

## ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ РАСЧЕТА ТРАССЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ КОРОТКОВОЛНОВЫХ СИГНАЛОВ В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

Проскурин В.И., Ряплов П.А., Талалаев А.Б.

2 Центральный Научно-Исследовательский Институт Минобороны России, Тверь.

email: [rpa69@rambler.ru](mailto:rpa69@rambler.ru)

*Получены уравнения эйконала в геодезических координатах. Оценены методические ошибки лучевой трассировки в ионосфере, связанные с учетом несферичности Земли. Оценено влияние рефракции на тропосферном участке, обусловленное градиентами температуры и влажности.*

В известных методиках и программах для ЭВМ, реализующих методы геометрической теории дифракции или геометрической оптики при расчетах рефракции электромагнитного поля в ионосфере, среда распространения предполагается сферически симметричной, а земная поверхность - сферической [1-4]. Для некоторых задач, таких как прогноз распространения сигналов коротковолнового радиовещания или связи, возможно, сферическая гипотеза является приемлемой, однако в радиолокационных и радионавигационных задачах, где вносимые таким образом ошибки, могут оказаться сравнимыми с ошибками радиолокационных измерений, такое предположение как минимум должно быть оценено количественно, чего, судя по опубликованным источникам, до сих пор не сделано. Кроме того, при расчете распространения коротковолновых сигналов не учитывается тропосферная рефракция [1-4].

**Целью** данной работы является вывод уравнений геометрической оптики в геодезической системе координат, оценка величин ошибок трассировки лучей связанных с неадекватным выбором системы координат и пренебрежением рефракции в тропосфере.

Уравнение характеристик для системы уравнений Максвелла в плавно неоднородной среде является уравнением Гамильтона-Якоби и имеет вид [5-6].

$$\frac{\partial S(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + H(\nabla S, \mathbf{r}, t) = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}$  - пространственные координаты;  $t$  - время;  $H(\nabla S, \mathbf{r}, t)$  - гамильтониан;

$S(\mathbf{r}, t)$  - фаза, эйконал или функция действия;

$\nabla S(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial S(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}$  - импульс, волновой вектор или, по терминологии Гамильтона, нормальная медлительность фронта [7].

Гамильтониан  $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$  зависит от свойств среды, точнее от ее тензора диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ , а уравнение (1) по физическому смыслу является дисперсионным соотношением [5].

Применение метода геометрической оптики или геометрической теории дифракции к решению уравнения (1) по существу заключается в повторном использовании метода характеристик [8]. Получаемые при этом уравнения бихарактеристик (уравнения эйконала) являются уравнениями Гамильтона или каноническими уравнениями:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}; \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \quad (2)$$

после решения которых функция действия (эйконал) восстанавливается интегрированием дифференциала

$$dS = \mathbf{p}d\mathbf{r} - Hdt,$$

вдоль траектории луча  $\mathbf{p}(t), \mathbf{r}(t)$  - решения канонических уравнений (2).

При изменении системы координат конфигурационного пространства,  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{q} : \mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q})$ , преобразование компонент импульса  $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{k}$  как ковектора ( $\mathbf{p} = \nabla S$ ) производится в соответствии с тензорными выражениями:

$$k_i = \frac{\partial r^j}{\partial q^i} p_j = \beta_i^j p_j; \quad p_j = \frac{\partial q^m}{\partial r^j} k_m = \tilde{\beta}_j^m k_m \quad (i, j, m = 1, \dots, 3) \quad (3)$$

Абсолютная (полная, ковариантная) производная [9] импульса  $\mathbf{k}$  по времени равна

$$\frac{Dk_i}{dt} = \frac{\partial r^j}{\partial q^i} \frac{dp_j}{dt} + \frac{\partial^2 r^j}{\partial q^i \partial q^k} p_j \frac{dq^k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} + \Gamma_{ik}^m k_m \dot{q}^k,$$

где учтены соотношения (2) и (3),

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial^2 r^l}{\partial q^i \partial q^j} \frac{\partial q^k}{\partial r^l} = g^{kl} \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{lj}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^l} \right\} = g^{kl} \Gamma_{l,ij} \quad (4)$$

- символ Кристоффеля [9,10];  $g_{ik} = \frac{\partial r^s}{\partial q^i} \frac{\partial r^s}{\partial q^k}$  метрический тензор, а  $g^{kj}$  - его

ковариантное представление:  $g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j$ .

Геодезические координаты точки  $\mathbf{q} = (q^1, q^2, q^3) = (\phi, \lambda, h)$  связаны с ее прямоугольными геоцентрическими координатами  $\mathbf{r} = (r^1, r^2, r^3) = (x, y, z)$  уравнения [11]:

$$\begin{aligned} x &= (N + h) \cos \phi \cos \lambda, \\ y &= (N + h) \cos \phi \sin \lambda, \\ z &= [N(1 - e^2) + h] \sin \phi, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\phi$  - широта;  $\lambda$  - долгота;  $h$  - высота над геоидом;

$N = a(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{-1/2}$  - радиус кривизны первого вертикала;

$a$  - большая (экваториальная) полуось референсного эллипсоида;

$e$  - первый эксцентриситет эллипсоида [12].

Дифференцированием (5) можно получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} &= l_\phi (-\sin \phi \cos \lambda, -\sin \phi \sin \lambda, \cos \phi), \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} &= l_\lambda (-\sin \lambda, \cos \lambda, 0), \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial h} &= (\cos \phi \cos \lambda, \cos \phi \sin \lambda, \sin \phi), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $l_\phi = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right| = \frac{N(1 - e^2) + h}{1 - e^2 \sin^2 \phi}$ ,  $l_\lambda = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \right| = (N + h) \cos \phi$  и  $l_h = 1$

- коэффициенты Ламе, связывающие длины дуг на координатных осях с соответствующими приращениями координат  $(\phi, \lambda, h)$ .

По определению метрического тензора

$$\begin{aligned} g_{\phi\phi} &= l_\phi^2; \quad g_{\lambda\lambda} = l_\lambda^2; \quad g_{hh} = l_h^2; \quad g_{\phi\lambda} = 0; \quad g_{\phi h} = 0; \quad g_{\lambda h} = 0; \\ g^{\phi\phi} &= l_\phi^{-2}; \quad g^{\lambda\lambda} = l_\lambda^{-2}; \quad g^{hh} = l_h^{-2}; \quad g^{\phi\lambda} = 0; \quad g^{\phi h} = 0; \quad g^{\lambda h} = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

а из (4), (6), (7) следует, что ненулевые символы Кристоффеля равны

$$\begin{aligned} -\Gamma_{h,\phi\phi} &= \Gamma_{\phi,h\phi} = \Gamma_{\phi,\phi h} = l_\phi (l_\phi)_{h'}; \quad \Gamma_{h\phi}^\phi = \Gamma_{\phi h}^\phi = (l_\phi)_{h'} / l_\phi; \quad \Gamma_{\phi\phi}^h = -l_\phi (l_\phi)_{h'}; \\ -\Gamma_{h,\lambda\lambda} &= \Gamma_{\lambda,h\lambda} = \Gamma_{\lambda,\lambda h} = l_\lambda (l_\lambda)_{h'}; \quad \Gamma_{h\lambda}^\lambda = \Gamma_{\lambda h}^\lambda = (l_\lambda)_{h'} / l_\lambda; \quad \Gamma_{\lambda\lambda}^h = -l_\lambda (l_\lambda)_{h'}; \\ -\Gamma_{\phi,\lambda\lambda} &= \Gamma_{\lambda,\phi\lambda} = \Gamma_{\lambda,\lambda\phi} = l_\lambda (l_\lambda)_{\phi'}; \quad \Gamma_{\lambda\phi}^\lambda = \Gamma_{\phi\lambda}^\lambda = (l_\lambda)_{\phi'} / l_\lambda; \quad \Gamma_{\lambda\lambda}^\phi = -l_\lambda (l_\lambda)_{\phi'} / l_\lambda^2; \end{aligned} \quad (8)$$

где  $(l_\phi)_{h'} = (1 - e^2 \sin^2 \phi)^{-1}$ ;  $(l_\lambda)_{h'} = \cos \phi$ ;  $(l_\lambda)_{\phi'} = -(N + h) \sin \phi + N_\phi \cos \phi$  - производные от коэффициентов Ламе.

Зависимость гамильтониана от обобщенного импульса обычно выражается через т.н. физическое представление импульса [9]

$$K_a = \frac{1}{\sqrt{g_{aa}}} p_a = \frac{1}{l_a} k_a, \quad K^a = \sqrt{g_{aa}} p^a = l_a k^a,$$

в котором все компоненты имеют одинаковые размерности.

Уравнения Гамильтона (2) для криволинейных координат (5) и физически представленных импульсов с учетом (8) имеют вид

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{l_\phi} \frac{\partial H}{\partial K_\phi}; \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{l_\lambda} \frac{\partial H}{\partial K_\lambda}; \quad \frac{dh}{dt} = \frac{1}{l_h} \frac{\partial H}{\partial K_h}; \quad (9)$$

$$\frac{dK_\phi}{dt} = \frac{1}{l_\phi} \left( -\frac{\partial H}{\partial \phi} - l_\phi (l_\phi)_{h'} K_h \frac{d\phi}{dt} + (l_\lambda)_{\phi'} K_\lambda \frac{d\lambda}{dt} + (l_\phi)_{h'} K_\phi \frac{dh}{dt} \right); \quad (10)$$

$$\frac{dK_\lambda}{dt} = \frac{1}{l_\lambda} \left( -\frac{\partial H}{\partial \lambda} + (l_\lambda)_{\phi'} K_\lambda \frac{d\phi}{dt} - \frac{l_\lambda (l_\lambda)_{\phi'}}{l_\phi} K_\phi \frac{d\lambda}{dt} - l_\lambda (l_\lambda)_{h'} K_h \frac{dh}{dt} \right); \quad (11)$$

$$\frac{dK_h}{dt} = \frac{1}{l_h} \left( -\frac{\partial H}{\partial h} + (l_\phi)_{h'} K_\phi \frac{d\phi}{dt} + (l_\lambda)_{h'} K_\lambda \frac{d\lambda}{dt} \right). \quad (12)$$

С учетом (9) уравнения (10)-(12) можно представить в аналогичном [4] виде

$$\frac{dK_\phi}{dt} = \frac{1}{l_\phi} \left( -\frac{\partial H}{\partial \phi} - (l_\phi)_{h'} K_h \frac{\partial H}{\partial K_\phi} + \frac{(l_\lambda)_{\phi'} K_\lambda}{l_\lambda} \frac{\partial H}{\partial K_\lambda} + \frac{(l_\phi)_{h'} K_\phi}{l_h} \frac{\partial H}{\partial K_h} \right); \quad (13)$$

$$\frac{dK_\lambda}{dt} = \frac{1}{l_\lambda} \left( -\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{(l_\lambda)_{\phi'} K_\lambda}{l_\phi} \frac{\partial H}{\partial K_\phi} - \frac{(l_\lambda)_{\phi'} K_\phi + l_\phi (l_\lambda)_{h'} K_h}{l_\phi} \frac{\partial H}{\partial K_\lambda} \right); \quad (14)$$

$$\frac{dK_h}{dt} = \frac{1}{l_h} \left( -\frac{\partial H}{\partial h} + \frac{(l_\phi)_{h'} K_\phi}{l_\phi} \frac{\partial H}{\partial K_\phi} + \frac{(l_\lambda)_{h'} K_\lambda}{l_\lambda} \frac{\partial H}{\partial K_\lambda} \right). \quad (15)$$

Данные уравнения использовались для расчетов рефракции при параболической однослойной модели ионосферы без учета магнитного поля Земли. Гамильтониан полагался равным [5]

$$H(\mathbf{K}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} [(\mathbf{K}, \mathbf{K}) - \varepsilon(\mathbf{q})],$$

где зависимость диэлектрической проницаемости от высоты имеет вид [3]

$$\varepsilon(\mathbf{q}) = 1 - \frac{f_c^2}{f^2} \left[ 1 - \left( \frac{h - h_m}{y_m} \right)^2 \right]^2$$

с параметрами  $h_m=300\text{км}$ : - высота максимума концентрации,  $y_m=150\text{км}$  - полутолщина слоя,  $f_c=9\text{МГц}$  - критическая частота слоя. Широта начальной точки трассы равнялась  $60^\circ$ ; частота радиоволны -  $f=9\text{ МГц}$ .

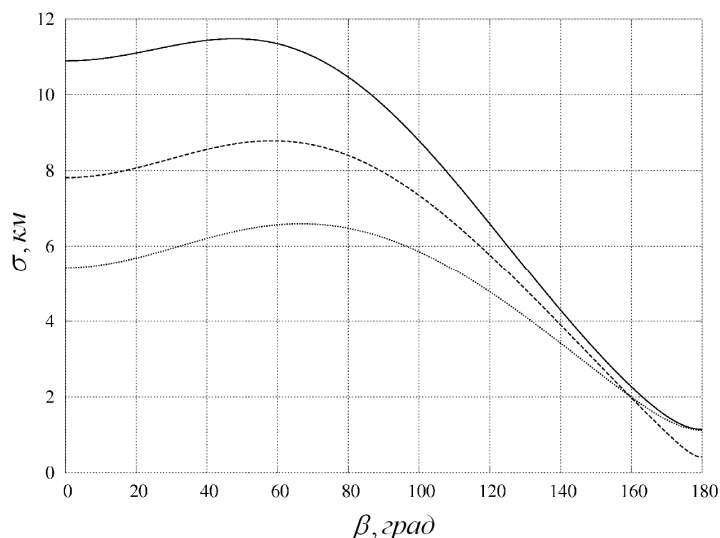


Рис. 1

Проводилось моделирование прохождения сигналов для сферической и эллиптической (международный эллипсоид WGS84) Земли для различных азимутальных направлений и углов места излучения. Определялись точки падения лучей первого скачка на поверхность Земли. Зависимости ошибок (евклидово расстояние между точками падения) связанных с неучетом эллиптичности земной поверхности от азимутального направления излучения  $\beta$  при различных углах места:  $\varepsilon = 1^\circ$  (сплошная линия);  $\varepsilon = 5^\circ$  (пунктирная линия);  $\varepsilon = 10^\circ$  (линия из точек) показаны на рисунке 1.

Для оценки влияния тропосферной рефракции на точность расчета трассы распространения коротковолновых сигналов, использовалась модель стандартной атмосферы [13], которая предоставляет широтные и сезонные вариации атмосферных параметров.

На рисунке 2 приведены зависимости отклонения дальности по Земле лучей первого скачка при различных углах места излучения сигнала за счет влияния рефракции в тропосфере.

Влияние крупномасштабных неоднородностей атмосферных параметров на точность расчета трасс коротковолновых сигналов, вызванное широтным перемещением воздушных масс, выражается в продольном отклонении трассы на несколько километров в зависимости от угла места излучения.

Для оперативного учета тропосферной рефракции предложено использовать результаты краткосрочных прогнозов атмосферных параметров, формируемых различными метеослужбами.

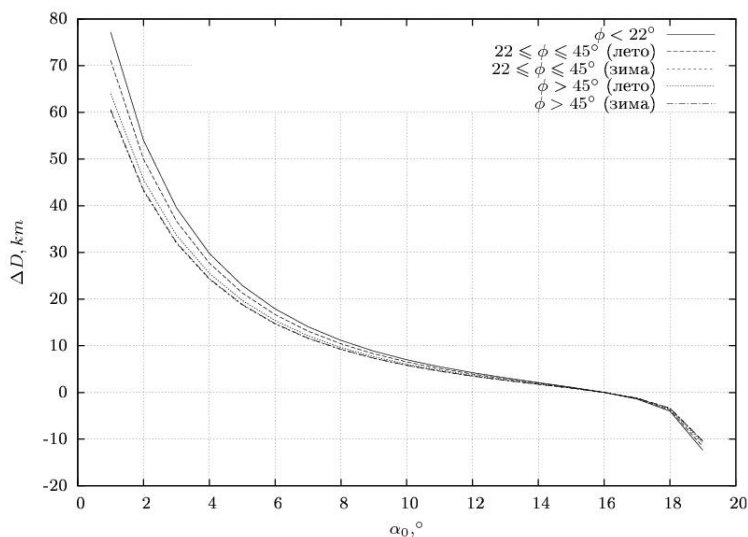


Рис. 2

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хазельгров Дж. Лучевая теория и новый метод расчета траекторий. В кн. *Лучевое приближение и вопросы распространения радиоволн*. Под ред. Кияновского М.П., с. 36-49. – М.: Наука, 1971.
2. Jones, R.M. Ray theory for lossy media. *Radio Sci.*, 5:793-801, 1970.
3. Дэвис К. Радиоволны в ионосфере. // Пер. с англ. под ред. Корчака А.А. – М.: Мир, 1973.
4. Budden, K.G. *The propagation of radio waves: the theory of radio waves of low power in the ionosphere and magnetosphere*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melburn, 1999.
5. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. *Геометрическая оптика неоднородных сред*. – М.: Наука, 1980.
6. Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А. *Пространственно-временной лучевой метод: Линейные и нелинейные волны*. – Л.: Ленинградский университет, 1985.
7. Арнольд В.И. *Математические методы классической механики*. – М.: Наука, 1989.
8. Смирнов В.И. *Курс высшей математики, том четвертый, часть вторая*. – М.: Наука, 1981.
9. Коренев Г.В. *Тензорное исчисление*. – М.: Издательство МФТИ, 1996.
10. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия*. – М.: Наука, 1979.
11. Кузьмин Б.С. и др. *Топографо-геодезические термины: справочник*. – М.: Недра, 1989.
12. Морозов В.П. *Курс сфероидической геодезии*. – М.: Недра, 1979.
13. Recommendation P.835-3. Reference standard atmospheres. ITU-R, 1999.