.
96. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2003.
97. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М., Л.: ОГИЗ. Гос. изд. техн.-теор. лит. 1945.
98. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука. 1965.
99. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука. 1973.
100. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука. 1981.
101. Щеглов В.И. Возбуждение спин-волнового резонанса в тонких магнитных пленках в отсутствие поверхностной анизотропии // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2020. № 8. <http://jre.cplire.ru/jre/aug20/2/text.pdf>
102. Левич В.Г. Курс теоретической физики. Т. 1. М.: Наука. 1969.
103. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. М.: Наука. 1977.
104. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука. 1973.
105. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М.: Наука. 1965.
106. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. М.: Наука. 1965.
107. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля (Теоретическая физика, т. II). М.: Наука. 1967.
108. Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Абрамов А.В., Боголюбов А.С. Изменение типа резонансного отражения электромагнитного излучения в структурах «нанометровая металлическая пленка-диэлектрик» // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. № 2. С. 13–22.
109. Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Абрамов А.В., Боголюбов А.С. Измерение толщины нанометровых слоев полупроводника в структурах металл-полупроводник по спектрам отражения и прохождения электромагнитного излучения // ЖТФ. Т. 76. № 5. С. 112–117.
110. Конторович М.И., Черепанов А.С. Метод усреднения для анализа процессов в волноводе с гиромангнитным заполнением // РЭ. 1985. Т. 30. № 8. С. 1543–1548.
111. Халиуллин Д.Я., Третьяков С.А. Обобщенные граничные условия импедансного типа для тонких плоских слоев различных сред (обзор) // РЭ. 1998. Т. 43. № 1. С. 16–29.
112. Конторович М.И., Третьяков С.А. Приближенные граничные условия в теории электромагнитных волн в ферритовом слое // РЭ. 1986. Т. 31. № 6. С. 110–1114.

113. *Oksanen M.I., Tretyakov S.A., Lindell I.V.* Vector circuit theory for isotropic and chiral slabs // *J. of Electromagnetic Waves and Applications*, 1990. V.4. №7. P.613–643.
114. *Третьяков С.А.* Приближенные граничные условия для тонкого биизотропного слоя // *РЭ*. 1994. Т. 39. №2. С. 184–192.
115. *Lindell I. V., Sihvola A.N., Tretyakov S.A., Viitanen A.J.* Electromagnetic waves in chiral and Bi-isotropic media. Boston and London: Artech House. 1994.
116. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред (Теоретическая физика, т. VIII). М.: Наука. 1982.
117. *Абрикосов А.А.* Основы теории металлов. М.: Мир. 1985.
118. *Каценеленбаум Б.З.* Высокочастотная электродинамика. М.: Наука. 1966.
119. *Кравченко В.Ф., Казаров А.Б.* Поверхностный импеданс сверхпроводников и его применение в физике и технике // *Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники*. 1997. №11. С. 59–78.
120. *Жук. Н.П., Третьяков С.А.* Эквивалентный импеданс шероховатой поверхности раздела сред // *РЭ*. 1987. Т. 32. №10. С. 2079–2088.
121. *Багацкая О.В., Жук Н.П., Шульга С.Н.* Нелокальный импеданс многослойной пластины из одноосного диэлектрика // *РЭ*. 1999. Т. 44. №2. С. 151–156.
122. *Физическая энциклопедия.* Статья «Импеданс» // М.: Советская энциклопедия. 1990. Т. 2. С. 127.
123. *Sukstanskii A.I., Korenivski V.* Impedance and surface impedance of ferromagnetic multilayers: the role of exchange interaction // *J. of Physics D: Applied Physics*. 2001. V. 34. №23. P.3337–3348.
124. *Нелин Е.А.* Импедансная модель для «барьерных» задач квантовой механики // *УФН*. 2007. Т. 177. №3. С. 307–313.
125. *Кравченко А.Н.* Краевые характеристики в задачах электродинамики // Киев: Наукова думка. 1989.
126. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Советское радио. 1957.
127. *Семенов А.А.* Теория электромагнитных волн. М.: Изд. МГУ. 1968.
128. *Даревский А.И., Кухаркин Е.С.* Теоретические основы электротехники. Часть 2. Основы теории электромагнитного поля. М.: Высшая школа. 1965.
129. *Чертов А.Г.* Единицы физических величин. М.: Высшая школа. 1977.
130. *Сена Л.А.* Единицы физических величин и их размерности. М.: Наука. 1977.
131. *Шпольский Э.В.* Атомная физика. Т 1. М.: Наука. 1974.
132. *Стрэттон Д.А.* Теория электромагнетизма. М.: ИЛ. 1948.
133. *Красюк Н.П., Дымович Н.Д.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Высшая школа. 1974.

134. *Никольский В. В., Никольская Т. И.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука. 1989.
135. *Miteva A. I., Lalov I. J.* Reflection of electromagnetic waves from isotropic optically active media // J. Phys.: Condens. Matter. 1991. V. 3. № 5. P. 529–538.
136. *Неганов В. А., Осипов О. В.* Отражение электромагнитных волн от плоских киральных структур // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42. № 9. С. 870–878.
137. *Джиллавари И. З., Филиппов В. В.* К вопросу о введении энергетических коэффициентов отражения и прохождения неоднородных электромагнитных волн // ЖПС (Журнал прикладной спектроскопии). 1981. Т. 35. № 1. С. 152–155.
138. *Бойко Б. Б., Леценко В. Г., Петров Н. С.* Интерференционный поток и его роль в энергетическом балансе на границе раздела двух сред // В сборнике: Ковариантные методы в теоретической физике. Оптика и акустика. Сборник научных трудов, Вып. 1. Минск: Изд. ИФ АН БССР. 1981. Т. 1. С. 40–55.
139. *Веремей В. В., Горбунова Т. А., Пуговкин Л. В.* Баланс энергии при отражении света от границ изотропных сред // Оптика и спектроскопия. 1978. Т. 44. № 2. С. 345–350.
140. *Сушкевич А. К.* Основы высшей алгебры. М., Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит. 1941.
141. *Харкевич А. А.* Основы радиотехники. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2007.
142. *Шавров В. Г., Бучельников В. Д., Бычков И. В.* Связанные волны в магнетиках. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2019.
143. *Дикуштейн И. Е., Щеглов В. И.* Восприимчивость композиционной среды, состоящей из анизотропных сферических ферритовых частиц // Сборник трудов XVII Международной школы-семинара «Новые магнитные материалы микроэлектроники (НМММ-2000)». Москва. 2000. С. 21.
144. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Магнитная восприимчивость композиционной среды с изменяемыми параметрами, состоящей из произвольно ориентированных анизотропных ферритовых частиц // РЭ. 2010. Т. 55. № 4. С. 488.
145. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Магнитная восприимчивость композиционной среды, состоящей из анизотропных ферритовых частиц с различным упорядочением ориентации осей анизотропии // РЭ. 2013. Т. 58. № 2. С. 143.
146. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Отражение электромагнитных волн от композиционной среды, содержащей ферритовые элементы в условиях ориентационного перехода // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ. 2011. С. 245.
147. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Отражение и прохождение электромагнитных волн при падении на трехслойную композиционную структуру, содержащую гиромангнитные элементы // Сборник трудов XX Международной

- конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ. 2012. С. 260.
148. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Отражение электромагнитных волн от композиционной решетки из анизотропных ферритовых сфер // Сборник трудов XXII Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ-2012)». Астрахань: АГУ. Изд. дом «Астраханский университет». 2012. С. 277.
149. *Дикштейн И. Е., Щеглов В. И.* Высокочастотная восприимчивость композиционной среды, выполненной на основе анизотропных сферических ферритовых частиц // Международная конференция «Физика и технические применения волновых процессов». Тезисы докладов. Том 2. Самара. 2001. С. 14.
150. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Восприимчивость композиционной среды из анизотропных ферритовых сфер в условиях ориентационного перехода // Сборник трудов VIII Международного семинара «Магнитные фазовые переходы». Махачкала: Институт физики ДагНЦ РАН. 2007. С. 63.
151. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Композиционная среда, содержащая анизотропные ферритовые частицы в немагнитной матрице // Тезисы докладов 18-й Международной Крымской конференции «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии (КрыМиКо-2008)». Севастополь. Украина. 2008. С. 567.
152. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Динамическая восприимчивость композиционной среды, состоящей из произвольно ориентированных анизотропных ферритовых частиц // Сборник трудов XVI Международной конференции «Радиолокация и радиосвязь». Москва–Фирсановка: МЭИ. 2008. С. 304.
153. *Щеглов В. И.* Магнитная восприимчивость композиционной среды из анизотропных ферритовых частиц // Сборник трудов XXI Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ-2009)». Москва: Изд-во МГУ. 2009. С. 948.
154. *Shcheglov V. I., Zubkov V. I.* Magnetic susceptibility of composite medium consisted of uniaxial ferrite particles embedded in nonmagnetic insulating matrix // International conference «Progress In Electromagnetics Research Symposium (PIERS)». Moscow. 2009. Book of Abstracts. P. 896.
155. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Магнитная восприимчивость композиционной среды, состоящей из произвольно ориентированных анизотропных ферритовых частиц // Сборник трудов IX Международного семинара «Магнитные фазовые переходы». Махачкала. 2009. Институт физики ДагНЦ РАН. 2009. С. 63.
156. *Shcheglov V. I., Zubkov V. I.* The microwave susceptibility of composite medium consisting of ferrite particles with uniaxial anisotropy // International conference «Functional Materials (ICFM-2009)». Partenit. Crimea. Ukraine. Book of Abstracts. Simferopol: TNU. 2009. P. 299.
157. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Формирование заданных свойств магнитной восприимчивости композиционной среды, состоящей из анизотропных ферритовых частиц // Сборник трудов XVIII Международной конференции

- «Электромагнитное поле и материалы». Москва–Фирсановка: МЭИ. ПЛАНТИ. 2010. С.133.
158. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Магнитная восприимчивость композиционной среды, состоящей из частично упорядоченных анизотропных ферритовых частиц в условиях ориентационного перехода // Сборник трудов X Международного семинара «Магнитные фазовые переходы». Махачкала. Институт физики ДагНЦ РАН. 2010. С. 169.
159. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Магнитная восприимчивость композиционной среды, состоящей из анизотропных ферритовых частиц // XIII Всероссийская школа-семинар «Волновые явления в неоднородных средах (Волны-2011)». Тезисы докладов (электронный сборник на CD). Звенигород: физ. фак. МГУ. 2011. Секция 2 (Электродинамика). С. 7.
160. *Shcheglov V.I., Zubkov V.I.* Magnetic susceptibility of composite medium consisted of uniaxial ferrite particles // Book of Abstracts of «Moscow International Symposium on Magnetism (MISM-2011)». Moscow: Изд-во физ. фак. МГУ. 2011. P. 783.
161. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Отражение электромагнитных волн от композиционной среды, содержащей анизотропные ферритовые элементы // Сборник материалов XV Международной зимней школы-семинара по электронике сверхвысоких частот и радиофизике. Саратов: СГУ. 2012. С. 56.
162. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Тензор магнитной восприимчивости композиционной среды из анизотропных ферритовых частиц // XXXIV Международная зимняя школа физиков–теоретиков (Коуровка 2012). Тезисы докладов. Екатеринбург: ИФМ УрО РАН. 2012. С. 139.
163. *Shcheglov V.I., Zubkov V.I.* Electromagnetic waves propagation in multilayer composite structure consist of anisotropic ferrite elements // Book of Abstracts of «Moscow International Symposium on Spin Waves 2013 (SW-2013)». Saint Petersburg. Russia. Published by «Изд. ФТИ им. А. Ф. Иоффе». 2013. P. 131.
164. *Афанасьев С.А., Семенцов Д.И.* Потоки энергии при интерференции электромагнитных волн // УФН. 2008. Т. 178, № 4. С. 377–384.
165. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука. 1964.
166. *Аквис М.А., Гольдберг В.В.* Тензорное исчисление. М.: Наука. 1972.
167. *Ефимов Н.В.* Краткий курс аналитической геометрии. М., Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит. 1950.
168. *Ионкин П.А., Мельников Н.А., Даревский А.И., Кухаркин Е.С.* Теоретические основы электротехники. Часть 1. Основы теории цепей. М.: Высшая школа. 1965.
169. *Джеррард А., Берч Дж.М.* Введение в матричную оптику. М.: Наука. 1978.
170. *Давидович М.В.* Матрицы рассеяния и передачи неоднородного слоя // РЭ. 2010. Т. 55. № 1. С. 25–32.
171. *Рэлей Дж. У.* Теория звука. Т. 1, 2. М.: ИЛ. 1955.

172. *Шилов Г. Е.* Введение в теорию линейных пространств. М.–Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит. 1952.
173. *Щеглов В. И.* Возбуждение спин-волнового резонанса в тонких магнитных пленках в отсутствие поверхностной анизотропии // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2020. № 8. <http://jre.cplire.ru/jre/avg22/5/text.pdf>
174. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Спиновые волны в средах с обменом и диссипацией. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2021.
175. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука. 1979.
176. БСЭ (Большая Советская Энциклопедия). А. М. Прохоров (гл. ред). М.: Советская энциклопедия, 1974. Т. 15. С. 478. Статья «Математическая индукция».
177. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Алгоритмический метод расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 1. Матричный алгоритм // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2022. № 8. <http://jre.cplire.ru/jre/avg22/5/text.pdf>
178. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Алгоритмический метод расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 2. Падение волны на наклонный барьер // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2022. № 8. <http://jre.cplire.ru/jre/avg22/9/text.pdf>
179. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Матричный алгоритм расчета коэффициентов отражения и прохождения при падении двух встречных волн на многослойную структуру // РЭ. 2022. Т. 67. № 9. С. 908–915.
180. *Скотт Т. (Теодор Скотт).* Основы программирования. Курс программированного обучения. М.: Советское радио. 1965.
181. *Пярнпуу А. А.* Программирование на Алголе и Фортране. М.: Наука. 1978.
182. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос (курс лекций). М.: ФИЗМАТЛИТ. 2001.

Научное издание

АНТОНЕЦ Игорь Викторович
ШАВРОВ Владимир Григорьевич
ЩЕГЛОВ Владимир Игнатьевич

ВОЛНЫ В МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУРАХ
Часть 1
МЕТОДЫ РАСЧЕТА: ПРЯМОЙ, УСРЕДНЕНИЯ, МАТРИЦЫ

Редактор *Е.С. Артоболевская*
Оригинал-макет: *Д.П. Вакуленко*
Оформление переплета: *В.Ф. Киселев*

Подписано в печать 29.11.2022. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 26,5. Уч.-изд. л. 29,15. Тираж 300 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
«Наука/Интерпериодика»
117342, г. Москва, ул. Бутлерова, д. 17 Б
E-mail: porsova@fml.ru, sale@fml.ru
Сайт: <http://www.fml.ru>
Интернет-магазин: <http://www.fmlib.ru>

Отпечатано с электронных носителей издательства
в АО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1
Сайт: www.chpd.ru. E-mail: sales@chpd.ru, тел.: 8 (499) 270-73-59

ISBN 978-5-9221-1958-0



9 785922 119580