ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ ПРИХОДА СЛУЧАЙНОГО ИМПУЛЬСА С НЕТОЧНО ИЗВЕСТНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ НА ФОНЕ ПОМЕХ

Шепелев Д.Н.

Московский технический университет связи и информатики

Исследован закон распределения оценки времени прихода узкополосного случайного гауссовского импульса с неточно известной длительностью. Показано, что наличие аномальных ошибок приводит к существенному изменению вида распределения. Приведены результаты статистического моделирования на ЭВМ, подтверждающие работоспособность аналитических выражений для характеристик оценки времени прихода.

Задача оценки времени прихода импульсных сигналов имеет широкие приложения в связи, радио- и гидролокации, системах синхронизации и т.п. Такие сигналы не только наблюдаются на фоне случайных помех, но и сами часто являются случайными. Примерами случайного импульса могут служить отраженный локационный сигнал; сигнал, искаженный модулирующей помехой; сигналы в системах связи с шумовой несущей [1-3] и др.

Рассмотрим оценку времени прихода λ_0 случайного импульса

$$s(t,\lambda_0,\tau_0) = \xi(t)\, I\left(\frac{t-\lambda_0}{\tau_0}\right), \qquad I(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1/2\,; \\ 0, & |x| > 1/2\,; \end{cases} \tag{1}$$

наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью (СП) мощности N_0. Здесь τ_0 – длительность импульса, а $\xi(t)$ – стационарный центрированный гауссовский случайный процесс. СП процесса $\xi(t)$ аппроксимируем выражением [4-8]

$$G(\omega) = \frac{\gamma}{2}\left\{ I\left(\frac{\nu-\omega}{\Omega}\right) + I\left(\frac{\nu+\omega}{\Omega}\right)\right\}, \quad \omega >> \nu\,,$$

где γ – величина, Ω – ширина полосы частот, а ν – центральная частота СП. Аналогично [4-8] будем полагать, что длительность τ_0 импульса (1) значительно больше времени корреляции случайного процесса $\xi(t)$, т. е. выполняется условие $\mu = \tau_0\Omega/2\pi >> 1$.

В [5,6] исследована оценка времени прихода импульса (1) при условии, что остальные параметры импульса априори известны. В то же время в ряде практических задач длительность импульса может быть неизвестна или известна неточно. В [7,8] параметр τ_0 полагался известным неточно. Однако найденные при этом выражения для центральных моментов первого (смещение) и второго (рассеяние) порядка оценки времени прихода сигнала (1) лишь приближенно характеризуют ее точность в силу существенно негауссовского характера ее распределения. Для более полной характеристики вероятностного поведения выносимой оценки необходимо также учитывать, по крайней мере, два следующих момента более высокого порядка.

Ниже приведены выражения для плотности вероятности, характеристической функции и центрального момента n-го порядка оценки времени прихода случайного импульса (1). Исследовано поведение кумулянтных коэффициентов [4,9] (связанных с моментами однозначным преобразованием) третьего и четвертого порядка, называемых также коэффициентами асимметрии и эксцесса. Рассмотрены пороговые эффекты, обусловленные наличием аномальных [10,11] ошибок при оценивании параметра λ_0, а также представлены результаты статистического моделирования на ЭВМ, позволяющие установить границы применимости найденных асимптотически точных формул.

Согласно [5,6] при априори известной длительности τ_0 импульса (1) оценка времени прихода λ_m, синтезированная по методу максимального правдоподобия, определится как положение абсолютного (наибольшего) максимума функционала

$$M(\lambda,\tau_0)=\int_{\lambda-\tau_0/2}^{\lambda+\tau_0/2} y^2(t)\,dt, \qquad \lambda\in[\Lambda_1,\Lambda_2] .$$

Здесь $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t')h(t-t')dt'$ – отклик фильтра, передаточная функция $H(\omega)$ которого удовлетворяет условию $|H(\omega)|^2=2G(\omega)/\gamma$, на реализацию наблюдаемых данных $x(t)=s(t,\lambda_0,\tau_0)+n(t)$, а $[\Lambda_1,\Lambda_2]$ – априорный интервал возможных значений параметра λ_0. При неточно известной длительности τ_0 сигнала (1) вместо оценки максимального правдоподобия (ОМП) λ_m можно использовать квазиправдоподобную оценку (КПО) λ_q [7,8]:

$$\lambda_q=\arg\sup_{\lambda\in[\Lambda_1,\Lambda_2]} M^*(\lambda), \qquad M^*(\lambda)=M(\lambda,\tau^*)=\int_{\lambda-\tau^*/2}^{\lambda+\tau^*/2} y^2(t)\,dt, \qquad (2)$$

где τ^* – фиксированное ожидаемое (прогнозируемое) значение длительности τ_0, причем в общем случае $\tau^*\neq\tau_0$. При $\tau^*=\tau_0$ КПО λ_q переходит в ОМП λ_m.

Рассмотрим характеристики оценки λ_q (2). Согласно [10] наиболее общей и полной (в вероятностном смысле) характеристикой КПО λ_q является ее условная плотность вероятности $W(\lambda_q|\lambda_0)$, которую можно представить в виде

$$W(\lambda_q|\lambda_0)=P_0W_0(\lambda_q|\lambda_0)+(1-P_0)[1/(\Lambda_2-\Lambda_1)], \quad \lambda_q\in[\Lambda_1,\Lambda_2] . \qquad (3)$$

Здесь P_0 и $W_0(\lambda_q|\lambda_0)$ – соответственно вероятность и условная плотность вероятности надежной оценки. Под надежной оценкой [10,11] понимается оценка, найденная в предположении $|\lambda_q-\lambda_0|\le\tau^*$. Второе слагаемое в (3) учитывает влияние аномальных ошибок [10,11], возможных при $|\Lambda_2-\Lambda_1|>\tau^*$. Воспользовавшись результатами [7,8] для вероятности P_0 надежной оценки времени прихода λ_q, можно записать

$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^\infty \exp\left[-\frac{mx}{(1+\delta)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right] \left\{ \left[2 + m_s \zeta^2(x) - m_s\right] \exp\left[-\frac{\zeta^2(x)}{2}\right] \times \right.$$
$$\left. \times \Phi\left[\zeta(x)\sqrt{\frac{m_s}{2-m_s}}\right] + \sqrt{\frac{m_s(2-m_s)}{2\pi}}\, \zeta(x) \exp\left[-\frac{\zeta(x)}{2-m_s}\right] \right\} dx, \qquad (4)$$

$$\zeta(x) = \begin{cases} x/(1+q) - z_\delta, & \delta < 0; \\ x\sqrt{(1+\delta)/\left[\delta + (1+q)^2\right]} - z_\delta, & \delta > 0; \end{cases} \qquad m_s = \begin{cases} |\delta|/(1+\delta), & \delta < 0; \\ \delta/\left[\delta + (1+q)^2\right], & \delta > 0. \end{cases}$$

Здесь $m = (\Lambda_2 - \Lambda_1)/\tau_0$ – приведенная длина априорного интервала оцениваемого параметра λ_0, $\delta = \left(\tau^* - \tau_0\right)/\tau_0$ – относительное отклонение ожидаемого значения длительности импульса (1) от ее истинного значения, $q = \gamma/N_0$,

$$z_\delta^2 = \frac{\mu q^2 \left[1 + \min(0;\delta)\right]^2}{1 + \delta + q(2+q)\left[1 + \min(0;\delta)\right]}$$

– выходное отношение сигнал/шум (ОСШ) для квазиправдоподобного алгоритма, а $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-t^2/2\right) dt/\sqrt{2\pi}$ – интеграл вероятности [11]. Плотность вероятности $W_0(\lambda_q|\lambda_0)$ определится как [7,8]

$$W_0(\lambda_q|\lambda_0) = \begin{cases} \varphi\left[\left(\lambda_0 - \lambda_q - \tau_0|\delta|/2\right)/\tau_0\right], & \lambda_q < \lambda_0 - \tau_0|\delta|/2; \\ 1\Big/\pi\sqrt{\left(\lambda_0 - \lambda_q - \tau_0|\delta|/2\right)\left(\lambda_q - \lambda_o + \tau_0|\delta|/2\right)}, & \left|\lambda_q - \lambda_0\right| \le \tau_0|\delta|/2; \\ \varphi\left[\left(\lambda_q - \lambda_0 - \tau_0|\delta|/2\right)/\tau_0\right], & \lambda_q > \lambda_0 + \tau_0|\delta|/2; \end{cases} \qquad (5)$$

$$\varphi(x) = \frac{2\alpha^2\beta^2(x)}{\tau_0 x} \left\{ 1 - \Phi\left[\alpha\beta(x)\right] - 2F\left[\alpha\beta(x), \beta(x), \alpha\beta^2(x)\right] + 3\exp\left[2\alpha^2\left(1 + 2\beta^2(x)\right)\right] \times \right.$$
$$\left. \times F\left[3\alpha\beta(x), \beta(x), \alpha\left(2 + 3\beta^2(x)\right)\right] + \exp\left(2\alpha^2\right) F\left[-\alpha\beta(x), -\beta(x), \alpha\left(2 + \beta^2(x)\right)\right] \right\},$$

$$\alpha = z\sqrt{\kappa_1|\delta|}/\kappa_2, \qquad \beta(x) = \sqrt{\kappa_2 x/\kappa_1|\delta|},$$

$$\kappa_1 = \begin{cases} 2, & \delta < 0; \\ 2/(1+q)^2, & \delta > 0; \end{cases} \qquad \kappa_2 = \frac{1 + (1+q)^2}{(1+q)^2},$$

где

$$z^2 = \max_\delta z_\delta^2 = z_\delta^2\big|_{\delta=0} = \frac{\mu q^2}{(1+q)^2}$$

– ОСШ при априори известной длительности импульса (1), а $F(x,y,z)= =\int_x^\infty \exp\left(-t^2/2\right)\Phi(yt-z)dx/\sqrt{2\pi}$. Формулы (4), (5) получены в предположении $\delta>-1/2$, и их точность возрастает с увеличением μ, z_δ и m [7,8]. Из (5) следует, что плотность вероятности даже надежной КПО времени прихода импульсного сигнала (1) имеет существенно негауссовский характер, хотя решающая статистика $M^*(\lambda)$ (2) является асимптотически (при $\mu\to\infty$) гауссовской.

Эквивалентным (3), (5) способом описания вероятностных свойств оценки λ_q является задание условной характеристической функции $\Theta(u\,|\,\lambda_0)$ [4], связанной с плотностью вероятности $W(\lambda_q|\lambda_0)$ через преобразование Фурье

$$\Theta(u\,|\,\lambda_0)=\int_{-\infty}^{\infty} W(\lambda\,|\,\lambda_0)\exp(ju\lambda)d\lambda\,. \tag{6}$$

Подставляя (3) в (6), получаем

$$\Theta(u\,|\,\lambda_0)=P_0\Theta_0(u\,|\,\lambda_0)+(1-P_0)[\exp(ju\Lambda_2)-\exp(ju\Lambda_1)]/ju\,(\Lambda_2-\Lambda_1), \tag{7}$$

где

$$\Theta_0(u\,|\,\lambda_0)=\left[\Psi(ju)+\Psi^*(ju)+I_0\left(ju\tau_0|\delta|\right)\right]\exp(ju\lambda_0)$$

– условная характеристическая функция надежной оценки λ_q времени прихода случайного импульса (1). Здесь

$$\Psi(ju)=8\exp\left(ju\tau_0|\delta|/2\right)\{\,g(0)G(ju)-g(ju)G(0)\,\}/g(ju)\left[4-g^2(ju)\right]\,,$$

$$G(ju)=\exp\left[\alpha^2 g(ju)/2\right]\{1-\Phi[\alpha g(ju)]\},\qquad g(ju)=1+\sqrt{1+j2\kappa_2 u\tau_0/z^2}\,,$$

$I_0(x)$-модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, а α и κ_2 определяются из (5).

Для менее полного, но в то же время более простого, чем с помощью (3) или (7), вероятностного описания КПО λ_q целесообразно использовать моменты и кумулянты (или кумулянтные коэффициенты) [4,9] конечного порядка. Используя аппроксимацию плотности вероятности (3)-(5) для центрального момента n-го порядка распределения оценки λ_q времени прихода сигнала (1) имеем:

$$\mu_n\left(\lambda_q|\lambda_0\right)=\left\langle\left(\lambda_q-\lambda_0\right)^n\right\rangle=P_0\mu_{0_n}\left(\lambda_q|\lambda_0\right)+(1-P_0)\frac{\left[(\Lambda_2-\lambda_0)^{n+1}-(\Lambda_1-\lambda_0)^{n+1}\right]}{(n+1)(\Lambda_2-\Lambda_1)},\quad n=1,2,... \tag{8}$$

Здесь $\mu_{0_n}(\lambda_q \mid \lambda_0)$ – центральный момент n-го порядка надежной оценки λ_q, который можно представить в виде

$$\mu_{0_n}(\lambda_q|\lambda_0)=\frac{\tau_0^n|\delta|^n}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k}\frac{\Gamma(k+1/2)}{k!}+\frac{2^{n+1}\tau_0^n z}{\kappa_2}\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k\left[(-1)^{n-k-1}-(-1)^k\right]\times$$
$$\times\frac{\kappa_2^{n-k-1}|\delta|^k}{n-k}\left\{\frac{\partial^{n-k-1}}{\partial x^{n-k-1}}\frac{1}{\sqrt{x}}\left[\left(\frac{\kappa_2\left(\left(5z+\sqrt{x}\right)^2-8z^2\right)}{\left(3z+\sqrt{x}\right)^2\left(z+\sqrt{x}\right)^2}-\frac{5z+\sqrt{x}}{3z+\sqrt{x}}\kappa_1|\delta|\right)H\left(\frac{z+\sqrt{x}}{\kappa_2}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\kappa_2^2}{\left(3z+\sqrt{x}\right)^2}H\left(\frac{2z}{\kappa_2}\right)+\frac{\kappa_2\left(5z+\sqrt{x}\right)\sqrt{\kappa_1|\delta|}}{\left(3z+\sqrt{x}\right)\left(z+\sqrt{x}\right)\sqrt{2\pi}}\right]_{x=z^2}+\sum_{l=1}^{n-k}\frac{R_l}{\kappa_2^{l-1}z^{2n-l}(l+1)}\frac{\partial^{l+1}}{\partial x^{l+1}}H(x)\bigg|_{x=\frac{2z}{\kappa_2}}\right\},\qquad(9)$$

где $H(x)=\exp\left(\kappa_1|\delta|x^2/2\right)\left[1-\Phi\left(x\sqrt{\kappa_1|\delta|}\right)\right]$, $C_n^p=n!/p!(n-p)!$ – число сочетаний из n по p, $\Gamma(p)$ – гамма-фукция. Коэффициенты R_l в (9) определяются из соотношения

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\exp\left(-A\sqrt{x}\right)\bigg|_{x=z^2}=(-1)^n\sum_{l=1}^{n}\frac{R_l A^l}{z^{2n-l}}\exp(-Az).$$

Так при $n=1$ $R_1=1/2$; $n=2$ $R_1=1/4$, $R_2=1/4$; $n=3$ $R_1=3/8$, $R_2=3/8$, $R_3=1/8$; $n=4$ $R_1=15/16$, $R_2=15/16$, $R_3=3/8$, $R_4=1/16$ и т. д.

Из (9) следует, что центральные моменты $\mu_{0_{2k-1}}(\lambda_q|\lambda_0)$, $k=1,2,...$ нечетного порядка надежной КПО λ_q параметра λ_0 импульса (1) равны нулю. Тем не менее вследствие возможного появления аномальных ошибок оценка времени прихода в общем случае является условно смещенной

$$b(\lambda_q|\lambda_0)=\mu_1(\lambda_q|\lambda_0)=(1-P_0)\left[(\Lambda_2-\Lambda_1)/2-\lambda_0\right],\qquad(10)$$

а ее условное рассеяние определяется выражением

$$V(\lambda_q|\lambda_0)=\mu_2(\lambda_q|\lambda_0)=P_0V_0(\lambda_q|\lambda_0)+(1-P_0)\left[\left(\Lambda_2^2+\Lambda_2\Lambda_1+\Lambda_1^2\right)/3-(\Lambda_2+\Lambda_1)\lambda_0+\lambda_0^2\right].\qquad(11)$$

Здесь

$$V_0(\lambda_q|\lambda_0)=\mu_{0_2}(\lambda_q|\lambda_0)=\tau_0^2\left\{\frac{\delta^2}{8}+H\left(\frac{2z}{\kappa_2}\right)\left[\frac{8z^2\kappa_1^2}{\kappa_2^3}|\delta|^3\left(1-\frac{4\kappa_1}{3\kappa_2}\right)+\frac{4\kappa_1}{\kappa_2^2}\delta^2(3\kappa_1-\kappa_2)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{|\delta|}{z^2}\left(\frac{3\kappa_2}{2}-8\kappa_1\right)+\frac{13\kappa_2^2}{4z^4}\right]+\sqrt{\frac{\kappa_1|\delta|}{2\pi}}\left[\frac{4z\kappa_1}{\kappa_2^2}\delta^2\left(\frac{4\kappa_1}{3\kappa_2}-1\right)+\frac{|\delta|}{z}\left(3-\frac{22\kappa_1}{3\kappa_2}\right)+\frac{13\kappa_2}{2z^3}\right]\right\} \qquad (12)$$

– условное рассеяние надежной КПО λ_q [7,8].

Моменты первого (10) и второго (11) порядка играют особую роль и наиболее часто используются в качестве характеристик синтезированного алгоритма оценивания [5-8,10,11]. Однако в силу существенно негауссовского характера распределения КПО времени прихода (2) в данном случае они дают лишь приближенное описание степени сгруппированности оценки λ_q относительно истинного значения оцениваемого параметра λ_0. Для более полной характеристики вероятностных свойств КПО λ_q необходимо также учитывать, по крайней мере, моменты третьего и четвертого порядка [9]. Используя (8), (9), получаем

$$\mu_3(\lambda_q|\lambda_0)=(1-P_0)[(\Lambda_2+\Lambda_1)/2-\lambda_0]\left[(\Lambda_2^2+\Lambda_1^2)/2-(\Lambda_2+\Lambda_1)\lambda_0-\lambda_0^2\right], \qquad (13)$$

$$\mu_4(\lambda_q|\lambda_0)=P_0\mu_{0_4}(\lambda_q|\lambda_0)+(1-P_0)\left[\lambda_0^4-2(\Lambda_2+\Lambda_1)\lambda_0^3+2(\Lambda_2^2+\Lambda_2\Lambda_1+\Lambda_1^2)\lambda_0^2-\right.$$
$$\left.-(\Lambda_2^3+\Lambda_2^2\Lambda_1+\Lambda_2\Lambda_1^2+\Lambda_1^3)\lambda_0+(\Lambda_2^4+\Lambda_2^3\Lambda_1+\Lambda_2^2\Lambda_1^2+\Lambda_2\Lambda_1^3+\Lambda_1^4)/5\right], \qquad (14)$$

где

$$\mu_{0_4}(\lambda_q|\lambda_0)=\frac{\tau_0^4}{8}\left\{\frac{3\delta^4}{16}-\frac{1}{10}H\left(\frac{2z}{\kappa_2}\right)\left[\frac{64\kappa_1^2z^2}{\kappa_2^3}|\delta|^5\left(\frac{32\kappa_1^3}{\kappa_2^3}-\frac{40\kappa_1^2}{\kappa_2^2}+\frac{20\kappa_1}{\kappa_2}-5\right)-\right.\right.$$
$$-\frac{160\kappa_1}{\kappa_2}\delta^4\left(\frac{40\kappa_1^3}{\kappa_2^3}-\frac{32\kappa_1^2}{\kappa_2^2}+\frac{9\kappa_1}{\kappa_2}-1\right)+\frac{60\kappa_2}{z^2}|\delta|^3\left(\frac{224\kappa_1^3}{\kappa_2^3}-\frac{112\kappa_1^2}{\kappa_2^2}+\frac{16\kappa_1}{\kappa_2}-1\right)-$$
$$\left.-\frac{30\kappa_2^2}{z^4}\delta^2\left(\frac{608\kappa_1^2}{\kappa_2^2}-\frac{160\kappa_1}{\kappa_2}+13\right)+\frac{30\kappa_2^3}{z^6}|\delta|\left(\frac{448\kappa_1}{\kappa_2}-67\right)-\frac{5715\kappa_2^4}{z^8}\right]+$$
$$+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{\kappa_1|\delta|}{2\pi}}\left[\frac{16\kappa_1z}{\kappa_2^2}\delta^4\left(\frac{32\kappa_1^3}{\kappa_2^3}-\frac{40\kappa_1^2}{\kappa_2^2}+\frac{20\kappa_1}{\kappa_2}-5\right)-\frac{4}{z}|\delta|^3\left(\frac{432\kappa_1^3}{\kappa_2^3}-\frac{360\kappa_1^2}{\kappa_2^2}+\frac{110\kappa_1}{\kappa_2}-15\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2\kappa_2}{z^3}\delta^2\left(\frac{1928\kappa_1^2}{\kappa_2^2}-\frac{1060\kappa_1}{\kappa_2}+195\right)-\frac{30\kappa_2^2}{z^5}|\delta|\left(\frac{194\kappa_1}{\kappa_2}-67\right)+\frac{5715\kappa_2^3}{z^7}\right]\right\}, \qquad (15)$$

– центральный момент четвертого порядка надежной КПО λ_q.

Вместо (13), (14) значительно удобнее оказывается использование безразмерных кумулянтов (кумулянтных коэффициентов) [4,9], связанных с моментами однозначным преобразованием. Для кумулянтных коэффициентов третьего и четвертого порядка (коэффициентов асимметрии и эксцесса) можно записать:

$$\gamma_3(\lambda_q|\lambda_0)=\frac{\mu_3(\lambda_q|\lambda_0)}{\sqrt{\mu_2^3(\lambda_q|\lambda_0)}}=\frac{(1-P_0)[(\Lambda_2+\Lambda_1)/2-\lambda_0]\left[(\Lambda_2^2+\Lambda_1^2)/2-(\Lambda_2+\Lambda_1)\lambda_0+\lambda_0^2\right]}{\sqrt{\left\{P_0V_0(\lambda_q|\lambda_0)+(1-P_0)\left[(\Lambda_2^2+\Lambda_2\Lambda_1+\Lambda_1^2)/3-(\Lambda_2+\Lambda_1)\lambda_0+\lambda_0^2\right]\right\}^3}},$$

$$\gamma_4(\lambda_q|\lambda_0)=\frac{\mu_4(\lambda_q|\lambda_0)}{\mu_2^2(\lambda_q|\lambda_0)}-3=\Big\{P_0\left[\gamma_{0_4}(\lambda_q|\lambda_0)+3\right]+(1-P_0)\Big[\lambda_0^4-2(\Lambda_2+\Lambda_1)\lambda_0^3+2\big(\Lambda_2^2+\Lambda_1\Lambda_2+$$
$$+\Lambda_1^2\big)\lambda_0^2-\left(\Lambda_2^3+\Lambda_2^2\Lambda_1+\Lambda_2\Lambda_1^2+\Lambda_1^3\right)\lambda_0+\left(\Lambda_2^4+\Lambda_2^3\Lambda_1+\Lambda_2^2\Lambda_1^2+\Lambda_2\Lambda_1^3+\Lambda_1^4\right)/5\Big]\Big/V_0^2(\lambda_q|\lambda_0)\Big\}\Big/\{P_0+$$
$$(1-P_0)\left[(\Lambda_2^2+\Lambda_2\Lambda_1+\Lambda_1^2)/3-(\Lambda_2+\Lambda_1)\lambda_0+\lambda_0^2\right]\Big/V_0^2(\lambda_q|\lambda_0)\Big\}^2-3\ .\tag{16}$$

Здесь

$$\gamma_{0_4}(\lambda_q|\lambda_0)=\mu_{0_4}(\lambda_q|\lambda_0)/\mu_{0_2}^2(\lambda_q|\lambda_0)\tag{17}$$

– коэффициент эксцесса надежной оценки λ_q, а P_0, $V_0(\lambda_q|\lambda_0)$ и $\mu_{0_4}(\lambda_q|\lambda_0)$ определяются из (4), (12) и (15) соответственно. Точность приведенных формул возрастает с увеличением μ, z_δ и m.

Положим теперь, что неизвестный параметр λ_0 описывается априорной плотностью вероятности

$$W_{pr}(\lambda)=1/(\Lambda_2-\Lambda_1)\ ,\qquad \lambda\in[\Lambda_1,\Lambda_2]\ .\tag{18}$$

Тогда, усредняя (8) по возможным значениям случайной величины λ_0 с априорным распределением $W_{pr}(\lambda)$ (18), получаем безусловные характеристики КПО λ_q:

$$\begin{gathered}\mu_{2k-1}(\lambda_q)=0\ ,\\ \mu_{2k}(\lambda_q)=P_0\mu_{0_{2k}}(\lambda_q)+(1-P_0)(\Lambda_2-\Lambda_1)^{2k}/(2k+1)(k+1)\ ,\qquad k=1,2,...\end{gathered}\tag{19}$$

где $\mu_{0_{2k}}(\lambda_q)$ – безусловный центральный момент порядка 2k надежной оценки λ_q, совпадающий с соответствующим условным моментом $\mu_{0_{2k}}(\lambda_q|\lambda_0)$ (9).

На основе (19) можно заключить, что при выполнении (18) КПО времени прихода случайного импульса (1) является безусловно несмещенной, а ее безусловные рассеяние, коэффициенты асимметрии и эксцесса определятся следующими выражениями:

$$\begin{gathered}V(\lambda_q)=P_0V_0(\lambda_q)+(1-P_0)(\Lambda_2-\Lambda_1)^2/6\ ,\\ \gamma_3(\lambda_q)=0\ ,\\ \gamma_4(\lambda_q)=\frac{P_0\left[\gamma_{0_4}(\lambda_q)+3\right]+(1-P_0)(\Lambda_2-\Lambda_1)^4/15V_0^2(\lambda_q)}{\left[P_0+(1-P_0)(\Lambda_2-\Lambda_1)^2/6V_0(\lambda_q)\right]^2}\ ,\end{gathered}\tag{20}$$

где $V_0(\lambda_q)$ и $\gamma_{04}(\lambda_q)$ совпадают с соответствующими условными характеристиками $V_0(\lambda_q|\lambda_0)$ (12), $\gamma_{04}(\lambda_q|\lambda_0)$ (17). Точность формул (19), (20) возрастает с увеличением μ, z_δ и m.

С целью экспериментальной проверки работоспособоности квазиправдоподобного алгоритма оценки (2) и установления границ применимости асимптотически точных формул для характеристик КПО λ_q по описанной в [7,8] методике было выполнено статистическое моделирование алгоритма (2) на ЭВМ. Следуя [7,8], в процессе моделирования для каждой реализации $x(t)$ на интервале $[\Lambda_1, \Lambda_2]$ с шагом $\Delta\lambda = 0{,}01\tau_0$ формировались отсчеты реализаций случайного процесса $M^*(\lambda)$ (2) и определялась оценка λ_q. При этом относительная среднеквадратическая погрешность ступенчатой аппроксимации непрерывной реализации $M^*(\lambda)$ на основе сформированных дискретных отсчетов не превышала 10 %. Посредством усреднения по всем обработанным реализациям находились условные смещение, рассеяние и коэффициенты асимметрии и эксцесса КПО λ_q.

Сопоставление теоретических и экспериментальных значений центральных моментов второго порядка (11), (12) и вероятности аномальной [10,11] ошибки $P_a = 1 - P_0$ (4) оценки λ_q было выполнено в [7,8]. Ниже на рис. 1-4 представлены теоретические и экспериментальные зависимости коэффициентов эксцесса (16), (17) КПО λ_q.

Каждое экспериментальное значение $\gamma_4(\lambda_q|\lambda_0)$, $\gamma_{04}(\lambda_q|\lambda_0)$ получено при обработке не менее 10^4 реализаций $x(t)$ при $\lambda_0 = (\Lambda_2 + \Lambda_1)/2$. В результате границы доверительных интервалов отклонялись от экспериментальных значений с вероятностью 0,9 не более чем на 10…15 %.

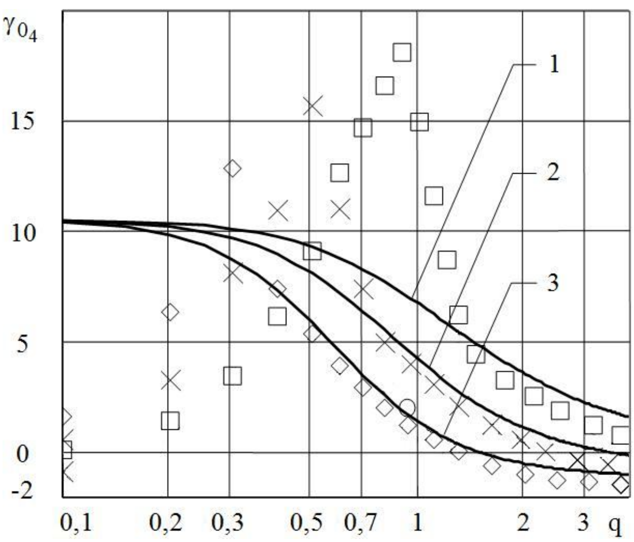

Рис. *1*

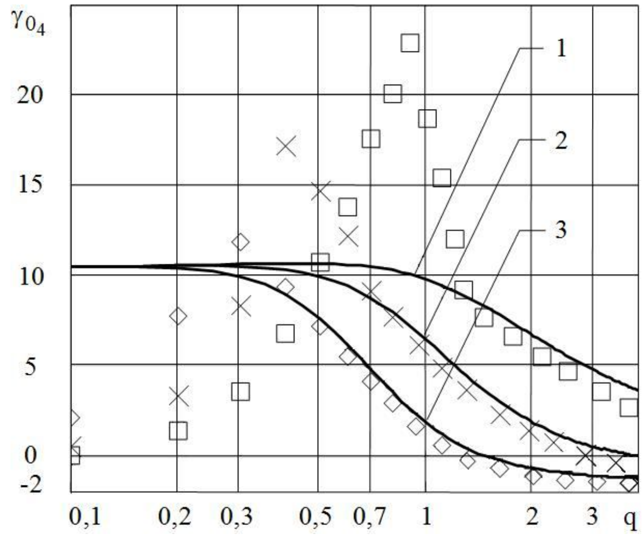

Рис. *2*

На рис. 1,2 нанесены теоретические зависимости коэффициента эксцесса $\gamma_{0_4}(\lambda_q|\lambda_0)$ надежной оценки λ_q, рассчитанные по формулам (12), (15), (17) при $\delta = 0{,}1$ (рис. 1) и $\delta = -0{,}1$ (рис. 2). Кривые 1 соответствуют $\mu = 50$; 2 – $\mu = 100$; 3 – $\mu = 200$. Экспериментальные значения коэффициента эксцесса γ_{0_4}, найденные при $\Lambda_2 - \Lambda_1 = \tau_0$, обозначены на рис. 1,2 прямоугольниками, крестиками и ромбиками для $\mu = 50$, 100 и 200.

Теоретические и экспериментальные зависимости коэффициента эксцесса $\gamma_4(\lambda_q|\lambda_0)$ КПО λ_q с учетом аномальных ошибок при $m = 20$ и $\delta = 0{,}1$ показаны на рис. 3, а при $\delta = -0{,}1$ – на рис. 4. Обозначения соответствуют приведенным на рис. 1,2.

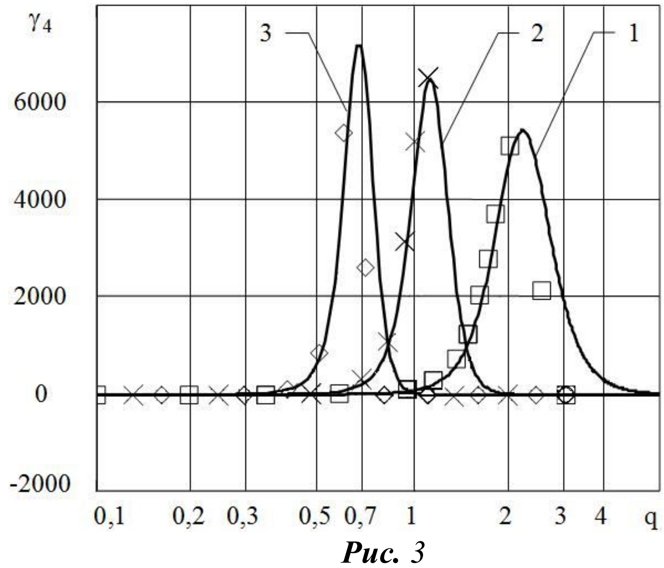

Рис. *3*

Из рис. 1-4 следует, что теоретические зависимости для коэффициента эксцесса $\gamma_4(\lambda_q|\lambda_0)$ (16) оценки λ_q с учетом аномальных ошибок удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные данные, по крайней мере, при $\mu \geq 50$, $z \geq 0{,}5$. При $z < 1$ (когда вероятность надежной оценки мала) коэффициент эксцесса является отрицательной величиной. В этом случае распределение КПО λ_q близко к равномерному. По мере роста z наблюдается резкое увеличение $\gamma_4(\lambda_q|\lambda_0)$, обусловленное достаточно быстрым (по сравнению с моментом четвертого порядка) уменьшением рассеяния оценки при уменьшении вероятности аномальной ошибки. Вследствие этого в пороговой области ($z \sim 4..6$) величина коэффициента эксцесса $\gamma_4(\lambda_q|\lambda_0)$ (16) с учетом аномалий может превосходить величину коэффициента эксцесса $\gamma_{04}(\lambda_q|\lambda_0)$ (17) надежной оценки на несколько порядков. Начиная с ОСШ $z \sim 5...7$, когда аномальные ошибки становятся достаточно редкими, величина $\gamma_4(\lambda_q|\lambda_0)$ (18) быстро спадает до значения коэффициента эксцесса надежной оценки (17). Теоретические зависимости для коэффициента эксцесса $\gamma_{04}(\lambda_q|\lambda_0)$ надежной КПО λ_q в области не слишком больших ОСШ z ($z < 3...4$) заметно отклоняются от экспериментальных, поскольку найдены без учета конечной длительности интервала $[\Lambda_1, \Lambda_2]$ надежной оценки [10,11]. При ОСШ $z > 5...7$ значения $\gamma_4(\lambda_q|\lambda_0)$ и $\gamma_{04}(\lambda_q|\lambda_0)$ практически совпадают.

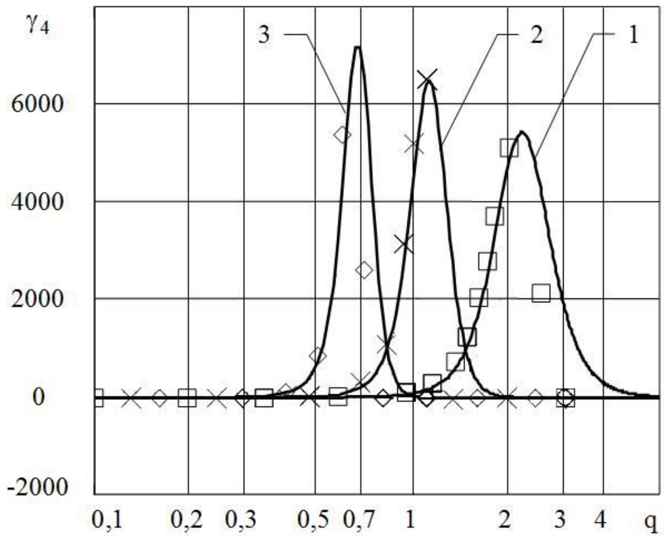

Рис. *4*

Таким образом, при оценивании времени прихода случайного импульса (1) с неточно известной длительностью в области ОСШ $z < 5...7$ необходимо учитывать пороговые эффекты, связанные с появлением аномальных ошибок. При этом как форма, так и характеристики распределения КПО λ_q претерпевают существенные изменения. Когда ОСШ $z > 5...7$ и $m \leq 20$, оценка времени прихода λ_q становится надежной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван-Трис, Гарри Л. Теория обнаружения, оценок и модуляции / Пер. с англ. Под ред. В.Т. Горяинова. – М.: Сов. Радио, 1977. – Т.3. – 664 с.

2. Вопросы статистической теории радиолокации / П.А. Бакут, И.А. Большаков, Б.М. Герасимов и др.; Под ред. Г.П. Тартаковского. – М.: Сов. Радио, 1963. – 426 с.

3. Кремер И.Я., Владимиров В.И., Карпухин В.И. Модулирующие помехи и прием радиосигналов. – М.: Сов. Радио, 1972. – 480 с.

4. Трифонов А.П., Нечаев Е.П., Парфенов В.И. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами. – Воронеж: ВГУ, 1991. – 246 с.

5. Трифонов А.П., Захаров А.В. Прием сигнала с неизвестной задержкой при наличии модулирующей помехи // Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1986. – Т. 29. – № 4. – С. 36-41.

6. Чернояров О.В. Статистический анализ случайных импульсных сигналов на фоне белой и коррелированной помех с неизвестными интенсивностями // Инфокоммуникационные системы и технологии: проблемы и перспективы. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. – 592 с. – С. 185-247.

7. Трифонов А.П., Захаров А.В., Чернояров О.В. Пороговые характеристики квазиправдоподобной оценки времени прихода случайного радиоимпульса // Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1998. – Т. 41. – № 10. – С. 18-28.

8. Чернояров О.В. Статистический анализ случайных импульсных сигналов на фоне белой и коррелированной помех в условиях параметрической априорной неопределенности // Моделирование развития информационно-телекоммуникационных систем. – СПб.: Изд-во «Синтез Бук», 2009. – 384 с. – С. 79-145.

9. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. – М.: Сов. Радио, 1978. – 376 с.

10. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. – М.: Сов. Радио, 1978. – 296 с.

11. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. – М.: Радио и связь, 1986. – 264 с.