ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КРАВЧЕНКО-КОТЕЛЬНИКОВА К ИНТЕРПОЛЯЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Кравченко В.Ф., Сафин А.Р.

Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова, Российская Академия наук
E-mails: kvf@pochta.ru, safin_ansar@mail.ru

Кравченко О.В.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
E-mail: olekravchenko@gmail.com

Рассмотрены методы и алгоритмы интерполяции случайных процессов с финитным спектром по дискретным отсчетам с использованием теоремы Кравченко-Котельникова (КК). В качестве интерполирующих ядер в ней применяются преобразования Фурье семейства атомарных функций (АФ) $fup_n(t)$ и $h_a(t)$. Такой подход позволяет добиться улучшения сходимости построенных рядов по сравнению с рядами Уиттекера-Котельникова-Шеннона (УКШ). Анализируются вопросы, связанные с конечным числом отсчетов в построенных рядах, выборе оптимальной полосы пропускания фильтров, интерполяции случайных процессов с нефинитным спектром.

Введение

Проблемы дискретизации и интерполяции сигналов имеют большое значение как в теории сигналов с финитным спектром, так и случайных процессов [1]. При выборе шага дискретизации возникают задачи оценки погрешности замены непрерывных процессов дискретными, а также оптимизации характеристик интерполирующих фильтров по критерию минимума среднеквадратической ошибки интерполяции [1,2]. Использование обобщенных теорем УКШ и КК [3-6] позволяет решать эти задачи эффективнее существующих методов [2]. На первом этапе приводится общая теория оценки погрешности восстановления непрерывных сигналов по дискретным отсчетам, а на втором рассматривается метод интерполяции случайных процессов АФ и их преобразованиями Фурье (ПФ). На конкретных физических примерах показаны возможности предложенных методов интерполяции случайных процессов.

Погрешность восстановления непрерывных сигналов по дискретным отсчетам

Функциональная схема системы дискретизации и восстановления непрерывного процесса (сигнала) $s(t)$ представлена на рис.1. Здесь $s_д(k)$ представляет собой дискретизованный с шагом Δ сигнал (формируется из исходного непрерывного сигнала ключевым устройством), а $\tilde{s}(t)$ - восстановленный сигнал. Дискретный процесс $s_д(k)$ приближенно изображает исходный непрерывный процесс $s(t)$. В данном случае под погрешностью дискретизации понимается та погрешность, с которой может быть восстановлен непрерывный процесс по его дискретным значениям. Восстановление сигнала $s(t)$ по дискретному процессу $s_д(k)$ представим как пропускание последовательности δ-функций через линейный интерполирующий фильтр с переходной характеристикой $h(t)$ (см. рис.1). В результате интерполяции получаем сигнал

$$\tilde{s}(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} s_{\partial}(k)h(t-k\cdot\Delta t),$$

где Δt - шаг дискретизации и $s_{\partial}(k)\equiv s[k\cdot\Delta t]$. Ошибку интерполяции $\Delta s(t)=s(t)-\tilde{s}(t)$ рассматриваем как выходной сигнал схемы (см. рис.2).

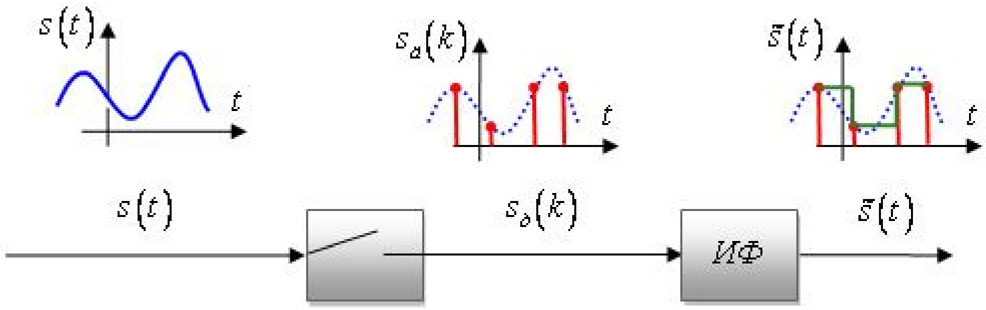


Рис.1. *Процедура дискретизации и восстановления непрерывного сигнала* $s(t)$

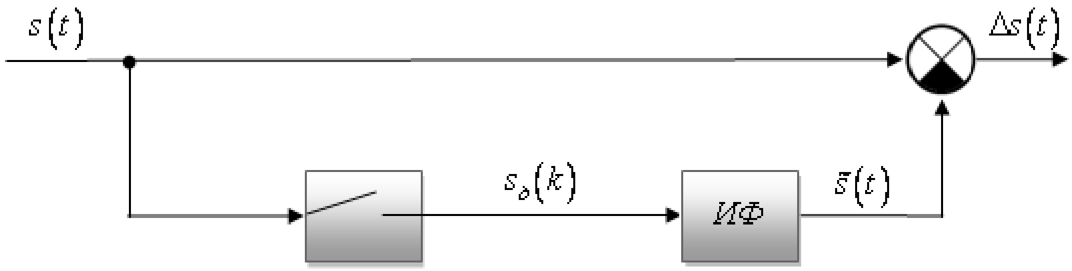


Рис.2. *Схема устройства, выходным сигналом которого является ошибка интерполяции непрерывного сигнала* $s(t)$ *по дискретным значениям* $s_{\partial}(k)$

Приведем [2] выражения для корреляционной функции, энергетического спектра и дисперсии ошибки $\Delta s(t)$. Ошибка интерполяции $\Delta s(t)$ является нестационарным случайным процессом. Корреляционная функция (усредненная) ошибки имеет вид [2]

$$R_{\Delta}(\tau)=\frac{1}{\Delta t}\int_{0}^{\Delta t} M\left\{\Delta s(t)\Delta s(t+\tau)\right\}dt\,.$$

Пусть $R(\tau)$ - корреляционная функция исходного случайного процесса. Согласно [2] определим связь между $R_{\Delta}(\tau)$ и $R(\tau)$, а также Δt и $h(t)$.

Тогда

$$R_{\Delta}(\tau)=R(\tau)+\frac{1}{\Delta t}\sum_{k\in\mathbb{Z}} R[k]g(\tau-k\cdot\Delta t)-\frac{1}{\Delta t}\big(R(\tau)*h(\tau)+R(\tau)*h(-\tau)\big), \qquad (1)$$

где $g(\tau)=h(\tau)*h(-\tau)$ и $R[k]=R(k\cdot\Delta t)$.

Как известно [1,2], энергетический спектр является преобразованием Фурье корреляционной функции. Общее выражение для энергетического спектра ошибки интерполяции $G_{\Delta}(\omega)$ через энергетический спектр исходного сигнала $G(\omega)$, частотную характеристику фильтра $K(\omega)$ и шаг дискретизации Δt запишем так $G_\Delta(\omega) = G(\omega)\left[1 - \frac{2}{\Delta t}\operatorname{Re} K(\omega)\right] + \frac{1}{\Delta t}\Phi(\omega)\left|K(\omega)\right|^2$, где $\Phi(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} R[k]e^{-i\omega\Delta tk} = \frac{1}{\Delta t}\sum_{k\in\mathbb{Z}} G(\omega - 2\pi k/\Delta t)$.

Положив в (1) $\tau = 0$, получим выражение для средней за период Δt дисперсии ошибки интерполяции $\sigma_\Delta^2 = R_\Delta(0) = \sigma^2 + \frac{1}{\Delta t}\sum_{k\in\mathbb{Z}} R[k]g(k\Delta t) - \frac{2}{\Delta t}\int_{\mathbb{R}} R(\theta)h(\theta)d\theta$,где $\sigma^2 = R(0)$ - дисперсия исходного случайного процесса. Относительная среднеквадратическая ошибка интерполяции ($\Delta^2 = {\sigma_\Delta}^2 / \sigma^2$) имеет вид $\Delta^2 = 1 + \frac{1}{\Delta t}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r[k]g(k\Delta t) - \frac{2}{\Delta t}\int_{\mathbb{R}} r(\theta)h(\theta)d\theta,$ где $r(\theta) = R(\theta)/\sigma^2$ - коэффициент корреляции исходного случайного процесса.

Интерполирующие фильтры

Согласно [2] запишем оптимальную частотную характеристику интерполирующего фильтра, обеспечивающую минимальную ошибку интерполяции, $K_{опт}(\omega) = \frac{G(\omega)}{\Phi(\omega)}$. (2)

При этом минимальная ошибка интерполяции процесса равна $\sigma_{\Delta опт}^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty G(\omega)\left[1 - \frac{G(\omega)}{\Delta t \cdot \Phi(\omega)}\right]d\omega$.

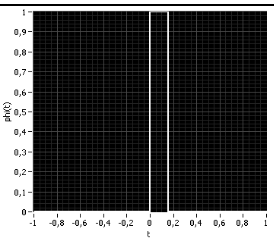
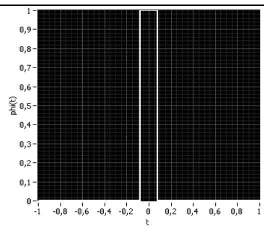
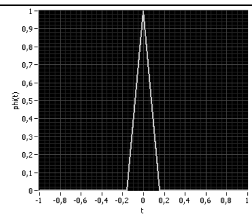
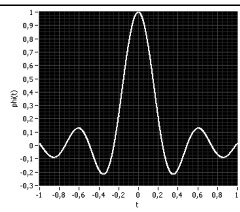
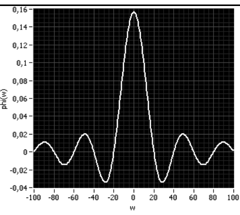
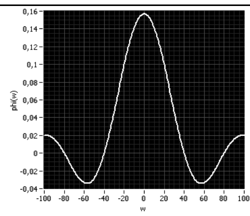
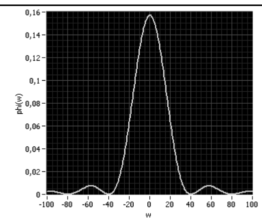
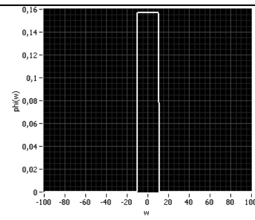
Из (2) следует $h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t}\frac{G(\omega)}{\Phi(\omega)}d\omega$.

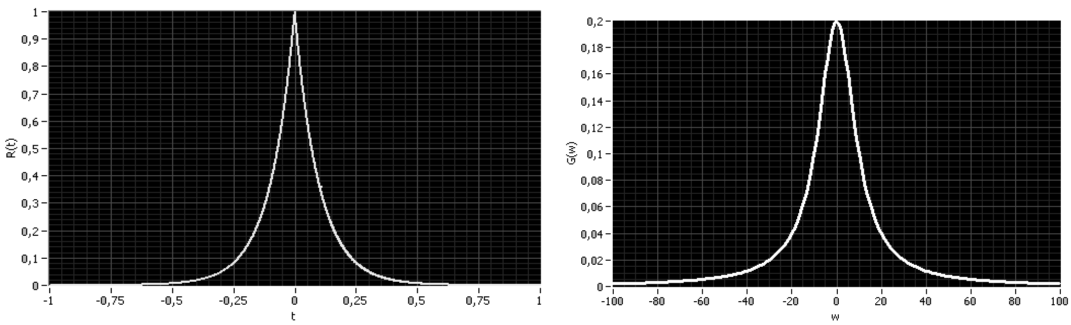
Так как реализовать оптимальный интерполирующий фильтр на практике сложно (см.[2]), то пользуются различными интерполирующими функциями. В таблице 1 представлены простейшие интерполирующие функции: элементы нулевого порядка (симметричный и несимметричный), элемент первого порядка и идеальный фильтр нижних частот Котельникова.

Численный эксперимент

Для проведения численного эксперимента был выбран конкретный вид функции корреляции случайного процесса в виде $R(\tau) = e^{-\omega_\circ|\tau|}$, где $\omega_0 = \pi/2\Delta t$, а его энергетический спектр $G(\omega) = \frac{2\omega_\circ}{\omega_\circ^2 + \omega^2}$. Поведение функции корреляции и энергетического спектра приведены на рис.3*а,б*. Сравнение нормированных спектров $G_\Delta(\omega)/G(\omega)$ исследуемого процесса с оптимальным случаем (см. рис.4*а,б*) при несимметричном элементе нулевого порядка и идеальном фильтре нижних частот Котельникова. Анализ физических результатов (см.рис.4*а-г*) показал, что фильтры с исследуемыми характеристиками значительно отличаются от оптимальных. Использование обобщенных теорем УКШ и КК [4-6] позволяет получить лучшее приближение к оптимальному случаю, но за счет усложнения схемы интерполирующего фильтра.

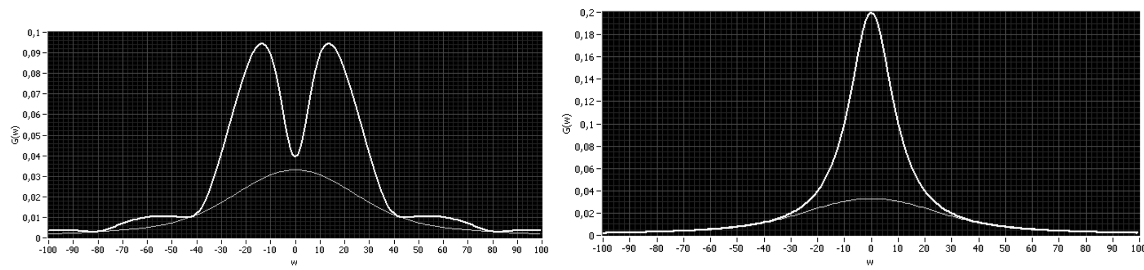
Табл. 1. *Характеристики интерполирующих фильтров*

	Элемент нулевого порядка (несимметричный)	*Элемент нулевого порядка (симметричный)*	*Элемент первого порядка*	*Идеальный фильтр нижних частот*
ИХ	$h(\tau)=\begin{cases}1, \tau\in[0,\Delta],\\ 0, \tau\notin[0,\Delta],\end{cases}$	$\varphi(\tau)=\begin{cases}1, \tau\in[-\Delta/2,\Delta/2],\\ 0, \tau\notin[-\Delta/2,\Delta/2],\end{cases}$	$\varphi(\tau)=1-{\lvert\tau\rvert}/{\Delta}$	$\varphi(\tau)=\mathrm{sinc}(\omega_0\tau)$
ЧХ	$K(\omega)=\Delta\cdot\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right)e^{\frac{i\omega\Delta}{2}}$	$K(\omega)=\Delta\cdot\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right)$	$K(\omega)=\Delta\cdot\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right)$	$\tilde{\varphi}(\omega)=\begin{cases}\Delta, \omega\in[-\omega_0,\omega_0],\\ 0, \tau\notin[-\omega_0,\omega_0].\end{cases}$
ИХ				
ЧХ				



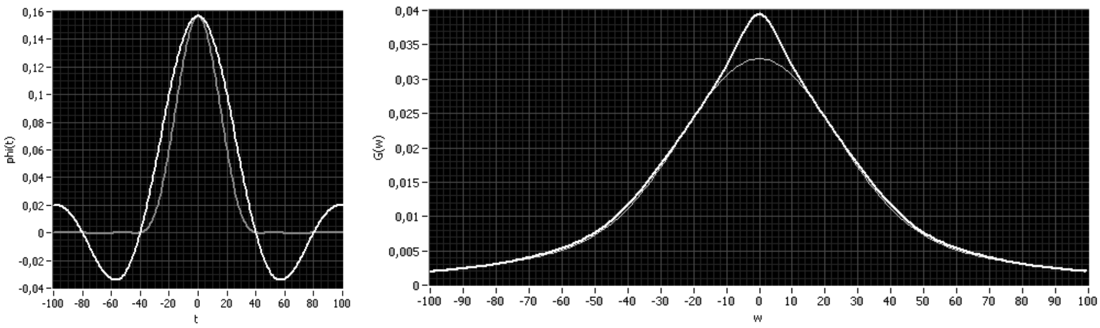
(а) (б)

Рис.3. *Поведение функции корреляции (а) и энергетического спектра (б)*



(а) (б)

Рис.4. *Сравнение нормированных спектров* $G_\Delta(\omega)/G(\omega)$ *исследуемого процесса с оптимальным случаем при несимметричном элементе нулевого порядка (а), и идеальном фильтре нижних частот Котельникова (б)*



(а) (б)

Рис.5. *Сравнение преобразования Фурье атомарной функции fup_2 и sinc-функци (а), нормированного спектра $G_\Delta(\omega)/G(\omega)$ с оптимальным (б)*

На рис.5а представлено сравнение преобразования Фурье АФ fup_2 и sinc-функции. ПФ АФ fup_n запишем так: $\Im\left[fup_n(x)\right](t)=\mathrm{sinc}^n\left(\frac{t}{2}\right)\prod_{i=1}^{\infty}\mathrm{sinc}\left(\frac{\mathrm{t}}{2^{\mathrm{i}}}\right)$. Поведение нормированного спектра $G_\Delta(\omega)/G(\omega)$ и сравнение его с оптимальным случаем показано на рис.5*б*. Использование семейства АФ позволило добиться улучшения приближения частотных характеристик к оптимальному случаю.

Заключение

На конкретных физических примерах показано, что применение обобщенных теорем УКШ и КК существенно улучшает приближение частотных характеристик ошибок интерполяции случайных процессов по дискретным отсчетам к оптимальному случаю.

Работа выполнена в рамках гранта НШ-5708.2008.9 «Новые методы в некоторых задачах акустооптики, радиофизики и медицины на основе атомарных функций, вейвлетов и фракталов».

ЛИТЕРАТУРА

1. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971.
2. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Сов. радио, 1971.
3. Зелкин Е.Г., Кравченко В.Ф., Гусевский В.И.. Конструктивные методы аппроксимации в теории антенн. М.: Сайнс-Пресс, 2005.
4. Кравченко В.Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. М.: Радиотехника, 2003.
5. Цифровая обработка сигналов и изображений в радиофизических приложениях. Под ред. В.Ф. Кравченко. М.: Физматлит, 2007.
6. В.Ф.Кравченко, А.Р.Сафин. Атомарные функции и N-мерная обобщенная теорема Уиттекера-Котельникова-Шеннона. ЭВ и ЭС, №12, т.13, 2008, с.31-44.

KRAVCHENKO-KOTEL'NIKOV THEOREM APPLICATIONS TO INTERPOLATION OF RANDOM PROCESSES

V.F. Kravchenko, A.R. Safin

Kotel'nikov Institut of Radio Engineering and Electronics of RAS, Moscow
E-mails: kvf@pochta.ru, safin_ansar@mail.ru

O.V. Kravchenko

Bauman Moscow State Technical University, Moscow
E-mail: olekravchenko@gmail.com

Methods and algoritms of interpolation of random processes with finite spectrum on discrete samples with Kravchenko-Kotel'nikov theorem using are considered. In the capacity of interpolation kernels Fourier transforms of atomic functions families $fup_n(t)$ and $h_a(t)$ are applied. This approach allows obtain better convergence as compared with Whittaker-Kotel'nikov-Shannon rows. Questions associated with finite number of samples, optimal filters bandwidth choising, interpolations of random processes with infinite spectrum are analized.

Секция: Применение атомарных и R – функций в антенной технике

Авторы:

Кравченко В.Ф. – заслуженный деятель науки РФ, главный научный сотрудник, доктор физ.-мат. наук, профессор, ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН,
тел.: 8-(495)-629-33-65
Область научных интересов: R-функции, атомарные функции, вейвлеты, электродинамика сверхпроводящих структур, анализ и синтез антенн, прикладные математика и физика, дистанционное зондирование неоднородных сред.
E-mail: kvf@pochta.ru

Кравченко О. В. студент 5-го курса МГТУ им. Н.Э. Баумана,
тел.: 8-(495)-629-33-65
Область научных интересов: R-функции, атомарные функции, вейвлеты.
E-mail: olekravchenko@gmail.com

Сафин А. Р. – студент 5-го курса МЭИ(ТУ), ИРЭ(РТФ).
тел.: 8-(495)-699-40-66
Область научных интересов: R-функции, атомарные функции, вейвлеты.
E-mail: safin_ansar@mail.ru