ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ-КИРХГОФА НА ЩЕЛИ В ПРОВОДЯЩЕМ ЭКРАНЕ ПРИ СКОЛЬЗЯЩЕМ ПАДЕНИИ ВОЛН

Дагуров П.Н., Дмитриев А.В.
Отдел физических проблем при Президиуме Бурятского научного центра СО РАН
dpn@pres.bscnet.ru

В рамках метода Френеля – Кирхгофа решена задача дифракции электромагнитных волн на щели в проводящем экране при скользящем падении. Решение записано через известные специальные функции. Приведены результаты численного моделирования.

Введение. Задача о дифракции волн на щели, наряду с дополнительной к ней задачей дифракции волн на ленте, является классической дифракционной задачей, которая неизменно вызывает интерес исследователей. Это связано с тем, что данные задачи являются модельными,

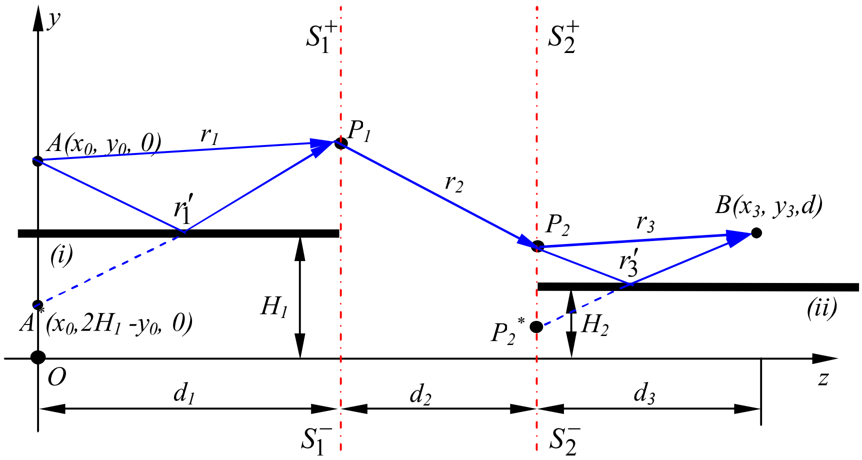

Рис. 1. Геометрия задачи

они имеют строгие решения и позволяют исследовать на своем примере различные новые подходы и методы решения подобных проблем.

Ранее, в работе [1] был предложен новый метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на ленте для малых углов скольжения, которые ранее не охватывались теорией Кирхгофа в своем обычном виде. Метод основан на последовательном применении принципа Гюйгенса – Френеля и использовании принципа зеркальных изображений с учетом поляризации волны.

Целью данной работы является применение данного метода для решения задачи дифракции на щели, образованной разнесенными в пространстве проводящими полуплоскостями.

Теория. Геометрия задачи показана на рис. 1. Две параллельные проводящие плоскости расположены на расстоянии d_2 друг от друга по горизонтали. Через H_1 обозначим расстояние от плоскости xOz до полуплоскости *(i)*, образующей первый край щели, а через H_2 – аналогичное расстояние до полуплоскости *(ii)*, образующей второй край щели. Общее расстояние между образующим равно $\Delta H = |H_1 - H_2|$.

По аналогии с [1] введем две дополнительные плоскости $S_1 = S_1^+ \cup S_1^-$ и $S_2 = S_2^+ \cup S_2^-$, содержащие виртуальные гюйгенсовы источники. Плоскости проходят через края образующих и перпендикулярно им. Тогда поле в точке B с учетом отраженной от полуплоскости *(ii)* волны можно записать в виде дифракционного интеграла Кирхгофа

$$U(B) = \frac{1}{i\lambda} \int\limits_{S_2^{(p)}} U(P_2) \left(\frac{exp(ikr_3)}{r_3} + \Phi \frac{exp(ikr_3')}{r_3'} \right) dS_2 .$$

Здесь r_3' - путь, проходимый отраженной волной, Ф - коэффициент отражения. В качестве поверхности интегрирования $S_2^{(p)}$ выбирается либо S_2^+, если точка B находится выше полуплоскости *(ii)* ($y_3>H_2$), либо S_2^- в случае когда $y_3<H_2$. Поле $U(P_2)$ в точке P_2 в свою очередь можно представить в виде

$$U(P_2)=\frac{1}{i\lambda}\int\limits_{S_1^{(p)}}U(P_1)\frac{exp(ikr_2)}{r_2}dS_1,$$

где поле в точке P_1 определяется суммой прямой и отраженной от полуплоскости *(ii)* волн

$$U(P_1)=\frac{exp(ikr_1)}{r_1}+\Phi\frac{exp(ikr_1')}{r_1'},$$

а $S_1^{(p)}$ также зависит от того, где находится источник – выше или ниже образующей *(i)*. Собирая эти выражения в одно, получим

$$U(B)=\frac{1}{(i\lambda)^2}\int\limits_{S_1^{(p)}}\int\limits_{S_2^{(p)}}\left(1+\Phi\cdot exp(ik\Delta r_1)\right)\cdot\left(1+\Phi\cdot exp(ik\Delta r_3)\right)\frac{exp\left(ik(r_1+r_2+r_3)\right)}{r_1\cdot r_2\cdot r_3}dS_1dS_2, \qquad (1)$$

где $\Delta r_1=r_1'-r_1$, $\Delta r_3=r_3'-r_3$, а в знаменателе положено $r_1'\approx r_1$ и $r_3'\approx r_3$. Как видно из формулы (1) положение источника и приемника определяет, по каким поверхностям будет производиться интегрирование. Пусть источник и приемник находятся выше образующих щели (т.е. $y_0>H_1$, $y_3>H_2$). В такой ситуации в точку наблюдения B не попадают волны, переизлученные гюйгенсовыми источниками области S_2^-, а поверхность S_1^- остается в тени образующей кромки *(i)* щели. Используя приближение Френеля, и вычисляя поверхностные интегралы в (1), после ряда упрощений поле в приёмной точке в данном случае можно записать в виде

$$U(B)=U_0\left(W_1+\Phi\cdot W_2\right), \qquad (2)$$

где

$$W_1=\frac{1}{2\pi}\left\{\begin{aligned}&P\left(h_1-h_A^+,h_2-h_B^+,\beta\right)+\\&+exp\left(i\frac{2k}{d}(H_1-H_2)(H_1-H_2+y_3-y_0)\right)\cdot P\left(h_1'-\beta h_2''+h_A^+,h_2'-\beta h_1''+h_B^+,\beta\right)\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$W_2=\frac{exp\left(i\frac{2k}{d}y_0y_3\right)}{2\pi}\left\{exp(i\varphi_1)\cdot P\left(h_1-h_A^-,h_2-\beta h_1''-h_B^-,\beta\right)+exp(i\varphi_2)\cdot P\left(h_1-\beta h_2''-h_A^-,h_2-h_B^-,\beta\right)\right\} \qquad (4)$$

U_0 – поле в точке приёма в отсутствии щели,

$$\varphi_1=\frac{2k}{d}H_1\left(H_1-y_0-y_3\right), \varphi_2=\frac{2k}{d}H_2\left(H_2-y_0-y_3\right);$$

$$\beta=\sqrt{\frac{d_1d_3}{(d_1+d_2)(d_2+d_3)}}<1; b_j=\sqrt{\frac{\lambda d_jd_{j+1}}{d_j+d_{j+1}}}.j=1,2.$$

$$h_1'=\frac{\sqrt{\pi}H_1}{b_1d}\left(d_1-d_2-d_3\right),\ h_1''=\frac{2\sqrt{\pi}H_1}{b_1d}\left(d_2+d_3\right); h_2'=\frac{\sqrt{\pi}H_2}{b_2d}\left(d_3-d_1-d_2\right),\ h_2''=\frac{2\sqrt{\pi}H_2}{b_2d}\left(d_1+d_2\right).$$

$$h_1=\sqrt{\pi}H_1/b_1; h_2=\sqrt{\pi}H_2/b_2;\ d=d_1+d_2+d_3;$$

$$h_A^{\pm}=\frac{\sqrt{\pi}}{b_1}\cdot\frac{\pm y_0(d_2+d_3)+y_3d_1}{d}; h_B^{\pm}=\frac{\sqrt{\pi}}{b_2}\cdot\frac{\pm y_0d_3+y_3(d_1+d_2)}{d}.$$

$$P(x,y,\beta)=-2i\cdot\sqrt{1-\beta^2}\int\limits_x^{\infty}\int\limits_y^{\infty}exp\left(i\cdot\left[t_1^2-2\beta t_1t_2+t_2^2\right]\right)dt_1dt_2$$

Как показано в работе [2] для $x,y>0$, $|\beta|<1$ функцию $P(x,y,\beta)$ можно представить в виде

$$P(x,y,\beta) = G(x-\beta y,\sqrt{1-\beta^2}\,y) + G(y-\beta x,\sqrt{1-\beta^2}\,x),$$

где $G(z,\alpha) = \alpha\int\limits_z^\infty exp\left(i\cdot\left[t^2+\alpha^2\right]\right)/\left[t^2+\alpha^2\right]dt$ - обобщенный интеграл Френеля.

Можно показать, что если точка B находится ниже полуплоскости, образующей второй край щели (т.е. $y_3<H_2$), то в выражениях (3) и (4) вторые аргументы функций $P(...)$ меняют знак. Аналогично, если $y_0<H_1$, то меняют знак первые аргументы. Таким образом, формула (2) с учетом сделанных замечаний позволяет полностью описать дифракцию волн на щели при любом положении источника и приемника. Также следует отметить, что полученное решение удовлетворяет принципу взаимности.

Анализ полученного решения и численные результаты. Рассмотрим выражение (2). Предположим, что образующие щели лежат в плоскости xOz, т.е. $H_1=H_2=0$. Тогда, с учётом свойств функции $P(...)$

$$U(B) = U_0\left\{W_1 + \Phi\cdot W_2\, exp\left(i2ky_0y_3/d\right)\right\}, \tag{5}$$

где

$$W_1 = 1-\frac{1}{\sqrt{\pi i}}\left[F\left(h_A^+\sqrt{1-\beta_1^2}\right)+F\left(h_B^+\sqrt{1-\beta_1^2}\right)\right]+\frac{1}{\pi}\left[G\left(h_A,h_B^+\sqrt{1-\beta_1^2}\right)+G\left(h_B,h_A^+\sqrt{1-\beta_1^2}\right)\right], \tag{6}$$

$$W_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi i}}\left[F\left(h_A^-\sqrt{1-\beta_1^2}\right)+F\left(h_B^-\sqrt{1-\beta_1^2}\right)\right]-\frac{1}{\pi}\left[G\left(h_A,h_B^-\sqrt{1-\beta_1^2}\right)+G\left(h_B,h_A^-\sqrt{1-\beta_1^2}\right)\right], \tag{7}$$

$$h_A = y_0\sqrt{\frac{\pi d_2}{\lambda d_1(d_1+d_2)}};\, h_B = y_3\sqrt{\frac{\pi d_2}{\lambda d_3(d_2+d_3)}}\,.$$

Слагаемое W_1 описывает волны, попадающие в точку наблюдения без отражения и волны, отраженные от каждой образующей полуплоскости. Так, единица, входящая в выражение (6) описывает прямую геометрооптическую волну, интегралы Френеля $F(x) = \int\limits_x^\infty exp(it^2)dt$ описывают однократно дифрагировавшие волны на каждой из образующих, обобщенные интегралы Френеля – волны, дифрагировавшие на обоих краях щели. Выражение для W_2, описывающее однократно отраженные волны, имеет аналогичный вид.

Анализ формулы (5) показывает, что в предельном случае $d_2=0$ и $H_1=H_2=0$, т.е. когда щель отсутствует (идеально проводящая плоскость)

$$U(B) = U_0\left(1+\Phi\, exp(ik\Delta r)\right),$$

где Δr – разность хода между прямой и отраженной от плоскости волнами. Таким образом, (5) и соответственно (2), правильно описывают поле в отсутствие щели, хотя вывод формул базировался на предположении, что $d_2>>\lambda$.

Если положить $y_0 = y_3 = 0$ ($H_1=H_2=0$), то

$$U(B) = U_0(1+\Phi)\left(1-\frac{1}{\pi}arctg\sqrt{\frac{d_2 d}{d_1 d_3}}\right).$$

В случае поляризации излучения параллельно краям щели (Φ = -1), поле в точке наблюдения равно нулю.

Рассмотрим примеры численного моделирования рассеяния волн на щели в бесконечном проводящем экране, основанного на выражении (5). На рис. 2, 3 показана пространственная зависимость величины ослабления $V = 20\cdot lg\left|U(B)/U_0\right|$, дБ в плоскости yOz за щелью для различной поляризации падающего излучения. При расчетах полагалось, что образующие щели лежат в плоскости xOz (т.е. $H_1=H_2=0$), расстояние от источника до первого края щели d_1 составляло 10λ, ширина щели d_2 равнялась 5λ.

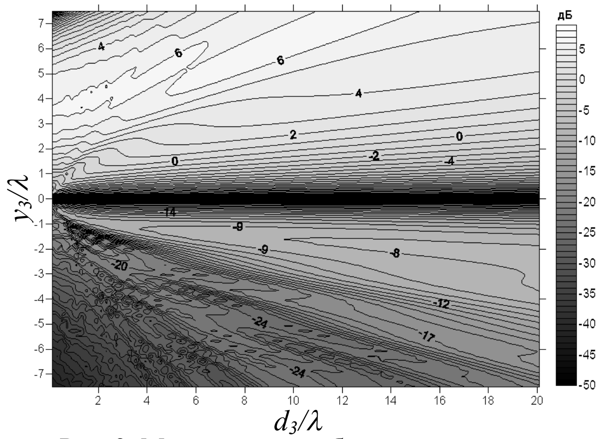

Рис. 2. Множитель ослабления за щелью на горизонтальной поляризации. x_0 =0; y_0 =1λ;

Рис. 3. Множитель ослабления за щелью на вертикальной поляризации. x_0 =0; y_0 =1λ.

Численное моделирование показало, что в случае горизонтальной поляризации излучения (Ф = -1), щель оказывает значительное ослабление поля при низко расположенном источнике. С увеличением высоты уровень поля растет за счёт отражений от образующих щели. На вертикальной поляризации (рис. 3) наблюдается обратная ситуация: чем ниже источник, тем выше уровень поля.

Т.о., в работе в рамках теории дифракции Френеля-Кирхгофа решена задача дифракции электромагнитных волн на щели в проводящем экране. Полученное решение удовлетворяет принципу взаимности, выражается через известные специальные функции теории дифракции и в частных случаях совпадает с известными результатами. Представлены результаты численного моделирования, показывающие зависимость дифракционного поля от различных параметров задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дагуров П.Н., Дмитриев А.В. Применение метода Кирхгофа к задаче дифракции волн на ленте при малых углах скольжения. // Письма в ЖТФ. 2005. Т.31. № 19. С. 22-27.
2. Каратыгин В.А., Розов В.А. Метод стационарной фазы для двойного интеграла с произвольно расположенной точкой стационарной фазы // Журнал вычислительной математики и мат. физики.- 1972.- Т.12, №6.- С.1381-1405.