

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ПРОНИ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ ДВУМЕРНЫХ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ПОМЕХ

Верстаков Е.В., Захарченко В.Д.
Волгоградский государственный университет
E-mail: vulture84@mail.ru

Проведена оценка потенциальной помехоустойчивости двумерного метода Прони для сигнала, состоящего из двух комплексно-сопряженных двумерных экспонент. Предложен алгоритм оценки параметров разложения двумерного узкополосного сигнала методом Прони. Результаты статистического моделирования показывают, что погрешность оценки параметров разложения двумерного сигнала лежат выше границы Крамера-Рао на 30дБ, что свидетельствует о возможности повышения потенциальной точности оценки параметров разложения.

1. Вводные замечания

В ряде прикладных задач для параметрического описания экспериментальных данных зачастую пользуются одномерными моделями. Однако некоторые приложения требуют описания исследуемых данных более высокой размерности, например, в задачах двумерного спектрального анализа.

Двумерный спектральный анализ может использоваться для пространственно-пространственных массивов данных – при обработке изображений; пространственно-временных массивов данных – при обработке гидролокационных, сейсмических и радиолокационных сигналов в случае синтезируемой апертуры; временно-временных массивов данных – при анализе интервала повторения радиолокационных импульсов в зависимости от момента их прихода [1]. Обработка двумерных данных приводит к увеличению в сравнении с одномерным случаем вычислительных трудностей, а также к проблеме распространения многих одномерных методов на двумерный случай.

Одним из наиболее распространенных параметрических методов спектральной оценки является метод Прони [1,2]. Рассмотрим двумерный вариант метода Прони для моделирования выборочных двумерных данных в виде линейной комбинации двумерных экспонент на интервалах $t_1 \in [0, T_1]$ и $t_2 \in [0, T_2]$:

$$x(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^N A_i e^{\lambda_{1i} t_1} e^{\lambda_{2i} t_2}, \quad (1)$$

где N – заранее известный порядок разложения, $A_i, \lambda_{1i}, \lambda_{2i}$ – комплексные константы. Таким образом, можно полностью восстановить сигнал (1), наблюдая его ограниченный фрагмент на интервалах $[0, T_1], [0, T_2]$.

2. Оценка потенциальной точности представления двумерных сигналов рядом Прони

Рассмотрим сигнал $y(t_1, t_2) = x(t_1, t_2, \vec{\Lambda}) + n_0(t_1, t_2)$, где $\vec{\Lambda} = \{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N\}$ – вектор параметров, $n_0(t_1, t_2)$ – двумерный белый гауссов шум, и оценим потенциальную помехоустойчивость разложения вида (1) аналогично [5].

Для несмещенных оценок, вычисленных путем усреднения по $y(t_1, t_2)$ при фиксированном значении $\vec{\Lambda}$, существует система N неравенств Крамера-Рао [3,4]:

$$D \left\{ \Lambda_i \mid \vec{\Lambda} \right\} \geq \Phi_{ii}^{-1} \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

где Φ_{ii}^{-1} – i -й диагональный элемент матрицы Φ^{-1} , обратной информационной матрице Фишера, т.е. $N \times N$ - матрице с элементами

$$\Phi_{ik} = -\frac{2}{N_0} \frac{\partial^2 \overline{z(\vec{\Lambda})}}{\partial \Lambda_i \partial \Lambda_k} \Big|_{\Lambda_{0i} \Lambda_{0k}} + \frac{1}{N_0} \frac{\partial^2 E(\vec{\Lambda})}{\partial \Lambda_i \partial \Lambda_k} \Big|_{\Lambda_{0i} \Lambda_{0k}}, \quad (3)$$

где $\overline{z(\vec{\Lambda})} = \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} y(t_1, t_2) x(t_1, t_2, \vec{\Lambda}) dt_1 dt_2$ – корреляционный интеграл принятой

реализации $y(t_1, t_2)$ с сигналом $x(t_1, t_2, \vec{\Lambda})$; $E(\vec{\Lambda}) = \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} x^2(t_1, t_2, \vec{\Lambda}) dt_1 dt_2$ – энергия сигнала

$x(t_1, t_2, \vec{\Lambda})$ на интервалах $[0, T_1]$ и $[0, T_2]$ соответственно, N_0 – спектральная плотность аддитивного двумерного гауссова шума.

Рассмотрим полезный сигнал $x(t_1, t_2, \vec{\Lambda})$ вида (1):

$$x(t_1, t_2) = \frac{A}{2} \exp[(\lambda_1 + j\omega_1)t_1 + (\lambda_2 + j\omega_2)t_2] + \frac{A}{2} \exp[(\lambda_1 - j\omega_1)t_1 + (\lambda_2 - j\omega_2)t_2].$$

При отсутствии функциональной зависимости между параметрами $A, \lambda_1, \lambda_2, \omega_1, \omega_2$ и достаточно большом интервале наблюдения T (сигнал полностью затухает к концу интервала), неравенства Крамера-Рао определяется из выражения (2). Опуская громоздкие выражения, для значений параметров $A = 10.0$, $\lambda_1 = -1.0$, $\lambda_2 = -1.4$, $\omega_1 = 50.0$, $\omega_2 = 40.0$, $\Delta t = 0.01$ эти неравенства приводятся к виду:

$$\frac{\sigma_A}{A} \geq 0.04879\sigma_n; \quad \frac{\sigma_{\lambda_1}}{|\lambda_1|} \approx \frac{\sigma_{\lambda_2}}{|\lambda_2|} \geq 0.05629; \quad \sigma_n; \quad \frac{\sigma_{\omega_1}}{\omega_1} \geq 0,00092\sigma_n; \quad \frac{\sigma_{\omega_2}}{\omega_2} \geq 0,00161\sigma_n.$$

3. Алгоритм Прони для двумерных сигналов

Рассмотрим финитную последовательность $x_{s,t}$, где $s = 1, \dots, S$, $t = 1, \dots, T$, а общая модель имеет вид:

$$r_{s,t} = x_{s,t} + e_{s,t} = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M C_{n,m} y_n^s z_m^t + e_{s,t}. \quad (4)$$

Здесь $y_n = \exp(\alpha_n + j\omega_{1n})$; $z_m = \exp(\beta_m + j\omega_{2m})$ – полюса, причём $y_0 = z_0 = 1$, $C_{n,m} = A_{n,m} \exp(j\varphi_{n,m})$ – комплексные амплитуды, $\{e_{s,t}\}$ – отсчёты белого гауссова шума.

Основная идея алгоритма заключается в том, что по аналогии с одномерным случаем [1], выражение (4) является решением однородного линейно-разностного уравнения с постоянными коэффициентами [6], которое можно разделить на два независимых: $P_1(y), P_2(z)$

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M a_{n,m} x_{s-n, t-m} = 0, \quad (5)$$

где $a_{n,m}$ – коэффициенты полинома $P(y, z)$, корнями которого являются экспоненты y_n, z_m :

$$P(y, z) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_{i,j} y^{N-i} z^{M-j} = P_1(y) P_2(z), \quad (6) \text{ где}$$

$$P_1(y) = \prod_{i=1}^N (y - y_i) = \sum_{i=0}^N a_i^{(1)} y^{N-i}, P_2(z) = \prod_{j=1}^M (z - z_j) = \sum_{j=0}^M a_j^{(2)} z^{M-j}. \text{ Здесь для полиномов}$$

$P_1(y), P_2(z)$ корнями будут являться экспоненты y_n, z_m соответственно; $a_0^{(1)} = a_0^{(2)} = 1$, а также $a_{i,j} = a_i^{(1)} a_j^{(2)}$. Несложно показать, что разностное уравнение (5) можно разделить на 2 независимые части и разрешить по отдельности. Тогда, задачу нахождения коэффициентов $a_n^{(1)}, a_m^{(2)}$ можно разделить на две независимые задачи по оценке этих коэффициентов по отдельности:

$$\sum_{n=0}^N a_n^{(1)} x_{s-n,K} = 0, \quad \sum_{m=0}^M a_m^{(2)} x_{L,t-m} = 0.$$

(7)

Далее, получив оценки коэффициентов разностного уравнения (5) исходя из выражений (7) с помощью классических методов, можно определить корни полиномов $P_1(y), P_2(z)$, подставляя в них уже полученные коэффициенты $a_n^{(1)}, a_m^{(2)}$ соответственно, причём $a_0^{(1)} = a_0^{(2)} = 1$. Дальнейшая задача по определению комплексных амплитуд $C_{n,m}$ сводится к известному алгоритму МНК.

Заметим, что рассматриваемая модель (4) является обобщённой моделью параметрического разложения двумерного сигнала в ряд по экспонентам, поскольку предполагается для каждой размерности разный порядок разложения. Двумерный ряд (1) можно получить из (4) при условии $M = N, C_{n,m} = 0$ для $n \neq m$, т.е. матрица значений амплитуд $C_{n,m}$ станет диагональной. Тогда для модели последовательности с комплексными параметрами

$$x[s, t] = \sum_{i=1}^N A_i y_i^s z_i^t, \quad (8)$$

где обозначено $y_i = e^{\alpha_i \Delta t}$, $z_i = e^{\beta_i \Delta t}$, так же будет справедливо разностное уравнение (5) и, следовательно, можно аналогичным путём определить коэффициенты $a_n^{(1)}, a_n^{(2)}$, используя (7). Далее, зная коэффициенты разностного уравнения, можно по ним вычислить y_i, z_i как корни полиномов $P_1(y), P_2(z)$.

Для вычисления комплексных амплитуд A_i в (8) предлагается следующий способ. Перепишем выражение (3.17) в матричном виде:

$$\mathbf{X} = \mathbf{YAZ}, \quad (9) \text{ где}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{S-1} & y_2^{S-1} & \cdots & y_N^{S-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{T-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{T-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_N & \cdots & z_N^{T-1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

соответствующие матрицы Вандермонда экспонент y_i, z_i , $\mathbf{A} = \text{diag}[A_1, A_2, \dots, A_N]$ – диагональная матрица комплексных амплитуд. Зная все y_i и z_i , и формируя соответствующие матрицы \mathbf{Y} и \mathbf{Z} диагональную матрицу \mathbf{A} можно определить следующим образом:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}^+ \mathbf{XZ}^+,$$

(11) где знаком «+» в матричном анализе обозначается так называемая инверсия Мура-Пенроуза, что для матриц \mathbf{Y} и \mathbf{Z} будет означать следующее:

$$\mathbf{Y}^+ = (\mathbf{Y}^H \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^H, \quad \mathbf{Z}^+ = \mathbf{Z}^H (\mathbf{Z} \mathbf{Z}^H)^{-1}.$$

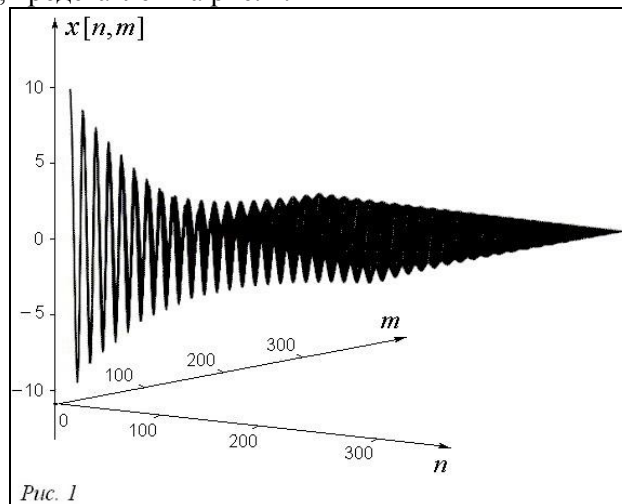
Знак «H» обозначает эрмитово транспонированную (или эрмитово сопряжённую) матрицу.

4. Результаты статистического моделирования

При численной оценке потенциальной точности разложения по предложенному алгоритму, моделировалась двумерная последовательность отсчетов сигнала:

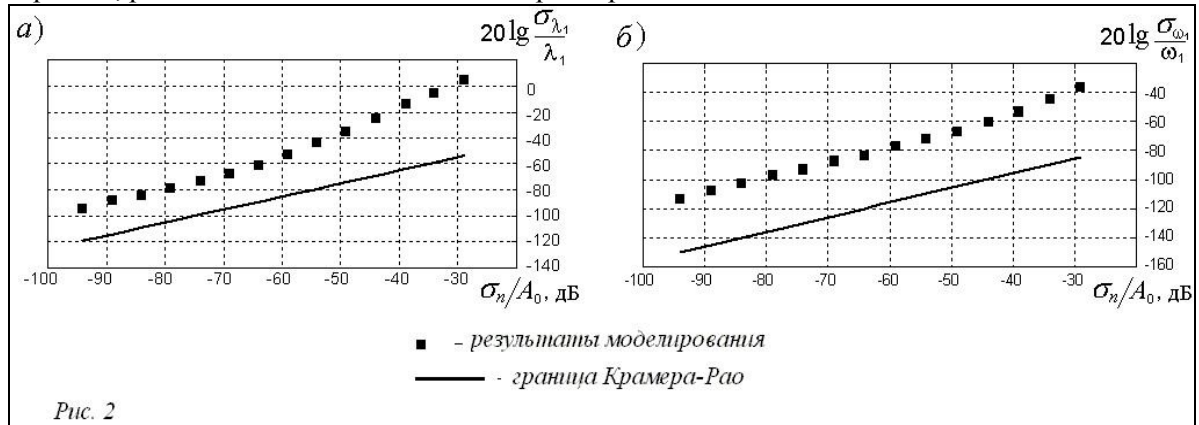
$$x[n, m] = A e^{\lambda_1 n \Delta t + \lambda_2 m \Delta t} \cos(\omega_1 n \Delta t + \omega_2 m \Delta t) + \xi[n, m], \quad (12)$$

где $A = 10.0$, $\lambda_1 = -1.0$, $\lambda_2 = -1.4$, $\omega_1 = 50.0$, $\omega_2 = 40.0$, $\Delta t = 0.01$ – значения параметров, $\xi[n, m]$ – отсчеты двумерного белого гауссова шума. Вид сигнала, формирующего последовательность (12), представлен на рис. 1.



Методом статистического моделирования последовательности (12) были получены зависимости среднеквадратической погрешности оценки параметров A, λ_1, ω_1 от отношения шум/сигнал, представленные на рис. 2. Значения отношения шум/сигнал (σ_n / A_0) по оси абсцисс отложены в логарифмическом масштабе. Значения отсчетов на графиках усреднены по 400 реализациям шума. Здесь же приведены границы потенциальной помехоустойчивости

Крамера-Рао, рассчитанные для каждого из параметров.



Из рисунков видно, что среднеквадратическая погрешность оценки параметров сигнала (12) с помощью двумерного варианта метода Прони лежит достаточно далеко (≥ 30 дБ) от границы Крамера-Рао, что свидетельствует о потенциальных возможностях совершенствования метода.

Заключение

Предложенный в работе алгоритм отыскания параметров разложения двумерного сигнала, представленного суммой экспонент, является обобщением классического метода Прони и может быть реализован с его использованием. В результате статистического моделирования получены зависимости среднеквадратических погрешностей оценки параметров двумерного сигнала от уровня аддитивного шума, всегда присутствующего в реальной процедуре измерений. Использование неравенств Крамера-Рао при определении потенциальной точности оценки параметров разложения двумерного узкополосного сигнала и модельные расчеты показывают, что предложенная процедура разложения не является оптимальной и допускает усовершенствование.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-07-00175а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Марпл – мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его применения / Пер. с англ. – М: Мир, 1990. – 584 с.
2. Beatty L. G., George J. D. Use of the complex exponential expansions as a signal presentation for underwater acoustic calibration. J. Acoust. Soc. Am., v.63, №6, 1978.
3. Радиотехнические системы / Ю. П. Гришин, В. П. Ипатов, Ю. М. Казаринов и др. – М.: Высшая школа, 1990. – 496 с.
4. Фалькович С.Е. Оценка параметров сигнала. - М: Сов. радио, 1970. - 336с.
5. Брыжин А. А., Верстаков Е. В., Захарченко В. Д.. Потенциальная точность оценки параметров сигналов методом Прони // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2008. Т.11, №1. – С.6-10.
6. Barbieri M. M., Barone P. A Two-Dimensional Prony's Method for Spectral Estimation. IEEE Transactions On Signal Processing, vol. 40, № 11, 1992, pp 2747-2756