НОВЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ ОБНАРУЖЕНИЯ И ОБРАБОТКИ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ И СВЯЗНЫХ СИГНАЛОВ

Анциперов В.Е.
Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН (Москва)
antciperov@cplire.ru

В докладе представлен новый метод построения оценок корреляционных функций, онованный на распределении многомасштабного корреляционного анализа. Проведено сравнение качества (дисперсии) предлагаемых оценок с традиционными несмещенными оценками. Показано, что качество предложенных оценок лучше на хвостах корреляционных функций, хотя на малых сдвигах проигрывает качеству классичесой оценки. Данное обстоятельство очерчивает круг задач в которых предложенные оценки могут быть полезны специалистам.

Роль корреляционной техники в задачах обнаружения и обработки радиолокационных и связных сигналов известна. Корреляционные функции широко применяются в задачах обнаружения периодических сигналов на фоне помех, обнаружения скрытых периодичностей в нестационарных сигналах, параметрического и непараметрического спектрального анализа, нахождения переходных функций (импульсных характеристик) динамических систем, исследования когерентности сигналов и полей и т.д. Подробную информацию о приложениях корреляционного анализа в технических задачах можно найти, например, в монографии [1].

Очевидно, точность методов, основанных на корреляционной технике, существенно определяется точностью задания используемых корреляционных функций. В зависимости от класса решаемых задач этот аспект может приобретать различное содержание. Так, в задачах с достаточной априорной информацией точность задания корреляционных функций подразумевает полноту и надежность их априорного задания, точность вычислений или апроксимаций их значений при расчетах, корректный учет областей задания и т.д. С другой стороны, для задач в условиях априорной неопределенности сами корреляционные функции приходится определять по массиву обрабатываемых данных и строить на этой основе их выборочные оценки, которые могут различаться по точности, эффективности, надежности и т.д. В этой связи целесообразно упомянуть то эмпирическое правило, что классическая выборочная оценка корреляционных функций (см. ниже) надежна лишь на сдвигах в одну десятую длины используемых для ее расчета данных и абсолютно не надежна на сдвигах, превышающих половину этой длительности [2].

Последнее замечание приобретает существенное значение, когда исследуемые сигналы не являются строго стационарными, а имеют конечные интервалы квазистационарности, квазипериодичности и т.д. Подобная ситуация может возникать при случайных замираниях сигналов, при наложениях кратковременных помех, при изменениях режимов работы генераторов сигналов и т.д. В таких случаях длительность (база) данных, пригодных для формирования оценок корреляционных функций, физически ограничена длительностью интервалов квазистационарности. При этом вполне может иметь место ситуация, когда интересующие нас корреляционные масштабы сравнимы по величине с ограничениями. Поэтому здесь на передний план выдвигаются не вопросы ассимптотической эффективности / состоятельности оценок, а методы их формирования (оптимальность) на конечной базе данных.

С тем, чтобы более детально проанализировать проблемы формирования оценок корреляционных функций на конечном интервале, рассмотрим статистические характеристики традиционной оценки, близко следуя материалам классической монографии [3]. Широко распространенная, традиционная оценка корреляционной функции $R(\tau)$ для сдвига τ строится по зарегистрированным на интервале времени $2T$ данным $x(t)$, $-T \le t \le T$ следующим образом [1-3]:

$$\hat{R}(\tau) = \frac{1}{2T-\tau} \int_{-T+\tau/2}^{T-\tau/2} x(t-\frac{\tau}{2})x(t+\frac{\tau}{2})dt\,, \qquad (1)$$

где для удобства дальнейших рассмотрений оценка записана в симметричном по сдвигам $\pm\tau/2$ коррелируемого фрагмента данных $x(t)$ виде.

Предполагая на интервале длительностью $2T$ квазистационарность данных: $< x(t-\frac{\tau}{2})x(t+\frac{\tau}{2}) > \cong R(\tau)$, где $R(\tau)$ - истинная функция корреляции, <…> - символы усреднения, получим, что (1) – несмещенная оценка:

$$< \hat{R}(\tau) > = \frac{1}{2T-\tau} \int_{-T+\tau/2}^{T-\tau/2} < x(t-\frac{\tau}{2})x(t+\frac{\tau}{2}) > dt \cong R(\tau)\,.$$

Принципиально, возможны и другие типы оценок, например смещенных, которые формально имеют лучшиие статистические характеристики, например дисперсию, однако, технически это приводит лишь к переносу проблемы с задачи оценивания на задачу корректной компенсации смещений. Поэтому рассмотрим качество оценивания корреляционных функций на примере оценки (1). Статистической характеристикой качества оценки (1) традиционно рассматривается ее дисперсия:

$$\begin{gathered}\sigma^2(\tau) = < [\hat{R}(\tau) - R(\tau)]^2 > = < [\frac{1}{2T-\tau} \int_{-T+\tau/2}^{T-\tau/2} \{x(t-\frac{\tau}{2})x(t+\frac{\tau}{2}) - R(\tau)\}dt]^2 > = \ldots \\ \ldots = \frac{1}{(2T-\tau)^2} \int_{-T+\tau/2}^{T-\tau/2} \int_{-T+\tau/2}^{T-\tau/2} \{< x(t'-\frac{\tau}{2})x(t'+\frac{\tau}{2})x(t''-\frac{\tau}{2})x(t''+\frac{\tau}{2}) > - R^2(\tau)\}dt'dt'\end{gathered}\,. \qquad (2)$$

Выражение (2) можно несколько упростить в случае гауссовского сигнала $x(t)$. По известным свойствам таких сигналов четвертый момент $< x(t_1)x(t_2)x(t_3)x(t_4) >$ выражается через сумму произведений вторых моментов (предпологая $< x(t) > = 0$):

$$< x(t_1)x(t_2)x(t_3)x(t_4) > = R(t_1-t_2)R(t_3-t_4) + R(t_1-t_3)R(t_2-t_4) + R(t_1-t_4)R(t_2-t_3)\,.$$

В общем, негауссовском случае, это свойство не имеет места, но, как отмечается в [3], во многих практических случаях правая часть является хорошим приближением для четвертого момента. Подставляя выписанное выражение в (2), после ряда преобразований, получим (учитывая симметрию $R(\xi)$ по сдвигу ξ) окончательное выражение для дисперсии:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{2}{(2T-\tau)} \int_0^{2T-\tau} \{R^2(\xi) + R(\xi+\tau)R(\xi-\tau)\}\{1 - \frac{\xi}{(2T-\tau)}\}d\xi\,. \qquad (3)$$

При нулевом сдвиге значение дисперсии $\sigma^2(0)$ из (3) равно:

$$\sigma^2(0) = \frac{2}{T}\int_0^{2T} R^2(\xi)\{1-\frac{\xi}{2T}\}d\xi = \frac{2T_E}{T}(1-\frac{T_C}{2T})R^2(0)\,,$$

где введено эффективное время корреляции T_C и эффективная полуширина T_E корреляцонной функции $R(\xi)$ на интервале $2T$:

$$T_C = \int_0^{2T} \xi R^2(\xi) d\xi \Big/ \int_0^{2T} R^2(\xi) d\xi\,,\ \ T_E = \int_0^{2T} R^2(\xi) d\xi \Big/ R^2(0)\,.$$

При максимальном сдвиге значение дисперсии $\sigma^2(2T)$ из (3) равно:

$$\sigma^2(2T) = \lim_{y \to 0} \frac{2}{y} \int_0^y \{R^2(0) + R(2T)R(-2T)\}\{1 - \frac{\xi}{y}\} d\xi = R^2(0) + R^2(2T)\,.$$

В целом, в промежутке $0 \le \tau \le 2T$, $\sigma^2(\tau)$ более или менее равномерно возрастает от начального значения $\approx (2T_E/T)\,R^2(0)$ до максимального $\approx R^2(0)$ (в предположении $T_C < T$). Детали поведения $\sigma^2(\tau)$ определяются видом корреляционной функции $R(\xi)$. В работе [3] осуществлены точные расчеты дисперсии $\sigma^2(\tau)$ для функций вида $R(\xi) = R(0)\exp\{-\lambda\,|\,\xi\,|\}$ (марковские гауссовы процессы). В случае $\lambda T > 1$ имеет место $T_E \approx T_C \approx 1/(2\lambda)$ и вид зависимости определяется значением параметра $\alpha = 4\lambda T \approx 2T / T_C$. Иллюстрация зависимости дисперсии от сдвига для $\alpha = 8$ приведена на Рис.1.

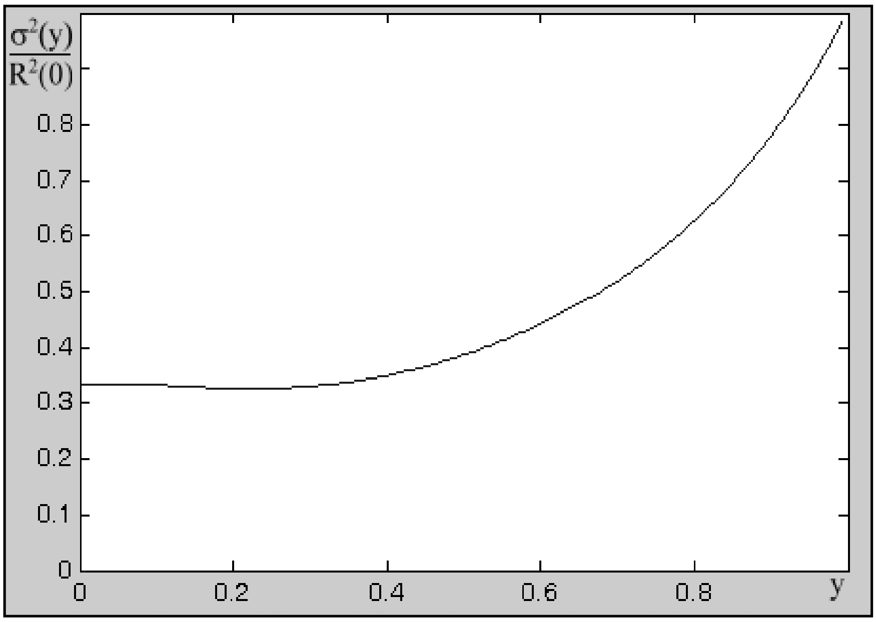

Рис.1 Зависимость нормированной дисперсии $\sigma^2(y)/R^2(0)$ (3) от нормированного смещения $y = \tau/(2T)$ при $\alpha = 4\lambda T = 8$.

Причина ухудшения качества оценки (1) – увеличения дисперсии $\sigma^2(\tau)$ с ростом τ – заключается в том, что при увеличении сдвига уменьшается эффективная длина коррелируемых фрагментов данных. По существу в (1) на основе скалярного произведения сравниваются сдвинутые фрагменты $x(t)$, $-T \le t \le T - \tau$ и $x(t)$, $-T + \tau \le t \le T$, длина которых $2T - \tau$ убывает с ростом τ. Ввиду уменьшения эффективного количества усредняемых данных увеличивается и разброс. На Рис.2 слева (А) схематически проиллюстрирован эффект уменьшения базы усреднений (выделенной серым цветом) при увеличении смещения τ (для наглядности представлен случай $\tau > T$).

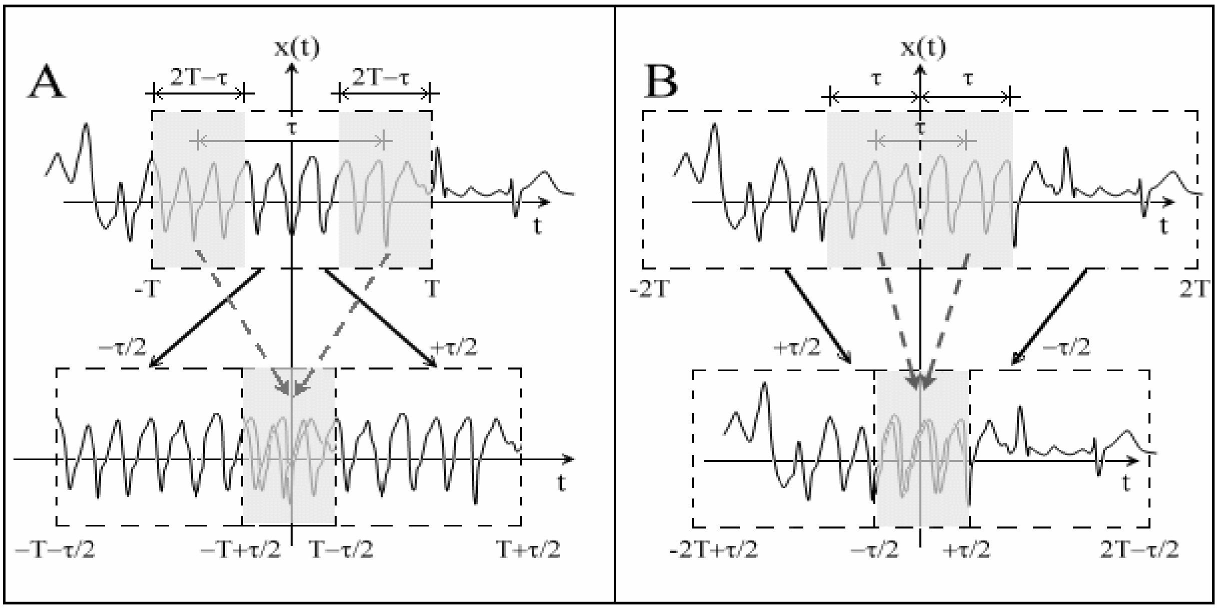

Рис.2 Иллюстрация зависимости базы усреднения от сдвига τ при формировании оценок корреляционных функций: А – при классическом оценивании (1) база уменьшается с ростом τ как $2T-\tau$; В – при формировании оценки МКА (4) база возрастает как τ .

От проблемы ухудшения качества оценки при сдвигах, сравнимых с базой используемых для ее формирования данных, можно уйти, если воспользоваться распределением многомасштабного корреляционного анализа (МКА), введенного в работе [4]. Основная идея МКА заключается в том, что осуществляются сдвиги не фрагмента данных $x(t)$, $-T \le t \le T$ по отношению к самому себе, а сдвигаемые интервалы выбираются слева $x(t)$, $-2T \le t \le 0$ и справа $x(t)$, $0 \le t \le 2T$ от анализируемого момента времени $t=0$, как показано на Рис.2 (В). При увеличении сдвига в этом случае эффективная длина коррелируемых фрагментов данных (база) равна сдвигу τ , т.е. также увеличивается.

В рамках МКА используется квадратичное по отношению к сигналу распределение $r(\tau)$ [4], которое в случае прямоугольных, выделяющих фрагменты данных $x(t)$, $-2T \le t \le 0$ и $x(t)$, $0 \le t \le 2T$, окон имеет в отличие от (1) вид:

$$r(\tau)=\frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t-\frac{\tau}{2})x(t+\frac{\tau}{2})dt\,. \tag{4}$$

Распределение $r(\tau)$, также как (1) является несмещенной оценкой $R(\tau)$:

$$<r(\tau)>=\frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} <x(t-\frac{\tau}{2})x(t+\frac{\tau}{2})> dt \cong R(\tau)\,.$$

Проводя расчеты, аналогичные приведенным выше, получим, что дисперсия $r(\tau)$ как оценки корреляционной функции имеет следующий вид:

$$\sigma^2(\tau)=\frac{2}{\tau}\int_0^{\tau}\{R^2(\xi)+R(\xi+\tau)R(\xi-\tau)\}\{1-\frac{\xi}{\tau}\}d\xi\,. \tag{5}$$

Следует отметить, что значение дисперсии $\sigma^2(\tau)$ (5) в точночти совпадает с значением дисперсии классической оценки (3) при значении сдвига $\tau = T$.

При нулевом сдвиге значение дисперсии $\sigma^2(0)$ из (5) равно:

$$\sigma^2(0) = \lim_{y\to 0}\frac{2}{y}\int_0^y \{R^2(0) + R(0)R(-0)\}\{1-\frac{\xi}{y}\}d\xi = 2R^2(0).$$

Учитывая, что при $\xi < T_C < T$ $R(\xi+\tau), R(\xi-\tau) << R(\xi)$, получим, что при $T_C < 2T$:

$$\sigma^2(2T) \approx \frac{1}{T}\int_0^{2T} R^2(\xi)\{1-\frac{\xi}{2T}\}d\xi = \frac{T_E}{T}(1-\frac{T_C}{2T})R^2(0).$$

В целом, в промежутке $0 \le \tau \le 2T$, $\sigma^2(\tau)$ (5), в отличии от дисперсии классической оценки, уменьшается от начального значения $2R^2(0)$ до минимального $\approx (T_E/T)R^2(0)$ (в предположении $T_C < T$), совпадая с ней, как отмечалось выше, при $\tau = T$.

Для рассмотренной выше корреляционной функции $R(\xi) = R(0)\exp\{-\lambda|\xi|\}$ вычисленя дают следующий результат, графически представленный на Рис.3 :

$$\sigma^2(y) = 2R^2(0)\left[\frac{1}{\alpha y} - \frac{1}{(\alpha y)^2} + \frac{1}{2}\exp(-\alpha y) + \frac{1}{(\alpha y)^2}\exp(-\alpha y)\right], \qquad (6)$$

где ($\alpha = 4\lambda T \approx 2T/T_C$, $y = \tau/(2T)$).

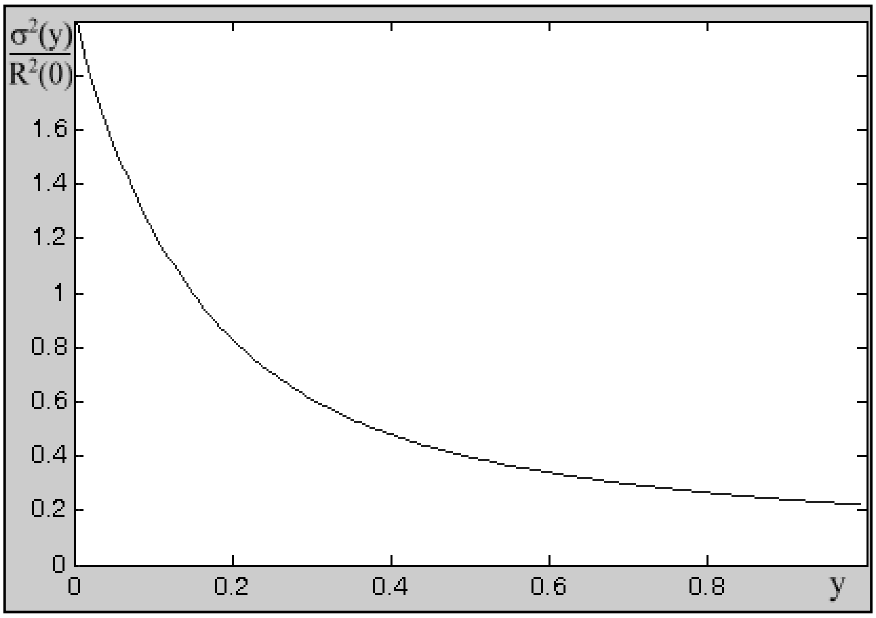

Рис.1 Зависимость нормированной дисперсии $\sigma^2(y)/R^2(0)$ (6) от нормированного смещения $y = \tau/(2T)$ при $\alpha = 4\lambda T = 8$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: В 2-х томах. - М.: Мир, 1983

2. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. - М.: Мир, 1982

3. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения: В 2 т./ Пер. с англ. Ф. М. Писаренко - М.: Мир, 1971

4. Анциперов В.Е. Многомасштабный корреляционный анализ нестационарных, содержащих квазипериодические участки сигналов // “Радиотехника и электроника”, т. 53, № 1, 2008 г. стр.73-85.