

## ОЦЕНКА УГЛОВОГО СПЕКТРА РАССЕЯННЫХ ДНОМ СИГНАЛОВ МНОГОЛУЧЕВОМ ЭХОЛОТЕ

Разманов В.М., ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

Оценка спектра сигнала по дискретным отсчетам формулируется как задача решения уравнения Фредгольма первого рода. Приведены результаты использования итерационного метода регуляризации по Тихонову для анализа рельефа морского дна в многолучевом эхолоте.

Одной из задач использования гидроакустических локационных систем является определение формы рельефа морского дна. Геометрия измерений многоэлементной акустической системой показана на рис. 1. Импульс  $S_0(t)$ , излучаемый передающей антенной и отраженный элементами морского дна на разной дальности  $L$  и угловом расстоянии  $\theta$ , регистрируется на системе приемных элементов  $A_n$  линейной антенной решетки. Узкая диаграмма направленности поперек движения судна выделяет плоскость обзора  $ZOX$  на рис. 1, что придает схеме измерений двумерный характер. Определение формы рельефа морского дна обычно выполняется в два этапа. Первоначально определяется зависимость коэффициента отражения (углового спектра)  $R_L(\theta)$  от угла  $\theta$  для каждой дальности  $L$ . Затем по определенному массиву  $R_L(\theta)$  уже выделяется линия рельефа.

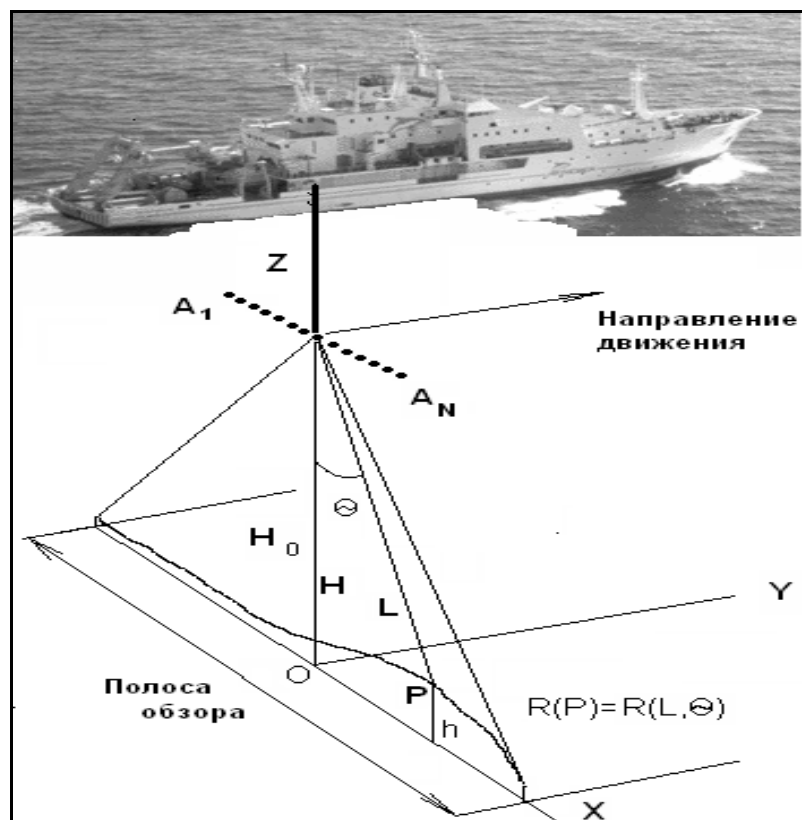


Рис.1. Геометрия бокового обзора многоэлементной антенной

Принятый на отдельном элементе  $A_n$  антенной системы сигнал  $Z_n(t)$  (здесь время  $t$  связано с дальностью до элемента отражения соотношением  $t = 2L/C$ ,  $C$  - скорость звука в воде  $C \approx 1500$  м/с) можно записать в виде

$$Z_n(t) = \int R_L(u) \exp(i2\pi \frac{l_n}{\lambda} u) du,$$

где  $u = \sin \theta$ ,  $l_n$  - смещение элемента приема,  $\lambda$  - длина волны, соответствующая несущей частоте  $\omega_0$ . Из этого соотношения следует, что задача определения углового спектра  $R(u) = R(\theta)$  на фиксированной дальности  $L$  является задачей спектрального оценивания – определение спектра  $F(\omega)$  временной функции  $Z(t)$  по дискретному набору ее отсчетов  $Z_n$ , в общем случае произвольных [1,2]

$$Z_n = Z(t_n) = \int F(\omega) \exp(i\omega t_n) d\omega \quad (1)$$

При непараметрическом оценивании спектр  $F(\omega)$  логично находить из условия минимума среднеквадратичной ошибки - функционала  $\Delta$ , записываемого следующим образом:

$$\Delta_0 = \sum_n \left| z_n - \int F(\omega) \exp(i\omega t_n) d\omega \right|^2 \quad (2)$$

Уравнение Эйлера для вариационной задачи (2) приводит к интегральному уравнению Фредгольма первого рода относительно искомого спектра  $F(\omega)$

$$\sum_n Z_n \exp(-i\omega \cdot t_n) = \int F(\omega') K(\omega - \omega') d\omega'; \quad (3)$$

с вырожденным ядром  $K(\omega - \omega') = \sum_n \exp(-it_n(\omega - \omega'))$  зависящим от моментов времени  $t_n$ , а для линейной решетки определяется расстояниями между элементами. Уравнение (3) относится к классу некорректных, существует обширный класс методов решения таких задач [3].

### 1. Дискретный угловой спектр.

Для определения рельефа морского дна удобной моделью углового спектра является дискретная модель, для временной формы (1) записываемая в виде

$$F(\omega) = \sum_m F_m \delta(\omega - \omega_m)$$

тогда модель измерений будет иметь вид

$$Z_n = \sum_m F_m \exp(i\omega_m t_n)$$

Определение амплитуд  $F_m$  и частот  $\omega_m$  на основе минимума среднеквадратичной ошибки приводит к необходимости решения нелинейной системы уравнений, некоторые численные методы решения известны [4]. Соотношение же (3) в этом случае превращается в задачу аппроксимации экспериментальной функции (оценки спектра)  $\varphi(\omega)$  в виде

$$\varphi(\omega) = \sum_n Z_n \exp(-i\omega \cdot t_n) = \sum_m F_m K(\omega - \omega_m)$$

## 2. Оценивание на основе взвешивания входной последовательности.

Интегральное уравнение (3), не касаясь вопросов его решения, можно интерпретировать как готовый алгоритм обработки для определения оценки спектра  $\tilde{F}(\omega)$  и соотношение для точности спектрального оценивания. Левую часть соотношения можно рассматривать как алгоритм получения оценки  $\tilde{F}$  спектра  $F$  путем преобразования Фурье

$$\tilde{F}(\omega) = \sum_n Z_n \exp(-i\omega \cdot t_n),$$

тогда как правая часть указывает на связь между оценкой  $\tilde{F}$  и истинным спектром

$$\tilde{F}(u) = \int F(u') K(u - u') du'$$

в виде свертки точного решения с ядром интегрального уравнения. Вид этого ядра (“ширина”, боковые лепестки) определяет спектральное разрешение. В случае, когда  $K(\omega - \omega') \Rightarrow \delta(\omega - \omega')$  оценка  $\tilde{F}$  спектра совпадает с точным решением  $F$ .

Улучшение характеристик спектрального оценивания с помощью спектральных окон на основе интегрального уравнения (3.) можно интерпретировать как преобразование этого интегрального уравнения в другое, которое дает другую точность и иной алгоритм обработки. Записав (3.) в виде  $\tilde{F}(\omega + \Omega) = \int F(\omega') K(\omega + \Omega - \omega') d\omega'$ , умножим обе части этого уравнения на некоторое ядро  $K_w(\Omega, \omega)$  и проинтегрируем по переменной  $\omega$ . В результате получим новую оценку спектра  $\tilde{\tilde{F}}$ , характеристики разрешения определяются новым ядром  $K_1$

$$\tilde{\tilde{F}}(\Omega) = \int \tilde{F}(\Omega + \omega) K_w(\Omega, \omega) d\omega = \int F(\omega') K_1(\Omega, \omega') d\omega'$$

где  $K_1(\Omega, \omega') = \int K_w(\Omega, \omega) K(\Omega + \omega - \omega') d\omega$ .

Ядро  $K_w$  выбирается для улучшения характеристик ядра сходного  $K(\omega)$  (например, снижения уровня боковых лепестков). Алгоритм обработки получается из левой части преобразования (3)

$$\tilde{\tilde{F}}(\Omega) = \sum_n Z_n \exp(-i\Omega t_n) \int K_w(\Omega, \omega) \exp(-i\omega \cdot t_n) d\omega = \sum_n Z_n h_n(\Omega) \exp(-i\Omega t_n)$$

и заключается в умножении исходной последовательности  $Z_n$  на весовую функцию  $h_n$  и последующем преобразовании Фурье. Характеристики разрешения нового ядра определяются набором весовых коэффициентов  $h_n$ . Выбор этих окон является предметом многочисленных исследований [7].

## 3. Использование метода регуляризации по Тихонову.

Метод регуляризации Тихонова [3] позволяет перевести некорректную задачу решения однородного уравнению (3) в корректную задачу решения неоднородного

уравнения и заключается в добавлении к среднеквадратичному условию (функционалу)  $\Delta_0$  дополнительного регуляризующего члена  $\Delta_R$ , зависящего от искомого спектра  $F(\omega)$ . Причем этот метод можно использовать как относительно непрерывной модели измерений (1), так и относительно его дискретного аналога

$$Z_n = \sum_m F_m \exp(it_n \omega_m) \quad (1a)$$

В дискретной модели (1a) имеется N отсчетов входного сигнала  $Z_n$ , требуется найти M отсчетов спектра  $F_m$ , причем для улучшения разрешения требуется, чтобы выполнялось условие  $M > N$ . Значения моментов времени  $t_n$  и частот  $\omega_m$  произвольны, но фиксированы (заданы).

Запишем соотношение (2) для определения спектра в виде

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta_R = \Delta + \lambda_1 \Delta_1[F] + \lambda_2 \Delta_2[F]; \quad (4)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  - параметры регуляризации, а функционалы регуляризации выберем в виде

$$\Delta_1[F] = \int W_1(\omega) F(\omega) F^*(\omega) d\omega$$

$$\Delta_2[F] = \int W_2(\omega) F'(\omega) F'^*(\omega) d\omega$$

Здесь  $W_1(\omega)$  и  $W_2(\omega)$  - задаваемые весовые функции. Минимизация (4) соответствует и минимизации  $\Delta_1$  - взвешенной энергии сигнала, при этом параметр  $\lambda_1$  регулирует степень близости к дискретной модели, параметр  $\lambda_2$  регулирует степень гладкости. Уравнение Эйлера для вариационной задачи (4) приводит к следующему соотношению для спектра [5,6]

$$\int F(\omega') \sum_n \exp(i(\omega' - \omega)t_n) d\omega' + \lambda_1 W_1 F - \lambda_2 \frac{d}{d\omega} (W_2 F') = \sum_n Z_n \exp(-i\omega t_n)$$

В случае  $\lambda_2 = 0$  и  $W_1 = \frac{1}{W}$  это соотношение принимает вид

$$W(\omega) \sum_n \exp(-i\omega \cdot t_n) \left\{ \int F(\omega') \exp(i\omega' t_n) d\omega' \right\} + \lambda_1 F - \lambda_2 F'' = W(\omega) \sum_n Z_n \exp(-i\omega \cdot t_n)$$

и решается стандартным способом [5]. Обозначим коэффициенты в скобках как  $C_n$ :

$C_n = \int F(\omega) \exp(i\omega \cdot t_n) d\omega$ . Тогда для спектра получим уравнение

$$\lambda_1 F = W(\omega) \sum_n (Z_n - C_n) \exp(-i\omega \cdot t_n) \quad (5)$$

Коэффициенты  $C_n$  находятся умножением обеих частей выражения для спектра на множитель  $\exp(i\omega \cdot t_m)$  и интегрированием. В результате получим линейное уравнение относительно неизвестных коэффициентов  $C_n$

$$\lambda_1 C_m = \sum_n (Z_n - C_n) \int W(\omega) \exp(i\omega(t_m - t_n)) d\omega = \sum_n D_{m,n} (Z_n - C_n)$$

или в матричной форме

$$(D + \lambda_1 I) \vec{C} = D \vec{Z} \quad (6)$$

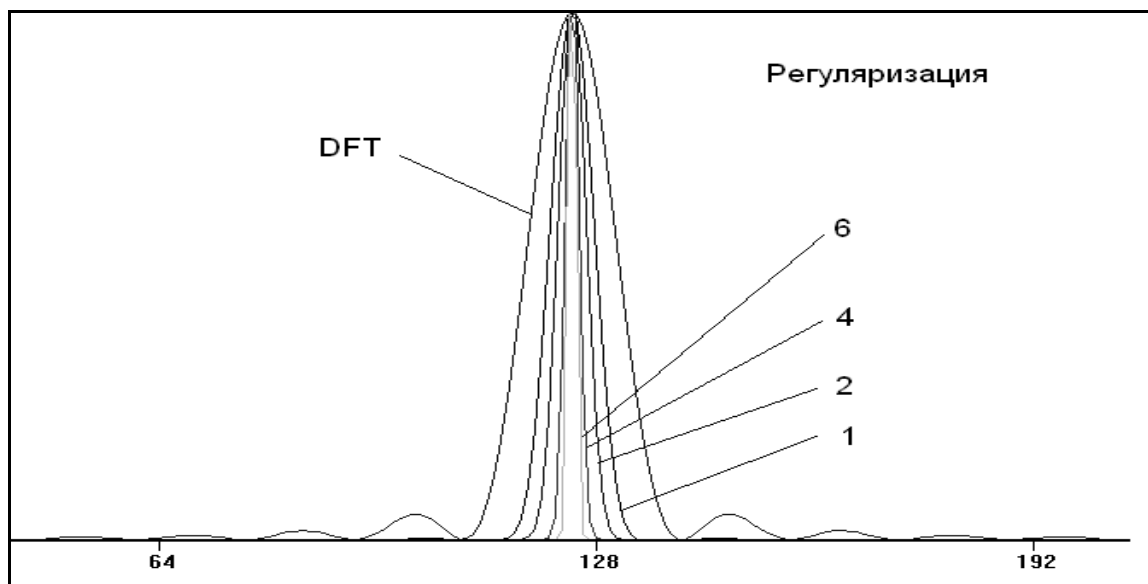
где матрица  $D_{m,n} = \int W(\omega) \exp(i\omega(t_m - t_n)) d\omega$  имеет размерность N, равную числу отсчетов входного сигнала. Матрица D – эрмитова для неэквидистантных отсчетов, в этом случае можно использовать алгоритм Холецкого. Для эквидистантных отсчетов сигнала эта матрица еще и теплицева, в этом случае можно использовать быстрый рекуррентный алгоритм решения теплицевых систем [7].

Для вычислений спектра в (5), (6) необходимо задать весовую функцию  $W(\omega)$ . Итерационный алгоритм спектрального оценивания высокого разрешения можно построить, если взять в качестве весовой функции энергетический спектр  $|F(\omega)|^2$  в виде  $W_{k+1}(\omega) = 1 + \sigma \cdot |F_k(\omega)|^2$  - на каждом шаге итерации весовая функция вычисляется по ранее вычисленному спектру,  $\sigma$  - параметр. В качестве начального значения берется спектр, вычисляемый с помощью БПФ входной последовательности, дополненной нулями. Подобный алгоритм получается также при итерационном решении (4) для функционала регуляризации в виде

$$\Delta_R = \lambda \int \ln(1 + \sigma |F(\omega)|^2) d\omega$$

в дискретной модели [8,9].

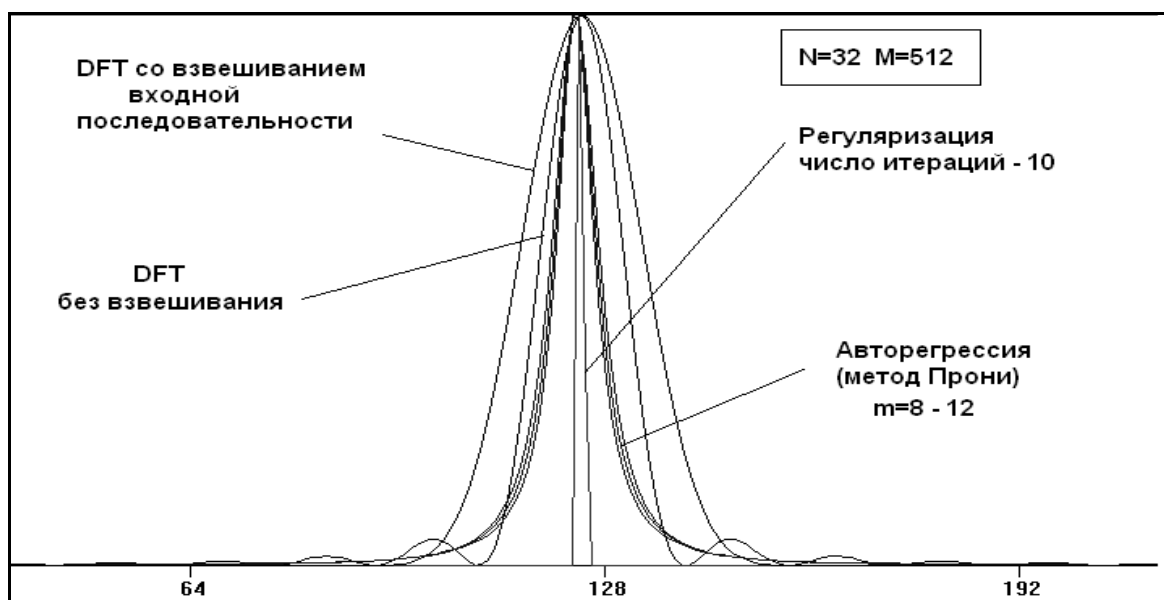
В качестве примера на рис.2 приведен пример изменения оценки спектра при увеличении числа итераций по такой схеме для тестовой комплексной последовательности, состоящей из одной гармоники. Входная последовательность состоит из N=32 эквидистантных точек, выходная содержит M=512 точек спектра. Справа цифрами указано количество итераций при вычислениях. Слева (DFT) отмечен спектр, получаемый по стандартной методике – N входных отсчетов дополнялись нулями до M значений и выполнялось БПФ по M отсчетам.



**Рис.2** Зависимость оценки спектра от числа итераций. Число итераций указано справа.

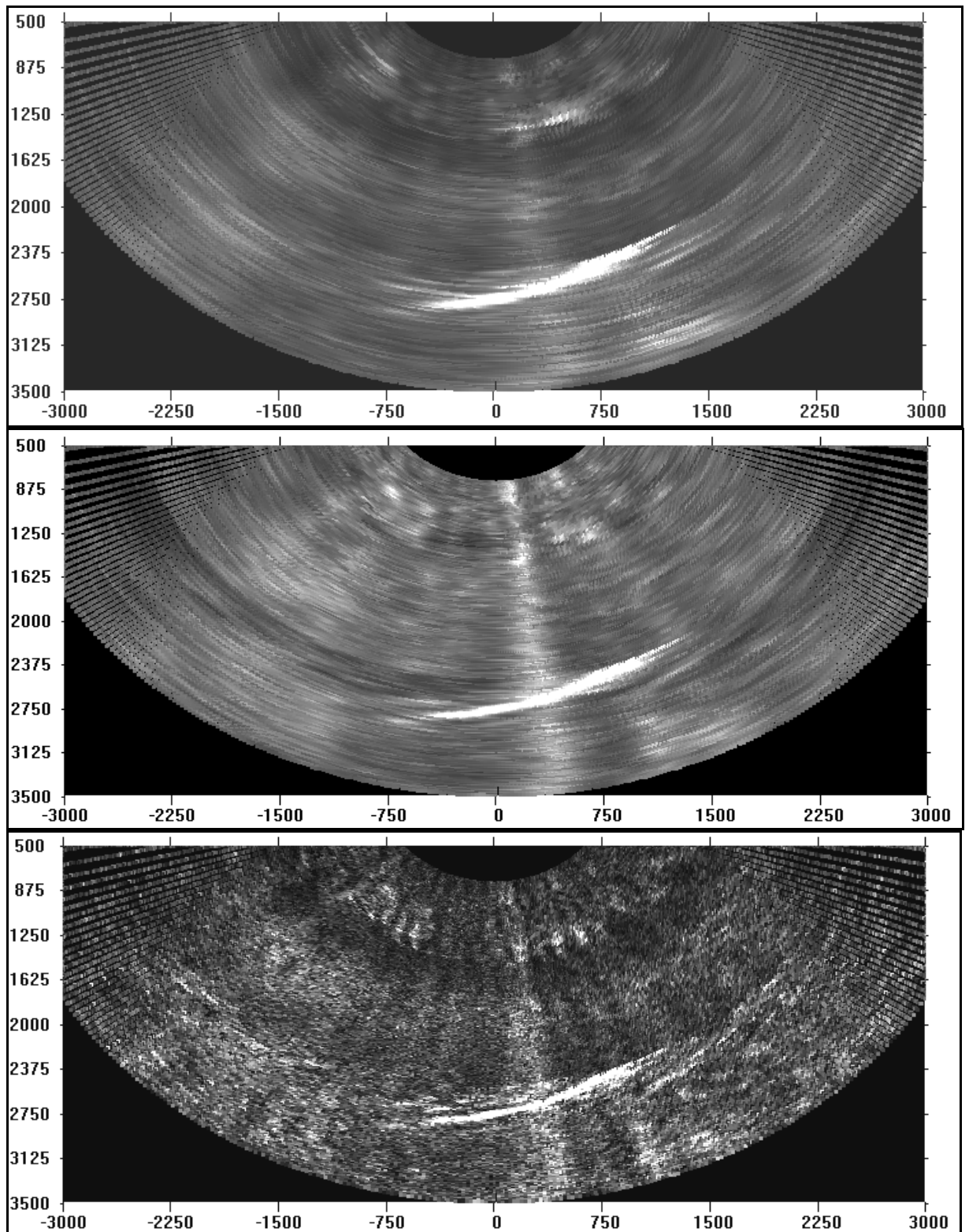
На рисунке 3 показаны сравнительные оценки спектра экспоненциальной тестовой последовательности выполненные четырьмя способами: DFT - дискретное

преобразованием Фурье ( дополнение нулями и БПФ, со взвешиванием и без ), параметрическим авторегрессионным методом (метод Прони,  $m$  – число полюсов модели [7]) и итерационным методом регуляризации. Входная последовательность состоит из  $N=32$  точек, оценивается  $M=512$  точек спектра. Видно, что итерационный метод с использованием регуляризации дает наиболее узкий спектральный отклик.



**Рис. 3** Сравнительные оценки спектра экспоненциальной тестовой последовательности: ДПФ, метод авторегрессии, регуляризация.

На рис.4 показаны сравнительные результаты применения методов спектрального оценивания при обработке данных многолучевого эхолота. Разработанная в ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН система представляет собой 32 элементную решетку с расстоянием между элементами в половину длины волны, несущая частота 30 кГц. На рисунке представлена развертка амплитуды углового спектра в координатах глубина – горизонтальная дальность. По  $N=32$  входным отсчетам на каждой дальности производилась оценка спектра в  $M=256$  точек. При этом в плоскости бокового обзора формируется набор отдельных лучей с фиксированным наклоном относительно горизонтали. Верхний рисунок – применение дискретного преобразования Фурье с взвешиванием ( $N$  отсчетов дополняются нулями до  $M$  и БПФ по  $M$  точек), в середине авторегрессионный метод Прони (расчет коэффициентов авторегрессии и вычисление спектра для  $M$  точек) и нижний рисунок – применение итерационного алгоритма с регуляризацией. Заметно более высокое угловое разрешение при итерационной регуляризации. К сожалению, высокое угловое разрешение достигается более сложными алгоритмами обработки, и, главное, за счет увеличения времени обработки.



*Рис.4* Развертка углового спектра многолучевого 32 элементного эхолота. Сверху – дискретное преобразование Фурье, в середине – авторегрессионный метод Прони, внизу – регуляризация.

## Литература

1. Jean-Francois Giovannelli, Jerome Idier. Bayesian Interpretation of Periodograms, IEEE Transactions on Signal Processing, V. 49, No. 7, July 2001.

2. Weidong Chen, An Efficient Method for an Ill-Posed Problem – Band-Limited Extrapolation by Regularization, *IEEE Transaction on Signal Processing*, V. 54, No. 12, December 2006.
3. Г.И. Василенко, Теория восстановления сигналов, Москва, Сов. радио, 1979.
4. Kaushik Mahata and Torsten Söderström, Large Sample Properties of Separable Nonlinear Least Squares Estimators, *IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, VOL. 52, NO. 6, JUNE 2004*
5. Л.Я. Цлаф, Вариационное исчисление и интегральные уравнения, Наука, Москва, 1978.
6. А.П. Карташев, Б.Л. Рождественский, Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления, Москва, “Наука”, Главная редакция физико-математической литературы, 1986.
7. С.Л. Марпл, Цифровой спектральный анализ и его приложения, Мир, 1990.
8. M.D. Sacchi, T.J.Ulrych, C.J. Walker, Interpolation and Extrapolation Using a Hight-Resolution Discrete Fourier Transform, *IEEE Transaction on Signal Processing*, V. 46, No. 1, January 1998.
9. M.D. Sacchi, T.J.Ulrych, Estimation of the discrete Fourier transform, a linear inversion approach, *Geophysics*, V. 61, No. 4, (July – August 1996), pp. 1128-1136.