

## ОЦЕНКА ДИСПЕРСИИ УЗКОПОЛОСНОГО СЛУЧАЙНОГО ИМПУЛЬСА С НЕИЗВЕСТНЫМИ ВРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ФОНЕ ПОМЕХ

*Шепелев Д.Н., Московский технический университет связи и информатики, sbmd@mail.ru*

*На основе метода максимального правдоподобия выполнен синтез и анализ алгоритма оценки дисперсии узкополосного случайного импульсного сигнала с неизвестным временем прихода и неточно известной длительностью. Методами статистического моделирования на ЭВМ установлена работоспособность предложенного измерителя и найдены границы применимости асимптотически точных формул для его характеристик.*

В последние годы все более актуальным становится поиск эффективных алгоритмов анализа случайных процессов в информационно-измерительных системах. В прикладных задачах связи, радио и гидролокации, радиоастрономии, распознавания образов и т.п. в качестве случайного процесса достаточно часто выступает информационный сигнал, искаженный модулирующей помехой. Приемлемой математической моделью такого сигнала является стохастическая модель в виде отрезка реализации шума достаточно большой длительности  $\tau_0$  [1-5]:

$$s(t) = I[(t - \lambda_0)/\tau_0] \xi(t). \quad (1)$$

Здесь  $I(\cdot)$  – индикатор единичной длительности:  $I(x) = 1$  при  $|x| < 1/2$  и  $I(x) = 0$  при  $|x| \geq 1/2$ ;  $\lambda_0$  – время прихода импульса, а  $\xi(t)$  – реализация стационарного гауссовского центрированного случайного процесса с полосовой спектральной плотностью (СП):

$$G(\omega) = (\pi D_0 / \Omega) \{ I[(\vartheta - \omega)/\Omega] + I[(\vartheta + \omega)/\Omega] \}, \quad \vartheta \geq \Omega/2, \quad (2)$$

где  $\vartheta$  – центральная частота,  $\Omega$  – ширина полосы частот, а  $D_0$  – дисперсия процесса  $\xi(t)$ . Такая аппроксимация СП широко используется в практических приложениях статистической радиотехники [1-5]. Будем считать, что длительность  $\tau_0$  сигнала (1) существенно превышает время корреляции случайной субструктуры  $\xi(t)$ , так что выполняется условие

$$\mu = \tau_0 \Omega / 2\pi \gg 1. \quad (3)$$

Следуя [5,6], полагаем, что погрешности регистрации (1) носят характер аддитивного гауссовского белого шума  $n(t)$  с односторонней СП  $N_0$ , причем сигнал и шум статистически независимы. В результате наблюдению доступна смесь

$$x(t) = s(t) + n(t). \quad (4)$$

В работе [1] исследована эффективность обработки случайного импульса (1) при условии, что неизвестно лишь его время прихода  $\lambda_0$ . Однако в ряде практически важных задач необходимо также измерять дисперсию  $D_0$  процесса  $\xi(t)$ . В работе [2] параметры  $\lambda_0$  и  $D_0$  предполагали неизвестными, но при этом было найдено лишь рассеяние надежной оценки дисперсии сигнала (1) без учета возможного влияния аномальных ошибок. Наконец, в работах [3,4] рассмотрены алгоритмы оценки дисперсии случайного импульса (1) с неизвестным временем прихода, при анализе которого учитывалось влияние аномальных ошибок, но не принималось во внимание возможное различие длительностей синхроимпульса и принимаемого сигнала вследствие неизбежного наличия помех в канале синхронизации.

Таким образом, целью настоящей работы является синтез и анализ алгоритма оценки дисперсии гауссовского случайного импульсного сигнала с неизвестными временем прихода и длительностью. При этом будем полагать, что параметры  $\lambda_0$  и  $\tau_0$  принимают значения из априорных интервалов  $[\Lambda_1, \Lambda_2]$  и  $[T_1, T_2]$  соответственно, а сигнал (1) всегда находится внутри интервала наблюдения.

При синтезе алгоритма оценки воспользуемся методом максимального правдоподобия (МП), для чего запишем логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП)  $L(\lambda, \tau, D)$  как функцию  $\lambda, \tau$  и  $D$  параметров  $\lambda_0, \tau_0$  и  $D_0$  для всех  $\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2], \tau \in [T_1, T_2], D \geq 0$  [3-5]:

$$L(\lambda, \tau, D) = DM(\lambda, \tau) / [E_N(E_N + D)] - (\tau\Omega/2\pi) \ln(1 + D/E_N), \quad (5)$$

$$M(\lambda, \tau) = \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')h(t-t')dt' \right]^2 dt.$$

Здесь  $h(t)$  – функция, спектр которой  $H(\omega)$  удовлетворяет условию  $|H(\omega)|^2 = I[(\vartheta - \omega)/\Omega] + I[(\vartheta + \omega)/\Omega]$ , а  $E_N = N_0\Omega_0/2\pi$  – средняя мощность шума  $n(t)$  в полосе частот анализируемого процесса  $\xi(t)$ .

Согласно (5), (6) оценка максимального правдоподобия (ОМП)  $D_m$  дисперсии  $D_0$  имеет вид

$$D_m = \arg \sup_{D \geq 0} L(\lambda_m, \tau_m, D) = \Gamma(\lambda_m, \tau_m), \quad \Gamma(\lambda, \tau) = \max[0; M(\lambda, \tau)/\tau - E_N], \quad (7)$$

где  $\lambda_m, \tau_m$  – ОМП времени прихода  $\lambda_0$  и длительности  $\tau_0$ :

$$\lambda_m = \arg \sup_{\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]} L(\lambda, \tau_m, D_m) = \arg \sup_{\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]} M(\lambda, \tau_m), \quad \tau_m = \arg \sup_{\tau \in [T_1, T_2]} L(\lambda_m, \tau, D_m) = \arg \sup_{\tau \in [T_1, T_2]} M(\lambda_m, \tau). \quad (8)$$

Как следует из (7), (8), МП измеритель дисперсии случайного импульсного сигнала (1) с неизвестными временными параметрами имеет многоканальную структуру, причем для точной его реализации число каналов должно быть бесконечным, что вряд ли достижимо на практике. Кроме того, найти погрешности алгоритма совместного оценивания (7), (8) современными аналитическими методами пока не представляется возможным. Однако если априорный интервал  $[T_1, T_2]$  достаточно мал или требования, предъявляемые к точности получаемой оценки дисперсии, не слишком высокие, то указанные трудности можно преодолеть, используя независимый от наблюдаемой реализации канал синхронизации. На выходе этого канала формируется импульс с длительностью  $\tau^*$  и временем прихода  $\lambda_q$ , определяющимся как

$$\lambda_q = \arg \sup_{\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]} M(\lambda, \tau^*). \quad (9)$$

Принимая в качестве истинного значения неизвестной длительности  $\tau_0$  импульса (1) длительность  $\tau^*$  синхроимпульса, получаем оценку дисперсии

$$D_q = \Gamma(\lambda_q, \tau^*), \quad (10)$$

которую в отличие от ОМП (7) назовем квазиправдоподобной оценкой (КПО).

Определим характеристики КПО (10). Для этого представим функционал  $M(\lambda, \tau^*)$  в виде суммы регулярной и шумовой составляющих [4-6]:  $M(\lambda, \tau^*) = S(\lambda) + N(\lambda)$ , где  $S(\lambda) = \langle M(\lambda, \tau^*) \rangle$  – регулярная,  $N(\lambda) = M(\lambda, \tau^*) - \langle M(\lambda, \tau^*) \rangle$  – шумовая составляющие, а усреднение выполняется по реализациям  $x(t)$  (4) при фиксированных  $\lambda_0, \tau_0$  и  $D_0$ . При выполнении (3) имеем

$$S(l) = \mu N_0 [1 + \delta_\tau + q_0(1 + \min(l - l_0 + \delta_\tau; 0) - \max(l - l_0 - \delta_\tau / 2; 0))], \quad (11)$$

$$B(l_1, l_2) = \langle N(l_1)N(l_2) \rangle = \mu N_0^2 \left\{ \max(1 + \delta_\tau - |l_1 - l_2|; 0) + q_0 N_0 (2 + q_0) \left[ \frac{l_1 - l_2}{2(1 + \delta_\tau)} \right] \left[ \frac{l_1 - l_0}{2(1 + \min(0; \delta_\tau))} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{l_2 - l_0}{2(1 + \min(0; \delta_\tau))} \right] \left[ 1 + \min(l_1 - l_0 + \delta_\tau / 2; l_2 - l_0 + \delta_\tau / 2; 0) - \max(l_1 - l_0 - \delta_\tau / 2; l_2 - l_0 - \delta_\tau / 2; 0) \right] \right\}.$$

Здесь  $q_0 = D_0/E_N$  – входное отношение сигнал/шум (ОСШ);  $\delta_\tau = (\tau^* - \tau_0)/\tau_0$  – относительное отклонение (расстройка) ожидаемой длительности от длительности принимаемого сигнала;  $l = \lambda/\tau_0$ ,  $l_i = \lambda_i/\tau_0$ ,  $i = 0, 2$ .

Конкретизируя соотношения (11) для областей  $|l - l_0| < \delta_\tau/2$ :

$$S(l) = \mu N_0 \begin{cases} 1 + \delta_\tau + q_0, & \delta_\tau > 0; \\ (1 + \delta_\tau)(2 + q_0), & \delta_\tau < 0; \end{cases} \quad B(l_1, l_2) = \mu N_0^2 \begin{cases} [(1 + q_0)^2 + \delta_\tau](1 - |r_1 - r_2|), & \delta_\tau > 0; \\ (1 + q_0)^2(1 + \delta_\tau)(1 - |s_1 - s_2|), & \delta_\tau < 0; \end{cases}$$

и  $|l - l_0| > 1 + \delta_\tau/2$ :

$$S(l) = \mu N_0(1 - \delta_\tau), \quad B(l_1, l_2) = \mu N_0^2(1 + \delta_\tau) \begin{cases} 1 - |s_1 - s_2|, & |s_1 - s_2| \leq 1; \\ 0, & |s_1 - s_2| > 1; \end{cases}$$

где  $r_i = l_i / [(1 + q_0)^2 + \delta_\tau]$ ,  $s_i = l_i / (1 + \delta_\tau)$ ,  $i = 1, 2$ , можно, воспользовавшись результатами работ [4-6], получить приближенное выражение для функции распределения  $F(x)$  нормированной оценки дисперсии  $q_q = D_q/E_N$  случайного импульса (1):

$$F(x) = \begin{cases} F_S(x)F_N[x\sqrt{\mu(1 + \delta_\tau)}], & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (12)$$

В (12) обозначено:

$$F_S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{1 + 2\alpha}}{\alpha} \int_{h(x)}^{\infty} \Phi(y) \exp\left\{-\frac{(1 + 2\alpha)[y - (1 + \alpha)h(y)]^2}{2\alpha^2}\right\} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{1 + 2\alpha}}{1 + \alpha} \left\{ h(x) \exp\left[-\frac{(1 + 2\alpha)h(x)^2}{2}\right] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(1 + 2\alpha)h(x)^2}{2}\right] \right\}, \quad (13)$$

$$F_N(x) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{(mx/\sqrt{2\pi})\exp(-x^2/2)}{0}\right], & x \geq 1; \\ 0, & x > 1; \end{cases} \quad (14)$$

где

$$\alpha = \begin{cases} (1 + q_0)^2/\delta_\tau, & \delta_\tau > 0; \\ 1/|\delta_\tau| - 2, & \delta_\tau < 0; \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{\mu\delta_\tau / \left\{ [2(1 + q_0)^2 + \delta_\tau] [(1 + q_0)^2 + \delta_\tau] \right\}} [(1 + \delta_\tau)x - q_0], & \delta_\tau > 0; \\ \sqrt{\mu(1 + \delta_\tau)|\delta_\tau| / (2 + 3\delta_\tau)} (x - q_0)/(1 + q_0), & \delta_\tau < 0; \end{cases}$$

$m = (\Lambda_2 - \Lambda_1)/\tau_0$  а – приведенная длина интервала возможных значений параметра  $\lambda_0$ , а

$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$  – интеграл вероятности [6].

Согласно [4-6], выражения (12)-(14) справедливы при выполнении условий  $\mu \gg 1$  (3),  $z \gg 1$ ,  $m \gg 1$ , и их точность возрастает с увеличением  $\mu$ ,  $z$ ,  $m$ . Здесь  $z = \sqrt{\mu}q_0/(1 + q_0)$  – ОСШ для выходного сигнала при  $\delta_\tau = 0$ . Если  $m \leq 1$ ,  $\mu \gg 1$  ( $z \gg 1$ ), то

$$F(x) = \begin{cases} F_S(x), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0; \end{cases} \quad (15)$$

Используя аппроксимацию (12) при  $m > 1$  и аппроксимацию (15) при  $m \leq 1$ , получаем выражения для условных смещения (систематической ошибки)  $b(q_q|q_0)$  и рассеяния (среднего квадрата ошибки)  $V(q_q|q_0)$  нормированной оценки (10)

$$b(q_q|q_0) = \langle q_q \rangle - q_0, \quad V(q_q|q_0) = \langle q_q^2 \rangle - 2q_0 \langle q_q \rangle + q_0^2, \quad (16)$$

$$\langle q_q \rangle = \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx, \quad \langle q_q^2 \rangle = 2 \int_0^{\infty} x [1 - F(x)] dx$$

Точность формул (16) возрастает с увеличением  $\mu$ ,  $z$ ,  $m$ . Формулы (16) существенно упрощаются при весьма больших значения  $\mu$  ( $z$ ), когда вероятностью  $P_a = P[|\lambda_q - \lambda_0| > \tau^*]$  аномальной ошибки [6] при оценивании времени прихода можно пренебречь:

$$b(q_q|q_0) = q_0 \left( A - 1 + \frac{A}{B\sqrt{\pi\beta}} \right), \quad V(q_q|q_0) = q_0^2 \left[ (A - 1)^2 + \frac{A^2(2 + \alpha)}{B^2\beta} + \frac{2A(A - 1)}{B\sqrt{2\pi\beta}} \right], \quad (17)$$

где  $\beta = (1 + \alpha)(1 + 2\alpha)$

$$A = \begin{cases} 1/(1 + \delta_\tau), & \delta_\tau > 0; \\ 0, & \delta_\tau < 0; \end{cases} \quad B = q_0 \sqrt{\mu|\delta_\tau|} \begin{cases} 1/\sqrt{[2(1 + q_0)^2 + \delta_\tau][(1 + q_0)^2 + \delta_\tau]}, & \delta_\tau > 0; \\ [1/(1 + q_0)]\sqrt{(1 + \delta_\tau)/(2 + 3\delta_\tau)}, & \delta_\tau < 0. \end{cases}$$

С целью установления границ применимости найденных асимптотически точных формул для характеристик оценки  $q_q$  было выполнено статистическое моделирование квазиоптимального алгоритма (10) на ЭВМ. В процессе моделирования для заданных значений  $\tau^*$  из априорного интервала  $[T_1, T_2]$  на интервале  $[\Lambda_1, \Lambda_2]$  с шагом  $\Delta\lambda = 0,01\tau_0$  формировали отсчеты реализаций случайного процесса  $M(\lambda, \tau^*)$  (6). Для каждой реализации  $x(t)$  (4), согласно (10), определяли оценку  $q_q$  и находили ее характеристики.

Некоторые результаты статистического моделирования представлены на рис. 1-2, где показаны также соответствующие теоретические зависимости. Каждое экспериментальное значение получено в результате обработки не менее  $10^4$  реализаций  $x(t)$  при  $\Lambda_1 = -\tau_0 m/2$ ,  $\Lambda_2 = \tau_0 m/2$ ,  $\lambda_0 = (\Lambda_1 + \Lambda_2)/2$ . На рис. 1, 2 приведены теоретические зависимости рассеяния  $V(q_q|q_0)$ , рассчитанные по формулам (15), (16) при  $\delta_\tau = -0,1$  и  $\delta_\tau = 0,1$  соответственно, для  $m = 1$ ;  $\mu = 50$  (кривые 1),  $\mu = 100$  (кривые 2),  $\mu = 200$  (кривые 3). Экспериментальные значения рассеяния КПО  $q_q$  обозначены на рис. 1, 2 квадратиками, крестиками и ромбиками для  $\mu = 50$ , 100 и 200. На рис. 3, 4 приведены аналогичные теоретические и экспериментальные зависимости рассеяния  $V(q_q|q_0)$  для  $m = 20$ , рассчитанные по формулам (12), (16) при  $\delta_\tau = -0,1$  и  $\delta_\tau = 0,1$  соответственно. Обозначения такие же, как на рис. 1, 2.

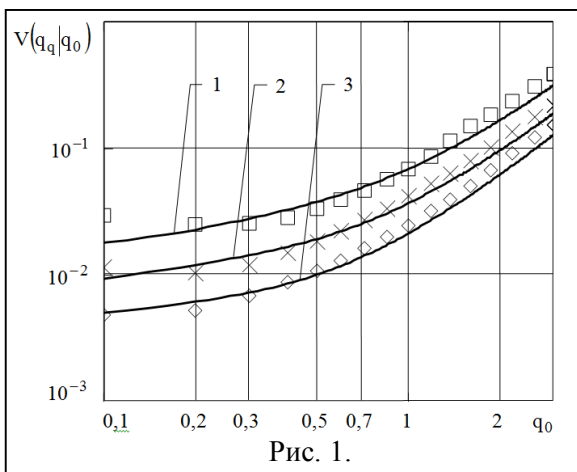


Рис. 1.

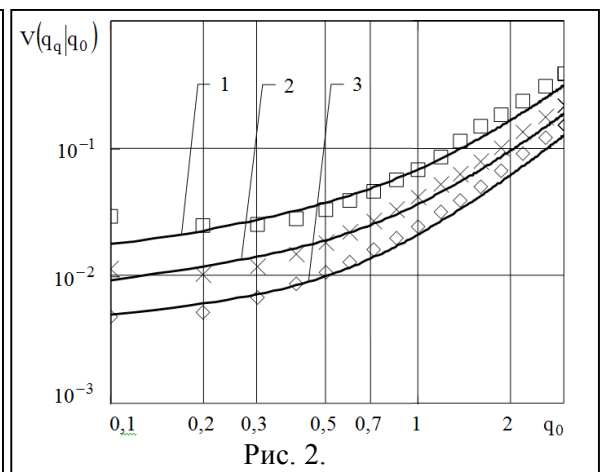


Рис. 2.

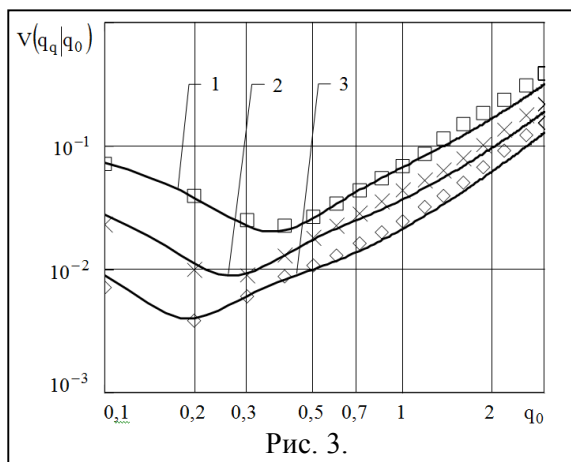


Рис. 3.

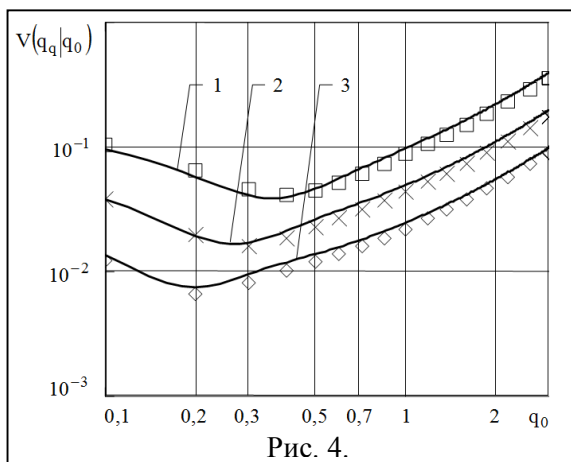


Рис. 4.

Как следует из рис. 1-4, теоретические зависимости для рассеяния  $V(q_q|q_0)$  (12), (16) удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные данные при  $\mu \geq 50$ . Теоретические зависимости для рассеяния  $V(q_q|q_0)$  (15), (16) отклоняются от экспериментальных значений при  $q_0 < 0,1 \dots 0,2$ , что соответствует значениям выходного ОСШ  $z < 1 \dots 1,2$ . При ОСШ  $z > 3 \dots 4$ , когда вероятность аномальных ошибок достаточно мала, теоретические и экспериментальные значения рассеяний  $V(q_q|q_0)$  (15), (16) и  $V(q_q|q_0)$  (12), (16), а также  $V(q_q|q_0)$  (17) практически совпадают.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Трифонов А.П., Захаров А.В. Прием сигнала с неизвестной временной задержкой при наличии модулирующей помехи // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 1986. – Т.29. – №4. – С 36-41.
2. Захаров А.В., Чернояров О.В. Совместная оценка временного положения импульса и величины спектра мощности его случайной субструктуры // Материалы IV-й Всероссийской конференции «Повышение эффективности средств обработки информации на базе математического и машинного моделирования». – Тамбов: ТВВАИУ, 1995. – С. 143-145.
3. Трифонов А.П., Захаров А.В., Чернояров О.В. Оценка дисперсии случайного импульса с неизвестным временем прихода // Радиотехника и электроника. – 1996. – Т. 41. – № 10. – С. 1207-1210.
4. Чернояров О.В. Статистический анализ случайных импульсных сигналов на фоне белой и коррелированной помех с неизвестными интенсивностями // Инфокоммуникационные системы и технологии: проблемы и перспективы. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. – 592 с. – С. 185-247.
5. Трифонов А.П., Нечаев Е.П., Парфенов В.И. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами. – Воронеж: ВГУ, 1991. – 246 с.
6. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. – М.: Радио и связь, 1986. – 264 с.