ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА ЛОРЕНТЦ-ЛОРЕНЦА И ПРОБЛЕМА ИСКУССТВЕННОГО КВАЗИМАГНЕТИЗМА

Барабаненков Ю.Н.
Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН
E-mail: barab624@mail.ru

С помощью техники уравнения Дайсона в теории многократного рассеяния волн выводится обобщенная формула Лорентц-Лоренца для эффективной диэлектрической проницаемости случайно-неоднородной дискретной среды в виде статистического ансамбля немагнитных проводящих частиц. Полученная формула позволяет учитывать эффекты взаимных пространственный корреляций частиц и резонансные явления при рассеянии электромагнитных волн отдельными частицами и кластерами частиц. На примере ансамбля статистически независимых малых сильно отражающих частиц проанализирован вклад их электрической и магнитной поляризуемости в эффективную диэлектрическую проницаемость ансамбля. В то же время показано, что в рамках рассмотренного подхода с усреднением по статистическому ансамблю совокупность случайно расположенных в пространстве немагнитных проводящих частиц не дает вклада в эффективную магнитную проницаемость немагнитной однородной окружающей среды.

Распространение волн в неупорядоченных системах считается одним из наиболее трудных предметов теоретической физики. Традиционный подход использует феноменологическую теорию переноса излучения [1], возникшую на представлениях линейной кинетической теории об элементарном акте рассеяния и длине свободного пробега излучения. В 50-ые годы прошлого столетия в связи с созданием теории частичной когерентности волновых полей начались активные исследования вопроса о границах применимости теории переноса с точки зрения статистичекой теории многократного рассеяния волн в случайно-неоднородных средах [2]. Хотя данные исследования носили теоретический характер, тем не менее они привели в 1973г к предсказанию явления слабой локализации света в случайно-неоднородной среде [3]. Поскольку это явление лежало как раз на границе применимости теории переноса излучения, обойти его было невозможно. Со временем появились новые физические явления, такие как пленение излучения резонансными рассеивателями и эффекты ближних полей рассеивателей, которые потребовали модификации теории переноса излучения. Более того, перспективы применения новых искусственных систем в виде статистических ансамблей нанокластеров, периодических структур фотонных кристаллов и статистических ансамблей проводящих частиц разной формы с возможно значительным параметром упаковки в пространстве выдвинули проблему коренной перестройки традиционной теории переноса, однако с сохранением ее свойств общего характера и полезных методов. Некоторые подходы к модификации теории переноса изложены в кратком обзоре [4]. В настоящем докладе главное внимание уделяется вопросу об искусственном магнетизме метаматериалов, который рассматривается при изучении когерентного многократного рассеяния электромагнитного излучения статистическим ансамблем частиц на основе техники уравнения Дайсона [2,5].

1.Проблема эффективной магнитной проницаемости неупорядоченной среды из немагнитных проводящих частиц

За последние несколько десятилетий, в значительной степени благодаря широко известной работе Веселаго[6], большое внимание уделяется метаматериалам (см, напр.,обзор [7]). Считается, что метаматериалы могут обладать искусственным магнетизмом [8, 9]. Это связывается [7] с эффектами запаздывания электромагнитных волн на масштабе включения и резонансным возбуждением включений. При резонансном возбуждении на определенных частотах наведенный электрический или магнитный момент включения и внешнее поле колеблются в противофазе, что может по существующему мнению [10, 11] привести к отрицательным эффективным значениям проницаемостей, как диэлектрической так и магнитной.

2. Усреднение уравнений Максвелла по статистическому ансамблю рассеивателей

В связи с таким распространенным мнением поставим более скромный вопрос, может ли статистический ансамбль немагнитных проводящих частиц обладать эффективной магнитной проницаемостью, отличной от ее значения в окружающей немагнитной среде. При этом мы исходим из уравнений Максвелла для монохроматического электромагнитного волнового поля

$$rot\,\vec{E} = i\frac{\omega}{c}\mu\,\vec{H}; \quad rot\,\vec{H} = -i\frac{\omega}{c}\hat{\varepsilon}\,\vec{E} \qquad (1)$$

в однородной среде с некоторой постоянной диэлектрической проницаемостью ε_0 и единичной магнитной проницаемостью $\mu = 1$, где случайно расположены частицы с заданной диэлектрической проницаемостью ε_1, удельной проводимостью σ_1 и единичной магнитной проницаемостью. Через $\hat{\varepsilon}(\vec{r})$ обозначена случайная реализация комплексной диэлектрической проницаемости рассматриваемой среды, равная комплексной диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 + i\frac{4\pi\sigma_1}{\omega}$ внутри некоторой частицы и ε_0 вне частиц. Вопрос об эффективных параметрах такой среды решается путем усреднения исходных уравнений Максвелла (1) по статистическому ансамблю расположения рассеивателей в пространстве. При этом, например, эффективная диэлектрическая проницаемость среды ε_{eff} получается согласно [12,13] путем операции "расцепления"

$$\left\langle \hat{\varepsilon}(\vec{r})E_m(\vec{r})\right\rangle = \int d\vec{r}\,'\varepsilon_{mn}^{eff}(\vec{r},\vec{r}')\left\langle E_n(\vec{r}')\right\rangle \qquad (2)$$

среднего по ансамблю от произведения $\left\langle \hat{\varepsilon}\,\vec{E}\right\rangle$ комплексной диэлектрической проницаемости ансамбля частиц и случайной реализации напряженности электрического поля. Как видно, эффективная диэлектрическая проницаемость случайно-неоднородной среды представляет собой тензорный оператор, причем тензорные идексы обозначены латинскими буквами с соглашением суммирования по повторяющемуся индексу.

Сразу же можно сделать простое, но физически важное замечание, что эффективная магнитная проницаемость рассматриваемой случайно-неоднородной среды остается равной единице, $\left\langle \mu\,\vec{H}\right\rangle = \mu\left\langle \vec{H}\right\rangle$.

Практически операция расцепления (2) осуществляется с помощью уравнения Дайсона [2], которое получается путем усредненения по ансамблю интегрального уравнения для случайного электрического поля и в символическом операторном виде записывается как

$$\left\langle E\right\rangle = E_0 + G_0 M \left\langle E\right\rangle \qquad (3)$$

Здесь E_0 - падающее на ансамбль частиц электричекой поле, G_0 - тензорная функция Грина электрического поля в однородной среде и M -тензорный массовый оператор. Эффективная диэлектрическая проницаемость и массовый оператор связаны между собой операторным соотношением

$$\frac{\varepsilon_{eff}}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{M}{k_0^2} \qquad (4)$$

где k_0 - волновое число волны в однородной среде. Массовый оператор вычисляется на основе диаграммной техники Фейнмана [5] или эквивалентного метода асимптотических разложений [12]. Асимптотические разложения строятся, по сути дела, для среднего по ансамблю $\left\langle T\right\rangle$ оператора рассеяния системы частиц, удовлетворяющего уравнению

$$\left\langle T\right\rangle = M + M G_0 \left\langle T\right\rangle \qquad (5)$$

3. Сингулярность тензорной функции Грина и обобщенная формула Лорентц- Лоренца

Как известно (см., напр., [14]), тензорная фунция Грина электрического поля в однородной среде характеризуется сильной сингулярностью в начале координат и может быть разложена на главное значение $\tilde{G}_0$ и часть с дельта – функцией Дирака, что приводит уравнение (5) к виду

$$\left\langle T\right\rangle = \tilde{M} + \tilde{M}\tilde{G}_0 \left\langle T\right\rangle \qquad (6)$$

где преобразованный массовый оператор $\tilde{M}$ выражается через исходный операторным соотношением

$$\tilde{M} = \left(1 - \frac{M}{3k_0^2}\right)^{-1} M \qquad (7)$$

Вспоминая выражение (4) эффективной диэлектрической проницаемости через массовый оператор, приходим к равенству

$$\left(\varepsilon_{eff} + 2\varepsilon_0\right)^{-1}\left(\varepsilon_{eff} - \varepsilon_0\right) = -\frac{\tilde{M}}{3k_0^2} \qquad (8)$$

которое назовем обобщенной формулой Лорентц-Лоренца в операторном виде. Сравнение (8) с классической формулой Лорентц-Лоренца [15] показывает, что правая часть (8) играет роль эффективной поляризуемости единицы объема случайно-неоднородной среды. Если статистичекий ансамбль рассеивателей в среднем однороден и изотропен, то операторы ε_{eff} и $\tilde{M}$ в пространстве координат зависят от их разности и могут быть разложены в интеграл Фурье по пространственным гармоникам $\exp(i\vec{k}\vec{r})$. Соответствующие тензорные фурье- компоненты определяются поперечными "tr" и продольными "l" к волновому вектору $\vec{k}$ составляющими. Для поперечных составляющих формула Лорентц-Лоренца (8) принимает вид

$$\frac{\varepsilon_{eff}^{tr}(k)-\varepsilon_0}{\varepsilon_{eff}^{tr}(k)+2\varepsilon_0}=-\frac{\tilde{M}^{tr}(k)}{3k_0^2} \qquad (9)$$

4. Ансамбль статистически независимых малых сильно отражающих частиц

Пусть частицы ансамбля являются проводящими сферами, которые независимо распределены в пространстве с концентрацией f_1. В этом случае поперечная составляющая фурье-компоненты преобразованного массового оператора в правой части (9) выражаетя при $k=k_0$ через решение задачи Ми о рассеянии волны на проводящей сфере [15, 16]. Если радиус сферы r_0 мал по сравнению с длиной волны в однородной среде и сфера идеально отражает падающую волну за счет своей большой диэлектрической проницаемости или удельной проводимости, в решении задачи Ми достаточно ограничиться учетом электрического дипольного и магнитного дипольного рассеяния, которые описываются в терминах Хюлста [16] парциальными амплитудами рассеяния a_1 и b_1, соответственно. Находим

$$\tilde{M}^{tr}(k_0)\approx\frac{6\pi}{ik_0}f_1\left(a_1+b\right) \qquad (10)$$

Наведенные в сфере электрический дипольный $\vec{p}$ и магнитный дипольный $\vec{m}$ моменты при взаимном расположении сферы и падающей волны как на рис. 1 даются выражениями

$$\vec{p}=\frac{3i}{2k_0^3}a_1\vec{E}_0; \qquad \vec{m}=\frac{3i}{2k_0^3}b_1\vec{H}_0 \qquad (11)$$

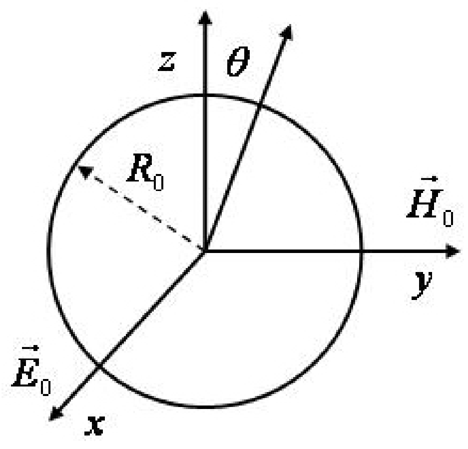

***Рис.1.** Рассеяние электромагнитной волны идеально отражающей сферой*

Для идеально отражающей малой сферы асимптотически

$$a_1 \to -\frac{2}{3} i (k_0 r_0)^3 \quad ; \quad b_1 \to \frac{1}{3} i (k_0 r_0)^3 \qquad (12)$$

что дает $\vec{p} \to r_0^3 \vec{E}_0$ и $\vec{m} \to -(1/2) r_0^3 \vec{H}_0$. Как видно, магнитный дипольный момент сферы направлен против вектора напряженности магнитного поля падающей волны. Отсюда, например, авторы [17] заключают, что магнитная проницаемость среды при внесении в нее сферы уменьшается. Однако, такое заключение не согласуется с нашим рассмотрением статистического ансамбля сфер. Мы можем проследить только вклады электрического и магнитного дипольных моментов сфер в эффективную диэлектрическую проницаемость ансамбля сфер по формуле Лорентц-Лоренца (9), которая принимает вид

$$\frac{\varepsilon_{eff}^{tr}(k_0) - \varepsilon_0}{\varepsilon_{eff}^{tr}(k_0) + 2\varepsilon_0} \to \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{4\pi}{3} f_1 r_0^3 \qquad (13)$$

где первое слагаемое в правой части представляет собой вклад электрического дипольного рассеяния и второе слагаемое- вклад магнитного дипольного рассеяния. Отметим, что рассеяние электромагнитной волны идеально отражающей малой сферой характеризуется своеобразной индикатрисой рассеяния, вытянутой в направлении рассеяния “назад “ согласно отрицательному значению среднего косинуса угла рассеяния (рис. 1) $\langle \cos\theta \rangle = -0.4$. Однако частично когерентное рассеяние волн ансамблем проводящих частиц должно рассматриваться с привлечением уравнения Бете-Солпитера [2].

5.Заключение

На основе техники уравнения Дайсона дан вывод обобщенной формулы Лорентц-Лоренца для эффективной диэлектрической проницаемости случайно-неоднородной дискретной среды в виде статистического ансамбля немагнитных проводящих частиц. На примере ансамбля малых сильно отражающих частиц проанализирован вклад их электрической и магнитной поляризуемости в эффективную диэлектрическую проницаемость ансамбля. В то же время показано, что в рамках рассмотренного подхода с усреднением по статистическому ансамблю совокупность случайно расположенных в пространстве немагнитных проводящих частиц не дает вклада в эффективную магнитную проницаемость немагнитной однородной окружающей среды.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-02-00920, а также программой фундаментальных исследований ООФ РАН “Пассивная многоканальная радио- и акустотермография человека в ближней зоне “.

ЛИТЕРАТУРА.

1. S. Chandrasekhar. Radiative Transfer . New York: Dover Publ., 1960.
2. Ю.Н. Барабаненков// УФН, 1975.Т. 117. N. 1. С. 49.
3. Ю.Н. Барабаненков//Изв. вузов. Радиофизика, 1973. Т. 16. N. . С. 88.
4. Ю.Н. Барабаненков//УФН, 2009.Т. 179. N. 5 . С. 534.

5. U. Frish // Ann. d' Astrophys, 1967. V. 30. P. 565.

6. В.Г. Веселаго // УФН, 1967. Т. 92. N. 3. С. 517.

7. А.П. Виноградов, А.В. Дорофеенко, С. Зухди // УФН. 2008.Т. 178. N. 5. С. 512.

8. М.В.Костин, В.В. Шевченко// Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33. N. 7. С.1526.

9. М.В.Костин // Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35. N. 2. С.424.

10. J.B. Pendry, A.J. Holden, A.J. Robbins, W.J. Stewart// IEEE Trans. on Microwave Theory and Technology, 1999. V. 47. N. 11. P. 2075.

11. T. Roschny, M. Kafesaki, E.M. Economou, C.M. Soukoulis // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. N. 10. P. 107402.

12. В.М. Финкельберг// ЖЭТФ, 1964, Т. 46. N. 2. С. 725.

13. Ю.А. Рыжов, В.В. Тамойкин, В.И. Татарский // ЖЭТФ, 1965, Т. 48. N. 2. С. 656.

14. Yu.N. Barabanenkov, M.Yu. Barabanenkov// Waves in Random Media, 1997. V.7. P. 607.

15. М. Борн, Е. Вольф. Основы оптики. М.: Наука, 1970.

16. Г. ван де Хюлст. Рассеяние света малыми частицами.М.: ИЛ, 1961.

17. С.А. Щелкунов, Г.Т. Фрисс. Антенны (Теория и практика). М.: Сов. Радио, 1955.