ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРИЕМНИК СЛУЧАЙНОГО ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ С НЕИЗВЕСТНЫМ ВРЕМЕНЕМ ПРИХОДА

Чернояров О.В., Сидорова Н.А.
Московский технический университет связи и информатики, E-mail: o_v_ch@mail.ru

На основе метода максимального правдоподобия выполнен синтез алгоритма оценки времени прихода узкополосного гауссовского случайного импульса произвольной формы. Найдены асимптотические выражения для точностных характеристик предложенного измерителя

Задача оценки времени прихода случайных импульсных сигналов имеет широкие приложения в радио- и гидролокации, радионавигации, связи, технической диагностике и др. [1,2]. В работах [3,4] предложен способ аппаратурной реализации и исследована эффективность максимально-правдоподобного измерителя времени прихода прямоугольного гауссовского случайного импульса. Однако достаточно часто форма принимаемого импульсного сигнала может существенно отличаться от прямоугольной. В этой связи представляет интерес найти выражение для решающей статистики и структуру оптимального приемника гауссовского случайного импульса произвольной формы с неизвестным временем прихода.

Пусть в течение интервала времени $t \in [0, T]$ наблюдается реализация случайного процесса

$$x(t) = s(t, \lambda_0) + n(t), \tag{1}$$

где $s(t, \lambda_0)$ – случайный импульсный сигнал произвольной формы, математической моделью которого может служить мультипликативная комбинация вида [5]

$$s(t) = \xi(t) f\left(\frac{t-\lambda_0}{\tau}\right) I\left(\frac{t-\lambda_0}{\tau}\right), \qquad I(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1/2, \\ 0, & |x| > 1/2. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь λ_0 – время прихода, τ – длительность, $f(t)$ – функция, описывающая форму импульса, а $\xi(t)$ – реализация стационарного центрированного гауссовского случайного процесса, обладающего спектральной плотностью

$$G(\omega) = \frac{\pi D}{\Omega} \left\{ I\left(\frac{\vartheta - \omega}{\Omega}\right) + I\left(\frac{\vartheta + \omega}{\Omega}\right) \right\}. \tag{3}$$

В (3) обозначено: ϑ – центральная частота, Ω – ширина полосы частот, а D – дисперсия процесса $\xi(t)$.

Будем полагать, что флуктуации $\xi(t)$ являются “быстрыми”, т.е. длительность импульса τ и характерное время изменения Δt функции $f(t)$ существенно превышают время корреляции процесса $\xi(t)$, так что выполняются условия

$$\tau >> 2\pi/\Omega, \qquad \Delta t >> 2\pi/\Omega. \tag{4}$$

Помеху $n(t)$ в (1) аппроксимируем гауссовским белым шумом с односторонней спектральной плотностью N_0. По принимаемой реализации $x(t)$ и имеющейся априорной информации необходимо оценить время прихода $\lambda_0 \in [\Lambda_1, \Lambda_2]$ сигнала (2).

При синтезе алгоритма оценки воспользуемся методом максимального правдоподобия [6]. Согласно этому методу необходимо формировать решающую статистику – логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) $L(\lambda)$ – как функцию текущего значения λ неизвестного параметра λ_0. При выполнении (4) согласно [5] имеем

$$L(\lambda) = \frac{q}{N_0} M(\lambda) - \mu \int_{-1/2}^{1/2} \ln\left[1 + q f^2(t)\right] dt, \qquad M(\lambda) = \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} \frac{f^2[(t-\lambda)/\tau]\, y^2(t)}{1 + q f^2[(t-\lambda)/\tau]} dt. \tag{5}$$

где $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t')h(t-t')dt'$ – выходной сигнал фильтра, передаточная функция $H(\omega)$ которого удовлетворяет условию $|H(\omega)|^2 = I[(\vartheta-\omega)/\Omega]+I[(\vartheta+\omega)/\Omega]$, $q=D/E_N$, $\mu=\tau\Omega/2\pi$, а $E_N=N_0\Omega/2\pi$ – средняя мощность шума $n(t)$ в полосе частот процесса $\xi(t)$.

Тогда оценка максимального правдоподобия (ОМП) λ_m времени прихода λ_0 случайного импульса (2) определится как положение наибольшего максимума решающей статистики $L(\lambda)$:

$$\lambda_m = \underset{\lambda\in[\Lambda_1,\Lambda_2]}{\arg\sup}\, L(\lambda) = \underset{\lambda\in[\Lambda_1,\Lambda_2]}{\arg\sup}\, M(\lambda). \tag{6}$$

Рассмотрим характеристики ОМП λ_m. С этой целью введем в рассмотрение безразмерный параметр $l=\lambda/\tau$, обозначим $l_0=\lambda_0/\tau$ и представим функционал $M(\lambda)$ (5) в виде суммы сигнальной [6] и шумовой [6] функций:

$$M(\lambda)=M(l)=S(l)+N(l). \tag{7}$$

Здесь $S(l)=\langle M(l)\rangle$ – сигнальная, $N(l)=M(l)-\langle M(l)\rangle$ – шумовая функции, а усреднение выполняется по реализациям наблюдаемых данных $x(t)$ (1) при фиксированном значении параметра λ_0. При выполнении (4) для сигнальной функции $S(l)$ имеем

$$S(l)=AC(l-l_0)+S_N, \tag{8}$$

где $A=\tau D_0$,

$$C(x)=\int\limits_{-1/2-\min(0,x)}^{1/2-\max(0,x)}\frac{f^2(t)f^2(t+x)}{1+qf^2(t)}dt,\quad S_N=\tau E_N\int\limits_{-1/2}^{1/2}\frac{f^2(t)}{1+qf^2(t)}dt.$$

В соответствии с (7)

$$\langle N(l)\rangle=0,\qquad \langle N(l_1)N(l_2)\rangle=\left(\tau^2E_N^2/\mu\right)\left[B_1(l_1,l_2,l_0)+B_2(l_1,l_2)\right], \tag{9}$$

где

$$B_1(l_1,l_2,l_0)=\int\limits_{-1/2+\max(0,l_1-l_0,l_2-l_0)}^{1/2+\min(0,l_1-l_0,l_2-l_0)} g_{12}(t)\left[\left(1+qf^2(t)\right)^2-1\right]dt,\ B_2(l_1,l_2)=\int\limits_{-1/2+\max(l_1-l_0,l_2-l_0)}^{1/2+\min(l_1-l_0,l_2-l_0)} g_{12}(t)dt,$$

$$g_{12}(t)=\prod_{i=1}^{2}f^2(t-l_i+l_0)\big/\left(1+qf^2(t-l_i+l_0)\right).$$

В процессе анализа все оценки целесообразно разбить на два класса: надежные и аномальные [6]. Оценка $l_m=\lambda_m/\tau$ является надежной, если она находится в пределах интервала $\Gamma_S\equiv[l_0-1,l_0+1]$, где сигнальная функция (8) отлична от S_N. Если же ОМП l_m находится вне интервала Γ_S, т.е. $l_m\in\Gamma_N=\Gamma\setminus\Gamma_S$, $\Gamma\equiv[\tilde\Lambda_1,\tilde\Lambda_2]$, $\tilde\Lambda_{1,2}=\Lambda_{1,2}/\tau$, то оценка и соответствующая ошибка оценивания называются аномальными [6]. Учет аномальных ошибок необходим, если приведенная длина [6] $m=\tilde\Lambda_2-\tilde\Lambda_1$ априорного интервала Γ возможных значений времени прихода l_0 значительно больше протяженности интервала Γ_S надежной оценки, т.е.

$$m>>1. \tag{10}$$

Согласно [6] при выполнении (10) условные смещение $b(l_m|l_0)=\langle l_m-l_0\rangle$ и рассеяние $V(l_m|l_0)=\left\langle (l_m-l_0)^2\right\rangle$ ОМП l_m с учетом аномальных ошибок могут быть записаны в виде

$$b(l_m|l_0)=P_0b_0(l_m|l_0)+(1-P_0)\left[\left(\tilde\Lambda_1+\tilde\Lambda_2\right)/2-l_0\right],$$

$$V(l_m|l_0)=P_0V_0(l_m|l_0)+(1-P_0)\left[\left(\tilde\Lambda_1^2+\tilde\Lambda_1\tilde\Lambda_2+\tilde\Lambda_2^2\right)/3-l_0\left(\tilde\Lambda_1+\tilde\Lambda_2\right)+l_0^2\right].$$

Здесь $b_0(l_m|l_0)$, $V_0(l_m|l_0)$, $P_0 = P[\,|l_m - l_0| \le 1]$ – соответственно условное смещение, условное рассеяние и вероятность надежной оценки l_m (6).

При нахождении $b_0(l_m|l_0)$, $V_0(l_m|l_0)$ и P_0 ограничимся условием высокой апостериорной точности, когда выходное отношение сигнал/шум (ОСШ) z^2 алгоритма (6) достаточно велико, т.е.

$$z^2 = \frac{[S(l_0) - S_N]^2}{\langle N^2(l_0)\rangle} = \mu q^2 \left[\int_{-1/2}^{1/2} \frac{f^4(t)\,dt}{1+qf^2(t)}\right]^2 \Bigg/ \int_{-1/2}^{1/2} f^4(t)\,dt >> 1. \qquad (11)$$

Неравенство (11) выполняется при выполнении (4) и не слишком малых q. Также будем считать, что $f(t)$ является четной функцией своего аргумента и не обращается в нуль в точках $t = \pm 1/2$.

Аналогично [6] можно показать, что с увеличением z^2 ОМП l_m сходится к истинному значению оцениваемого параметра l_0 в среднеквадратическом смысле. Вследствие этого для определения характеристик надежной оценки l_m при $z^2 >> 1$ достаточно исследовать поведение функционала $M(l)$ (5) в малой окрестности точки $l = l_0$. Обозначим $\Delta = \max\{|l_1 - l_0|, |l_2 - l_0|, |l_1 - l_2|\}$. Тогда с учетом (4) для (8), (9) при $\Delta \to 0$ справедливы асимптотические разложения

$$\begin{gathered} S(l) = 2AH(1/2) + S_N - Ah(1/2)|l - l_0| + o(\Delta), \\ \langle N(l_1)N(l_2)\rangle = (\tau^2 E_N^2/\mu)\{2F(1/2) - g(1/2)|\,l_1 - l_2| - \\ - [f^4(1/2) - g(1/2)][\max(0; l_1 - l_0; l_2 - l_0) - \min(0; l_1 - l_0; l_2 - l_0)]\}, \end{gathered} \qquad (12)$$

где

$$h(t) = \frac{f^4(t)}{1+qf^2(t)},\ g(t) = \frac{f^4(t)}{[1+qf^2(t)]^2},\ H(t) = \int h(t)\,dt,\ G(t) = \int g(t)\,dt,\ F(t) = \int f^4(t)\,dt.$$

Введем в рассмотрение разностный функционал

$$\varsigma(l) = [M(l) - M(x)]/\sigma_S, \qquad l, x \in \tilde{\Lambda}_\delta.$$

Здесь $\sigma_S^2 = 2\tau^2 E_N^2 F(1/2)/\mu$, $\tilde{\Lambda}_\delta = [l_0 - \delta, l_0 + \delta]$, а δ фиксировано и выбрано настольно малым, что при $\Delta < \delta$ выражения (12) можно аппроксимировать главными членами асимптотических разложений с требуемой точностью. Тогда при $z >> 1$ (11) функцию распределения $F_0(x|l_0)$ надежной ОМП l_m можно представить в виде

$$F_0(x|l_0) = P[l_m < x] = P\left[\max_{l<x} \varsigma(l) > \max_{l \ge x} \varsigma(l)\right], \qquad l, x \in \tilde{\Lambda}_\delta.$$

Используя теорему Дуба в формулировке [7] можно показать, что процесс $\varsigma(l)$ на интервале $\tilde{\Lambda}_\delta$ является асимптотически (при $\mu \to \infty$) гауссовским марковским случайным процессом диффузионного типа, коэффициенты сноса K_1 и диффузии K_2 которого при $l \ge x$ определяются выражениями

$$K_1 = kz\begin{cases} 1, & l < l_0, \\ -1, & l \ge l_0, \end{cases} \qquad K_2 = \frac{f^4(1/2) + g(1/2)}{2F(1/2)}, \qquad k = \frac{h(1/2)}{2H(1/2)}. \qquad (13)$$

Тогда на основе результатов работ [3,4] находим

$$\begin{gathered} b_0(l_m|l_0) \approx 0, \\ V_0(l_m|l_0) = 13\left\{1 + [1 + qf^2(1/2)]^2\right\}^2 \Big/ 8\mu^2 q^4 f^8(1/2). \end{gathered} \qquad (14)$$

Точность формул (14) возрастает с увеличением μ и z. При $f(t) \equiv 1$ из (14) получаем известные выражения для условных смещения и рассеяния ОМП времени прихода узкополосного случайного импульса прямоугольной формы без учета аномальных ошибок [3,4].

Вычислим теперь вероятность P_0 надежной оценки l_m. Аналогично [4,6], если $m >> 1$ (10), представим вероятность P_0 как

$$P_0 = \int F_N(u) dF_S(\sigma_N u / \sigma_S), \tag{15}$$

где $F_N(u) = P[H_N / \sigma_N < u]$, $F_S(u) = P[H_S / \sigma_S < u]$, $H_N = \sup\limits_{l \in \Gamma_N} \overset{\circ}{M}(l)$, $H_S = \sup\limits_{l \in \Gamma_S} \overset{\circ}{M}(l)$ – абсолютные максимумы центрированного функционала $\overset{\circ}{M}(l) = M(l) - S_N$ на интервалах аномальной и надежной оценок соответственно, $\sigma_N^2 = 2\tau^2 E_N^2 G(1/2)/\mu$, а интегрирование ведется по всем возможным значениям u. При выполнении (4), (10) вероятность $F_N(u)$ можно записать следующим образом

$$F_N(u) = P\left[\overset{\circ}{M}(l)/\sigma_N < u\right] = P[N(l)/\sigma_N < u], \quad l \in \left[\tilde{\Lambda}_1, l_0 - 1\right] \cup \left[l_0 + 1, \tilde{\Lambda}_2\right].$$

Здесь $N(l)$ – асимптотически (при $\mu \to \infty$) гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $\langle N(l_1) N(l_2) \rangle = \sigma_N^2 B_2(l_1, l_2)/2G(1/2)$. Используем для функции $B_2(l_1, l_2)$ линейную аппроксимацию вида $B_2(l_1, l_2) = 2G(1/2)\max(0, 1 - |l_1 - l_2|)$. Тогда на основе результатов [6,8] для $F_N(u)$ получаем

$$F_N(u) = \begin{cases} \exp\left[-\dfrac{mu}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{u^2}{2}\right)\right], & u \geq 1, \\ 0, & u < 1. \end{cases} \tag{16}$$

Точность формулы (16) возрастает с увеличением m и u.

Перейдем к определению вероятности $F_S(u)$, для чего перепишем ее как

$$F_S(u) = P[\varsigma_0(l) < u - u_0], \qquad l \in \tilde{\Lambda}_\delta. \tag{17}$$

Здесь $\varsigma_0(l) = [M(l) - M(l_0)]/\sigma_S$, $u_0 = [M(l_0) - S_N]/\sigma_S$. Как следует из (9), реализации случайного процесса $\varsigma_0(l)$ с учетом его асимптотической гауссовости приближенно статистически независимы на интервалах $[l_0 - \delta, l_0)$ и $[l_0, l_0 + \delta]$. Тогда для (17) имеем

$$F_S(u) = F_1(u - u_0) F_2(u - u_0), \quad F_1(u) = P\left[\sup_{l_0 - \delta \leq l < l_0} \varsigma_0(l) < u\right], \quad F_2(u) = P\left[\sup_{l_0 \leq l < l_0 + \delta} \varsigma_0(l) < u\right]. \tag{18}$$

Аналогично [4] можно показать, что случайная величина u_0 является асимптотически (при $\mu \to \infty$) гауссовской случайной величиной с математическим ожиданием z (11) и единичной дисперсией. Тогда функцию распределения (18) можно представить в виде

$$F_S(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} F_1(u - y) F_2(u - y) \exp\left[-(y - z)^2 / 2\right] dy, \tag{19}$$

причем в силу симметрии статистических свойств функционала $M(l)$ (5) относительно точки $l = l_0$ $F_1(u) = F_2(u)$.

Вероятности $F_1(u)$, $F_2(u)$ можно найти, используя марковские свойства процесса $\varsigma_0(l)$. Тогда, следуя [4], для функций $F_1(u)$, $F_2(u)$ получаем

$$F_1(u) = F_2(u) = \Phi\left[\frac{kz\delta + u}{\sqrt{\delta K_2}}\right] - \exp\left(-\frac{2kzu}{K_2}\right)\Phi\left[\frac{kz\delta - u}{\sqrt{\delta K_2}}\right]. \tag{20}$$

Здесь k и K_2 определяются из (13), а $\Phi(x) = \left(1/\sqrt{2\pi}\right)\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-t^2/2\right)dt$ – интеграл вероятности. Подставляя (20) в (19), используя при $z^2 \to \infty$ асимптотическое представление интеграла вероятности [6]: $\Phi(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 1 - \exp\left(-x^2/2\right)/\sqrt{2\pi}x$ и пренебрегая членами более высоких порядков малости по z, после выполнения операции интегрирования имеем

$$\begin{gathered} F_S(u) = \Phi(u-z) - 2\exp\left[\frac{\psi^2 z^2}{2} + \psi z(z-u)\right]\Phi[u - z(\psi+1)] + \\ + \exp\left[2\psi^2 z^2 + 2\psi z(z-u)\right]\Phi[u - z(2\psi+1)]. \end{gathered} \tag{21}$$

Здесь $\psi = 2k/K_2 = 2F(1/2)\left[1 + qf^2(1/2)\right]/H(1/2)\left[1 + (1 + qf(1/2))^2\right]$.

Используя теперь аппроксимации (16), (21) в (15), для вероятности P_0 надежной ОМП l_m находим

$$\begin{gathered} P_0 = \frac{2\psi z}{r}\exp\left(\frac{2\psi^2 z^2}{2} + 2\psi z^2\right)\int_1^{\infty} \exp\left[-\frac{mu}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right]\left\{\exp\left(-\frac{\psi z u}{r}\right)\times\right. \\ \left.\times\Phi\left[\frac{u}{r} - z(\psi+1)\right] - \exp\left[\frac{3\psi^2 z^2}{2} + \psi z\left(z - \frac{2u}{r}\right)\right]\Phi\left[\frac{u}{r} - z(2\psi+1)\right]\right\}du. \end{gathered} \tag{22}$$

где $r = \sigma_S/\sigma_N = \sqrt{F(1/2)/G(1/2)}$. Полагая в (22) $f(t) \equiv 1$, получаем известное выражение для вероятности надежной оценки времени прихода прямоугольного случайного импульса [3,4].

Таким образом, полученные результаты позволяют сделать обоснованный выбор между предложенным и другими алгоритмами оценивания времени прихода случайных импульсных сигналов произвольной формы в зависимости от требований, предъявляемых к эффективности алгоритма и степени простоты его технической реализации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Возенкрафт Дж., Джекобс И. Теоретические основы техники связи. – М.: Мир, 1969. – 640 с.
2. Справочник по радиолокации в 4-х т. : Пер. с англ. – Т.1 / Под ред. Я.С. Ицхоки. – М.: Сов. радио, 1976. – 456 с.
3. Трифонов А.П., Чернояров О.В. Оценка параметров случайного импульсного сигнала, искаженного гауссовским белым шумом // Материалы Всероссийской научно-технической конференции "Радио и волоконно-оптическая связь, локация и навигация ". – Т.1. – Воронеж: ВНИИС, 1997. – С. 242-251.
4. Чернояров О.В. Статистический анализ случайных импульсных сигналов на фоне белой и коррелированной помех с неизвестными интенсивностями // Инфокоммуникационные системы и технологии: проблемы и перспективы / Под ред. А.В.Бабкина – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. – 592 с. – С. 185-247.
5. Чернояров О.В., Сальникова А.В. Квазиправдоподобный обнаружитель случайного импульсного сигнала произвольной формы с неизвестными временными параметрами на фоне помех // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2009. – № 2. – С. 63-69.
6. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. – М.: Радио и связь, 1986. – 264 с.
7. Kailath T. Some integral equations with nonrational kernals // IEEE Trans. – 1966. – V. IT-12. – № 4. – P. 442-447.
8. Теория обнаружения сигналов / П.С. Акимов, П.А. Бакут, В.А. Богданович и др.; Под ред. П.А. Бакута. – М.: Радио и связь, 1984. – 440 с.