

Алексей Павлович Иванов,
кандидат физико-математических наук,
доцент, старший преподаватель
Сыктывкарского государственного
университета
имени Питирима Сорокина



Владимир Григорьевич Шавров,
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий лабораторией
магнитных явлений в микроэлектронике
Института радиотехники и электроники
имени В. А. Котельникова РАН



Владимир Игнатьевич Щеглов,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Института радиотехники и электроники
имени В. А. Котельникова РАН

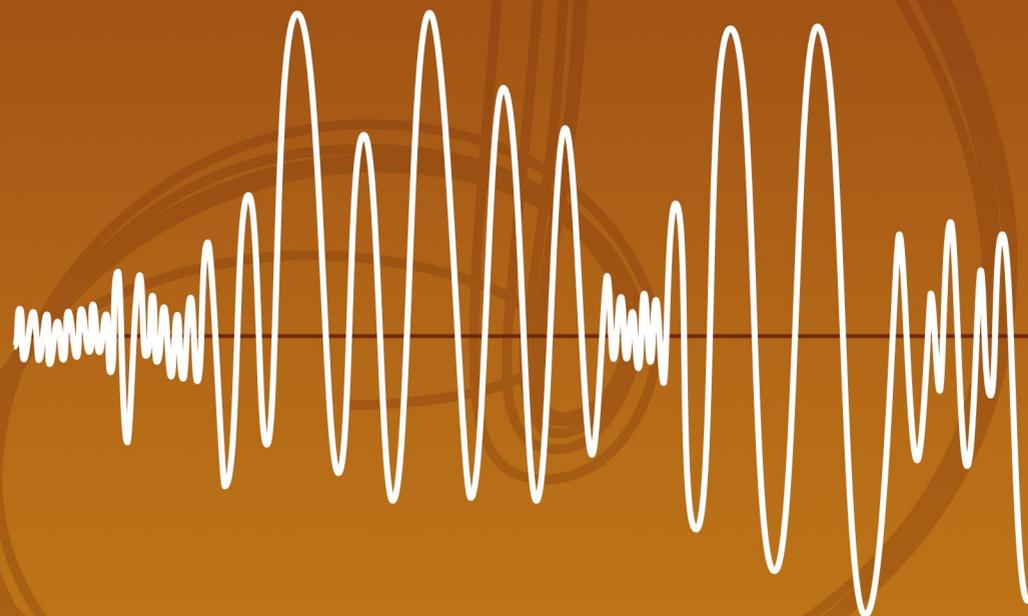


ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ



А. П. ИВАНОВ
В. Г. ШАВРОВ
В. И. ЩЕГЛОВ

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ



А. П. ИВАНОВ

В. Г. ШАВРОВ

В. И. ЩЕГЛОВ

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Рекомендовано Федеральным учебно-методическим объединением в системе высшего образования по укрупненной группе специальностей и направлений подготовки 03.00.00 «Физика и астрономия» в качестве учебного пособия для обучающихся по основам образовательных программ высшего образования по направлениям подготовки уровня магистратуры «Прикладные математика и физика» (03.04.01), «Физика» (03.04.02), «Радиофизика» (03.04.03), специалитета по специальности «Фундаментальная и прикладная физика» (03.05.02)



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2025

УДК 537.874; 537.624

ББК 22.33

Д 47

Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. **Динамический хаос в системе из двух связанных осцилляторов.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2025. — 488 с. — ISBN 978-5-9221-1998-6.

Монография посвящена изложению методов анализа нестационарных и хаотических явлений, имеющих место в системе из двух связанных осцилляторов. В качестве физической основы для рассмотрения приняты высокочастотные колебания магнестрикционного преобразователя и автомодуляционный характер шумовых колебаний в ферритовом диске, помещенном в электродинамический резонатор. Отмечены различные режимы автомодуляционных и хаотических колебаний, в том числе эффект нестационарного запаздывания, гигантские осцилляции и высокочастотные сопутствующие колебания. Для интерпретации наблюдаемых явлений введена модель динамического потенциала. Рассмотрены некоторые задачи прикладного характера. Приведено множество примеров, и даны методические рекомендации, предназначенные для самостоятельной работы учащихся.

Монография предназначена специалистам, работающим в области физики волновых процессов, электродинамики, магнитных явлений, акустики, инженерам и конструкторам СВЧ-, оптической и акустической аппаратуры, а также студентам и аспирантам соответствующих специальностей.

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор
А. К. Звездин (главный научный сотрудник ИОФ им. А.М. Прохорова РАН);
доктор физико-математических наук, профессор
В. Н. Прудников (физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова)

ISBN 978-5-9221-1998-6

© ФИЗМАТЛИТ, 2025
© А. П. Иванов, В. Г. Шавров,
В. И. Щеглов, 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	12
Глава 1. Основные задачи и модель потенциала	15
1.1. Основные задачи	15
1.1.1. Задача о возбуждении мощного гиперзвука	15
1.1.2. Задача о возбуждении шумовых электромагнитных колебаний	17
1.1.3. Обобщенная структура обеих задач	19
1.2. Модель обобщенного потенциала	20
1.3. Некоторые частные случаи общей системы уравнений	22
Выводы по главе 1	24
Глава 2. Анализ линейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов.	25
2.1. Задача возбуждения гиперзвуковых колебаний	25
2.2. Геометрия задачи и основные уравнения в линейном приближении	26
2.2.1. Уравнение для намагниченности	28
2.2.2. Уравнение для упругого смещения	28
2.3. Проверка применимости линейного приближения	29
2.4. Система уравнений для намагниченности и упругого смещения в обобщенном виде	30
2.4.1. Упрощение коэффициентов на основе численного анализа	31
2.5. Модель осцилляторов, связанных через производные	34
2.5.1. Численный анализ развития вынужденных колебаний	35
2.5.2. Аналитический критерий изменения характера колебаний	37
2.5.3. Комплексный показатель экспоненциального изменения амплитуды	38
2.5.4. Критерии для магнитоупругих колебаний	42
2.5.5. Критерии трех режимов на примере реальных материалов	43
2.6. Развитие во времени колебаний магнитной и модельной систем	45
2.7. Сравнение амплитуд колебаний магнитной и модельной систем при изменении константы магнитоупругого взаимодействия	47
Выводы по главе 2	49

Глава 3. Анализ нелинейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнестрикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов в квадратичном приближении	51
3.1. Задача возбуждения гиперзвуковых колебаний в условиях сильной нелинейности	51
3.2. Геометрия задачи и основные уравнения	52
3.2.1. Основные предположения и укороченные эффективные поля	53
3.3. Квадратичное приближение	54
3.3.1. Эффективные поля в квадратичном приближении	54
3.4. Уравнения для намагниченности первого порядка	55
3.4.1. Сведение двух уравнений первого порядка к одному уравнению второго порядка	57
3.4.2. Приближение круговой прецессии	58
3.5. Уравнение для упругого смещения	59
3.6. Возбуждение переменным полем	60
3.7. Система уравнений для вынужденных колебаний намагниченности и упругого смещения	61
3.8. Проверка корректности линейного и квадратичного приближений	63
3.9. Уравнения движения в обобщенных обозначениях	64
3.9.1. Обобщенные коэффициенты	65
3.9.2. Обобщенные коэффициенты, выраженные через исходные параметры задачи	66
3.9.3. Полное упругое смещение	67
3.9.4. Полный обобщенный вид связанной системы уравнений квадратичного приближения	68
3.9.5. Численная оценка различных слагаемых в системе связанных уравнений	68
3.10. Модель осцилляторов, связанных через производные	72
3.10.1. Численный анализ развития вынужденных колебаний	73
3.11. Аналитический критерий изменения характера колебаний	75
3.11.1. Аналитические критерии для магнитоупругих колебаний	79
3.11.2. Критерии трех режимов на примере реальных материалов	79
3.12. Развитие во времени колебаний по полной и модельной системам	81
3.13. Численный анализ ограничения амплитуды за счет кубической нелинейности	82
3.14. Амплитудно-частотные характеристики колебаний при квадратичном приближении	85
3.15. Автомодационные колебания	88
3.16. Оценка прикладных возможностей квадратичного приближения	89
Выводы по главе 3	90

Глава 4. Анализ автомодуляционных явлений в системе связанных магнитного и упругого осцилляторов на основе модели потенциала	93
4.1. Постановка задачи изучения гиперзвуковых автомодуляционных колебаний.	93
4.2. Геометрия гиромангнитного резонатора	94
4.3. Характер нелинейной связи для гиромангнитного резонатора	95
4.4. Модель связанных линейного и нелинейного осцилляторов.	98
4.4.1. Нелинейная связь между линейными осцилляторами	99
4.5. Основные режимы вынужденных колебаний.	102
4.5.1. Нелинейность первого осциллятора	103
4.5.2. Асинхронные колебания	105
4.6. Модель обобщенного потенциала	108
4.7. Применение модели потенциала к интерпретации характера колебаний	112
4.7.1. Модель расщепления синусоиды	116
Выводы по главе 4	117
Глава 5. Анализ автомодуляционных колебаний в магнитоупругой среде на основе модели связанных магнитного и упругого осцилляторов	120
5.1. Задача разработки обобщенного математического аппарата автомодуляционных колебаний.	120
5.2. Геометрия задачи и основные уравнения	121
5.3. Общая модель связанных осцилляторов.	123
5.4. Основные режимы автоколебаний.	124
5.4.1. Роль в формировании режимов отдельных слагаемых связанных уравнений	125
5.5. Полная система на основе потенциала.	127
5.5.1. Роль квадратичности связи первого осциллятора	129
5.5.2. Осциллятор с квадратичной нелинейностью. Свободные колебания	132
5.5.3. Осциллятор с квадратичной нелинейностью. Вынужденные колебания	134
5.5.4. Сравнение с уравнением Дуффинга	136
5.6. Модель фазовой задержки.	137
5.7. Модель двухамплитудных колебаний	139
5.7.1. Необходимые условия регулярного двухамплитудного режима	142
5.8. Модель стохастизации автоколебаний	143
5.8.1. Модель динамического фазового перехода	145
5.8.2. Критичность стохастического режима	148
Выводы по главе 5	149

Глава 6. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 1. Динамический потенциал	152
6.1. Постановка задачи о разнообразии режимов нелинейных колебаний в системе связанных осцилляторов	152
6.2. Геометрия задачи и основные уравнения	154
6.2.1. Оценка характерных параметров	155
6.3. Развитие колебаний во времени, нестационарное запаздывание	156
6.3.1. Особенности нестационарного запаздывания	159
6.3.2. Возможный механизм запаздывания	160
6.4. Динамический потенциал	161
6.5. Амплитуда возбуждения	162
6.6. Особенности колебаний до скачка амплитуды.	164
6.7. Параметр кубической нелинейности	166
6.8. К объяснению механизма запаздывания.	167
6.9. Подавление запаздывания	168
6.9.1. Схема механизма подавления	168
6.10. Амплитуда колебаний после запаздывания.	169
6.10.1. Интерпретация спада амплитуды на основе модели потенциала	171
Выводы по главе 6	173
Глава 7. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 2. Линейная связь	176
7.1. Постановка задачи о формировании колебаний в условиях линейной связи между осцилляторами	176
7.2. Геометрия задачи и уравнения движения для осцилляторов	178
7.3. Динамический потенциал	179
7.3.1. Сведение двухпотенциальной модели к однопотенциальной	180
7.4. Качественная картина колебаний в динамическом потенциале	182
7.4.1. Общий характер развития колебаний	182
7.5. Режимы колебаний при различных уровнях связи	183
7.5.1. Режим № 1. Двухступенчатое запаздывание	183
7.5.2. Режим № 2. Плавное насыщение	188
7.5.3. Режим № 3. Перемежающиеся скачки	191
7.5.4. Режим № 4. Малоамплитудная релаксация	193
7.6. Интерпретация развития колебаний на основе модели динамического потенциала	193
7.6.1. Смещение центрального положения	193
7.6.2. Падение амплитуды колебаний	196
7.7. Несимметричная связь между осцилляторами.	198
Выводы по главе 7	200

Глава 8. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 3. Нелинейная связь	203
8.1. Постановка задачи о роли нелинейной связи между осцилляторами	203
8.2. Геометрия задачи и уравнения движения	204
8.3. Динамический потенциал	205
8.4. Классификация режимов по интенсивности колебаний	206
8.4.1. Малоамплитудный режим слабой связи	207
8.4.2. Высокоамплитудный режим средней связи	208
8.4.3. Малоамплитудный режим сильной связи	210
8.5. Общий характер развития колебаний при низкой степени линейной связи	211
8.5.1. Динамические характеристики колебаний при низкой степени линейной связи	214
8.6. Интерпретация наблюдаемых явлений на основе модели потенциала	218
8.7. Развитие колебаний при средней степени линейной связи	222
8.7.1. Динамические характеристики колебаний при средней степени линейной связи	225
8.8. Развитие колебаний при высокой степени линейной связи	228
8.8.1. Задание начального смещения	228
8.8.2. Задание амплитуды возбуждения	232
8.9. Некоторые заключительные замечания	234
Выводы по главе 8	234
Глава 9. Нестационарное запаздывание установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Часть 1. Общие положения. Формирование упрощенной системы	239
9.1. Краткий обзор предшествующих работ по нелинейным колебаниям в системе двух связанных осцилляторов	240
9.2. Основные системы уравнений для связанных колебаний двух осцилляторов	242
9.3. Общий характер развития колебаний во времени	244
9.4. Основные задачи настоящей работы	245
9.5. Время запаздывания при изменении внешнего возбуждения и начального смещения	246
9.5.1. Интервал реализации запаздывания	250
9.5.2. Характер колебаний по обе стороны от интервала эффективного запаздывания	253
9.6. Различные начальные условия	256
9.7. Эквивалентность систем с внешним возбуждением и начальным смещением	257
9.8. Произвольное соотношение частот осцилляторов	260

9.9. Запаздывание при изменении начального смещения	263
9.9.1. Роль линейной связи в первом уравнении	265
9.9.2. Роль собственной частоты первого осциллятора	268
9.10. Сравнение с колебаниями полных систем.	271
9.11. Замечание о возможности дальнейшего упрощения системы . . .	273
Выводы по главе 9	273
Глава 10. Нестационарное запаздывание установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Часть 2. Воздействие осцилляторов друг на друга	278
10.1. Постановка задачи и основные системы уравнений	278
10.2. Сравнение колебательной и релаксационной систем.	281
10.2.1. Роль частотного слагаемого во втором уравнении	283
10.3. Роль потенциала в формировании характера колебаний	286
10.4. Движение осцилляторов в интервале первичного запаздывания . . .	290
10.5. Качественная картина развития смещений в области запаздывания	292
10.5.1. Влияние пошагового развития колебаний	293
10.6. Влияние основных параметров системы	294
10.6.1. Коэффициент линейной связи второго осциллятора	295
10.6.2. Параметр потенциальности	297
10.6.3. Параметр нелинейной связи	299
10.7. Замечание о возможном дальнейшем развитии работы	303
Выводы по главе 10	303
Глава 11. Нестационарное запаздывание установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Часть 3. Определяющее уравнение	308
11.1. Постановка задачи и основные системы уравнений	309
11.2. Определяющее уравнение и прыжковая функция.	311
11.2.1. Соотношение между временем запаздывания и периодом прыжковой функции	315
11.3. Спектральный состав высокоамплитудного хаоса.	316
11.4. Вариация параметров определяющего уравнения	317
11.4.1. Влияние начального смещения	318
11.4.2. Влияние амплитуды прыжковой функции	319
11.4.3. Изменение частоты прыжковой функции	320
11.5. Параметры собственных колебаний.	324
11.5.1. Влияние параметра инерционности	324
11.5.2. Влияние параметра потенциальности	327
11.5.3. Влияние фазы прыжковой функции	331
11.6. Некоторые замечания о возможном развитии работы	333
Выводы по главе 11	335

Глава 12. Нестационарное запаздывание установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Часть 4. Кольцевое взаимодействие	339
12.1. Постановка задачи и основные системы уравнений	339
12.1.1. Основные системы уравнений	340
12.2. Кольцевой характер обеих систем	342
12.2.1. Кольцевое воздействие осцилляторов друг на друга	343
12.2.2. Некоторые дополнительные особенности модели кольца	346
12.2.3. Некоторые ограничения модели кольца	347
12.3. Кольцо в системе Лоренца	348
12.3.1. Сравнение системы Лоренца с системой для двух осцилляторов	350
12.4. Возможные способы решения релаксационной системы уравнений для двух осцилляторов	353
12.4.1. Сведение релаксационной системы к единому уравнению	354
12.5. Кольцевой характер релаксационной системы	357
12.6. Обобщенные кольцевые функции	358
12.7. Пошаговый характер расчета отображения	360
12.7.1. Замечание о возможности вариации шага расчета	361
12.8. Кольцевые функции для синусоидальных колебаний	362
12.8.1. Кольцевые функции первого рода	365
12.8.2. Кольцевые функции второго рода	368
12.8.3. Влияние величины шага на развитие кольцевой функции во времени	371
12.9. Механизм запаздывания высокоамплитудных колебаний	371
12.9.1. Начало формирования режима запаздывания	372
12.9.2. Выход из режима запаздывания	374
12.9.3. Критерии выхода из режима запаздывания	376
12.9.4. Замечание об объективной точности полученных результатов	377
12.9.5. Замечание о механизме треугольных осцилляций	378
12.10. Некоторые замечания о возможном развитии работы	379
Выводы по главе 12	380
Глава 13. Вынужденные колебания в системе из двух связанных осцилляторов в условиях кубической нелинейности и квадратичной связи	386
13.1. Постановка задач и основные системы уравнений	386
13.1.1. Некоторые частные случаи общей системы уравнений	387
13.2. Разнообразие наблюдаемых видов колебаний	388
13.2.1. Замечание о симметрии системы	390
13.2.2. Параметры системы	390
13.3. Типичное многообразие колебаний	391
13.4. Классификация основных режимов колебаний	395
13.5. Модельная имитация формирования параметрического портрета	399

13.6. Уравнение с кубической нелинейностью	401
13.7. Области формирования хаотического режима при различных уровнях возбуждения	404
13.7.1. Критерий формирования квазихаотического режима	407
13.7.2. Особенности колебаний в широком интервале уровня возбуждения	408
13.7.3. Спектральные характеристики при изменении уровня возбуждения	409
13.7.4. Амплитуда колебаний при различных уровнях возбуждения	411
13.8. Иллюстрация влияния кубической нелинейности	412
13.9. Относительное расположение зависимостей для обоих осцилляторов	415
Выводы по главе 13	416
Глава 14. Нестационарные колебания в системе из двух связанных осцилляторов в условиях кубической нелинейности и кубической связи. Часть 1. Мультирежимный характер колебаний	419
14.1. Система уравнений с кубической связью	420
14.1.1. Параметры задачи	420
14.2. Режимы колебаний связанной системы	421
14.2.1. Режим № 1 — синхронизм	421
14.2.2. Режим № 2 — утроение частоты	423
14.2.3. Режим № 3 — хаос	426
14.2.4. Режим № 4 — гигантские осцилляции	430
14.2.5. Режим № 5 — задержанная стабилизация	434
14.2.6. Общие замечания о характере режимов	436
14.3. Высокочастотные осцилляции	439
14.3.1. Модельная иллюстрация роли сопутствующих колебаний	441
14.3.2. Замечание об аналогии с нелинейным ферромагнитным резонансом	443
14.4. Замечание о возможности других режимов	444
Выводы по главе 14	444
Глава 15. Нестационарные колебания в системе из двух связанных осцилляторов в условиях кубической нелинейности и кубической связи. Часть 2. Вариация параметров системы	449
15.1. Система уравнений и основные режимы колебаний	450
15.1.1. Параметры задачи	450
15.1.2. Основные режимы колебаний	450
15.2. Пороговый характер возбуждения нестабильных нелинейных колебаний	453
15.2.1. Зависимость порога от частоты возбуждения	457
15.3. Вариация диссипации осцилляторов	458
15.4. Вариация собственных частот осцилляторов	461

15.5. Вариация нелинейности первого осциллятора	464
15.6. Вариация связи между осцилляторами	466
15.7. Динамический потенциал	470
15.8. Кольцевое возбуждение.	472
15.8.1. Влияние параметров системы	472
15.9. Некоторые дополнительные особенности	473
Выводы по главе 15	474
Литература	478

Введение

Исследование нелинейной динамики различных явлений и процессов занимает одно из ведущих место в современной физике [1–7]. Значительное многообразие проявляют в этом плане магнитные явления типа ферромагнитного резонанса и распространяющихся в магнитных средах магнитоэлектронных волн. Так, воздействие сильного однородного электромагнитного поля СВЧ-диапазона приводит к параметрическому возбуждению крайне неоднородных обменных спиновых волн, проявляющих автомодуляционные и хаотические свойства [8, 9]. Спектр возбуждений колебательной системы типа ферритового диска, помещенного в электродинамический резонатор, имеет ярко выраженный шумовой характер [10, 11]. Распространение пучка магнитоэлектронных волн в ферритовой пленке внутри волноведущего канала, образованного периодически модулированным полем типа «вала», происходит полностью стохастическим образом [12].

Значительное разнообразие вносит взаимодействие магнитных колебаний с возбуждениями другого вида, в первую очередь с упругими [13]. Так, упругая накачка может вызвать такое же параметрическое возбуждение обменных спиновых волн, что и электромагнитная [8, стр. 108], а превышение порогового уровня электромагнитной накачки приводит к параметрическому возбуждению упругих резонансных колебаний на частотах, на три порядка более низких, чем частота возбуждения [8, стр. 240], [14]. Нелинейный ферромагнитный резонанс сопровождается комбинационным рассеянием спиновых волн на упругих, в том числе вынужденных — так называемым «спиновым эффектом Мандельштама–Бриллюэна» [8, стр. 223], [15].

Значительное число нелинейных явлений в магнитных и магнитоупругих средах может быть интерпретировано на основе упрощенной модели двух связанных осцилляторов — магнитного и упругого. Прежде всего такая модель была предложена для описания нелинейного возбуждения мощных гиперзвуковых колебаний в нормально намагниченной ферритовой пластине [16–20]. Значительное развитие первоначальной модели было выполнено в рамках квадратичного приближения, позволившего привязать ее параметры к характеристикам реальных материалов [21–24]. Были выявлены различные режимы возбуждения, в том числе имеющие автомодуляционный и хаотический характер. Для интерпретации полученных результатов была предложена модель динамического потенциала, позволившая связать характеристики наблюдаемых режимов с потенциальной энергией системы [25–30]. Однако, несмотря на значительные успехи модели потенциала, характер пере-

хода между режимами, а также роль механизма степенной нелинейности и показателя степени связи в достаточной мере не были выявлены.

Настоящая работа посвящена рассмотрению именно таких механизмов и определению необходимых предпосылок для их реализации. Основное внимание будет уделено колебаниям регулярного и хаотического характера в различных условиях.

В работе частично использованы материалы статей [18–37], а также монографии [38]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

В значительной части монография представляет собой развернутую компиляцию из упомянутых статей авторов, поэтому в большинстве случаев сохранен стиль, последовательность изложения и многие рисунки. Статьи публиковались в разное время в соответствии с хронологическими интересами авторов. По этой причине порядок и очередность изложения материала, в том числе хронологическая последовательность выхода публикаций, не являются оптимальными. Поэтому в настоящей монографии порядок изложения будет диктоваться не хронологическими рамками, а логикой и последовательностью развития самого материала.

Настоящее издание содержит пятнадцать глав.

Первая глава является вводной и посвящена описанию основных задач, для решения которых используется далее модель связанных осцилляторов. Приведена схема введения обобщенного потенциала и приведены основные уравнения, лежащие в основе дальнейшего изложения.

Главы вторая и третья посвящены сведению реальных задач к задаче о колебаниях связанных осцилляторов, выполняемому на основе линейного и квадратичного приближений.

В четвертой и пятой главах рассматриваются различные виды автоколебаний в рассматриваемой системе на основе модели обобщенного потенциала.

Главы с шестой по восьмую посвящены исследованию явления нестационарного запаздывания возбуждения колебаний на основе модели динамического потенциала в случае линейной и нелинейной связей.

Главы с девятой по двенадцатую посвящены более подробному исследованию нестационарного запаздывания, в первую очередь выделения из полной системы «ядра», ответственного за такое запаздывание, введению понятия кольцевого взаимодействия и рассмотрению колебаний на основе модели логистического отображения.

Главы с тринадцатой по пятнадцатую посвящены исследованию системы уравнений в более сложном виде, в том числе при включении кубической нелинейности, квадратичной и кубической связей. Обнаружены и исследованы ряд новых режимов нестационарных колебаний, в том числе гигантские осцилляции и высокочастотные сопутствующие колебания.

В большинстве глав приведены вопросы и рекомендации, касающиеся дальнейшего развития работы.

Определенный опыт работы авторов со студентами и начинающими исследователями показывает, что при первоначальном ознакомлении с предметом заметные трудности вызывает освоение математического аппарата, значительная часть которого рассеяна в статьях, не всегда легко стыкующихся друг с другом. С целью преодоления подобного положения основные используемые в монографии методы расчета рассматриваются в соответствующих главах с достаточной степенью подробности. Решены некоторые задачи прикладного характера. Приведено множество примеров и даны методические рекомендации, предназначенные для самостоятельной работы учащихся. Для удобства пользования монография снабжена подробным оглавлением и в конце каждой главы приведены краткие выводы.

В работах, предшествовавших написанию настоящей монографии, в первую очередь [18–38], кроме основных авторов, принимали участие многочисленные соавторы. Важнейшую роль сыграло создание благоприятной атмосферы, способствующей успешному выполнению исследований. Прежде всего следует отметить коллектив кафедры радиопизики Сыктывкарского государственного университета, возглавляемой Л.Н. Котовым.

Важную роль в обсуждении работы на всех ее этапах играли многочисленные дискуссии с В.С. Власовым, Д.С. Плешевым, П.А. Макаровым, Ф.Ф. Асадуллиним.

Другой организацией, где проводились исследования, являлся Институт радиотехники и электроники РАН, в частности лаборатория магнитных исследований, возглавляемая одним из соавторов настоящей монографии В.Г. Шавровым.

В публикациях в «Журнале радиотехники и электроники РАН» важнейшая роль принадлежала заведующему редакции А.О. Раевскому и редактору И.М. Столяровой.

За весьма оперативные многочисленные публикации в электронном «Журнале радиоэлектроники» авторы считают приятнейшим долгом поблагодарить заведующего редакцией В.А. Черепенина и главного редактора Е.В. Корженевскую, а также ученого секретаря редакции Д.Д. Кузнецова и технического секретаря М.С. Быбик.

Важнейшая роль в создании благоприятных условий для работы, постоянное к ней внимание и неоднократное оказание административной и научной помощи принадлежит академику РАН Ю.В. Гуляеву.

Непосредственное выполнение работы, в том числе написание настоящей монографии, оказалось возможным благодаря помощи академика РАН С.А. Никитова.

Практически все работы были выполнены с деятельным участием многочисленного технического персонала, без помощи которого выполнение приведенного труда было бы совершенно невозможным.

Всем перечисленным участникам и соавторам работ авторы выражают огромную признательность, отдают низкий поклон и приносят глубочайшую благодарность. Величайшее спасибо вам, дорогие соратники, друзья и помощники!

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ И МОДЕЛЬ ПОТЕНЦИАЛА

В настоящей главе приведены две основные задачи, постановка которых приводит к рассмотрению нелинейных колебаний системы из двух связанных осцилляторов. Приведены примеры подобных систем и кратко рассмотрена модель обобщенного потенциала. Глава является вводной к основному содержанию монографии и призвана отметить основные наиболее общие положения.

Основное изложение материала в данной главе следует работам [10, 16, 17, 25, 35]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

1.1. Основные задачи

Основным предметом исследования в настоящей работе являются автоколебания, в первую очередь хаотического типа, которые могут иметь место в возбуждаемой внешней периодической силой системе из двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным. Рассмотрение проводится на основе системы из двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка, то есть колебательного типа, одно из которых содержит члены, характеризующие нелинейность.

Поэтому сначала приведем два примера задач, приводящих к такой системе. Первая и наиболее разработанная — задача о возбуждении мощного гиперзвука [16]. Вторая — задача о возбуждении широкого спектра электромагнитных колебаний шумового характера [10, 17].

1.1.1. Задача о возбуждении мощного гиперзвука

Геометрия задачи о возбуждении мощного гиперзвука, совпадающая с принятой в [16], показана на рис. 1.1. В ее основе лежит плоскопараллельная пластина толщины d , обладающая магнитными, упругими и магнитоупругими свойствами.

Внешнее постоянное магнитное поле \mathbf{H}_0 приложено перпендикулярно плоскости пластины, переменное магнитное поле \mathbf{h} действует в плоскости пластины. Задача решается в декартовой системе координат $Oxyz$, плоскость Oxy которой совпадает с плоскостью пластины, а оси Ox , Oy и Oz параллельны ребрам куба кристаллографической ячейки. Центр системы координат O находится в центре пластины, так что ее плоскости соответствуют координатам $z = \pm d/2$.

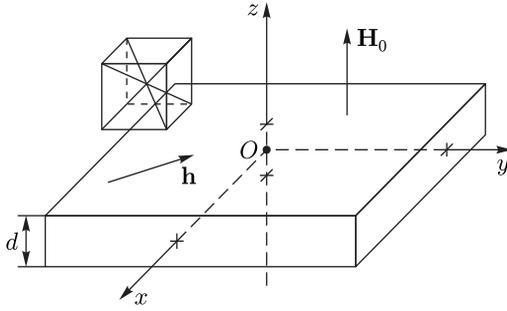


Рис. 1.1. Геометрия задачи о возбуждении мощного гиперзвука. Слева — схема кристаллографической ячейки

Основная система уравнений движения для нормированных компонент намагниченности $m_{x,y,z}$, впервые приведенная в [16] и неоднократно рассматривавшаяся в последующих работах, имеет вид

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \cdot [(m_y + \alpha m_x m_z) \cdot H_{ez} - (m_z - \alpha m_y m_x) \cdot H_{ey} - \alpha \cdot (m_y^2 + m_z^2) \cdot H_{ex}], \quad (1.1)$$

где уравнения для m_y и m_z получаются циклической перестановкой x, y, z .

Входящие в эти уравнения эффективные поля имеют вид

$$H_{ex} = h_x + H_{ax}; \quad (1.2)$$

$$H_{ey} = h_y + H_{ay}; \quad (1.3)$$

$$H_{ez} = H_0 - 4\pi M_0 m_z + H_{az}, \quad (1.4)$$

где

$$H_{ax} = -\frac{B_2}{M_0} \left[m_y \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + m_z \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right], \quad (1.5)$$

где B_2 — константа магнитоупругого взаимодействия, обеспечивающего связь между магнитной и упругой системами. При этом поля H_{ay} и H_{az} получаются из (1.5) циклической перестановкой x, y, z .

Уравнения для компонент упругого смещения $u_{x,y}$ имеют вид

$$\frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial t^2} = -2\beta \frac{\partial u_{x,y}}{\partial t} + \frac{c_{44}}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial z^2}, \quad (1.6)$$

граничные условия

$$c_{44} \frac{\partial u_{x,y}}{\partial z} \Big|_{z=\pm d/2} = -B_2 m_{x,y} m_z. \quad (1.7)$$

В уравнении (1.1) α — параметр затухания Гильберта, в уравнении (1.6) β — параметр затухания упругих колебаний, c_{44} — модуль упругости, ρ — плотность магнитной пластины.

Можно видеть, что уравнение для упругого смещения (1.6) константы B_2 не содержит, однако связь между магнитной и упругой системами осуществляется за счет граничных условий (1.7).

1.1.2. Задача о возбуждении шумовых электромагнитных колебаний

Геометрия задачи о возбуждении электромагнитных шумовых колебаний [10, 17] показана на рис. 1.2.

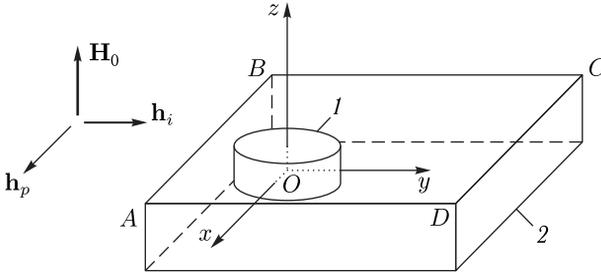


Рис. 1.2. Геометрия задачи о возбуждении шумовых колебаний [11]: 1 — ферритовый диск, 2 — резонатор

Основой задачи является ферритовый диск 1, помещенный в прямоугольный электродинамический резонатор 2. Плоскость Oxy системы координат $Oxyz$ параллельна плоскости диска, ось Oz этой плоскости перпендикулярна. Начало системы координат O совпадает с геометрическим центром диска. Толщина диска — d , радиус — r . Диск намагничен постоянным полем \mathbf{H}_0 , перпендикулярным его плоскости, то есть вдоль оси Oz .

На диск действует переменное поле \mathbf{h}_i , параллельное оси Oy . Это поле создается проволочным витком, плоскость которого параллельна Oxz (на рисунке виток не показан во избежание усложнения картины). Провод от витка выходит наружу резонатора и подключается к генератору СВЧ электрических колебаний.

Резонатор выполнен в геометрии параллелепипеда. Широкая стенка параллелепипеда $ABCD$ параллельна плоскости диска, то есть координатной плоскости Oxy . Боковые стенки резонатора параллельны плоскостям Oxz и Oyz . Размеры резонатора обозначены далее следующим образом: вдоль оси Ox — a , вдоль Oy — b , вдоль Oz — c . Эти размеры таковы, чтобы они соответствовали возбуждению первой моды типа H_{101} ([39, стр. 281–284, рис. 9.5] или [40, стр. 307, рис. 8.6, a]). В этом случае электрическое поле параллельно оси Oz и сосредоточено в центре резонатора, а силовые линии магнитного поля лежат в плоскости Oxy и охватывают силовые линии электрического поля, прижимаясь к боковым стенкам резонатора.

Диск располагается внутри резонатора около его боковой стенки AB . В этом месте магнитное поле резонатора \mathbf{h}_p направлено вдоль

оси Ox , то есть действует перпендикулярно внешнему относительно диска переменному полю \mathbf{h}_i . Задача решается в приближениях $d \ll r$, а также $r, d \ll a, b, c$. Возбуждение системы в целом происходит за счет магнитного поля \mathbf{h}_i , создаваемого проволочный витком, упомянутым выше. Прецессия намагниченности возбуждается суммарным полем витка \mathbf{h}_i и резонатора \mathbf{h}_p . Колебания в резонаторе возбуждаются магнитным полем, которое создает переменная намагниченность диска в месте его расположения. Граничные условия на боковых стенках резонатора остаются такими же, как в отсутствие феррита (равенство нулю производной от магнитного поля по координатам x, y [40, стр. 224, форм. (7.11)]. Магнитные потери в феррите учитываются в форме Ландау–Лифшица–Гильберта с помощью постоянного параметра α [41–44]. Потери в резонаторе учитываются путем добавки в волновое уравнение для поля резонатора первой производной от поля по времени с постоянным коэффициентом β .

В приведенной постановке уравнения для компонент намагниченности имеют вид

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1 + \alpha^2} [(m_y + \alpha m_x m_z) H_{ez} - (m_z - \alpha m_y m_x) H_{ey} - \alpha(m_y^2 + m_z^2) H_{ex}], \quad (1.8)$$

а уравнения для m_y и m_z получаются циклической перестановкой x, y, z .

Входящие в эти уравнения эффективные поля имеют вид

$$H_{ex} = H_{px} + H_{mx}; \quad (1.9)$$

$$H_{ey} = H_{iy} + H_{my}; \quad (1.10)$$

$$H_{ez} = H_0 - 4\pi M_0 m_z, \quad (1.11)$$

где

$$H_{px} = h_p; \quad (1.12)$$

$$H_{iy} = h_i; \quad (1.13)$$

$$H_{mx,y} = \frac{2\pi^4 r^2 d}{abc} M_0 m_{x,y}. \quad (1.14)$$

Уравнение для поля резонатора H_{px} имеет вид

$$\frac{\partial^2 H_{px}}{\partial t^2} + 2\beta c^2 \frac{\partial H_{px}}{\partial t} + \frac{\pi^2 c^2 (a^2 + b^2)}{a^2 b^2} H_{px} = -\frac{\partial^2 H_{mx}}{\partial t^2}, \quad (1.15)$$

где правая часть имеет вид

$$\frac{\partial^2 H_{mx}}{\partial t^2} = -\frac{\gamma M_0 (H_0 - 4\pi M_0)}{(1 + \alpha^2)} \cdot \frac{2\pi^4 r^2 d}{abc} \left(\frac{\partial m_y}{\partial t} + \alpha \frac{\partial m_x}{\partial t} \right). \quad (1.16)$$

1.1.3. Обобщенная структура обеих задач

Из сравнения системы (1.1)–(1.7) для первой задачи с системой (1.8)–(1.16) для второй можно видеть, что магнитные колебания в обоих случаях описываются одними и теми же уравнениями (1.1) и (1.7).

Упругие колебания $u_{x,y}$ в первой задаче описываются волновым уравнением (1.6) с граничными условиями (1.7). Решение этого уравнения методом разделения переменных [45] с выделением координатной части, приводит к уравнению второго порядка по координате. Это уравнение имеет колебательный характер, а учет граничных условий на поверхности ферритовой пластины дает решение синусоидального типа. При этом связь между магнитными и упругими колебаниями осуществляется через граничные условия.

Колебания поля резонатора H_{px} во второй задаче описываются уравнением (1.15) с учетом (1.16), которое также имеет колебательный характер, так что имеет решение синусоидального типа. Граничные условия для этого поля на поверхности феррита не нужны, так как они уже учтены на боковых стенках резонатора. Связь между магнитными колебаниями и полем резонатора осуществляется через вторую производную от поля H_{mx} , определяемую выражением (1.16). Это выражение является как бы возбуждающей силой для поля резонатора H_{px} , определяемого основной частью уравнения (1.15).

Таким образом, можно видеть, что в обеих задачах имеются два связанных осциллятора — магнитный и упругий или магнитный и полевой. В обоих случаях нелинейность имеет место только для первого осциллятора — магнитного, тогда как второй, упругий или полевой, являются линейными. Характер связи в обоих случаях определяется поперечными компонентами намагниченности $m_{x,y}$, присутствующими в первой степени, то есть на этом уровне связь является линейной. Магнитная система в обоих случаях содержит три уравнения первого порядка, в общем случае к уравнению третьего порядка для одной из переменных не сводимого.

Подробное решение той и другой задач в их полном виде показывает, что обе они допускают решение автоколебательного и шумового типа (подробные ссылки даны во введении). Однако поставленные так задачи являются достаточно сложными, требуют значительного объема машинной памяти и занимают большое машинное время.

В работах [21–24] показано, что введение для намагниченности квадратичного приближения позволяет свести полную задачу к системе двух уравнения второго порядка, имеющих весьма простую структуру. При этом требование машинных ресурсов уменьшается в два раза, а машинное время сокращается на два порядка.

Первое уравнение в такой системе, соответствующее колебаниям намагниченности, является нелинейным, а второе, соответствующее упругому смещению или полю резонатора, остается линейным. Связь между

обоими уравнениями, кроме линейных членов, присутствующих в обоих уравнениях, осложняется наличием нелинейных слагаемых степенного характера в уравнении для первого (магнитного) осциллятора.

Большинство нелинейных явлений, наблюдаемых при решении первой задачи в полном ее виде, в упрощенной системе сохраняется с высокой степенью точности [21–24]. Существование автомодуляционных и хаотических колебаний в обоих случаях также сохраняется.

Таким образом, можно считать, что упрощенная система представляет собой обобщенную модель обеих рассматриваемых задач, выявляющую их свойства с достаточной степенью достоверности.

С другой стороны, исследование такой обобщенной системы является значительно более простым, чем любой из полных, а также позволяет сравнительно простыми средствами выявить физическую картину наблюдаемых явлений и интерпретировать их на модельном уровне.

Поэтому дальнейшее рассмотрение в настоящей работе посвящено именно обобщенной системе, в первую очередь со стороны исследования автомодуляционных явления и процессов шумового характера.

1.2. Модель обобщенного потенциала

В работе [25] в качестве инструмента для анализа колебаний системы из двух связанных осцилляторов предложена модель обобщенного потенциала. Отмечено, что эта модель позволяет выявить основные свойства автоколебаний магнитоупругой и магнито-электродинамической систем, такие как пороговый характер, роль параметров затухания и нелинейности осцилляторов и связи, переход к стохастическому режиму при большом уровне возбуждения. Приведем вкратце основные положения этой модели.

Будем полагать, что система уравнений движения для осцилляторов имеет вид [25]

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial U_S}{\partial x_1} = A \cdot \cos(\omega t); \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial U_S}{\partial x_2} = 0, \quad (1.18)$$

где $U_S(x_1, x_2)$ — обобщенный потенциал системы в целом, а третьи слагаемые левой части представляют собой обобщенные силы (знак для удобства учтен заранее).

В простейшем варианте предполагается, что связь между осцилляторами осуществляется только за счет самих переменных x_1 и x_2 , а возможная связь за счет их производных, например рассмотренная в [21], не учитывается. Такое предположение будем считать допустимым на основании того, что вызываемый производными возможный

уход на бесконечность компенсируется слагаемыми потенциала четных степеней самой переменной [25].

В рамках ограничения степень входящих в потенциал переменных не выше четвертой, обобщенный потенциал принимает вид

$$U_S = U_S^{(1)} + U_S^{(2)} + U_S^{(3)} + U_S^{(4)}, \quad (1.19)$$

где

$$U_S^{(1)} = \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2; \quad (1.20)$$

$$U_S^{(2)} = \zeta_1 x_1^2 + \zeta_2 x_1 x_2 + \zeta_3 x_2^2; \quad (1.21)$$

$$U_S^{(3)} = \xi_1 x_1^3 + \xi_2 x_1^2 x_2 + \xi_3 x_1 x_2^2 + \xi_4 x_2^3; \quad (1.22)$$

$$U_S^{(4)} = \eta_1 x_1^4 + \eta_2 x_1^3 x_2 + \eta_3 x_1^2 x_2^2 + \eta_4 x_1 x_2^3 + \eta_5 x_2^4. \quad (1.23)$$

Из этих выражений обобщенные силы получаются путем дифференцирования по переменным $x_{1,2}$.

Первое выражение (1.20) дает статическую постоянную силу, которая на колебаниях никак не сказывается, так что $\psi_{1,2} = 0$, то есть заведомо можно положить $U_S^{(1)} = 0$.

Второе выражение (1.21) дает в уравнениях линейные слагаемые, пропорциональные $x_{1,2}$, то есть собственные частоты осцилляторов $\omega_{1,2}$ в линейном приближении, а также линейные связи между ними.

Третье выражение (1.22) через слагаемые с ξ_1 и ξ_4 дает параметры квадратичной нелинейности для обоих осцилляторов. Такая нелинейность, вследствие своей нечетности, при отрицательном значении переменной может вызвать уход системы на бесконечность. Другие два слагаемых с ξ_2 и ξ_3 обеспечивают нелинейную связь между осцилляторами низшего порядка, которая в силу своей нечетности также может привести к расходимости.

Четвертое выражение (1.23) через слагаемые с η_1 и η_5 дает параметры кубической нелинейности для каждого из осцилляторов. Потенциал в этом случае является четным, что уход на бесконечность полностью исключает. При достаточной величине констант η_1 и η_5 такая четность четвертого порядка может компенсировать нечетность более низких порядков, в частности третьего, то есть предотвратить обеспечивающий низшими порядками уход на бесконечность. Остальные слагаемые выражения (1.23) дают различные виды нелинейной связи между осцилляторами, такие как $x_1^2 x_2$ и $x_1 x_2^2$. Кроме того, они дают кубические виды связи для первого уравнения вида x_2^3 и для второго вида x_1^3 .

Дифференцируя выражения (1.19)–(1.23), получаем обобщенные силы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_S}{\partial x_1} = & 2\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + 3\xi_1 x_1^2 + 2\xi_2 x_1 x_2 + \xi_3 x_2^2 + \\ & + 4\eta_1 x_1^3 + 3\eta_2 x_1^2 x_2 + 2\eta_3 x_1 x_2^2 + \eta_4 x_2^3; \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial U_S}{\partial x_2} = \zeta_2 x_1 + 2\zeta_3 x_2 + \xi_2 x_1^2 + 2\xi_3 x_1 x_2 + 3\xi_4 x_2^2 + \eta_2 x_1^3 + 2\eta_2 x_1^2 x_2 + 3\eta_4 x_1 x_2^2 + 4\eta_5 x_2^3. \quad (1.25)$$

Соответственно уравнения (1.17) и (1.18) принимают вид:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + 2\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + 3\xi_1 x_1^2 + 2\xi_2 x_1 x_2 + \xi_3 x_2^2 + 4\eta_1 x_1^3 + 3\eta_2 x_1^2 x_2 + 2\eta_3 x_1 x_2^2 + \eta_4 x_2^3 = A \cdot \cos(\omega t); \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + \zeta_2 x_1 + 2\zeta_3 x_2 + \xi_2 x_1^2 + 2\xi_3 x_1 x_2 + 3\xi_4 x_2^2 + \eta_2 x_1^3 + 2\eta_2 x_1^2 x_2 + 3\eta_4 x_1 x_2^2 + 4\eta_5 x_2^3 = 0. \quad (1.27)$$

1.3. Некоторые частные случаи общей системы уравнений

Уравнения (1.26)–(1.27) содержат все возможные варианты степеней и произведений переменных до третьего порядка. Некоторые частные случаи таких систем приведены в работах [17–20] и [21–24]. Все эти работы относятся к задаче о связанных магнитном и упругом осцилляторах.

В первой группе работ [17–20] приближение выполнено путем анализа последовательных преобразований системы полных семи уравнений первого порядка для намагниченности и упругого смещения в систему из двух уравнений второго порядка, соответствующей рассматриваемой системе из двух осцилляторов. Анализ выполнен путем оценки пропорциональности и сравнительного вклада отдельных слагаемых полных уравнений в укороченные. В результате получена система из двух уравнений следующего вида:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \delta_1 x_1^3 + \gamma_1 \cdot x_2^2 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (1.28)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (1.29)$$

Здесь $x_{1,2}$, $\beta_{1,2}$, $\omega_{1,2}$ — координатные переменные, параметры затухания и собственные частоты осцилляторов, δ_1 — параметр нелинейности первого осциллятора, $\gamma_{1,2}$ — коэффициенты связи, A_0 и ω_0 — амплитуда и частота возбуждающей силы.

Замечание. В общем случае собственные частоты осцилляторов $\omega_{1,2}$ могут быть как действительными, так и мнимыми, что соответствует периодическим колебаниям или экспоненциальному изменению переменных $x_{1,2}$. При этом знак коэффициента при третьем слагаемом $\omega_{1,2}^2$ может быть положительным или отрицательным, что определяется условиями конкретной задачи. Все остальные параметры будем полагать действительными без каких-либо ограничений по знакам.

В системе (1.28)–(1.29) первое уравнение содержит нелинейное слагаемое третьей степени. Связь его со вторым осуществляется также нелинейным слагаемым второй степени. Второе же уравнение и связь его с первым являются чисто линейными.

Во второй группе работ [21–24] выполнено упрощение исходной системы с использованием для намагниченности квадратичного приближения:

$$m_z = 1 - \frac{1}{2}(m_x^2 + m_y^2). \quad (1.30)$$

Получаемая при этом система имеет вид [26, форм. (46), (47)]:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + a_{12} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + a_{13} \cdot x_1 + a_{14} \cdot x_2 + \\ + d_{11}x_1^2 + d_{12}x_1x_2 + d_{13}x_2^2 + \\ + b_{11} \cdot x_1^3 + b_{12} \cdot x_1^2x_2 + b_{13} \cdot x_1x_2^2 + b_{14} \cdot x_2^3 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} a_{21} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + a_{22} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + a_{23} \cdot x_2 + a_{24} \cdot x_1 + \\ + d_{21}x_1^2 + d_{22}x_1x_2 + d_{23}x_2^2 + \\ + b_{21} \cdot x_1^3 + b_{22} \cdot x_1^2x_2 + b_{23} \cdot x_1x_2^2 + b_{24} \cdot x_2^3 = 0, \end{aligned} \quad (1.32)$$

где коэффициенты a_{ik} , b_{ik} , d_{ik} определяются параметрами материала пластины. Здесь оба уравнения являются нелинейными до третьей степени и связь также является нелинейной до той же степени. Система как целое является симметричной, то есть замена индексов «1» на «2» и обратно структуры левых частей уравнений не меняет. Возбуждение остается несимметричным, что однако принципиальным не является, так что второе уравнение также может быть дополнено подобным слагаемым.

Можно видеть, что эта система с точностью до обозначений совпадает с приведенной выше системой (1.26)–(1.27). В то же время система (1.28)–(1.29) является частным случаем как системы (1.29)–(1.32), так и приведенной выше системы (1.26)–(1.27).

Следует заметить, что в работе [26] относительно системы (1.31)–(1.32) приведены явные выражения через параметры материала только для коэффициентов a_{ik} , b_{ik} , а коэффициенты d_{ik} и b_{14} , b_{24} введены для полноты картины, исходя из соображений симметрии. Ограничение только коэффициентами a_{ik} , b_{ik} происходит из-за того, что в основе работы [26] лежит квадратичное приближение вида (1.30), при использовании которого слагаемые с коэффициентами d_{ik} и b_{14} , b_{24} равняются нулю. Однако можно полагать, что использование приближений более высоких порядков, например четвертого,

$$m_z = 1 - \frac{1}{2}(m_x^2 + m_y^2) - \frac{1}{8}(m_x^4 + m_y^4), \quad (1.33)$$

или учет потенциалов, имеющих порядок выше четвертого, приведет к появлению подобных слагаемых. К дополнительному разнообразию может привести, например, учет анизотропии магнитной пластины или вообще принципиально другие физические задачи, поэтому математическое рассмотрение полной системы (1.31)–(1.32) вполне заслуживает внимания.

В рамках настоящей главы ограничимся лишь рассмотрением наиболее простой системы (1.28)–(1.29), способной проявлять хаотическое поведение, а изучение системы (1.31)–(1.32) оставим в качестве предмета для отдельного исследования.

Выводы по главе 1

Приведены два примера задач, приводящих к системе уравнений (1.28), (1.29). Первая — задача о возбуждении мощного гиперзвука в ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. Вторая — задача о возбуждении широкого спектра электромагнитных колебаний шумового характера в ферритовом диске, помещенном в электродинамический резонатор. Для обеих задач приведены основные уравнения и показано, как обе полученные системы сводятся к одной и той же рассматриваемой здесь упрощенной системе уравнений для двух связанных осцилляторов. Отмечено, что большинство нелинейных явлений, наблюдаемых при решении обеих задач в их полном виде, в упрощенной системе сохраняются с высокой степенью точности. Для обоих случаев особо отмечен факт существования и сохранения свойств автомодуляционных и хаотических колебаний, причем рассмотрение упрощенной системы позволяет значительно упростить решение задачи, а также приводит к высокой экономии машинного времени и ресурсов.

В качестве инструмента для анализа колебаний отмечена модель обобщенного потенциала, позволяющая выявить основные свойства автоколебаний магнитоупругой и магнито-электродинамической систем, такие как пороговый характер, роль параметров затухания и нелинейности осцилляторов и связи, переход к стохастическому режиму при большом уровне возбуждения. Отмечены основные положения модели и приведена схема получения уравнений движения в общем случае двух нелинейных связанных осцилляторов.

Глава 2

АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ ГИПЕРЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ МАГНИТОСТРИКЦИОННОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

В настоящей главе рассмотрена первая из приведенных выше задач — возбуждение гиперзвуковых колебаний переменным магнитным полем в геометрии плоскопараллельной нормально намагниченной ферритовой пластины. Предложена укороченная система уравнений, основанная на модели связанных осцилляторов. Выявлены два режима вынужденных колебаний, соответствующие спаду и нарастанию амплитуды во времени.

Основное изложение материала в данной главе следует работе [18]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

2.1. Задача возбуждения гиперзвуковых колебаний

Возбуждение гиперзвуковых колебаний в диапазоне СВЧ является актуальной задачей как для общей физики, так и для технической акустики [46–48], в том числе для аналоговой обработки информации [49, 50]. Весьма перспективными здесь являются магнитострикционные преобразователи на основе ферритов, использующие возбуждение упругих колебаний в условиях ферромагнитного резонанса (ФМР) [13, 51], что позволяет повысить частоту возбуждаемого гиперзвука до десятков ГГц без заметного роста затухания. Особенно перспективными материалами для таких преобразователей являются железиттриевый гранат (ЖИГ), имеющий рекордно низкие потери как упругих, так и магнитных колебаний, а также тербиевый феррит-гранат (ТбФГ), имеющий весьма высокое значение константы магнитоупругого взаимодействия в сочетании со сравнительно невысокой намагниченностью насыщения [13].

В ферритах значительной помехой на пути повышения мощности возбуждаемого гиперзвука является рост потерь за счет параметрического возбуждения обменных спиновых волн [8, 42, 43]. Однако в работах [52, 53] показано, что при выборе геометрии преобразователя в виде нормально намагниченного тонкого диска частота ФМР приходится

на дно спектра обменных волн, вследствие чего их возбуждение исключается.

В работе [16] показано, что в подобной геометрии амплитуда гиперзвука может превышать таковую в линейном режиме более чем в 30 раз, что открывает путь для создания магнитоакустических преобразователей высокой мощности.

Расчет свойств работы таких преобразователей в условиях ФМР требует привлечения весьма сложного аналитического аппарата, требующего решения системы из семи нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешимой только численными методами [16].

Условия практики, однако, требуют создания достаточно простого расчетного аппарата, позволяющего оценить возможности и рассчитать основные параметры преобразователя без привлечения сложных аналитических и численных методов. Настоящая глава посвящена созданию такого аппарата на основе модели связанных осцилляторов. На данном этапе рассмотрение проведено только для линейных колебаний, нелинейные колебания будут рассмотрены в следующей главе.

2.2. Геометрия задачи и основные уравнения в линейном приближении

Геометрия задачи, совпадает с приведенной в главе 1 на рис. 1.1. Там же приведены основные уравнения с соответствующими граничными условиями (1.1)–(1.7). Повторим здесь только необходимые для дальнейшего рассмотрения.

Основная система уравнений движения для нормированных компонент намагниченности имеет вид

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \cdot [(m_y + \alpha m_x m_z) \cdot H_z - (m_z - \alpha m_y m_x) \cdot H_y - \alpha \cdot (m_y^2 + m_z^2) \cdot H_x]; \quad (2.1)$$

где уравнения для m_y и m_z получаются циклической перестановкой x , y , z . Уравнения для компонент упругого смещения $u_{x,y}$ имеют вид

$$\frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial t^2} = -2\beta \frac{\partial u_{x,y}}{\partial t} + \frac{c_{44}}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial z^2}; \quad (2.2)$$

граничные условия

$$c_{44} \frac{\partial u_{x,y}}{\partial z} \Big|_{z=\pm d/2} = -B_2 m_{x,y} m_z. \quad (2.3)$$

Рассмотрим задачу в линейном приближении, то есть положим $m_{x,y} \ll 1$, $m_z \rightarrow 1$ и далее будем оставлять члены только первого порядка по $m_{x,y}$. В отношении упругих колебаний, аналогично [16], примем следующие предположения: $u_z = 0$, продольные упругие волны

отсутствуют: $B_1 = 0$, упругие волны распространяются только вдоль оси Oz : $\partial u_{x,y}/\partial x = 0$; $\partial u_{x,y}/\partial y = 0$. Дополнительно будем считать, что упругие смещения вдоль оси Oy отсутствуют, то есть $u_y = 0$. Такое предположение не является безусловно корректным, однако в ряде случаев, будучи примененным на первом этапе, позволяет существенно сократить требуемый объем вычислений.

Входящие в уравнения (1.1) эффективные поля (1.2)–(1.5) с учетом линеаризации принимают вид

$$H_x = h_x - \frac{B_2}{M_0} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial z}; \quad (2.4)$$

$$H_y = h_y; \quad (2.5)$$

$$H_z = H_p - \frac{B_2}{M_0} \cdot m_x \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad (2.6)$$

где введено вспомогательное обозначение

$$H_p = H_0 - 4\pi M_0. \quad (2.7)$$

В эти выражения входит производная от смещения u_x по координате z . Найдем эту производную.

Согласно [16], в рассматриваемой задаче x -компонента упругого смещения для первой моды колебаний может быть представлена в виде (формула (51)):

$$u_x = -\frac{B_2}{c_{44}} m_x m_z \cdot z + v_x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right). \quad (2.8)$$

При этом производная от смещения u_x по координате z имеет вид (формула (62)):

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{B_2}{c_{44}} \cdot m_x m_z + \frac{2}{d} \cdot v_x, \quad (2.9)$$

где v_x — функция, удовлетворяющая уравнению (формула (53))

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{c_{44}\pi^2}{\rho d^2} \cdot v_x = \frac{4B_2 d}{c_{44}\pi^2} \cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} (m_x m_z) + 2\beta \frac{\partial}{\partial t} (m_x m_z) \right]. \quad (2.10)$$

Полагая $m_z \rightarrow 1$, из (2.9) получаем

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{B_2}{c_{44}} \cdot m_x + \frac{2}{d} \cdot v_x, \quad (2.11)$$

а уравнение (2.10) принимает вид

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{c_{44}\pi^2}{\rho d^2} \cdot v_x = \frac{4B_2 d}{c_{44}\pi^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial m_x}{\partial t} \right). \quad (2.12)$$

Возвращаясь к полям (2.4)–(2.6) и полагая $m_x v_x \ll 1$, получаем

$$H_x = h_x + \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}} \cdot m_x - \frac{2B_2}{M_0 d} \cdot v_x; \quad (2.13)$$

$$H_y = h_y; \quad (2.14)$$

$$H_z = H_p. \quad (2.15)$$

2.2.1. Уравнение для намагниченности

Преобразуем теперь уравнения для намагниченности (2.1). Полагая $m_z \rightarrow 1$, третье уравнение опускаем, а в оставшихся двух, полагая $m_{x,y} \ll 1$, оставляем только члены первого порядка по $m_{x,y}$:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2} \cdot [(m_y + \alpha m_x) \cdot H_z - H_y - \alpha \cdot H_x]; \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2} \cdot [H_x - (m_x - \alpha m_y) \cdot H_z - \alpha H_y]. \quad (2.17)$$

Раскрывая скобки, выражая из первого уравнения m_y и подставляя во второе, получаем уравнение для m_x :

$$(1 + \alpha^2) \cdot \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + 2\alpha\gamma H_0 \cdot \frac{\partial m_x}{\partial t} + (\gamma H_p)^2 \cdot m_x - \\ - \gamma \cdot \frac{\partial H_y}{\partial t} - \alpha\gamma \cdot \frac{\partial H_x}{\partial t} - \gamma^2 H_p H_x = 0. \quad (2.18)$$

Это — одно уравнение второго порядка для m_x , полученное через посредство m_y , то есть оно эквивалентно двум уравнениям первого порядка для m_x и m_y . Такое же уравнение второго порядка можно получить для m_y , однако в этом необходимости нет, так как оно дублирует полученное уравнение для m_x .

Подставляя в (2.18) поля (2.13)–(2.15), получаем уравнение для m_x в виде:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + \frac{\alpha\gamma(2H_p - b_1)}{1 + \alpha^2} \cdot \frac{\partial m_x}{\partial t} + \frac{\gamma^2 H_p (H_p - b_1)}{1 + \alpha^2} \cdot m_x + \\ + \frac{\alpha\gamma b_2}{1 + \alpha^2} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\gamma^2 H_p b_2}{1 + \alpha^2} \cdot v_x = \\ = \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \cdot \frac{\partial h_y}{\partial t} + \frac{\alpha\gamma}{1 + \alpha^2} \cdot \frac{\partial h_x}{\partial t} + \frac{\gamma^2 H_p}{1 + \alpha^2} \cdot h_x, \quad (2.19)$$

где введены вспомогательные обозначения

$$b_1 = \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}}, \quad (2.20)$$

$$b_2 = \frac{2B_2}{M_0 d}. \quad (2.21)$$

2.2.2. Уравнение для упругого смещения

Рассмотрим теперь уравнение (2.12) для упругого смещения v_x .

Вводя упрощенные обозначения

$$c_1 = \frac{c_{44}\pi^2}{\rho d^2}, \quad (2.22)$$

$$c_2 = \frac{4B_2 d}{c_{44}\pi^2}, \quad (2.23)$$

и подставляя в (2.12) вторую производную от намагниченности в соответствии с (2.19), получаем уравнение для v_x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + \left(2\beta + \frac{\alpha\gamma b_2 c_2}{1 + \alpha^2}\right) \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(c_1 + \frac{\gamma^2 H_p b_2 c_2}{1 + \alpha^2}\right) \cdot v_x = \\ = \frac{\gamma c_2}{1 + \alpha^2} \cdot \frac{\partial h_y}{\partial t} + \frac{\alpha\gamma c_2}{1 + \alpha^2} \cdot \frac{\partial h_x}{\partial t} + \frac{\gamma^2 H_p c_2}{1 + \alpha^2} \cdot h_x. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Уравнения (2.19) и (2.24) составляют искомую систему.

2.3. Проверка применимости линейного приближения

Рассмотрим степень приближения, обеспечиваемого линеаризованной системой (2.19)–(2.24) по сравнению с исходной нелинейной системой (2.1)–(2.3). На рис. 2.1 показаны зависимости поперечной компоненты намагниченности (a) и упругого смещения (b) от амплитуды переменного поля при параметрах ЖИГ, принятых в работе [16]. Кривые 1 соответствуют решению полной системы (1)–(3), кривые 2 — решению линеаризованной системы (2.19)–(2.24) (смещение u получено из v в соответствии с формулой (2.8) при $z = d/2$).

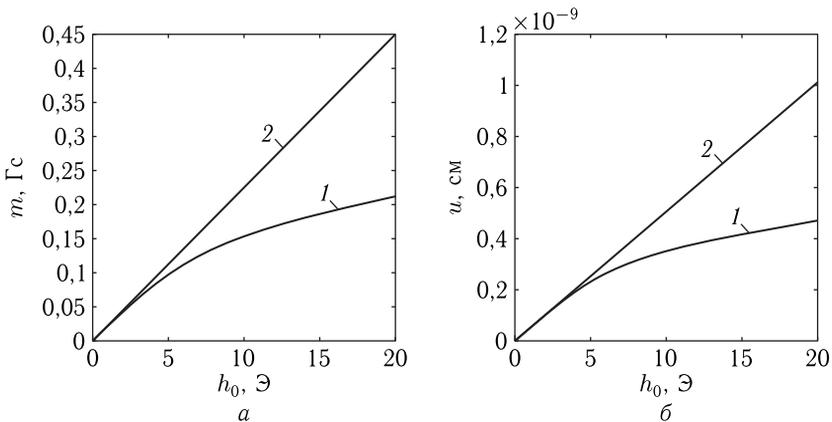


Рис. 2.1. Зависимости поперечной компоненты намагниченности (a) и упругого смещения (b) от амплитуды переменного поля. Параметры — соответствуют ЖИГ ($4\pi M_0 = 1750$ Гс; $B_2 = 6,96 \cdot 10^5$ эрг \cdot см $^{-3}$; $c_{44} = 7,64 \times 10^{11}$ эрг \cdot см $^{-3}$; $\rho = 5,17$ г \cdot см $^{-3}$; $\alpha = 0,02$; $\beta = 10^9$ с $^{-1}$); толщина пластины: $d = 6,865 \cdot 10^{-5}$ см; 1 — решение нелинейной системы (2.1)–(2.3); 2 — решение линеаризованной системы (2.19)–(2.24)

Из рисунка видно, что приближенная линеаризованная система (2.19)–(2.24) описывает точную картину до амплитуды переменного поля 2 Э (то есть до $h_0/M_0 = 0,015$) с точностью не менее 1%,

до амплитуды 5 Э (до $h_0/M_0 = 0,04$) — с точностью порядка 10%, а для амплитуды 10 Э (до $h_0/M_0 = 0,07$) — с точностью около 30%.

2.4. Система уравнений для намагниченности и упругого смещения в обобщенном виде

Таким образом, вместо исходной системы (2.1)–(2.2), эквивалентной семи уравнениям первого порядка с граничными условиями (2.3), получена более простая система (2.19)–(2.24), содержащая два уравнения второго порядка без граничных условий. Эта система в общем случае описывает колебания двух связанных гармонических осцилляторов, где связь осуществляется не только через сами переменные, но и через их производные.

Запишем уравнения для намагниченности (2.19) и упругого смещения (2.24) в обобщенном виде:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + a_{12} \cdot \frac{\partial m_x}{\partial t} + a_{13} \cdot m_x + a_{14} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} + a_{15} \cdot v_x = \\ = b_{11} \cdot \frac{\partial h_y}{\partial t} + b_{12} \cdot \frac{\partial h_x}{\partial t} + b_{13} \cdot h_x; \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} a_{21} \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + a_{22} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} + a_{23} \cdot v_x + a_{24} \cdot \frac{\partial m_x}{\partial t} + a_{25} \cdot m_x = \\ = b_{21} \cdot \frac{\partial h_y}{\partial t} + b_{22} \cdot \frac{\partial h_x}{\partial t} + b_{23} \cdot h_x, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где с учетом (2.20)–(2.21) и (2.22)–(2.23) введены обозначения

$$a_{11} = 1; \quad (2.27)$$

$$a_{12} = \frac{2\alpha\gamma}{1 + \alpha^2} \cdot \left(H_p - \frac{B_2^2}{2M_0 c_{44}} \right); \quad (2.28)$$

$$a_{13} = \frac{\gamma^2 H_p}{1 + \alpha^2} \cdot \left(H_p - \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}} \right); \quad (2.29)$$

$$a_{14} = \frac{2\alpha\gamma B_2}{(1 + \alpha^2) M_0 d}; \quad (2.30)$$

$$a_{15} = \frac{2\gamma^2 H_p B_2}{(1 + \alpha^2) M_0 d}; \quad (2.31)$$

$$b_{11} = \frac{\gamma}{1 + \alpha^2}; \quad (2.32)$$

$$b_{12} = \frac{\alpha\gamma}{1 + \alpha^2}; \quad (2.33)$$

$$b_{13} = \frac{\gamma^2 H_p}{1 + \alpha^2}; \quad (2.34)$$

$$a_{21} = 1; \quad (2.35)$$

$$a_{22} = 2 \cdot \left[\beta + \frac{4\alpha\gamma B_2^2}{(1 + \alpha^2) M_0 c_{44} \pi^2} \right]; \quad (2.36)$$

$$a_{23} = \frac{c_{44} \pi^2}{\rho d^2} \cdot \left[1 + \frac{8\gamma^2 H_p B_2^2 \rho d^2}{(1 + \alpha^2) M_0 c_{44}^2 \pi^4} \right]; \quad (2.37)$$

$$a_{24} = \frac{8B_2 d}{c_{44} \pi^2} \cdot \left[\frac{\alpha\gamma}{1 + \alpha^2} \cdot \left(H_p - \frac{B_2^2}{2M_0 c_{44}} \right) - \beta \right]; \quad (2.38)$$

$$a_{25} = \frac{4\gamma^2 H_p B_2 d}{(1 + \alpha^2) c_{44} \pi^2} \cdot \left(H_p - \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}} \right); \quad (2.39)$$

$$b_{21} = \frac{4\gamma B_2 d}{(1 + \alpha^2) c_{44} \pi^2}; \quad (2.40)$$

$$b_{22} = \frac{4\alpha\gamma B_2 d}{(+\alpha^2) c_{44} \pi^2}; \quad (2.41)$$

$$b_{23} = \frac{4\gamma^2 H_p B_2 d}{(1 + \alpha^2) c_{44} \pi^2}. \quad (2.42)$$

2.4.1. Упрощение коэффициентов на основе численного анализа

Полученные коэффициенты (2.27)–(2.42) имеют довольно сложный вид, так a_{12} , a_{13} , a_{22} , a_{23} , a_{25} содержат два слагаемых, а a_{24} — три. Однако при реальных значениях параметров материалов, используемых для магнитострикционных преобразователей, таких как ЖИГ и ТбФГ, относительная роль этих слагаемых различна, что позволяет произвести определенные упрощения.

Рассмотрим, например, параметры, соответствующие монокристаллу ЖИГ [13]: $4\pi M_0 = 1750$ Гс; $B_2 = 6,96 \cdot 10^6$ эрг \cdot см $^{-3}$; $\rho = 5,17$ г \cdot см $^{-3}$; $c_{44} = 7,64 \cdot 10^{11}$ эрг \cdot см $^{-3}$; $\alpha = 0,001$; $\beta = 10^6$ с $^{-1}$. В таблице приведены значения коэффициентов, рассчитанные с этими параметрами при двух значениях постоянного поля: 2850 Э и 1850 Э. В этих случаях поле H_p принимает значения 1000 Э и 100 Э, а частота ФМР в отсутствие магнитоупругости равна 2800 МГц и 280 МГц соответственно. Все коэффициенты в табл. 2.1 рассчитаны в системе СГС (Гаусса), размерные единицы опущены для упрощения записи.

В первом столбце таблицы приведены наименования коэффициентов. Второй и третий столбцы соответствуют полю H_p , равному 1000 Э, четвертый и пятый — 100 Э. Во втором и четвертом столбцах приведены численные значения коэффициентов, причем составляющие их слагаемые выделены отдельно.

Из второго и четвертого столбцов таблицы видно, что в большинстве случаев одно из слагаемых преобладает над другими на порядок и более. В третьем и пятом столбцах приведены численные значения коэффициентов, полученные в пренебрежении меньшими слагаемыми.

Таблица 2.1. Коэффициенты полной системы связанных уравнений при реальных параметрах задачи

	$H_p = 1000 \text{ Э}$		$H_p = 100 \text{ Э}$	
a_{11}	$0,10 \cdot 10^1$	$0,10 \cdot 10^1$	$0,10 \cdot 10^1$	$0,10 \cdot 10^1$
a_{12}	$0,35 \cdot 10^8 - 0,80 \cdot 10^4$	$0,35 \cdot 10^8$	$0,35 \cdot 10^7 - 0,83 \cdot 10^4$	$0,35 \cdot 10^7$
a_{13}	$0,31 \cdot 10^{21} - 0,14 \cdot 10^{18}$	$0,31 \cdot 10^{21}$	$0,31 \cdot 10^{19} - 0,14 \cdot 10^{17}$	$0,31 \cdot 10^{19}$
a_{14}	$0,26 \cdot 10^{14}$	$0,26 \cdot 10^{14}$	$0,26 \cdot 10^{14}$	$0,26 \cdot 10^{14}$
a_{15}	$0,45 \cdot 10^{27}$	$0,45 \cdot 10^{27}$	$0,45 \cdot 10^{26}$	$0,45 \cdot 10^{26}$
b_{11}	$0,18 \cdot 10^8$	$0,18 \cdot 10^8$	$0,18 \cdot 10^8$	$0,18 \cdot 10^8$
b_{12}	$0,18 \cdot 10^5$	$0,18 \cdot 10^5$	$0,18 \cdot 10^5$	$0,18 \cdot 10^5$
b_{13}	$0,31 \cdot 10^{18}$	$0,31 \cdot 10^{18}$	$0,31 \cdot 10^{17}$	$0,31 \cdot 10^{17}$
a_{21}	$0,10 \cdot 10^1$	$0,10 \cdot 10^1$	$0,10 \cdot 10^1$	$0,10 \cdot 10^1$
a_{22}	$0,20 \cdot 10^7 + 0,65 \cdot 10^4$	$0,20 \cdot 10^7$	$0,20 \cdot 10^7 + 0,65 \cdot 10^4$	$0,20 \cdot 10^7$
a_{23}	$0,31 \cdot 10^{21} + 0,12 \cdot 10^{18}$	$0,31 \cdot 10^{21}$	$0,31 \cdot 10^{21} + 0,12 \cdot 10^{18}$	$0,31 \cdot 10^{21}$
a_{24}	$0,89 \cdot 10^{-2} - 0,20 \cdot 10^{-5} - 0,51 \cdot 10^{-3}$	$0,89 \cdot 10^{-2}$	$0,89 \cdot 10^{-3} - 0,20 \cdot 10^{-5} - 0,51 \cdot 10^{-3}$	$0,38 \cdot 10^{-3}$
a_{25}	$0,79 \cdot 10^{11} - 0,36 \cdot 10^8$	$0,79 \cdot 10^{11}$	$0,79 \cdot 10^9 - 0,36 \cdot 10^7$	$0,79 \cdot 10^9$
b_{21}	$0,45 \cdot 10^{-2}$	$0,45 \cdot 10^{-2}$	$0,45 \cdot 10^{-2}$	$0,45 \cdot 10^{-2}$
b_{22}	$0,45 \cdot 10^{-5}$	$0,45 \cdot 10^{-5}$	$0,45 \cdot 10^{-5}$	$0,45 \cdot 10^{-5}$
b_{23}	$0,79 \cdot 10^8$	$0,79 \cdot 10^8$	$0,79 \cdot 10^7$	$0,79 \cdot 10^7$

Аналогичный расчет коэффициентов, исходящий из параметров ТбФГ, показывает, что полученные при этом коэффициенты ведут себя подобным образом.

В соответствии с полученными данными, в аналитических выражениях для коэффициентов (2.27)–(2.42) можно пренебречь слагаемыми, дающими малый вклад, а также учесть, что $\alpha^2 \ll 1$, в результате чего эти коэффициенты принимают значительно более простой вид:

$$a_{11} = 1; \quad (2.43)$$

$$a_{12} = 2\alpha\gamma H_p; \quad (2.44)$$

$$a_{13} = \gamma^2 H_p^2; \quad (2.45)$$

$$a_{14} = \frac{2\alpha\gamma B_2}{M_0 d}; \quad (2.46)$$

$$a_{15} = \frac{2\gamma^2 H_p B_2}{M_0 d}; \quad (2.47)$$

$$b_{11} = \gamma; \quad (2.48)$$

$$b_{12} = \alpha\gamma; \quad (2.49)$$

$$b_{13} = \gamma^2 H_p; \quad (2.50)$$

$$a_{21} = 1; \quad (2.51)$$

$$a_{22} = 2\beta; \quad (2.52)$$

$$a_{23} = \frac{c_{44}\pi^2}{\rho d^2}; \quad (2.53)$$

$$a_{24} = \frac{8\alpha\gamma H_p B_2 d}{c_{44}\pi^2}; \quad (2.54)$$

$$a_{25} = \frac{4\gamma^2 H_p^2 B_2 d}{c_{44}\pi^2}; \quad (2.55)$$

$$b_{21} = \frac{4\gamma B_2 d}{c_{44}\pi^2}; \quad (2.56)$$

$$b_{22} = \frac{4\alpha\gamma B_2 d}{c_{44}\pi^2}; \quad (2.57)$$

$$b_{23} = \frac{4\gamma^2 H_p B_2 d}{c_{44}\pi^2}. \quad (2.58)$$

Так как производные от переменных полей дают в качестве множителя частоту, то вблизи резонанса вклад в уравнения (2.19) и (2.24) от слагаемых, определяемых коэффициентами b_{ik} , имеет примерно тот же порядок, что и от остальных слагаемых. Структура коэффициентов b_{ik} довольно сложна, однако следует учесть, что коэффициенты b_{12} и b_{22} меньше соответствующих коэффициентов b_{11} и b_{21} в α раз, то есть — на три порядка, поэтому ими можно пренебречь. Слагаемые, содержащие производные от компонент переменных полей, в сумме со слагаемыми, содержащими сами эти поля, дают не более чем сдвиг фазы примерно на четверть периода, поэтому их также можно опустить. Далее, поскольку возбуждение системы в целом происходит через магнитный осциллятор, а действие возбуждающей силы на упругий осциллятор, определяемое коэффициентом b_{23} , пропорционально величине константы магнитоупругого взаимодействия B_2 , которая может быть достаточно малой, роль коэффициента b_{23} а процессе возбуждения колебаний также можно считать второстепенной. В результате решающим для возбуждения остается только коэффициент b_{13} , а в первом приближении остальные коэффициенты b_{ik} можно положить равными нулю.

Заметим, что связь между осцилляторами, обусловленная самими переменными, то есть определяемая коэффициентами a_{14} и a_{24} , в обоих случаях пропорциональна величине магнитного параметра затухания α , что в какой-то мере является несимметричным. Действительно, упругий осциллятор тем больше влияет на магнитный, чем затухание магнитного осциллятора больше, то есть чем магнитный осциллятор является более «мягким». Исходя из симметрии задачи естественно предположить, что и магнитный осциллятор тем сильнее влияет на упругий, чем затухание упругого больше. С этой точки зрения коэффициент a_{24} должен быть пропорционален не магнитному параметру

затухания α , а упругому β . Действительно, в полном выражении для a_{24} (2.38) параметр β входит в роли самостоятельного слагаемого. Однако в реальном случае ЖИГ при поле 2750 Э, то есть на частоте 2800 МГц, представляющей наибольший интерес для практики, значение этого слагаемого на порядок меньше, чем определяемого параметром α . При понижении поля до 1850 Э, то есть частоты до 280 МГц, как видно из таблицы, порядок вклада от обоих слагаемых становится одинаковым, то есть в этом случае к сделанным приближениям надо относиться с некоторой осторожностью.

Более того, при увеличении параметра затухания β , начиная с $\beta \sim 10^7 \text{ с}^{-1}$, при том же значении α последнее слагаемое в коэффициенте a_{24} (2.38) уже преобладает над первыми двумя, в результате чего этот коэффициент принимает вид:

$$a_{24} = -\frac{8\beta B_2 d}{c_{44}\pi^2}, \quad (2.59)$$

то есть влияние магнитного осциллятора на упругий сказывается тем сильнее, чем затухание упругого осциллятора больше. То есть система относительно связи через переменные обретает определенную симметричность. Таким образом, при получении приближенных аналитических выражений следует следить за относительными величинами обоих параметров затухания α и β .

2.5. Модель осцилляторов, связанных через производные

Как показано в предыдущем разделе, задача о линейном возбуждении гиперзвуковых колебаниях в магнитной пластине, обладающей магнитоупругими свойствами, может быть сведена к системе двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, связанных через переменные и производные от переменных по времени.

В обозначениях, традиционно принятых для рассмотрения подобной системы связанных осцилляторов, систему уравнений (2.19)–(2.24) можно записать в виде

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta_1 \cdot \frac{dx_2}{dt} = A \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (2.60)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 + \delta_2 \cdot \frac{dx_1}{dt} = 0, \quad (2.61)$$

где $\beta_{1,2} = a_{12,22}$; $\omega_{1,2}^2 = a_{13,23}$; $\gamma_{1,2} = a_{15,25}$; $\delta_{1,2} = a_{14,24}$;

$$A \cdot \cos(\omega_0 t) = b_{13} \cdot h_x,$$

а также положено: $b_{11} = b_{12} = b_{21} = b_{22} = b_{23} = 0$.

В отсутствие вынуждающей силы ($A = 0$) эти уравнения могут описывать только затухающие колебания. Однако, поскольку каждое из уравнений, кроме слагаемого с производной от основной переменной, содержит еще слагаемое с производной от другой переменной, то затухание одного осциллятора может зависеть от колебаний другого. Можно полагать, что при наличии вынуждающей силы это обстоятельство способно привести к частичной или даже полной компенсации затухания каждого из осцилляторов, то есть колебания могли бы как убывать во времени, так и нарастать. Во втором случае можно считать, что колебательная система приобретает «отрицательное сопротивление», то есть становится активной, а нарастание колебаний ограничивается только нелинейными свойствами системы, здесь не рассматриваемыми.

Для проверки такого предположения в рамках линейного приближения рассмотрим далее модель связанных осцилляторов в наиболее общем виде, описываемом уравнениями (2.60)–(2.61). Параметры задачи выберем, исходя из максимальной наглядности представления результатов.

2.5.1. Численный анализ развития вынужденных колебаний

Для анализа действия затухания колебательных систем друг на друга система уравнений (2.60)–(2.61) решалась численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка [54]. Исследовался характер возбуждаемых колебаний при различной величине связи осцилляторов через производные δ_1 и δ_2 . Собственные частоты осцилляторов были положены равными и рассматривались два случая: равенства частоты возбуждения собственным частотам и ее отличия.

На рис. 2.2 показано развитие колебаний во времени для двух осцилляторов с равными частотами. Рис. 2.2, *а* соответствует равенству частоты возбуждения собственным частотам осцилляторов, рис. 2.2, *б* — ее отличию от частот осцилляторов (единицы — относительные, принятые, исходя из наглядности рисунка).

Из рис. 2.2, *а* видно, что при возбуждении системы на собственной частоте осцилляторов в отсутствие связи через производные (верхняя эпюра) колебания довольно быстро (через время около 40) приходят к стационарной амплитуде около 28 и дальше не меняются. Картина соответствует обычному экспоненциальному насыщению, характерному для положительного затухания.

При связи 0,1 (средняя эпюра) колебания нарастают почти линейно. Наблюдаемое незначительное отклонение от линейности в нижнюю сторону, возможно, означает приближение к какой-то стационарной амплитуде, но если это и происходит, то где-то далеко за временем 100. Амплитуда заметно превышает предыдущую и при времени 100 составляет около 75. Близкий к линейному рост амплитуды можно интерпретировать как экспоненту с нулевым показателем.

При связи 0,2 (нижняя эпюра) амплитуда колебаний до времени порядка 40–60 слегка увеличивается, составляя не более нескольких

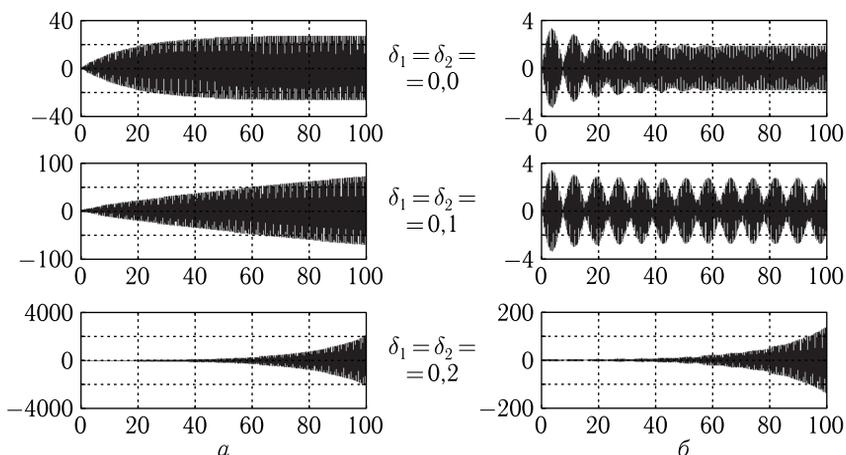


Рис. 2.2. Развитие вынужденных колебаний во времени при различной величине связи. Параметры: $\beta_1 = \beta_2 = 0,1$; $\omega_1 = \omega_2 = 17,5$; $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$; значения $\delta_1 = \delta_2$ приведены на рисунке; амплитуда возбуждения: $A = 50$. a — частота возбуждения: $\omega_0 = 17,5$; b — частота возбуждения: $\omega_0 = 16,5$

сотен, после чего рост ее резко усиливается, и при времени 100 амплитуда достигает 2000, имея тенденцию увеличиваться еще больше. Картина напоминает экспоненциальный рост, характерный для отрицательного затухания.

Таким образом, можно полагать, что при частоте возбуждения, равной собственной, из-за связи через производные знак показателя экспоненты, описывающей затухание, меняется с положительного, проходя через нуль, на отрицательный.

Рассмотрим теперь, что происходит при отстройке частоты возбуждения от резонансной. Полученные зависимости показаны на рис. 2.2, б, построенном при тех же параметрах, что и рис. 2.2, а, кроме частоты возбуждения, теперь отличной от собственных частот осцилляторов.

Из рис. 2.2, б видно, что, в отсутствие связи через производные, наблюдается модуляция амплитуды, обусловленная биениями с частотой, равной разности частот возбуждения и собственной, однако такие модуляционные колебания, как и полагается биениями, быстро затухают при времени около 60. Эта картина полностью соответствует обычному установлению вынужденных колебаний при экспоненциальном затухании с положительным показателем.

При связи, равной 0,1 (средняя эпюра), модуляционные колебания не затухают и амплитуда их имеет постоянное значение, равное 2,9. Модуляция опять обусловлена разностью частот возбуждения и собственной, то есть биениями, а затухание отсутствует, что соответствует нулевому показателю экспоненты.

При связи, равной 0,2 (нижняя эпюра), модуляционные колебания есть, однако их размах на фоне резкого роста общей амплитуды

теряется, то есть биения, хотя и остаются, но роль их в общей картине колебаний становится весьма незначительной. Рост амплитуды опять соответствует экспоненте с отрицательным показателем.

Наблюдаемое во всех трех случаях уменьшение амплитуды колебаний примерно на порядок по сравнению с рис. 2.2, а, обусловлено отстройкой частоты возбуждения от резонансной.

Таким образом, можно полагать, что в случае связи через производные, по мере увеличения величины связи, мы имеем картину уменьшения затухания от положительного значения, через нулевое, до отрицательного. То есть наблюдаются три различных режима вынужденных колебаний: режим спада амплитуды, режим ее нарастания и между нами — режим стационарной амплитуды. При этом автоколебания как самоподдерживающийся процесс полностью отсутствуют, а наблюдаемая модуляция амплитуды обусловлена биениями.

Замечание. Вообще говоря, экспоненциальный рост амплитуды колебаний, наблюдаемый на нижних эпюрах на рис. 2.2, не может продолжаться до бесконечности, так как это соответствовало бы бесконечному нарастанию энергии колебаний. В реальном случае такой экспоненциальный рост неизбежно ограничивается при достаточной амплитуде колебаний из-за нелинейной расстройки, приводящей к выходу системы из резонанса [55]. Механизм нелинейной расстройки выходит за рамки настоящей работы и будет отдельно рассмотрен в другом случае.

2.5.2. Аналитический критерий изменения характера колебаний

Система уравнений (2.60)–(2.61) в ряде случаев допускает аналитическое решение. Рассмотрим, например, частный случай свободных колебаний без вынуждающей силы. В этом случае система (2.60)–(2.61) принимает вид:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta_1 \cdot \frac{dx_2}{dt} = 0; \quad (2.62)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 + \delta_2 \cdot \frac{dx_1}{dt} = 0. \quad (2.63)$$

Введем дополнительные переменные:

$$y_1 = \frac{dx_1}{dt}; \quad (2.64)$$

$$y_2 = \frac{dx_2}{dt}. \quad (2.65)$$

Подставляя новые переменные и их производные в исходные уравнения (2.62)–(2.63), получаем систему уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_1}{dt} = y_1; \quad (2.66)$$

$$\frac{dy_1}{dt} + \beta_1 \cdot y_1 + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta_1 \cdot y_2 = 0; \quad (2.67)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = y_2; \quad (2.68)$$

$$\frac{dy_2}{dt} + \beta_2 \cdot y_2 + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 + \delta_2 \cdot y_1 = 0. \quad (2.69)$$

Будем искать решение этой системы в виде

$$x_1 = x_{10} \cdot e^{\lambda t}; \quad (2.70)$$

$$x_2 = x_{20} \cdot e^{\lambda t}; \quad (2.71)$$

$$y_1 = y_{10} \cdot e^{\lambda t}; \quad (2.72)$$

$$y_2 = y_{20} \cdot e^{\lambda t}. \quad (2.73)$$

Подставляя (2.70)–(2.73) в (2.66)–(2.69), можно видеть, что уравнения (2.66) и (2.68) удовлетворяются тождественно, а уравнения (2.67) и (2.69) образуют систему:

$$(\lambda^2 + \beta_1 \lambda + \omega_1^2) \cdot x_{10} + (\lambda \delta_1 + \gamma_1) \cdot x_{20} = 0; \quad (2.74)$$

$$(\lambda \delta_2 + \gamma_2) \cdot x_{10} + (\lambda^2 + \beta_2 \lambda + \omega_2^2) \cdot x_{20} = 0, \quad (2.75)$$

детерминант которой имеет вид

$$D_0 = \begin{vmatrix} \lambda^2 + \beta_1 \lambda + \omega_1^2 & \lambda \delta_1 + \gamma_1 \\ \lambda \delta_2 + \gamma_2 & \lambda^2 + \beta_2 \lambda + \omega_2^2 \end{vmatrix}. \quad (2.76)$$

Условие нетривиальности решения системы $D_0 = 0$ дает уравнение для λ :

$$\lambda^4 + \lambda^3 \cdot (\beta_1 + \beta_2) + \lambda^2 \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1 \beta_2 - \delta_1 \delta_2) + \lambda \cdot (\beta_1 \omega_2^2 + \beta_2 \omega_1^2 - \delta_1 \gamma_2 - \delta_2 \gamma_1) + \omega_1^2 \omega_2^2 - \gamma_1 \gamma_2 = 0. \quad (2.77)$$

Решение этого уравнения в аналитическом виде довольно громоздко, поэтому рассмотрим упрощенный частный случай.

2.5.3. Комплексный показатель экспоненциального изменения амплитуды

Предположим, что λ имеет вид

$$\lambda = a + i \cdot b, \quad (2.78)$$

где a , b — действительные, то есть a соответствует изменению амплитуды колебаний во времени, а b — частоте этих колебаний.

Подставляя (2.78) в (2.77) и выделяя действительную и мнимую части, получаем

$$A + i \cdot B = 0, \quad (2.79)$$

где

$$A = (a^4 + b^4 - 6a^2b^2) + (a^3 - 3ab^2) \cdot (\beta_1 + \beta_2) + \\ + (a^2 - b^2) \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) + \\ + a \cdot (\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1) + \omega_1^2\omega_2^2 - \gamma_1\gamma_2; \quad (2.80)$$

$$B = 4ab \cdot (a^2 - b^2) + (3a^2b - b^3) \cdot (\beta_1 + \beta_2) + \\ + 2ab \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) + \\ + b \cdot (\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1). \quad (2.81)$$

Уравнение (2.79) выполняется только в том случае, когда как действительная, так и мнимая части равны нулю. При этом из (2.80) получаем

$$(a^4 + b^4 - 6a^2b^2) + (a^3 - 3ab^2) \cdot (\beta_1 + \beta_2) + \\ + (a^2 - b^2) \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) + \\ + a \cdot (\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1) + \omega_1^2\omega_2^2 - \gamma_1\gamma_2 = 0. \quad (2.82)$$

Из (2.81), разделяя B на b и группируя относительно b^2 , получаем

$$b^2 \cdot (4a + \beta_1 + \beta_2) = 4a^3 + 3a^2 \cdot (\beta_1 + \beta_2) + \\ + 2a \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) + \\ + (\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1). \quad (2.83)$$

Уравнения (2.82) и (2.83) составляют систему относительно a и b , которая должна быть решена совместно. Так (2.83) содержит b только в квадрате и только в качестве линейного сомножителя в левой части, поэтому из этого уравнения можно выразить b^2 через a , после чего подставить в (2.82), в результате чего будет получено уравнение, содержащее только a . Это уравнение будет шестой степени, и его решение, по-видимому, будет не проще, чем решение исходного уравнения (2.77).

Поэтому рассмотрим частный случай, соответствующий постоянству амплитуды во времени, то есть $a = 0$. При этом из (2.82) и (2.83) получаем два уравнения для b , которые должны удовлетворяться одновременно:

$$b^4 - b^2 \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) + \omega_1^2\omega_2^2 - \gamma_1\gamma_2 = 0; \quad (2.84)$$

$$b^2 \cdot (\beta_1 + \beta_2) - (\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1) = 0. \quad (2.85)$$

Из (2.85) при условии $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$ получаем

$$b^2 = \frac{\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1}{\beta_1 + \beta_2}. \quad (2.86)$$

Это соотношение позволяет найти частоту собственных колебаний системы при условии сохранения постоянства амплитуды:

$$\omega_S = \sqrt{\frac{\beta_1 \omega_2^2 + \beta_2 \omega_1^2 - \delta_1 \gamma_2 - \delta_2 \gamma_1}{\beta_1 + \beta_2}}. \quad (2.87)$$

При этом (2.84) также соответствует условию сохранения амплитуды постоянной, то есть при его нарушении в ту или другую сторону амплитуда растет или спадает. Введем вспомогательную функцию

$$G_S(\omega) = \omega^4 - \omega^2 \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1 \beta_2 - \delta_1 \delta_2) + \omega_1^2 \omega_2^2 - \gamma_1 \gamma_2, \quad (2.88)$$

с помощью которой получаем критерий перехода от нарастания амплитуды к ее убыванию:

$$G_S(\omega) = 0. \quad (2.89)$$

Таким образом, главным критерием постоянства амплитуды является (2.89), а если он выполняется, то частота определяется соотношением (2.87). При этом выполняется равенство

$$\omega_S^4 - \omega_S^2 \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1 \beta_2 - \delta_1 \delta_2) + \omega_1^2 \omega_2^2 - \gamma_1 \gamma_2 = 0. \quad (2.90)$$

Этот критерий позволяет определить возможные значения параметров $\beta_{1,2}$, $\gamma_{1,2}$, $\delta_{1,2}$, соответствующие такому переходу.

Проверим условия (2.89) и (2.87) численно. Зависимость функции G_S от частоты иллюстрируется рис. 2.3.

На рис. 2.3, *a* представлен общий характер зависимости $G(\omega)$. Видно, что она представляет собой параболу четвертого порядка, симметричную относительно оси ординат. Функция $G(\omega)$ имеет два минимума при $\omega = \pm 17,5$, разделенные максимумом при $\omega = 0$.

Реальный физический смысл имеет правый минимум, окрестность которого представлена на рис. 2.3, *б* в более крупном масштабе при трех характерных значениях параметров связи $\delta_{1,2}$. Так, левый из этих рисунков построен при $\delta_1 = \delta_2 = 0,0$, что в случае свободных колебаний соответствует их затуханию во времени, средний рисунок построен при $\delta_1 = \delta_2 = 0,1$, то есть при сохранении амплитуды свободных колебаний постоянной, а правый рисунок, построенный при $\delta_1 = \delta_2 = 0,2$, соответствует экспоненциальному нарастанию амплитуды. При вынужденных колебаниях эти случаи соответствуют показанным на рис. 2.2, *a* трем режимам: установления стационарного значения (верхняя эпюра), линейного (средняя эпюра) и экспоненциального (нижняя эпюра) роста амплитуды колебаний.

Из рис. 2.3, *б* видно, что во всех случаях минимум зависимости $G_S(\omega)$ приходится на $\omega = 17,5$, однако значение этой функции в минимуме находится вблизи нуля (около $-0,21$) только при $\delta_1 = \delta_2 = 0,1$ (средний рисунок), тогда как при $\delta_1 = \delta_2 = 0,0$ (левый рисунок) это значение является отрицательным и составляет $-3,3$, а при $\delta_1 = \delta_2 = 0,2$ (правый рисунок) — положительным, равным $0,89$.

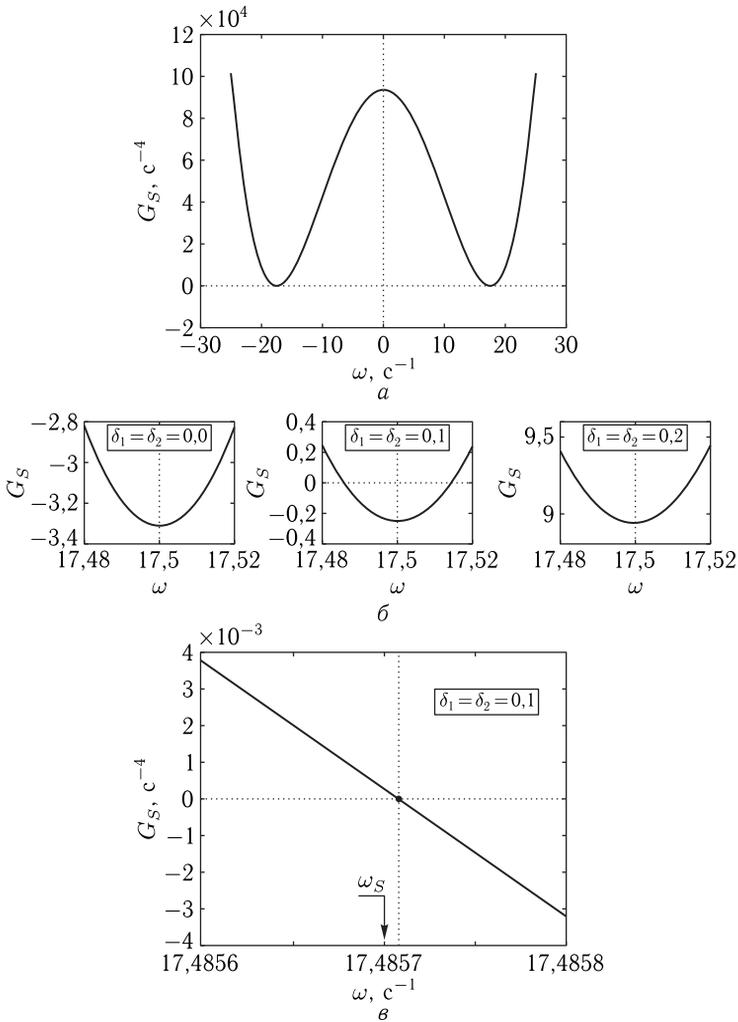


Рис. 2.3. Зависимость функции G_S от частоты ω . Параметры: $\beta_1 = \beta_2 = 0,1$; $\omega_1 = \omega_2 = 17,5$; $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$; $\delta_1 = \delta_2 = 0,1$: а — общий характер зависимости; б — зависимость при различных значениях параметров связи; в — зависимость вблизи главного нуля в крупном масштабе

Таким образом, нули функции $G_S(\omega)$ находятся вблизи минимума только при $\delta_1 = \delta_2 = 0,1$, тогда как при $\delta_1 = \delta_2 = 0,0$ они отнесены в разные стороны на значительные расстояния, а в случае $\delta_1 = \delta_2 = 0,2$ — вообще отсутствуют.

На рис. 2.3, в показан левый нуль правой ветви функции $G_S(\omega)$ (где $\omega > 0$) в еще более крупном масштабе. Видно, что он приходится

на $\omega = 17,48571$. Рассчитанное по формуле (2.87) значение частоты резонанса системы составляет $\omega_S = 17,4857$ и показано стрелкой. Видно, что оно весьма близко к частоте, при которой функция $G_S(\omega)$ проходит через нуль.

Таким образом, можно видеть, что оба условия постоянства амплитуды (2.89) и (2.87) выполняются с весьма высокой степенью точности (до шести значащих цифр).

Выполненная численная проверка показывает, что из четырех возможных корней уравнения (2.89) только один соответствует частоте (2.87). Таким образом, условие (2.87) дополняет основной критерий (2.89) тем, что позволяет определить, какой именно из четырех корней уравнения (2.89) действительно соответствует переходу от убывания амплитуды к ее нарастанию. Из рис. 2.3, в видно, что этот корень соответствует убыванию функции $G_S(\omega)$ в области $\omega > 0$. То есть для выбора корня можно использовать условие отрицательности производной функции $G_S(\omega)$ по частоте:

$$\frac{dG_S}{d\omega} < 0 \quad (2.91)$$

или в развернутом виде:

$$2\omega^2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) < 0. \quad (2.92)$$

Для частоты можно записать:

$$\omega < \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2)}, \quad (2.93)$$

причем это соотношение должно быть дополнено условием

$$\delta_1\delta_2 < \omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2, \quad (2.94)$$

которое накладывает ограничение на величины параметров связи через производные.

Замечание. Приведенные условия (2.91)–(2.94) получены на основе анализа численного примера с конкретными заданными значениями параметров, то есть не исключена возможность необходимости коррекции этих условий при других таких значениях. Однако полное исследование подобной задачи, требующее вариации восьми параметров, является крайне громоздким, поэтому в рамки настоящей работы не входит и должно быть проделано отдельно. На практике в простейшем случае можно рекомендовать прямую проверку дополняющих друг друга соотношений (2.89) и (2.87), позволяющих выбрать корень уравнения (2.89) непосредственно.

2.5.4. Критерии для магнитоупругих колебаний

Запишем полученное значение частоты и критерия перехода для магнитоупругой колебательной системы, приведенной на рис. 2.1.

Так, из (2.87) и (2.88) получаем:

$$\omega_S = \sqrt{\frac{a_{12}a_{23} + a_{22}a_{13} - a_{15}a_{24} - a_{25}a_{14}}{a_{12} + a_{22}}}; \quad (2.95)$$

$$G_S(\omega) = \omega^4 - \omega^2(a_{13} + a_{23} + a_{12}a_{22} - a_{15}a_{25}) + a_{13}a_{23} - a_{14}a_{24}, \quad (2.96)$$

а условие (2.89) принимает вид

$$\omega_S^4 - \omega_S^2 \cdot (a_{13} + a_{23} + a_{12}a_{22} - a_{15}a_{25}) + a_{13}a_{23} - a_{14}a_{24} = 0, \quad (2.97)$$

где величины a_{ik} определяются формулами (2.27)–(2.42) или (2.43)–(2.59).

Получение явного вида выражений (2.95)–(2.97) тривиально, однако довольно громоздко, поэтому здесь не приводится.

2.5.5. Критерии трех режимов на примере реальных материалов

Рассмотрим предсказанную линеаризованной системой (2.19)–(2.24) возможность существования трех режимов — стационарной амплитуды, ее роста и убывания на примере реальных материалов типа ЖИГ и ТбФГ. Параметры этих материалов можно найти, например, в [13, 47], эти же параметры использованы в работах [16, 56].

На рис. 2.4 представлены зависимости функции G_S от частоты ω для ферритов двух различных составов: ЖИГ (а) и ТбФГ (б).

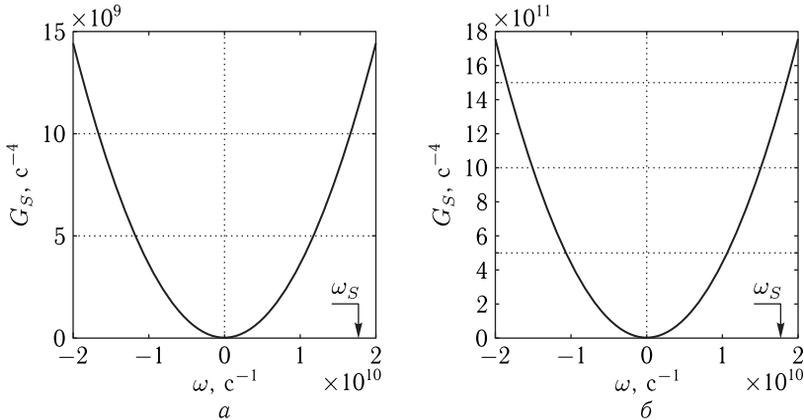


Рис. 2.4. Зависимости функции G_S от частоты ω для ферритов двух различных составов: ЖИГ (а) и ТбФГ (б). Параметры общие: $c_{44} = 7,64 \cdot 10^{11}$ эрг \cdot см $^{-3}$; $\rho = 5,17$ г \cdot см $^{-3}$; $\alpha = 0,02$; $\beta = 10^9$ с $^{-1}$; $d = 6,865 \cdot 10^{-5}$ см. Параметры специфические: ЖИГ (а): $4\pi M_0 = 1750$ Гс; $B_2 = 6,96 \cdot 10^6$ эрг \cdot см $^{-3}$; $H_0 = 2750$ Э; ТбФГ (б): $4\pi M_0 = 250$ Гс; $B_2 = 3,0 \cdot 10^7$ эрг \cdot см $^{-3}$; $H_0 = 1250$ Э

Из рис. 2.4 видно, что в обоих случаях функция G_S представляет собой параболу, симметричную относительно оси ординат, с единственным нулем при $\omega = 0$. Ветви параболы для ТбФГ поднимаются

вверх значительно круче (на два порядка), чем ветви параболы для ЖИГ, что, по-видимому, связано с большим значением константы B_2 для этого материала. Однако критические частоты, определяемые формулой (2.95) с учетом (2.27)–(2.42), для обоих ферритов близки друг к другу и составляют: $\omega_S(\text{ЖИГ}) = 1,7633 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$, $\omega_S(\text{ТбФГ}) = 1,7506 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$. Видно, что в обоих случаях эти частоты весьма далеки от нуля функции G_S , то есть критерий постоянства амплитуды не выполняется. Контрольная проверка развития колебаний во времени показывает, что в обоих случаях свободные колебаний затухают со временем релаксации порядка $7 \cdot 10^{-9} \text{ с}$, а амплитуда вынужденных колебаний принимает постоянное значение со временем установления той же длительности.

Представляет интерес найти условия, максимально близкие к реальности, при которых оба критерия (2.97) и (2.95) выполняются. Реальные материалы предоставляют в этом плане широкий выбор величины константы магнитоупругого взаимодействия B_2 . Проверка зависимости вида функции $G_S(\omega)$ от величины этой константы при всех остальных параметрах, соответствующих ЖИГ, показала, что резкое изменение $G_S(\omega)$ происходит при переходе значения B_2 через критическую величину B_{2C} , превышающую B_2 для ЖИГ в 46,86532 раза, то есть, если считать значение $B_2(\text{ЖИГ}) = 6,96 \cdot 10^6 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3}$ точным, то при $B_{2C} = B_2(\text{ЖИГ}) \times 46,86532 \approx 3,261826 \cdot 10^8 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3}$. При этом ветви параболы переходят от стремления вверх к стремлению

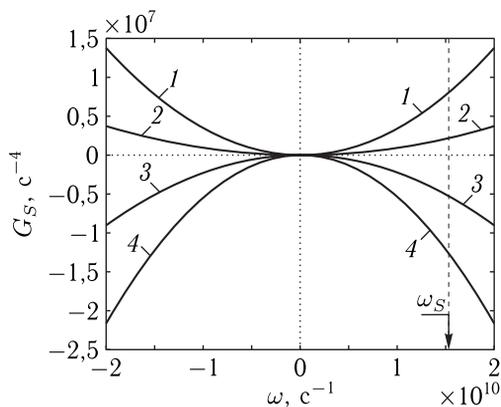


Рис. 2.5. Зависимость функции G_S от частоты ω при различных значениях B_2 , близких к критическому. Параметры: $4\pi M_0 = 1750 \text{ Гс}$; $c_{44} = 7,64 \cdot 10^{11} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3}$; $\rho = 5,17 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$; $\alpha = 0,02$; $\beta = 10^9 \text{ с}^{-1}$; $d = 6,865 \cdot 10^{-5} \text{ см}$; $B_2(\text{ЖИГ}) = 6,96 \cdot 10^6 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3}$; 1 — $B_2 \rightarrow B_2(\text{ЖИГ}) \times 46,86530$; 2 — $B_2 \rightarrow B_2(\text{ЖИГ}) \times 46,86531$; 3 — $B_2 \rightarrow B_2(\text{ЖИГ}) \times 46,86532$; 4 — $B_2 \rightarrow B_2(\text{ЖИГ}) \times 46,86533$

вниз, причем переверот происходит при весьма критичном значении такой константы.

Соответствующее изменение вида функции $G_S(\omega)$ при переходе величины константы B_2 через критическое значение B_{2C} иллюстрируется рис. 2.5. Из рисунка видно, что по мере роста значения B_2 в седьмой значащей цифре на единицу ветви параболы первоначально стремящиеся вверх, резко перескакивают вниз. При этом частота, определяемая критерием (2.95), равна $\omega_S = 1,5256 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$. Ввиду крайней резкости перескока ветвей параболы сверху вниз определить точное значение константы B_{2C} , превышающее семь значащих цифр, в настоящей работе не представилось возможным, однако очевидно, что переход ветвей происходит через их выстраивание вдоль горизонтальной оси, то есть на частоте ω_S правая ветвь должна приблизиться к нулю на величину бесконечно малую, что и обеспечит одновременное выполнение обоих критериев (2.97) и (2.95).

2.6. Развитие во времени колебаний магнитной и модельной систем

Рассмотрим теперь, в какой степени колебания осцилляторов, описываемые упрощенной системой (2.19)–(2.24), соответствуют колебаниям намагниченности, описываемым полной системой (2.1)–(2.3). Для сравнения обратимся к рис. 2.6.

На рис. 2.6 показано развитие колебаний компонент $m_x(1)$ и $x_1(2)$ во времени при различных коэффициентах константы магнитоупругого взаимодействия: $N = B_2/B_2(\text{ЖИГ})$. Кривые в левом столбце соответствуют полной системе (2.1)–(2.3), кривые в правом столбце — укороченной системе (2.19)–(2.24).

Кривая $a1$ построена при возбуждении магнитной системы по одной координате x . Из сравнения с кривой $a2$, соответствующей возбуждению первого осциллятора упрощенной системы, видно совпадение установившейся амплитуды в обоих случаях с точностью до единиц процентов. Однако при увеличении константы B_2 установившаяся амплитуда x_1 падает несколько быстрее, чем амплитуда m_x и при $N = 10$ это различие достигает почти двух раз. В этом случае с точки зрения совпадения установившихся амплитуд более удобным становится возбуждение магнитной системы сразу по двум координатам x и y . Однако в этом случае при $N = 1$ амплитуда m_x становится больше амплитуды x_1 почти в два раза, как это показано на рис. 2.6, $b1$ и рис. 2.6, $b2$.

Тем не менее при увеличении константы B_2 до $N = 10$ и более вплоть до $N = 40$ установившиеся амплитуды m_x и x_1 совпадают с точностью до единиц процентов, как это видно из рис. 2.6, $v1$ –рис. 2.6, $v2$ и рис. 2.6, $z1$ –рис. 2.6, $z2$.

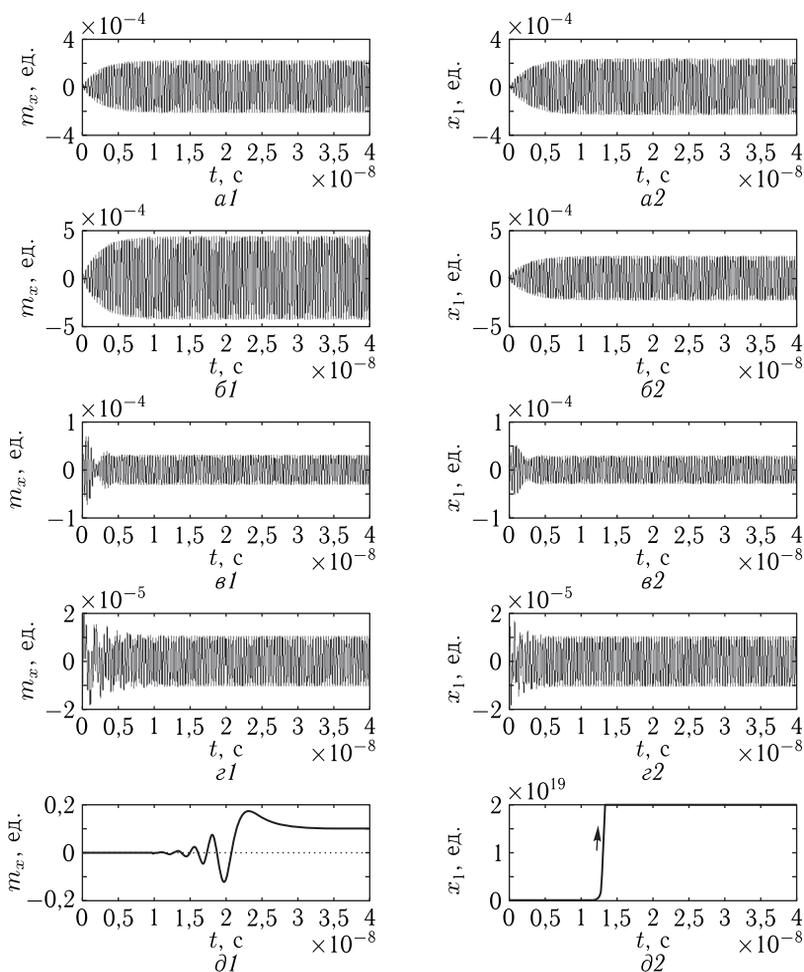


Рис. 2.6. Развитие колебаний компонент $m_x(1)$ и $x_1(2)$ во времени при различных коэффициентах константы магнитоупругого взаимодействия: $N = B_2/B_2(\text{ЖИГ})$. Частота возбуждения $f = 2800$ МГц. Условия возбуждения: $a - h_x = 0,01$ Э, $h_y = 0$; $N = 1$; $A = 0,01$; $б, в, г, д - h_x = 0,01$ Э, $h_y = 0,01$; везде $A = 0,01$. Коэффициент константы магнитоупругого взаимодействия: $a - N = 1$; $б - N = 1$; $в - N = 10$; $г - N = 40$; $д - N = 50$

При дальнейшем увеличении константы B_2 , начиная с $N \approx 47$, вектор намагниченности претерпевает переориентацию к направлению более близкому к плоскости пластины, что происходит через посредство нескольких затухающих осцилляций, как это видно из рис. 2.6 $д1$, соответствующего $N = 50$. Более подробно процесс переориентации описан в работе [56]. При таких же значениях константы B_2 амплитуда

осциллятора x_1 , как показано на рис. 2.6, $\partial 2$, устремляется к бесконечности, что соответствует переходу через критическое значение B_{2C} , рассмотренное в предыдущем разделе.

Таким образом, можно видеть, что переориентация вектора намагниченности в исходной магнитоупругой системе и уход на бесконечность амплитуды колебаний модельной системы осцилляторов происходит при одном и том же значении константы магнитоупругого взаимодействия $B_2 \rightarrow B_{2C}$.

2.7. Сравнение амплитуд колебаний магнитной и модельной систем при изменении константы магнитоупругого взаимодействия

Рассмотрим поведение полной и укороченной колебательных систем при изменении константы магнитоупругого взаимодействия B_2 более подробно.

На рис. 2.7 показаны зависимости амплитуд компонент намагниченности (а) и упругого смещения (б) от отношения константы магнитоупругого взаимодействия к той же константе для ЖИГ, то есть от $N = B_2/B_2(\text{ЖИГ})$. Точками показаны результаты расчета по полным уравнениям (2.1)–(2.3), сплошной линией — расчет по укороченной системе (2.19)–(2.24).

Из рисунка видно, что укороченная система в общем довольно близко описывает поведение полной системы во всем диапазоне изменения константы B_2 . При небольших значениях N от 1 до 2 значения амплитуд как магнитных, так и упругих колебаний, рассчитанные по укороченной системе, наиболее близко подходят к амплитудам, рассчитанным по полной системе при возбуждении только одной компонентой переменного поля: $h_x = 0,01 \text{ Э}$, $h_y = 0$ (точки 1). Различие здесь не превышает 20%. Однако при больших значениях N от 2 до 30 лучшее совпадение наблюдается с возбуждением обеими компонентами переменного поля: $h_x = 0,01 \text{ Э}$, $h_y = 0,01 \text{ Э}$ (точки 5, 6), где различие не превышает 10%. Для амплитуды магнитных колебаний (а) такое совпадение продолжается вплоть до $N \approx 47$, что соответствует значению константы B_{2C} , при котором происходит переориентация вектора намагниченности. Однако для упругих колебаний (б) значения амплитуд, рассчитанные по укороченной системе, от $N = 30$ вплоть до $N \approx 47$ лучше соответствуют полным значениям при возбуждении только по одной координате, однако другой по сравнению со случаем малых N : $h_x = 0$, $h_y = 0,01 \text{ Э}$ (точки 4). В этом случае различие также не превышает 30%. Смена координатных компонент переменного поля, обеспечивающих оптимальное возбуждение упругих колебаний при $N \geq 30$, по-видимому, обусловлено гиротропией полной системы, у укороченной системы отсутствующей. При достижении N значения

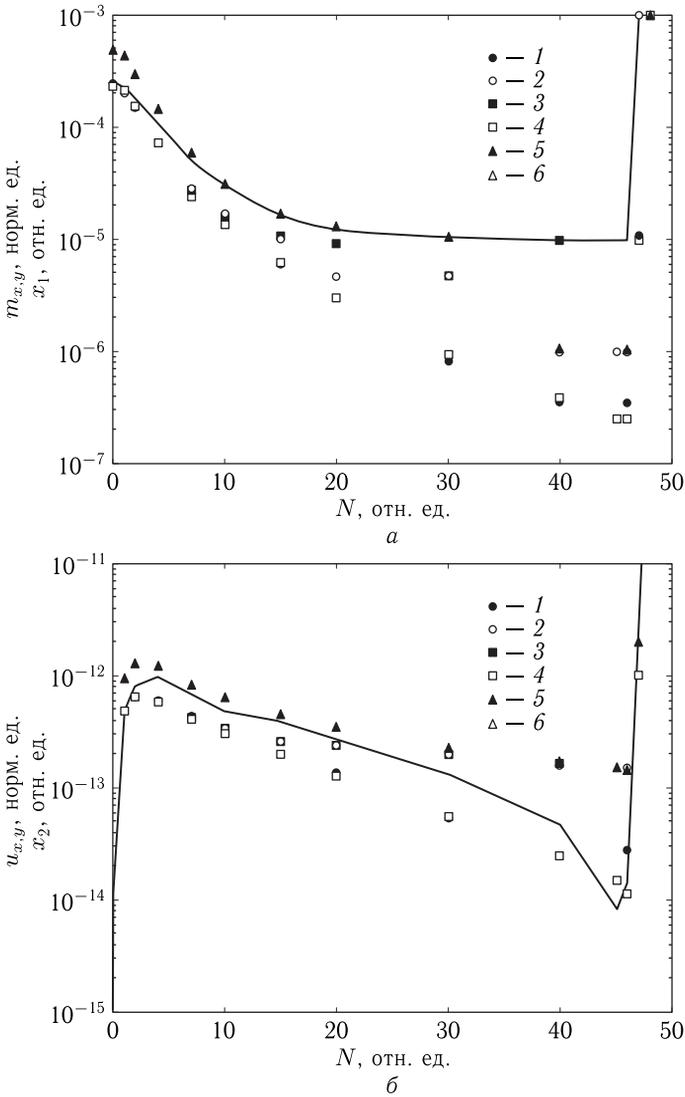


Рис. 2.7. Зависимости амплитуд компонент намагниченности (а) и упругого смещения (б) от отношения константы магнитоупругого взаимодействия к той же константе для ЖИГ. Точки — результаты расчета по полным уравнениям (2.1)–(2.3), сплошная линия — расчет по укороченной системе (2.19)–(2.24). 1 — m_x , u_x при $h_x = 0,01$ Э, $h_y = 0$; 2 — m_y , u_y при $h_x = 0,01$ Э, $h_y = 0$; 3 — m_x , u_x при $h_x = 0$, $h_y = 0,01$ Э; 4 — m_y , u_y при $h_x = 0$, $h_y = 0,01$ Э; 5 — m_x , u_x при $h_x = 0,01$ Э, $h_y = 0,01$ Э; 6 — m_y , u_y при $h_x = 0,01$ Э, $h_y = 0,01$ Э. Положения точек 5 и 6 совпадают, то есть эти точки полностью накладываются друг на друга. Сплошная линия построена при $A = 0,01$

вблизи 47 укороченная система уходит на бесконечность, что также соответствует критическому значению константы B_{2C} .

Таким образом, укороченная система описывает свойства полной системы во всем интервале изменения константы B_2 от B_2 (ЖИГ) до B_{2C} с точностью не хуже 30%, причем уход укороченной системы на бесконечность эквивалентен переориентации вектора намагниченности и оба они происходят при одном и том же значении константы $B_{2C} \approx 47 \cdot B_2$ (ЖИГ).

Выводы по главе 2

В применении к задаче анализа работы магнитострикционного преобразователя СВЧ-диапазона на частоте ферромагнитного резонанса рассмотрено возбуждение гиперзвуковых колебаний переменным магнитным полем в геометрии плоскопараллельной нормально намагниченной ферритовой пластины.

Записаны связанные уравнения движения вектора намагниченности и упругого смещения с граничными условиями и возбуждением переменным магнитным полем.

Для упрощения задачи предложена линеаризованная система уравнений, основанная на модели связанных осцилляторов, в результате чего полная система, содержащая семь уравнений первого порядка и четыре граничных условия, сведена к системе четырех уравнений первого порядка без граничных условий.

Введены эквивалентные параметры укороченной системы, выраженные через параметры материала исходной ферритовой пластины. На основе анализа соотношения составляющих эквивалентных параметров для реального случая железиттриевого граната (ЖИГ), получены укороченные выражения, описывающие параметры задачи с точностью не менее двух порядков.

Укороченная система уравнений приведена к виду, соответствующему модельной системе из двух осцилляторов, связанных через производные от переменных.

Обе системы уравнений, полная и укороченная, решены методом Рунге–Кутты четвертого порядка, получено развитие колебаний во времени.

Показано, что, в зависимости от величины параметров связи, возможны два режима вынужденных колебаний, соответствующие спаду и нарастанию амплитуды во времени, разделенные третьим режимом (точкой бифуркации), в котором амплитуда вынужденных колебаний сохраняет постоянное значение, причем критичность порога перехода от одного режима к другому по константе связи составляет не менее шести значащих цифр.

Рассмотрено аналитическое решение укороченной системы в режиме постоянной амплитуды колебаний. Найдены два критерия, один

из которых определяет критическое значение константы связи, соответствующее переходу между режимами, а другой дает частоту резонансных колебаний системы в точке перехода.

Результаты рассмотрения укороченной системы применены к реальному случаю возбуждения пластины из ЖИГ. Выявлены условия перехода от режима убывания амплитуды к режиму ее нарастания. Отмечено, что в реальном случае железиттриевого граната амплитуда нарастающих колебаний ограничивается на достаточно высоком постоянном уровне, обусловленном нелинейной расстройкой магнитной колебательной системы.

Показано, что точка перехода между режимами, соответствующая бесконечному росту амплитуды колебаний модельной системы, для случая ЖИГ эквивалентна точке переориентации вектора намагниченности, причем тот и другой переходы происходят при одном и том же критическом значении константы магнитоупругого взаимодействия.

Отмечено, что модельная система связанных осцилляторов описывает как развитие во времени, так и стационарное значение амплитуды установившихся колебаний реального материала во всем допустимом интервале изменения величины константы магнитоупругого взаимодействия с точностью не хуже 30%.

Глава 3

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ ГИПЕРЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ МАГНИТОСТРИКЦИОННОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ В КВАДРАТИЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В настоящей главе продолжено рассмотрение возбуждения гиперзвуковых колебаний переменным магнитным полем в геометрии магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов. В отличие от предыдущей главы, ограниченной только линейными колебаниями, введено квадратичное приближение, позволившее рассчитать ряд физических эффектов, интерпретация которых в рамках линейной модели недоступна. Рассмотрено развитие колебаний во времени, выполнен анализ амплитудно-частотных характеристик, выявлены пределы применимости и точность квадратичного приближения вплоть до углов прецессии намагниченности, достигающих 40 градусов. Показано, что использование квадратичного приближения вместо полного решения приводит к сокращению времени машинного счета на два порядка.

Основное изложение материала в данной главе следует работе [21]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

3.1. Задача возбуждения гиперзвуковых колебаний в условиях сильной нелинейности

В главе 2 на основании работы [18] предложен аппарат, позволяющий свести задачу о возбуждении гиперзвука магнитострикционным преобразователем в условиях ФМР к упрощенной модели возбуждения двух связанных осцилляторов — магнитного и упругого. Предложена линеаризованная система, содержащая два уравнения второго порядка, коэффициенты которых определяются параметрами материала и геометрией преобразователя, а также показана возможность ее аналитического решения для случая свободных колебаний. На основе численного решения выявлены два режима вынужденных колебаний, соответствующих спаду и нарастанию амплитуды во времени. Найдены аналитические

критерии, определяющие критическое значение константы связи и частоту резонансных колебаний. Показано, что точка перехода, соответствующая бесконечному росту амплитуды колебаний модельной системы, для случая железиттриевого граната эквивалентна точке переориентации вектора намагниченности.

Однако рассмотрение, выполненное в работе [18], проведено путем линеаризации полной системы связанных магнитоупругих уравнений [16], что исключает явления нелинейного характера и не позволяет рассматривать возможные пути повышения амплитуды возбуждаемых колебаний. Наряду с этим линеаризация препятствует определению максимального уровня нелинейного ограничения колебаний [1, 55], исследованию импульсного и комбинационного возбуждений гиперзвука [57, 58], а также других явлений, в том числе прецессии намагниченности второго порядка [59–65].

В настоящей главе в продолжение предыдущей главы предпринята попытка расширения возможностей модели связанных осцилляторов, путем введения квадратичного приближения с целью упрощения системы связанных магнитоупругих уравнений. Получена система двух уравнений второго порядка, позволяющая описать некоторые из перечисленных выше нелинейных явлений с высокой точностью.

3.2. Геометрия задачи и основные уравнения

Геометрия задачи совпадает с приведенной в главе 1 на рис. 1.1. Там же приведены основные уравнения с соответствующими граничными условиями (1.1)–(1.7). Повторим здесь только необходимые для дальнейшего рассмотрения.

Основная система уравнений движения для нормированных компонент намагниченности имеет вид [16, 18]:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \cdot [(m_y + \alpha m_x m_z) \cdot H_z - (m_z - \alpha m_y m_x) \cdot H_y - \alpha \cdot (m_y^2 + m_z^2) \cdot H_x], \quad (3.1)$$

где уравнения для m_y , m_z получаются циклической перестановкой x , y , z .

Уравнения для компонент упругого смещения $u_{x,y}$ имеют вид

$$\frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial t^2} = -2\beta \frac{\partial u_{x,y}}{\partial t} + \frac{c_{44}}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial z^2}; \quad (3.2)$$

граничные условия

$$c_{44} \frac{\partial u_{x,y}}{\partial z} \Big|_{z=\pm d/2} = -B_2 m_{x,y} m_z. \quad (3.3)$$

Полные эффективные поля имеют вид [16]

$$H_x = h_x - \frac{B_2}{M_0} \left[m_y \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + m_z \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right]. \quad (3.4)$$

Выражение для H_y получается циклической перестановкой x, y, z .

$$H_z = H_0 - 4\pi M_0 m_z - \frac{B_2}{M_0} \left[m_x \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + m_y \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right]. \quad (3.5)$$

Таким образом, здесь имеются три уравнения первого порядка (3.1) для компонент намагниченности и два уравнения второго порядка (3.2) для компонент упругого смещения, что эквивалентно системе из семи уравнений первого порядка. Анализ развития колебаний в такой системе методом фазового пространства [1, 2, 55] требует нахождения координат особых точек, что сводится к решению линейного алгебраического уравнения седьмой степени. Сложность решения такой задачи стимулирует поиск возможностей уменьшения общего числа уравнений, одна из которых реализована в предыдущей главе путем линеаризации, исключающей нелинейность [18]. Настоящая работа является развитием материала главы 2 путем введения квадратичного приближения, позволяющего учесть нелинейные свойства рассматриваемой системы.

3.2.1. Основные предположения и укороченные эффективные поля

Аналогично [18] полагаем следующее: анизотропия отсутствует: $K_0 = 0$, $K_1 = 0$, $K_2 = 0$; продольные упругие волны отсутствуют: $B_1 = 0$; упругие смещения вдоль оси Oy отсутствуют: $u_y = 0$; упругие волны распространяются только вдоль оси Oz : $\partial u_{x,y}/\partial x = 0$; $\partial u_{x,y}/\partial y = 0$; внешние переменные поля отсутствуют: $h_x = 0$, $h_y = 0$.

Заметим, что предположение $u_y = 0$ не является безусловно корректным, однако в ряде случаев, будучи примененным на первом этапе, позволяет существенно сократить требуемый объем вычислений.

Для упрощения дальнейшей записи введем для постоянного поля обозначение с учетом размагничивания:

$$H_p = H_0 - 4\pi M_0, \quad (3.6)$$

то есть

$$H_0 = H_p + 4\pi M_0. \quad (3.7)$$

При этом эффективные поля (3.4)–(3.5) принимают вид:

$$H_x = -\frac{B_2}{M_0} \cdot m_z \frac{\partial u_x}{\partial z}; \quad (3.8)$$

$$H_y = 0; \quad (3.9)$$

$$H_z = H_p + 4\pi M_0 - 4\pi M_0 m_z - \frac{B_2}{M_0} \cdot m_x \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (3.10)$$

3.3. Квадратичное приближение

Условие сохранения длины вектора намагниченности требует выполнения соотношения [43]

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1, \quad (3.11)$$

откуда

$$m_z^2 = 1 - m_x^2 - m_y^2, \quad (3.12)$$

а также

$$m_z = \sqrt{1 - m_x^2 - m_y^2}. \quad (3.13)$$

Рассмотрим задачу в квадратичном приближении, то есть положим $m_{x,y} \ll 1$ и разложим выражение (3.13) в ряд Тейлора в окрестности единицы с точностью до второй степени по m_x и m_y :

$$m_z = 1 - \frac{1}{2}m_x^2 - \frac{1}{2}m_y^2. \quad (3.14)$$

3.3.1. Эффективные поля в квадратичном приближении

Подставляя (3.14) в (3.8)–(3.10) и оставляя члены не выше второй степени по намагниченности, получаем эффективные поля в виде:

$$H_x = \left(-\frac{B_2}{M_0} + \frac{B_2}{2M_0} \cdot m_x^2 + \frac{B_2}{2M_0} \cdot m_y^2 \right) \frac{\partial u_x}{\partial z}; \quad (3.15)$$

$$H_y = 0; \quad (3.16)$$

$$H_z = H_p + 2\pi M_0 m_x^2 + 2\pi M_0 m_y^2 - \frac{B_2}{M_0} \cdot m_x \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (3.17)$$

В эти выражения входит производная от упругого смещения по координате $\partial u_x / \partial z$. Согласно работе [16] (формула (62)), эта производная имеет вид:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{B_2}{c_{44}} \cdot m_x m_z + \frac{2}{d} \cdot v_x, \quad (3.18)$$

где v_x — функция, удовлетворяющая уравнению (формула (53))

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{c_{44}\pi^2}{\rho d^2} \cdot v_x = \frac{4B_2 d}{c_{44}\pi^2} \cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} (m_x m_z) + 2\beta \frac{\partial}{\partial t} (m_x m_z) \right]. \quad (3.19)$$

Это уравнение, в совокупности с уравнениями для намагниченности типа (3.1), составляет полную систему, описывающую магнитоупругие колебания в данной геометрии.

Поскольку функция v_x представляет собой решение краевой задачи с однородными (нулевыми) граничными условиями для координатных производных, редуцированное к случаю первой упругой моды [16], для удобства терминологии далее будем называть ее «редуцированной функцией упругого смещения», или просто «редуцированным упругим

смещением». При этом полная x -компонента упругого смещения имеет вид (формула (51) в [16]):

$$u_x = -\frac{B_2}{c_{44}} m_x m_z \cdot z + v_x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right) \quad (3.20)$$

и на поверхностях пластины при $z = \pm d/2$ равна

$$u_{xS} = \pm \left(-\frac{B_2 d}{2c_{44}} m_x m_z + v_x \right). \quad (3.21)$$

С учетом квадратичного приближения (3.14) производная (3.18) принимает вид:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{B_2}{c_{44}} \cdot m_x + \frac{B_2}{2c_{44}} \cdot m_x^3 + \frac{B_2}{2c_{44}} \cdot m_x m_x^2 + \frac{2}{d} \cdot v_x. \quad (3.22)$$

Подставляя (3.22) в (3.15)–(3.17), получаем поля в виде:

$$H_x = \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}} \cdot m_x - \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}} \cdot m_x^3 - \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}} \cdot m_x m_y^2 - \frac{2B_2}{M_0 d} \cdot v_x + \frac{B_2}{M_0 d} \cdot m_x^2 v_x + \frac{B_2}{M_0 d} m_y^2 v_x; \quad (3.23)$$

$$H_y = 0; \quad (3.24)$$

$$H_z = H_p + \left(2\pi M_0 + \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}} \right) \cdot m_x^2 + 2\pi M_0 \cdot m_y^2 - \frac{2B_2}{M_0 d} m_x v_x. \quad (3.25)$$

Введем вспомогательные обозначения:

$$b_0 = 2\pi M_0; \quad (3.26)$$

$$b_1 = \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}}; \quad (3.27)$$

$$b_2 = \frac{B_2}{M_0 d}. \quad (3.28)$$

С этими обозначениями поля (3.23)–(3.25) принимают вид:

$$H_x = b_1 m_x - b_1 m_x^3 - b_1 m_x m_y^2 - 2b_2 v_x + b_2 m_x^2 v_x + b_2 m_y^2 v_x; \quad (3.29)$$

$$H_y = 0; \quad (3.30)$$

$$H_z = H_p + (b_0 + b_1) \cdot m_x^2 + b_0 m_y^2 - 2b_2 m_x v_x. \quad (3.31)$$

3.4. Уравнения для намагниченности первого порядка

С учетом (3.30) уравнения типа (3.1) для m_x и m_y принимают вид:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1 + \alpha^2} [(m_y + \alpha m_x m_z) H_z - \alpha (m_y^2 + m_z^2) H_x]; \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1 + \alpha^2} [(m_z + \alpha m_x m_y) H_x - (m_x - \alpha m_y m_z) H_z]. \quad (3.33)$$

Уравнение для m_z не рассматриваем, так как его правая часть мала (для полной корректности это требует проверки, которую пока проделывать не будем).

Положим, что затухание мало, то есть $\alpha \ll 1$. При этом $\alpha \cdot m_{x,y}^3 \ll m_{x,y}^3$ и слагаемыми вида $\alpha \cdot m_{x,y}^3$ будем пренебрегать. При этом, с учетом (3.14), входящие в (3.32)–(3.33) выражения в круглых скобках принимают вид:

$$(m_y + \alpha m_x m_z) = m_y + \alpha m_x; \quad (3.34)$$

$$(m_y^2 + m_z^2) = 1 - \frac{1}{2} m_x^2 + \frac{1}{2} m_y^2; \quad (3.35)$$

$$(m_z + \alpha m_x m_y) = 1 - \frac{1}{2} m_x^2 - \frac{1}{2} m_y^2 + \alpha m_x m_y; \quad (3.36)$$

$$(m_y - \alpha m_y m_z) = m_x - \alpha m_y. \quad (3.37)$$

С использованием (3.29)–(3.31) и (3.34)–(3.37), оставляя члены степеней не выше $m_{x,y}^3$ и $m_{x,y} v_x$, получаем слагаемые правых частей уравнений (3.32)–(3.33):

$$(m_y + \alpha m_x m_z) \cdot H_z = H_p m_y + (b_0 + b_1) \cdot m_x^2 m_y + b_0 m_y^3 - 2b_2 m_x m_y v_x + \alpha H_p m_x; \quad (3.38)$$

$$\alpha \cdot (m_y^2 + m_z^2) \cdot H_x = \alpha b_1 m_x - 2\alpha b_2 v_x; \quad (3.39)$$

$$(m_z + \alpha m_x m_y) \cdot H_x = b_1 m_x - \frac{3}{2} b_1 m_x^3 - \frac{3}{2} b_1 m_x m_y^2 - 2b_2 v_x + 2b_2 m_x^2 v_x + 2b_2 m_y^2 v_x; \quad (3.40)$$

$$(m_x - \alpha m_y m_z) \cdot H_z = H_p m_x + (b_0 + b_1) m_x^3 + b_0 m_x m_y^2 - 2b_2 m_x^2 v_x - \alpha H_p m_y. \quad (3.41)$$

Подставим (3.38)–(3.41) в (3.32)–(3.33), а также учтем, что при реальных параметрах материала (например, ЖИГ): $b_1 \ll H_p$, $b_1 \ll b_2$, причем $b_2 \sim H_p$. То есть везде при умножении b_1 на $m_{x,y}^3$ получаются величины четвертого порядка малости, которые отбрасываем. При этом, учитывая, что $\alpha \ll 1$, получаем:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma [H_p m_y + b_0 m_x^2 m_y + b_0 m_y^3 - 2b_2 m_x m_y v_x + \alpha (H_p - b_1) m_x + 2\alpha b_2 v_x]; \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = \gamma [(H_p - b_1) m_x + b_0 m_x^3 + b_0 m_x m_y^2 + 2b_2 v_x - 4b_2 m_x^2 v_x - 2b_2 m_y^2 v_x - \alpha H_p m_y]. \quad (3.43)$$

Это два уравнения первого порядка для компонент намагниченности m_x , m_y , связанные с уравнением второго порядка (3.19) для компоненты вспомогательной функции упругого смещения v_x , определяющей основную компоненту упругого смещения u_x через посредство формул (3.20) и (3.21).

3.4.1. Сведение двух уравнений первого порядка к одному уравнению второго порядка

Приведем теперь два уравнения первого порядка для компонент намагниченности m_x и m_y к одному уравнению второго порядка для компоненты m_x .

В уравнении (3.42) перенесем все слагаемые в левую часть, раскроем скобки и продифференцируем по времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + \gamma H_p \frac{\partial m_y}{\partial t} + \gamma b_0 \frac{\partial}{\partial t} (m_x^2 m_y) + \gamma b_0 \frac{\partial}{\partial t} (m_y^3) - \\ - 2\gamma b_2 \frac{\partial}{\partial t} (m_x m_y v_x) + \alpha \gamma (H_p - b_1) \frac{\partial m_x}{\partial t} + 2\alpha \gamma b_2 \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Раскрываем скобки при производных:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_x^2 m_y) = 2m_x m_y \frac{\partial m_x}{\partial t} + m_x^2 \frac{\partial m_y}{\partial t}; \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_y^3) = 3m_y^2 \frac{\partial m_y}{\partial t}; \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_x m_y v_x) = m_y v_x \frac{\partial m_x}{\partial t} + m_x v_x \frac{\partial m_y}{\partial t} + m_x m_y \frac{\partial v_x}{\partial t}. \quad (3.47)$$

Подставляя производные (3.45)–(3.47) в уравнение (3.44), меняя порядок слагаемых и выделяя производную $\partial m_y / \partial t$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + \alpha \gamma (H_p - b_1) \frac{\partial m_x}{\partial t} + 2\alpha \gamma b_2 \frac{\partial v_x}{\partial t} + \\ + 2\gamma b_0 m_x m_y \frac{\partial m_x}{\partial t} - 2\gamma b_2 m_y v_x \frac{\partial m_x}{\partial t} - 2\gamma b_2 m_x m_y \frac{\partial v_x}{\partial t} + \\ + (\gamma H_p + \gamma b_0 m_x^2 + 3\gamma b_0 m_y^2 - 2\gamma b_2 m_x v_x) \cdot \frac{\partial m_y}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Подставляя производную $\partial m_y / \partial t$ в соответствии с (3.43) и оставляя члены не выше третьего порядка малости, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + \alpha \gamma (H_p - b_1) \frac{\partial m_x}{\partial t} + \gamma^2 H_p (H_p - b_1) m_x + \\ + 2\gamma^2 H_p b_2 v_x + 2\alpha \gamma b_2 \frac{\partial v_x}{\partial t} + 2\gamma^2 H_p b_0 m_x^3 - \\ - 2\gamma^2 (3H_p - b_0) b_2 m_x^2 v_x - 4\gamma^2 b_2^2 m_x v_x^2 - \\ - \alpha \gamma^2 H_p^2 m_y + 2\gamma b_0 m_x m_y \frac{\partial m_x}{\partial t} - 2\gamma b_2 m_y v_x \frac{\partial m_x}{\partial t} - \\ - 2\gamma b_2 m_x m_y \frac{\partial v_x}{\partial t} + 4\gamma^2 H_p b_0 m_x m_y^2 - 2\gamma^2 (H_p - 3b_0) b_2 m_y^2 v_x = 0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Это уравнение — для компоненты намагниченности m_x , однако в некоторых слагаемых оно содержит компоненту m_y , которая не позволяет рассматривать это уравнение независимо от получаемого подобным путем уравнения для m_y (здесь не приводим ввиду аналогичности).

Развязать эти уравнения можно в приближении круговой прецессии, реализованном далее.

3.4.2. Приближение круговой прецессии

Предположим, что прецессия намагниченности является круговой по правому кругу с частотой ω_0 . Такое предположение справедливо, если в плоскости пластины какое-либо нарушение симметрии (например анизотропия, размагничивание или постоянное поле) отсутствует, то есть любые ориентации намагниченности в плоскости пластины являются энергетически равноправными. В настоящей задаче некоторое неравноправие может быть обусловлено магнитоупругим взаимодействием, имеющим кубическую симметрию, однако контрольный численный расчет по полным уравнениям (3.1)–(3.3), выполненный подобно проведенному в работе [16], показывает, что даже при величине константы магнитоупругого взаимодействия на порядок превышающей таковую для ЖИГ, прецессия остается круговой с точностью до долей процента.

Таким образом, будем считать, что

$$m_x = m_0 \cdot \sin(\omega_0 t); \quad (3.50)$$

$$m_y = -m_0 \cdot \cos(\omega_0 t), \quad (3.51)$$

или в эквивалентном виде

$$m_x = m_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (3.52)$$

$$m_y = m_0 \cdot \sin(\omega_0 t), \quad (3.53)$$

где m_0 — амплитуда, для данного рассмотрения значения не имеющая, а ω_0 — частота собственных колебаний, в линейном приближении [18] близкая к величине, свойственной случаю отсутствия магнитоупругости [43]:

$$\omega_0 = \gamma H_p. \quad (3.54)$$

Можно видеть, что в обоих случаях, (3.50)–(3.51) и (3.52)–(3.53), выполняется соотношение

$$m_y = -\frac{1}{\gamma H_p} \cdot \frac{dm_x}{dt}. \quad (3.55)$$

Заметим, что поскольку частота (3.54) свойственна только линейному режиму в отсутствие магнитоупругости [43], то возможное изменение собственной частоты за счет нелинейности (нелинейная расстройка) здесь не учитывается, то есть принятое предположение накладывает определенное ограничение на амплитуду рассматриваемых здесь свободных колебаний. В случае установившихся вынужденных колебаний прецессия происходит с частотой вынуждающей силы ω_0 ,

поэтому вместо (3.54) надо брать частоту этой силы (например, переменного поля), то есть вместо (3.55) надо использовать формулу

$$m_y = -\frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{dm_x}{dt}. \quad (3.56)$$

На данном этапе пока рассмотрим свободные колебания, то есть ограничимся формулой (3.55), подставляя которую в (3.49) и приводя подобные члены, получаем уравнение для свободных колебаний компоненты намагниченности m_x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + \alpha\gamma(2H_p - b_1) \cdot \frac{\partial m_x}{\partial t} + \gamma^2 H_p (H_p - b_1) \cdot m_x + \\ + 2\gamma^2 H_p b_2 \cdot v_x + 2\alpha\gamma b_2 \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} + 2\gamma^2 H_p b_0 \cdot m_x^3 - \\ - 2\gamma^2 (3H_p - b_0) b_2 \cdot m_x^2 v_x - 4\gamma^2 b_2^2 \cdot m_x v_x^2 + \\ + \frac{2b_0}{H_p} \cdot m_x \left(\frac{\partial m_x}{\partial t} \right)^2 + \frac{2b_2}{H_p} \cdot m_x \left(\frac{\partial m_x}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} \right) + \\ + \frac{6b_0 b_2}{H_p^2} \cdot v_x \left(\frac{\partial m_x}{\partial t} \right)^2 = 0. \quad (3.57) \end{aligned}$$

Это уравнение второго порядка для компоненты намагниченности m_x в квадратичном приближении, полностью отвязанное от подобного уравнения для m_y (тождественного полученному с точностью до замены индексов x, y).

3.5. Уравнение для упругого смещения

Рассмотрим теперь уравнение (3.19) для упругого смещения v_x . Введем вспомогательные обозначения:

$$c_1 = \frac{c_{44}\pi^2}{\rho d^2}; \quad (3.58)$$

$$c_2 = \frac{4B_2 d}{c_{44}\pi^2}. \quad (3.59)$$

С этими обозначениями уравнение (3.19) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial v_x}{\partial t} + c_1 \cdot v_x = c_2 \cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} (m_x m_z) + 2\beta \frac{\partial}{\partial t} (m_x m_z) \right]. \quad (3.60)$$

Раскрытие производных по формулам, аналогичным (3.45)–(3.47), приводит к крайне громоздким выражениям. Однако контрольный численный расчет по полным уравнениям (3.1)–(3.3), выполненный аналогично проведенному в работе [20], при параметрах материала, соответствующих ЖИГ, показывает, что правая часть уравнения (3.60) в линейном режиме меньше левой приблизительно в 10 раз, а в сильно нелинейном — не менее чем в 5 раз. Таким образом, входящие в правую

часть члены третьего порядка малости соответствуют относительно левой части четвертому порядку, то есть ими в принятом приближении можно пренебречь. При этом входящую в правую часть компоненту намагниченности m_z можно не рассматривать в квадратичном приближении вида (3.14), а просто положить равной единице. При этом уравнение (3.60) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial v_x}{\partial t} + c_1 \cdot v_x - 2\beta c_2 \frac{\partial m_x}{\partial t} - c_2 \cdot \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} = 0. \quad (3.61)$$

Выражая вторую производную от компоненты намагниченности m_x в соответствии с (3.57) и подставляя в (3.61), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + 2(\beta + \alpha\gamma b_2 c_2) \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} + (c_1 + 2\gamma^2 H_p b_2 c_2) \cdot v_x + \\ + \gamma^2 H_p (H_p - b_1) c_2 \cdot m_x + [\alpha\gamma(2H_p - b_1) - 2\beta] c_2 \cdot \frac{\partial m_x}{\partial t} + \\ + 2\gamma^2 H_p b_0 c_2 \cdot m_x^3 - 2\gamma^2 (3H_p - b_0) b_2 c_2 \cdot m_x^2 v_x - 4\gamma^2 b_2^2 c_2 \cdot m_x v_x^2 + \\ + \frac{2b_0 c_2}{H_p} \cdot m_x \left(\frac{\partial m_x}{\partial t} \right)^2 + \frac{2b_2 c_2}{H_p} \cdot m_x \left(\frac{\partial m_x}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} \right) + \\ + \frac{6b_0 b_2 c_2}{H_p^2} \cdot \left(\frac{\partial m_x}{\partial t} \right)^2 \cdot v_x = 0, \quad (3.62) \end{aligned}$$

Это уравнение второго порядка для компоненты редуцированной функции упругого смещения v_x в квадратичном приближении.

Уравнения (3.57) и (3.62) составляют искомую систему двух уравнений второго порядка для свободных колебаний намагниченности и редуцированного упругого смещения в квадратичном приближении.

3.6. Возбуждение переменным полем

Для рассмотрения вынужденных колебаний будем полагать, что на систему действует синусоидальное переменное поле круговой поляризации с частотой ω и амплитудой h_0 , то есть

$$h_x = h_0 \cdot \cos(\omega t), \quad (3.63)$$

$$h_y = h_0 \cdot \sin(\omega t). \quad (3.64)$$

Согласно [18] (формула (19)), в рассматриваемой задаче возбуждение магнитных колебаний переменным полем описывается выражением

$$F_m(h) = \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \cdot \frac{\partial h_y}{\partial t} + \frac{\alpha\gamma}{1 + \alpha^2} \cdot \frac{\partial h_x}{\partial t} + \frac{\gamma^2 H_p}{1 + \alpha^2} \cdot h_x. \quad (3.65)$$

Выполненная в [18] численная оценка показывает, что первые два слагаемых в правой части этой формулы меньше третьего на три–пять порядков, то есть их можно не учитывать, в результате чего при $\alpha \ll 1$, получаем:

$$F_m(h) = \gamma^2 H_p \cdot h_x. \quad (3.66)$$

Для описания вынужденных колебаний намагниченности это выражение надо подставить в правую часть уравнения (3.57).

Возбуждение упругих колебаний происходит за счет связи с магнитными через магнитоупругое взаимодействие. Такая связь осуществляется за счет правой части уравнения (3.61), куда входит вторая производная от намагниченности. Подставляя такую производную в соответствии с уравнением (3.57), в правую часть которого подставлено вынуждающее слагаемое вида (3.66), получаем в правой части уравнения (3.61) слагаемое, также пропорциональное вынуждающему полю h_x . Подробный вид правой части получающегося уравнения для упругих колебаний приведен в работе [18] в формуле (3.24). Однако очевидно, что упругие колебания непосредственно переменным магнитным полем возбуждаться не могут, то есть наличие подобного слагаемого в уравнении для упругости с физической стороны корректным не является. С математической стороны получается как бы двукратный учет одного и того же возбуждения переменным полем, действующим только на намагниченность. Чтобы избежать такой некорректности, в правую часть уравнения (3.61) надо подставлять вторую производную от намагниченности в виде, свободном от возбуждающего переменного поля. При этом правая часть уравнения для упругости (3.62) остается равной нулю, а возбуждение упругих колебаний осуществляется за счет слагаемых связи, содержащих переменную намагниченность.

Замечание. Напомним дополнительно, что при возбуждении переменным полем частоты ω , отличной от частоты свободных колебаний ω_0 , вместо формулы (3.55) надо использовать (3.56), однако пока положим, что частота возбуждения отличается от собственной не более чем в пределах ширины резонансной кривой, то есть использование (3.55) будем считать допустимым. Правомерность такого допущения будет проверена далее в разделе 3.11 на основе сравнения с решением полной системы (3.1)–(3.3).

3.7. Система уравнений для вынужденных колебаний намагниченности и упругого смещения

В результате получаем следующую систему связанных уравнений для вынужденных колебаний намагниченности и упругого смещения в квадратичном приближении.

Уравнение для намагниченности

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + \alpha\gamma(2H_p - b_1) \cdot \frac{\partial m_x}{\partial t} + \gamma^2 H_p (H_p - b_1) \cdot m_x + \\ + 2\gamma^2 H_p b_2 \cdot v_x + 2\alpha\gamma b_2 \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} + 2\gamma^2 H_p b_0 \cdot m_x^3 - \\ - 2\gamma^2 (3H_p - b_0) b_2 \cdot m_x^2 v_x - 4\gamma^2 b_2^2 \cdot m_x v_x^2 + \\ + \frac{2b_0}{H_p} \cdot m_x \left(\frac{\partial m_x}{\partial t} \right)^2 + \frac{2b_2}{H_p} \cdot m_x \left(\frac{\partial m_x}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} \right) + \\ + \frac{6b_0 b_2}{H_p^2} \cdot v_x \left(\frac{\partial m_x}{\partial t} \right)^2 = \gamma^2 H_p \cdot h_0 \cdot \cos(\omega t); \quad (3.67) \end{aligned}$$

уравнение для редуцированного упругого смещения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + 2(\beta + \alpha\gamma b_2 c_2) \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} + (c_1 + 2\gamma^2 H_p b_2 c_2) \cdot v_x + \\ + \gamma^2 H_p (H_p - b_1) c_2 \cdot m_x + [\alpha\gamma(2H_p - b_1) - 2\beta] A_2 \cdot \frac{\partial m_x}{\partial t} + \\ + 2\gamma^2 H_p b_0 c_2 \cdot m_x^3 - 2\gamma^2 (3H_p - b_0) b_2 c_2 \cdot m_x^2 v_x - 4\gamma^2 b_2^2 c_2 \cdot m_x v_x^2 + \\ + \frac{2b_0 c_2}{H_p} \cdot m_x \left(\frac{\partial m_x}{\partial t} \right)^2 + \frac{2b_2 c_2}{H_p} \cdot m_x \left(\frac{\partial m_x}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} \right) + \\ + \frac{6b_0 b_2 c_2}{H_p^2} \cdot \left(\frac{\partial m_x}{\partial t} \right)^2 \cdot v_x = 0, \quad (3.68) \end{aligned}$$

где $b_{0,1,2}$, $c_{1,2}$ и H_p определяются формулами (3.26)–(3.28), (3.58)–(3.59) и (3.6).

В линейном приближении эта система принимает вид:

уравнение для намагниченности

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + \alpha\gamma(2H_p - b_1) \cdot \frac{\partial m_x}{\partial t} + \gamma^2 H_p (H_p - b_1) \cdot m_x + \\ + 2\gamma^2 H_p b_2 \cdot v_x + 2\alpha\gamma b_2 \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} = \gamma^2 H_p \cdot h_0 \cdot \cos(\omega t); \quad (3.69) \end{aligned}$$

уравнение для редуцированного упругого смещения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + 2(\beta + \alpha\gamma b_2 c_2) \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} + (c_1 + 2\gamma^2 H_p b_2 c_2) \cdot v_x + \\ + \gamma^2 H_p (H_p - b_1) c_2 \cdot m_x + [\alpha\gamma(2H_p - b_1) - 2\beta] c_2 \cdot \frac{\partial m_x}{\partial t} = 0. \quad (3.70) \end{aligned}$$

Можно видеть, что такая система с точностью до обозначений совпадает с полученной в работе [18] (формулы (3.19) и (3.24)).

Замечание. Поскольку за системой (3.69)–(3.70), соответствующей линейному приближению, укоренилось название «линеаризован-

ной» [18], для удобства терминологии будем называть далее систему (3.67)–(3.68), полученную в квадратичном приближении, системой «квадрированной».

3.8. Проверка корректности линейного и квадратичного приближений

Рассмотрим степень приближения, обеспечиваемого как линеаризованной (3.69)–(3.70), так и квадрированной (3.67)–(3.68) системами по сравнению с исходной нелинейной системой (3.1)–(3.3).

На рис. 3.1 показаны зависимости поперечной компоненты намагниченности (а) и упругого смещения (б) от амплитуды переменного поля при параметрах ЖИГ, принятых в работе [18]. Смещение u получено из v в соответствии с формулой (3.21) при $z = d/2$. Кривые 1 соответствуют решению полной системы (3.1)–(3.3), кривые 2 — решению линеаризованной системы (3.69)–(3.70), кривые 3 — решению квадрированной системы (3.67)–(3.68).

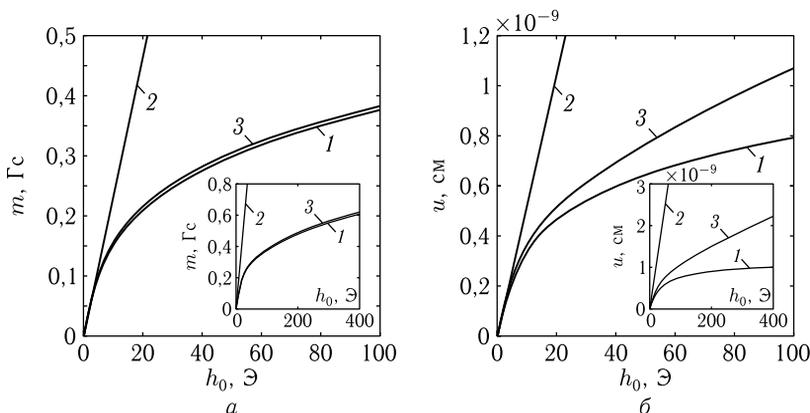


Рис. 3.1. Зависимости поперечной компоненты намагниченности (а) и упругого смещения (б) от амплитуды переменного поля: 1 — решение полной нелинейной системы (3.1)–(3.3); 2 — решение линеаризованной системы (3.69)–(3.70); 3 — решение квадрированной системы (3.67)–(3.68). На врезках — те же кривые в интервале переменного поля до 400 Э. Параметры материала соответствуют ЖИГ ($4\pi M_0 = 1750$ Гс; $B_2 = 6,96 \cdot 10^6$ эрг \cdot см $^{-3}$; $c_{44} = 7,64 \cdot 10^{11}$ эрг \cdot см $^{-3}$; $\rho = 5,17$ г \cdot см $^{-3}$; $\alpha = 0,02$; $\beta = 10^9$ с $^{-1}$); а также $d = 6,865 \cdot 10^{-5}$ см; $H_0 = 2750$ Э; частота возбуждения 2,8 ГГц

Из рисунка видно, что как линеаризованная, так и квадрированная системы несколько завышают точные значения амплитуд намагниченности и смещения, причем для смещения это завышение выражено сильнее, чем для намагниченности. В то же время видно, что приближение, обеспечиваемое квадрированной системой, значительно лучше, чем приближение, даваемое линеаризованной системой.

Так, линеаризованная система (3.69)–(3.70) описывает точную картину до амплитуды переменного поля, равной 5 Э (то есть до $h_0/M_0 = 0,04$) с точностью порядка 10%, а для амплитуды поля, равной 10 Э (до $h_0/M_0 = 0,07$), — с точностью около 30%, после чего ее приближение резко ухудшается.

В то же время квадрированная система (3.67)–(3.68) описывает амплитуду магнитных колебаний до амплитуды переменного поля 100 Э ($h_0/M_0 = 0,71$) с точностью порядка 3%, а для амплитуды поля 400 Э ($h_0/M_0 = 2,86$) — до 5%. Та же система описывает амплитуду упругих колебаний при амплитуде переменного поля 60 Э ($h_0/M_0 = 0,43$) с точностью 20%, при амплитуде 100 Э с точностью 25%, а при амплитуде поля 400 Э — с точностью около двух раз.

Таким образом, ограничиваясь точностью описания упругих колебаний на уровне 20%, можно видеть, что линеаризованная система допускает амплитуду переменного поля не более 0,05 от намагниченности насыщения, что ограничивает углы прецессии на уровне 3°, тогда как квадрированная система позволяет рассматривать амплитуду переменного поля до 0,40 от намагниченности насыщения, что обеспечивает углы прецессии до 25°. Что касается магнитных колебаний, то здесь возможности использования квадрированной системы простираются до полей, превышающих намагниченность насыщения в несколько (не менее трех) раз, что соответствует углам прецессии до 30–40 градусов. Столь большие углы прецессии позволяют успешно использовать квадрированную систему для описания многих нелинейных процессов с достаточно хорошим приближением.

3.9. Уравнения движения в обобщенных обозначениях

Запишем (3.67)–(3.68) в обобщенных обозначениях (для простоты записи индекс « x » опускаем):

уравнение для намагниченности

$$\begin{aligned}
 a_{11} \cdot \frac{\partial^2 m}{\partial t^2} + a_{12} \cdot \frac{\partial m}{\partial t} + a_{13} \cdot m + a_{14} \cdot v + a_{15} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \\
 + b_{11} \cdot m^3 + b_{12} \cdot m^2 v + b_{13} \cdot m v^2 + \\
 + c_{11} \cdot m \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)^2 + c_{12} \cdot m \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) + c_{13} \cdot v \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)^2 = \\
 = g_{11} \cdot h_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (3.71)
 \end{aligned}$$

уравнение для редуцированного упругого смещения

$$\begin{aligned}
 a_{21} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a_{22} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + a_{23} \cdot v + a_{24} \cdot m + a_{25} \cdot \frac{\partial m}{\partial t} + \\
 + b_{21} \cdot m^3 + b_{22} \cdot m^2 v + b_{23} \cdot m v^2 + \\
 + c_{21} \cdot m \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)^2 + c_{22} \cdot m \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) + c_{23} \cdot v \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)^2 = 0. \quad (3.72)
 \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты a_{ik} соответствуют линейному приближению [18], коэффициенты b_{ik} — квадратичному приближению без учета производных от переменных по времени и c_{ik} — квадратичному приближению с учетом таких производных. Коэффициент g_{11} соответствует возбуждающей силе и присутствует только в первом уравнении, отражающем колебания намагниченности, при этом возбуждение во втором уравнении, отражающем упругие колебания, обеспечивается коэффициентами связи: в линейном приближении a_{24} , a_{25} , в квадратичном — b_{ik} , c_{ik} .

3.9.1. Обобщенные коэффициенты

Обобщенные коэффициенты в уравнениях (3.71)–(3.72) имеют вид:

$$a_{11} = 1; \quad (3.73)$$

$$a_{12} = \alpha\gamma(2H_p - b_1); \quad (3.74)$$

$$a_{13} = \gamma^2 H_p (H_p - b_1); \quad (3.75)$$

$$a_{14} = 2\gamma^2 H_p b_2; \quad (3.76)$$

$$a_{15} = 2\alpha\gamma b_2; \quad (3.77)$$

$$b_{11} = 2\gamma^2 H_p b_0; \quad (3.78)$$

$$b_{12} = -2\gamma^2 (3H_p - b_0) b_2; \quad (3.79)$$

$$b_{13} = -4\gamma^2 b_2^2; \quad (3.80)$$

$$c_{11} = \frac{2b_0}{H_p}; \quad (3.81)$$

$$c_{12} = \frac{2b_2}{H_p}; \quad (3.82)$$

$$c_{13} = \frac{6b_0 b_2}{H_p^2}; \quad (3.83)$$

$$g_{11} = \gamma^2 H_p; \quad (3.84)$$

$$a_{21} = 1; \quad (3.85)$$

$$a_{22} = 2(\beta + \alpha\gamma b_2 c_2); \quad (3.86)$$

$$a_{23} = c_1 + 2\gamma^2 H_p b_2 c_2; \quad (3.87)$$

$$a_{24} = \gamma^2 H_p (H_p - b_1) c_2; \quad (3.88)$$

$$a_{25} = [\alpha\gamma(2H_p - b_1) - 2\beta] c_2; \quad (3.89)$$

$$b_{21} = 2\gamma^2 H_p b_0 c_2; \quad (3.90)$$

$$b_{22} = -2\gamma^2 (3H_p - b_0) b_2 c_2; \quad (3.91)$$

$$b_{23} = -4\gamma^2 b_2^2 c_2; \quad (3.92)$$

$$c_{21} = \frac{2b_0 c_2}{H_p}; \quad (3.93)$$

$$c_{22} = \frac{2b_2 c_2}{H_p}; \quad (3.94)$$

$$c_{23} = \frac{6b_0 b_2 c_2}{H_p^2}. \quad (3.95)$$

3.9.2. Обобщенные коэффициенты, выраженные через исходные параметры задачи

Подставляя в (3.73)–(3.95) обозначения (3.26)–(3.28), (3.58)–(3.59), получаем обобщенные коэффициенты, выражение через константы материала, постоянное поле и толщину пластины (обозначение H_p для компактности записи сохраняем):

$$a_{11} = 1; \quad (3.96)$$

$$a_{12} = \alpha\gamma \left(2H_p - \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}} \right); \quad (3.97)$$

$$a_{13} = \gamma^2 H_p \left(H_p - \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}} \right); \quad (3.98)$$

$$a_{14} = \frac{2\gamma^2 H_p B_2}{M_0 d}; \quad (3.99)$$

$$a_{15} = \frac{2\alpha\gamma B_2}{M_0 d}; \quad (3.100)$$

$$b_{11} = 4\pi\gamma^2 H_p M_0; \quad (3.101)$$

$$b_{12} = -\frac{2\gamma^2 B_2}{M_0 d} (3H_p - 2\pi M_0); \quad (3.102)$$

$$b_{13} = -\frac{4\gamma^2 B_2^2}{M_0^2 d^2}; \quad (3.103)$$

$$c_{11} = \frac{4\pi M_0}{H_p}; \quad (3.104)$$

$$c_{12} = \frac{2B_2}{H_p M_0 d}; \quad (3.105)$$

$$c_{13} = \frac{12\pi B_2}{H_p^2 d}; \quad (3.106)$$

$$g_{11} = \gamma^2 H_p; \quad (3.107)$$

$$a_{21} = 1; \quad (3.108)$$

$$a_{22} = 2 \left(\beta + \frac{4\alpha\gamma B_2^2}{M_0 c_{44} \pi^2} \right); \quad (3.109)$$

$$a_{23} = \frac{c_{44} \pi^2}{\rho d^2} + \frac{8\gamma^2 H_p B_2^2}{M_0 c_{44} \pi^2}; \quad (3.110)$$

$$a_{24} = \frac{4\gamma^2 H_p B_2 d}{c_{44} \pi^2} \left(H_p - \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}} \right); \quad (3.111)$$

$$a_{25} = \frac{4B_2 d}{c_{44} \pi^2} \left[\alpha\gamma \left(2H_p - \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}} \right) - 2\beta \right]; \quad (3.112)$$

$$b_{21} = \frac{16\gamma^2 H_p M_0 B_2 d}{c_{44} \pi}; \quad (3.113)$$

$$b_{22} = -\frac{8\gamma^2 B_2^2}{M_0 c_{44} \pi^2} (3H_p - 2\pi M_0); \quad (3.114)$$

$$b_{23} = -\frac{16\gamma^2 B_2^3}{M_0^2 d c_{44} \pi^2}; \quad (3.115)$$

$$c_{21} = \frac{16M_0 B_2 d}{H_p c_{44} \pi}; \quad (3.116)$$

$$c_{22} = \frac{8B_2^2}{H_p M_0 c_{44} \pi^2}; \quad (3.117)$$

$$c_{23} = \frac{48B_2^2}{H_p^2 c_{44} \pi}. \quad (3.118)$$

3.9.3. Полное упругое смещение

Система уравнений (3.71)–(3.72), наряду с намагниченностью m_x , определяет редуцированную функцию упругого смещения v_x . При этом полное упругое смещение на поверхностях пластины определяется по формуле (3.21), которую можно записать в виде:

$$u_{xS} = \pm \left(v_x - \frac{B_2 d}{2c_{44}} \cdot m_x m_z \right). \quad (3.119)$$

В квадратичном приближении (3.14), с учетом кругового характера прецессии (3.55), получаем:

$$u_{xS} = \pm \left\{ v_x - \frac{B_2 d}{2c_{44}} \cdot m_x \left[1 - \frac{1}{2} m_x^2 - \frac{1}{2\gamma^2 H_p^2} \cdot \left(\frac{dm_x}{dt} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.120)$$

или без индекса « x »

$$u_S = \pm \left\{ v - \frac{B_2 d}{2c_{44}} \cdot m \left[1 - \frac{1}{2} m^2 - \frac{1}{2\gamma^2 H_p^2} \cdot \left(\frac{dm}{dt} \right)^2 \right] \right\}. \quad (3.121)$$

Замечание. Отметим, что формулы (3.120)–(3.121) получены с помощью формулы (3.55), то есть для свободных колебаний. В случае вынужденных колебаний надо пользоваться формулой (3.56). Однако контрольный численный расчет при типичных параметрах ЖИГ показывает, что при отклонении вынуждающей частоты ω от частоты собственной ω_0 в пределах $\pm 50\%$ замена формулы (3.55) на формулу (3.56) приводит к изменениям весьма незначительным, менее 1%. Более того, при тех же параметрах величина первого слагаемого в формуле (3.20) меньше величины второго на три порядка, то есть можно с точностью не менее 1% полагать $u_S \approx \pm v$. Заметим, что такое соотношение получается при типичных параметрах ЖИГ и сильно зависит от величины константы B_2 , то есть для других материалов возможность взаимной замены формул (3.55) и (3.56) при выводе выражения для u_S требует непосредственной проверки.

3.9.4. Полный обобщенный вид связанной системы уравнений квадратичного приближения

Система уравнений (3.71)–(3.72) представляет собой частный вид более полной обобщенной симметричной системы:

$$\begin{aligned}
 p_{11} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + p_{12} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + p_{13} \cdot x_1 + q_{11} \cdot x_2 + q_{12} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + \\
 + r_{11} \cdot x_1^3 + r_{12} \cdot x_1^2 x_2 + r_{13} \cdot x_1 x_2^2 + r_{14} \cdot x_2^3 + \\
 + s_{11} \cdot x_1 \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 + s_{12} \cdot x_1 \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial x_2}{\partial t} \right) + s_{13} \cdot x_1 \left(\frac{\partial x_2}{\partial t} \right)^2 + \\
 + s_{14} \cdot x_2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 + s_{15} \cdot x_2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial x_2}{\partial t} \right) + s_{16} \cdot x_2 \left(\frac{\partial x_2}{\partial t} \right)^2 = \\
 = A_{11} \cdot \cos(\omega_0 t) + A_{12} \cdot \sin(\omega_0 t); \quad (3.122)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{21} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + p_{22} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + p_{23} \cdot x_2 + q_{21} \cdot x_1 + q_{22} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \\
 + r_{21} \cdot x_2^3 + r_{22} \cdot x_2^2 x_1 + r_{23} \cdot x_2 x_1^2 + r_{24} \cdot x_1^3 + \\
 + s_{21} \cdot x_2 \left(\frac{\partial x_2}{\partial t} \right)^2 + s_{22} \cdot x_2 \left(\frac{\partial x_2}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right) + s_{23} \cdot x_2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 + \\
 + s_{24} \cdot x_1 \left(\frac{\partial x_2}{\partial t} \right)^2 + s_{25} \cdot x_1 \left(\frac{\partial x_2}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right) + s_{26} \cdot x_1 \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 = \\
 = A_{21} \cdot \cos(\omega_0 t) + A_{22} \cdot \sin(\omega_0 t). \quad (3.123)
 \end{aligned}$$

Эти уравнения переходят одно в другое при замене индексов переменных и первых индексов коэффициентов «1» на «2» и обратно. Еще более полный вид подобной связанной системы должен включать в себя слагаемые, состоящие из произведений трех производных. Однако в решаемой здесь реальной задаче о вынужденных магнитоупругих колебаниях в ферритовой пластине такие слагаемые отсутствуют, поэтому на данном этапе не рассматриваются.

Замечание. Введенные в формулах (3.122)–(3.123) обозначения коэффициентов p_{ik} , q_{ik} , r_{ik} , s_{ik} эквивалентны обозначениям a_{ik} , b_{ik} , c_{ik} , g_{ik} в системе (3.71)–(3.72), и для них справедливы те же выражения и оценки. Использование здесь тех или других обозначений связано с традиционными обозначениями в соответствующих статьях [19–26]. Соответствие между теми и другими любознательный читатель может установить путем непосредственного сравнения записи систем (3.71)–(3.73) и (3.122)–(3.123).

3.9.5. Численная оценка различных слагаемых в системе связанных уравнений

Вернемся к системе (3.71)–(3.72) и рассмотрим ее структуру более подробно. Уравнения (3.71) и (3.72) содержат довольно много слагаемых. Для того чтобы выявить их роль в формировании колебаний намагниченности и упругого смещения, оценим относительную величину

ну отдельных слагаемых для типичной ситуации возбуждения гиперзвуковых колебаний. Пусть параметры материала соответствуют (ЖИГ): $4\pi M_0 = 1750$ Гс; $B_2 = 6,96 \cdot 10^6$ эрг \cdot см $^{-3}$; $c_{44} = 7,64 \cdot 10^{11}$ эрг \cdot см $^{-3}$; $\rho = 5,17$ г \cdot см $^{-3}$, параметры затухания $\alpha = 0,02$; $\beta = 10^9$ с $^{-1}$, толщина пленки $d = 6,865 \cdot 10^{-5}$ см, поле $H_0 = 2750$ Э, частота $f = 2800$ МГц (то есть $\omega = 1,7592 \cdot 10^{10}$ с $^{-1}$). Выбранные значения частоты и поля соответствуют возбуждению ферромагнитного и упругого резонансов. Вспомогательные параметры (3.6), (3.26)–(3.28), (3.57)–(3.58) принимают значения: $H_p = 1000$ Э; $b_0 = 875$ Гц; $b_1 = 0,4553$ Э; $b_2 = 7,2802 \times 10^8$ Э \cdot см $^{-1}$; $c_1 = 3,0947 \cdot 10^{20}$ с $^{-1}$; $c_2 = 2,5346 \cdot 10^{-10}$ см.

Структура слагаемых уравнений (3.71)–(3.72) представляет собой произведения коэффициентов a_{ik} , b_{ik} , c_{ik} на переменные m , v в той или иной степени, умноженные на частоту ω в первой или второй степени, получающуюся за счет производных (при временном множителе типа $\exp(i\omega t)$).

Полученные таким образом абсолютные величины слагаемых уравнений (3.71)–(3.72) представлены в табл. 3.1 при различных значениях возбуждающего поля (знаки и наименования размерности в системе СГС (Гаусса) опущены для простоты записи).

Таблица 3.1. Коэффициенты полной системы связанных уравнений при различных значениях амплитуды переменного поля

	$h_0 = 0,01$	$h_0 = 20$	$h_0 = 100$	$h_0 = 400$
$a_{11} \cdot \omega^2 m$	$6,19 \cdot 10^{16}$	$6,19 \cdot 10^{19}$	$1,24 \cdot 10^{20}$	$1,86 \cdot 10^{20}$
$a_{12} \cdot \omega m$	$1,24 \cdot 10^{14}$	$1,24 \cdot 10^{17}$	$2,48 \cdot 10^{17}$	$3,71 \cdot 10^{17}$
$a_{13} \cdot m$	$6,19 \cdot 10^{16}$	$6,19 \cdot 10^{19}$	$1,24 \cdot 10^{20}$	$1,86 \cdot 10^{20}$
$a_{14} \cdot v$	$2,25 \cdot 10^{14}$	$2,25 \cdot 10^{17}$	$3,60 \cdot 10^{17}$	$4,51 \cdot 10^{17}$
$a_{15} \cdot \omega v$	$2,25 \cdot 10^{11}$	$2,25 \cdot 10^{14}$	$3,60 \cdot 10^{14}$	$4,51 \cdot 10^{14}$
$b_{11} \cdot m^3$	$4,33 \cdot 10^9$	$4,33 \cdot 10^{18}$	$3,47 \cdot 10^{19}$	$1,17 \cdot 10^{20}$
$b_{12} \cdot m^2 v$	$1,91 \cdot 10^7$	$1,91 \cdot 10^{16}$	$1,22 \cdot 10^{17}$	$3,45 \cdot 10^{17}$
$b_{13} \cdot m v^2$	$3,28 \cdot 10^4$	$3,28 \cdot 10^{13}$	$1,68 \cdot 10^{14}$	$3,94 \cdot 10^{14}$
$c_{11} \cdot \omega^2 m^3$	$4,33 \cdot 10^9$	$4,33 \cdot 10^{18}$	$3,47 \cdot 10^{19}$	$1,17 \cdot 10^{20}$
$c_{12} \cdot \omega^2 m^2 v$	$9,01 \cdot 10^6$	$9,01 \cdot 10^{15}$	$5,77 \cdot 10^{16}$	$1,62 \cdot 10^{17}$
$c_{13} \cdot \omega^2 m^2 v$	$2,36 \cdot 10^7$	$2,36 \cdot 10^{16}$	$1,51 \cdot 10^{17}$	$4,26 \cdot 10^{17}$
$a_{21} \cdot \omega^2 v$	$1,55 \cdot 10^8$	$1,55 \cdot 10^{11}$	$2,48 \cdot 10^{11}$	$3,09 \cdot 10^{11}$
$a_{22} \cdot \omega v$	$1,76 \cdot 10^4$	$1,76 \cdot 10^7$	$2,82 \cdot 10^7$	$3,53 \cdot 10^7$
$a_{23} \cdot v$	$1,55 \cdot 10^8$	$1,55 \cdot 10^{11}$	$2,48 \cdot 10^{11}$	$3,10 \cdot 10^{11}$
$a_{24} \cdot m$	$1,57 \cdot 10^7$	$1,57 \cdot 10^{10}$	$3,14 \cdot 10^{10}$	$4,70 \cdot 10^{10}$
$a_{25} \cdot \omega m$	$2,96 \cdot 10^4$	$2,96 \cdot 10^7$	$5,91 \cdot 10^7$	$8,87 \cdot 10^7$
$b_{21} \cdot m^3$	$1,10 \cdot 10^0$	$1,10 \cdot 10^9$	$8,79 \cdot 10^9$	$2,96 \cdot 10^{10}$
$b_{22} \cdot m^2 v$	$4,90 \cdot 10^{-3}$	$4,90 \cdot 10^6$	$3,11 \cdot 10^7$	$8,74 \cdot 10^7$

Окончание табл. 3.1

	$h_0 = 0,01$	$h_0 = 20$	$h_0 = 100$	$h_0 = 400$
$b_{23} \cdot mv^2$	$8,31 \cdot 10^{-6}$	$8,31 \cdot 10^3$	$4,26 \cdot 10^4$	$9,98 \cdot 10^4$
$c_{21} \cdot \omega^2 m^3$	$1,10 \cdot 10^0$	$1,10 \cdot 10^9$	$8,78 \cdot 10^9$	$2,96 \cdot 10^{10}$
$c_{22} \cdot \omega^2 m^2 v$	$2,30 \cdot 10^{-3}$	$2,30 \cdot 10^6$	$1,46 \cdot 10^7$	$4,11 \cdot 10^7$
$c_{23} \cdot \omega^2 m^2 v$	$6,00 \cdot 10^{-3}$	$6,00 \cdot 10^6$	$3,84 \cdot 10^7$	$1,08 \cdot 10^8$

Амплитуды переменных, полученные из разверток по времени при решении полной задачи (3.1)–(3.3) составляют:

при поле $h_0 = 0,01$ Э: $m = 2 \cdot 10^{-4}$, $v = 5 \cdot 10^{-13}$ см;

при поле $h_0 = 20$ Э: $m = 2 \cdot 10^{-1}$, $v = 5 \cdot 10^{-10}$ см;

при поле $h_0 = 100$ Э: $m = 4 \cdot 10^{-1}$, $v = 8 \cdot 10^{-10}$ см;

при поле $h_0 = 400$ Э: $m = 6 \cdot 10^{-1}$, $v = 1 \cdot 10^{-9}$ см.

Такие значения полей выбраны исходя из того, что $h_0 = 0,01$ Э соответствует чисто линейному режиму, $h_0 = 20$ Э соответствует слабо нелинейному режиму, когда линейное приближение дает ошибку как по намагниченности, так и по упругому смещению уже в два раза, тогда как квадратичное — по намагниченности не более 2% и по упругому смещению менее 8%. Дополнительное удобство для численного сравнения состоит в том, что при отношении амплитуд полей возбуждения для этих двух режимов равном 2000, отношение амплитуд обоих видов колебаний при нелинейном режиме к тем же амплитудам при линейном режиме составляет ровно 4 порядка. При этом отношение амплитуды магнитных колебаний к амплитуде упругих в обоих режимах сохраняется равным $4 \cdot 10^7$.

Далее, поле $h_0 = 100$ Э выбрано как соответствующее сильно нелинейному режиму, когда линейное приближение как по намагниченности, так и по упругому смещению дает ошибку на порядок, тогда как квадратичное — по намагниченности менее 5% и по упругому смещению — не более 25%.

Поле $h_0 = 400$ Э соответствует еще более нелинейному режиму, когда линейное приближение как по намагниченности, так и по упругому смещению дает ошибку на два порядка, тогда как квадратичное — по намагниченности не более 5% и по упругому смещению — всего около двух раз.

Из табл. 3.1 видно следующее. В линейном режиме ($h_0 = 0,01$ Э) вклад от слагаемых с коэффициентами b_{ik} и c_{ik} меньше основных слагаемых с коэффициентами a_{ik} более чем на семь порядков, то есть ими с весьма высокой точностью можно пренебречь. Связь обеспечивается слагаемыми, пропорциональными первой степени переменных, то есть a_{14} и a_{24} , тогда как слагаемые, пропорциональные производным от переменных с a_{15} и a_{25} , вносят вклад, сравнимый с вкладом от параметров затухания с коэффициентами a_{12} и a_{22} .

В слабо нелинейном режиме при $h_0 = 20$ Э вклад от слагаемых, пропорциональных b_{ik} и c_{ik} , значительно возрастает и становится срав-

нимым со вкладом от основных слагаемых a_{11} , a_{13} и c_{11} , c_{13} , отставая всего на один-два порядка. Особенно заметным становится вклад от слагаемых, пропорциональных третьей степени намагниченности с коэффициентами b_{11} , c_{11} , b_{21} , c_{21} , составляя около 5%.

В сильно нелинейном режиме при $h_0 = 100$ Э вклад от слагаемых, пропорциональных b_{ik} и c_{ik} , заметно возрастает. Вклад от слагаемых, пропорциональных третьей степени намагниченности, достигает 30% от вклада основных, а вклад от остальных слагаемых остается меньше основного на 4–6 порядков.

В особо сильно нелинейном режиме при $h_0 = 400$ Э вклад от слагаемых, пропорциональных b_{ik} и c_{ik} , возрастает еще более, по слагаемым с b_{11} , c_{11} , b_{21} , c_{21} достигая 60%. Вклад от слагаемых, пропорциональных b_{12} , c_{12} , c_{13} и b_{22} , c_{22} , c_{23} , не превышает 1%, однако становится сравнимым со вкладом от затухания пропорциональным a_{12} и a_{22} , тогда как вклад от слагаемых, пропорциональных b_{13} и b_{23} , остается крайне малым, меньше основного на шесть порядков и вклада от затухания на три порядка.

Таким образом, например, в умеренно нелинейном режиме ($h_0 = 20$ Э), наряду с основными a_{11} , a_{12} , a_{13} и a_{21} , a_{22} , a_{23} , в первую очередь надо учитывать только слагаемые, пропорциональные a_{14} , b_{11} , c_{11} , а также a_{24} , b_{21} , c_{21} . В уравнении для упругого смещения заметную роль, сравнимую с ролью затухания, может играть также слагаемое с коэффициентом a_{25} . В результате система уравнений (3.71)–(3.72) принимает более простой укороченный вид:

$$a_{11} \cdot \frac{\partial^2 m}{\partial t^2} + a_{12} \cdot \frac{\partial m}{\partial t} + a_{13} \cdot m + a_{14} \cdot v + b_{11} \cdot m^3 + c_{11} \cdot m \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)^2 = g_{11} \cdot h_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (3.124)$$

$$a_{21} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a_{22} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + a_{23} \cdot v + a_{24} \cdot m + a_{25} \cdot \frac{\partial m}{\partial t} + b_{21} \cdot m^3 + c_{21} \cdot m \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)^2 = 0. \quad (3.125)$$

Замечание. Заметим, что выполненная оценка слагаемых в уравнениях (3.71)–(3.72) проделана для частного случая параметров ЖИГ при резонансных условиях. При других значениях параметров эти оценки могут быть другими. Так, в работе [18] показано, что при достаточно большой константе магнитоупругого взаимодействия B_2 преобладающую роль играют слагаемые с коэффициентами a_{15} и a_{25} , обеспечивающие связь осцилляторов через производные. Именно эти слагаемые даже в линейном режиме позволяют определить условия, приводящие к столь сильно нелинейному эффекту, как переориентация вектора намагниченности от одного устойчивого положения к другому [56]. То есть во избежание ошибок для каждой конкретной задачи надо проводить оценку слагаемых в уравнениях (3.71)–(3.72) применительно к заданным условиям.

3.10. Модель осцилляторов, связанных через производные

Рассмотрим сначала наиболее простой случай линейного возбуждения гиперзвука на основе решения линеаризованной системы двух дифференциальных уравнений второго порядка, связанных через переменные и их производные, которая является линейной частью квадрированной системы, приведенной под номерами (3.122)-(3.123), и имеет симметричный вид:

$$p_{11} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + p_{12} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + p_{13} \cdot x_1 + q_{11} \cdot x_2 + q_{12} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} = A_{11} \cdot \cos(\omega t); \quad (3.126)$$

$$p_{21} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + p_{22} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + p_{23} \cdot x_2 + q_{21} \cdot x_1 + q_{22} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} = 0. \quad (3.127)$$

Здесь для простоты положено, что внешнее возбуждение действует только на первый осциллятор, а раскочка второго происходит только за счет связи между ними.

Для более наглядного выявления физического смысла рассматриваемых далее явлений произведем нормировку на параметры инерционности p_{11} , p_{21} и введем обозначения, близкие к традиционно используемым при описании колебаний

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta_1 \cdot \frac{dx_2}{dt} = A \cdot \cos(\omega t); \quad (3.128)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 + \delta_2 \cdot \frac{dx_1}{dt} = 0, \quad (3.129)$$

где введены

нормированные параметры затухания:

$$\beta_1 = p_{12}/p_{11}, \quad (3.130)$$

$$\beta_2 = p_{22}/p_{21}; \quad (3.131)$$

нормированные собственные частоты осцилляторов:

$$\omega_1 = \sqrt{p_{13}/p_{11}}, \quad (3.132)$$

$$\omega_2 = \sqrt{p_{23}/p_{21}}; \quad (3.133)$$

нормированные параметры связи через переменные:

$$\gamma_1 = q_{11}/p_{11}, \quad (3.134)$$

$$\gamma_2 = q_{21}/p_{21}; \quad (3.135)$$

нормированные параметры связи через производные:

$$\delta_1 = q_{12}/p_{11}, \quad (3.136)$$

$$\delta_2 = q_{22}/p_{21}; \quad (3.137)$$

нормированная амплитуда возбуждения:

$$A = A_{11}/p_{11}. \quad (3.138)$$

В отсутствие вынуждающей силы (при $A = 0$) эти уравнения могут описывать только затухающие колебания. Однако поскольку каждое из уравнений кроме слагаемого с производной от основной переменной содержит еще слагаемое с производной от другой переменной, то затухание одного осциллятора может зависеть от состояния колебаний другого. Можно полагать, что при наличии вынуждающей силы это обстоятельство способно привести к частичной или даже полной компенсации затухания каждого из осцилляторов, то есть колебания могли бы как убывать во времени, так и нарастать. Во втором случае можно считать, что колебательная система приобретает «отрицательное сопротивление», то есть становится активной, а нарастание колебаний ограничивается только нелинейными свойствами системы, рассмотренные которых пока отложим до раздела 3.13.

3.10.1. Численный анализ развития вынужденных колебаний

Для анализа взаимодействия осцилляторов, связанных через производные, система уравнений (3.128)–(3.129) решалась численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка [54]. Исследовался характер возбуждаемых колебаний при различной величине параметров связи через производные δ_1 и δ_2 . Собственные частоты осцилляторов ω_1 и ω_2 полагались равными друг другу и частоте возбуждения ω . Параметры связи γ_1 и γ_2 также были равны.

Полученные картины развития колебаний и их производных во времени показаны на рис. 3.2 (выбор единиц построения обусловлен наглядностью изображения). Справа показаны соответствующие фазовые портреты.

Из рисунка видно, что в отсутствие связи через производные $\delta_1 = \delta_2 = 0 \text{ с}^{-1}$ (а) колебания через время около 2 с приходят к стационарной амплитуде около 1,3 см и дальше не меняются. Картина соответствует обычному экспоненциальному насыщению, характерному для положительного затухания. Фазовый портрет представляет собой развивающуюся из неустойчивого фокуса спираль, расстояния между витками которой по мере ее развития уменьшаются, в результате чего образуется устойчивый цикл.

При связи $\delta_1 = \delta_2 = 2,0 \text{ с}^{-1}$ (б) колебания нарастают практически линейно. Амплитуда заметно превышает предыдущую и при времени 5 с составляет около 3,5 см. Близкий к линейному рост амплитуды можно интерпретировать как экспоненту с нулевым показателем. Расстояния между витками спирали фазового портрета сохраняются постоянными, устойчивый цикл не образуется.

При связи $\delta_1 = \delta_2 = 3,0 \text{ с}^{-1}$ (в) амплитуда колебаний резко растет, при времени 5 с достигает 15 см и далее еще более увеличивается, стремясь к бесконечности. Картина соответствует экспоненциальному

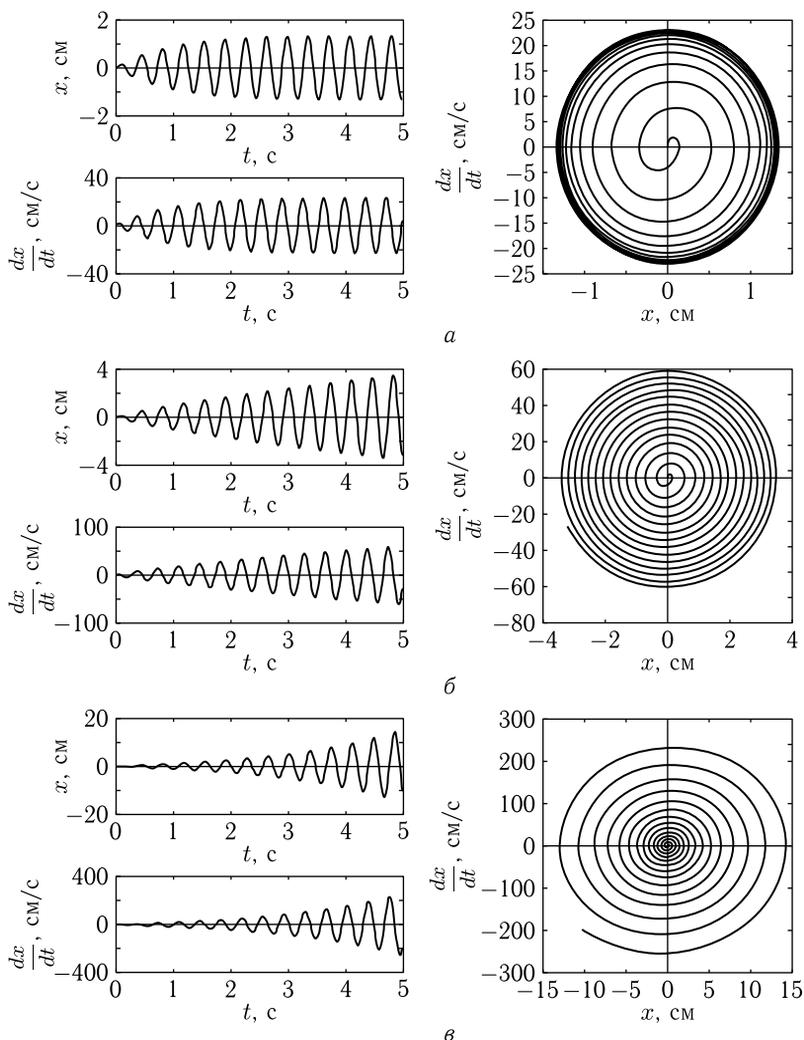


Рис. 3.2. Развитие вынужденных колебаний во времени при совпадении частоты возбуждения с собственной частотой осцилляторов при различной величине связи. Параметры осцилляторов: $\beta_1 = \beta_2 = 2,0 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1 = \omega_2 = 17,5 \text{ с}^{-1}$; $\gamma_1 = \gamma_2 = 10,0 \text{ с}^{-2}$; а — $\delta_1 = \delta_2 = 0 \text{ с}^{-1}$; б — $\delta_1 = \delta_2 = 2,0 \text{ с}^{-1}$; в — $\delta_1 = \delta_2 = 3,0 \text{ с}^{-1}$. Параметры возбуждения: $\omega = 17,5 \text{ с}^{-1}$, $A = 50 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$

росту, характерному для отрицательного затухания. Спираль фазового портрета, выходя из того же неустойчивого фокуса, раскручивается тем сильнее, чем более удаляется от центра.

Таким образом, можно видеть, что в случае связи через производные, по мере увеличения параметров связи δ_1 и δ_2 , происходит

уменьшение затухания от положительного значения через нулевое до отрицательного. То есть наблюдаются три различных режима вынужденных колебаний: режим спада амплитуды, режим ее нарастания, и между ними — режим стационарной амплитуды.

Сказанное относится к случаю равенства собственных частот осцилляторов частоте возбуждения. Дополнительное исследование показывает, что при рассогласовании частот приведенная картина осложняется биениями, которые за счет связи через производные приобретают незатухающий стационарный характер. Однако общая картина упомянутых трех режимов поведения амплитуды сохраняется и соответствует тем же критическим значениям параметров связи δ_1 и δ_2 , что и при совпадении всех частот.

3.11. Аналитический критерий изменения характера колебаний

Система уравнений (3.128)–(3.129) в ряде случаев допускает аналитическое решение. Рассмотрим, например, частный случай свободных колебаний без вынуждающей силы. В этом случае система (3.128)–(3.129) принимает вид:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta_1 \cdot \frac{dx_2}{dt} = 0; \quad (3.139)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 + \delta_2 \cdot \frac{dx_1}{dt} = 0. \quad (3.140)$$

Предполагая решение в виде

$$x_1 = x_{10} \cdot e^{\lambda t}; \quad (3.141)$$

$$x_2 = x_{20} \cdot e^{\lambda t}, \quad (3.142)$$

получаем систему алгебраических уравнений для x_{10} , x_{20} :

$$(\lambda^2 + \beta_1 \lambda + \omega_1^2) \cdot x_{10} + (\lambda \delta_1 + \gamma_1) \cdot x_{20} = 0; \quad (3.143)$$

$$(\lambda \delta_2 + \gamma_2) \cdot x_{10} + (\lambda^2 + \beta_2 \lambda + \omega_2^2) \cdot x_{20} = 0, \quad (3.144)$$

условие нетривиальности решения которой дает уравнение для λ :

$$\lambda^4 + \lambda^3 \cdot (\beta_1 + \beta_2) + \lambda^2 \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1 \beta_2 - \delta_1 \delta_2) + \lambda \cdot (\beta_1 \omega_2^2 + \beta_2 \omega_1^2 - \delta_1 \gamma_2 - \delta_2 \gamma_1) + \omega_1^2 \omega_2^2 - \gamma_1 \gamma_2 = 0. \quad (3.145)$$

Предположим, что λ имеет вид комплексного числа:

$$\lambda = a + i \cdot b, \quad (3.146)$$

где a , b — действительные. В этом случае a соответствует изменению амплитуды колебаний во времени, а b — частоте этих колебаний.

Подставляя (3.146) в (3.145), выделяя действительную и мнимую части и приравнивая их по отдельности к нулю, получаем систему уравнений относительно a и b :

$$(a^4 + b^4 - 6a^2b^2) + (a^3 - 3ab^2) \cdot (\beta_1 + \beta_2) + (a^2 - b^2) \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) + a \cdot (\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1) + \omega_1^2\omega_2^2 - \gamma_1\gamma_2 = 0; \quad (3.147)$$

$$b^2 \cdot (4a + \beta_1 + \beta_2) = 4a^3 + 3a^2 \cdot (\beta_1 + \beta_2) + 2a \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) + (\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1). \quad (3.148)$$

Выражая b^2 из (3.148) и подставляя в (3.147), можно получить уравнение, содержащее только a , однако его решение будет достаточно сложным.

Поэтому рассмотрим частный случай, соответствующий постоянству амплитуды во времени, то есть $a = 0$. При этом из (3.147) и (3.148) получаем два уравнения для b , которые должны удовлетворяться одновременно:

$$b^4 - b^2 \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) + \omega_1^2\omega_2^2 - \gamma_1\gamma_2 = 0; \quad (3.149)$$

$$b^2 \cdot (\beta_1 + \beta_2) - (\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1) = 0. \quad (3.150)$$

Из (3.150) при условии $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$ получаем:

$$b^2 = \frac{\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1}{\beta_1 + \beta_2}, \quad (3.151)$$

Это соотношение позволяет найти частоту собственных колебаний системы при условии сохранения постоянства амплитуды:

$$\omega_S = \sqrt{\frac{\beta_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2 - \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1}{\beta_1 + \beta_2}}. \quad (3.152)$$

При этом (3.149) также соответствует условию сохранения амплитуды постоянной, то есть при его нарушении в ту или другую сторону амплитуда растет или спадает. Введем вспомогательную функцию

$$G_S(\omega) = \omega^4 - \omega^2 \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) + \omega_1^2\omega_2^2 - \gamma_1\gamma_2, \quad (3.153)$$

с помощью которой получаем критерий перехода от нарастания амплитуды к ее убыванию:

$$G_S(\omega) = 0. \quad (3.154)$$

Таким образом, главным критерием постоянства амплитуды является (3.154), а если он выполняется, то частота определяется соотношением (3.152). При этом выполняется равенство:

$$\omega_S^4 - \omega_S^2 \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) + \omega_1^2\omega_2^2 - \gamma_1\gamma_2 = 0. \quad (3.155)$$

Этот критерий позволяет определить возможные значения параметров $\beta_{1,2}$, $\gamma_{1,2}$, $\delta_{1,2}$, соответствующие такому переходу.

Проверим условия (3.154) и (3.152) численно. Зависимость функции G_S от частоты иллюстрируется рис. 3.3 (параметры построения выбраны, исходя из наглядности чертежа).

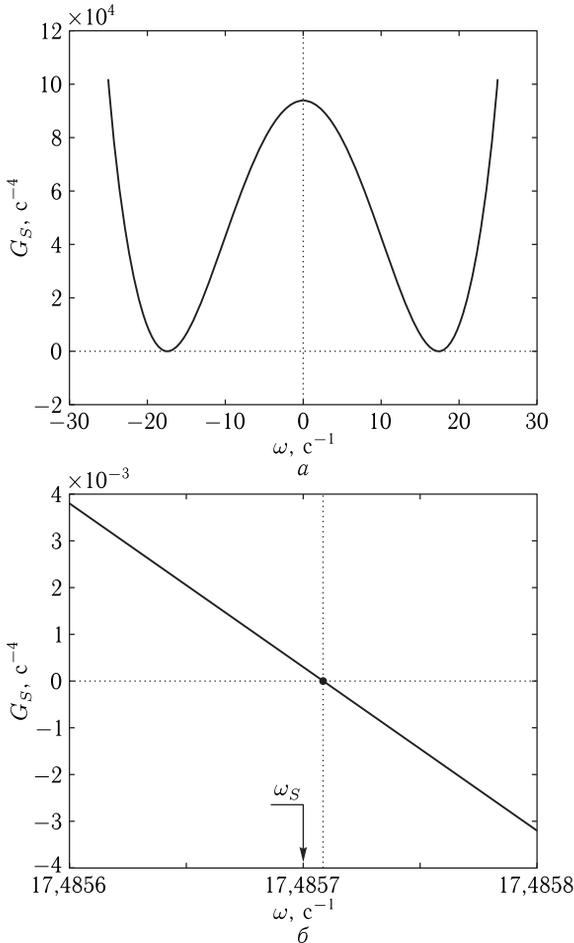


Рис. 3.3. Зависимость функции G_S от частоты ω . Параметры: $\beta_1 = \beta_2 = 0,1$; $\omega_1 = \omega_2 = 17,5$; $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$; $\delta_1 = \delta_2 = 0,1$: а — общий характер зависимости; б — зависимость вблизи главного нуля в крупном масштабе

Из рис. 3.3, *a* видно, что функция $G(\omega)$ представляет собой параболу четвертого порядка, симметричную относительно оси ординат. Функция $G(\omega)$ имеет два минимума при $\omega = \pm 17,5$, разделенные максимумом при $\omega = 0$. Реальный физический смысл имеет правая часть параболы, соответствующая положительным значениям частоты ω . Действительными корнями уравнения (3.154) являются точки пересечения параболы с нулевой линией. Нули функции $G_S(\omega)$ находятся вблизи правого минимума параболы только при $\delta_1 = \delta_2 = 0,1$, тогда как при $\delta_1 = \delta_2 < 0,1$ они расходятся в разные стороны относительно $\omega = 17,5 \text{ с}^{-1}$, а в случае $\delta_1 = \delta_2 > 0,1$ вообще отсутствуют. При вынужденных колебаниях эти случаи соответствуют показанным на рис. 3.2 трем режимам развития колебаний: установлению стационарного значения амплитуды колебаний (*a*), а также ее линейного (*б*) и экспоненциального (*в*) роста.

На рис. 3.3, *б* показан левый нуль правой ветви функции $G_S(\omega)$ (где $\omega > 0$) в более крупном масштабе. Видно, что он приходится на $\omega = 17,48571$. Рассчитанное по формуле (3.152) значение частоты резонанса системы составляет $\omega_S = 17,4857$ и показано стрелкой. Видно, что оно весьма близко к частоте, при которой $G_S(\omega)$ проходит через нуль. Таким образом, можно видеть, что оба условия постоянства амплитуды (3.154) и (3.152) выполняются с весьма высокой степенью точности (до шести значащих цифр).

Выполненная численная проверка показывает, что из четырех возможных корней уравнения (3.154) только один соответствует частоте (3.152). Таким образом, условие (3.152) дополняет основной критерий (3.154) тем, что позволяет определить, какой именно из четырех корней уравнения (3.154) действительно соответствует переходу от убывания амплитуды к ее нарастанию. Из рис. 3.3, *б* видно, что этот корень соответствует убыванию функции $G_S(\omega)$ в области $\omega > 0$. То есть для выбора корня можно использовать условие отрицательности производной функции $G_S(\omega)$ по частоте

$$\frac{dG_S}{d\omega} < 0, \quad (3.156)$$

или в развернутом виде

$$2\omega^2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2) < 0. \quad (3.157)$$

Для частоты можно записать:

$$\omega < \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2 - \delta_1\delta_2)}, \quad (3.158)$$

причем это соотношение должно быть дополнено условием:

$$\delta_1\delta_2 < \omega_1^2 + \omega_2^2 + \beta_1\beta_2, \quad (3.159)$$

которое накладывает ограничение на величины параметров связи через производные.

3.11.1. Аналитические критерии для магнитоупругих колебаний

Запишем полученное значение частоты и критерия перехода для магнитоупругой колебательной системы, приведенной на рис. 3.3. Так, из (3.152) и (3.154) получаем:

$$\omega_S = \sqrt{\frac{p_{12}p_{23} + p_{22}p_{13} - q_{12}q_{21} - q_{22}q_{11}}{p_{12} + p_{22}}}, \quad (3.160)$$

$$G_S(\omega) = \omega^4 - \omega^2 \cdot (p_{13} + p_{23} + p_{12}p_{22} - q_{12}q_{22}) + p_{13}p_{23} - q_{11}q_{21}, \quad (3.161)$$

а условие (3.155) принимает вид:

$$\omega_S^4 - \omega_S^2 \cdot (p_{13} + p_{23} + p_{12}p_{22} - q_{12}q_{22}) + p_{13}p_{23} - q_{11}q_{21} = 0, \quad (3.162)$$

где величины p_{ik} , q_{ik} определяются через параметры материала и поля с помощью формул, приведенных в разделах 3.9.2, 3.9.5 с учетом замечания в разделе 3.9.4 относительно формул (3.122), (3.123).

Получение явного вида выражений (3.160)–(3.162) тривиально, однако довольно громоздко, поэтому здесь не приводится.

3.11.2. Критерии трех режимов на примере реальных материалов

Рассмотрим предсказанную линеаризованной системой (3.128)–(3.129) возможность существования трех режимов — стационарной амплитуды, ее роста и убывания на примере реальных материалов типа ЖИГ и ТбФГ. Параметры этих материалов можно найти, например, в [13], эти же параметры использованы в работах [41–43].

На рис. 3.4 представлены зависимости функции G_S от частоты ω для ферритов двух различных составов: ЖИГ (а) и ТбФГ (б).

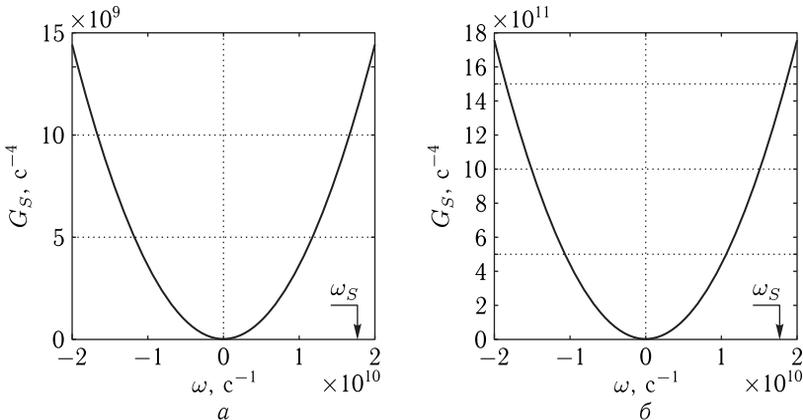


Рис. 3.4. Зависимости функции G_S от частоты ω для ферритов двух различных составов: ЖИГ (а) и ТбФГ (б). Параметры общие: $c_{44} = 7,64 \cdot 10^{11}$ эрг \cdot см $^{-3}$; $\rho = 5,17$ г \cdot см $^{-3}$; $\alpha = 0,02$; $\beta = 10^9$ с $^{-1}$; $d = 6,865 \cdot 10^{-5}$ см. Параметры специфические: ЖИГ (а): $4\pi M_0 = 1750$ Гс; $B_2 = 6,96 \cdot 10^6$ эрг \cdot см $^{-3}$; $H_0 = 2750$ Э; ТбФГ (б): $4\pi M_0 = 250$ Гс; $B_2 = 3,0 \cdot 10^7$ эрг \cdot см $^{-3}$; $H_0 = 1250$ Э.

Из рис. 3.4 видно, что в обоих случаях функция G_S представляет собой параболу, симметричную относительно оси ординат, с единственным нулем при $\omega = 0$. Ветви параболы для ТбФГ поднимаются вверх значительно круче (на два порядка), чем ветви параболы для ЖИГ, что, по-видимому, связано с большим значением константы B_2 для этого материала. Однако критические частоты, определяемые формулой (3.160) с учетом значений, приведенных в разделах 3.9.2, 3.9.5, и замечания в разделе 3.9.4 для обоих ферритов близки друг к другу и составляют: $\omega_S(\text{ЖИГ}) = 1,7633 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$, $\omega_S(\text{ТбФГ}) = 1,7506 \times 10^{10} \text{ с}^{-1}$. Видно, что в обоих случаях эти частоты весьма далеки от нуля функции G_S , то есть критерий постоянства амплитуды не выполняется. Контрольная проверка развития колебаний во времени показывает, что в обоих случаях свободные колебаний затухают со временем релаксации порядка $7 \cdot 10^{-9} \text{ лс}$, а амплитуда вынужденных колебаний принимает постоянное значение со временем установления той же длительности.

Представляет интерес найти условия, максимально близкие к реальности, при которых оба критерия (3.154) и (3.152) выполняются. Реальные материалы предоставляют в этом плане широкий выбор величины константы магнитоупругого взаимодействия B_2 . Проверка зависимости вида функции $G_S(\omega)$ от величины этой константы при всех остальных параметрах, соответствующих ЖИГ, показала, что резкое изменение $G_S(\omega)$ происходит при переходе значения B_2 через критическую величину B_{2C} , превышающую B_2 для ЖИГ в 46,86532 раза, то есть если считать значение $B_2(\text{ЖИГ}) = 6,96 \cdot 10^6 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3}$ точным, то при $B_{2C} = 3,261826 \cdot 10^8 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3}$. При этом ветви параболы переходят

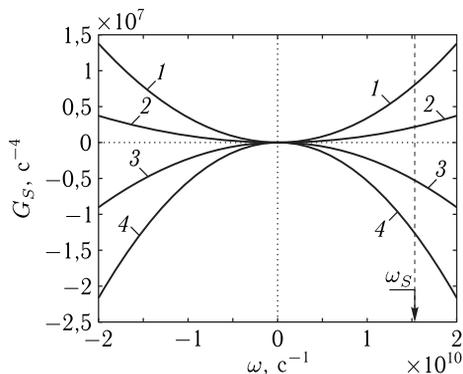


Рис. 3.5. Зависимость функции G_S от частоты ω при различных значениях B_2 , близких к критическому. Параметры: $4\pi M_0 = 1750 \text{ Гс}$; $c_{44} = 7,64 \times 10^{11} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3}$; $\rho = 5,17 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$; $\alpha = 0,02$; $\beta = 10^9 \text{ с}^{-1}$; $d = 6,865 \cdot 10^{-5} \text{ см}$; $B_2(\text{ЖИГ}) = 6,96 \cdot 10^6 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3}$; 1 — $B_2 \rightarrow B_2(\text{ЖИГ}) \times 46,86530$; 2 — $B_2 \rightarrow B_2(\text{ЖИГ}) \times 46,86531$; 3 — $B_2 \rightarrow B_2(\text{ЖИГ}) \times 46,86532$; 4 — $B_2 \rightarrow B_2(\text{ЖИГ}) \times 46,86533$

от стремления вверх к стремлению вниз, причем переверот происходит при большем значении такой константы.

Соответствующее изменение вида функции $G_S(\omega)$ при переходе величины константы B_2 через критическое значение B_{2C} иллюстрируется рис. 3.5. Из рисунка видно, что по мере роста значения B_2 в седьмой значащей цифре на единицу, ветви параболы, первоначально стремящиеся вверх, резко перескакивают вниз. При этом частота, определяемая критерием (3.154), равна $\omega_S = 1,5256 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$. Ввиду крайней резкости перескока ветвей параболы сверху вниз определить точное значение константы B_{2C} , превышающее семь значащих цифр, в настоящей работе не представилось возможным, однако очевидно, что переход ветвей происходит через их выстраивание вдоль горизонтальной оси, то есть на частоте ω_S правая ветвь должна приблизиться к нулю на величину бесконечно малую, что и обеспечит одновременное выполнение обоих критериев (3.154) и (3.152).

3.12. Развитие во времени колебаний по полной и модельной системам

Рассмотрим теперь, в какой степени колебания осцилляторов, описываемые упрощенной линеаризованной системой (3.128)–(3.129), соответствуют колебаниям намагниченности, описываемым полной системой (2.1)–(2.7) в разделе 2.2. Для сравнения обратимся к рис. 3.6.

На рис. 3.6 показано развитие колебаний компонент m_x (*a, в, д*) и x_1 (*б, г, е*) во времени при различных коэффициентах константы магнитоупругого взаимодействия: $N = B_2/B_2(\text{ЖИГ})$. Кривые в левом столбце соответствуют полной системе (2.1)–(2.7), кривые в правом столбце — линеаризованной системе (3.128)–(3.129).

Кривые на рис. 3.5, *a*, 3.6, *б* соответствуют чисто линейному режиму с константой B_2 , соответствующей ЖИГ, то есть вдали от условий переориентации [56]. Видно, что в установившемся режиме амплитуды колебаний, рассчитанные по обеим системам уравнений, совпадают с точностью до 5%. Установление амплитуды колебаний здесь происходит одинаково по затухающей экспоненте с одной и той же постоянной времени. Дополнительное исследование показывает, что наилучшее совпадение получается при возбуждении магнитной системы не по двум координатам, а лишь по одной, однако различие обоих этих случаев незначительно и не превышает 20%.

Кривые на рис. 3.6, *в*, 3.6, *г* соответствуют значению константы B_2 , приближающемуся к значению переориентации, соответствующему $N \approx 47$ [56]. В установившемся режиме здесь опять наблюдается хорошее совпадение амплитуд, рассчитанных по обеим системам уравнений: различие не превышает 5%. Некоторое небольшое отличие состоит в режиме установления: биения при расчете по полной системе несколько более выражены, чем при расчете по линеаризованной, что, по-видимому, обусловлено близостью к режиму переориентации.

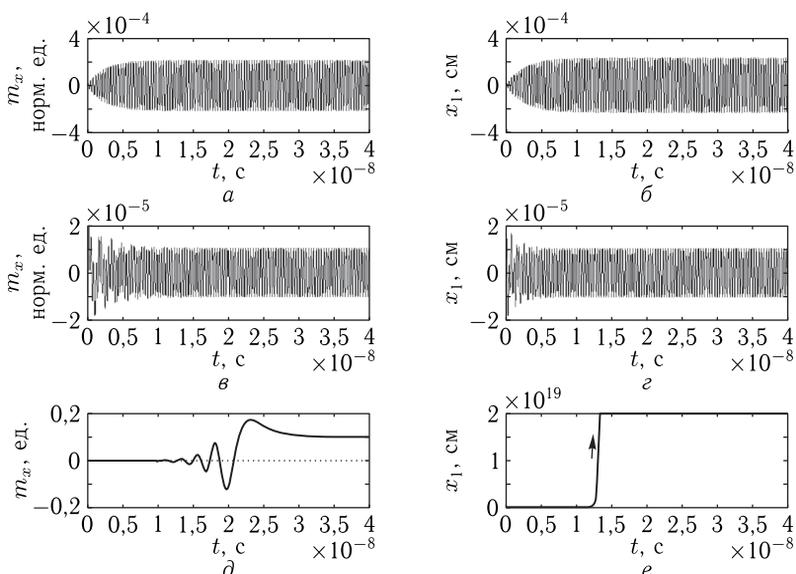


Рис. 3.6. Развитие колебаний компонент m_x (а, в, д) и x_1 (б, г, е) во времени при различных коэффициентах константы магнитоупругого взаимодействия: $N = B_2/B_2(\text{ЖИГ})$. Частота возбуждения $f = 2800$ МГц. Условия возбуждения: $h_x = 0,01$ Э, $h_y = 0,01$ Э; $A = 0,01$. Коэффициент константы магнитоупругого взаимодействия: а, б — $N = 1$; в, г — $N = 40$; д, е — $N = 50$

Кривые 3.6, д, 3.6, е соответствуют значению константы B_2 , несколько превышающему требуемое для переориентации. Из расчета по полной системе (рис. 3.6, д) видно, что вектор намагниченности при времени $\sim 2,3 \cdot 10^{-8}$ с претерпевает переориентацию к направлению более близкому к плоскости пластины, что происходит через посредство нескольких затухающих осцилляций. При расчете по линеаризованной системе с тем же значением константы B_2 (рис. 3.6, е) амплитуда осциллятора x_1 при времени $\sim 1,4 \cdot 10^{-8}$ с без каких-либо осцилляций сразу устремляется к бесконечности.

Более подробный расчет показывает, что переориентация вектора намагниченности в исходной магнитоупругой системе и уход на бесконечность амплитуды колебаний модельной системы осцилляторов происходит при одном и том же (с точностью не менее 1%) значении константы магнитоупругого взаимодействия $B_2 \rightarrow B_{2C}$.

3.13. Численный анализ ограничения амплитуды за счет кубической нелинейности

В работе [18] при рассмотрении линейного приближения показано, что в зависимости от величины параметров связи через производные возможны три режима вынужденных колебаний.

При малой величине связи амплитуда вынужденных колебаний поле включения возбуждения сначала нарастает, а затем выходит на стационарный уровень по закону, соответствующему экспоненте с отрицательным показателем. При большой величине связи амплитуда вынужденных колебаний стремится к бесконечности по экспоненте с положительным показателем. Эти два режима разделены критической величиной связи (точкой бифуркации), при которой нарастание колебаний происходит линейно, то есть по экспоненте с нулевым показателем, причем критичность порога перехода от одного режима к другому по константе связи весьма высока и составляет не менее шести значащих цифр.

Как отмечалось в работе [18], режим экспоненциального нарастания колебаний соответствует бесконечному возрастанию их энергии, что в реальных системах недопустимо. То есть при достаточно высокой амплитуде колебаний должны работать механизмы ограничения. Одним из таких известных механизмов является нелинейная расстройка, при большой амплитуде приводящая к выводу системы из резонанса [1, 55]. Рассмотрим, что добавляет к линейным явлениям, описанным в [18], нелинейность в квадратичном приближении.

Общие уравнения (3.71)–(3.72) содержат много слагаемых, роль которых в общем развитии колебаний, по-видимому, является различной. Однако, как показано в разделе 3.9.5, главную роль играют слагаемые, пропорциональные третьей степени намагниченности. Из классических представлений о колебаниях нелинейной системы с одной степенью свободы [1, 55] следует, что ограничение амплитуды при резонансе происходит за счет расстроенного механизма, главную роль в котором играет нелинейность также кубического характера.

Поэтому пока пренебрежем ролью дополнительных механизмов и ограничим рассмотрение единственным слагаемым, соответствующим кубической нелинейности. При этом система уравнений (3.71)–(3.72) в обозначениях, подобных принятым в [18], сводится к следующей:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta_1 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \eta_1 \cdot x_1^3 = A \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (3.163)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 + \delta_2 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \eta_2 \cdot x_2^3 = 0. \quad (3.164)$$

Здесь кубическая нелинейность введена в обоих уравнениях, что сделано для симметрии системы, обеспечивающей эквивалентность характера колебаний обоих осцилляторов. В реальном случае ЖИГ нелинейность упругого осциллятора отсутствует, то есть симметрия нарушена, что требует отдельного рассмотрения, здесь же ограничиваемся более простым симметричным случаем.

Развитие вынужденных колебаний во времени при различной величине связи и коэффициента кубической нелинейности иллюстрируется

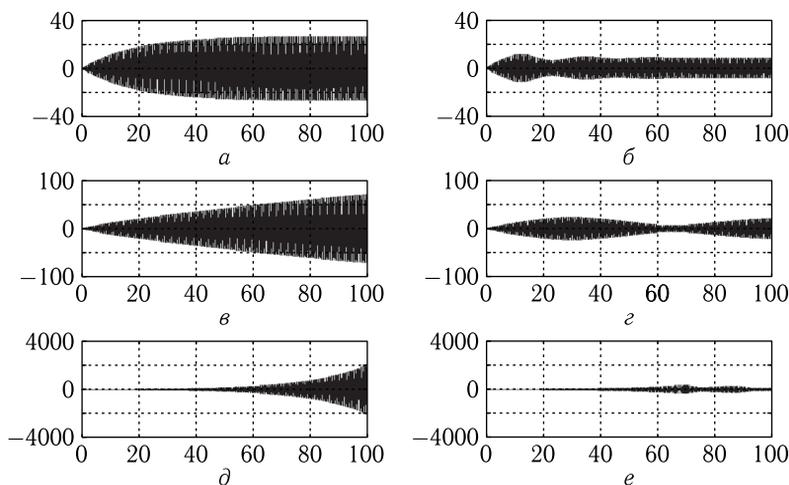


Рис. 3.7. Развитие вынужденных колебаний во времени при различной величине связи и коэффициента кубической нелинейности (первый осциллятор). Параметры осцилляторов: $\beta_1 = \beta_2 = 0,1$; $\omega_1 = \omega_2 = 17,5$; $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$; параметры возбуждения: $\omega_0 = 17,5$; $A = 50$. Коэффициенты: a — $\delta_{1,2} = 0$, $\eta_{1,2} = 0$; b — $\delta_{1,2} = 0$, $\eta_{1,2} = 0,1$; $в$ — $\delta_{1,2} = 0,1$, $\eta_{1,2} = 0$; $г$ — $\delta_{1,2} = 0,1$, $\eta_{1,2} = 0,01$; $д$ — $\delta_{1,2} = 0,2$, $\eta_{1,2} = 0$; $е$ — $\delta_{1,2} = 0,2$, $\eta_{1,2} = 0,001$

рис. 3.7 (приведены эпюры для первого осциллятора, второй ведет себя аналогично).

Эпюры левого столбца на рис. 3.7 представляют собой линейное приближение при различных величинах связи и повторяют таковые, приведенные в работе [18]. В правом столбце показано, как развиваются те же вынужденные колебания в условиях кубической нелинейности.

Из рисунка видно, что во всех трех режимах кубическая нелинейность приводит к ограничению амплитуды колебаний, что и является здесь главным результатом. Благодаря нелинейной расстройке, установление колебаний происходит с биениями, проявляющимися в модуляции амплитуды на рис. 3.7, б, 3.7, г и 3.7, е. При увеличении параметра нелинейности период уменьшается. Так, при $\eta_{1,2} = 0,001$ (рис. 3.7, е) он составляет 95 с, при $\eta_{1,2} = 0,01$ период составляет 64 с, при $\eta_{1,2} = 0,1$ (рис. 3.7, б) период равен 22 с. Такое поведение периода биений соответствует классическим представлениям [1, 55].

Следует отметить, что в случае $\eta_{1,2} = 0,001$ (рис. 3.2, е) периоду биений в 95 с соответствуют два максимума при 70 с и 165 с (второй находится за правым краем рис. 3.7, е), наблюдаемый же на рис. 3.7, е максимум при 88 с является вторичным, отражающим довольно сложный характер биений, в этом случае обусловленный, по-видимому, большой величиной параметра связи $\delta_{1,2}$.

3.14. Амплитудно-частотные характеристики колебаний при квадратичном приближении

На рис. 3.8 показаны амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) магнитных (левый столбец) и упругих (правый столбец) колебаний при различных уровнях возбуждения.

Рис. 3.8 *а, б* соответствует линейному режиму ($h_0 = 0,01$ Э). В этом случае резонансные кривые как для магнитных (*а*), так и для упругих (*б*) колебаний полностью симметричны, квадратичное приближение

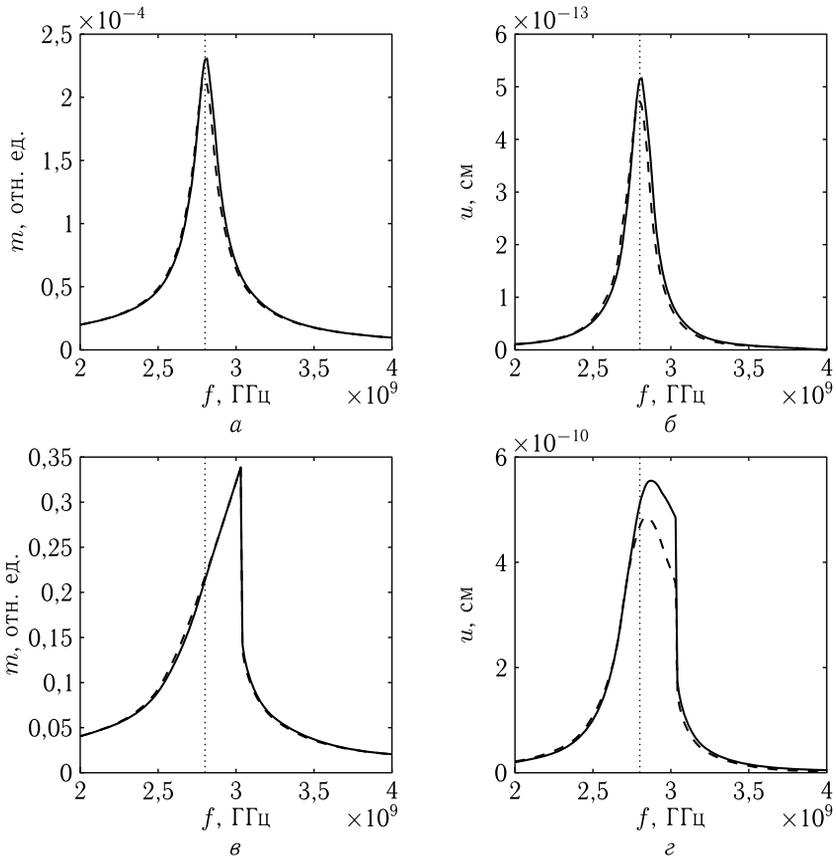


Рис. 3.8. Амплитудно-частотные характеристики магнитных (левый столбец) и упругих (правый столбец) колебаний при различных уровнях возбуждения. Сплошные линии — расчет по квадратурной системе (3.71)–(3.72). Пунктирные линии — расчет по полной системе (3.1)–(3.3). Вертикальная точечная линия соответствует резонансной частоте свободных колебаний. Уровни возбуждения: *а, б* — $h_0 = 0,01$ Э ($h_0/M_0 = 7,1 \cdot 10^{-5}$); *в, г* — $h_0 = 20$ Э ($h_0/M_0 = 0,14$). Параметры — аналогичные принятым для рис. 3.2

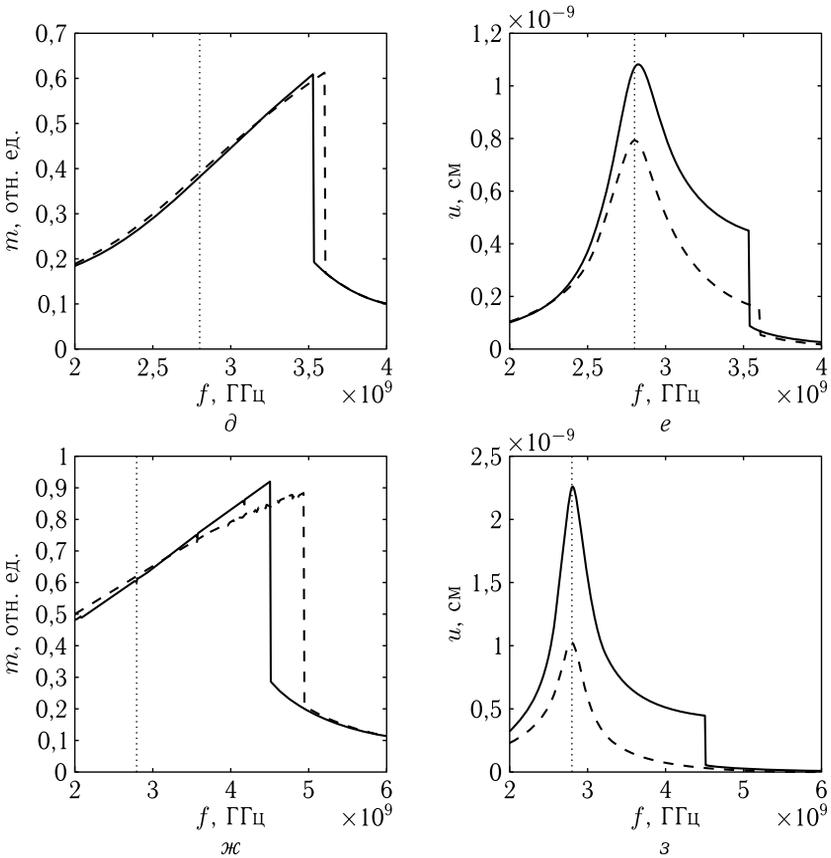


Рис. 3.8. (Окончание). d, e — $h_0 = 100 \text{ Э}$ ($h_0/M_0 = 0,71$); $ж, з$ — $h_0 = 400 \text{ Э}$ ($h_0/M_0 = 2,86$). Параметры — аналогичные принятым для рис. 3.2

описывает полное решение с точностью не хуже 1%, кроме ближайшей окрестности резонансной частоты $2,8 \text{ ГГц} \pm 10 \text{ МГц}$, где точность составляет около 4%.

Рис. 3.8, $в, г$ соответствует слабо нелинейному режиму ($h_0 = 20 \text{ Э}$). Резонансная кривая для магнитных колебаний ($в$) принимает вид наклонного треугольника с крутым высокочастотным спадом, что обусловлено классическим действием нелинейного расстройного механизма [1, 55]. Максимум кривой соответствует началу крутого спада и смещается относительно частоты свободных колебаний 2,8 ГГц вверх на 220 МГц. Квадратичное приближение соответствует полному решению с точностью около 1%. Резонансная кривая для упругих колебаний ($г$) расширяется, приобретая со стороны высоких частот крутой спад, смещенный вверх на те же 220 МГц, на резонансной

частоте свободных колебаний 2,8 ГГц имеется подъем, обусловленный упругим резонансом магнитной пластины. Квадратичное приближение описывает полное решение в окрестности резонансной частоты (-10 МГц, $+220$ МГц) с точностью около 12 %, несколько превышая точное решение. Вне этого интервала точность квадратичного приближения составляет порядка 1 %.

Рис. 3.8, δ , e соответствует сильно нелинейному режиму ($h_0 = 100$ Э). Магнитные колебания (δ) по-прежнему представляют собой скошенный треугольник, причем частота спада возрастает, согласно квадратичному приближению до 3,50 ГГц, согласно полному решению — до 3,57 ГГц. В области вне спада точность квадратичного приближения составляет около 2 %. Кривая для упругих колебаний (e) имеет такой же крутой спад на тех же частотах, что и магнитная, однако резонанс на частоте 2,8 ГГц выражен значительно сильнее. Кривая квадратичного приближения проходит выше кривой полного, причем точность квадратичного приближения в области резонанса близка к 30 %, а вблизи спада ухудшается до 50 %.

Рис. 3.8, \mathcal{J} , z соответствует особо сильно нелинейному режиму ($h_0 = 400$ Э). Характеристика для магнитных колебаний (\mathcal{J}) наклоняется в сторону высоких частот еще больше, так что частота спада по квадратичному приближению достигает 4,50 ГГц, а по полному решению — 5,00 ГГц. В области вне спада точность квадратичного приближения составляет около 8 %. На кривой для упругих колебаний (e) крутой спад проявляется только в квадратичном приближении и приходится на ту же частоту, что и магнитный — 4,50 ГГц. Резонанс в области 2,8 ГГц при обоих решениях остается хорошо выраженным, однако в квадратичном приближении его высота превышает высоту при полном решении в 2,2 раза. В области частот выше резонансной точность квадратичного приближения еще более падает, что обусловлено отсутствием крутого спада при полном решении.

Таким образом, приближенно можно считать, что квадратичное приближение описывает магнитные колебания с точностью не хуже 1 % в поле до 20 Э, до 2 % в поле до 100 Э и до 10 % в поле до 400 Э. То же приближение описывает упругие колебания с точностью до 10 % в поле до 20 Э, до 30 % в поле до 100 Э и до двух раз в поле до 400 Э, причем точность приближения при удалении от резонансной частоты возрастает.

Замечание. Как упоминалось в разделе 3.6, правомерность использования системы (3.71)–(3.72), при выводе которой применялась формула (3.55), должна быть проверена при сравнении с полной системой (3.1)–(3.3). Можно полагать, что степень соответствия приведенных здесь АЧХ, рассчитанных по полной и квадрированной системам, в первую очередь вдали от частоты свободного резонанса, составляющая единицы и доли процента, служит для такой правомерности основанием вполне достаточным.

3.15. Автомуляционные колебания

В предыдущих разделах рассмотрено приложение квадрированной системы к довольно простым нелинейным явлениям, таким как ограничение амплитуды колебаний и деформация резонансных кривых. Проверим теперь применимость такой системы для описания еще одного более сложного нелинейного эффекта.

В работах [10,11,16], посвященных связанным системам типа «ферритовый плюс электродинамический или упругий резонатор», сообщалось о возможности возбуждения в ферритах самоподдерживающихся процессов автомуляционного характера, имеющих место при достаточно высоких уровнях возбуждающего сигнала. Рассмотрим возможность применения квадратичного приближения (3.122)–(3.123) к таким системам.

Для уверенной реализации автомуляционных режимов возьмем большую амплитуду возбуждения в сочетании с увеличенной константой магнитоупругого взаимодействия. Остальные параметры феррита возьмем типичными для ЖИГ [13,41–44]:

$$4\pi M_0 = 1750 \text{ Гс}, \quad \alpha = 0,0001; \quad \beta = 10^6 \text{ с}^{-1},$$

$$B_2 = 6,96 \cdot 10^6 \text{ эрг/см}^3; \quad c_{44} = 7,64 \cdot 10^{11} \text{ эрг/см}^3; \quad \rho = 5,17 \text{ г/см}^3.$$

В отличие от работ [10,11,16], где решающую роль играла взаимная расстройка резонаторов и отстройка их от частоты возбуждения, для упрощения задачи возьмем все частоты равными, для чего положим постоянное поле: $H_0 = 2750 \text{ Э}$, толщину магнитной пластины: $d = 6,865 \times 10^{-5} \text{ см}$. Такие параметры обеспечивают частоту ФМР и упругого резонанса равной 2800 МГц . Частоту возбуждения также возьмем равной этой величине. Заметим, что выбор равенства всех частот несколько затрудняет возбуждение автомуляционных колебаний, повышая их порог, поэтому для облегчения реализации таких режимов положим константу магнитоупругого взаимодействия, в несколько раз превышающей таковую для ЖИГ.

Полученные результаты иллюстрируются рис. 3.9 и рис. 3.10.

На рис. 3.9 показано развитие колебаний компонент m_x и u_x во времени, полученное путем расчета по полной (левый столбец) и квадрированной (правый столбец) системам.

Из рис. 3.9 видно, что в обоих случаях колебания намагниченности ($a, б$) имеют хаотический близкий к шумовому характер, свойственный высокому уровню возбуждения [10,11,16]. Однако колебания упругого смещения ($в, г$) имеют регулярный близкий к синусоидальному характер огибающей автомуляционного типа.

Некоторое превышение средней амплитуды колебаний при расчете по квадрированной системе ($б, г$) над амплитудой при расчете по полной системе ($а, в$) соответствует аналогичному превышению на рис. 2 в [23] при достаточно высоком уровне возбуждения. Здесь превышение для магнитных колебаний составляет 1,2 раза, а для упругих — около двух раз.

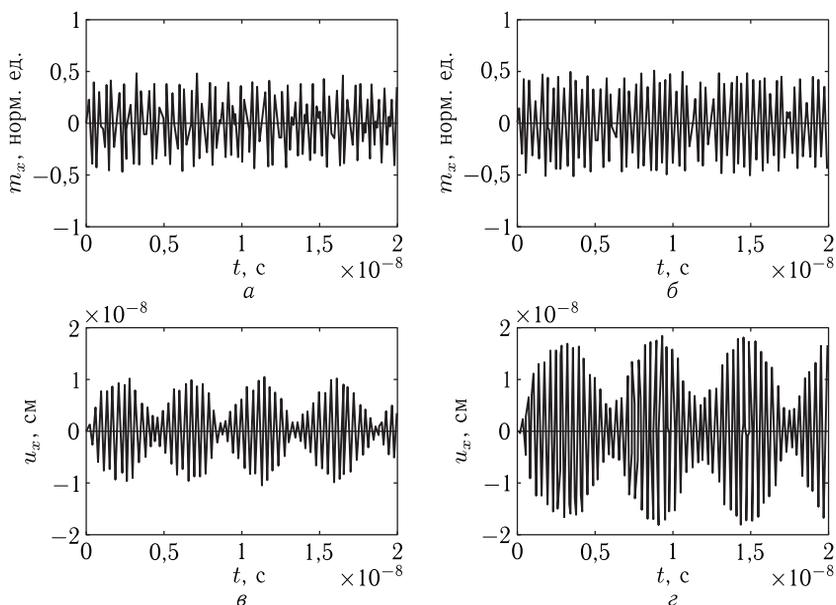


Рис. 3.9. Развитие колебаний компонент m_x и u_x во времени, полученное путем расчета по полной (левый столбец) и квадрированной (правый столбец) системам. Константа магнитоупругого взаимодействия $B_2 = 12 \cdot B_2(\text{ЖИГ})$. Амплитуда переменного поля: $h_x = 150 \text{ Э}$; $h_y = 0 \text{ Э}$

На рис. 3.10 показано развитие колебаний компонент m_x и u_x во времени, полученное путем расчета по полной (левый столбец) и квадрированной (правый столбец) системам. Отличие от рис. 3.9 состоит в два раза более высоком уровне возбуждения и в 3,33 большем значении константы B_2 , то есть здесь нелинейность режима должна проявляться сильнее.

Из рис. 3.10 видно, что и в этом случае колебания намагниченности ($a, б$) имеют близкий к шумовому характер. Однако теперь колебания упругого смещения ($в, г$) теряют регулярность и также приобретают хаотический шумовой характер.

Некоторое превышение амплитуды при расчете по квадрированной системе над амплитудой при расчете по полной, имеет ту же причину, что и отмеченное на рис. 3.9. Здесь превышение для магнитных колебаний составляет 1,5 раз, а для упругих — около 1,2 раза.

3.16. Оценка прикладных возможностей квадратичного приближения

С прикладной стороны представляет интерес оценить время счета и требуемые машинные ресурсы при использовании квадрированной системы (3.71)–(3.72) вместо полной (3.1)–(3.3). В настоящей работе

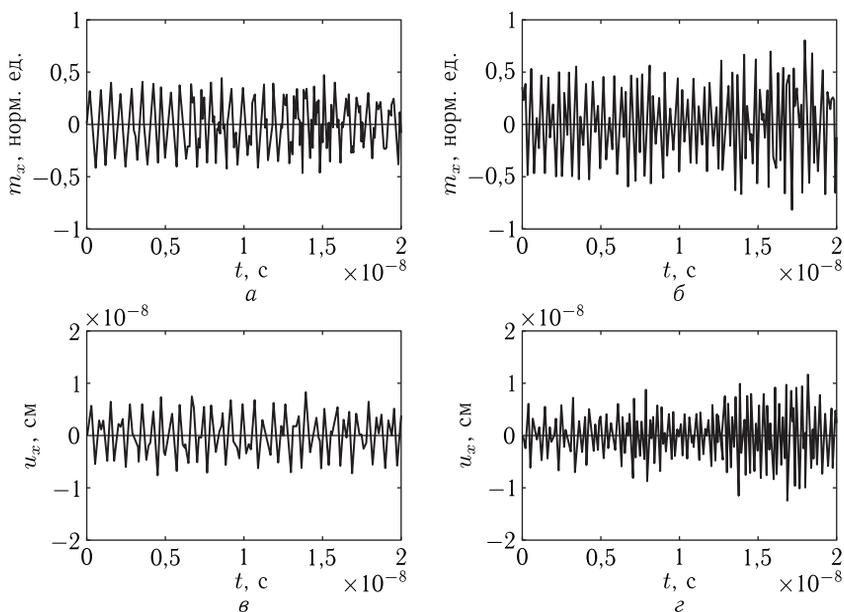


Рис. 3.10. Развитие колебаний компонент m_x и u_x во времени, полученное путем расчета по полной (левый столбец) и квадрированной (правый столбец) системам. Константа магнитоупругого взаимодействия $B_2 = 40 \cdot B_2(\text{ЖИГ})$. Амплитуда переменного поля: $h_x = 300 \text{ Э}$; $h_y = 0 \text{ Э}$

при принятых параметрах для ЖИГ программа для расчета АЧХ в диапазоне от 2 до 6 ГГц с шагом в 10 МГц методом Рунге–Кутты четвертого порядка [54] по полной системе (3.1)–(3.3), написанная на языке «Фортран», составляла 490 строк и занимала объем около 12000 байт, при этом время расчета на компьютере с частотой 2,8 ГГц составляло 10–14 минут. Подобная программа для расчета по системе в квадратичном приближении (3.71)–(3.72) составляла 250 строк, занимала менее 6000 байт и имела время счета 7–9 секунд. Таким образом, расчет с помощью квадратичного приближения приводит к экономии машинных ресурсов в два раза и сокращению времени машинного счета на два порядка.

Выводы по главе 3

В применении к задаче анализа работы магнитострикционного преобразователя СВЧ-диапазона на частоте ферромагнитного резонанса рассмотрено возбуждение гиперзвуковых колебаний переменным магнитным полем в геометрии плоскопараллельной нормально намагниченной ферритовой пластины. Записаны уравнения движения вектора

намагниченности и упругого смещения с граничными условиями и возбуждением переменным магнитным полем.

Для упрощения задачи рассмотрено квадратичное приближение по намагниченности с учетом кругового характера прецессии, в результате чего полная система, содержащая семь уравнений первого порядка и четыре граничных условия, сведена к квадрированной системе четырех уравнений первого порядка без граничных условий. Показано, что полученная ранее линеаризованная система является частным случаем полученной здесь квадрированной системы.

Введены эквивалентные параметры квадрированной системы, выраженные через параметры материала и геометрию исходной ферритовой пластины.

Записана полная система уравнений для квадратичного приближения в обобщенном симметричном виде, соответствующая модельной системе из двух связанных осцилляторов, нелинейность в которых описывается слагаемыми третьего порядка по намагниченности, упругому смещению и их производных.

На основе численного анализа соотношения составляющих эквивалентных параметров для реального случая железо-иттриевого граната (ЖИГ), получены укороченные уравнения, содержащие только главные слагаемые, отвечающие за динамическое поведение системы. Показано, что главную роль играют слагаемые, пропорциональные третьей степени по намагниченности и произведению намагниченности на квадрат ее производной по времени.

Путем рассмотрения развития колебаний во времени выполнен анализ приближения, обеспечиваемого линеаризованной и квадрированной системами по сравнению с решением, обеспечиваемым исходной нелинейной системой. Показано, что при описании упругих колебаний на уровне точности 20% линеаризованная система является корректной на уровне переменных полей не более 0,05 от намагниченности насыщения при углах прецессии порядка 3° , тогда как квадрированная система сохраняет корректность вплоть до полей, составляющих 0,40 от намагниченности насыщения, что соответствует углам прецессии до 25° . По магнитным колебаниям квадрированная система сохраняет точность 5% до полей, превышающих намагниченность насыщения более чем в три раза, что соответствует углам прецессии до 40° .

На основе модельной системы связанных осцилляторов выполнен анализ нелинейности кубического характера. Выявлена роль кубической нелинейности как главного фактора в ограничении экспоненциального роста амплитуды вынужденных колебаний, предсказанного линеаризованной системой по прохождении критической точки бифуркации. Показано, что ограничение амплитуды сопровождается биениями, вызванными нелинейной расстройкой.

Рассмотрены амплитудно-частотные характеристики магнитных и упругих колебаний при различных уровнях возбуждения. На основе их анализа показано, что вблизи резонанса квадратичное приближение

при амплитуде переменного поля до 0,14 от намагниченности описывает магнитные колебания с точностью 1% и упругие с точностью 10%, при амплитуде 0,71 от намагниченности — магнитные — 2%, упругие — 30%, при амплитуде 2,86 — магнитные — 10% и упругие с точностью до двух раз, причем точность приближения при удалении от резонансной частоты возрастает.

Степень адекватности модельной и полной систем проверена на более сложном примере нелинейных колебаний — возбуждении самоподдерживающегося процесса автомодуляционного характера.

Для анализа выбраны автомодуляционные колебания, имеющие место при достаточно высокой амплитуде возбуждения (для ЖИГ — порядка 100 Э) в сочетании с повышенным значением константы магнитоупругого взаимодействия (на порядок выше, чем для ЖИГ). В ходе предварительного исследования были выявлены два режима возбуждаемых при этом колебаний. При первом режиме магнитные колебания носят близкий к шумовому характер, тогда как упругие остаются достаточно регулярными. При втором режиме как магнитные, так и упругие колебания являются хаотическими. Оба режима имеют пороговый характер, причем порог второго примерно в три раза выше, чем первого.

Расчет обоих типов автомодуляционных колебаний проводился как по модельной, так и по полной системам уравнений. Было показано, что модельная система, хотя и не совсем точно повторяет форму колебаний, однако полностью обеспечивает описание общего характера развития во времени и порога огибающей как регулярных, так и хаотических автомодуляционных колебаний, причем различие в амплитуде не превышает 20%.

Оценены прикладные возможности использования квадратичного приближения. Показано, что расчет с помощью квадратичного приближения приводит к экономии машинных ресурсов в два раза и сокращению времени машинного счета на два порядка.

Глава 4

АНАЛИЗ АВТОМОДУЛЯЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ МАГНИТНОГО И УПРУГОГО ОСЦИЛЛЯТОРОВ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ПОТЕНЦИАЛА

В настоящей главе продолжено рассмотрение нелинейных вынужденных колебаний намагниченности и упругого смещения в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. Для моделирования таких колебаний предложена упрощенная система из двух связанных осцилляторов, один из которых обладает гиромангнитными свойствами. На основе такой модели показана возможность возбуждения вынужденных колебаний автомодуляционного характера. Выявлены шесть основных режимов автомодуляционных колебаний, для интерпретации которых предложены две модели — обобщенного потенциала и генерации гармоник. Модель обобщенного потенциала рассмотрена в наиболее общем виде, в трехмерном пространстве построены потенциальные поверхности, на основе анализа кривизны которых установлены свойства возбуждаемых колебаний с учетом параметров материала.

Основное изложение материала в данной главе следует работе [26]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

4.1. Постановка задачи изучения гиперзвуковых автомодуляционных колебаний

Возбуждение гиперзвуковых колебаний в диапазоне СВЧ актуально для общей физики [46], технической акустики [48], аналоговой обработки информации [49]. Весьма перспективными здесь являются ферритовые магнитострикционные преобразователи, работающие в условиях ферромагнитного резонанса (ФМР) [13].

В работах [17, 67] показано, что в структурах таких преобразователей кроме обычных регулярных колебаний возможны колебания автомодуляционного характера, которые могут представлять значительный прикладной интерес в плане создания устройств как синхронного, так и несинхронного преобразования частоты гиперзвуковых колебаний, в том числе деления с кратностью отношения, достигающего нескольких порядков.

Расчет подобных автомодуляционных колебаний в условиях ФМР требует привлечения весьма сложного математического аппарата, успешно реализуемого только ценой ряда упрощающих предположений. В простейшем варианте задача сводится к системе семи нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешимой только численными методами [16]. Условия практики однако требуют создания достаточно простого расчетного аппарата, позволяющего оценить возможности и рассчитать основные параметры преобразователя без привлечения сложных аналитических и численных методов.

В работе [17] впервые показана возможность сведения полной задачи к модельной системе из двух связанных осцилляторов, один из которых обладает гиромагнитными свойствами. На основе упрощенной модели показана возможность возбуждения двух видов автомодуляционных колебаний — синхронного и асинхронного. Для асинхронных колебаний выявлены различные режимы: навязанный, стохастический, регулярный. Отмечена аналогия регулярного режима с наблюдаемыми в эксперименте автоколебаниями в системе «ферритовый диск — электромагнитный резонатор» [10, 11].

В работах [18, 21–24] предложен аппарат, позволяющий свести задачу о возбуждении гиперзвука магнитострикционным преобразователем в условиях ФМР к упрощенной модели возбуждения двух связанных осцилляторов — магнитного и упругого. При этом полная система, содержащая семь уравнений первого порядка и четыре граничных условия, в рамках квадратичного приближения сведена к квадратурной системе из четырех уравнений первого порядка без граничных условий. В работе [24] полученная система уравнений применена к анализу некоторых частных видов колебаний автомодуляционного характера. В работе [68] выявлены условия и приведены рекомендации выбора параметров материала преобразователя, требуемых для эффективной реализации автомодуляционного режима.

Однако рассмотрение, проведенное в перечисленных работах, является неполным. Так отсутствует достаточная классификация весьма разнообразной совокупности автомодуляционных режимов, недостаточно выявлены их пороговые свойства, не рассмотрены предельные возможности возбуждения в достаточно широком диапазоне изменения параметров материала.

Настоящая глава является обобщением и дальнейшим развитием перечисленных работ с целью выявления максимального разнообразия свойств автомодуляционных явлений.

4.2. Геометрия гиромагнитного резонатора

Поскольку основным предметом исследования являются вынужденные автомодуляционные колебания в гиромагнитном резонаторе, рассмотрим сначала общую постановку задачи для такого резонатора.

Геометрия задачи, совпадает с приведенной в главе 1 на рис. 1.1. Там же приведены основные уравнения с соответствующими граничными условиями (1.1)–(1.7). Повторим здесь только необходимые для дальнейшего рассмотрения.

Полагая полную плотность энергии пластины U равной сумме плотностей магнитной, упругой и магнитоупругой энергий, подобно [16], получаем:

$$U = -M_0 h_x m_x - M_0 h_y m_y - M_0 H_0 m_z + 2\pi M_0^2 m_z^2 + \\ + 2c_{44}(u_{xy}^2 + u_{yz}^2 + u_{zx}^2) + \\ + 2B_2(m_x m_y u_{xy} + m_y m_z u_{yz} + m_z m_x u_{zx}), \quad (4.1)$$

где $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_0$ — нормированный вектор намагниченности, M_0 — намагниченность насыщения; x_i — координаты, $i = x, y, z$, $u_{i,k}$ — тензор деформаций

$$u_{i,k} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad (4.2)$$

u_i — компоненты упругого смещения.

В выражении (4.1) присутствуют два вида переменных: намагниченность и упругое смещение. Будем полагать, что динамическое поведение намагниченности подчиняется уравнению Ландау–Лифшица [42, 43], а динамическое поведение упругого смещения — уравнению толщинных упругих колебаний тонкой пластины [69]. Входящие в эти уравнения эффективные поля и упругие силы получаются из (4.1) стандартной процедурой дифференцирования по компонентам намагниченности и упругого смещения [42, 43, 69].

Таким образом, в подобной постановке задачи присутствуют два связанных резонатора: магнитный и упругий, взаимодействие между которыми и рассматривается далее.

4.3. Характер нелинейной связи для гиромагнитного резонатора

Следуя работе [17], рассмотрим сначала, каким образом реализуется нелинейная связь между магнитным и упругим резонаторами.

Согласно [16], достаточные для настоящего рассмотрения уравнения движения для случая однородной прецессии и первой упругой моды, имеют вид (формулы (66), (74), (70), (72), (77) в работе [16]):

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \cdot [(m_y + \alpha m_x m_z) \cdot H_{ez} - (m_z - \alpha m_y m_x) \cdot H_{ey} - \\ - \alpha \cdot (m_y^2 + m_z^2) \cdot H_{ex}]; \quad (4.3)$$

$$H_{ey} = h_y + \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}} m_y m_z^2 - \frac{2B_2}{M_0 d} m_z v_y; \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = w_y; \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial w_y}{\partial t} = -2\beta w_y - \frac{c_{44}\pi^2}{\rho d^2} \cdot v_y + \frac{4B_2 d}{c_{44}\pi^2} \cdot G_y; \quad (4.6)$$

$$G_y = m_y \frac{\partial^2 m_z}{\partial t^2} + m_z \frac{\partial^2 m_y}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial m_y}{\partial t} \cdot \frac{\partial m_z}{\partial t} + 2\beta \left(m_y \frac{\partial m_z}{\partial t} + m_z \frac{\partial m_y}{\partial t} \right). \quad (4.7)$$

Оценим характер нелинейной связи между компонентами намагниченности, реализуемой за счет магнитоупругого взаимодействия в уравнении для m_x .

Из (4.3) получаем

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} \sim \frac{\gamma}{(1 + \alpha^2)} m_z H_{ey}. \quad (4.8)$$

Из (4.4) получаем

$$H_{ey} \sim -\frac{2B_2}{M_0 d} m_z v_y. \quad (4.9)$$

Из (4.5) и (4.6) получаем

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} \sim \frac{4B_2 d}{c_{44}\pi^2} \cdot G_y. \quad (4.10)$$

Из (4.7) получаем

$$G_y \sim m_y \frac{\partial^2 m_z}{\partial t^2}. \quad (4.11)$$

Полагая зависимость от времени вида $e^{i\omega t}$, выполняя дифференцирование в (4.10), (4.11) и сокращая на ω^2 , получаем

$$v_y \sim \frac{4B_2 d}{c_{44}\pi^2} \cdot m_y m_z. \quad (4.12)$$

Подставляя (4.12) в (4.9), получаем

$$H_{ey} \sim -\frac{8B_2^2}{M_0 c_{44}\pi^2} m_y m_z^2. \quad (4.13)$$

Подставляя (4.13) в (4.8), получаем

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} \sim -\frac{8\gamma B_2^2}{(1 + \alpha^2) M_0 c_{44}\pi^2} m_y m_z^3. \quad (4.14)$$

Полагая $\alpha \ll 1$ и $8/\pi^2 \approx 1$, а также отбрасывая несущественный для рассмотрения знак минус, получаем

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} \sim \frac{\gamma B_2^2}{M_0 c_{44}} m_y m_z^3. \quad (4.15)$$

Таким образом, видим, что связь первого уравнения для намагниченности с другими осуществляется за счет члена четвертой степени по намагниченности.

Оценим коэффициент связи при параметрах материала, типичных для железо-иттриевого граната (ЖИГ) [13]: $M_0 = 140$ Гс; $B_2 = 6,96 \times$

$\times 10^6$ эрг \cdot см $^{-3}$; $c_{44} = 7,64 \cdot 10^{11}$ эрг \cdot см $^{-3}$, а также $\gamma = 1,76 \cdot 10^7$ Э $^{-1}$ \times \times с $^{-1}$.

При этом получаем

$$\frac{\gamma B_2^2}{M_0 c_{44}} \approx 8 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}. \quad (4.16)$$

При однородном ферромагнитном резонансе в поле 1000 Э, соответствующем частоте 2800 МГц, производная dm/dt составляет около 10^8 , что более чем на порядок превышает величину полученного коэффициента связи (4.16), то есть в этом случае связь является довольно слабой. Однако при поле 100 Э, соответствующем частоте 280 МГц, производная dm/dt составляет около 10^7 , что по порядку равняется коэффициенту связи (4.16), то есть в этом случае роль связи может быть значительной.

Таким образом, можно видеть, что в магнитоупругой среде связь между компонентами намагниченности, имея четвертый порядок по намагниченности, прямо пропорциональна квадрату константы магнитоупругого взаимодействия, обратно пропорциональна намагниченности и константе упругости, причем проявляется тем сильнее, чем ниже частота возбуждения.

Связь может быть весьма сильной в материалах с большой магнитоstriction и малой намагниченностью. Так, для тербиевого феррита-граната, где константа B_2 более чем на порядок больше, а намагниченность на порядок меньше, чем в ЖИГ, при параметрах $B_2 = 3,0 \times 10^7$ эрг \cdot с $^{-3}$, $M_0 = 19,89$ Гс [7] и том же, что для ЖИГ значении константы упругости $c_{44} = 7,64 \cdot 10^{11}$ эрг \cdot см $^{-3}$, получаем коэффициент связи равным $1,04 \cdot 10^9$ с $^{-1}$, что обеспечивает сильную связь вплоть до частот порядка десятков гигагерц.

Полученный здесь коэффициент связи относится к уравнению (4.3), содержащему первую производную от намагниченности m_x . Для получения уравнения второго порядка, каковым является классическое уравнение колебаний, продифференцируем (4.3) по времени еще раз и получим в правой части слагаемое вида $(\partial m_y / \partial t) \cdot H_{ez}$, где составляющие его сомножители имеют вид (формулы (67), (75) в работе [16]):

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \cdot [(m_z + \alpha m_y m_x) \cdot H_{ex} - (m_x - \alpha m_z m_y) \cdot H_{ez} - \alpha \cdot (m_z^2 + m_x^2) \cdot H_{ey}]; \quad (4.17)$$

$$H_{ez} = H_0 - 4\pi M_0 m_z - \frac{2K_1}{M_0} m_z (m_x^2 + m_y^2) - \frac{2K_2}{M_0} m_z m_x^2 m_y^2 - \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}} m_z (m_x^2 + m_y^2) - \frac{2B_2}{M_0 d} m_x v_x - \frac{2B_2}{M_0 d} m_y v_y. \quad (4.18)$$

Выполняя умножение, подставляя полученное произведение в продифференцированное по времени выражение (4.3) и оставляя только

члены, существенные для настоящего рассмотрения, для компоненты намагниченности m_x получаем уравнение:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2} + (\gamma H_0)^2 \cdot m_x + Q(m_x, m_y, m_z) = 0, \quad (4.19)$$

где $Q(m_x, m_y, m_z)$ является слагаемым связи m_x с другими компонентами намагниченности и представляет собой многочлен, содержащий произведения всех трех компонент вектора намагниченности во всех степенях, начиная с первой и кончая девятой. Таким образом, обсуждаемое далее соотношение показателей степеней 2, 4, 6, 7 и последующих степеней намагниченности в первом уравнении с первой степенью во втором, выполняется, что и доказывает для магнитоупругой системы возможность существования автомодуляционных колебаний.

Подобное рассмотрение системы, состоящей из магнитного и электродинамического резонаторов [10, 11], приводит к тем же результатам. Главной причиной, обуславливающей возможность автомодуляционных колебаний в подобных системах, является наличие нелинейного магнитного или сходного по свойствам резонатора, в котором связь с другим резонатором является нелинейной по амплитуде колебаний обоих резонаторов. В магнитном случае это обеспечивается наличием в уравнении для m_x слагаемых вида $m_y m_z^3$ и аналогичных слагаемых в двух других уравнениях.

4.4. Модель связанных линейного и нелинейного осцилляторов

Общий характер рассматриваемых задач позволяет сформулировать модель, содержащую максимально простой вид связи, при котором еще возможны колебания автомодуляционного характера. В настоящей работе в качестве такой модели была принята система из двух связанных осцилляторов, из которых первый является нелинейным (аналог магнитного резонатора), а второй — линейным (аналог электродинамического или упругого резонатора). Связь между осцилляторами предполагается невзаимной и нелинейной. Возбуждающая сила действует только на первый нелинейный осциллятор. Рассматривалось развитие колебаний обоих осцилляторов во времени после включения возбуждения.

В качестве такой наиболее простой модели была рассмотрена следующая система уравнений:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot (x_1 + \delta \cdot x_1^3) + \gamma_1 \cdot x_2^{\alpha_1} = A \cdot \cos \omega t; \quad (4.20)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1^{\alpha_2} = 0. \quad (4.21)$$

Здесь $x_{1,2}$, $\beta_{1,2}$, $\omega_{1,2}$ — координатные переменные, параметры затухания и собственные частоты осцилляторов, $\gamma_{1,2}$ — коэффициенты связи, δ — параметр нелинейности первого осциллятора, A и ω — амплитуда и частота возбуждающей силы, $\alpha_{1,2}$ — показатели степени слагаемого связи.

Поставленная так задача решалась численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка [54].

В ходе исследований было выявлено, что приведенная система уравнений допускает автомодуляционное решение при следующих условиях: связь во втором уравнении всегда должна быть первой степени, а в первом — второй, четвертой, шестой и всех последующих степеней (2, 4, 6, 7, 8, 9, ...). Условия возбуждения к подбору параметров довольно критичны. Наиболее легко автомодуляционные колебания получаются при сочетании: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, так что ограничимся далее именно этим случаем.

В работе [17] в подобных условиях были выявлены два вида автомодуляционных колебаний — синхронный и асинхронный.

Однако параметры решенной там задачи были заданы случайным образом, что не позволило судить о наблюдаемых явлениях с достаточной общностью. Рассмотрим здесь разнообразие возникающих колебаний более подробно.

4.4.1. Нелинейная связь между линейными осцилляторами

Сначала обратимся к случаю, когда оба осциллятора являются линейными, а связь между ними — нелинейна, то есть в уравнениях (4.20)–(4.21) будем полагать $\delta = 0$. Для простоты рассмотрения зададим параметры задачи небольшими целыми числами, что, не ограничивая общности, позволяет избежать необходимости сравнения величин высоких порядков, в то же время повышая наглядность и создавая удобства для машинного счета. При этом фактическую размерность параметров будем опускать, полагая все расчеты выполненными в соизмеримых единицах. Так, положим частоты обоих осцилляторов, а также частоту возбуждения равными друг другу: $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 2\pi$ ед. $\approx 6,28$ ед. Параметры затухания также положим одинаковыми: $\beta_1 = \beta_2 = 4$ ед. Также зададим равными параметры связи: $\gamma_1 = \gamma_2 = 30$ ед. Таким образом, осцилляторы можно считать идентичными, кроме связи, которая для первого осциллятора относительно второго является квадратичной, а для второго относительно первого — линейной.

Предварительное исследование показало, что все наблюдавшиеся в настоящей работе режимы вынужденных колебаний можно было реализовать путем изменения в достаточно широких пределах только амплитуды возбуждения.

Примеры получаемых при этом режимов колебаний иллюстрируются рис. 4.1. Рассмотрим трансформацию колебаний при последовательном увеличении возбуждения более подробно.

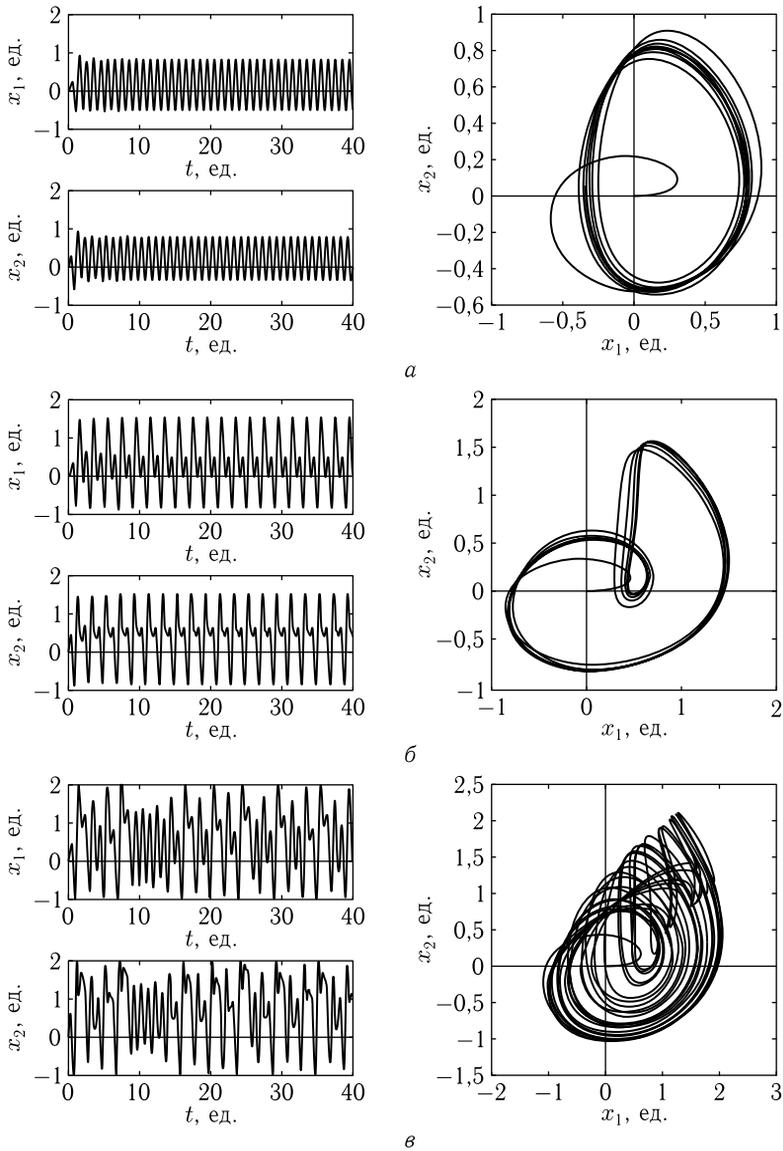


Рис. 4.1. Режимы колебаний при различной величине возбуждения. Слева — развертки колебаний во времени, справа — параметрические портреты. Амплитуда возбуждения: *a* — 20 ед.; *б* — 30 ед.; *в* — 40 ед.

При уровне возбуждения ниже $A = 20$ ед. колебания полностью регулярны, имеют вид правильных синусоид, параметрический портрет представляет собой четко выраженное узкое кольцо.

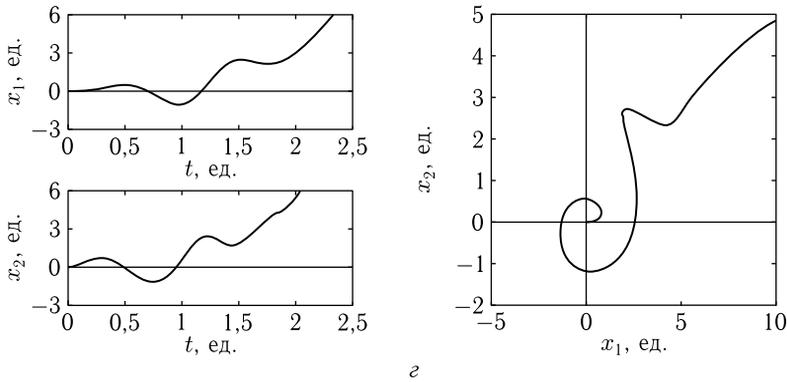


Рис. 4.1. (Окончание). $g = 50$ ед.

При увеличении возбуждения выше 20 ед. синусоидальная правильность формы колебаний слегка нарушается, в результате чего образующая параметрического кольца начинает слегка размываться, как это показано на рис. 4.1, а.

При увеличении возбуждения выше 24 ед. синусоида колебаний начинает расщепляться, то есть между основными колебаниями появляются отщепленные колебания меньшей амплитуды, как это показано на левых эпюрах рис. 4.1, б. При этом полный период колебаний как бы удваивается, в результате чего кольцо разделяется по ширине на два четких вложенных друг в друга кольца, которые при возбуждении выше 24 ед. разъезжаются в стороны, образуя в области своего перекрытия петлю, как это видно из рис. 4.1, б. Размер петли, сначала близкий к размеру исходного кольца, вследствие уменьшения перекрытия образовавшихся колец, постепенно уменьшается вплоть до нуля, в результате чего петля при уровне возбуждения около 34 ед. полностью разглаживается. При этом общее кольцо снова становится единым, приобретая вид выпукло-вогнутой «чечевицы», с четкой огибающей, напоминающей зерно фасоли.

При увеличении возбуждения выше 38 ед. четкий периодический характер колебаний нарушается, появляются отдельные сбои периода, постепенно распространяющиеся на все времена. Характер колебаний теряет регулярность, приобретая элементы хаотичности (рис. 4.1, в). При этом огибающая чечевицы сначала начинает расщепляться, а при дальнейшем увеличении возбуждения все более размывается, в результате чего чечевица практически полностью замывается уже при уровне возбуждения равном 39 ед.

При дальнейшем увеличении возбуждения характер колебаний остается нерегулярным вплоть до $\sim 40,7$ ед., после чего колебания срываются и координатные переменные обоих осцилляторов устремляются к бесконечности (рис. 4.1, г). При этом параметрическая чечевица

меняется единственной изогнутой линией, также уходящей на бесконечность. Такой переход от замкнутой чечевицы к расходящейся кривой имеет резкий порог, равный 40,75 ед. (с точностью до 0,1%).

4.5. Основные режимы вынужденных колебаний

Из описанного характера вынужденных колебаний можно выделить пять характерных режимов.

Режим № 1 — регулярный синусоидальный.

Имеет место при $0 < A < 24$. Характеризуется четкими регулярными колебаниями обоих осцилляторов, имеющими правильный синусоидальный характер. Параметрический портрет имеет вид правильного узкого кольца близкой к круговой формы.

Режим № 2 — регулярный с расщеплением.

Имеет место при $24 < A < 34$. Характеризуется отщеплением от каждого полупериода синусоиды небольшого дополнительного пика, отделенного от основного минимумом. Колебания остаются регулярными, приобретая вид наложенных друг на друга двух синусоид с разными амплитудами. Общий период колебаний удваивается. Параметрический портрет имеет форму двух частично перекрывающихся колец, образующих в области перекрытия замкнутую петлю.

Режим № 3 — регулярный без расщепления.

Имеет место при $34 < A < 38$. Характеризуется также отщеплением от каждого полупериода синусоиды дополнительного пика, однако минимум между основным и дополнительным пиками постепенно сглаживается. Общий период остается удвоенным. Параметрический портрет имеет форму единого кольца, имеющего вид выпукло-вогнутой чечевицы, петля полностью отсутствует.

Режим № 4 — нерегулярный квазихаотический.

Имеет место при $38 < A < 40,75$. Характеризуется скачкообразным изменением амплитуды синусоиды от периода к периоду. Колебания теряют четкую периодичность, хотя в среднем перемена их полярности во времени остается близкой к исходной. Изменение амплитуды носит квазихаотический характер. Огибающая параметрического портрета имеет вид выпукло-вогнутой чечевицы, полностью замазанной случайно блуждающими траекториями.

Режим № 5 — нерегулярный расходящийся.

Имеет место при $40,75 < A < \infty$. Характеризуется несколькими (одним-двумя) возвратно-поступательными колебаниями, переходящими в стремление переменных к бесконечности. Параметрический портрет имеет вид раскручивающейся спирали, после нескольких (одного-двух) витков уходящей на бесконечность.

Переходы между режимами № 1–№ 4 по амплитуде возбуждения являются довольно плавными (в пределах 5–10% от средней величины), то есть беспороговыми. Переход между режимами № 4 и № 5 имеет резкий порог (менее 0,1% от средней величины).

Замечание. Из сравнения с результатами работы [17] можно видеть, что описанные там колебания, названные «синхронными» (рис. 1 в работе [17]), содержат в себе элементы регулярного режима с расщеплением № 3 (четко выраженные минимумы между основными и дополнительными пиками), регулярного режима без расщепления № 4 (отсутствие петли, ярко выраженная чечевица) и даже в какой-то степени нерегулярного режима № 5 (частичное размазывание чечевицы). Надо полагать, что такое разнообразие обусловлено с одной стороны довольно специфическим выбором параметров осцилляторов (частоты, параметры затухания и связи различны, связь весьма велика: $f_1 = 3,0$, $f_2 = 3,5$, $\beta_1 = 10,0$, $\beta_2 = 0,2$, $\delta = 0$, $\gamma_1 = 800$, $\gamma_2 = 800$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $A = 45$, $f = 3,2$), и с другой — отсутствием четко выраженных границ между режимами с частичным перекрытием между ними, отмеченным здесь даже для идентичных осцилляторов.

4.5.1. Нелинейность первого осциллятора

В рамках рассматриваемой задачи о магнитоупругих колебаниях ферритовой пластины (разделы 4.2–4.4) магнитный осциллятор является нелинейным, а упругий — линейным. Рассмотрим теперь роль нелинейности первого осциллятора при условии сохранения линейности второго. Связь между осцилляторами оставим прежней, то есть в уравнениях (4.20)–(4.21) положим $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$. Нелинейность введем в уравнение (4.20) посредством отличного от нуля параметра δ при третьей степени x_1 .

Предварительное исследование показало, что введение такой нелинейности при $\delta > 0$ приводит преимущественно к регуляризации колебаний обоих осцилляторов, то есть преобладающим становится режим № 1. При довольно высоком уровне возбуждения (более 40–50 ед.) режим № 1 переходит в режимы № 3 и № 4, но при дальнейшем увеличении возбуждения характер колебаний снова приближается к режиму № 1. При достаточно большой величине δ (более 1000 ед.) режим № 5 также не реализуется, то есть система не уходит на бесконечность ни при каком столь угодно большом уровне возбуждения. Реализация режима № 4, то есть нерегулярных квазихаотических колебаний, становится по параметрам довольно критичной, причем с увеличением нелинейности критичность возрастает.

Типичный пример колебаний при умеренном уровне нелинейности показан на рис. 4.2.

Первыми характерными особенностями наблюдаемой картины являются значительно (примерно в два раза) меньшая амплитуда и резкое (в три-пять раз) уменьшение периода колебаний первого осциллятора по сравнению с амплитудой и периодом колебаний второго. Причиной этих двух особенностей является именно нелинейность первого осциллятора, то есть они проявляются, начиная примерно с $\delta \sim 100$ ед., тем сильнее, чем параметр δ больше. К остальным параметрам эти

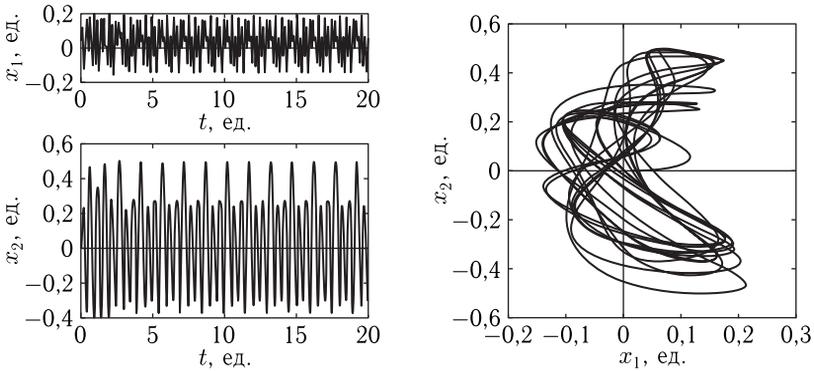


Рис. 4.2. Колебания при нелинейности первого осциллятора. Слева — развертки колебаний во времени, справа — параметрический портрет. Параметры: $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 6,28$, $\beta_1 = \beta_2 = 4,0$, $\delta = 300$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 400$, $A = 45$

особенности не критичны, то есть сохраняются при изменении упомянутых параметров в обе стороны не менее чем на порядок.

Далее можно видеть, что колебания обоих осцилляторов, особенно второго, близки к регулярным с расщеплением (режим № 3), однако расщепление здесь происходит для второго осциллятора не на два пика, а на три, а для первого — на еще большее их количество (пять-семь). Кроме того, повторяемость колебаний от периода к периоду для второго осциллятора хотя и в общем соблюдается, тогда как для первого сильно нарушена. Параметрический портрет имеет множественный сильно расщепленный характер, главным образом за счет нерегулярности колебаний первого осциллятора, то есть в колебаниях явно присутствуют элементы нерегулярной квазихаотичности, характерной для режима № 4.

Такой смешанный регулярно-квазихаотический режим к выбору параметров довольно критичен. Так при уменьшении параметра нелинейности с 300 до 250 ед. колебания становятся регулярными, то есть наступает режим № 1 с едва заметными элементами расщепления, которые при уменьшении δ до 200 ед. пропадают. То же происходит при уменьшении параметров связи с 400 до 350 ед. Увеличение параметра нелинейности выше 500 ед. или параметров связи выше 600 ед. элементы квазихаотичности устраняет, однако расщепление остается вплоть до $\delta \sim 1000$ ед., после чего колебания опять стремятся к регулярности.

Важно отметить, что при $\delta \geq 400$ ед. увеличение возбуждения до сколь угодно большого уровня к расходимости (режиму № 5) не приводит. При этом более или менее устойчиво реализуется режим № 3, причем амплитуда отщепленных импульсов приближается к амплитуде основного, а кратность расщепления, особенно для первого осциллятора, возрастает (при $A \sim 1000$ ед. становится больше десятка), то есть колебания превращаются в регулярную последовательность почти прямоугольных импульсов с сильно изрезанной плоской частью.

По амплитуде возбуждения наблюдаемые автомодуляционные колебания имеют довольно заметно выраженный порог. Переход от регулярного режима № 1 к регулярному с расщеплением № 2 происходит при $A \sim 5-10$. При увеличении затухания любого из осцилляторов в несколько (3–5) раз этот порог повышается, примерно пропорционально степени увеличения затухания. При увеличении затухания обоих осцилляторов на порядок автомодуляционные явления не наблюдаются и колебания остаются близкими к регулярным, в том числе при настолько большой нелинейности ($\delta \geq 400$ ед.), что переход к режиму № 5 не имеет места.

4.5.2. Асинхронные колебания

Проведенное выше рассмотрение относится к случаю одинаковых параметров обоих осцилляторов. Однако в реальном случае магнитоупругих колебаний параметры осцилляторов сильно различаются. Так параметр затухания магнитного осциллятора, как правило, значительно выше параметра затухания упругого. Магнитный осциллятор является сильно нелинейным, тогда как упругий — полностью линейный. Собственные частоты осцилляторов могут отличаться друг от друга, а частота возбуждения может отличаться от обеих этих частот. Связь между осцилляторами является нелинейной и довольно сильной.

В работе [17] показано, что в таких условиях в системе может существовать особый вид автомодуляционных колебаний, период которых значительно (в несколько раз) больше периода возбуждающей силы. Такие колебания там названы «асинхронными». Иллюстрацией асинхронных колебаний осцилляторов в случае сильного различия между ними является рис. 4.3, для удобства сравнения построенный при параметрах, сходных с таковыми в работе [17].

Характерной особенностью наблюдаемой картины является значительно (в три-четыре раза) меньшая амплитуда колебаний первого осциллятора по сравнению с амплитудой колебаний второго. Такая особенность наблюдалась и в случае идентичных осцилляторов (раздел 4.5.1) и также обусловлена нелинейностью первого из них.

Главной особенностью асинхронных колебаний является их двух-периодичность. Так колебания второго осциллятора имеют четко выраженные два периода. Первый из них — малый, равен 0,625 ед. и соответствует периоду возбуждения, второй — большой, равен 3,27 ед. и определяется параметрами осцилляторов. Колебания первого осциллятора также имеют четко выраженный период, равный 3,27 ед., то есть большему периоду колебаний второго осциллятора. Эта периодичность особенно ярко проявляется на верхней огибающей развертки колебаний, на нижней же ее роль менее заметна. Внутри такого периода колебания имеют близкий к хаотическому характер, малая периодичность в котором выражена значительно слабее, однако все же

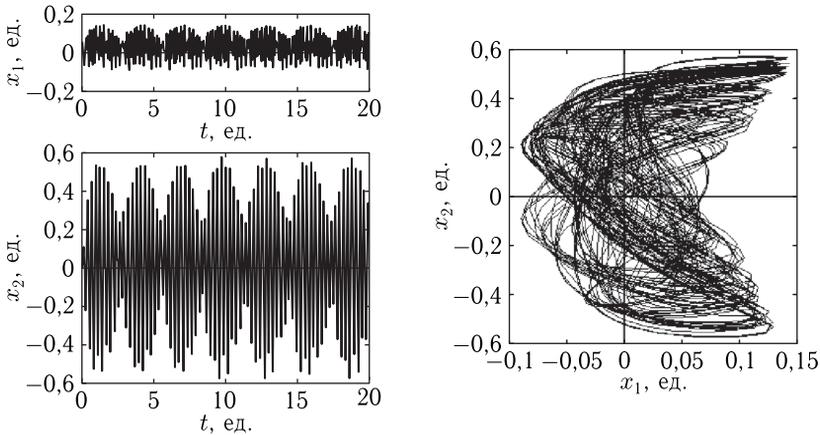


Рис. 4.3. Асинхронные колебания при неидентичности осцилляторов. Слева — развертки колебаний во времени, справа — параметрические портреты. Параметры: $\omega_1 = 9,42$ ($f_1 = 3,0$), $\omega_2 = 10,99$ ($f_2 = 3,5$), $\omega = 10,05$ ($f = 3,2$), $\beta_1 = 10,0$, $\beta_2 = 0,2$, $\delta = 1000$, $\gamma_1 = 800$, $\gamma_2 = 800$, $A = 45$

ее проявление в какой-то степени имеет место. Длительность такого малого внутреннего «квазипериода» близка к длительности периода возбуждения.

Перечисленные особенности позволяют выделить асинхронные колебания в особый режим.

Режим № 6 — асинхронный.

Имеет место при значительном отличии параметров осцилляторов друг от друга. Характеризуется двухпериодичностью колебаний, малый период которых совпадает с периодичностью возбуждения, а большой — превышает период возбуждения в несколько раз. Изменение амплитуды второго осциллятора носит периодический характер, типичный для случая синусоидальной амплитудной модуляции единственной частотой, определяющей величину большого периода. Изменение амплитуды первого осциллятора по большому периоду синхронно с таковым для второго осциллятора, а внутри малого периода носит квазихаотический характер. Параметрический портрет заметно размазан за счет хаотической составляющей колебаний первого осциллятора.

Рассмотрим особенности асинхронного режима с точки зрения критичности параметров осцилляторов и возбуждения.

Основной (большой) период асинхронных колебаний от амплитуды возбуждения и значений параметров затухания обоих осцилляторов зависит довольно мало: меняется не более чем на $\pm 10\%$ при изменении тех и других на порядок. Заметная зависимость периода наблюдается от соотношения собственных частот осцилляторов друг с другом и частотой возбуждения. Так, при увеличении частоты второго осцил-

лятора с $\omega_2 = 10,99$ до 15,0 период уменьшается примерно в полтора раза, а при дальнейшем увеличении этой частоты амплитуда асинхронных колебаний падает в три-пять раз, и режим приближается к регулярному.

При равенстве частот обоих осцилляторов величине $\omega_{1,2} = 9,42$ и сохранении частоты возбуждения $\omega = 10,05$ асинхронные колебания сильно хаотизируются, четко выраженный период исчезает и режим приближается к нерегулярному квазихаотическому №4. При равенстве частот обоих осцилляторов друг другу и частоте возбуждения $\omega_{1,2} = \omega = 9,42$ асинхронные колебания пропадают и режим приближается к регулярному №1.

Колебания становятся критичными к параметру нелинейности δ только при его значительном уменьшении. Так при изменении δ от 200 до 2000 ед. период и амплитуда асинхронных колебания меняются не более чем на 10%. Однако в нижней части этого диапазона глубина модуляции асинхронных колебаний уменьшается с 50% при $\delta \sim 300$ ед. до 10% при $\delta \sim 200$ ед. При уменьшении δ до 100 ед. четко выраженный период пропадает, колебания слегка хаотизируются, а при дальнейшем уменьшении δ до ~ 50 ед. система уходит на бесконечность, то есть реализуется режим №5.

К параметрам связи $\gamma_{1,2}$ колебания мало критичны в интервале от $\gamma_{1,2} = 400$ ед. до $\gamma_{1,2} = 1400$ ед. Период меняется мало (не более 10%), однако вблизи нижней границы этого интервала глубина модуляции уменьшается до $\sim 10\%$, а при дальнейшем уменьшении связи колебания регуляризируются, то есть наступает режим №1. При увеличении параметров связи выше 1400 ед. вплоть до 1600 ед. четкая периодичность асинхронных колебаний нарушается, период с течением времени скачкообразно меняется в два-три раза и более, хотя глубина модуляции сохраняется близкой к 50%. Дальнейшее увеличение параметров связи до 2000 ед. приводит к переходу системы в новое стационарное состояние: колебания полностью регуляризируются, их частота равняется частоте возбуждения, а амплитуда резко падает, отклонение первого осциллятора от нуля составляет около 0,10 ед., а второго — 0,35 ед. При этом амплитуда колебаний первого осциллятора не превышает 0,01 ед., а второго — 0,05 ед. То есть происходит явление, подобное переориентации вектора намагниченности в нормально намагниченной ферритовой пластине при изменении параметра магнитоупругой связи [33].

По амплитуде возбуждения асинхронные колебания имеют хорошо выраженный порог. Переход от регулярного режима №1 асинхронному происходит при $A \sim 20-30$ ед. При увеличении затухания любого из осцилляторов в несколько (3–5) раз этот порог незначительно (не более полутора раз) повышается. При увеличении затухания обоих осцилляторов до $\beta_{1,2} \sim 10$ ед. автомодуляционные явления не наблюдаются и колебания остаются близкими к регулярным (режим №1).

4.6. Модель обобщенного потенциала

Предложенная модель связанных линейного и нелинейного осцилляторов, описываемая системой уравнений (4.20)–(4.21), несмотря на свою схематичность, позволяет выявить основные свойства автоколебаний магнитоупругой и магнито-электродинамической систем, такие как пороговый характер, роль параметров затухания и нелинейности осцилляторов и связи, переход к стохастическому режиму при большом уровне возбуждения.

Однако выполненное исследование системы (4.20)–(4.21) имеет в первую очередь отвлеченный математический смысл до тех пор, пока в основу ее интерпретации не будет положена реальная физическая модель.

В традиционной трактовке многих задач о колебаниях часто используется модель потенциальной ямы (или «ящика»), вблизи минимума которого частица совершает периодические колебания [1, 70].

Рассмотрим модель обобщенного потенциала, которую можно положить в основу физической интерпретации описанных колебательных явлений.

Будем полагать, что система уравнений движения для осцилляторов имеет вид:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial U_S}{\partial x_1} = A \cdot \cos(\omega t); \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial U_S}{\partial x_2} = 0, \quad (4.23)$$

где $U_S(x_1, x_2)$ — обобщенный потенциал системы в целом, а третьи слагаемые представляют собой обобщенные силы (знак для удобства учтен заранее). Диссипативные члены в этот потенциал не включены, чтобы не усложнять вычисления.

Согласно общей трактовке задачи о связанных магнитном и упругом (или магнитном и электродинамическом) осцилляторах (раздел № 4.4), обобщенный потенциал должен содержать слагаемые вида $x_1^m \cdot x_2^n$, где m и n — целые числа от 0 до 9. В работах [18, 21–24] показано, что связь между магнитным и упругим осцилляторами может осуществляться также за счет производных от переменных по координатам, однако такую связь пока рассматривать не будем. Ограничимся также степенью входящих в потенциал переменных не выше четвертой. В таких предположениях обобщенный потенциал принимает вид:

$$U_S = U_S^{(1)} + U_S^{(2)} + U_S^{(3)} + U_S^{(4)}, \quad (4.24)$$

где

$$U_S^{(1)} = \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2; \quad (4.25)$$

$$U_S^{(2)} = \zeta_1 x_1^2 + \zeta_2 x_1 x_2 + \zeta_3 x_2^2; \quad (4.26)$$

$$U_S^{(3)} = \xi_1 x_1^3 + \xi_2 x_1^2 x_2 + \xi_3 x_1 x_2^2 + \xi_4 x_2^3; \quad (4.27)$$

$$U_S^{(4)} = \eta_1 x_1^4 + \eta_2 x_1^3 x_2 + \eta_3 x_1^2 x_2^2 + \eta_4 x_1 x_2^3 + \eta_5 x_2^4. \quad (4.28)$$

Из этих выражений обобщенные силы получаются путем дифференцирования по переменным $x_{1,2}$. Очевидно, что первое выражение (4.25) дает статическую постоянную силу, которая на колебаниях никак не сказывается, так что можно заведомо положить $\psi_{1,2} = 0$, то есть $U_S^{(1)} = 0$.

Второе выражение (4.26) дает в уравнениях линейные слагаемые, пропорциональные $x_{1,2}$, то есть собственные частоты осцилляторов $\omega_{1,2}$ в линейном приближении, а также линейные связи между ними. Таким образом, можно положить: $\zeta_1 = \omega_1^2/2$, $\zeta_3 = \omega_2^2/2$, а также $\zeta_2 = \vartheta$, где ϑ — параметр линейной связи между осцилляторами, который должен в одинаковой степени присутствовать в обоих уравнениях.

Третье выражение (4.27) дает прежде всего параметры квадратичной нелинейности для обоих осцилляторов через слагаемые с ξ_1 и ξ_4 . Однако квадратичная нелинейность, не будучи дополненной нелинейностью более высоких порядков, вызывает уход системы на бесконечность вследствие нечетности потенциала каждого из осцилляторов по отдельности, то есть при отрицательном значении переменной вследствие стремления энергии к минимуму система устремляется на минус бесконечность по спадающей ветви кубической параболы, перегиб которой приходится на нуль. Таким образом, для исключения расходящихся решений в отсутствие связи между осцилляторами следует положить $\xi_{1,4} = 0$.

Другие два слагаемых дают силы для первого осциллятора пропорциональные $x_1 x_2$ и x_2^2 , а для второго — тоже $x_1 x_2$, а также x_1^2 . Первые из этих пар слагаемых обеспечивают нелинейную связь между осцилляторами низшего порядка, которая в силу своей нечетности также может привести к расходимости. Вторые же слагаемые обеспечивают квадратичную связь, однако, не будучи дополненными слагаемыми более высокого порядка, также могут увести систему на бесконечность вследствие нечетности потенциала.

Четвертое выражение (4.28) дает прежде всего параметры кубической нелинейности для каждого из осцилляторов через слагаемые с η_1 и η_5 . Потенциал в этом случае является четным, что уход на бесконечность полностью исключает. При достаточной величине констант η_1 и η_5 такая четность четвертого порядка может компенсировать нечетность более низких порядков, в частности третьего, то есть предотвратить уход на бесконечность, обеспечиваемый слагаемыми, составляющими выражение (4.27).

Остальные слагаемые выражения (4.28) дают различные виды нелинейной связи между осцилляторами, такие как $x_1^2 x_2$ и $x_1 x_2^2$, входящие в то или иное уравнение. Кроме того, они могут дать кубические виды связи для первого уравнения вида x_2^3 и для второго вида x_1^3 .

Заметим, что здесь, хотя в потенциале (4.24) и присутствуют слагаемые третьей степени по обоим переменным, но эти слагаемые входят, наряду со слагаемыми более низких степеней, поэтому у получающихся кубических парабол могут иметься локальные минимумы (то есть соответствующее кубическое уравнение имеет три действительных корня). По одну сторону от такого минимума кубическая парабола уходит на плюс бесконечность, а по другую идет вверх до определенного локального максимума — потенциального барьера, достигая который и переваливая через него устремляется к минус бесконечности. Таким образом, в окрестности локального минимума могут происходить колебания с ограниченной амплитудой, а при превышении амплитуды над потенциальным барьером система уходит на бесконечность. Заметим, что подобное свойство кубического потенциала в сочетании с потенциалом четвертой степени, дающее малые локальные колебания с уходом на бесконечность при превышении определенного порога, в классике хорошо известно и проявляется, например, в уравнении Дуффинга [1].

Возвращаясь к рассмотрению системы (4.20)–(4.21), можно видеть, что в полном выражении для потенциала (4.24)–(4.28) главную роль играют, во-первых, слагаемые с коэффициентами ζ_1 и ζ_3 , дающие собственные частоты осцилляторов, во-вторых — во втором уравнении — слагаемое с ζ_2 , обеспечивающее линейную связь второго осциллятора с первым. Заметим, что в первом уравнении такое слагаемое отсутствует, однако контрольная проверка показывает, что роль его в сравнении со слагаемым квадратичной связи довольно невелика и характера рассмотренных колебаний практически не меняет.

Далее важно слагаемое с η_1 , ответственное за кубическую нелинейность первого осциллятора, а также слагаемое с ξ_3 , обеспечивающее квадратичную связь первого осциллятора со вторым. Все остальные слагаемые в настоящем рассмотрении можно положить равными нулю. Определенную роль может играть также слагаемое с η_3 , дающее в первое уравнение вклад вида $x_1 x_2^2$, однако проверка показывает, что общий характер колебаний при учете такого слагаемого не меняется.

Таким образом, обращаясь к соответствию между выражениями (4.24)–(4.28) и системой уравнений (4.20)–(4.21), получаем:

$$\omega_1^2 \rightarrow 2\zeta_1; \quad (4.29)$$

$$\omega_2^2 \rightarrow 2\zeta_3; \quad (4.30)$$

$$\gamma_2 \rightarrow \zeta_2; \quad (4.31)$$

$$\delta \rightarrow \eta_1/\omega_1^2 \rightarrow \eta_1/2\zeta_1; \quad (4.32)$$

$$\gamma_1 \rightarrow \xi_3 \text{ (или } \gamma_1 \rightarrow \eta_3\text{)}. \quad (4.33)$$

При таком наборе параметров потенциал (4.24) принимает вид:

$$U_S = \zeta_1 x_1^2 + \zeta_2 x_1 x_2 + \zeta_3 x_2^2 + \eta_1 x_1^4 + \xi_3 x_1 x_2^2. \quad (4.34)$$

Здесь первое и третье слагаемые определяют собственные частоты осцилляторов, второе — линейную связь между ними, четвертое —

нелинейность первого осциллятора, пятое — нелинейную связь между осцилляторами.

В соответствии с физической природой входящих в (4.34) коэффициентов (то есть в соответствии с (4.29)–(4.33)), всех их надо считать положительными.

Важно отметить, что первые четыре слагаемых потенциала являются четными по степеням переменных (степени вторая и четвертая), тогда как пятое — нечетным (степень — третья). При этом из четных, не зависящими от знаков переменных, являются только слагаемые с коэффициентами ζ_1 , ζ_3 и η_1 , то есть вклад этих слагаемых в общий потенциал всегда положителен. Однако слагаемое с коэффициентом ζ_2 положительно только при одинаковых знаках обоих переменных, а при одном из них, отрицательном, может дать в потенциал отрицательный вклад. Знак слагаемого с коэффициентом ξ_3 от знака x_2 не зависит, однако он положителен только при положительном значении x_1 , а при отрицательном — его вклад в потенциал также отрицателен. Физические следствия такого характера знаков слагаемых потенциала будут рассмотрены в следующем разделе.

Получаемые из потенциала (4.34) обобщенные силы имеют вид (отрицательные знаки перед производными присутствуют также и в уравнениях, то есть взаимно уничтожаются, поэтому здесь для простоты опущены):

$$F_{x_1} = \frac{\partial U_S}{\partial x_1} = 2\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + 4\eta_1 x_1^3 + \xi_3 x_2^2; \quad (4.35)$$

$$F_{x_2} = \frac{\partial U_S}{\partial x_2} = 2\zeta_3 x_2 + \zeta_2 x_1 + 4\eta_1 x_1^3 + 2\xi_3 x_1 x_2. \quad (4.36)$$

Уравнения принимают вид:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + 2\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + 4\eta_1 x_1^3 + \xi_3 x_2^2 = A \cdot \cos(\omega t); \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + 2\zeta_3 x_2 + \zeta_2 x_1 + 2\xi_3 x_1 x_2 = 0. \quad (4.38)$$

Эта система имеет довольно общий характер. Здесь в первом уравнении присутствует кубическая нелинейность (через посредство η_1), тогда как во втором подобная нелинейность отсутствует. В обоих уравнениях присутствует линейная связь с другим уравнением (через ζ_2). Во втором уравнении присутствует квадратичная связь с первым вида $\xi_3 x_1 x_2$, то есть по второй переменной x_2 связь является линейной. Таким образом, эта система имеет основные признаки рассмотренной в разделе № 4.4 системы (4.20)–(4.21), такие как кубическая нелинейность по первой переменной, квадратичность связи в первом уравнении и линейность во втором. То есть в некотором отношении систему (4.20)–(4.21) можно считать частным случаем полученной здесь на основе модели обобщенного потенциала системы (4.37)–(4.38).

Замечание. Следует заметить, что системы (4.20)–(4.21) и (4.37)–(4.38) полностью тождественными не являются, то есть при простой замене коэффициентов вида (4.29)–(4.33) одна в другую не переходят. В системе (4.37)–(4.38) имеются отличия от (4.20)–(4.21), такие как линейная связь с одним и тем же коэффициентом в обоих уравнениях ($\zeta_2 x_1$ и $\zeta_2 x_2$), а также во втором уравнении умножение линейной связи по первой переменной на вторую переменную (вида $\xi_3 x_1 x_2$). Однако предварительное исследование не выявило решающего влияния этих отличий на характер поведения системы в целом, поэтому их более подробное рассмотрение в настоящей работе проведено не было, хотя и предполагается в дальнейшем.

4.7. Применение модели потенциала к интерпретации характера колебаний

Применим теперь предложенную модель обобщенного потенциала к интерпретации вынужденных колебаний системы связанных осцилляторов при различных уровнях возбуждения, степени нелинейности и характере связи.

Прежде всего отметим, что входящие в уравнения (4.37)–(4.38) первые два слагаемых, содержащие вторую и первую производные по времени, отражают обычные свойства колебаний такие, как периодичность и затухание во времени, то есть с моделью потенциала напрямую не связаны. Все остальные слагаемые, содержащие переменные в различных сочетаниях, определяются уже непосредственно потенциалом, поэтому рассмотрим роль его слагаемых по отдельности.

Обратимся к рис. 4.4, где показаны различные варианты формы потенциальной поверхности, построенной по формуле (4.34) в координатах $Ox_1x_2U_S$ (точка O соответствует началу координат $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $U_S = 0$ и для удобства рисунка явно не обозначена). На горизонтальной плоскости Ox_1x_2 приведены эквипотенциальные линии, то есть сечения потенциальной поверхности горизонтальной плоскостью, соответствующие некоторым характерным значениям потенциала.

Наборы коэффициентов, использовавшихся при построении рис. 4.4, *a*–4.4, *e*, приведены в табл. 4.1. Собственные частоты осцилляторов полагаются равными друг другу, причем для простоты положены равными единице. Все остальные числовые значения коэффициентов выбраны из условия наглядности построения.

Проводя механическую аналогию, колебания можно рассматривать как периодическое «катание шарика» по потенциальной поверхности при условии действия направленной вниз силы тяжести. Рассмотрим различные варианты такого «катания» по отдельности.

Рисунок 4.4, *a* соответствует набору «*a*» в табл. 4.1. В этом случае осцилляторы никак не связаны. Потенциальная поверхность является симметричной относительно вертикальной оси. Эквипотенциальные

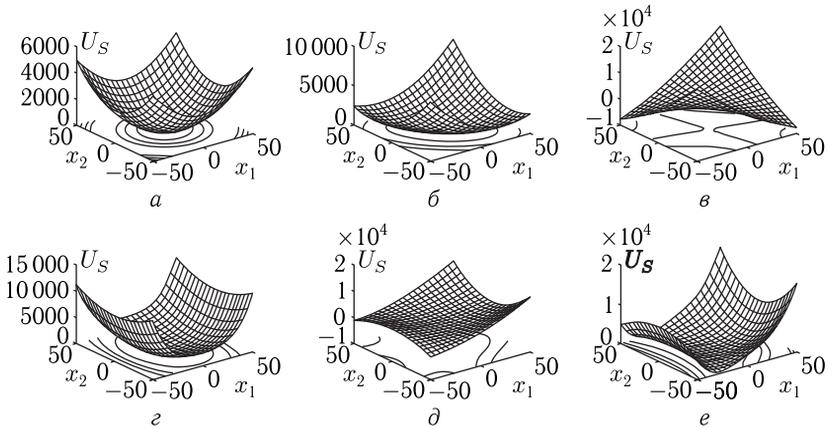


Рис. 4.4. Потенциальные поверхности при различных параметрах связи и нелинейности осцилляторов: *a* — связь отсутствует, оба осциллятора линейные; *б* — линейная связь слабая, оба осциллятора линейные; *в* — линейная связь сильная, оба осциллятора линейные; *г* — связь отсутствует, первый осциллятор — нелинейный, второй — линейный; *д* — связь по первому осциллятору квадратичная, оба осциллятора линейные; *е* — связь по первому осциллятору квадратичная, первый осциллятор нелинейный, второй линейный

Таблица 4.1. Коэффициенты построения потенциальных поверхностей

№	ζ_1	ζ_1	ζ_2	η_1	ζ_3
	(x_1^2)	(x_1x_2)	(x_2^2)	(x_1^4)	$(x_1x_2^2)$
<i>a</i>	1	0	1	0	0
<i>б</i>	1	1	1	0	0
<i>в</i>	1	5	1	0	0
<i>г</i>	1	0	1	0,001	0
<i>д</i>	1	0	1	0	0,05
<i>е</i>	1	0	1	0,001	0,05

кривые представляют собой правильные окружности. Для каждого осциллятора возможны периодические колебания с ограниченной амплитудой, от колебаний другого осциллятора полностью не зависящие. При этом, поскольку первый осциллятор возбуждается периодической силой, то в установившемся режиме он колеблется с постоянной амплитудой, тогда как колебания второго возможны только при каком-то начальном отклонении и во времени имеют затухающий характер.

Рисунок 4.4, *б* соответствует наличию слабой линейной связи между осцилляторами, определяемой коэффициентом $\zeta_2 = 1$. При этом потенциальная поверхность слегка вытягивается вдоль линии, соответствующей $x_2 = -x_1$, составляющей с осями Ox_1 и Ox_2 углы по 45° .

На этой линии у поверхности появляются широкие «крылья», формирующие продольную «лощину». Эквипотенциальные кривые представляют собой вытянутые эллипсы, большая ось которых ориентирована вдоль упомянутой линии. Колебания осцилляторов синхронизируются друг с другом, будучи сдвинутыми по фазе на 90° . Это классическая картина связанных колебаний двух осцилляторов при линейной связи [55, 71]. Такие колебания соответствуют рассмотренному в разделе 4.5 режиму № 1 (регулярный синусоидальный). На сдвиг фазы на 90° между колебаниями магнитного и упругого осцилляторов указывалось также в работах [16, 18, 21–24, 67, 72, 73], посвященных нелинейному возбуждению гиперзвука.

Рисунок 4.4, в соответствует наличию сильной линейной связи между осцилляторами, определяемой коэффициентом $\zeta_2 = 5$. При этом «крылья» потенциальной поверхности склоняются вниз, так что вместо «лощины» появляется «седло». Эквипотенциальные кривые представляют собой гиперболы, обращенные вершинами друг к другу, с осями симметрии, соответствующими $x_2 = -x_1$. Переход от «лощины» на рис. 4.4, б к «седлу» на рис. 4.4, в, то есть от случая «слабой» связи к «сильной», происходит при критическом значении параметра $\zeta_2 = 2,012$.

Периодические колебания при таком потенциале невозможны: система при любом сколь угодно малом отклонении от нуля «скатывается вниз» по боковым поверхностям «седла», что проявляется как уход переменных x_1 и x_2 на бесконечность.

Подобное поведение системы отмечалось в разделе 4.5, как свойственное режиму № 5 (нерегулярный расходящийся). Уход на бесконечность отмечался также в работе [24] как эквивалент переориентации вектора намагниченности в нормально намагниченной пластине при достаточной величине константы магнитоупругой связи B_2 . Подобная переориентация, вызванная значительной величиной той же константы, подробно разбиралась в работе [56]. Во всех этих случаях можно полагать объяснение наблюдаемой расходимости с помощью модели потенциала достаточно адекватным.

Рисунок 4.4, г соответствует отсутствию связи между осцилляторами, но наличию кубической нелинейности первого осциллятора, определяемой коэффициентом η_1 . Потенциальная поверхность по обоим переменным является симметричной в силу четности соответствующих слагаемых выражения (4.34). Рост потенциала U_S по мере увеличения x_1 становится более значительным, чем на рис. 4.4, а, тогда как по x_2 остается прежним. В результате потенциальная поверхность приобретает вид «лощины», вытянутой вдоль оси Ox_2 , а эквипотенциальные кривые обращаются в эллипсы с большой осью, ориентированной вдоль той же оси. Колебания каждого из осцилляторов по отдельности, как и в случае рис. 4.4, а, возможны и имеют периодический характер. Потенциал всегда остается четным, поэтому какая-либо расходимость отсутствует.

Рисунок 4.4, д соответствует наличию между осцилляторами нелинейной связи, задаваемой коэффициентом ξ_3 , тогда как сами осцил-

ляторы остаются линейными. В этом случае потенциальная поверхность относительно переменной x_2 является симметричной вследствие квадратичности этой переменной в пятом слагаемом потенциала (4.34). Симметрия относительно переменной x_1 становится центральной с двойной кратностью, то есть при изменении знака x_1 добавка к потенциалу становится отрицательной. Это проявляется в загибе вниз обоих углов поверхности при $x_1 \rightarrow \pm\infty$ (на рисунке при $x_1 \rightarrow \pm 50$). Эллипсы эквипотенциальных кривых при отрицательных значениях x_1 разрываются, формируя гиперболы с ветвями, стремящимися к бесконечности.

Такой разрыв эллипсов с загибом углов поверхности вниз происходит только при достаточной величине коэффициента ξ_3 , так как ему надо преодолеть загибы углов вверх, определяемые коэффициентом ζ_1 (рис. 4.4, *a*). Поэтому при малых значениях ξ_3 колебания в системе имеют ограниченный характер, подобный режиму № 1. Однако, благодаря наличию при коэффициенте ξ_3 квадрата переменной x_2 , при достаточной величине этой переменной отрицательный вклад слагаемого с ξ_3 может пересилить положительный вклад от слагаемого с ζ_1 . В этом случае потенциальная поверхность в начальной точке системы координат приобретает седловидный характер, так что периодические колебания в такой системе опять становятся невозможными, то есть система, скатываясь по боковым склонам «седла», уходит на бесконечность.

Итак, в случае умеренных значений коэффициента ξ_3 при малом уровне возбуждения колебания в системе остаются периодическими, тогда как при большом его уровне система уходит на бесконечность. В разделе 4.5 такое поведение системы проявляется как последовательный переход при увеличении уровня возбуждения от режима № 1 через режимы № 2 и № 3 к режиму № 4 и далее к режиму № 5.

Рисунок 4.4, *e* соответствует наличию между осцилляторами нелинейной связи, задаваемой коэффициентом ξ_3 , в сочетании в кубической нелинейностью первого осциллятора, задаваемой коэффициентом η_1 . Можно видеть, что загибы углов поверхности вниз, характерные для рис. 4.4, *d*, здесь в значительной степени компенсированы стремлением тех же углов вверх, подобным показанному на рис. 4.4, *g*. Такая компенсация происходит из-за четности потенциала при коэффициенте η_1 , причем здесь степень этой четности равняется четырем, тогда как степень нечетности при коэффициенте ξ_3 составляет всего три. Такая четность, преобладая над нечетностью вследствие своей более высокой степени, формирует минимум на потенциальной поверхности, в пределах которого колебания остаются конечными при любом сколь угодно высоком уровне возбуждения. Эквипотенциальные кривые при этом снова замыкаются, причем их форма, хотя и отличается от эллиптической, напоминая треугольную со закругленными углами, всегда при этом остается замкнутой.

Такая компенсирующая роль кубической нелинейности первого осциллятора отмечена в разделе 4.5.1 при рассмотрении рис. 4.2. Там же отмечено, что колебания, хотя и остаются периодическими с конечной амплитудой, но их форма приближается к прямоугольной. Здесь же

причиной такой особенности можно считать искажение эллиптической формы эквипотенциальных кривых с ее стремлением к треугольной.

Заметим, что роль кубической нелинейности в компенсации расходимости колебаний системы двух осцилляторов отмечалась также в работе [24, рис. 4.5], где рассматривалось развитие колебаний во времени. Можно полагать, что рассматриваемая здесь модель обобщенного потенциала применима и к этому случаю в достаточной мере.

4.7.1. Модель расщепления синусоиды

В предыдущем разделе показано, что модель потенциала, в зависимости от соотношения коэффициентов, позволяет интерпретировать периодический характер колебаний, а также уход системы на бесконечность по достижении определенного порога. То есть выявлены основные свойства режимов № 1 и № 5. Режимы № 2, № 3 и № 4 при этом положены развитием режима № 1 до наступления режима № 5. Однако природа свойственного режимам № 2–4 расщепления синусоидальных колебаний остается невыясненной.

Покажем здесь, что такое расщепление может явиться следствием возбуждения второй гармоники основных колебаний за счет нелинейности системы. Иллюстрацией тому является рис. 4.5, где слева представлены развертки по времени колебаний первого и второго осцилляторов, а справа — соответствующий параметрический портрет. Развертки колебаний построены с помощью формул:

$$x_1 = \sin(t) + \sin(2t); \quad (4.39)$$

$$x_2 = \sin(t) + \sin(2t - \pi/2), \quad (4.40)$$

где коэффициенты выбраны минимально необходимыми для выявления существа явления.

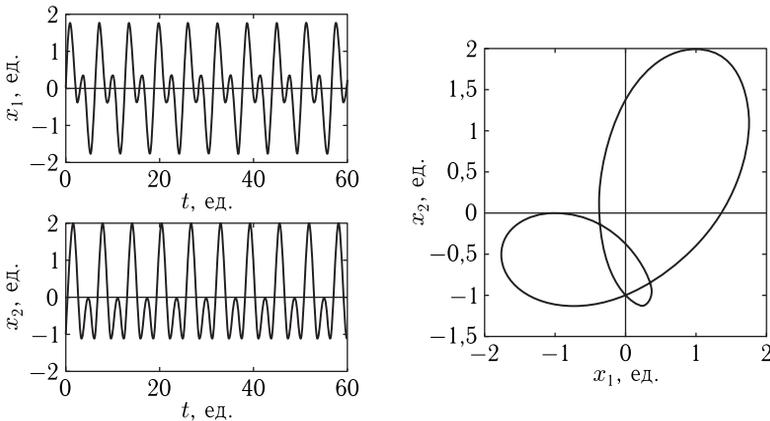


Рис. 4.5. Иллюстрация роли возбуждения второй гармоники колебаний

Видно, что в обоих случаях за счет второй гармоники имеет место удвоение периода, характерное для разверток, представленных на рис. 4.1, б, то есть для режима № 2. Параметрический портрет имеет петлю, подобную проявляющейся на рис. 4.1, б, тоже характерную для режима № 2.

Нелинейность системы, требуемая для появления двойной частоты, может быть обусловлена как нелинейностью любого из осцилляторов, так и нелинейностью связи, то есть обусловлена коэффициентами η_1 или ξ_3 в выражении для потенциала (4.34).

Для появления четко выраженной петли в слагаемом двойной частоты в выражении (4.40), необходимым условием является запаздывание фазы на $\pi/2$. Такой же сдвиг наблюдается в развертке по времени для второго осциллятора системы на рис. 4.1, б (колебания x_2 отстают по фазе от колебаний x_1 как раз на четверть начального периода, что хорошо видно при укрупнении масштаба).

Таким образом, реализуемое за счет нелинейности системы возбуждение двойной частоты, объясняет общий характер колебаний в режиме № 2, соответствующем умеренному уровню возбуждения системы.

Однако при повышении уровня возбуждения, кроме второй гармоники могут образовываться третья, четвертая и более высокие, причем такое возбуждение более высокочастотных гармоник происходит постепенно без проявления каких-либо порогов.

Подобное возбуждение высших гармоник может беспороговым образом приводить к постепенному усложнению характера колебаний, то есть сначала к режиму № 3, которому свойственно более дробное расщепление траекторий параметрического портрета (рис. 4.1, б), а затем к режиму № 4, где гармоник возбуждается настолько много, что колебания приобретают квазистохастический характер (рис. 4.1, в).

Дальнейшее увеличение уровня возбуждения, по достижении определенного порога, приводит к уходу системы на бесконечность (рис. 4.1, г), как это объяснено в предыдущем разделе.

Наблюдаемый при неидентичности осцилляторов асинхронный режим № 6 (рис. 4.3) может быть обусловлен совокупным действием как умножения частоты возбуждения, так и возникновением комбинационных частот за счет различия собственных частот осцилляторов друг от друга.

Выводы по главе 4

Рассмотрены нелинейные вынужденные колебания намагниченности и упругого смещения в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. На основе анализа полных уравнений задачи для связанных магнитного и упругого

резонаторов выявлен характер связи, обусловленный магнитоупругим взаимодействием. Показано, что нелинейная связь может иметь порядки от первой до девятой степени по намагниченности.

Построена упрощенная модель системы, содержащая два связанных осциллятора, один из которых является нелинейным, а другой — линейным, причем связь между осцилляторами имеет нелинейный характер. Для такой системы показана возможность возбуждения вынужденных колебаний автомодуляционного характера, имеющих место как при идентичных параметрах обоих осцилляторов, так и при их различии.

Для случая идентичных параметров построены развертки во времени и параметрические портреты различных видов колебаний, на основе анализа которых выявлены пять основных режимов, сменяющих друг друга по мере увеличения амплитуды возбуждения: режим № 1 — регулярный синусоидальный; режим № 2 — регулярный с расщеплением; режим № 3 — регулярный без расщепления; режим № 4 — нерегулярный квазихаотический; режим № 5 — нерегулярный расходящийся. Режимы № 1–4 при увеличении амплитуды возбуждения плавно сменяют друг в друга, а режим № 4 переходит в режим № 5 пороговым образом. Колебания при режимах № 1–3 являются периодическими, синхронными с возбуждающей силой, при режиме № 4 — квазихаотическими, а при режиме № 5 колебания как таковые отсутствуют и система уходит на бесконечность.

В случае неидентичных параметров осцилляторов на основе разверток во времени и параметрических портретов выявлен двухпериодический режим асинхронных колебаний — режим № 6, малый период которого соответствует периоду возбуждения, а большой в несколько раз (до порядка и более) превышает период возбуждения.

Для интерпретации наблюдаемых явлений предложена модель обобщенного потенциала, имеющего вид суммы степенных функций, образованных произведениями обобщенных координат обоих осцилляторов вплоть до четвертого порядка. Из аналогии с магнитоупругой системой выявлена роль отдельных компонент потенциала, получен его упрощенный вид, содержащий пять слагаемых, два из которых дают собственные частоты осцилляторов, одно — нелинейность первого осциллятора и еще два слагаемых обеспечивают линейную и нелинейную связь между осцилляторами. На основе формы потенциальной поверхности проанализирована роль этих слагаемых в формировании регулярных режимов колебаний, а также выявлены условия, обеспечивающие уход системы на бесконечность.

Для объяснения сопровождающего режимы № 2–4 расщепления синусоидальных колебаний предложена модель генерации гармоник за счет нелинейности системы. Показано, что возбуждение второй гармоники приводит к регулярным автомодуляционным колеба-

ниям, соответствующим режиму № 2, а возбуждение гармоник более высоких порядков может привести к нерегулярным колебаниям вплоть до квазихаотического их характера, соответствующим режимам № 3 и № 4.

Высказано предположение о возможности формирования асинхронных колебаний, соответствующих режиму № 6, за счет образования комбинационных частот между собственными частотами двух составляющих систему осцилляторов.

Таким образом, показано, что совокупность предложенных моделей — обобщенного потенциала и генерации гармоник или комбинационных частот — может объяснить все наблюдаемые особенности возбуждаемых автомодуляционных колебаний.

Глава 5

АНАЛИЗ АВТОМОДУЛЯЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В МАГНИТОУПРУГОЙ СРЕДЕ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ СВЯЗАННЫХ МАГНИТНОГО И УПРУГОГО ОСЦИЛЛЯТОРОВ

В настоящей главе продолжено рассмотрение нелинейных вынужденных колебаний намагничности и упругого смещения в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. Задача сведена к модельной системе из двух связанных осцилляторов, имеющей две с половиной степени свободы. Рассмотрены два вида связи между осцилляторами — через переменные и через производные. Для связи через переменные получен потенциал кубического вида с потенциальным барьером. Рассмотрено возбуждение колебаний автомодуляционного характера. Для интерпретации наблюдаемых колебаний используется модель потенциала, рассмотренная в предыдущей главе. Колебания представлены в виде рабочих точек на двумерной проекции потенциальной поверхности, движение которых происходит в рамках потенциальных ям и барьеров между ними. Построена модель фазовой задержки, объясняющая явление автомодуляции малой скоростью движения осциллятора вблизи вершины потенциального барьера. Рассмотрены условия возбуждения двухамплитудных и квазихаотических колебаний, а также ухода системы на бесконечность.

Основное изложение материала в данной главе следует работе [25]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

5.1. Задача разработки обобщенного математического аппарата автомодуляционных колебаний

В предыдущих главах настоящей монографии было рассмотрено возбуждение регулярных гиперзвуковых колебаний, в нелинейном режиме достигающих высокого уровня мощности. Для интерпретации таких колебаний была предложена модель связанных магнитного и упругого осцилляторов в линейном и квадратичном приближении [18, 21–24].

В работах [19, 20, 68, 74] было показано, что в такой системе, наряду со стационарным возбуждением колебаний постоянной амплитуды, возможны автомодуляционные режимы, в которых амплитуда колебаний

меняется как периодически, так и хаотическим образом. В работе [25] показана возможность возбуждения таких колебаний в случае когда один из осцилляторов является нелинейным, а другой — линейным, причем связь между осцилляторами имеет нелинейный характер. На основе анализа разверток во времени и параметрических портретов выявлены пять основных режимов автомодуляционных колебаний, сменяющие друг друга по мере увеличения амплитуды возбуждения: регулярный синусоидальный, регулярный с расщеплением, регулярный без расщепления, нерегулярный квазихаотический и нерегулярный расходящийся.

Для интерпретации наблюдаемых явлений предложена модель обобщенного потенциала, имеющего вид суммы степенных функций, образованных произведениями координат обоих осцилляторов. На основе геометрии потенциальной поверхности проанализирована роль отдельных слагаемых в формировании регулярных режимов колебаний, а также выявлены условия, обеспечивающие уход системы на бесконечность. Для интерпретации наблюдаемого в одном из режимов расщепления синусоидальных колебаний предложена модель генерации гармоник за счет нелинейности системы.

Однако такая модель, давая качественную интерпретацию, носит эмпирический описательный характер, не позволяя раскрыть как механизм, так и последовательность формирования расщепления.

В общем характере вынужденных колебаний не выявлена взаимная роль первого и второго осцилляторов, отсутствует сопоставление вынужденных колебаний со свободными, не рассмотрена последовательность развития во времени как расщепления, так и установления стационарных режимов.

Материал настоящей главы является продолжением предыдущей главы и работы [25], причем в первую очередь посвящен применению модели потенциала к интерпретации автомодуляционных явлений. Значительное внимание уделяется разработке обобщенного математического аппарата на основе положений общей теории нелинейных колебаний.

5.2. Геометрия задачи и основные уравнения

Геометрия задачи, совпадает с приведенной в главе 1 на рис. 1.1. Там же приведены основные уравнения с соответствующими граничными условиями (1.1)–(1.7). Повторим здесь только необходимые для дальнейшего рассмотрения.

Основная система уравнений движения для нормированных компонент намагниченности имеет вид [16, 25]:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \cdot [(m_y + \alpha m_x m_z) \cdot H_z - (m_z - \alpha m_y m_x) \cdot H_y - \alpha \cdot (m_y^2 + m_z^2) \cdot H_x], \quad (5.1)$$

а уравнения для m_y и m_z получаются циклической перестановкой x, y, z . Уравнения для компонент упругого смещения $u_{x,y}$ имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial t^2} = -2\beta \frac{\partial u_{x,y}}{\partial t} + \frac{c_{44}}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial z^2}; \quad (5.2)$$

граничные условия

$$c_{44} \frac{\partial u_{x,y}}{\partial z} \Big|_{z=\pm d/2} = -B_2 m_{x,y} m_z. \quad (5.3)$$

В работе [16] показано, что поставленную так задачу, в приближении первой упругой моды, можно свести к системе из семи нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка без граничных условий.

Сложность решения поставленной таким образом задачи стимулирует поиск возможностей уменьшения общего числа уравнений, одной из которых является квадратичное приближение по намагниченности, позволяющее свести рассмотрение к более простой системе, состоящей из двух связанных уравнений второго порядка, базирующейся на модели связанных магнитного и упругого осцилляторов.

Приведенная в работах [21, 23] такая квадрированная система (с точностью до обозначений) имеет вид (3.71)–(3.72):

уравнение для намагниченности

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot \frac{\partial^2 m}{\partial t^2} + a_{12} \cdot \frac{\partial m}{\partial t} + a_{13} \cdot m + a_{14} \cdot v + a_{15} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \\ + b_{11} \cdot m^3 + b_{12} \cdot m^2 v + b_{13} \cdot m v^2 + \\ + c_{11} \cdot m \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)^2 + c_{12} \cdot m \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) + c_{13} \cdot v \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)^2 = \\ = g_{11} \cdot h_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (5.4) \end{aligned}$$

уравнение для редуцированного упругого смещения

$$\begin{aligned} a_{21} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a_{22} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + a_{23} \cdot v + a_{24} \cdot m + a_{25} \cdot \frac{\partial m}{\partial t} + \\ + b_{21} \cdot m^3 + b_{22} \cdot m^2 v + b_{23} \cdot m v^2 + \\ + c_{21} \cdot m \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)^2 + c_{22} \cdot m \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) + c_{23} \cdot v \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)^2 = 0. \quad (5.5) \end{aligned}$$

Входящие в (5.4)–(5.5) коэффициенты имеют вид (3.73)–(3.95), а также (3.96)–(3.118). Полное упругое смещение u_S на поверхностях пластины, выраженное через редуцированное смещение v и намагниченность m , определяется формулой (3.120)–(3.121). Здесь эти выражения не дублируются ввиду полного соответствия приведенным в главе 3.

5.3. Общая модель связанных осцилляторов

Перейдем теперь к модели связанных осцилляторов в наиболее обобщенном случае, для чего в уравнениях (5.4)–(5.5) произведем замену переменных $m \rightarrow x_1$, $v \rightarrow x_2$, а также возбуждающей силы $g_{11} \cdot h_0 \rightarrow A_0$, так что запишем систему (5.4)–(5.5) в виде:

$$\begin{aligned}
 a_{11} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + a_{12} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + a_{13} \cdot x_1 + a_{14} \cdot x_2 + a_{15} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + \\
 + b_{11} \cdot x_1^3 + b_{12} \cdot x_1^2 x_2 + b_{13} \cdot x_1 x_2^2 + \\
 + c_{11} \cdot x_1 \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 + c_{12} \cdot x_1 \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial x_2}{\partial t} \right) + c_{13} \cdot x_2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 = \\
 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{21} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + a_{22} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + a_{23} \cdot x_2 + a_{24} \cdot x_1 + a_{25} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \\
 + b_{21} \cdot x_1^3 + b_{22} \cdot x_1^2 x_2 + b_{23} \cdot x_1 x_2^2 + \\
 + c_{21} \cdot x_1 \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 + c_{22} \cdot x_1 \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial x_2}{\partial t} \right) + c_{23} \cdot x_2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 = 0. \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

Можно видеть, что такая система не является полностью симметричной, то есть ее уравнения не переходят одно в другое при взаимной замене индексов переменных 1 на 2 и обратно. Симметричными являются только слагаемые со всеми коэффициентами a_{ik} , а также с коэффициентами b_{12} , b_{13} и b_{22} , b_{23} соответственно. Слагаемые с коэффициентами b_{11} , b_{21} , а также со всеми коэффициентами c_{ik} содержат одинаковые степени переменных, друг в друга не переходящие. Такая несимметричность говорит о несимметричности соответствующего потенциала, который здесь не является эквивалентным относительно двух своих переменных x_1 и x_2 . То есть для получения обобщенной силы для каждого из уравнений надо использовать потенциал своего собственного вида.

Такое обстоятельство находится в определенном противоречии с принятым в теоретической механике положением о единстве потенциальной энергии системы в целом, а также о силе, как производной от такой энергии по координате [70, 75, 76]. Возможной причиной подобного противоречия, по-видимому, является тот факт, что здесь мы имеем дело не с чисто механической системой, а с системой комбинированной, механика в которой составляет только упругую часть, тогда как другая часть является магнитной. Эта магнитная часть системы подчиняется не механическому уравнению Ньютона второго порядка, а уравнению Ландау–Лифшица, эквивалентному трем уравнениям первого порядка, в результате чего общий порядок системы получается более высоким. Таким образом, квадрированная система (5.6)–(5.7) является результатом квадратичного приближения именно такой комбинированной системы, не четвертого (как два уравнения Ньютона),

а пятого порядка (как одно уравнение Ньютона плюс одно уравнение Ландау–Лифшица). То есть, несмотря на то, что система (5.6)–(5.7) содержит всего два уравнения, что в классическом случае соответствует двум степеням свободы [1, 2, 55], она получена на основе полной системы (5.1)–(5.3), содержащей пять уравнений первого порядка, что соответствует двум с половиной степеням свободы. Можно предположить, что причиной появления в уравнениях (5.6)–(5.7) слагаемых с производными является как раз такая дополнительная половина степени свободы, на которую отличается система (5.1)–(5.3) от классической системы двух связанных осцилляторов.

Таким образом, прямое вычисление обобщенной силы путем дифференцирования потенциала по координате здесь не вполне применимо и в какой-то степени может иметь место только для слагаемых, не содержащих производных по времени. В этом случае для каждого из уравнений (5.6) и (5.7) должна использоваться своя потенциальная функция, дифференцирование которой по координате может дать обобщенную силу.

Замечание. Вообще говоря, с математической стороны прием вычисления силы путем дифференцирования потенциала, используемый в трудах классиков [70, 75, 76], является вполне общим. Однако наличие в уравнениях (5.6)–(5.7) слагаемых, содержащих произведения координат на их производные по времени (слагаемые с коэффициентами c_{ik}), наводит на мысль о возможности существования какой-то более общей функции, зависящей не только от координат, как потенциальная энергия, но и в какой-то степени от производных от координат по времени, то есть содержащей элементы кинетической энергии. Можно полагать, что построение такой функции позволило бы обобщить традиционную трактовку Лагранжа, представляющую силу как производную от потенциальной энергии по координате, то есть ввести в рассмотрение какие-то обобщенные «силы» более высокого порядка, типа представленных коэффициентами c_{ik} в системе (5.6)–(5.7). Однако на данный момент построение такой обобщенной функции можно считать самостоятельной задачей, выходящей за рамки настоящей работы.

5.4. Основные режимы автоколебаний

Основным предметом рассмотрения настоящей работы является выявление наиболее общих условий, при которых в системе возможно существование вынужденных колебаний автомодуляционного характера. Кратко обобщая наиболее характерные свойства описанных в работах [19, 20, 68, 74] автомодуляционных колебаний системы двух связанных осцилляторов, можно выделить четыре основных режима.

Режим № 1 — регулярные колебания без какой-либо модуляции (синусоидальные). При включении возбуждающей силы после небольшого периода установления, определяемого временем релакса-

ции осцилляторов, колебания приобретают четко выраженный регулярный синусоидальный характер с постоянной амплитудой и постоянным периодом, равным периоду возбуждения.

Режим № 2 — регулярные колебания с модуляцией амплитуды (автомодулированные). После первичной релаксации колебания приобретают регулярный периодический характер, однако амплитуда колебаний в пределах каждого периода меняется по определенному закону, то есть имеет место регулярная автомодуляция колебаний. Период таких автомодулированных колебаний превышает период возбуждения в два или большее, в том числе, возможно, дробное число раз, однако в установившемся режиме сохраняется строго постоянным.

Режим № 3 — нерегулярные колебания с ограниченной амплитудой и квазислучайной модуляцией (квазистохастические). Начиная с момента включения возбуждающей силы, колебания приобретают резко нерегулярный квазихаотический характер, так что амплитуда и длительность отдельного колебания меняются случайным образом. Максимальная амплитуда является ограниченной, однако в пределах такого ограничения меняется произвольно. Следы периодичности во времени, соответствующей возбуждающей силе, в какой-то степени сохраняются, однако могут нарушаться в обе стороны в два и более раз.

Режим № 4 — колебания с неограниченно нарастающей амплитудой (уход системы на бесконечность). Начиная с момента включения возбуждающей силы, размах колебаний увеличивается, после чего, достигая определенного предела, устремляется к бесконечности. Этот режим может являться как развитие во времени любых колебаний из первых трех режимов, а также может быть аperiodическим, то есть система может уходить на бесконечность сразу после включения возбуждения, без предварительных колебаний.

Рассмотрим вкратце, какую роль в формировании перечисленных режимов играют слагаемые, составляющие уравнения (5.6)–(5.7).

5.4.1. Роль в формировании режимов отдельных слагаемых связанных уравнений

В уравнениях (5.6)–(5.7), кроме основных первых двух слагаемых, описывающих ускорение движения осциллятора и затухание этого движения, присутствуют слагаемые двух видов. Слагаемые первого вида содержат только ту же переменную, что и первые два слагаемых, то есть в уравнении (5.6) — переменную x_1 , в уравнении (5.7) — переменную x_2 . Слагаемые второго вида — или другую переменную, или обе, то есть в уравнении (5.6) x_1 или такие обе переменные x_1 и x_2 . При этом слагаемые первого вида обеспечивают нелинейность того осциллятора, к которому они принадлежат, а второго — связь между обоими осцилляторами.

Рассмотрим роль упомянутых слагаемых в формировании ухода системы на бесконечность.

В работах [18, 24] показано, что уход на бесконечность линеаризованной системы с производными эквивалентен переориентации по полной системе. При этом причиной ухода на бесконечность являются слагаемые с производными, которые обеспечивают компенсацию затухания, то есть как бы отрицательную добавку к сопротивлению, будучи слагаемыми той же структуры. При этом связь через сами переменные не может обеспечить ухода на бесконечность, так как является линейной и приводит только к изменению частоты, как слагаемые той же структуры, но «перекрестные» в обоих уравнениях.

В этих работах для случая свободных колебаний получен аналитический критерий постоянства амплитуды колебаний при связи через производные, представляющий собой комбинацию из параметров уравнений осцилляторов. При недостижении этого критерия свободные колебания системы во времени затухают. При точном выполнении критерия их амплитуда во времени остается постоянной. При превышении критерия амплитуда колебаний экспоненциально нарастает, то есть система уходит на бесконечность.

В работе [25] показано, что в системе без производных наличие квадратичной связи в первом уравнении также может обеспечить уход на бесконечность, благодаря кубичности потенциала.

Итак, в основе ухода на бесконечность могут лежать два принципиально различающихся механизма:

- 1) главная связь — через производные, линейная в обоих уравнениях, возможная дополнительная — через переменные, также линейная;
- 2) главная связь — через переменные, квадратичная в первом уравнении и линейная во втором, возможная дополнительная — через производные, линейная в обоих уравнениях.

Первый из этих механизмов может быть интерпретирован на основе модели отрицательного сопротивления, второй — на основе модели потенциала.

В работе [21] показано, что уход линейной системы на бесконечность для случая линейной связи через производные и линейной через переменные (первый вид связи), может быть скомпенсирован кубической нелинейностью по переменной в первом уравнении. В работе [25] показано, что уход системы на бесконечность для случая связи по переменным, квадратичной в первом уравнении и линейной во втором (второй вид связи), также может быть скомпенсирован кубической нелинейностью по переменной в первом уравнении. Таким образом, кубическая нелинейность в первом уравнении является универсальным средством компенсации ухода на бесконечность. Это происходит благодаря квадратичности потенциала, обеспечивающего требуемую кубическую нелинейность в первом уравнении.

Можно полагать, что и более высокие четные степени потенциала (по одной только первой переменной без второй), обеспечивающие

нечетную нелинейность в первом уравнении, также должны приводить к компенсации ухода системы на бесконечность.

В качестве критерия возможности ухода системы на бесконечность за счет потенциала можно предложить наглядную геометрическую интерпретацию. При этом зависимость потенциала от переменной изображается параболой с двумя ветвями, при положительных коэффициентах которой четные степени при увеличении абсолютной величины переменной обеспечивают стремление обеих ветвей к плюс бесконечности, а нечетные — стремление положительной ветви к плюс бесконечности, а отрицательной — к минус бесконечности. Такое стремление отрицательной ветви к минус бесконечности и обеспечивает уход системы на бесконечность как стремление к минимуму потенциальной энергии.

Модель потенциала позволяет интерпретировать уход системы на бесконечность и его компенсацию для случая связи уравнений через переменные. Для связи через производные модель потенциала непригодна, так как, согласно определению, потенциал зависит от времени не должен. В этом случае потенциал — как бы уровень максимальной потенциальной энергии системы, от времени не зависящий.

5.5. Полная система на основе потенциала

Из рассмотрения результатов работ [19, 20, 68, 74] можно видеть, что за счет связи как через производные, так и через переменные получается значительное разнообразие видов автомодуляционных колебаний, укладываемых в рамки схематичной классификации, приведенной в разделе 5.4.

В качестве первого наиболее простого шага, в настоящей работе ограничимся рассмотрением связи только через переменные, то есть в уравнениях (5.6)–(5.7) слагаемые, содержащие производные, опускаем. В результате система (5.6)–(5.7) принимает вид:

$$a_{11} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + a_{12} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + a_{13} \cdot x_1 + a_{14} \cdot x_2 + b_{11} \cdot x_1^3 + b_{12} \cdot x_1^2 x_2 + b_{13} \cdot x_1 x_2^2 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (5.8)$$

$$a_{21} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + a_{22} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + a_{23} \cdot x_2 + a_{24} \cdot x_1 + b_{21} \cdot x_1^3 + b_{22} \cdot x_1^2 x_2 + b_{23} \cdot x_1 x_2^2 = 0. \quad (5.9)$$

Введем обобщенные потенциалы, которые, согласно показанному в разделе 5.3, для каждого осциллятора должны быть различными:

$$U_{S1} = \frac{a_{13}}{2} x_1^2 + a_{14} x_1 x_2 + \frac{b_{11}}{4} x_1^4 + \frac{b_{12}}{3} x_1^3 x_2 + \frac{b_{13}}{2} x_1^2 x_2^2; \quad (5.10)$$

$$U_{S2} = \frac{a_{23}}{2} x_2^2 + a_{24} x_1 x_2 + \frac{b_{21}}{4} x_1^4 + \frac{b_{22}}{3} x_1^3 x_2 + \frac{b_{23}}{2} x_1^2 x_2^2. \quad (5.11)$$

Следуя определению обобщенных сил как производных от потенциала по координате

$$F_{1,2} = \frac{\partial U_{S1,2}}{\partial x_{1,2}}, \quad (5.12)$$

получаем эти силы в виде:

$$F_1(x_1, x_2) = a_{13} \cdot x_1 + a_{14} \cdot x_2 + b_{11} \cdot x_1^3 + b_{12} \cdot x_1^2 x_2 + b_{13} \cdot x_1 x_2^2; \quad (5.13)$$

$$F_2(x_1, x_2) = a_{23} \cdot x_2 + a_{24} \cdot x_1 + b_{21} \cdot x_1^3 + b_{22} \cdot x_1^2 x_2 + b_{23} \cdot x_1 x_2^2. \quad (5.14)$$

При этом уравнения (5.8)–(5.9) принимают вид:

$$a_{11} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + a_{12} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + F_1(x_1, x_2) = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (5.15)$$

$$a_{21} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + a_{22} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + F_2(x_1, x_2) = 0. \quad (5.16)$$

Заметим, что в классическом определении обобщенной силы [70, 75, 76] перед дробью присутствует знак минус. Однако и в уравнениях (5.15)–(5.16) перед слагаемыми, содержащими $F_{1,2}$, также должен быть минус. Поэтому здесь, чтобы избежать умножения минуса на минус, в обоих случаях взят плюс.

Потенциалы в виде (5.10)–(5.11) содержат слагаемые только четных степеней — второй и четвертой. Согласно работе [25], слагаемые второй степени могут обеспечить только линейную связь между осцилляторами. При достаточной величине такой связи возможен уход системы на бесконечность, как это следует из загибов вниз диаметрально противоположных углов потенциальной поверхности на рис. 5, в, д в работе [25]. Однако слагаемые четвертой степени не могут обеспечить уход системы на бесконечность, так как при этом все края потенциальной поверхности загибаются вверх, как это показано на рис. 5, г в той же работе. С другой стороны, слагаемые третьей степени в определенном интервале своих величин также могут обеспечить уход системы на бесконечность за счет загиба вниз углов потенциальной поверхности одинакового знака, как это видно там же из рис. 5, е.

Поэтому для полноты картины потенциалы (5.10)–(5.11) следует дополнить слагаемыми третьей степени, в результате чего они принимают вид:

$$U_{S1} = \frac{a_{13}}{2} x_1^2 + a_{14} x_1 x_2 + \frac{d_{11}}{3} x_1^3 + \frac{d_{12}}{2} x_1^2 x_2 + d_{13} x_1 x_2^2 + \frac{b_{11}}{4} x_1^4 + \frac{b_{12}}{3} x_1^3 x_2 + \frac{b_{13}}{2} x_1^2 x_2^2; \quad (5.17)$$

$$U_{S2} = \frac{a_{23}}{2} x_2^2 + a_{24} x_1 x_2 + d_{21} x_1^2 x_2 + \frac{d_{22}}{2} x_1 x_2^2 + \frac{d_{23}}{3} x_2^3 + \frac{b_{21}}{4} x_1^4 + \frac{b_{22}}{3} x_1^3 x_2 + \frac{b_{23}}{2} x_1^2 x_2^2. \quad (5.18)$$

При этом силы получаются в виде:

$$F_1(x_1, x_2) = a_{13} \cdot x_1 + a_{14} \cdot x_2 + d_{11}x_1^2 + d_{12}x_1x_2 + d_{13}x_2^2 + b_{11} \cdot x_1^3 + b_{12} \cdot x_1^2x_2 + b_{13} \cdot x_1x_2^2; \quad (5.19)$$

$$F_2(x_1, x_2) = a_{23} \cdot x_2 + a_{24} \cdot x_1 + d_{21}x_1^2 + d_{22}x_1x_2 + d_{23}x_2^2 + b_{21} \cdot x_1^3 + b_{22} \cdot x_1^2x_2 + b_{23} \cdot x_1x_2^2, \quad (5.20)$$

а развернутые уравнения принимают вид:

$$a_{11} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + a_{12} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + a_{13} \cdot x_1 + a_{14} \cdot x_2 + d_{11}x_1^2 + d_{12}x_1x_2 + d_{13}x_2^2 + b_{11} \cdot x_1^3 + b_{12} \cdot x_1^2x_2 + b_{13} \cdot x_1x_2^2 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (5.21)$$

$$a_{21} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + a_{22} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + a_{23} \cdot x_2 + a_{24} \cdot x_1 + d_{21}x_1^2 + d_{22}x_1x_2 + d_{23}x_2^2 + b_{21} \cdot x_1^3 + b_{22} \cdot x_1^2x_2 + b_{23} \cdot x_1x_2^2 = 0. \quad (5.22)$$

Можно полагать, что такая система содержит в себе все возможные варианты формирования автомодуляционных режимов колебаний за счет связи через переменные при условии потенциала не выше четвертой степени.

5.5.1. Роль квадратичности связи первого осциллятора

Предложенная в предыдущем разделе система (5.21)–(5.22) является для анализа весьма сложной, поэтому сначала рассмотрим более простые ее частные случаи, достаточные для формирования колебаний автомодуляционного характера, укладывающихся в классификацию, приведенную в разделе 5.4.

По-видимому, один из самых простых видов автомодуляционных колебаний описан в работе [25]. При этом связь первого осциллятора со вторым является квадратичной, а второго с первым — линейной, то есть связанные уравнения имеют вид:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2^2 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (5.23)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (5.24)$$

Здесь $x_{1,2}$, $\beta_{1,2}$, $\omega_{1,2}$ — координатные переменные, параметры затухания и собственные частоты осцилляторов, $\gamma_{1,2}$ — коэффициенты связи, A_0 и ω_0 — амплитуда и частота возбуждающей силы.

Легко видеть, что такая система является частным случаем системы (5.44)–(5.23) при $a_{11} = 1$, $a_{21} = 1$, $a_{12} = \beta_1$, $a_{22} = \beta_2$, $a_{13} = \omega_1^2$, $a_{23} = \omega_2^2$, $d_{11} = \gamma_1$, $a_{24} = \gamma_2$, а все остальные коэффициенты равны нулю.

Рассмотрим здесь роль квадратичности связи первого осциллятора более подробно, для чего обратимся к рис. 5.1, где проведено сравнение случая квадратичной связи со случаем линейной. Для исключения влияния других факторов возьмем параметры обоих осцилляторов одинаковыми, то есть положим $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$, а также собственные частоты обоих осцилляторов и частоту возбуждения также между собой равными: $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$.

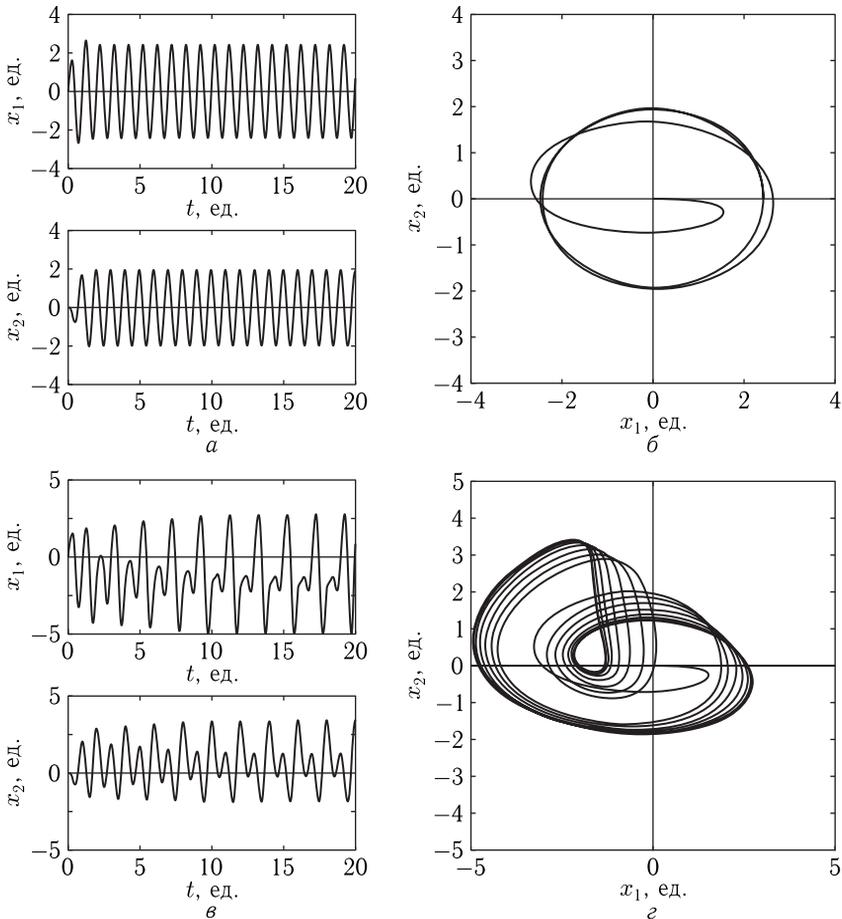


Рис. 5.1. Развитие колебаний осцилляторов во времени (а, в) и соответствующие параметрические портреты (б, г) при различных видах связи. а, б — связь линейная по обоим осцилляторам; в, г — связь квадратичная по первому и линейная по второму осциллятору. Параметры: $\omega_{1,2} = 6,2832$ ед.; $\beta_{1,2} = 4$ ед.; $\gamma_{1,2} = 20$ ед.; $\omega_0 = 6,2832$ ед.; $A_0 = 100$ ед.

Рис. 5.1, *а* соответствует линейной связи между обоими осцилляторами. Видно, что в этом случае колебания обоих осцилляторов являются регулярными, практически синусоидальными. Колебания второго осциллятора полностью подобны колебаниям первого (с точностью до множителя $\sim 0,8$), причем отстают по фазе от колебаний первого на 90° . Соответствующий параметрический портрет (рис. 5.1, *б*) имеет вид правильного эллиптического кольца с узкой образующей. Легкая сплюснутость по вертикали обусловлена меньшей амплитудой колебаний второго осциллятора по сравнению с амплитудой первого (около 85 %).

Рис. 5.1, *в* соответствует квадратичной связи первого осциллятора относительно второго при сохранении линейности второго относительно первого. Видно, что в этом случае колебания осцилляторов также сохраняют определенную регулярность, однако амплитуда через каждое колебание меняется, причем минимальный размах от максимального для первого осциллятора составляет около 15 %, а для второго — около 25 % (в работе [30] такое чередование амплитуды названо «расщеплением»). Можно видеть, что, благодаря такому чередованию амплитуд, период результирующего колебания удваивается. Колебания второго осциллятора по-прежнему отстают по фазе от колебаний первого на 90° , однако теперь амплитуды чередующихся колебаний находятся в противофазе. Соответствующий параметрический портрет (рис. 5.1, *г*) имеет вид вложенных друг в друга почти круговых циклов, однако раздвинутых друг от друга, так что в области перекрытия образуется петля. Следующие друг за другом траектории слегка относительно смещаются, в результате чего образующая приобретает некоторое расщепление.

Из рассмотрения рис. 5.1 можно видеть, что колебания второго осциллятора в обоих случаях довольно подобным образом повторяют колебания первого, причем такая характерная особенность, как чередование амплитуды с удвоением периода, обусловлено именно квадратичностью связи первого осциллятора относительно второго.

Движение первого осциллятора, находящегося под непосредственным действием возбуждающей силы, можно приближенно представить таким образом, что его колебания через связь со вторым возбуждают вынужденные колебания второго, после чего возвращаются к нему же через связь второго с первым. То есть относительно первого осциллятора имеет место «двухступенчатая» связь, которую для него можно рассматривать как определенное самовоздействие. В случае линейной связи в обоих осцилляторах такое самовоздействие, оставаясь линейным, общего характера колебаний не меняет. В случае квадратичной связи за счет ее нелинейности появляются комбинационные частоты, которые и приводят к чередованию амплитуды колебаний с удвоением периода.

Подобное поведение колебаний в случае квадратичной связи первого осциллятора отмечалось в работе [25]. Там же показано, что наблюдаемый двухамплитудный вид колебаний можно представить с помощью

эмпирической зависимости, состоящей из суммы двух синусоид, частота одной из которых равна частоте возбуждения, а частота второй превышает первую в два раза. В этом случае появление в спектре колебаний второй синусоиды можно приписать именно нелинейности связи.

Замечание. Контрольная проверка показывает, что в случае квадратичной связи в обоих осцилляторах их колебания регуляризуются, приобретая вид, подобный показанному на рис. 5.1, *a*. Параметрический портрет при этом приобретает вид треугольника с сильно закругленными углами. Можно полагать, что такая регуляризация колебаний обусловлена симметрией системы, а совокупная нелинейность обоих осцилляторов проявляется в искажении формы параметрического портрета, делая ее отличной от круговой.

5.5.2. Осциллятор с квадратичной нелинейностью. Свободные колебания

В предыдущем разделе показано, что колебания второго осциллятора, в основном, повторяют колебания первого. При этом роль второго осциллятора сводится, как бы к «возвращению» колебаний первого осциллятора ему же с учетом возведения в квадрат. Поэтому в качестве наиболее простой модели автомодуляции колебаний можно рассмотреть единственный возбуждаемый внешней силой первый осциллятор, содержащий квадратичную нелинейность, определяемую соответствующим потенциалом третьего порядка.

Будем исходить из общего уравнения для свободных колебаний одного осциллятора

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial x}{\partial t} = F(x), \quad (5.25)$$

где $F(x)$ — обобщенная сила, являющаяся производной от потенциала по координате с обратным знаком:

$$F = -\frac{\partial U_S}{\partial x}. \quad (5.26)$$

Пусть потенциал является кубическим, то есть имеет вид:

$$U_S = \frac{\omega^2}{2} x^2 + \frac{\gamma}{3} x^3. \quad (5.27)$$

Сила (5.26) равна:

$$F = -\frac{\partial U_S}{\partial x} = -\omega^2 x - \gamma x^2. \quad (5.28)$$

Уравнение для свободных колебаний (5.25) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial x}{\partial t} + \omega^2 x + \gamma x^2 = 0. \quad (5.29)$$

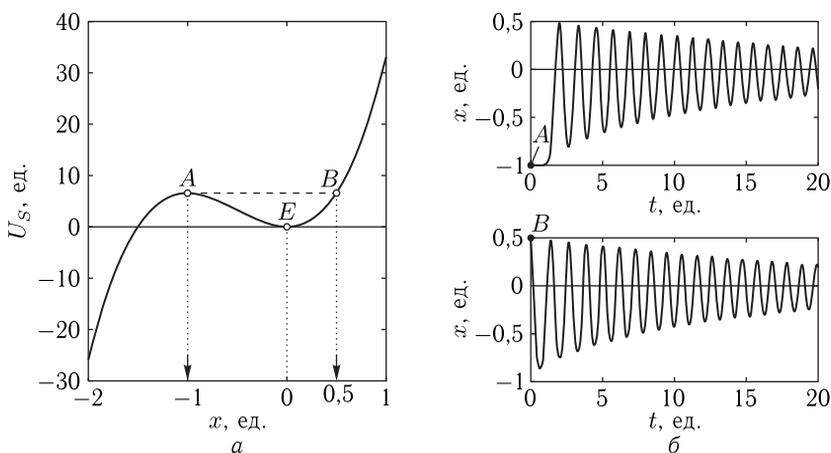


Рис. 5.2. Потенциал (а) и развитие свободных колебаний во времени (б) для одного осциллятора с квадратичной нелинейностью. Параметры: $\omega = 6,2832 \text{ с}^{-1}$; $\omega^2 = 39,4784$; $\gamma = 39,4784$; $\beta = 0,1$

Для исследования этого уравнения обратим к рис. 5.2.

На рис. 5.2, а показана зависимость потенциала U_S от координаты x , построенная по формуле (5.27). Видно, что потенциал представляет собой кубическую параболу с минимумом в точке E . Максимум на левой ветви отмечен точкой A , уровень потенциала, соответствующий этому максимуму, показан горизонтальной пунктирной линией, пересечение которой с правой ветвью параболы отмечено точкой B . Периодические колебания возможны только в пределах потенциальной ямы между A и B , то есть при уровне потенциала между пунктирной линией AB и минимумом E . При начальном уровне потенциала вне этой области, то есть при $x < A$ или $x > B$ система уходит на бесконечность по левой спадающей ветви параболы. Для удобства рисунка значение γ задано численно равным ω^2 . Удобство состоит в том, что при таком выборе потенциальная яма ограничена пределами: точка A — $x = -1,0$ ед., точка B — $x = 0,5$ ед., то есть небольшими легко узнаваемыми целыми числами.

На рис. 5.2, б показано развитие свободных колебаний осциллятора во времени внутри потенциальной ямы. Вверху — начиная с точки A , внизу — с точки B (начальные уровни показаны укрупненными точками). Видно, что в обоих случаях колебания представляют собой синусоиды, затухающие с одной и той же постоянной времени. На верхнем рисунке колебания начинают развиваться с небольшой задержкой во времени (около 1 ед.), что связано с малостью производной потенциала по координате вблизи точки A . В обоих случаях колебания сдвинуты вниз относительно оси $x = 0$, что обусловлено некоторой несимметричностью потенциальной ямы.

5.5.3. Осциллятор с квадратичной нелинейностью. Вынужденные колебания

Рассмотрим теперь вынужденные колебания того же осциллятора под действием синусоидальной силы. Соответствующее уравнение колебаний имеет вид:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial x}{\partial t} + \omega^2 x + \gamma x^2 = A_0 \cos(\omega_0 t). \quad (5.30)$$

Обратимся к рис. 5.3, где показаны развертки во времени колебаний осциллятора, описываемых уравнением (5.30), при различной степени возбуждения. Частота возбуждения ω_0 принята равной собственной частоте свободного осциллятора ω . Параметр затухания выбран несколько большим, чем на рис. 5.2, что сделано для наглядности рисунка, чтобы исключить влияние биений, возникающих в первый момент после включения возбуждения.

Рисунок 5.3, *a* соответствует свободным колебаниям при начальном отклонении 0,5 ед. Видно, что при выбранном параметре затухания амплитуда таких колебаний спадает практически до нуля при времени порядка 3 ед.

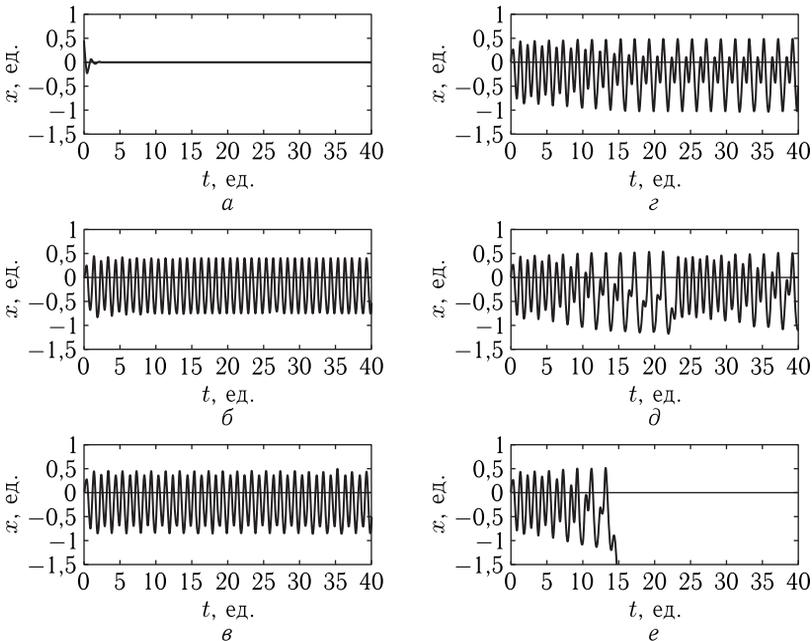


Рис. 5.3. Вынужденные колебания осциллятора с квадратичной нелинейностью при различной степени возбуждения. *a* — $A_0 = 0,0$ ед.; *б* — $A_0 = 17,0$ ед.; *в* — $A_0 = 18,0$ ед.; *г* — $A_0 = 18,6$ ед.; *д* — $A_0 = 19,0$ ед.; *е* — $A_0 = 19,2$ ед. Параметр затухания $\beta = 4$ ед., остальные параметры — те же, что на рис. 5.2

Рисунок 5.3, б соответствует колебаниям при умеренном уровне возбуждения, то есть таком, когда координата осциллятора в процессе колебаний заметно не доходит до краев ямы, в данном случае — примерно на 20 % от своей полной амплитуды. Можно видеть, что в этом случае колебания являются полностью регулярными, близкими к синусоидальным. Амплитуда их постоянна, частота совпадает с частотой возбуждения. Некоторое смещение вниз (на $-0,2$ ед.) обусловлено асимметричностью потенциальной ямы.

Рисунок 5.3, в соответствует несколько большему уровню возбуждения, при котором значение координаты осциллятора приближается к краям ямы до уровня порядка 10 % от полной амплитуды. Колебания остаются полностью регулярными, однако амплитуда их через одно колебание принимает большее или меньшее значение, то есть меняется в ту и другую сторону приблизительно на 15, % что приводит к увеличению периода в два раза. Такие колебания будем далее называть «двухамплитудными с удвоенным периодом» (в работе [25] подобное чередование амплитуды названо «расщеплением»). Численная проверка, подобная проведенной в разделе 10 работы [25], показывает, что такие колебания по форме могут быть довольно близко представлены в виде суммы двух синусоид, частота одной из которых равна частоте возбуждения, а вторая превышает ее в два раза. То есть основная синусоида как бы модулируется двойной частотой, причем в рассматриваемом здесь случае глубина модуляции невелика и составляет около 20 %.

Рис. 5.3, г соответствует еще более высокому уровню возбуждения, при котором координата колеблющегося осциллятора приближается к краям ямы до уровня порядка 5 %. Колебания сохраняют определенную регулярность и двухамплитудный модулированный вид с удвоенным периодом, однако теперь глубина модуляции сначала небольшая, не более 20 %, постепенно увеличивается, достигая при времени около 17 ед. уровня 60 %, после чего не меняется. То есть глубина модуляции претерпевает определенное «установление» с характерным временем $t_e \approx 17$ ед.

Рис. 5.3, д соответствует столь высокому уровню возбуждения, что координата колеблющегося осциллятора приближается к краям ямы на 2 %. Колебания в значительной степени утрачивают регулярность, однако их двухамплитудный двухпериодический характер в основном сохраняется. Наблюдается ярко выраженная «вторичная модуляция», представляющая собой периодическое изменение глубины двухамплитудной модуляции от 10 % до 90 %. Период такой вторичной модуляции составляет около 23 ед.

Рис. 5.3, е соответствует настолько высокому уровню возбуждения, что колебания осциллятора приближаются к краям ямы практически вплотную. Благодаря небольшим флуктуациям амплитуды, в некоторый момент времени координата осциллятора может перевалить через потенциальный барьер (точка A на рис. 5.2, а), в результате чего

происходит «разнос» системы и она уходит на минус бесконечность. В данном случае это происходит при времени около 15 ед.

Таким образом, можно видеть, что единственный осциллятор с квадратичной нелинейностью, будучи возбужденным на собственной частоте, может обеспечить довольно разнообразные виды автомодулированных колебаний, в том числе двухамплитудные с удвоением периода, с установлением, со вторичной модуляцией, а также уход системы на бесконечность. Все такие автомодуляционные колебания наблюдаются при уровне возбуждения, приближающемся к краям потенциальной ямы (не далее 20% от центра). Следует отметить, что по мере увеличения уровня возбуждения различные виды колебаний переходят друг в друга плавно, то есть беспороговым образом, кроме ухода системы на бесконечность, порог которого является весьма резким (менее 0,1%).

Предварительная проверка показывает, что при отстройке частоты возбуждения от собственной могут наблюдаться еще более сложные виды автомодуляционных колебаний, однако на данном этапе их рассмотрение выходит за рамки настоящей работы.

5.5.4. Сравнение с уравнением Дуффинга

Уравнение (5.30) можно считать по форме в какой-то степени родственным уравнению Дуффинга [1]:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \omega^2 x + \varepsilon x^2 - x^3 = 0. \quad (5.31)$$

Частный случай такого уравнения при $\varepsilon = 0$ рассмотрен в [1] на стр. 299–304. При этом принципиально важным становится последнее слагаемое, содержащее $-x^3$, соответствующее потенциалу четвертого порядка с отрицательным знаком. Потенциал такого вида представляет собой параболу четвертой степени, обе ветви которой уходят на минус бесконечность. То есть потенциал представляет собой квадратичную яму (за счет слагаемого, содержащего x^2), окруженную двумя барьерами, по внешние стороны от которых он спадет вниз бесконечным образом.

Отличие рассматриваемого здесь случая (5.30) состоит в том, что потенциал имеет лишь один такой барьер, а на месте другого — подъем, возрастающий к плюс бесконечности. Таким образом, потенциальная яма является несимметричной, что существенно отражается на форме колебаний. Дополнительным отличием уравнения (5.30) является рассмотрение затухания, обеспечиваемого вторым слагаемым, содержащим параметр β . В отличие от уравнения Дуффинга, решаемого в [1] для свободных колебаний системы, рассматриваемый здесь случай (5.30) относится именно к вынужденным колебаниям, причем для удобства рассмотрения параметр затухания положен столь большим, что собственные колебания значительной роли не играют (рис. 5.3, а).

5.6. Модель фазовой задержки

В предыдущем разделе показано, что при достаточно высоком уровне возбуждения, приближающемся к уходу системы на бесконечность, вынужденные колебания приобретают двухамплитудный характер, сопровождающийся удвоением периода. Там же было выявлено, что причиной подобной трансформации колебаний является квадратичная нелинейность первого осциллятора, обусловленная его кубическим потенциалом. Рассмотрим теперь механизм такой трансформации колебаний более подробно.

Сначала обратимся к колебаниям осциллятора в случае ненулевого начального отклонения, для чего рассмотрим рис. 5.4, где показано развитие процесса таких колебаний во времени.

Рисунок 5.4, *а* соответствует развертке во времени вынуждающей силы $F(t) = A_0 \cdot \cos(\omega t)$. Для удобства чертежа эта сила нормирована на единицу, для чего ее амплитуда умножена на 0,2563. Точки A_0, \dots, A_9 соответствуют последовательному прохождению силы через нуль. Стрелками показано направление воздействия этой силы на осциллятор: стрелки вверх означают, что сила действует в положительном направлении оси Ox , стрелки вниз — в отрицательном. Это рисунок является вспомогательным и помещен здесь для наглядности пояснения развития процесса колебаний во времени.

На рис. 5.4, *б* и рис. 5.4, *в* показано собственно смещение осциллятора во времени и соответствующая этому смещению скорость его движения. Будем полагать, что в начальный момент времени задано начальное смещение осциллятора — точка P , в которой смещение равно x_0 . Для сравнения пунктиром показано развитие колебаний в отсутствие вынуждающей силы. При этом осциллятор движется по кривой $PQRS$, затухание которой обусловлено значительной величиной параметра β . После первого переколебания между точками P и Q , осциллятор выходит на точку R , приходящуюся на минимум потенциала, после чего совершает сильно затухающие колебания с периодом порядка QR , соответствующим его собственной частоте.

Скорость (рис. 5.4, *в*) по мере приближения осциллятора к точке Q (рис. 5.4, *б*) падает до нуля, что связано с выходом потенциала на горизонтальную касательную вблизи вершины потенциального барьера. Как раз в этом месте направление движения осциллятора меняется на противоположное (происходит «поворот»), в результате чего скорость, пройдя через нуль вблизи точки C_1 , меняет знак, после чего, пройдя через небольшой максимум в районе C_2 , снова стремится к нулю вблизи точки C_3 и далее совершает затухающие колебания, соответствующие стремлению осциллятора к успокоению на дне потенциальной ямы.

Важным фактором является то обстоятельство, что вблизи точки Q (рис. 5.4, *б*) осциллятор находится вблизи вершины потенциального барьера, вследствие чего сила, скатывающая его в яму, значительно уменьшается. Поэтому вблизи этой точки скорость движения

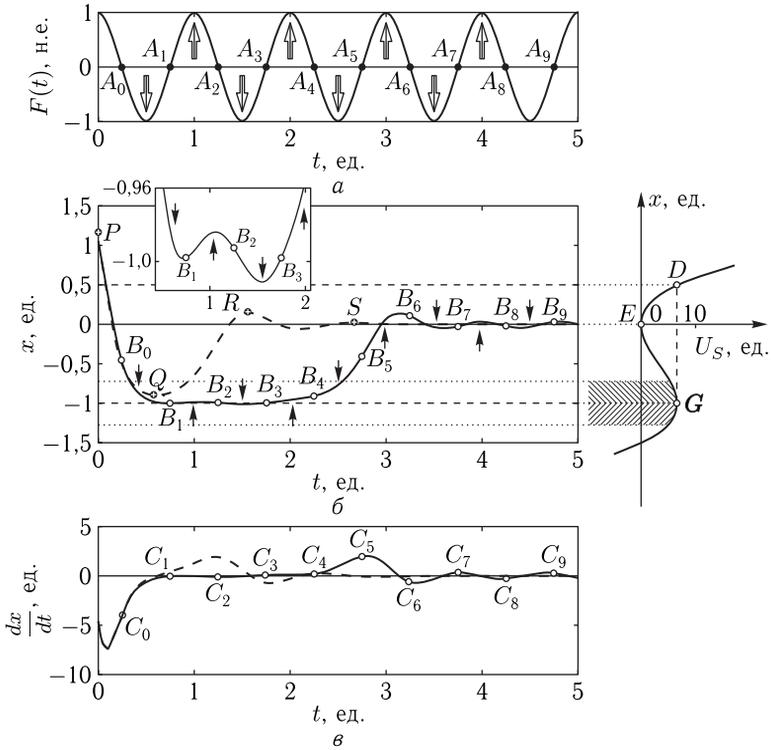


Рис. 5.4. Колебания осциллятора с квадратичной нелинейностью. *a* — вынуждающая сила, развитая во времени; *б* — смещение осциллятора во времени: колебания свободные (пунктир) и вынужденные (сплошная линия); справа — зависимость потенциала от координаты осциллятора, штриховкой показана окрестность потенциального барьера; горизонтальные пунктирные и точечные линии — значения координаты, соответствующие характерным уровням потенциала; на врезке — участок кривой между B_1 и B_3 в крупном масштабе; *в* — скорость движения осциллятора во времени: колебания свободные (пунктир) и вынужденные (сплошная линия). Точки $A_0, \dots, 9$, $B_0, \dots, 9$, $C_0, \dots, 9$ — характерные позиции вынуждающей силы, смещения и скорости. Параметры: $\omega = 6,2832$; $\gamma = 39,4784$; $\beta = 4,0$; $x_0 = 1,19$; $A_0 = 3,902$

осциллятора заметно уменьшается и время выхода из этой области до точки R получается значительно большим половины периода собственных колебаний осциллятора. То есть осциллятор в своем движении как бы задерживается по фазе на определенный промежуток времени $t_e \approx 1,4$ ед., обусловленный пологим характером зависимости потенциала от координаты вблизи барьера — между точками G и E , особенно вблизи точки G . Заметим, что на другой стороне потенциальной ямы между точками E и D спад потенциала значительно более

крутой, поэтому задержка осциллятора в своем движении там не имеет места.

При наличии вынуждающей силы (сплошная кривая) характер колебаний сильно меняется. Между точками B_0 и B_1 направление действия силы (показано стрелкой вниз) совпадает с направлением собственного движения осциллятора прочь от дна потенциальной ямы, однако между точками B_1 и B_2 направление действия силы меняется на противоположное (стрелка вверх), снова сталкивая осциллятор в яму. Однако такое действие силы продолжается недолго. Осциллятор, вследствие малости своей скорости в окрестности точки B_1 (соответствующей близкой к нулю точке C_1 на рис. 5.4, в), еще не успевает приблизиться к минимуму потенциала (точка E), как между точками B_2 и B_3 сила снова действует опять в положительном направлении оси Ox (стрелка вниз), в результате чего движение осциллятора к минимуму потенциала замедляется. То есть направление действия силы на противоположное меняется за промежуток времени, значительно меньший времени задержки осциллятора в окрестности пологого склона потенциального барьера. Такое перемежающееся действие вынуждающей силы («туда-сюда») приводит к значительному увеличению задержки осциллятора на стороне ямы, соответствующей барьеру, в результате чего осциллятор приближается к дну ямы только между точками B_5 и B_6 при времени порядка $t_s \approx 3$ ед. Можно видеть, что это время значительно (более чем в два раза) превышает время задержки при свободных колебаниях осциллятора (то есть $t_s \gg t_e$), что можно объяснить периодической подкачкой энергии к осциллятору за счет действия вынуждающей силы.

5.7. Модель двухамплитудных колебаний

Проделанное рассмотрение относится к случаю сравнительно небольшой амплитуды возбуждающей силы. При этом в установившемся режиме колебания происходят в небольшой окрестности дна потенциальной ямы. Так из рис. 5.4, б можно видеть, что в установившемся режиме, то есть при времени больше $t \geq 3,5$ ед., амплитуда колебаний составляет около 0,05 ед., что намного меньше амплитуды, требуемой для достижения потенциального барьера в точке G (0,5 ед.), где скорость замедляется и может возникнуть заметная фазовая задержка. Причиной столь малой амплитуды установившихся колебаний, очевидно, является недостаточная амплитуда возбуждающей силы. Однако дополнительная проверка показывает, что в условиях рис. 5.4 увеличение амплитуды возбуждения выше $A = 3,902$ приводит к преодолению потенциального барьера (точка G) с соответствующим уходом системы на бесконечность. В то же время, как можно видеть из пунктирной кривой на рис. 5.4, б, на начальном участке левее точки A_0 как собственная возвращающая сила осциллятора, так и приложенная к нему внешняя сила действуют в одном направлении. В результате

такого сложения сил осциллятор, несмотря на значительное затухание, в течение первой четверти периода, начиная свой путь значительно выше уровня потенциального барьера (точка P , соответствующая $x_0 = 1,19$, где потенциал U_S составляет около 40 ед. при высоте барьера около 7 ед.), доходит до точки Q , почти достигая барьера при $x = -1,0$ ед. (точка G). Таким образом, даже столь небольшая внешняя сила, как едва превышающая 3,902 ед., уже приводит к перевалу через потенциальный барьер и уходу системы на бесконечность.

Причиной сложения действия внутренней и внешней сил является совпадение по фазе максимального начального отклонения с максимумом вынуждающей силы (косинуса). То есть если такое фазовое соотношение нарушить, то нарушится и сложение сил, так что можно ожидать значительного повышения амплитуды возбуждения без ухода системы на бесконечность.

Проще всего положить начальное отклонение равным нулю. Это и было сделано при построении разверток во времени, приведенных на рис. 5.3. Однако в наиболее интересном случае более или менее регулярной двухамплитудной кривой, приведенном на рис. 5.3, *г*, при таком отклонении по времени от нуля до 17 ед., наблюдался начальный участок установления колебаний, в пределах которого глубина модуляции возрастала от 20% до 60%. В ходе дополнительной проверки было выявлено, что протяженность этого участка сильно зависит от величины начального отклонения, таким образом, что с увеличением отклонения в отрицательную сторону, то есть когда внутренняя и внешняя силы имеют отрицательный знак, протяженность участка установления уменьшается вплоть до нуля при $x_0 = -0,75$. При этом вынужденные колебания сразу возбуждаются с глубиной модуляции в 60% и далее остаются регулярными, подобно показанным на рис. 5.3, *в*, но с более глубокой модуляцией. В таких условиях амплитуда возбуждающей силы без ухода системы на бесконечность может быть увеличена до $A_0 = 19,0$. Это и было сделано при построении кривых, представленных на рис. 5.5, к рассмотрению которых далее и перейдем.

На рис. 5.5, *а* показана развертка во времени возбуждающей силы. Отличие от рис. 5.5, *а* состоит только в коэффициенте нормировки, здесь равном 0,0526. Точки A_0, \dots, A_4 отмечают наиболее характерный участок развития колебаний осциллятора, соответствующий одному полному периоду. Далее во времени такие участки периодически повторяются, поэтому отдельно не рассматриваются.

На рис. 5.5, *б* показано развитие колебаний осциллятора во времени. На участке от B_0 до B_1 направления внутренней и внешней сил совпадают, поэтому осциллятор проходит весь путь от одного крайнего положения до другого. Но уже начиная с точки B_1 внешняя сила стремится повернуть назад готовый уйти на бесконечность осциллятор, в результате чего он возвращается обратно в направлении к дну ямы. Однако из-за долгого пребывания в области потенциального барьера (точка G), где скорость осциллятора крайне мала (как видно

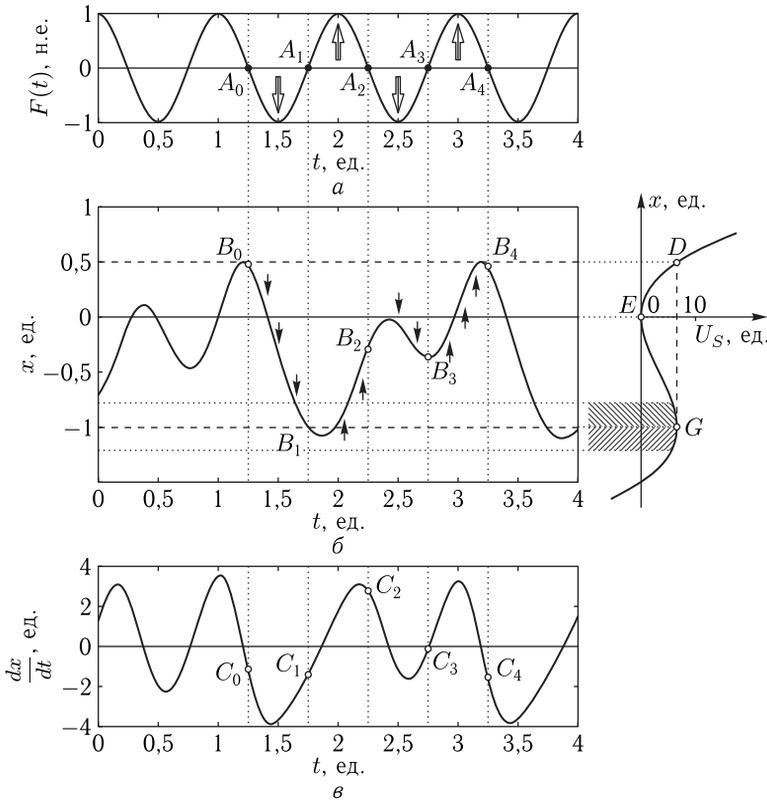


Рис. 5.5. Колебания осциллятора с квадратичной нелинейностью при специфическом выборе начального отклонения: $x_0 = -0,75$. *a* — вынуждающая сила; *б* — смещение осциллятора во времени; справа — зависимость потенциала от координаты осциллятора, штриховкой показана окрестность потенциального барьера; горизонтальные пунктирные и точечные линии — значения координаты, соответствующие характерным уровням потенциала; *в* — скорость движения осциллятора во времени. Точки $A_{0,\dots,4}$, $B_{0,\dots,4}$, $C_{0,\dots,4}$ — характерные позиции вынуждающей силы, смещения и скорости. Параметры: $\omega = 6,2832$; $\gamma = 39,4784$; $\beta = 4,0$; $A_0 = 19,0$

из рис. 5.5, *в* — скорость между точками C_1 и C_2 проходит через нуль), осциллятор в своем движении вверх к очередному моменту изменения полярности вынуждающей силы (точка A_2 , где плюс меняется на минус), не успевает дойти до верхнего края потенциальной ямы (точка D) и в точке B_2 даже слегка не доходит до ее дна (точка E). Далее осциллятор движется под действием взаимно противоположных сил: внутренней, направленной вверх, и внешней, направленной вниз, поэтому, пройдя по инерции через небольшой максимум, все же поворачивает вниз к точке B_3 , где направление внешней силы снова меняется

и теперь уже совпадает с направлением внутренней. В этой точке скорость осциллятора, еще раз пройдя через нуль (точка C_3 на рис. 5.5, *в*), будучи направленной вверх, снова возрастает и осциллятор достаточно быстро приходит в точку B_4 , соответствующую начальному уровню в точке B_0 . При этом внешняя сила также принимает то же начальное значение (точка A_4 эквивалентна точке A_0), в результате чего осциллятор по всем условиям (положению, скорости и действующим силам) приходит в исходное положение и цикл колебаний во времени повторяется.

Можно видеть, что сформированная таким образом зависимость положения осциллятора от времени (рис. 5.5, *б*, сплошная линия) как раз повторяет отмеченный при рассмотрении рис. 5.3, *г* двухамплитудный с двойным периодом характер полностью установившихся колебаний (при $t > 17$ ед.).

Наличие наблюдаемого на рис. 5.5, *б* участка установления, как уже отмечалось, связано с выбором начального отклонения осциллятора равным нулю. При этом процесс установления состоит в постепенном выборе рассогласования фаз колебаний осциллятора с возбуждающей силой, за счет внутреннего затухания осциллятора постепенно сводящего такое рассогласование к стационарному значению, соответствующему регулярному характеру колебаний.

Таким образом, можно сделать вывод, что основной причиной формирования двухамплитудного с двойным периодом характера колебаний является фазовая задержка движения осциллятора при его нахождении в ближней окрестности потенциального барьера, где его движение резко замедляется.

5.7.1. Необходимые условия регулярного двухамплитудного режима

В разделе 5.4 приведена схематичная классификация четырех основных режимов колебаний рассматриваемой системы. При этом рассмотренные в разделах 5.6 и 5.7 колебания следует отнести к варианту режима № 2 — регулярных колебаний с модуляцией амплитуды (авто-модулированных). В этих разделах в деталях был рассмотрен механизм формирования автомодуляции для случая двухамплитудного режима, при котором исходный период возбуждающей силы удваивается. Однако из рассмотрения рис. 5.5, *б* можно видеть, что при своем возвращении осциллятор после прохождения точки B_3 может еще несколько не дойти до уровня $x = 0,5$ ед. (отмечен горизонтальным пунктиром), когда полярность тянущей силы (рис. 5.5, *а*) после прохождения точки A_4 уже изменится и будет стремиться заставить осциллятор двигаться вниз (в направлении дна ямы). В результате точка B_4 придется ниже уровня $x = 0,5$ ед., так что цикл изменения амплитуды за два периода возбуждающей силы может не закончиться, то есть на его завершение осциллятору потребуется позаимствовать еще какую-то дополнительную часть следующего периода возбуждения. Такая за-

держка во времени может привести к тому, что результирующий период колебаний осциллятора будет превышать период возбуждения не в два, а в какое-то большее, в том числе дробное число раз. То есть колебания осциллятора примут как раз такой вид, как был отмечен при описании режима № 2, причем главным классификационным признаком здесь будет являться периодичность.

Необходимым условием такого режима является наличие на одном из краев потенциальной ямы барьера с достаточно пологим подходом к точке максимума. Степень пологости подхода должна быть такова, чтобы скорость осциллятора на этом участке уменьшалась настолько, что время поворота движения осциллятора в обратном направлении значительно превышало время периода возбуждающей силы. При этом в движении осциллятора образуется фазовая задержка относительно колебаний возбуждающей силы, в результате чего осциллятор за один период возбуждения вернуться к исходному положению не успевает.

Можно полагать, что необходимым условием периодичности является требование полного повторения движения осциллятора в области поворота на пологом участке потенциала. Однако возможны условия, при которых такая повторяемость может нарушаться, рассмотрению которых посвящен следующий раздел.

5.8. Модель стохастизации автоколебаний

В предыдущем разделе отмечено, что необходимым условием периодичности колебаний осциллятора, свойственной режиму № 2 (раздел 5.4), является полная повторяемость движения осциллятора в области поворота в тех случаях, когда он в эту область попадает. Однако в точке вершины барьера (G на рис. 5.4, б и 5.5, б) потенциал имеет горизонтальную касательную, поэтому скорость вблизи этой точки может падать почти до нуля и осциллятор может находиться в ней неопределенно долго. Для более подробного пояснения такой ситуации рассмотрим рис. 5.6, где показана схема формирования времени задержки осциллятора вблизи потенциального барьера (масштаб произвольный, выбран, исходя из большей наглядности рисунка). На рисунке рассмотрено действие только потенциальной силы. Вынуждающая сила складывается с потенциальной примерно так, как это показано на рис. 5.4, б и рис. 5.5, б, поэтому здесь не рассматривается.

На рис. 5.6, а показан барьер потенциала. По горизонтальной оси отложена координата x . Открытой стрелкой справа показано направление движения осциллятора, последовательно проходящего точки x_1, x_2, x_3, x_4 , где потенциал принимает значения A_1, A_2, A_3, A_4 . В каждой из этих точек стрелкой, касательной к кривой $U_S(x)$, показано направление потенциальной силы, как производной от потенциала по координате. Длина стрелки отражает абсолютную величину силы.

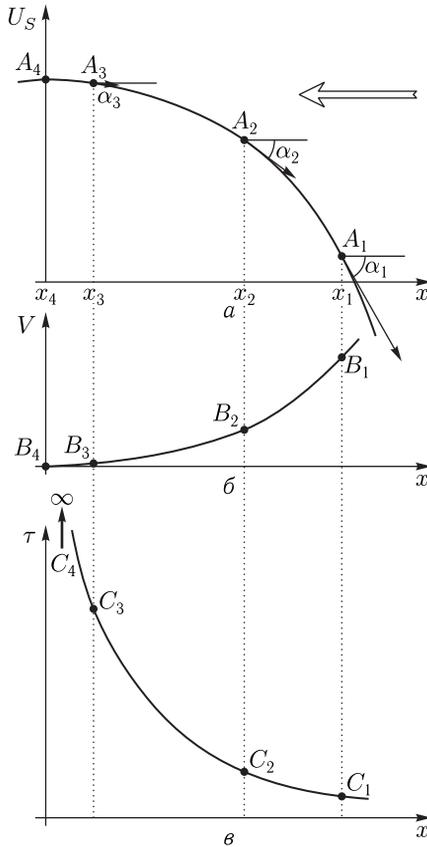


Рис. 5.6. Схема формирования неопределенно длительной задержки осциллятора вблизи потенциального барьера (масштаб условный): a — потенциал; b — скорость; v — время задержки

Полагая, что на осциллятор действует компонента силы, параллельная горизонтальной оси, то есть

$$F_x = -\frac{\partial U_S}{\partial x} \cdot \cos \alpha, \quad (5.32)$$

можно видеть, что по мере приближения осциллятора к барьеру, несмотря на уменьшение угла α , сила, скатывающая осциллятор в яму, уменьшается, а в точке A_4 (вершина барьера) вообще становится равной нулю.

На рис. 5.6, b показана скорость, которую приобретает осциллятор под действием приложенной к нему силы. Можно видеть, что скорость тем больше, чем точка расположения осциллятора дальше отстоит от вершины потенциального барьера. Так, скорость максимальна в точ-

ке x_1 , где равна V_1 , а в точке x_4 скорость равна V_4 , то есть стремится к нулю.

На рис. 5.6, *в* показано время задержки осциллятора вблизи вершины барьера, определяемое как величина, обратная скорости. При этом, когда скорость в точке x_4 стремится к нулю, то время задержки S_4 в той же точке стремится к бесконечности. Поскольку зависимость времени задержки от координаты является гиперболой, то вблизи вершины барьера исчезающе малые изменения координаты могут вызвать большие изменения времени задержки, то есть в значительных пределах менять фазу движения осциллятора относительно вынуждающей силы. Такое сильное изменение параметрически определенной функции под действием малого изменения параметра может быть причиной стохастической неустойчивости колебаний [2]. При этом следующие друг за другом малые изменения параметра в результате накопления больших изменений состояния системы приводят к тому, что с течением времени система «забывает» начальное состояние и движение в целом приобретает стохастический характер.

В рассматриваемой задаче это приводит к квазихаотическим колебаниям, классифицированным в разделе 5.4 как режим № 3.

Таким образом, необходимым условием квазихаотического характера колебаний является приближение осциллятора к вершине потенциального барьера настолько близко, что малые изменения его координаты приводят к большому изменению времени задержки, то есть решающую роль играет задержка во времени пребывания осциллятора в окрестности вершины потенциального барьера, а также соотношение между временем такой задержки и периодом возбуждающей силы.

5.8.1. Модель динамического фазового перехода

Рассмотрим условия формирования стохастического режима колебаний более подробно. Потенциальный барьер потенциала третьего порядка (5.27) (рис. 5.2, *а*) можно рассматривать как границу между двумя принципиально различными динамическими состояниями системы. Правее этой границы имеют место ограниченные колебания, левее — уход системы на бесконечность.

Переход системы через вершину потенциального барьера можно рассматривать как переход из одного состояния в другое — из ограниченного колебательного в безгранично нарастающее. Для описания такого перехода воспользуемся аппаратом, подобным развитому Л. Д. Ландау для фазовых переходов второго рода [77]. В качестве «параметра порядка» возьмем отклонение координаты осциллятора от точки, соответствующей вершине потенциального барьера.

Рассмотрим рис. 5.7, иллюстрирующий изменение во времени координаты осциллятора и его скорости по мере приближения к барьеру.

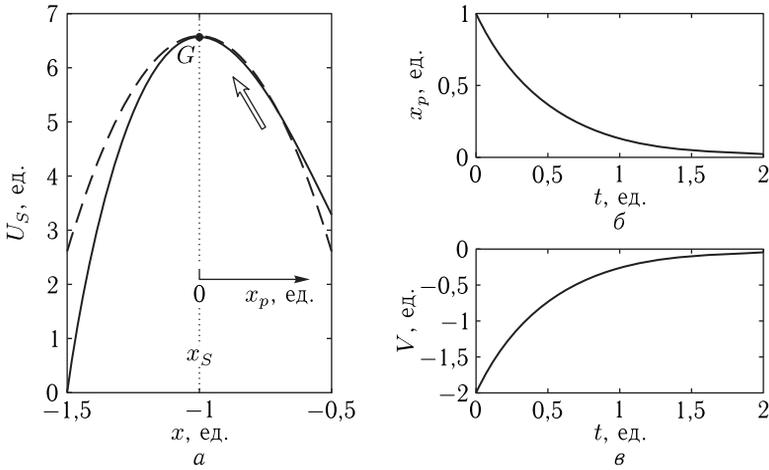


Рис. 5.7. Потенциальный барьер (а) и развитие во времени относительной координаты осциллятора (параметра порядка) (б) и его скорости (в) по мере приближения к вершине барьера

На рис. 5.7, а сплошной линией показан потенциальный барьер, соответствующий кубическому потенциалу вида (5.27)

$$U_S = \frac{\omega^2}{2} \cdot x^2 + \frac{\gamma}{3} \cdot x^3, \quad (5.33)$$

построенному при параметрах $\omega = 6,2832$, $\gamma = 39,4784$. Вершина барьера, соответствующая координате $x_S = -1$, обозначена буквой G . Параметр порядка имеет вид:

$$x_p = x - x_S, \quad (5.34)$$

то есть в точке x_S равен нулю. Разложение потенциала с точностью до второй степени параметра порядка имеет вид:

$$U_S \approx U_{S0} - \alpha \cdot x_p^2, \quad (5.35)$$

где U_{S0} — постоянное слагаемое, которое определяется совпадением исходного потенциала и его разложения в точке G .

При принятых при построении рис. 5.2, а параметрах оптимальное разложение получается при $\alpha = 16$ и $U_{S0} = 6,6$, то есть получаем

$$U_S = -16 \cdot x_p^2 + 6,6. \quad (5.36)$$

Построенный по этой формуле потенциал показан на рис. 5.7, а пунктирной линией. Видно, что до уровня $x_p \sim 0,4$ ед. расхождение сплошной и пунктирной кривой не превышает 0,5%. Стрелкой вверх показано направление движения осциллятора по мере того, как он взбирается на барьер.

В теории релаксации параметра порядка фазового перехода второго рода Ландау–Халатникова [77, стр. 517] предполагается, что скорость изменения этого параметра пропорциональна производной от потенциала по координате.

Для оценки характера изменения скорости осциллятора от времени по мере приближения к барьеру, воспользуемся аналогичным предположением, то есть будем считать, что эта скорость пропорциональна действующей на осциллятор потенциальной силе:

$$\frac{dx_p}{dt} = \eta \cdot \frac{dU_S}{dx_p}, \quad (5.37)$$

где η — постоянный коэффициент.

Для оценки величины этого коэффициента решим уравнение (5.37) относительно x_p (например, методом разделения переменных [78, 79]). При этом с точностью до постоянного коэффициента получаем:

$$x_p = e^{-2\eta\alpha t}, \quad (5.38)$$

то есть параметр порядка релаксирует во времени с постоянной

$$\tau_p = 2\eta\alpha. \quad (5.39)$$

Из этого выражения находим искомый коэффициент пропорциональности в выражении (5.37):

$$\eta = \frac{\tau_p}{2\alpha}. \quad (5.40)$$

Согласно выполненному в разделах 5.6 и 5.7 рассмотрению фазовой задержки, можно полагать, что для успешной реализации квазихаотического режима время релаксации параметра порядка τ_p должно превышать длительность периода возбуждения T_0 , то есть должно выполняться неравенство $\tau_p > T_0$. Для численной оценки положим, что такое превышение выполняется вдвое, то есть $\tau_p = 2T_0$, откуда получаем:

$$\eta = \frac{T_0}{\alpha}. \quad (5.41)$$

При принятых при построении рис. 5.2 параметрах с учетом $\alpha = 16$ получаем $\eta = 0,0625$.

Выражение (5.38) принимает вид:

$$x_p = e^{-2t}. \quad (5.42)$$

Зависимость параметра порядка от времени, построенная по этой формуле, имеет вид, показанный на рис. 5.7, б. Видно, что уже за время действия первого периода вынуждающей силы (при $t = 1$ ед.) параметр порядка уменьшается до величины 0,1 от своего начального значения, а при времени двух периодов ($t = 2$ ед.) падает почти до нуля (до $\sim 0,02$ ед.).

Для оценки скорости изменения параметра порядка $v_p = dx_p/dt$ воспользуемся соотношением (5.37), где dU_S/dx_p найдем из (5.35). В результате получаем:

$$v_p = -2\alpha\eta \cdot x_p. \quad (5.43)$$

Подставляя x_p в соответствии с (5.38), находим:

$$v_p = -2\alpha\eta \cdot e^{-2\eta\alpha t}. \quad (5.44)$$

Построенная по этой формуле зависимость скорости от времени показана на рис. 5.7, в. Можно видеть, что за время двух периодов возбуждения ($t = 2$ ед.) скорость падает почти до нуля, а дальше уменьшается еще более по экспоненциальному закону.

Соответствующее время фазовой задержки с точностью до постоянного коэффициента принимает вид:

$$\tau_p \sim \frac{1}{2\alpha\eta x_p} = \frac{1}{2\alpha\eta} \cdot e^{2\eta\alpha t}, \quad (5.45)$$

то есть во времени возрастает по экспоненте, что и обеспечивает необходимое для реализации стохастического режима сильное изменение фазы при малом изменении координаты осциллятора.

Следует отметить, что столь сильное изменение фазы возможно только в ближайшей окрестности потенциального барьера, тогда как при некотором удалении от него изменение фазы уже не будет столь значительным и вместо квазихаотического режима №3 реализуется более или менее регулярный режим №2. То есть резкой границы между этими режимами нет, и переход является плавным и беспороговым. Можно полагать, что переход от регулярного режима к нерегулярному сопровождается заметным расширением спектра колебаний, что могло бы служить критерием такого перехода. Заметим, что поиск подобного критерия мог бы явиться предметом самостоятельного исследования.

Замечание. Следует заметить, что рассмотренный здесь переход системы от колебаний внутри ямы к уходу на бесконечность в классическом смысле фазовым переходом не является, так как здесь нет двух различных состояний вещества как двух различных фаз. Однако по обе стороны от барьера здесь имеют место два различных динамических состояния осциллятора, переход между которыми по амплитуде возбуждения носит пороговый характер. Примененный здесь математический аппарат близок к традиционному аппарату описания фазовых переходов [77], поэтому предложенная здесь модель по аналогии названа «моделью динамического фазового перехода».

5.8.2. Критичность стохастического режима

В предыдущем разделе на примере кубического потенциала для одного осциллятора показано, что условия, требуемые для возбуждения квазихаотического режима №4, выполняются. Однако более подробная проверка показывает, что в случае единственного осциллятора интер-

вал параметров режима №4 является крайне узким. Так из рис. 5.3, *д* и рис. 5.3, *е* можно видеть, что колебания, приближаясь к хаотичности, все же сохраняют значительный элемент регулярности. Действительно, при увеличении амплитуды возбуждения от $A_0 = 19,0$ ед. (рис. 5.3, *д*) до $A_0 = 19,2$ ед. (рис. 5.3, *е*), то есть всего на 1,05%, довольно регулярный режим (хотя и осложненный вторичной модуляцией) уже сменяется уходом системы на бесконечность. Поэтому успешная реализация квазихаотического режима для одного осциллятора в известной степени затруднена (что, по крайней мере, относится к исследованному здесь случаю совпадения частот). Однако для системы из двух осцилляторов квазихаотический режим реализуется уже в полной мере. Особенно хорошо это наблюдается на рис. 5.1, *в* в работе [25], где нерегулярность проявляется для обоих осцилляторов в равной степени, причем колебания одного из них от колебаний другого заметно отличаются. Можно полагать, что для рассмотрения механизма таких колебаний, наряду с бесфлуктуационной моделью фазового перехода, надо учитывать флуктуации параметра порядка. Более того, учет флуктуаций, вследствие их случайного характера, может позволить описать условия ухода системы на бесконечность, происходящего не сразу после включения возбуждения, а по прошествии нескольких переколебаний, подобно тому, как это показано на рис. 5.3, *е*. Однако этот вопрос также требует более подробного исследования.

Выводы по главе 5

Рассмотрены нелинейные вынужденные колебания намагниченности и упругого смещения в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. Исходная задача, содержащая семь уравнений первого порядка и четыре граничных условия, сведена к квадрированной системе из двух уравнений второго порядка без граничных условий. Путем численного решения квадрированной системы выявлены четыре принципиально различных режима колебаний: режим №1 — колебания регулярные без модуляции (синусоидальные); режим №2 — колебания с ограниченной амплитудой и регулярной модуляцией (автомодулированные); режим №3 — колебания с ограниченной амплитудой и квазислучайной модуляцией (квазистохастические); режим №4 — колебания с неограниченно нарастающей амплитудой (уход системы на бесконечность).

С целью максимальной формализации рассматриваемой задачи получена обобщенная система уравнений, описывающая вынужденные колебания двух связанных осцилляторов. Показано, что присутствующая в такой системе уравнений связь осцилляторов не только через переменные, но и через производные, обусловлена спецификой исходной магнитоупругой системы, для полного описания которой, вследствие ее гиромангнитной природы, требуется пять уравнений первого порядка,

что эквивалентно колебаниям системы с двумя с половиной степенями свободы.

В процессе исследования ухода системы на бесконечность (режим № 4) показано, что в его основе могут лежать два принципиально различных механизма: при наличии связи через производные — связь через переменные, линейная в обоих уравнениях; в отсутствие связи через производные — связь через переменные, квадратичная в первом уравнении и линейная во втором. Первый из этих механизмов может быть интерпретирован на основе модели отрицательного сопротивления, второй — на основе модели потенциала. С помощью представления потенциала в виде степенной функции обоих переменных показано, что для ухода системы на бесконечность необходимым условием является нечетность какого-либо из степенных слагаемых, тогда как четность может компенсировать уход на бесконечность, обусловленный слагаемыми со степенью на единицу меньшей.

Записана упрощенная система, содержащая связь только через переменные не выше третьего порядка, соответствующую потенциалу четвертого порядка. Показано, что, благодаря наличию двух с половиной степеней свободы, потенциалы для каждого из уравнений должны отличаться друг от друга, давая собственный вклад в обобщенные силы.

Рассмотрена возможность возбуждения в такой системе колебаний автомодуляционного характера. Показано, что наиболее простым достаточным условием существования таких колебаний, при действии возбуждения только на первый осциллятор, является наличие в первом уравнении слагаемого второго порядка, а во втором — первого. Показано, что в силу подобия колебаний второго осциллятора колебаниям первого, достаточно рассмотреть вынужденные колебания только одного осциллятора с квадратичной нелинейностью, потенциал для которого является кубическим.

Рассмотрены свободные и вынужденные колебания осциллятора с кубическим потенциалом. Показано, что свободные колебания возможны только в пределах потенциальной ямы, ограниченной с одной стороны бесконечным ростом потенциала, а с другой — потенциальным барьером, по обратную сторону от которого потенциал стремится к минус бесконечности. Для вынужденных колебаний возможны все четыре основных режима, сменяющие друг друга по мере увеличения амплитуды возбуждения, причем первые три режима реализуются внутри потенциальной ямы, а четвертый — с выходом из нее за пределы потенциального барьера.

На основе последовательного рассмотрения различных этапов развития колебаний во времени построена модель фазовой задержки, позволяющая объяснить значительное (на несколько периодов) рассогласование фаз колебаний осциллятора относительно вынуждающей силы. Путем аналогичного рассмотрения построена модель двухамплитудных колебаний, являющихся частным случаем режима № 2: регулярных автоколебаний с модулированной амплитудой. Показано,

что решающую роль здесь играет задержка вынужденных колебаний относительно действующей силы, обусловленная уменьшением скорости движения в ближней окрестности точки максимума барьера потенциала. При этом периодичность колебаний проявляется в повторении от цикла к циклу одного и того же движения осциллятора в области поворота на пологом, близком к вершине барьера, участке потенциала.

Рассмотрены условия возможности реализации квазихаотического характера колебаний осциллятора (режим № 3). Показано, что необходимым условием такого режима является приближение осциллятора к вершине потенциального барьера настолько близко, что малые изменения его координаты приводят к большому изменению времени задержки. Для интерпретации увеличения времени задержки предложена модель динамического фазового перехода, предполагающая скорость изменения отклонения координаты осциллятора от максимума барьера (параметра порядка) пропорциональной величине действующей на осциллятор потенциальной силы. На основе предложенной модели оценена степень зависимости времени задержки осциллятора вблизи вершины барьера от величины приближения к ней. Показано, что по мере приближения осциллятора к барьеру время задержки возрастает экспоненциальным образом, стремясь к бесконечности, что и является причиной стохастизации колебаний.

На основе сравнения квазихаотических режимов для одного и двух осцилляторов показано, что в случае двух осцилляторов стохастичность колебаний выражена значительно сильнее, чем для одного, причем подобие колебаний второго осциллятора колебаниям первого в значительной степени нарушается.

Глава 6

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ В РЕЖИМЕ УМНОЖЕНИЯ ЧАСТОТЫ. ЧАСТЬ 1. ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ

В настоящей главе продолжено рассмотрение нелинейных вынужденных колебаний системы из двух связанных осцилляторов. В основе задачи лежит квадрированная система уравнений, полученная при рассмотрении задачи о возбуждении гиперзвука. Главное внимание уделено различным режимам колебаний, возникающим при вариации параметров системы и уровня возбуждения. Отмечена значительная роль нелинейного члена, содержащего произведение квадрата амплитуды колебаний первого осциллятора на первую степень амплитуды колебаний второго осциллятора. Показано, что в условиях умножения частоты второго осциллятора относительно частоты первого, при определенных значениях параметров системы возбуждение колебаний происходит с нестационарным запаздыванием во времени. По окончании такого запаздывания происходит скачкообразный рост амплитуды колебаний на один-два порядка и более. Для интерпретации наблюдаемых явлений построена модель динамического потенциала, отражающая характер колебаний первого осциллятора при использовании амплитуды второго осциллятора как параметра. Выявлены нижний и верхний критические уровни параметра кубической нелинейности, в пределах которых наблюдается нестационарное запаздывание. Отмеченные уровни интерпретированы на основе модели динамического потенциала.

Основное изложение материала в данной главе следует работе [27]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

6.1. Постановка задачи о разнообразии режимов нелинейных колебаний в системе связанных осцилляторов

Изучение нестационарных режимов нелинейных колебаний издавна привлекает внимание исследователей [2, 80]. Особый интерес представляют нелинейные колебания намагнитченности, в том числе сопровождаемые нестационарным параметрическим возбуждением обменных

спиновых волн [8, 9]. Возбуждение таких волн является типичным примером микроскопического процесса в магнетике, характерная длина которого составляет единицы и доли микрометров [81, 82]. В то же время даже более или менее однородные по пространству колебания намагниченности, типа простого ферромагнитного резонанса (ФМР), могут проявлять весьма разнообразные нестационарные свойства.

Так, еще в пионерской работе [10] в эксперименте была наглядно продемонстрирована возможность возбуждения нестационарных колебаний автомодуляционного характера, обусловленных нелинейным взаимодействием намагниченности ферритового образца с электромагнитными колебаниями резонатора. Определенная теоретическая трактовка наблюдаемого явления, основанная на учете нелинейности ФМР с проявлением расстроенного механизма, была дана в работе [83].

В работах [14, 15] была отмечена решающая роль в возбуждении нестационарных колебаний магнитоупругого взаимодействия. Ряд работ был посвящен исследованию колебаний автомодуляционного характера на основе модели двух связанных осцилляторов — магнитного и упругого [17, 19, 20, 22, 68, 74, 84].

В работах [23, 24] была показана возможность использования такой модели для описания нестационарных колебаний в магнитоупругой среде на основе линейного и квадратичного приближений.

В работах [18, 21] в качестве фундамента для формирования различных режимов колебаний было введено понятие потенциала, ответственного за нелинейную связь между осцилляторами.

В работе [25] были рассмотрены нелинейные вынужденные колебания намагниченности и упругого смещения в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. Для моделирования таких колебаний предложена упрощенная система из двух связанных осцилляторов, один из которых обладает гиромагнитными свойствами. На основе такой модели показана возможность возбуждения вынужденных колебаний автомодуляционного характера. Выявлены шесть основных режимов колебаний, для интерпретации которых предложены две модели — обобщенного потенциала и генерации гармоник.

В работе [26] та же задача сведена к модельной системе из двух связанных осцилляторов, имеющей две с половиной степени свободы. Рассмотрены два вида связи между осцилляторами — через переменные и через производные. Для связи через переменные получен потенциал кубического вида с потенциальным барьером. Рассмотрено возбуждение колебаний автомодуляционного характера. Построена модель фазовой задержки, объясняющая явление автомодуляции малой скоростью движения осциллятора вблизи вершины потенциального барьера. Рассмотрены условия возбуждения двухамплитудных и квазихаотических колебаний, а также ухода системы на бесконечность.

Дополнительные особенности возбуждения магнитоупругих колебаний проявляются в режимах умножения и деления частоты [85, 86].

Рассмотрены случаи преобразования частоты как в целочисленном, так и в дробном отношениях. Отмечены различные режимы преобразования, в том числе связанные с процессами релаксации, предложены гипотезы для их интерпретации.

Тем не менее, несмотря на выявленное разнообразие режимов связанных нелинейных колебаний, проведенное рассмотрение не является исчерпывающим. Так, довольно подробно рассмотрена роль только первых слагаемых потенциала, отвечающих за квадратичную и кубическую нелинейности в их простейшем виде. Роль нелинейности, обусловленная членами четвертого порядка, отражающими смешанную нелинейность первого и второго осцилляторов, оставлена без внимания. Однако предварительное рассмотрение показывает, что учет членов такого порядка приводит к значительному разнообразию новых, не реализуемых на прежних уровнях, нелинейности режимов. Особенное разнообразие режимов наблюдается в условиях преобразования частоты. Рассмотрению некоторых таких вопросов посвящена настоящая глава.

6.2. Геометрия задачи и основные уравнения

Геометрия задачи, совпадающая с принятой в [18, 21, 23–26, 85, 86], приведена в главе 1 на рис. 1.1. Там же приведены основные уравнения с соответствующими граничными условиями (1.1)–(1.7). Повторим здесь только необходимые для дальнейшего рассмотрения.

Основная система уравнений движения для нормированных компонент намагниченности имеет вид [16, 25]:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \cdot \left[(m_y + \alpha m_x m_z) \cdot H_z - (m_z - \alpha m_y m_x) \cdot H_y - \alpha \cdot (m_y^2 + m_z^2) \cdot H_x \right], \quad (6.1)$$

а уравнения для m_y и m_z получаются циклической перестановкой x , y , z . Уравнения для компонент упругого смещения $u_{x,y}$ имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial t^2} = -2\beta \frac{\partial u_{x,y}}{\partial t} + \frac{c_{44}}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial z^2}; \quad (6.2)$$

граничные условия

$$c_{44} \frac{\partial u_{x,y}}{\partial z} \Big|_{z=\pm d/2} = -B_2 m_{x,y} m_z. \quad (6.3)$$

В полном виде система (6.1)–(6.3) сводится к решению семи связанных уравнений первого порядка. Однако в работах [18, 21] (здесь — глава 3) показано, что с высокой точностью такую систему в квадратичном приближении можно приблизить более простой, содержащей всего два уравнения второго порядка, подобные (3.71)–(3.72) (записываем без учета производных):

уравнение для намагниченности

$$a_{11} \cdot \frac{\partial^2 m}{\partial t^2} + a_{12} \cdot \frac{\partial m}{\partial t} + a_{13} \cdot m + a_{14} \cdot v + a_{15} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + b_{11} \cdot m^3 + b_{12} \cdot m^2 v + b_{13} \cdot m v^2 = g_{11} \cdot h_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (6.4)$$

уравнение для редуцированного упругого смещения

$$a_{21} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a_{22} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + a_{23} \cdot v + a_{24} \cdot m + a_{25} \cdot \frac{\partial m}{\partial t} + b_{21} \cdot m^3 + b_{22} \cdot m^2 v + b_{23} \cdot m v^2 = 0. \quad (6.5)$$

Для задачи, решаемой в настоящей главе, достаточно ограничиться еще более простой системой, являющейся частным случаем предложенной:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = A \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (6.7)$$

В этой системе с целью математической общности произведены замены обозначений переменных: $m \rightarrow x_1$, $v \rightarrow x_2$, а также

$$a_{11} \rightarrow 1; \quad a_{21} \rightarrow 1; \quad a_{12} \rightarrow \beta_1; \quad a_{22} \rightarrow \beta_2; \quad a_{13} \rightarrow \omega_1^2; \quad a_{23} \rightarrow \omega_2^2; \\ a_{14} \rightarrow \gamma_1; \quad a_{24} \rightarrow \gamma_2; \quad b_{11} \rightarrow \delta; \quad b_{12} \rightarrow \eta; \quad g_{11} \cdot h_0 \rightarrow A.$$

Остальные коэффициенты положены равными нулю.

Таким образом, в системе (6.6)–(6.7): η и x_2 — нормированные компоненты намагниченности и упругого смещения в плоскости пластины, β_1 и β_2 — параметры затухания той и другой компонент, ω_1 и ω_2 — собственные частоты осцилляторов, γ_1 и γ_2 — константы их линейной связи, δ — параметр кубической нелинейности первого осциллятора, η — параметр нелинейной связи первого осциллятора со вторым, A и ω_0 — амплитуда и частота переменного поля.

Выражения приведенных здесь коэффициентов через параметры материала и геометрии задачи взяты из работы [21] и здесь не повторяются ввиду их некоторой громоздкости. Обратимся далее к численной оценке наиболее важных из них.

6.2.1. Оценка характерных параметров

Для дальнейшего рассмотрения наибольшее значение будет иметь коэффициент η (или b_{12}), связанный с параметрами задачи следующим образом:

$$\eta = -\frac{2\gamma^2 B_2}{M_0 d} (3H_p - 2\pi M_0), \quad (6.8)$$

где введено обозначение

$$H_p = H_0 - 4\pi M_0, \quad (6.9)$$

в котором M_0 — намагниченность насыщения магнитной пластины.

Можно видеть, что в зависимости от величины поля H_0 знак параметра η будет меняться. Критическое значение поля равно:

$$H_C = \frac{14}{3} \cdot \pi M_0, \quad (6.10)$$

то есть при $H_0 > H_C$ параметр η отрицателен, а при $H_0 < H_C$ положителен.

Оценим величину этого параметра при типичной экспериментальной ситуации [43], например в случае пленки железиттриевого граната, толщиной 15 мкм. При этом $M_0 = 140$ Гс, $B_2 = 6,96 \cdot 10^6$ эрг \times см^{-3} . Далее будем работать с круговой частотой, поэтому полагаем $\gamma = 1,76 \cdot 10^7$ $\text{Э}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$. Критическое значение поля при этом равно: $H_C = 2052$ Э. Так как далее параметр η будет интересен именно отрицательным, положим поле заведомо большим критического $H_0 = 3000$ Э. Подставляя эти значения в формулу (6.8), получаем $\eta = -5,836 \cdot 10^{25}$ с^{-2} .

Полагая типичную частоту ФМР в поле 3000 Э порядка 10^{11} с^{-1} (частота круговая — $\omega = 2\pi f$), а также учитывая, что нормированная величина намагниченности имеет порядок около единицы, находим, что характерный порядок величин слагаемых в уравнении (6.6) будет около 10^{22} с^{-2} . Можно видеть, что абсолютное значение η примерно на три порядка больше этой величины. Учтем далее, что параметр η является коэффициентом при произведении переменных $x_1^2 \cdot x_2$. При этом переменная x_1 , как нормированная компонента намагниченности, по порядку близка к единице, а переменная x_2 примерно на два порядка меньше этой величины (что получается из оценки реальной связи при заданной константе B_2) [16]. Таким образом, можно видеть, что все слагаемые в уравнении (6.6) имеют один и тот же порядок, то есть параметр η , нормированный на квадрат частоты, может иметь величину порядка 10^2 – 10^3 с^{-2} . Важно отметить также, что этот параметр будет отрицательным.

6.3. Развитие колебаний во времени, нестационарное запаздывание

Рассмотрим теперь численное решение системы (6.6)–(6.7) в режиме умножения частоты. Решение было проведено методом Рунге–Кутты четвертого порядка [54]. Все параметры были нормированы на квадрат частоты, то есть на 10^{22} с^{-2} , что дало возможность работать с переменными в безразмерном виде.

Будем рассматривать умножение частоты на три. Зададим следующие величины параметров. Резонансные частоты осцилляторов $\omega_1 = 5$, $\omega_2 = 15$, то есть резонансная частота второго осциллятора в три раза выше частоты первого. Параметры затухания β_1 и β_2 варьируются от 0,1 до 1,0. Параметры линейной связи, одинаковые для обоих осцилляторов: $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 10$. Параметр кубической нелинейности

первого осциллятора, ограничивающий возможность ухода системы на бесконечность, $\delta = 5$. Параметр нелинейной связи между осцилляторами, обсужденный в предыдущем разделе, $\eta = -200$. Частоту вынуждающей силы положим совпадающей с резонансной частотой первого осциллятора, то есть $\omega_0 = 5$, амплитуду — $A = 50$.

Развитие колебаний во времени для первого и второго осцилляторов в случае, когда затухание первого осциллятора значительно превышает затухание второго, показано на рис. 6.1.

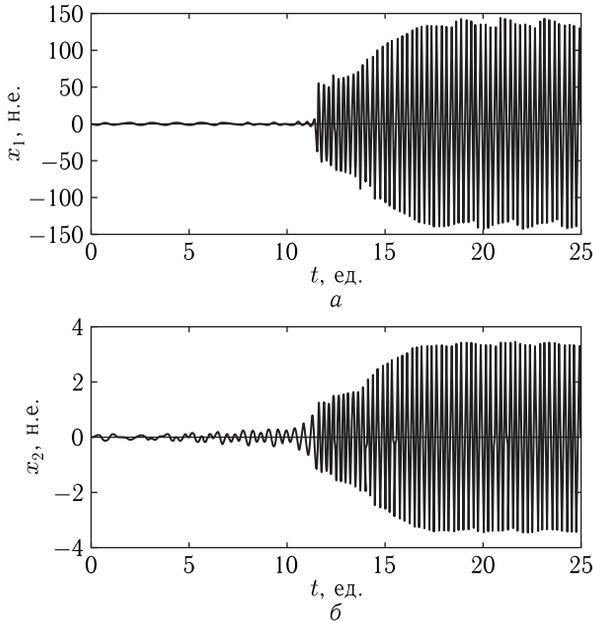


Рис. 6.1. Развитие колебаний во времени для первого (а) и второго (б) осцилляторов при параметрах затухания $\beta_1 = 1,0$, $\beta_2 = 0,1$

Можно видеть, что при времени около 12 ед. имеет место резкий скачок амплитуды колебаний обоих осцилляторов, после чего постепенно устанавливается стационарный режим. Следует заметить, что установление стационарной амплитуды колебаний обоих осцилляторов после скачка происходит с некоторым временем релаксации. Контрольная проверка показывает, что время установления близко по величине ко времени релаксации первого осциллятора.

На рис. 6.2 показано развитие колебаний во времени для тех же двух осцилляторов в обратном случае, то есть когда затухание первого осциллятора значительно меньше затухания второго.

Из обоих приведенных рисунков видна ярко выраженная характерная особенность: развитие колебания сначала идет крайне медленно, однако начиная с некоторого момента времени амплитуда колебаний

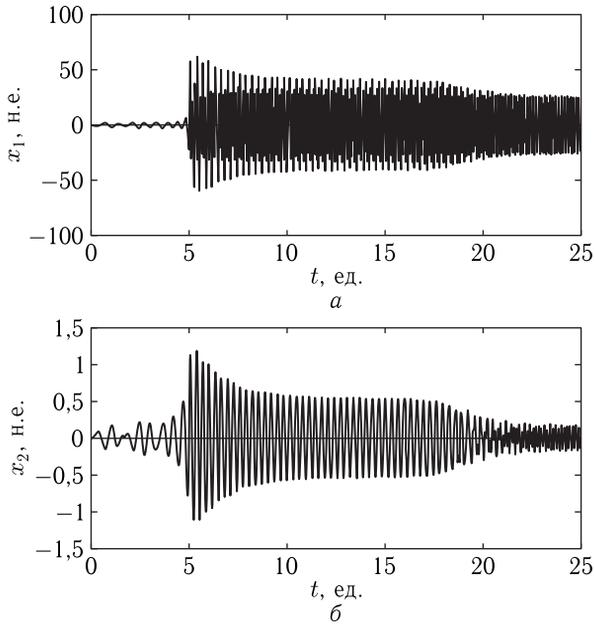


Рис. 6.2. Развитие колебаний во времени для первого (а) и второго (б) осцилляторов при параметрах затухания $\beta_1 = 0,1$, $\beta_2 = 1,0$

обоих осцилляторов скачком увеличивается сразу на один-два порядка, после чего меняется сравнительно медленно, стремясь к постоянному значению. В обоих случаях имеет место нестационарное запаздывание развития колебаний, одинаковое для того и другого осцилляторов. В первом случае (рис. 6.1) характерное время запаздывания составляет порядка 12 ед., во втором случае (рис. 6.2) несколько меньше — около 5 ед.

Выборенное столь большое отличие параметров затухания друг от друга, как на порядок, является для реализации запаздывания принципиально необходимым. Так, при равенстве обоих параметров затухания друг другу вынужденные колебания возникают сразу без какой-либо задержки во времени, причем их амплитуда нарастает, стремясь к постоянному значению, по обычному закону, как единица минус экспонента с отрицательным показателем.

Интересно сопоставить эти времена запаздывания со временами свободной релаксации обоих осцилляторов. Для этого в отсутствие связи между осцилляторами была выполнена контрольная проверка времени релаксации, определяемого по спаду начальной амплитуды свободных колебаний в e раз (где $e = 2,71828$ — основание натуральных логарифмов). Эта проверка показала, что время релаксации от номера осциллятора не зависит и для осциллятора с параметром

затухания $\beta = 1,0$ составляет 2.2 н.е., а для осциллятора с параметром затухания $\beta = 0,1$ увеличивается до 22 н.е, то есть меняется примерно на порядок пропорционально изменению величины параметра затухания.

Таким образом, можно сделать вывод, что время запаздывания приходится как раз между временами релаксации обоих осцилляторов, причем различие этих времен релаксации должно быть довольно большим (по крайней мере, в несколько раз).

6.3.1. Особенности нестационарного запаздывания

Отметим еще некоторых характерные особенности нестационарного запаздывания.

Прежде всего, нестационарное запаздывание имеет резкий порог по амплитуде возбуждения. Так, при принятых выше параметрах задачи критическое значение амплитуды, выше которого запаздывание имеется, а ниже отсутствует, составляет около $A = 30$ н.е. Важную роль играет параметр кубической нелинейности δ . Здесь тоже имеется критическая величина около $\delta = 5$ н.е., выше которой колебания имеют регулярный характер, а ниже — система уходит на бесконечность. Параметр нелинейной связи η обязательно должен быть отрицательным, так как при положительном параметре запаздывание отсутствует при любом наборе других параметров.

Параметры линейной связи γ_1 и γ_2 , по-видимому, должны быть равными друг другу, как это следует из единства потенциала для обоих осцилляторов [86]. Их величина довольно критична, но резкого порога не имеет и сильно зависит от соотношения других параметров. В общем случае можно полагать, что при слишком слабой связи для достижения запаздывания надо значительно повышать другие параметры, в первую очередь амплитуду возбуждения, а при слишком сильной связи время запаздывания падает и стремится к времени релаксации того осциллятора, для которого это время меньше.

Принципиально важным моментом для реализации запаздывания является различие частот осцилляторов. Контрольная проверка показала, что запаздывание имеет место только при нечетном коэффициенте умножения, причем этот коэффициент должен быть не очень большим. Запаздывание хорошо проявляется в случае, когда собственная частота второго осциллятора превышает частоту первого в три или пять раз, но отсутствует при коэффициенте умножения равным двум или четырем, а также более высоким целым числам.

Примечательным является тот факт, что вынужденные колебания в стационарном режиме всегда происходят с частотой, равной собственной частоте второго осциллятора, то есть по отношению к частоте возбуждения умноженной в кратное число раз. То есть умножение частоты имеет место не только для второго, но и для первого осциллятора.

Рассмотрим далее некоторые из перечисленных здесь особенностей запаздывания более подробно. В рамках настоящей работы ограничимся

случаем превышения затухания первого осциллятора над затуханием второго, то есть ситуацией, показанной на рис. 6.1. Обратный случай (рис. 6.2) предполагается рассмотреть в отдельной работе.

6.3.2. Возможный механизм запаздывания

В качестве возможной причины запаздывания можно предположить, что, благодаря наличию нелинейной связи, определяемой параметром η , потенциальная поверхность, кроме одного локального минимума, определяемого линейными параметрами системы, приобретает еще один локальный минимум, расположенный на большем расстоянии от положения равновесия в покое. Эти минимумы должны быть разделены определенным потенциальным барьером, отстоящим от положения равновесия на заметном расстоянии.

При малой амплитуде возбуждения колебания целиком происходят внутри главного минимума, так что их амплитуда достигает стационарного значения за время, равное времени релаксации одного из осцилляторов (того, для которого это время больше). При увеличении амплитуды возбуждения колебания перескакивают через потенциальный барьер, в результате чего их амплитуда резко возрастает. Запаздывание получается из-за того, что от начала возбуждения должно пройти определенное время, определяемое меньшим из двух времен релаксации системы в целом, за которое возбуждшиеся колебания достигнут амплитуды, достаточной для преодоления барьера. В течение этого времени колебания не просто растут по амплитуде в соответствии с законом экспоненты, а претерпевают определенные биения, вызванные взаимодействием двух осцилляторов, собственные частоты которых различны (отличаются в несколько раз).

Из-за такой «борьбы за амплитуду» между осцилляторами (то есть биений) их результирующее время нарастания увеличивается, давая в результате значительное время запаздывания.

После преодоления барьера система стремится уйти на бесконечность, однако кубическая нелинейность препятствует этому, ограничивая амплитуду колебаний на более или менее стационарном уровне. Такой стационарный уровень достигается за время, определяемое временем релаксации того осциллятора, для которого это время больше. Таким образом, в конце концов наступает стационарный режим, при котором оба осциллятора совершают только вынужденные колебания конечной амплитуды.

При этом частота таких колебаний определяется частотой собственных колебаний того осциллятора, для которого эта частота выше, то есть высокочастотного, в данном случае — второго. Это происходит по той причине, что его возбуждение, хотя и происходит не каждый период, но до начала следующего периода возбуждения заметно затухнуть не успевает, определяя тем самым непрерывный режим со стационарной амплитудой. При этом другой осциллятор, низкочастотный, то есть первый, пребывая в режиме вынуждения, просто повторяет

колебания высокочастотного, второго, что и дает наблюдаемое равенство частот колебаний обоих осцилляторов.

6.4. Динамический потенциал

Механизм образования запаздывания можно интерпретировать на основе введения динамического потенциала. Так, из уравнения (6.6) можно видеть, что потенциал имеет вид:

$$U = \frac{\omega_1^2}{2} \cdot x_1^2 + \gamma_1 \cdot x_1 x_2 + \frac{\delta}{4} \cdot x_1^4 + \frac{\eta}{3} \cdot x_1^3 x_2. \quad (6.11)$$

Дифференцирование этого выражения по x_1 дает потенциальную группу слагаемых уравнения (6.6). При этом переменную x_2 следует рассматривать как постоянный параметр.

Рассмотрим рис. 6.3, где показана зависимость динамического потенциала от амплитуды колебаний первого осциллятора при различных значениях амплитуды второго осциллятора (индекс «0» при значении амплитуды далее опускаем). При построении левых ветвей рисунка знаки обеих переменных были изменены на противоположные.

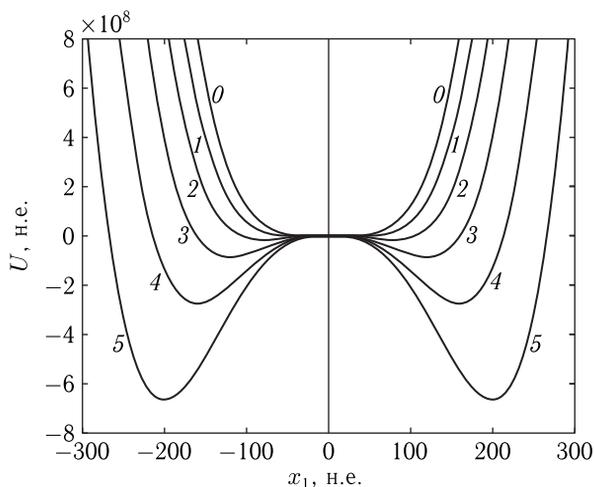


Рис. 6.3. Зависимость динамического потенциала от амплитуды колебаний первого осциллятора при различных значениях амплитуды второго осциллятора: 0 — 0 н.е.; 1 — 1 н.е.; 2 — 2 н.е.; 3 — 3 н.е.; 4 — 4 н.е.; 5 — 5 н.е.

Из рисунка можно видеть, что в отсутствие колебаний второго осциллятора (кривая 0), потенциал имеет минимум, приходящийся на $x_1 = 0$. При $x_2 = 1$ н.е. (кривая 1) минимум еще остается на прежнем месте (в нуле), но потенциальная кривая несколько расширяется. При $x_2 = 2$ н.е. (кривая 2) проявляется новый минимум, приходящийся на $x_1 = 95$ н.е. При дальнейшем увеличении x_2 минимум потенциала

углубляется и смещается в сторону больших значений x_1 . Так, при $x_2 = 5$ н.е. (кривая 5) минимум приходится уже на $x_1 = 205$ н.е. При дальнейшем увеличении x_2 минимум смещается еще дальше.

При критическом значении x_2 около 1,2 н.е. минимум при $x_1 = 0$ заменяется перегибом и резко смещается в сторону больших значений x_1 , что проявляется как скачкообразный рост амплитуды колебаний.

Предварительная проверка показала, что время первичного развития колебаний первого осциллятора определяется его собственным временем релаксации, а время задержки резкого роста колебаний определяется временем релаксации второго осциллятора. То есть для проявления запаздывания времена релаксации осцилляторов между собой должны различаться. Заметим, однако, что вопрос о роли различия времен релаксации осцилляторов требует более подробного исследования.

Следует учитывать, что построенный так потенциал является динамическим, то есть его величина не остается стационарной во времени, а меняется в такт с изменением смещения второго осциллятора x_2 .

Можно полагать, что динамический характер потенциала требует синхронизма между колебаниями обоих осцилляторов, однако дополнительная проверка показывает, что при равенстве частот запаздывание отсутствует при любых значениях параметров. Однако синхронизм может проявляться и при кратном соотношении частот осцилляторов между собой. Видимо, требование синхронизма и является причиной, почему запаздывание проявляется только в режиме умножения частоты.

Рассмотрим далее основные параметры, определяющие характер эффекта запаздывания, более подробно.

6.5. Амплитуда возбуждения

Как отмечено выше, нестационарное запаздывание имеет резкий порог по амплитуде возбуждения. Так, критическое значение амплитуды, выше которого запаздывание имеется, а ниже отсутствует, составляет около $A = 30$.

На рис. 6.4 показана зависимость времени запаздывания от амплитуды возбуждения для первого и второго осцилляторов. Остальные параметры — те же, что приняты при построении рис. 6.1.

Можно видеть, что до критического значения амплитуды A_S , равно- го 30,880 н.е., запаздывание полностью отсутствует, а при достижении амплитудой этого значения резким скачком возрастает, при $A = 30,881$ составляет 153 н.е. (выходит за пределы рисунка). Максимум времени запаздывания τ_S приходится на $A = 30,884$ н.е., когда оно равняется 155 н.е. По прохождении этой амплитуды время запаздывания спадает, при $A = 31$ н.е. составляя 86 н.е., при $A = 32$ н.е. — 48 н.е., при $A = 33$ н.е. — 54 н.е., при $A = 34$ н.е. — 37 н.е. и далее по рисунку.

Можно видеть, что времена запаздывания для обоих осцилляторов практически совпадают, а при амплитуде возбуждения, большей кри-

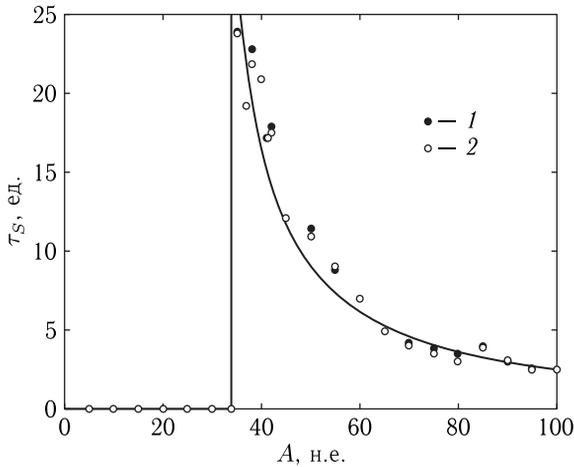


Рис. 6.4. Зависимость времени запаздывания от амплитуды возбуждения: 1 — первый осциллятор (сплошные точки); 2 — второй осциллятор (открытые точки). Кривая построена по формуле (6.12)

тической, довольно близко описываются эмпирической зависимостью вида:

$$\tau_S = \frac{220}{A - 27} - 0,5, \quad (6.12)$$

которая представляет собой обратную пропорциональность.

Следует заметить, что эта формула дает правдоподобные значения времени запаздывания только при амплитуде более 40 н.е. В интервале от 30 до 40 н.е. время запаздывания, вопреки формуле (6.12), к бесконечности не стремится, а ограничивается на уровне 155 н.е. (при $A = 10,884$ н.е.). При этом по мере изменения A в пределах этого интервала, ход зависимости τ_S от A не является монотонным, а испытывает некоторые скачки (в пределах до 10%), что проявляется в наблюдаемом разбросе точек, особенно для второго осциллятора.

Как можно видеть из рис. 6.1, после скачкообразного увеличения амплитуды, колебания обоих осцилляторов, по истечении небольшого периода релаксации, устанавливаются на стационарном постоянном уровне. Рассмотрим теперь, как зависит амплитуда таких установившихся колебаний от амплитуды возбуждения, для чего обратимся к рис. 6.5. На рисунке приведены соответствующие зависимости для обоих осцилляторов, однако с целью удобства совмещения кривых на одном рисунке, ввиду малости амплитуды второго осциллятора (x_{20} , кривая 2) по сравнению с амплитудой первого (x_{10} , кривая 1), значения амплитуды второго осциллятора (x_{20}) увеличены в 10 раз.

Характерным свойством обеих зависимостей является резкий скачок амплитуды колебаний осцилляторов при критическом значении амплитуды возбуждения. Заметим, что здесь, как и в предыдущем

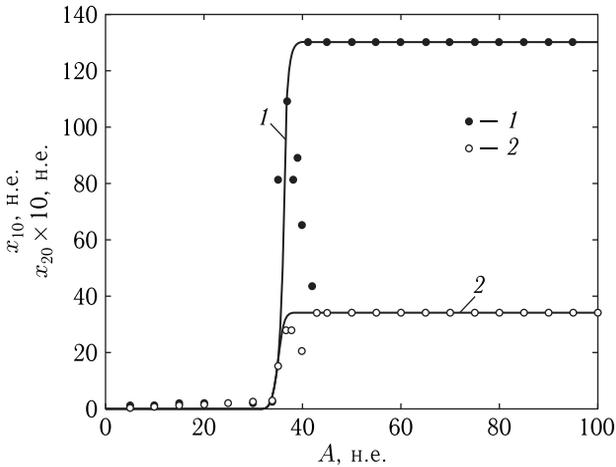


Рис. 6.5. Зависимость амплитуды установившихся колебаний от амплитуды возбуждения: 1 — первый осциллятор (сплошные точки); 2 — второй осциллятор (открытые точки)

случае (рис. 6.4), рост амплитуды колебаний осцилляторов происходит не единым скачком при амплитуде возбуждения равной A_S , а претерпевает несколько колебаний вверх-вниз в пределах изменения A от 32 до 40 н.е. В то же время вне этого интервала амплитуда или растёт крайне медленно (при $A < 32$ н.е.), или совсем не меняется (при $A > 40$ н.е.). Поэтому для сглаженного приближения обеих зависимостей, по-видимому, удобнее всего использовать гиперболический тангенс. Соответствующие зависимости, приведенные на рис. 6.5 сплошными линиями, построены по формулам

$$x_{10} = 65 \cdot \text{th}(A - 36) + 65; \quad (6.13)$$

$$x_{20} = 17 \cdot \text{th}(A - 36) + 17. \quad (6.14)$$

Как видим, здесь наиболее удобным значением, где кривые претерпевают перегиб, является $A = 36$ н.е., что довольно близко соответствует введенному выше значению критической амплитуды $A_S = 30,881$ н.е.

6.6. Особенности колебаний до скачка амплитуды

Отметим попутно некоторые особенности, касающиеся частоты колебаний обоих осцилляторов до скачка амплитуды, то есть при малой амплитуде возбуждения (меньшей критической), для чего вернемся к развитию во времени колебаний. Обратимся к рис. 6.6, соответствующему случаю $A = 20$ н.е. (заметим, что здесь, по сравнению

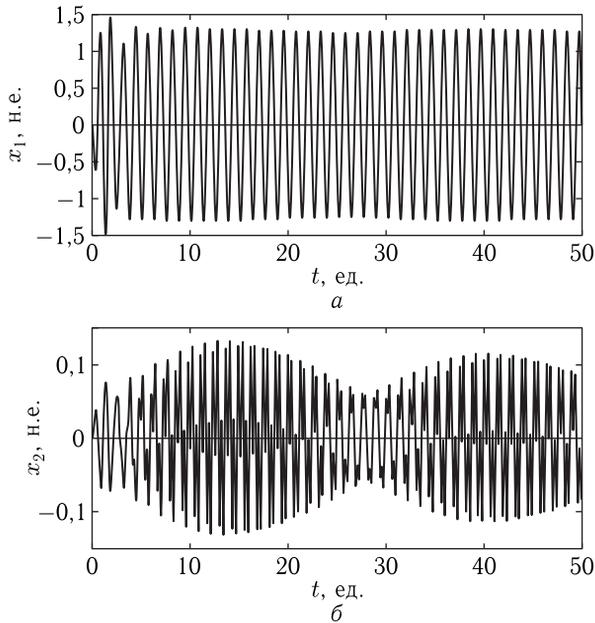


Рис. 6.6. Развитие колебаний во времени для первого (а) и второго (б) осцилляторов при малой амплитуде возбуждения

с рис. 6.1, интервал времени увеличен вдвое — до 50 н.е., что сделано для наглядности).

Можно видеть, что период колебаний первого осциллятора до скачка амплитуды не меняется и составляет 1,25 н.е, тогда как после скачка уменьшается до 0,05 н.е (рис. 6.1). Эти периоды соответствуют частотам 5,03 и 12,7 н.е., что довольно близко к собственным частотам осцилляторов (5 н.е. и 25 н.е.). В обоих случаях колебания первого осциллятора остаются близкими к синусоидальным.

Период колебаний второго осциллятора до скачка также близок к 1,25 н.е., что соответствует чисто вынужденным колебаниям на частоте возбуждения 5 н.е. Однако при этом колебания второго осциллятора являются двухамплитудными или двухпериодическими, так что основной период остается равным 1,25 н.е., но к нему с небольшой амплитудой примешиваются колебания на частоте 12,7 н.е. с периодом около 0,05 н.е., который соответствует собственной частоте колебаний второго осциллятора.

По амплитуде имеют место биения (до 50%) между вынуждающей и собственной частотами, период которых составляет около 20–25 н.е., причем амплитуда биений во времени медленно затухает, падая до нуля при времени порядка 200 н.е. Период биений по мере увеличения амплитуды возбуждения уменьшается. Так, при $A = 5$ н.е. он составляет

около 25 н.е., а при $A = 30$ уменьшается до 11 н.е. После затухания биений амплитуда колебаний второго осциллятора устанавливается на постоянном уровне, но колебания остаются двухамплитудными (примесь периода 0,05 остается до 50%).

Таким образом, можно полагать, что при амплитуде возбуждения меньшей критической колебания первого осциллятора всегда остаются синусоидальными с постоянной амплитудой, а частота их равна частоте возбуждения. При этом колебания второго осциллятора происходят с биениями между собственной частотой и частотой возбуждения, в результате чего являются двухамплитудными (двухпериодическими).

При амплитуде возбуждения выше критической колебания обоих осцилляторов после небольшого периода релаксации (порядка времени релаксации первого осциллятора) происходят с постоянной амплитудой на частоте, близкой к собственной частоте второго осциллятора.

6.7. Параметр кубической нелинейности

Другим важнейшим параметром является параметр кубической нелинейности первого осциллятора δ . Этот параметр, будучи наиболее высоким по показателю степени x_1 , при достаточной величине может воспрепятствовать уходу системы на бесконечность при любом сочетании величин других параметров. Рассмотрим его влияние на формирование запаздывания более подробно.

На рис. 6.7 показана зависимость времени запаздывания τ_S от величины параметра кубической нелинейности δ . Сплошные точки соответствуют моменту времени, при котором происходит резкое

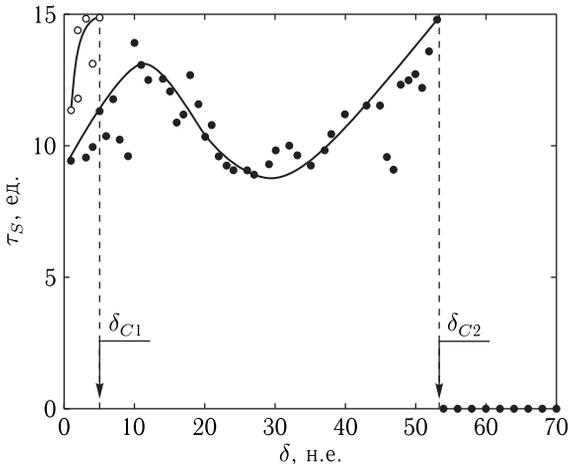


Рис. 6.7. Зависимость времени запаздывания от параметра кубической нелинейности

скачкообразное увеличение амплитуды колебаний. Открытые точки соответствуют моменту времени, начиная с которого система уходит на бесконечность.

Непрерывные бесконечно во времени продолжающиеся колебания большой амплитуды существуют только в области изменения параметра δ между 5 и 53 н.е., ограниченной вертикальными пунктирными линиями. Можно считать, что запаздывание с чистом виде существует между двумя критическими значениями параметра кубической нелинейности: $\delta_{C1} = 5$ н.е. и $\delta_{C2} = 53$ н.е.

При $\delta < \delta_{C1}$ колебания большой амплитуды возникают, но продолжают сравнительно небольшой промежуток времени (соответствующий интервалу по вертикали между сплошными и открытыми точками), после чего система уходит на бесконечность. При $\delta > \delta_{C1}$ система не уходит на бесконечность ни при каких значениях других параметров, то есть здесь достаточная величина этого параметра (в данном случае 5 н.е.) обеспечивает существование возвратно-поступательных (периодических или близких к таковым) колебаний системы с ограниченной величиной амплитуды.

При $\delta > \delta_{C2}$ колебания большой амплитуды отсутствуют, то есть происходит как бы «подавление» запаздывания пороговым образом, более подробно рассматриваемое далее. Отметим лишь, что порог подавления очень резкий.

Из рисунка видно, что сплошные точки испытывают по вертикали большой разброс. То есть уже при малом изменении параметра нелинейности (не более чем на 3–5 н.е.) время запаздывания меняется на величину, достигающую до 20–30%. Можно полагать, что функциональная зависимость здесь является довольно сложной и носит стохастический характер, поэтому сплошные линии проведены чисто эмпирическим образом через области, соответствующие максимальному сгущению точек.

6.8. К объяснению механизма запаздывания

В рамках интерпретации рассматриваемых явлений на основе механизма динамического потенциала можно полагать, что запаздывание обусловлено возникновением дополнительного минимума потенциала на расстоянии, достаточно большом от нуля.

Такое возникновение дополнительного минимума происходит путем преобразования потенциального барьера в перегиб, на котором производная от потенциала близка к нулю. То есть переход системы из нулевого положения в дополнительный минимум происходит через участок, где наклон потенциальной кривой весьма мал. Колебания на этом участке происходят с биениями между частотой возбуждения и частотами осцилляторов, так что амплитуда от одного периода колебаний к другому может меняться довольно сложным образом. При этом если смещение рабочей точки успевает зайти достаточно далеко от точки

перегиба в сторону дополнительного минимума, то происходит срыв системы в этот минимум и амплитуда колебаний резко возрастает. Если смещение рабочей точки не успевает уйти далеко от точки перегиба, то оно возвращается обратно, после чего колебания продолжают с небольшой амплитудой в течение еще одного периода. Вследствие переменного размаха колебаний при биениях, заход амплитуды за точку перегиба происходит нерегулярным образом, то есть в различные периоды, в результате чего зависимость времени запаздывания от величины параметра нелинейности сильно флуктуирует, приобретая характер, близкий к стохастическому.

Вообще говоря, такой весьма нерегулярный характер расположения точек, колеблющихся в окрестности величины $\tau_S = (12 \pm 2)$ ед., дает повод приближенно полагать, что во всем интервале изменения параметра нелинейности δ от нуля до его критического значения время запаздывания от этого параметра практически не зависит.

6.9. Подавление запаздывания

Как отмечено в предыдущих разделах, при достаточно большой величине параметра кубической нелинейности $\delta = \delta_{C2}$ происходит подавление запаздывающих колебаний большой амплитуды, то есть они более не возбуждаются ни при каком значении амплитуды возбуждения.

На рис. 6.8 показано развитие во времени колебаний первого осциллятора при различной величине параметра кубической нелиней-

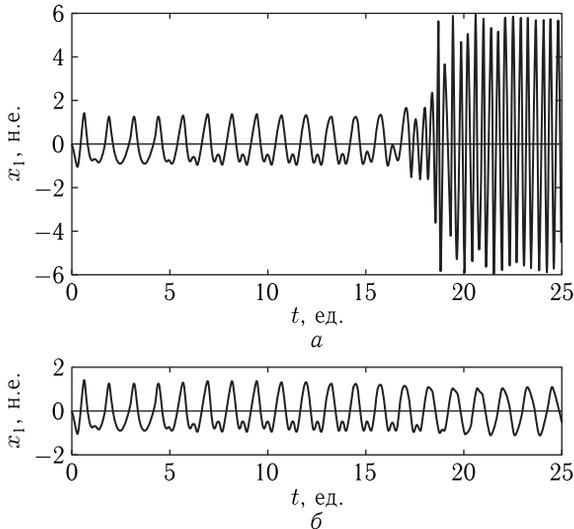


Рис. 6.8. Развитие колебаний первого осциллятора во времени при различной величине параметра кубической нелинейности: $a - \delta = 53,04$ н.е.; $b - \delta = 53,05$ н.е.

ности — меньшем (*a*) и большем (*b*) критического значения $\delta_{C2} = (53,045 \pm 0,005)$ н.е.

Из рисунка можно видеть, что запаздывающее возбуждение колебаний большой амплитуды (рис. 6.8, *a*) имеет место только при параметре кубической нелинейности δ меньшем критического значения δ_{C2} . Если же такое возбуждение имеет место, то до момента запаздывания частота равна 5 н.е., а после запаздывания, когда колебания большой амплитуды уже возбуждены, частота равна 12.5 н.е., то есть близка к собственной частоте второго осциллятора. При параметре нелинейности δ , большем критического значения δ_{C2} (рис. 6.8, *b*), частота всегда остается постоянной, равной 5 н.е.

6.9.1. Схема механизма подавления

Для интерпретации подавления запаздывания можно предложить следующий механизм, основанный на потенциальном характере кубической нелинейности.

Так, по мере увеличения параметра кубической нелинейности потенциальная яма сужается, поэтому амплитуда возможных колебаний уменьшается. Колебания большой амплитуды возбуждаются тогда, когда динамический потенциал имеет минимум где-то достаточно далеко от нуля. Кубическая нелинейность сужает это расстояние, вплоть до того, что этот дополнительный минимум скатывается к нулю. При этом амплитуда колебаний большой амплитуды спадает до малого значения. Скатывание происходит резко, так как потенциальный барьер заменяется перегибом, поэтому подавление тоже происходит резко как раз при критическом значении параметра нелинейности.

6.10. Амплитуда колебаний после запаздывания

В предыдущих разделах отмечен потенциальный характер кубической нелинейности первого осциллятора. Рассмотрим теперь обусловленные таким характером свойства возбуждаемых колебаний.

Прежде всего остановимся на наиболее наглядном свойстве колебаний — величине их амплитуды, устанавливающейся через некоторое время после окончания запаздывания. Временем установления пока интересоваться не будем, отметим лишь, что оно по порядку величины близко или превышает в небольшое число раз (два-три) время релаксации первого осциллятора, то есть составляет около 5–10 ед. времени.

На рис. 6.9 показана зависимость амплитуды колебаний в установившемся режиме от величины параметра кубической нелинейности. На врезке приведена та же зависимость при малых значениях параметра δ .

Кривая на основном рисунке построена по формуле

$$x_{10} = \frac{600}{\delta - 4} - 8. \quad (6.15)$$

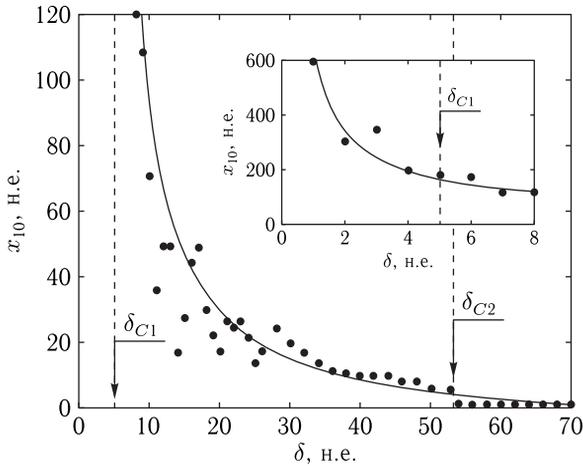


Рис. 6.9. Зависимость амплитуды колебаний в установившемся режиме от величины параметра кубической нелинейности. На врезке та же зависимость при малых значениях параметра δ . Назначение вертикальных пунктирных кривых то же, что на рис. 6.7

Кривая на врезке построена по формуле:

$$x_{10} = \frac{600}{\delta} + 45. \quad (6.16)$$

Из рисунка можно видеть, что установившаяся амплитуда при увеличении параметра кубической нелинейности более или менее монотонно падает. Особенно резкий спад наблюдается при малых значениях параметра δ (до 10–15 н.е., а также на врезке), после чего спад постепенно замедляется. Начиная со значения δ порядка 53 н.е. амплитуда резко уменьшается и далее, хотя и спадает, но крайне медленно. Такое резкое уменьшение амплитуды соответствует достижению параметром δ критического значения δ_{C2} (показано стрелкой), что приводит к подавлению запаздывания, рассмотренному в предыдущем разделе.

В области значений δ до 30 н.е. имеет место сильный разброс точек вверх и вниз до 50% и более, происходящий уже при малом изменении δ , всего на 1–2 н.е. Можно полагать, что такой разброс свидетельствует в пользу крайне сложного характера потенциальной поверхности системы. То есть в формировании динамического потенциала участвует вся совокупность параметров системы в сочетании с меняющейся амплитудой колебаний второго осциллятора, собственная частота которого резко отличается от частоты возбуждения. По-видимому, этот вопрос требует более подробного рассмотрения, в данный момент выходящего за рамки настоящей работы.

Следует заметить также, что разброс наиболее заметен только при $\delta < 30$ н.е., а далее, вплоть до δ_{C2} — практически отсутствует.

Таким образом, достаточно уверенный характер спада зависимости x_{10} от δ позволяет приблизить ее эмпирическими кривыми (6.15) и (6.16), показанными на рисунке сплошными линиями. Обе кривые соответствуют закону обратной пропорциональности, на что и можно ориентироваться в нулевом приближении.

6.10.1. Интерпретация спада амплитуды на основе модели потенциала

Рассмотрим теперь отмеченный спад амплитуды на основе механизма потенциала, соответствующего кубической нелинейности.

Так, из выражения для динамического потенциала (6.11) можно видеть, что кубическая нелинейность соответствует слагаемому с четвертой степенью по амплитуде смещения первого осциллятора x_1 , согласно (6.11), имеющему вид:

$$U_\delta = \frac{\delta}{4} \cdot x_1^4. \quad (6.17)$$

Примерный вид кубического потенциала для этого случая показан на рис. 6.10. Приведенные кривые построены по формуле

$$U_\delta = \delta \cdot (x_{10})^4. \quad (6.18)$$

При построении коэффициент 1/4 опущен, как не меняющий существа дела, а интервал изменения амплитуды первого осциллятора выбран сравнительно небольшим (до 5 н.е.) с целью повышения наглядности рисунка (чтобы избежать значений потенциала в десятки и сотни миллионов).

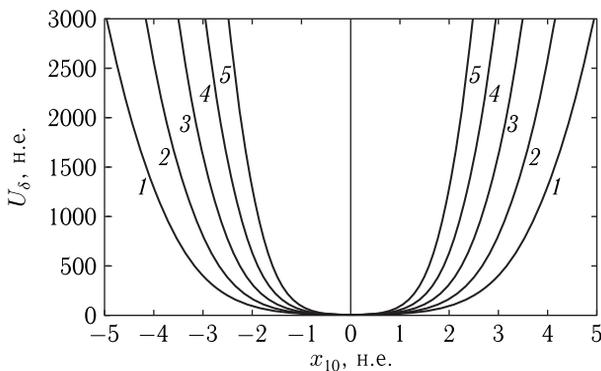


Рис. 6.10. Зависимость потенциала кубической нелинейности от амплитуды колебаний первого осциллятора при различной величине параметра δ : 1 — 5 н.е., 2 — 10 н.е., 3 — 20 н.е., 4 — 40 н.е., 5 — 80 н.е.

Из рисунка можно видеть, что потенциал U_δ представляет собой симметричную яму, по мере увеличения параметра δ сужающуюся. Следует отметить, что такое сужение линейным не является, а по мере увеличения δ постепенно замедляется. Края ямы при заданном значении потенциала определяют интервал допустимых значений смещения первого осциллятора. То есть чем выше потенциал, тем размах колебаний может быть больше.

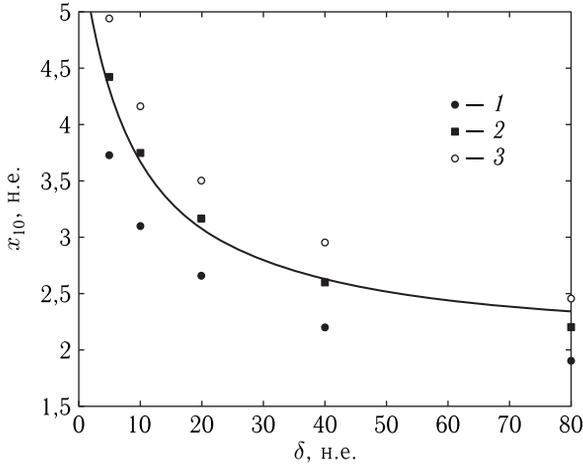


Рис. 6.11. Зависимость допустимой амплитуды колебаний первого осциллятора от величины параметра кубической нелинейности при различном уровне потенциала U_δ : 1 — 1000 н.е., 2 — 2000 н.е., 3 — 3000 н.е.

Определенной иллюстрацией для рассматриваемой ситуации является рис. 6.11, где показана зависимость допустимой амплитуды колебаний первого осциллятора от величины параметра кубической нелинейности при различном уровне потенциала U_δ . Точки построены в соответствии с кривыми на рис. 6.10 при трех фиксированных уровнях потенциала (1000, 2000 и 3000 н.е.).

Кривая построена по эмпирической формуле:

$$x_{10} = \frac{30}{\delta - 8} + 2. \quad (6.19)$$

Из рисунка можно видеть, что допустимая амплитуда колебаний при увеличении уровня потенциала уменьшается (по точкам — сверху вниз: от открытых точек, через квадраты, к сплошным точкам), что соответствует сужению потенциальной ямы на рис. 6.10. В то же время допустимая амплитуда по мере увеличения параметра δ монотонно спадает, причем, как отмечено выше, такой спад является сильно нелинейным. Приведенная в формуле (6.19) обратно пропорциональная

зависимость весьма приближенна, однако спад передает в достаточно характерной степени.

Возвращаясь к рис. 6.10, можно видеть, что обе ветви потенциала вследствие его четности стремятся к плюс бесконечности, так что колебания по амплитуде всегда остаются ограниченными. Поскольку степень потенциала по первой переменной x_1 равна четырем, а все остальные слагаемые динамического потенциала (6.11) при постоянной величине x_2 имеют по той же переменной x_1 степень не выше третьей, то этот потенциал при достаточной величине своего параметра δ перевешивает все остальные слагаемые и колебания всегда остаются конечными.

Наблюдаемый в некоторых случаях уход системы на бесконечность (открытые точки на рис. 6.11), во-первых, имеет место только при довольно малых значениях параметра δ (менее 5 н.е.) и, во-вторых, по-видимому, обусловлен сложным характером потенциальной поверхности в этом случае. То есть может иметь место преобладающая роль слагаемого со смешанной нелинейностью с параметром η , где первая переменная, хотя и имеет всего третью степень, но в динамике к ней добавляется еще вторая переменная, то есть результирующая степень становится четвертой (пусть даже при некотором нарушении синхронизма). Возникающая при этом конкуренция двух четвертых степеней x_1^4 и $x_1^3 x_2$ при малом значении параметра δ , но достаточно большой величине η , может привести к нейтрализации ограничения амплитуды, создаваемого кубической нелинейностью, что и даст уход системы на бесконечность.

Выводы по главе 6

Рассмотрен один из вариантов задачи о возбуждении нелинейных вынужденных колебания намагниченности и упругого смещения в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. Рассмотрение проведено на основе упрощенной модели системы из двух связанных осцилляторов, один из которых обладает гиромагнитными свойствами. Получена система из двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, отражающая связь между осцилляторами.

В характере связи отмечена значительная роль нелинейного члена, содержащего произведение квадрата амплитуды колебаний магнитного осциллятора на первую степень амплитуды колебаний упругого осциллятора.

Для типичных параметров задачи о возбуждении гиперзвука СВЧ-диапазона в пленке железиттриевого граната выполнена численная оценка коэффициента нелинейного слагаемого. Выявлено критическое значение постоянного поля, при котором знак коэффициента нелинейной связи изменяется на противоположный. Показано, что в реальных

экспериментах величина критического поля имеет тот же порядок, что и поле линейного ферромагнитного резонанса.

На основе полученной системы уравнений для случая, когда резонансные частоты обоих осцилляторов различаются в кратном отношении, выполнено исследование развития вынужденных колебаний во времени. Показано, что в условиях умножения частоты второго осциллятора относительно частоты первого, при определенных значениях параметров возбуждение колебаний происходит с нестационарным запаздыванием во времени. По окончании такого запаздывания происходит скачкообразный рост амплитуды колебаний на один-два порядка и более, после чего амплитуда развившихся колебаний стремится к стационарному значению.

Выявлены необходимые условия реализации такого нестационарного запаздывания. Показано, что важнейшим условием является значительное (не менее чем в несколько раз) различие времен релаксации осцилляторов, причем время запаздывания приходится на интервал между временами релаксации обоих осцилляторов.

Отмечен пороговый характер реализации запаздывания по отношению к амплитуде возбуждения и критический характер по параметру кубической нелинейности первого осциллятора.

Установлено, что принципиально важным моментом для реализации запаздывания является кратность частоты второго осциллятора относительно первого в небольшое нечетное число раз, в оптимальном случае — в три раза.

Для интерпретации эффекта запаздывания предложена гипотеза о наличии наряду с основным дополнительного минимума потенциала системы, отделенного от основного потенциальным барьером. На основании предложенной гипотезы построена модель динамического потенциала, отражающая характер колебаний первого осциллятора при условии использования амплитуды второго осциллятора в качестве параметра. В качестве главной причины появления минимума отмечено наличие нелинейной связи, пропорциональной произведению квадрата амплитуды колебаний первого осциллятора на первую степень амплитуды колебаний второго осциллятора.

Показано, что предложенная модель позволяет описать как пороговый по различным параметрам характер реализации запаздывания, так и необходимость кратного увеличения частоты второго осциллятора относительно частоты первого.

В рамках предложенной модели подробно исследован характер запаздывания в широком интервале изменения амплитуды возбуждения. Выявлено критическое значение амплитуды, превышение которого является необходимым условием реализации запаздывания. Показано, что после превышения амплитуды возбуждения критического значения по мере ее увеличения время запаздывания спадает по закону, близкому к обратной пропорциональности, одному и тому же для обоих осцилляторов. При этом амплитуда возбужденных колебаний далее

не меняется, а в полном интервале изменения амплитуды возбуждения от нуля до весьма больших величин может быть описана зависимостью типа гиперболического тангенса, перегиб которого приходится на критический уровень возбуждения.

Подробно исследована зависимость запаздывания и характера возбуждаемых колебаний от параметра кубической нелинейности первого осциллятора. Выявлена решающая роль кубической нелинейности в ограничении амплитуды возбуждаемых колебаний на постоянном уровне. Отмечен нижний критический уровень параметра кубической нелинейности, необходимый для реализации такого ограничения. Показано, что при значении параметра ниже критического запаздывание имеет место, но через некоторое время возбуждаемые колебания теряют устойчивость и система уходит на бесконечность. Обнаружен верхний критический уровень параметра кубической нелинейности, выше которого запаздывание пропадает, то есть происходит как бы его подавление. Наблюдаемые нижний и верхний критические уровни параметра кубической нелинейности интерпретированы на основе модели динамического потенциала с учетом четной (четвертой) степени потенциала кубической нелинейности.

Глава 7

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ В РЕЖИМЕ УМНОЖЕНИЯ ЧАСТОТЫ. ЧАСТЬ 2. ЛИНЕЙНАЯ СВЯЗЬ

В настоящей главе продолжено рассмотрение нелинейных вынужденных колебаний системы из двух связанных осцилляторов. В основе задачи лежит квадрированная система уравнений, полученная при рассмотрении задачи о возбуждении гиперзвука. Связь каждого уравнения с другим обеспечивается членом, пропорциональным переменной другого уравнения. Для интерпретации развития колебаний в такой системе предложена модель, представляющая собой совокупность двух динамических потенциалов. Главное внимание уделено различным режимам колебаний при изменении параметров системы и уровня возбуждения. Выявлены четыре наиболее характерных режима, соответствующие различным уровням параметра линейной связи по возрастанию: режим № 1 — двухступенчатое запаздывание; режим № 2 — плавное насыщение; режим № 3 — перемежающиеся скачки; режим № 4 — малоамплитудная релаксация. Выполнена интерпретация наблюдаемых свойств этих режимов на основе двухпотенциальной модели. Показано, что несимметричность линейной связи не приводит к формированию каких-либо новых режимов колебаний, кроме рассмотренных при симметричной связи.

Основное изложение материала в данной главе следует работе [28]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

7.1. Постановка задачи о формировании колебаний в условиях линейной связи между осцилляторами

Нелинейные нестационарные колебания намагниченности с давних пор являются предметом многочисленных исследований, частично обобщенных в [8, 9, 43, 87]. Особый интерес представляют нелинейные процессы в средах, обладающих магнитоупругими свойствами [13–16, 72, 73, 83, 88, 89]. Для описания нелинейных колебаний в таких средах в работах [17, 74] была предложена модель двух связанных осцилляторов — магнитного и упругого. Развитие такой модели, выполненное в работах [19, 20, 68, 84], позволило выявить ряд новых

нестационарных режимов колебаний, в том числе автомодуляционного и стохастического характера. В работах [21–24] были рассмотрены нестационарные магнитоупругие колебания с использованием квадратичного приближения по намагниченности, что позволило значительно упростить численные вычисления. Важным моментом в изучении рассматриваемых нестационарных явлений можно считать введение потенциала [25, 26], позволившего интерпретировать различные режимы колебаний на основе анализа трехмерной потенциальной поверхности. Некоторые дополнительные особенности возбуждения нелинейных магнитоупругих колебаний были отмечены в режимах умножения и деления частоты [85, 86].

В предыдущей главе настоящей монографии, следующей работе [27], было рассмотрено возбуждение нелинейных вынужденных колебаний намагниченности и упругого смещения на основе упрощенной модели из двух связанных осцилляторов, один из которых обладает гиромангнитными свойствами. Получена система из двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, отражающая связанный характер полной колебательной системы. Отмечена значительная роль нелинейного члена, содержащего произведение квадрата амплитуды колебаний магнитного осциллятора на первую степень амплитуды колебаний упругого осциллятора.

Показано, что в условиях умножения частоты второго осциллятора относительно частоты первого, при определенных значениях параметров возбуждение колебаний происходит с нестационарным запаздыванием во времени. По окончании такого запаздывания происходит скачкообразный рост амплитуды колебаний на один-два порядка и более.

Для интерпретации эффекта запаздывания предложена гипотеза о наличии дополнительного минимума потенциала системы, отделенного от основного потенциальным барьером. Построена модель динамического потенциала, отражающая характер колебаний первого осциллятора при использовании амплитуды второго осциллятора как параметра. Предложенная модель позволила описать пороговый характер реализации запаздывания и необходимость кратного увеличения частоты второго осциллятора относительно частоты первого.

Исследован характер запаздывания в широком интервале изменения амплитуды возбуждения. Выявлено пороговое значение амплитуды, превышение которого является необходимым условием реализации запаздывания. Исследована зависимость запаздывания и характера возбуждаемых колебаний от параметра кубической нелинейности первого осциллятора. Отмечены нижний и верхний критические уровни параметра нелинейности, в пределах между которыми запаздывание имеет место, а вне этих пределов отсутствует.

Настоящая глава посвящена продолжению этих исследований. В первую очередь уделяется внимание характеру линейной связи между осцилляторами, а также ее роли в формировании различных режимов запаздывания возбуждения нестационарных колебаний.

7.2. Геометрия задачи и уравнения движения для осцилляторов

Геометрия задачи, совпадающая с принятой в [18, 21, 23–26, 85, 86], приведена в главе 1 на рис. 1.1. Там же приведены основные уравнения с соответствующими граничными условиями (1.1)–(1.7). Ввиду подробного рассмотрения в главе 1, эти данные здесь не приводятся.

В работе [27] приведена система уравнений, отражающая в квадратичном приближении возбуждение магнитоупругих колебаний на основе модели двух связанных осцилляторов — магнитного и упругого. С точностью до обозначений эта система является частным видом приведенной здесь в главе 3 системы (3.71)–(3.72). Будучи записанной в традиционных обозначениях общей теории колебаний [55, 71], эта система имеет вид:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = A \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (7.2)$$

В этой системе x_1 и x_2 — нормированные компоненты намагниченности и упругого смещения в плоскости пластины, β_1 и β_2 — параметры затухания той и другой компонент, ω_1 и ω_2 — собственные частоты осцилляторов, γ_1 и γ_2 — константы их линейной связи, δ — параметр кубической нелинейности первого осциллятора, η — параметр нелинейной связи первого осциллятора со вторым, A и ω_0 — амплитуда и частота переменного поля.

Явный вид этих коэффициентов и их выражение через параметры материала приведено в работе [21], а также здесь в главе 3. Далее эти выражения опускаются ввиду их некоторой громоздкости, не имеющей особенной важности для настоящего рассмотрения.

Из системы (7.1)–(7.2) видно, что нелинейным является первый осциллятор (7.1), представляющий собой эквивалент магнитной подсистемы, тогда как второй осциллятор (7.2), представляющий эквивалент упругой подсистемы, остается линейным. В отсутствие связи нелинейность первого осциллятора является кубической и описывается коэффициентом δ . Между осцилляторами имеют место два вида связи: линейная, описываемая коэффициентами γ_1 и γ_2 при переменных в первой степени, и нелинейная, имеющая единственный коэффициент η при произведении квадрата первой переменной на первую степень второй. Так что в общем случае эту нелинейную связь можно считать кубической.

7.3. Динамический потенциал

Для интерпретации решения системы уравнений (7.1)–(7.2) в работе [27] был введен динамический потенциал следующего вида:

$$U = \frac{\omega_1^2}{2} \cdot x_1^2 + \gamma_1 \cdot x_1 x_2 + \frac{\delta}{4} \cdot x_1^4 + \frac{\eta}{3} \cdot x_1^3 x_2. \quad (7.3)$$

Дифференцирование этого выражения по x_1 дает потенциальную группу слагаемых уравнения (7.1). При этом переменную x_2 следует рассматривать как постоянный параметр.

Можно видеть, что записанный в таком виде потенциал является невязанным, то есть при дифференцировании по второй переменной он дает слагаемое вида $\eta x_1^3/3$, которое в уравнении (7.1) отсутствует. Независимость потенциала означает, что он не является единым для системы в целом, а представляет собой совокупность двух потенциалов, каждого для своего осциллятора, и во втором потенциале член, содержащий слагаемое с коэффициентом, подобным η , отсутствует. То есть для описания движения системы в целом следует использовать два потенциала, каждый для своего осциллятора:

$$U_1 = \frac{\omega_1^2}{2} \cdot x_1^2 + \gamma_1 \cdot x_1 x_2 + \frac{\delta}{4} \cdot x_1^4 + \frac{\eta}{3} \cdot x_1^3 x_2. \quad (7.4)$$

$$U_2 = \frac{\omega_2^2}{2} \cdot x_2^2 + \gamma_2 \cdot x_1 x_2. \quad (7.5)$$

С целью удобства терминологии далее будем называть такую модель «двухпотенциальной». При этом модель, описываемая потенциалом типа (7.3), становится «однопотенциальной».

Замечание. Независимость потенциала происходит из-за того, что система в целом представляет собой совокупность двух отдельных колебательных систем — магнитной и упругой, обладающих принципиально различными физическими свойствами. Так, магнитная система обладает гиротропией, которая у упругой системы отсутствует. Именно свойство гиротропии позволяет использовать магнитные материалы для создания невязанных устройств СВЧ-диапазона [90]. Более подробно независимость потенциала можно получить из явного вида коэффициентов, приведенных в работе [21]. Однако в рамках настоящей работы ограничимся предположением, что уравнения (7.1), (7.2) описывают рассматриваемую задачу в достаточной степени адекватно.

В первой части настоящей работы [27] показано, что собственно запаздывание возбуждения в достаточной степени можно интерпретировать на основе потенциала вида (7.3). Однако, как будет показано далее, именно двухпотенциальная модель (7.4), (7.5) более удобна для описания поведения системы после запаздывания. Относительно потенциала вида (7.3) в работе [27] отмечено, что его следует понимать в динамическом смысле. То есть величина его не остается стационарной во времени, а меняется в такт с изменением смещения

второго осциллятора x_2 . При этом входящая в (7.3) величина x_2 является параметром, сохраняющимся постоянным на тот момент времени, когда уравнение (7.1) описывает колебания первого осциллятора. То есть по отношению к первому осциллятору, в формировании его потенциала участвует как бы «мгновенное» значение переменной x_2 , постоянное в данный момент времени. В случае двухпотенциальной модели (7.4)–(7.5) поведение системы более сложное, так что необходимо учитывать возможность изменения во времени переменной x_2 , происходящего за счет воздействия на нее первым осциллятором. Такое воздействие становится тем более сильным, чем величина связи между осцилляторами больше, поэтому оптимальной областью применимости двухпотенциальной модели является именно сильная связь между осцилляторами. Более подробно этот вопрос рассматривается далее.

7.3.1. Сведение двухпотенциальной модели к однопотенциальной

Предложенная выше двухпотенциальная модель (7.4), (7.5) представляет собой совокупность двух потенциалов U_1 и U_2 , зависящих от двух переменных x_1 и x_2 . Однако, как показывает подробное рассмотрение развития колебаний во времени, вторая переменная x_2 ведет себя в основном подобно первой x_1 с тем отличием, что амплитуда ее колебаний значительно (примерно на два порядка) меньше, чем первой. Вообще говоря, отличие имеется, однако незначительное, не более 10%, так что в первом приближении им можно пренебречь. Именно такое подобие позволило в работе [27] рассмотреть потенциал вида (7.3) с единственной переменной x_1 , рассматривая вторую x_2 в качестве параметра. То есть модель в этом случае была «однопотенциальной». Однако можно свести двухпотенциальную модель к однопотенциальной в более общем виде. Так, располагая слагаемые по степеням x_2 и разделяя все на $\omega_2^2/2$, запишем выражение (7.5) в виде:

$$x_2^2 + \frac{2\gamma_2 x_1}{\omega_2^2} \cdot x_2 - \frac{2U_2}{\omega_2^2} = 0. \quad (7.6)$$

Это — квадратное уравнение относительно x_2 , разрешая которое получаем:

$$x_2 = \frac{\gamma_2 x_1}{\omega_2^2} \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2U_2 \omega_2^2}{\gamma_2^2 x_1^2}} \right). \quad (7.7)$$

Здесь перед корнем взят знак плюс исходя из условия положительности x_2 .

Подстановка полученного выражения в (7.4) дает потенциал, зависящий только от одной переменной x_1 :

$$U_1 = \left\{ \frac{\omega_1^2}{2} + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\omega_2^2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2U_2 \omega_2^2}{\gamma_2^2 x_1^2}} \right) \right\} x_1^2 + \left\{ \frac{\delta}{4} + \frac{\eta \gamma_2}{3\omega_2^2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2U_2 \omega_2^2}{\gamma_2^2 x_1^2}} \right) \right\} x_1^4. \quad (7.8)$$

Это выражение не содержит второй переменной x_2 , так что параметром здесь является второй потенциал U_2 .

Можно видеть, что первое слагаемое содержит вторую степень от x_1 , а второе — четвертую степень от x_1 . То есть полное выражение является суммой двух парабол с четными степенями.

Численная оценка при принятых в [27] значениях параметров ($\omega_1 = 5$ н.е., $\omega_2 = 15$ н.е., $\gamma_1 = \gamma_2 = 10$ н.е., $\delta = 6$ н.е., $\eta = -200$ н.е.) и переменных $x_1 = 150$ н.е., $x_2 = 4$ н.е., соответствующих режиму запаздывания при условиях возбуждения $A = 50$ н.е., $\omega = 5$, показывает, что в выражении (7.8) решающую роль играет второе слагаемое (оно больше первого на 2–3 порядка). При этом четвертая степень x_1 обеспечивает растущие вверх две ветви параболы, симметричные относительно нуля с минимумом посередине. Однако второе слагаемое в скобках, содержащее отрицательный параметр нелинейной связи $\eta = -200$ н.е., благодаря наличию x_1^2 в знаменателе, резко растет вблизи нуля и, будучи отрицательным, обеспечивает инверсию знака параболы в этой области. В результате на параболе вблизи нуля вместо минимума появляется максимум, давая два минимума по обе стороны от этого максимума. Общий вид получающейся зависимости потенциала U_1 от переменной x_1 показан на рис. 7.1. При построении кривой в качестве параметра использовалось значение потенциала $U_2 = 7800$ н.е., получаемое при подстановке принятых значений переменных в выражение (7.5).

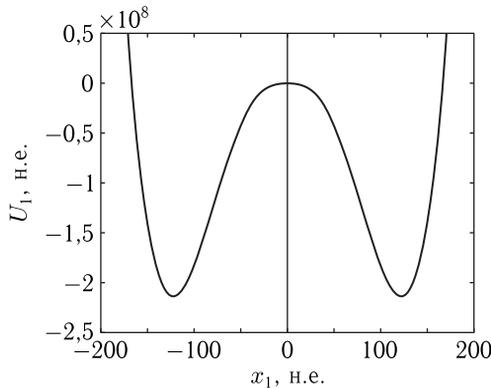


Рис. 7.1. Зависимость потенциала U_1 от первой переменной x_1 , построенная по формуле (7.8)

Можно видеть, что приведенный на этом рисунке потенциал имеет вид, весьма близкий к кривой 4 на рис. 6.3, соответствующей подобным величинам параметров. Небольшое отличие связано с конкретным выбором значений x_2 и δ .

7.4. Качественная картина колебаний в динамическом потенциале

Остановимся в двух словах на качественной картине колебаний первого осциллятора и формировании их запаздывания в условиях динамики потенциала. Итак, если бы вторая переменная менялась точно в такт с первой, то на каждый период первого колебания приходился бы такой же период второго и осцилляторы колебались бы полностью синхронно. То есть развитие колебаний после возбуждения происходило бы без задержки и определялось бы только временами релаксации осцилляторов. Однако при рассогласовании периодов колебаний того и другого осцилляторов, на один период первого осциллятора в разные моменты времени приходятся различные значения периодов второго осциллятора, то есть синхронизм нарушается. Такое рассогласование имеет место при различии собственных частот осцилляторов. Поэтому колебания со значительной амплитудой развиваться не могут. Однако при кратном соотношении частот, например в режиме умножения, синхронизм снова становится возможным, хотя и не точно на каждом такте колебаний, но через один, два или другое целое число раз. То есть снова становится возможным развитие колебаний с большой амплитудой. Однако такое развитие происходит только после того, как первичные, нарушающие синхронизм биения колебаний первого осциллятора, определяемые включением возбуждения, в достаточной степени затухнут. Если при этом колебания второго осциллятора еще сохраняют заметную амплитуду, что имеет место при превышении времени его релаксации над временем релаксации первого осциллятора, то эти колебания как раз выступают в роли параметра, обеспечивающего развитие интенсивных колебаний первого осциллятора в сформированном таким образом динамическом потенциале.

Таким образом, условиями возбуждения колебаний со значительной амплитудой по прошествии определенного времени запаздывания является целочисленная кратность собственных частот осцилляторов и превышение времени релаксации второго осциллятора над временем релаксации первого. Более подробно эти условия предполагается обсудить в отдельной работе, а сейчас остановимся на роли связи между осцилляторами в формировании их общих колебаний.

7.4.1. Общий характер развития колебаний

В процессе исследования эффекта запаздывания было установлено, что в большинстве случаев развитие колебаний во времени происходит путем не одного, а двух следующих друг за другом скачков амплитуды. При этом в процессе первого скачка амплитуда возрастает на порядок и более, а в процессе второго — еще в два-три раза. Время установления амплитуды на стационарный уровень после того и другого скачков может различаться. Между скачками колебания могут как нарастать постепенно по закону экспоненты, так и нерегулярно

меняться стохастическим образом. В некоторых случаях в установившемся режиме колебания имеют не простой синусоидальный, а двухамплитудный характер, образованный двумя синусоидами, наложенными друг на друга, причем вариации амплитуды могут достигать 20%. При достаточно сильной линейной связи развитие колебаний двумя скачками не ограничивается, а через некоторое время после второго скачка происходит плавный рост амплитуды, заканчивающийся новым стационарным уровнем, заметно (до двух-трех раз) более высоким, чем уровень между скачками. При еще более сильной связи наблюдается режим перемежающихся скачков, через некоторое время переходящий в стационарный режим со смещенным положением нуля и малой амплитудой.

Вследствие столь сложного характера колебаний, настоящая работа на данном этапе не преследовала целью изучение тонкой структуры развития колебаний во времени, поэтому из всего многообразия режимов были выделены лишь основные, которые и рассматриваются далее. Будем следить за развитием колебаний только первого осциллятора. Колебания второго осциллятора имеют сходный вид, отличаясь лишь значительно (примерно на два порядка) меньшей амплитудой, поэтому отдельно не рассматриваются.

7.5. Режимы колебаний при различных уровнях связи

Из всей совокупности различных режимов можно выделить четыре наиболее характерных, соответствующих различным уровням параметра линейной связи. Условно будем называть эти режимы «двухступенчатым запаздыванием», «плавным насыщением», «перемежающимися скачками» и «малоамплитудной релаксацией». Рассмотрим их по очереди.

7.5.1. Режим № 1. Двухступенчатое запаздывание

Развитие колебаний в этом режиме показано на рис. 7.2. Этот режим в чистом виде имеет место в интервале параметра γ от примерно 4 н.е. до 30 н.е. При больших значениях этого параметра он постепенно вытесняется режимом плавного насыщения, а при значениях параметра выше 200–300 н.е. совсем пропадает, освобождая место режиму перемежающихся скачков.

В качестве основных параметров, характеризующих развитие колебаний, были выбраны следующие:

τ_S — момент времени первого (основного) скачка, то есть собственное время запаздывания в принятом ранее смысле;

A_S — амплитуда, достигаемая непосредственно в момент первого скачка;

τ_C — момент времени второго скачка;

A_C — амплитуда стационарных колебаний, устанавливающихся сразу после второго скачка.

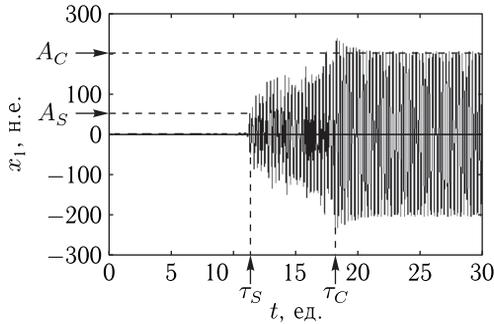


Рис. 7.2. Развитие колебаний во времени и схема определения основных характеристик процесса при значении параметра линейной связи $\gamma = 10$ н.е. Параметр кубической нелинейности $\delta = 6$ н.е., параметр нелинейной связи $\eta = -200$ н.е., амплитуда возбуждения $A = 50$ н.е. Остальные параметры указаны в тексте

Из рисунка можно видеть, что до момента времени τ_S амплитуда колебаний крайне мала (менее 1 н.е.), а в этот момент резким скачком увеличивается до величины A_S , равной 50 н.е. Затем до момента τ_C амплитуда слегка медленно растет, составляя в конце этого периода около 130 н.е. В момент τ_C происходит еще один резкий скачок амплитуды до 230 н.е., после которого она быстро приходит к стабильному уровню, ограничиваясь на высоте A_C равной 200 н.е. Таким образом, имеют место следующие друг за другом два скачка амплитуды: при временах τ_S и τ_C , где τ_C превышает τ_S почти в два раза. Однако скачок амплитуды при τ_S происходит примерно на два порядка величины, тогда как скачок при τ_C — всего не более чем в полтора раза.

Рассмотрим, как зависят параметры скачков от величины линейной связи. Обратимся к рис. 7.3, где представлены зависимости времени запаздывания первого τ_S и второго τ_C скачков амплитуды колебаний первого осциллятора от величины параметра линейной связи γ . Аппроксимирующие кривые построены по формулам:

кривая 1

$$\tau_S = \frac{60}{\gamma - 3,5} + 1,4; \quad (7.9)$$

кривая 2

$$\tau_C = \frac{120}{\gamma - 3,5} + 2,1. \quad (7.10)$$

Из рисунка можно видеть, что оба скачка имеют место только при превышении параметром связи определенного критического значения, равного 3.5 н.е. То есть в интервале $0 < \gamma < 3,5$ н.е. запаздывание возбуждения колебаний отсутствует. При переходе через это значение время запаздывания, начинаясь с довольно больших времен τ_S и τ_C порядка 80–140 н.е., постепенно спадает, составляя при $\gamma = 30$ н.е. менее 10 н.е. Время второго скачка τ_C всегда превышает время первого τ_S

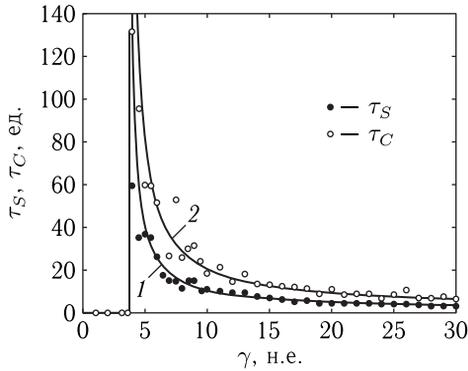


Рис. 7.3. Зависимости времени запаздывания первого τ_S и второго τ_C скачков амплитуды колебаний первого осциллятора от величины параметра линейной связи γ . 1, 2 — аппроксимирующие кривые, построенные по формулам (7.9) и (7.10)

в два-три раза, причем спад обоих времен по мере увеличения параметра связи γ происходит тем медленнее, чем этот параметр больше. В среднем обе зависимости довольно близко аппроксимируются формулами обратной пропорциональности (7.9) и (7.10). Однако в интервале изменения γ от 5 до 10 н.е. оба времени, особенно τ_C , испытывают резкие скачки, достигающие двух раз и более. Характер скачков более подробно поясняется рис. 7.4, где показаны фрагменты зависимостей, приведенных на рис. 7.3 в более крупном масштабе по горизонтальной оси.

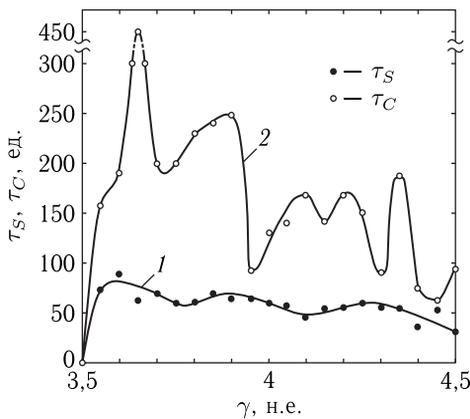


Рис. 7.4. Фрагменты зависимостей, приведенных на рис. 7.3, в более крупном масштабе. Кривые 1 и 2 проведены приближенно через точки

Из рисунка видно, что обе кривые, как и прежде, начинаются от нуля при критическом значении $\gamma = 3,50$ н.е., после чего уже при $\gamma = 3,65$ н.е. время τ_C испытывает резкий взлет вплоть до 450 н.е., а при $\gamma = 3,70$ н.е. спадает до 200 н.е. Затем эта зависимость снова растет, потом убывает и также далее испытывает значительные колебания вплоть до конца рассматриваемого интервала значений γ . Можно видеть, что аппроксимирующая кривая 2 на рис. 7.3 этих скачков не отражает. То есть реальная зависимость, в отличие от аппроксимирующей, имеет характер, близкий к фрактальному [91, 92]. В то же время зависимость τ_S от γ изрезана значительно менее. Эта зависимость также претерпевает некоторые скачки, однако можно полагать, что в среднем, особенно при $\gamma \geq 10$ н.е., определяется кривой 1 на рис. 7.3 вполне удовлетворительно.

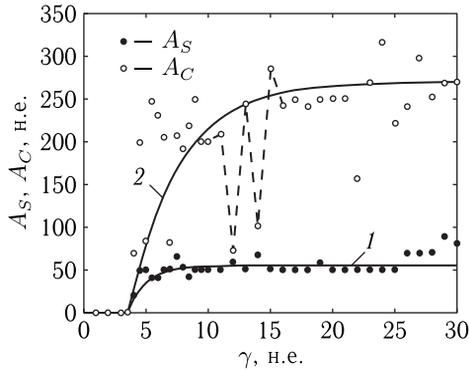


Рис. 7.5. Зависимости характеризующих скачки амплитуд A_S и A_C от величины параметра линейной связи γ . Пунктиром показаны некоторые скачки амплитуды A_C при изменении γ на малую величину. 1, 2 — аппроксимирующие кривые, построенные по формулам (7.11) и (7.12)

Обратимся теперь к рис. 7.5, где приведены зависимости амплитуд запаздывающих переменных A_S и A_C от величины параметра линейной связи. Аппроксимирующие кривые построены по формулам:

кривая 1

$$A_S = 55 - 125 \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{1,5} + 1,5\right); \quad (7.11)$$

кривая 2

$$A_C = 270 - 15 \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{4,0} + 3,8\right), \quad (7.12)$$

где структура обеих формул соответствует зависимости типа «единица минус экспонента с отрицательным показателем».

Из рисунка можно видеть, что и здесь обе зависимости испытывают скачки, особенно сильно выраженные для амплитуды A_C . Некоторые из таких скачков показаны пунктиром. Следует заметить, что здесь,

в отличие от зависимостей для времени запаздывания, скачки имеют место во всем интервале изменения параметра γ . Как и в предыдущем случае, скачки амплитуды A_S значительно меньше, чем амплитуды A_C , однако и здесь они наблюдаются вплоть до конца интервала по γ . Таким образом, можно полагать, что аппроксимирующие кривые 1 и 2, хотя и проходят через области максимального сгущения точек, но все же отражают реальные зависимости только в среднем.

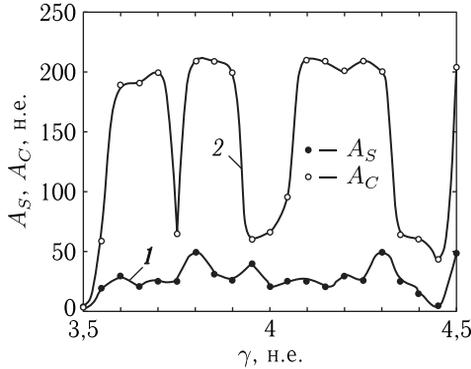


Рис. 7.6. Фрагменты зависимостей, приведенных на рис. 7.5 в более крупном масштабе. Кривые 1 и 2 проведены приближенно через точки

Дополнительной иллюстрацией характера скачков является рис. 7.6, где приведены фрагменты тех же зависимостей, что и на рис. 7.5, но в более крупном масштабе по горизонтальной оси.

Можно видеть, что здесь, как и в случае времен τ_S и τ_C (рис. 7.4), зависимость для амплитуды A_C изрезана значительно сильнее, чем для амплитуды A_S . Видимо, и здесь можно говорить о фрактальном характере приведенных зависимостей.

Довольно красочной иллюстрацией к сказанному, по-видимому, может служить рис. 7.7, где показано развитие колебаний первого осциллятора во времени при различных значениях константы линейной связи γ , отличающихся на весьма малую величину — всего 0,1 н.е., то есть около 2,5% от средней величины, равной 4,0 н.е.

Можно видеть, что при таком незначительном изменении γ (сверху вниз по рисунку) время первого скачка меняется мало: от 60 н.е. до 64 н.е., тогда как время второго скачка меняется очень сильно: от 250 н.е., через 130 н.е. до 170 н.е. При этом амплитуда колебаний между скачками также меняется незначительно, тогда как установившаяся амплитуда после второго скачка меняется от 200 н.е. через 66 н.е. снова на 200 н.е.

Замечание. Примечательным моментом является тот факт, что во всех приведенных на рис. 7.7 случаях колебания между первым и вторым скачками являются сильно нерегулярными, то есть имеют

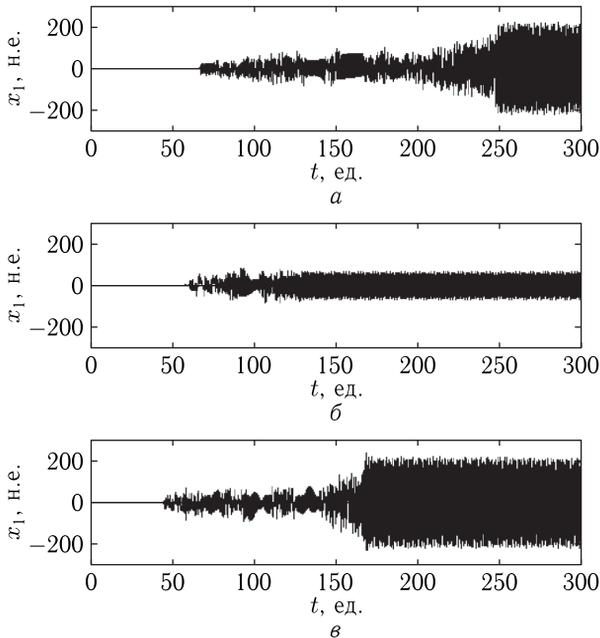


Рис. 7.7. Развитие колебаний первого осциллятора во времени при различных значениях константы линейной связи γ : a — 3,9 н.е.; b — 4,0 н.е.; v — 4,1 н.е. Остальные параметры совпадают с принятыми на предыдущих рисунках

близкий к шумовому стохастический характер. Здесь этот вопрос далее не рассматривается, однако можно полагать, что его изучение, особенно в сочетании с фрактальным характером приведенных кривых, представляет интерес для отдельной работы.

7.5.2. Режим № 2. Плавное насыщение

Развитие колебаний в этом режиме показано на рис. 7.8. Этот режим в чистом виде имеет место в интервале параметра γ от примерно 30 н.е. до 200–300 н.е. При больших значениях этого параметра режим плавного насыщения сменяется режимом перемежающихся скачков.

В качестве основных параметров, характеризующих развитие колебаний, к введенным ранее временам τ_S , τ_C и амплитудам A_S , A_C , были добавлены следующие:

τ_D — время выхода колебаний на стационарный уровень в случае плавного роста после второго скачка;

A_D — амплитуда колебаний, устанавливающихся после второго скачка по окончании процесса плавного роста.

Из рисунка можно видеть, что до момента времени τ_C и даже несколько далее, примерно до 7 ед. времени, колебания ведут себя полностью подобно рассмотренным на рис. 7.2, то есть имеет место режим

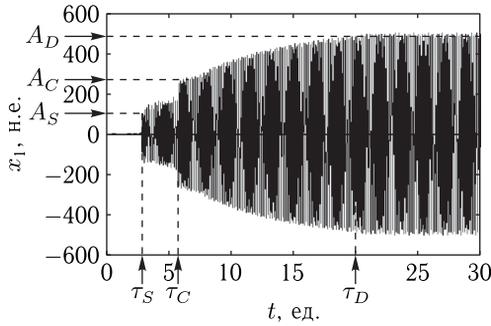


Рис. 7.8. Развитие колебаний во времени и схема определения основных характеристик процесса при значении параметра линейной связи $\gamma = 50$ н.е. Параметр кубической нелинейности $\delta = 6$ н.е., параметр нелинейной связи $\eta = -200$ н.е., амплитуда возбуждения $A = 50$ н.е. Остальные параметры указаны в тексте

двухступенчатого запаздывания. Однако по прошествии этого времени амплитуда колебаний после второго скачка не остается постоянной, а начинает плавно расти по закону, близкому к экспоненциальному (то есть единица минус экспонента с отрицательным показателем). Такой рост заканчивается выходом на насыщение при времени τ_D , после чего амплитуда более не меняется. Можно видеть, что время выхода на насыщение τ_D превышает время второго скачка τ_S примерно в три раза, а установившаяся при этом амплитуда A_D превышает начальную A_S в два раза. То есть обе характеристики, как временная, так и амплитудная, меняются в несколько раз, что и явилось причиной выделения такого развития колебаний в отдельный режим.

Рассмотрим, как зависят параметры этого режима от величины линейной связи. Обратимся к рис. 7.9, где представлены зависимости времени запаздывания первого скачка τ_S и времени установления второй стационарной амплитуды τ_D от величины параметра линейной связи γ . Аппроксимирующие кривые построены по формулам:

кривая 1

$$\tau_S = \frac{80}{\gamma - 3,5}; \quad (7.13)$$

кривая 2

$$\tau_D = \frac{1100}{\gamma - 4,2} - 4,0. \quad (7.14)$$

Из рисунка можно видеть, что плавное насыщение имеет место только при превышении параметром связи определенного критического значения, близкого к 30 н.е. То есть ниже этого значения амплитуда после второго скачка остается постоянной и плавное насыщение отсутствует. Время второго установления амплитуды τ_D всегда превышает время второго скачка τ_S примерно на порядок. Аппроксимирующие функции для обоих времен (7.13) и (7.14) носят характер обратной

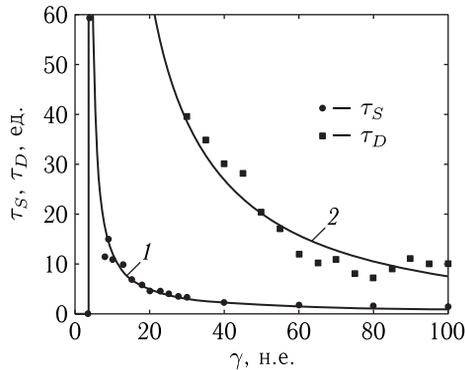


Рис. 7.9. Зависимости времени запаздывания первого скачка τ_S и времени установления второй стационарной амплитуды τ_D первого осциллятора от величины параметра линейной связи γ . 1, 2 — аппроксимирующие кривые, построенные по формулам (7.13) и (7.14)

пропорциональности. При значении параметра связи менее 15 н.е. зависимость времени τ_S от γ имеет скачки, подробно обсужденные при описании предыдущего режима, однако далее вплоть до значения $\gamma = 100$ н.е. эти скачки почти отсутствуют. Зависимость времени τ_D от γ в некоторых местах (например, при 45, 65, 89 и 90 н.е.) несколько (до 30%) отклоняется от аппроксимирующей кривой 2, однако эти скачки резкими не являются и фрактального характера не носят. Таким образом, можно полагать, что в целом зависимость τ_D от γ ведет себя гораздо «спокойнее», чем подобная зависимость для τ_S .

Обратимся теперь к рис. 7.10, где приведены зависимости установившейся амплитуды первого скачка A_C и установившейся второй стационарной амплитуды A_D от величины параметра линейной связи γ . Аппроксимирующие кривые построены по формулам:

кривая 1

$$A_C = 280 - 15 \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{4,0} + 4,3\right); \quad (7.15)$$

кривая 2

$$A_D = 500 - 15 \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{4,0} + 10,0\right), \quad (7.16)$$

где структура обеих формул соответствует зависимости типа «единица минус экспонента с отрицательным показателем».

Из рисунка можно видеть, что зависимость A_C от γ при $\gamma < 30$ н.е. претерпевает многочисленные скачки, подробно рассмотренные выше, однако по превышении γ этого значения скачки значительно спадают и вплоть до $\gamma \approx 30$ н.е. составляют менее 10%. Зависимость A_D от γ , исходя из нуля при $\gamma \approx 30$ н.е., стремится вверх достаточно плавно, а начиная с $\gamma = 45$ н.е. выходит на постоянный уровень, равный

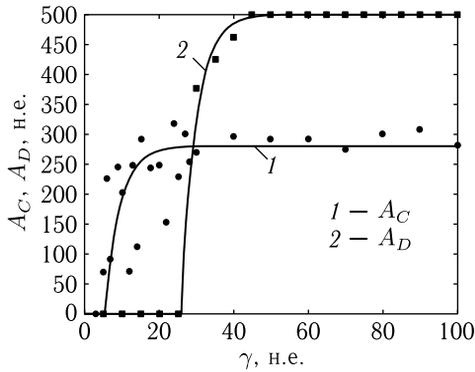


Рис. 7.10. Зависимости установившейся амплитуды первого скачка A_C и установившейся второй стационарной амплитуды A_D от величины параметра линейной связи γ : 1, 2 — аппроксимирующие кривые, построенные по формулам (7.15) и (7.16)

500 н.е. и далее совершенно не меняется. Таким образом, и здесь вторая стационарная амплитуда A_D ведет себя значительно «спокойнее», чем амплитуда первого скачка A_C .

7.5.3. Режим № 3. Перемежающиеся скачки

Развитие колебаний в этом режиме показано на рис. 7.11. Этот режим в чистом виде имеет место в интервале параметра γ более 200–300 н.е. Иллюстрацией развития колебаний в этом режиме является рис. 7.11, соответствующий $\gamma = 300$ н.е.

В качестве параметров, характерных для этого режима, можно отметить следующие: τ_P — время окончания режима перемежающихся

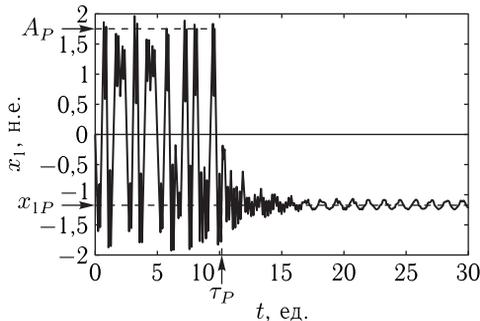


Рис. 7.11. Развитие колебаний во времени и схема определения основных характеристик процесса при значении параметра линейной связи $\gamma = 300$ н.е. Параметр кубической нелинейности $\delta = 6$ н.е., параметр нелинейной связи $\eta = 200$ н.е., амплитуда возбуждения $A = 50$ н.е. Остальные параметры приведены в тексте

скачков; A_P — амплитуда перемежающихся скачков; x_{1P} — значение переменной x_1 , соответствующее нулевой линии колебаний, устанавливающихся после окончания перемежающихся скачков.

Из рассмотрения рисунка можно видеть, что характерным свойством этого режима можно считать резкое уменьшение амплитуды колебаний по сравнению с предыдущими режимами. Из сравнения этого рисунка с рис. 7.2 и рис. 7.8 можно видеть, что такое падение амплитуды происходит примерно на три порядка. Другим характерным свойством режима, резко отличающим его от других, является сдвиг равновесного положения колебаний с нуля на значение $x_{1R} = -1,2$ н.е., вокруг которого колебания происходят далее с весьма малой амплитудой — около 0.1 н.е. Следует отметить, что подобное же изменение равновесного положения происходит и для другого осциллятора. Так в условиях, соответствующих рис. 7.11, после прекращения скачков колебания малой амплитуды происходят вокруг положения $x_{1R} = -1,1$ н.е.

При изменении γ в пределах от 200 н.е. до 800 н.е. заметные вариации времени τ_P не наблюдались. Это время всегда оставалось в интервале от 7 до 12 н.е. Также амплитуда перемежающихся скачков A_P менялась мало — от 1,5 до 2,0 н.е. Более подробное описание режима перемежающихся скачков требует отдельного исследования. Приведем лишь наиболее заметные его свойства.

Прежде всего следует отметить, что по мере увеличения γ режим плавного насыщения несколько трансформируется. Так, после $\gamma = 100$ н.е. амплитуда насыщения A_D с величины 500 н.е. начинает плавно увеличиваться и при $\gamma = 200$ н.е. составляет уже 900 н.е. Затем рост амплитуды ускоряется и при $\gamma = 212$ н.е. она достигает 1100 н.е. Однако уже при $\gamma = 213$ н.е. амплитуда резко падает на три порядка до значения 1,5 н.е., что сопровождается сдвигом равновесного положения переменной x_1 с нуля на значение $x_{1R} = -0,9$ н.е. То есть наступает режим перемежающихся скачков. Скачки заканчиваются при времени $\tau_P = 10$ ед., а дальнейшие колебания происходят вокруг нового положения равновесия с амплитудой около 0,1 н.е. При $\gamma = 213$ н.е. наблюдается всего один скачок, а по мере увеличения γ число скачков увеличивается и при $\gamma = 300$ н.е. достигает восьми, как это видно из рис. 7.11. Возбуждение режима перемежающихся скачков по γ не является необратимым. Так, при $\gamma = 214$ н.е. система снова возвращается к режиму плавного насыщения с величиной A_D равной 1500 н.е. Однако уже при $\gamma = 215$ н.е. колебания снова происходят в режиме перемежающихся скачков с амплитудой около 0,8 н.е. и сдвигом равновесного положения до $-0,9$ н.е. Если пренебречь таким возвращением, то можно считать, что режим перемежающихся скачков по γ имеет резкий пороговый характер — между 213 и 215 н.е., или в среднем при $\gamma = 214$ н.е. Следует отметить, что в этом режиме равновесное положение второго осциллятора также смещается и при $\gamma = 225$ н.е. составляет около $x_{2R} = 1,0$ н.е.

7.5.4. Режим № 4. Малоамплитудная релаксация

Дальнейшее увеличение параметра связи при величине около 800 н.е. приводит к срыву режима перемежающихся скачков и переходу к новому режиму, который можно условно назвать «режимом малоамплитудной релаксации». При этом колебания как первого, так и второго осцилляторов происходят так, как если бы они возбуждались не непрерывным переменным сигналом, а ударным образом в начальный момент времени включения возбуждения. То есть те и другие колебания спадают со своими временами релаксации, для осциллятора x_1 равного 2,2 ед. времени, а для осциллятора x_2 — 22 ед. времени. По прошествии процесса релаксации те и другие колебания затухают не полностью, а продолжают непрерывно с малой амплитудой (менее 0,1 н.е.).

Замечание. В режиме релаксации, как и в режиме перемежающихся скачков, колебания обоих осцилляторов происходят с весьма малой амплитудой, на два-три порядка меньшей, чем в предшествующих им по силе связи режимах. Настоящая работа посвящена в первую очередь режимам с высокой амплитудой колебаний. Поэтому здесь эти режимы подробно не исследовались. В дальнейшем их изучению предполагается посвятить отдельную работу.

7.6. Интерпретация развития колебаний на основе модели динамического потенциала

Рассмотрим интерпретацию описанных выше режимов колебаний на основе модели динамического потенциала. Прежде всего отметим, что первичный скачок амплитуды, то есть собственно запаздывание развития колебаний, уже объяснен в первой части настоящей работы [27] и здесь дополнительной интерпретации не требует. Что касается второго скачка, то он, во-первых, выражен значительно (на два порядка) слабее первого и, во-вторых, проявляется не всегда и часто стохастическим образом, поэтому на данном этапе подробно рассматривать его не будем. В то же время смена режима плавного насыщения режимом перемежающихся скачков происходит пороговым образом и весьма резко: амплитуда падает более чем на два порядка и центральное положение колебаний с нуля резко смещается в сторону. Поэтому основное внимание уделим этим двум моментам: смещению центрального положения колебаний и падению их амплитуды.

7.6.1. Смещение центрального положения

Согласно общим правилам физики колебаний, любые периодические движения происходят вокруг определенного среднего положения. По завершению процесса релаксации система приходит как раз в это среднее положение и остается в нем бесконечно долго, так что его можно назвать стационарным или равновесным состоянием. В рассмотренных

в предыдущих разделах режимах колебаний таких состояний можно насчитать два. В процессе двухступенчатого запаздывания и плавного насыщения такому состоянию соответствует нулевое значение той или иной переменной. В режиме перемежающихся скачков сначала колебания, то есть собственно скачки, происходят также вокруг нуля, но затем, по окончании первичных скачков, система продолжает с небольшой амплитудой колебаться вокруг нового центра, от нуля значительно смещенного.

Для интерпретации смещения центра колебаний воспользуемся моделью двух потенциалов (7.4)–(7.5). Будем считать, что колебания происходят вокруг стационарного состояния, которое соответствует одновременному минимуму обоих потенциалов (7.4) и (7.5), то есть равенству нулю их производных:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \omega_1^2 x_1 + \gamma_1 x_2 + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (7.17)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x_2} = \omega_2^2 x_2 + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (7.18)$$

Выражая из второго равенства x_2 через x_1 и подставляя в первое, получаем

$$x_1 \cdot \left\{ \left(\omega_1^2 - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\omega_2^2} \right) + \left(\delta - \frac{\eta \gamma_2}{\omega_2^2} \right) \cdot x_1^2 \right\} = 0. \quad (7.19)$$

Это уравнение определяет два возможных положения минимума:

$$1) \quad x_1 = 0; \quad (7.20)$$

$$2) \quad x_1 = \sqrt{\frac{\gamma_1 \gamma_2 - \omega_1^2 \omega_2^2}{\delta \omega_2^2 + |\eta| \cdot \gamma_2}}. \quad (7.21)$$

Действительность переменной x_1 требует положительности подкоренного выражения в (7.21). Положим для простоты $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ и рассмотрим вспомогательную функцию:

$$G(\gamma) = \frac{\gamma^2 - \omega_1^2 \omega_2^2}{\delta \omega_2^2 + |\eta| \cdot \gamma}. \quad (7.22)$$

Зависимость этой функции от γ при принятых ранее значениях параметров, показана на рис. 7.12.

Зависимость, построенная точно по формуле (7.22), соответствует кривой 1 (показана утолщенной линией). Можно видеть, что при $\gamma < 53$ н.е. эта кривая проходит ниже нулевой линии. То есть в этом случае минимум потенциала соответствует решению (7.20), при котором равновесное положение равно нулю. При $\gamma > 53$ н.е. кривая 1 проходит выше нулевой линии, то есть минимум потенциала соответствует решению (7.21), так что равновесное положение относительно нуля смещено на величину, равную $\sqrt{G(\gamma)}$. При $\gamma = 300$ н.е. такое смещение составляет примерно 1,2 н.е., что с точностью до знака

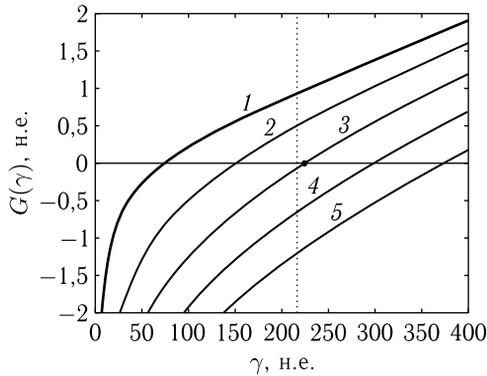


Рис. 7.12. Зависимость функции G от γ при различных значениях коэффициента K_S : 1 — 1 н.е.; 2 — 2 н.е.; 3 — 3 н.е.; 4 — 4 н.е.; 5 — 5 н.е. Вертикальная точечная линия соответствует критическому значению γ , при котором наступит смещение равновесного положения в соответствии с рис. 7.11. Параметры: $\omega_1 = 5$ н.е., $\omega_2 = 15$ н.е., $\delta = 6$ н.е., $\eta = -200$ н.е.

довольно близко соответствует значению $x_{1P} = -1,1$ н.е., приведенному на рис. 7.11. Заметим, что знак здесь роли не играет, ибо корень в формуле (7.21) может иметь оба знака (то есть его подстановка в (7.19) равенства не меняет).

С другой стороны, минимальное значение $\gamma = 53$ н.е., при котором происходит смещение положения равновесия, по сравнению с ситуацией, соответствующей рис. 7.11, заметно занижено. Так там критическое значение равно $\gamma = 214$ н.е., что значение $\gamma = 53$ н.е. значительно превышает.

Можно предполагать, что такая ситуация обусловлена близким к стохастическому характером колебаний, особенно заметным в режиме перемежающихся скачков. То есть период возбуждающей силы приходится не на три периода колебаний второго осциллятора, а на какое-то дробное их количество, от периода к периоду изменяющееся. Можно полагать, что такое нестационарное соответствие этих периодов эквивалентно повышению частоты второго осциллятора, так как далеко не все попадания возбуждения на его колебания будут «удачными». Для того чтобы учесть такое рассогласование, можно феноменологически ввести вспомогательный безразмерный «коэффициент синхронизации» K_S , на который следует умножить частоту второго осциллятора. То есть когда этот коэффициент равен единице, то синхронизация достаточно полная, а когда он больше единицы, то эффективная частота второго осциллятора $\omega_{2e} = \omega_2 \cdot K_S$ увеличивается и синхронизация нарушается. То есть формула (7.22) принимает вид:

$$G(\gamma) = \frac{\gamma^2 - \omega_1^2(\omega_2 \cdot K_S)^2}{\delta(\omega_2 \cdot K_S)^2 + |\eta| \cdot \gamma}. \quad (7.23)$$

Зависимости функции G от γ при небольших целочисленных значениях коэффициента синхронизации K_S показаны на рис. 7.12 кривыми 2–5. Можно видеть, что критическому значению $\gamma = 214$ н.е. наиболее близко соответствует кривая 3, для которой $K_S = 3$ (пересечение этой кривой с нулевой линией показано укрупненной точкой). Для кривой 3 однако величина смещения равновесного положения по сравнению с кривой 1 несколько уменьшается. Так здесь оно равно около 0,7 н.е., что впрочем, учитывая сложность явления, не так уж сильно отличается от значения $x_{1P} = -1,1$ н.е., приведенного на рис. 7.11.

Таким образом, можно полагать, что совокупная минимизация обоих потенциалов двухпотенциальной модели в сочетании с введением коэффициента синхронизации описывает наблюдаемые свойства режима перемежающихся скачков (порог возбуждения и смещение равновесия) довольно удовлетворительно.

7.6.2. Падение амплитуды колебаний

Рассмотрим теперь другую особенность режима перемежающихся скачков, а именно резкое (более чем на два порядка) падение амплитуды колебаний по сравнению с режимом плавного насыщения.

Исходя из модели потенциала можно полагать, что колебания с малой амплитудой происходят в окрестности какого-то минимума потенциала, не выходя за пределы этой окрестности по причине окружения ее двумя потенциальными барьерами. В этом плане возникают две задачи: найти такой достаточно узкий локализованный минимум потенциала и объяснить, почему колебания происходят именно в его пределах, не выходя за окружающие его потенциальные барьеры.

Прежде всего отметим, что рассматриваемые колебания соответствуют режиму перемежающихся скачков, который имеет место только при достаточно большой величине связи.

Будем исходить из однопотенциальной модели (7.3). Рассмотрим сначала изменение переменной x_1 в широких пределах, соответствующих колебаниям с большой амплитудой (то есть режимам № 1 и № 2). Для этого случая зависимости потенциала U_1 от первой переменной x_1 при различных значениях параметра линейной связи γ показаны на рис. 7.13. Кривые 2 и 3 смещены вверх для удобства рисунка: в отсутствие такого смещения они точно ложатся друг на друга.

Из рисунка можно видеть, что вид кривых в исследованном интервале изменения γ от величины параметра связи не зависит. Все кривые имеют минимум вблизи $x_1 = 160$ н.е., а минимума, соответствующего малой амплитуде, не заметно. Контрольная проверка показывает, что вид кривых искажается только начиная с величины γ порядка 10^4 н.е. При этом глубина минимума в правой части рисунка уменьшается, а слева кривые слегка опускаются вниз. При $\gamma \sim 10^6$ н.е. минимум из правой части рисунка переходит на левую, так что кривая как бы отражается в вертикальной оси. Однако, как отмечено в предыдущих разделах, столь высокие значения параметра связи выходят за пределы

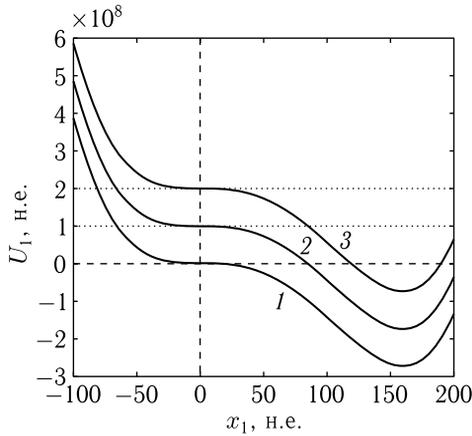


Рис. 7.13. Зависимость потенциала U_1 от первой переменной x_1 при различных значениях параметра связи γ : 1 — 10 н.е., 2 — 50 н.е., 3 — 300 н.е. Остальные параметры — те же, что на предыдущих рисунках. Чтобы избежать наложения кривых друг на друга, кривые 2 и 3 смещены вверх на $1 \cdot 10^8$ и $2 \cdot 10^8$ н.е. соответственно

существования режима перемежающихся скачков и приводят к режиму малоамплитудной релаксации, в настоящей работе не рассматриваемому.

Таким образом, применение модели потенциала в данном случае малоамплитудного режима не объясняет.

Заметим, однако, что область малых амплитуд на рис. 7.13 выражена недостаточно ясно из-за слишком мелкого масштаба. Поэтому обратимся к рис. 7.14, где область тех же кривых вблизи нуля показана в крупном масштабе.

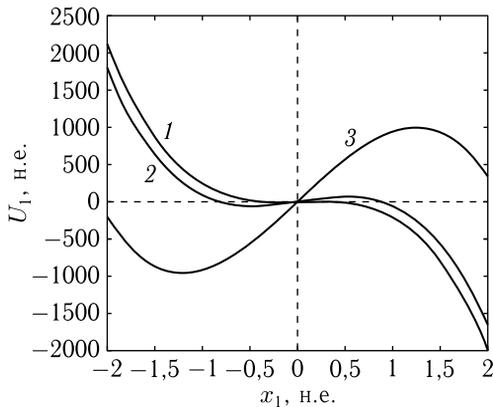


Рис. 7.14. Те же кривые, что на рис. 7.13 в крупном масштабе вблизи нуля

Из этого рисунка видно, что при достаточно большой величине параметра связи на потенциальной кривой имеется дополнительный минимум, для $\gamma = 300$ н.е. (кривая 3), соответствующий $x_1 = -1,2$ н.е. Из сравнения с рис. 7.11 можно видеть, что этот минимум как раз приходится на смещенное положение центра колебаний в установившемся режиме перемежающихся скачков. То есть можно полагать, что именно такой минимум обеспечивает колебания малой амплитуды. Из рисунка видно также, что такой локальный минимум отделен справа от минимума при $x_1 = 160$ н.е. (рис. 7.13) барьером при $x_1 = 1,5$ н.е. Можно полагать, что при достаточной величине возбуждения этот барьер может быть пройден, и колебания перейдут на минимум при $x_1 = 160$ н.е. с соответствующим увеличением амплитуды.

Контрольная проверка показала, что такое изменение режима действительно имеет место. Рис. 7.11 построен при $A = 50$ н.е., а уже при увеличении амплитуды возбуждения до 160 н.е. режим перемежающихся скачков сменяется режимом плавного насыщения с запаздыванием $\tau_S = 24$ ед. времени и установившейся амплитудой $A_D = 1900$ н.е.

К такой же смене режима приводит изменение начального положения осциллятора. Так, рис. 7.11 построен при нулевом начальном смещении обоих осцилляторов. Но при начальном смещении только первого осциллятора на величину $x_1 = 3$ н.е. (то есть по рис. 7.14 на правом склоне барьера несколько ниже самой глубокой точки минимума при $x_1 = -1,2$ н.е.) и той же амплитуде возбуждения $A = 50$ н.е. режим перемежающихся скачков сменяется режимом плавного насыщения с запаздыванием τ_S ед. времени и установившейся амплитудой $A_D = 1900$ н.е. Заметим попутно, что здесь не только амплитуда резко увеличилась, но и время запаздывания значительно уменьшилось, что также может составить предмет исследования.

Таким образом, можно считать, что колебания с малой амплитудой обусловлены наличием дополнительного минимума потенциала вблизи нулевого значения переменной первого осциллятора, отделенного от главного минимума потенциальным барьером, а увеличение амплитуды возбуждения или достаточное начальное смещение осциллятора, приводят к переходу колебаний к режиму с большой амплитудой.

7.7. Несимметричная связь между осцилляторами

В предыдущих разделах рассматривались различные свойства колебаний связанных осцилляторов в условиях симметричной связи, то есть когда оба параметра связи того и другого осцилляторов между собой были равны: $\gamma_1 = \gamma_2$. Рассмотрим теперь некоторые особенности, накладываемые несимметричностью связи, то есть неравенством этих параметров: $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

Прежде всего отметим, что при любом соотношении параметров связи между собой каких либо новых режимов, существенно отличных

от описанных выше, обнаружено не было. В некоторых случаях кроме двух скачков наблюдался еще третий и даже иногда четвертый, однако все они были выражены по сравнению с первым так же слабо, если не слабее, как и второй. Во всех случаях амплитуда последующего скачка превышала амплитуду предыдущего, но не более чем на 20%. При очень больших параметрах связи (порядка 600 н.е.) время запаздывания было настолько мало, что скачки даже не были ярко выражены, а сразу после небольшого запаздывания (до 4 ед. времени) наблюдался рост амплитуды колебаний с довольно быстрым насыщением на уровне порядка 2000 н.е. Таким образом, в подавляющем большинстве случаев наблюдались те же четыре режима, что и при равенстве параметров связи, с незначительными вариациями.

Было исследовано изменение как того, так и другого параметров связи в интервале от 10 н.е. до 1000 н.е. В основном, особенно при величине параметров до 300 н.е., в формировании характера режима наблюдалось преобладание второго параметра связи γ_2 . Так, при изменении первого параметра связи γ_1 от 10 н.е. до 300 н.е. и задании второго параметра γ_2 неизменным, равным 10 н.е., всегда наблюдался режим № 1 — двухступенчатое запаздывание, причем второй скачок был выражен сравнительно слабо (не более чем на 10% выше первого). Время запаздывания τ_S составляло от 17 до 10 ед. времени и с увеличением первого параметра связи γ_1 слегка уменьшалось.

При задании второго параметра связи γ_2 равным 30 н.е. и изменении первого γ_1 от 10 до 300 н.е. всегда наблюдался также режим № 1, причем второй скачок был выражен значительно ярче, чем в предыдущем случае. Так, его амплитуда могла превышать амплитуду первого скачка в два и даже в три раза. Время запаздывания первого скачка τ_S составляло от 2 до 4 ед. времени, а второго τ_C менялось хаотическим образом от 4 до 28 ед. времени.

При задании второго параметра связи γ_2 равным 60 н.е. и изменении первого γ_1 от 10 до 300 н.е. наблюдался также режим № 1, который после двух скачков переходил в режим № 2 — плавного насыщения. Время первого запаздывания τ_S составляло от 2 до 3 ед. времени, второго τ_C — от 3 до 17 ед. времени, а время полного насыщения τ_D менялось от 10 до 30 ед. времени. Амплитуда в режиме насыщения A_D достигала от 1000 до 2000 н.е.

Довольно критичным к соотношению параметров связи оказался режим № 3 — перемежающихся скачков. Наиболее оптимальными условиями для его возбуждения было равенство обеих параметров, то есть $\gamma_1 = \gamma_2$, тогда как при отклонении от такого равенства более чем на 20% этот режим заменялся режимом № 2 с довольно быстро (при τ_D порядка 10 н.е.) устанавливающимся насыщением. Так, при $\gamma_1 = \gamma_2 = 300$ н.е. и $\gamma_1 = \gamma_2 = 400$ н.е. наблюдались перемежающиеся скачки, а при $\gamma_1 = 300$ и $\gamma_2 = 400$ н.е. или $\gamma_1 = 400$ и $\gamma_2 = 300$ н.е. уже имело место только плавное насыщение с высокой амплитудой (до 2000 н.е.).

Для возбуждения режима №4 — малоамплитудной релаксации, решающая роль второго параметра связи уже отсутствовала, так что он наблюдался с примерно одинаковыми свойствами как при $\gamma_1 = 400$ и $\gamma_2 = 1000$ н.е., так и при $\gamma_1 = 1000$ и $\gamma_2 = 400$ н.е.

Выводы по главе 7

Продолжено рассмотрение задачи о возбуждении вынужденных нелинейных колебаний намагниченности и упругого смещения в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. В основу рассмотрения положена модель двух связанных осцилляторов — магнитного и упругого, первый из которых обладает нелинейными свойствами, а второй остается линейным.

На основе квадратичного приближения для осцилляторов записана система из двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка. При этом первое уравнение обладает кубической нелинейностью, тогда как второе остается линейным. Нелинейная связь в такой системе обеспечивается членом, пропорциональным произведению квадрата первой переменной на вторую, присутствующим только в первом уравнении. Линейная связь в каждом из уравнений обеспечивается членом, пропорциональным переменной другого уравнения, причем параметры такой связи в обоих уравнениях могут различаться.

Для интерпретации развития во времени колебаний в такой системе предложена модель динамического потенциала. В отличие от первой части настоящей работы, где рассмотрение проведено на основе единственного потенциала, здесь введена двухпотенциальная модель, представляющая собой совокупность двух потенциалов, по одному для каждого осциллятора. Отмечена невзаимность двухпотенциальной модели, обусловленная сочетанием в полной колебательной системе линейного и нелинейного осцилляторов.

Показана возможность сведения двухпотенциальной модели к однопотенциальной на основе представления потенциала второго осциллятора в качестве параметра для потенциала первого. Показано, что такой потенциал имеет вид биквадратичной параболы в сочетании с обратной пропорциональностью первой переменной, что обеспечивает в нуле инверсию параболы с формированием двух симметричных минимумов.

Рассмотрена качественная картина развития колебаний в двухпотенциальной системе, имеющих место после включения возбуждения. Отмечен динамический характер связи и требование соблюдения синхронизма колебаний того и другого осцилляторов. Показано, что сочетание механизма синхронизации с процессом релаксации первого осциллятора может приводить к запаздыванию возбуждения интенсивных колебаний относительно момента включения возбуждения.

Рассмотрен процесс развития колебаний во времени в случае симметричной линейной связи между осцилляторами, то есть при ра-

венстве ее обоих параметров друг другу. Выявлены четыре наиболее характерных режима, соответствующих различным уровням параметра линейной связи по возрастанию: режим № 1 — двухступенчатое запаздывание; режим № 2 — плавное насыщение; режим № 3 — перемежающиеся скачки; режим № 4 — малоамплитудная релаксация.

Отмечено, что в режиме № 1 развитие колебаний после первичного запаздывания происходит путем двух следующих друг за другом резких возрастных амплитуды. Показано, что время запаздывания того и другого скачков амплитуды с увеличением связи уменьшается по закону обратной пропорциональности. При этом величина того и другого скачков сначала резко возрастает, после чего насыщается в соответствии с зависимостью типа «единица минус экспонента с отрицательным показателем». Как временные, так и амплитудные характеристики скачков, главным образом второго, по мере изменения связи, особенно при небольшой ее величине, испытывают резкие колебания, в результате чего зависимости этих характеристик от величины связи приобретают фракталоподобный характер.

Отмечено, что в режиме № 2 развитие колебаний после первичного двухступенчатого запаздывания происходит путем плавного увеличения амплитуды с выходом на стационарный уровень. Показано, что время такого выхода значительно превышает время второго скачка, причем также зависит от величины линейной связи по закону обратной пропорциональности. При этом установление амплитуды во времени также соответствует зависимости типа «единица минус экспонента с отрицательным показателем».

Отмечено, что режим № 3 характеризуется двумя свойствами: амплитуда перемежающихся скачков более чем на два порядка меньше амплитуды установившихся колебаний в режиме № 2, а после окончания скачков колебания с малой амплитудой происходят вокруг нового положения равновесия, заметно смещенного относительно начального.

Интерпретации обоих этих свойств выполнена на основе модели динамического потенциала. Показано, что минимизация двухпотенциальной модели приводит к выявлению двух равновесных положений, различающихся резким порогом по величине параметра линейной связи. Так, при величине связи ниже пороговой равновесие системы достигается в нуле по переменной первого осциллятора, а при величине связи выше пороговой положение равновесия смещается от нуля в сторону отрицательного или положительного значения первой переменной. Малое значение амплитуды колебаний после окончания скачков объяснено появлением дополнительного минимума потенциала, имеющего место при достаточно высокой величине линейной связи. Такой минимум расположен около нуля первой переменной и отделен от больших ее значений потенциальным барьером, что и объясняет малую величину амплитуды колебаний в этом режиме.

Отмечено, что режим № 4 имеет место только при весьма высоких значениях параметров линейной связи и характеризуется быстрым

затуханием колебаний обоих осцилляторов с их собственными временами релаксации, после чего амплитуда колебаний устанавливается на крайне малом уровне вблизи нулевого положения.

Рассмотрены особенности развития колебаний при несимметричной величине линейной связи между осцилляторами. Показано, что такая несимметричность не приводит к формированию каких-либо новых режимов колебаний, кроме рассмотренных при симметричной связи. В формировании режимов двухступенчатого запаздывания и плавного насыщения отмечена преобладающая роль величины параметра связи второго осциллятора. Выявлена критичность режима перемежающихся скачков к степени симметрии связи. Так при отклонении от такой симметрии на 20 % его возбуждение срывается и он заменяется режимом плавного насыщения.

Глава 8

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ В РЕЖИМЕ УМНОЖЕНИЯ ЧАСТОТЫ. ЧАСТЬ 3. НЕЛИНЕЙНАЯ СВЯЗЬ

В настоящей главе продолжено рассмотрение нелинейных вынужденных колебаний системы из двух связанных осцилляторов. В основе задачи лежит квадрированная система уравнений, полученная при рассмотрении задачи о возбуждении гиперзвука. Нелинейная связь между осцилляторами пропорциональна произведению квадрата смещения первого осциллятора на первую степень смещения второго. Интерпретации развития колебаний в такой системе проведена на основе модели динамического потенциала. Исследованы различные режимы колебаний при вариации параметра нелинейной связи. Обнаружены и исследованы следующие режимы: двухступенчатое запаздывание с сильной хаотической и пилообразной составляющей, асинхронная синусоида, регулярное установление и плавное насыщение. Приведены некоторые дополнительные вопросы, направленные на дальнейшее развитие работ.

Основное изложение материала в данной главе следует работе [29]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

8.1. Постановка задачи о роли нелинейной связи между осцилляторами

В двух предыдущих частях настоящей работы (гл. 6 и 7) было рассмотрено возбуждение нелинейных вынужденных колебаний намагниченности и упругого смещения в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. Исследование проведено на основе упрощенной модели, представляющих собой совокупность двух связанных осцилляторов, один из которых обладает гиромангнитными свойствами.

В первой части гл. 6 получена система из двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, отражающая связь между осцилляторами. Для случая, когда резонансные частоты обоих осцилляторов различаются в кратном отношении, выполнено исследование развития вынужденных колебаний во времени. Показано, что в этих условиях возбуждение колебаний происходит с нестационарным запаздыванием во времени. Для интерпретации эффекта запаздывания

предложена модель динамического потенциала, отражающая характер колебаний первого осциллятора при использовании амплитуды второго осциллятора как параметра. Исследован характер запаздывания в широком интервале изменения амплитуды возбуждения и параметра кубической нелинейности первого осциллятора. Отмечены критические значения того и другого, обеспечивающие пороговый характер запаздывания. Наблюдаемые явления интерпретированы на основе модели динамического потенциала.

Вторая часть гл. 7 посвящена дальнейшему исследованию эффекта запаздывания, в первую очередь — выяснению роли линейной связи между осцилляторами. Для более полной интерпретации развития колебаний предложена модель, представляющая собой совокупность двух динамических потенциалов. Рассмотрен процесс развития колебаний во времени в случае симметричной линейной связи между осцилляторами. Выявлены четыре наиболее характерных режима, соответствующих различным уровням параметра линейной связи по возрастанию: режим № 1 — двухступенчатое запаздывание; режим № 2 — плавное насыщение; режим № 3 — перемежающиеся скачки; режим № 4 — малоамплитудная релаксация. Выполнена интерпретация наблюдаемых свойств этих режимов на основе двухпотенциальной модели. Показано, что несимметричность линейной связи не приводит к формированию каких-либо новых режимов колебаний, кроме рассмотренных при симметричной связи.

В настоящей главе в первую очередь выявлена роль нелинейной связи между осцилляторами. Рассматривается развитие колебаний в значительных промежутках времени, когда имеет место вторичное воздействие колебаний второго осциллятора на колебания первого. Основная интерпретация наблюдаемых явлений выполняется на основе модели динамического потенциала.

8.2. Геометрия задачи и уравнения движения

Геометрия задачи, совпадающая с принятой в [16, 18, 20, 21, 23–26, 72, 85, 86], приведена в гл. 1 на рис. 1.1. Там же приведены основные уравнения с соответствующими граничными условиями (1.1)–(1.7). Ввиду подробного рассмотрения в гл. 1 эти данные здесь не приводятся.

В гл. 6 приведена система уравнений, отражающая в квадратичном приближении возбуждение магнитоупругих колебаний на основе модели двух связанных осцилляторов — магнитного и упругого:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (8.2)$$

В этой системе x_1 и x_2 — нормированные компоненты намагниченности и упругого смещения в плоскости пластины, β_1 и β_2 — параметры

затухания той и другой компонент, ω_1 и ω_2 — собственные частоты осцилляторов, γ_1 и γ_2 — константы их линейной связи, δ — параметр кубической нелинейности первого осциллятора, η — параметр нелинейной связи первого осциллятора со вторым, A_0 и ω_0 — амплитуда и частота переменного поля. Явный вид всех коэффициентов и их выражение через параметры материала приведены в работе [21].

Из уравнений (8.1)–(8.2) можно видеть, что между осцилляторами имеют место два вида связи: линейная, описываемая коэффициентами γ_1 и γ_2 при переменных в первой степени, и нелинейная, имеющая единственный коэффициент η при произведении квадрата первой переменной на первую степень второй. Линейная связь подробно рассмотрена во второй части настоящей гл. 7. Здесь будет рассмотрена именно нелинейная связь.

Уравнения (8.1)–(8.2) в гл. 6, 7 записывались и решались в нормированном виде при нормировке на частоту возбуждения, в реальных системах преобразователей гиперзвука [16] лежащую с СВЧ-диапазоне и составлявшую порядка единиц и десятков гигагерц. В настоящей работе далее будет рассматриваться умножение частоты на три, причем будут использоваться те же нормированные значения параметров, а именно: резонансные частоты осцилляторов $\omega_1 = 5$, $\omega_2 = 15$ н.е., параметры затухания $\beta_1 = 1,0$ н.е., $\beta_2 = 0,1$ н.е., так что времена релаксации первого и второго осцилляторов составляют 2,2 и 22,0 ед. времени соответственно; параметры линейной связи $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ будут одинаковыми для обоих осцилляторов, причем значение γ будет варьироваться от 10 до 1000 н.е.; параметр кубической нелинейности первого осциллятора $\delta = 6$ н.е.; параметр нелинейной связи между осцилляторами η будет варьироваться от -10 до -1000 н.е. Частоту вынуждающей силы положим совпадающей с резонансной частотой первого осциллятора, то есть $\omega_0 = 5$ н.е., амплитуду — $A_0 = 50$ н.е. Случаи выходя за эти параметры будут особо оговариваться в тексте.

Из уравнений (8.1)–(8.2) можно видеть, что между осцилляторами имеют место два вида связи: линейная, описываемая коэффициентами γ_1 и γ_2 при переменных в первой степени, и нелинейная, имеющая единственный коэффициент η при произведении квадрата первой переменной на первую степень второй. Линейная связь подробно рассмотрена во второй части гл. 7. Здесь будет рассмотрена именно нелинейная связь.

8.3. Динамический потенциал

Для интерпретации решения системы уравнений (8.1)–(8.2) в работе [27] был введен динамический потенциал следующего вида:

$$U = \frac{\omega_1^2}{2} \cdot x_1^2 + \gamma_1 \cdot x_1 x_2 + \frac{\delta}{4} \cdot x_1^4 + \frac{\eta}{3} \cdot x_1^3 x_2. \quad (8.3)$$

Дифференцирование этого выражения по x_1 дает потенциальную группу слагаемых уравнения (8.1). При этом переменную x_2 следует рассматривать как постоянный параметр.

В гл. 7 была предложена двухпотенциальная модель, содержащая два потенциала, каждый для своего осциллятора:

$$U_1 = \frac{\omega_1^2}{2} \cdot x_1^2 + \gamma_1 \cdot x_1 x_2 + \frac{\delta}{4} \cdot x_1^4 + \frac{\eta}{3} \cdot x_1^3 x_2, \quad (8.4)$$

$$U_2 = \frac{\omega_2^2}{2} \cdot x_2^2 + \gamma_2 \cdot x_1 x_2. \quad (8.5)$$

Там же показано, что с помощью следующей из (8.5) подстановки

$$x_2 = \frac{\gamma_2 x_1}{\omega_2^2} \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2U_2 \omega_2^2}{\gamma_2^2 x_1^2}} \right), \quad (8.6)$$

можно получить потенциал, подобный (7.8), зависящий только от одной переменной x_1 :

$$U_1 = \left\{ \frac{\omega_1^2}{2} + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\omega_2^2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2U_2 \omega_2^2}{\gamma_2^2 x_1^2}} \right) \right\} x_1^2 + \left\{ \frac{\delta}{4} + \frac{\eta \gamma_2}{3 \omega_2^2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2U_2 \omega_2^2}{\gamma_2^2 x_1^2}} \right) \right\} x_1^4. \quad (8.7)$$

Это выражение не содержит второй переменной x_2 , так что параметром здесь является второй потенциал U_2 . Если этот второй потенциал известен, например, если выражен через x_2 в соответствии с (8.5), то его использование в выражении (8.7) приводит к тем же результатам, что и совокупность двух потенциалов (8.4) и (8.5).

8.4. Классификация режимов по интенсивности колебаний

Подробное рассмотрение различных режимов колебаний двухосцилляторной системы показывает, что из всего многообразия режимов можно выделить две большие группы, различающиеся амплитудой возбуждаемых колебаний. То есть можно сказать, что имеются два вида режимов: малоамплитудные и высокоамплитудные. Охарактеризуем их основные свойства.

Малоамплитудные режимы — амплитуда колебаний первого осциллятора x_1 составляет несколько единиц (обычно 2–5), амплитуда колебаний второго осциллятора x_2 составляет доли одной единицы. Отношение амплитуд x_1/x_2 составляет от 6 до 15.

Эти режимы, в свою очередь, делятся на две группы: без смещения установившегося положения относительно нуля и с таким смещением.

К первой группе относятся режимы, имеющие место при слабой связи, как линейной, так и нелинейной. Они характеризуются отсутствием запаздывания и высокой стабильностью установившихся колебаний. Ко второй группе относятся режимы, имеющие место при очень сильной связи, как линейной, так и нелинейной. Они характеризуются малым запаздыванием или даже его отсутствием. Дальнейшее развитие колебаний в течение некоторого времени происходит с сильной хаотической составляющей (до 50% от средней величины), после чего амплитуда резко падает и устанавливаются малоамплитудные колебания вокруг смещенного равновесного положения.

К этой группе относятся описанный в гл. 7 режим №3 — перебегающих скачков, а также в какой-то степени режим №4 — малоамплитудная релаксация.

Высокоамплитудные режимы — амплитуда колебаний первого осциллятора составляет несколько сотен и даже тысяч единиц (как правило от 400 до 2000), амплитуда колебаний второго осциллятора x_2 составляет от нескольких единиц до двух-трех десятков. Отношение амплитуд x_1/x_2 составляет от 30 до 40. От малоамплитудных эти режимы отличаются на два-три порядка большей амплитудой и заметно большим (до порядка) отношением амплитуд колебаний первого и второго осцилляторов.

Эти режимы характеризуются значительным запаздыванием, сильной примесью хаотических колебаний в процессе установления (до 30% от средней величины) и довольно высокой стабильностью установившихся колебаний. В некоторых случаях установившиеся колебания могут иметь пилообразный автомодуляционный характер, но форма зубьев пилы приближается к периодическому повторению.

К этой группе относятся описанные в гл. 7 режим №1 — двухступенчатое запаздывание и режим №2 — плавное насыщение.

Рассмотрим интерпретацию тех и других режимов на некоторых примерах, опираясь на модель динамического потенциала.

8.4.1. Малоамплитудный режим слабой связи

Рассмотрим сначала пример режима, относящегося к первой группе малоамплитудных, имеющих место при слабой связи. Слабость связи здесь соответствует значению константы линейной связи γ не более 30–40 н.е. и нелинейной связи η по абсолютной величине менее 100 н.е. Развитие колебаний в таком режиме показано на рис. 8.1.

Из рисунка можно видеть, что колебания первого осциллятора (а) устанавливаются сразу после включения возбуждения, так что их амплитуда не меняется. Колебания второго осциллятора (б) также начинаются сразу после включения возбуждения, однако до установления проходят через несколько периодов затухающих биений. Потенциал (в) имеет единственный минимум вблизи нуля. Других минимумов нет, так что колебания происходят в единственной потенциальной яме вокруг нуля. Динамический характер потенциала здесь проявляется

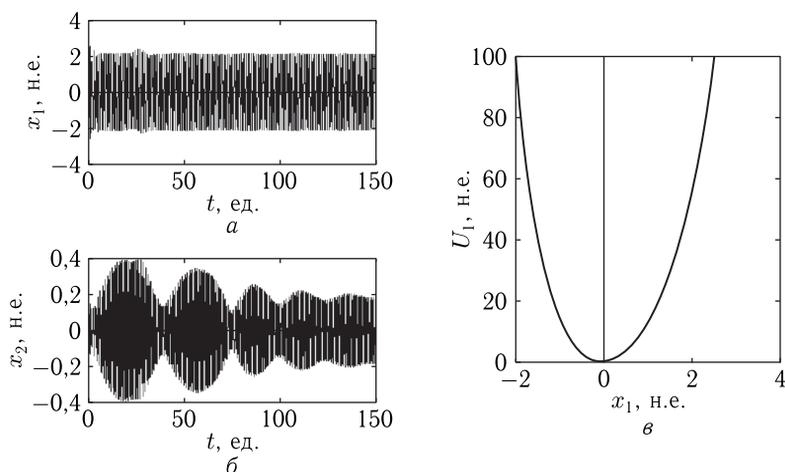


Рис. 8.1. Малоамплитудный режим слабой связи. Параметры связи: $\gamma = 10$ н.е., $\eta = -50$ н.е. В установившемся режиме амплитуды колебаний следующие: $x_1 = 2,0$ н.е., $x_2 = 0,17$ н.е. Отношение амплитуд: $x_1/x_2 = 12$

только в биениях колебаний второго осциллятора, период которых, составляя около 40 ед. времени, приближается к удвоенному времени релаксации второго осциллятора, которое равняется 22 ед. времени. Биения затухают довольно медленно, однако при времени порядка 150 ед. амплитуду колебаний второго осциллятора можно считать установившейся.

8.4.2. Высокоамплитудный режим средней связи

Рассмотрим далее пример режима, относящегося к высокоамплитудному, имеющему место при средней величине связи. Средний порядок связи здесь соответствует значению константы линейной связи γ между 10 и 50 н.е. и нелинейной связи η по абсолютной величине между 100 и 400 н.е. Характерным свойством этого режима является наличие сильного запаздывания начала интенсивных колебаний относительно момента включения возбуждения (до 100 ед.). Развитие колебаний в таком режиме показано на рис. 8.2.

Из рисунка можно видеть, что колебания первого осциллятора полностью подобны друг другу, с тем отличием, что амплитуда колебаний второго осциллятора меньше амплитуды колебаний первого в 30–40 раз.

Следует заметить, что незначительные колебания хаотического характера, вообще говоря, имеют место сразу после включения возбуждения, однако их амплитуда при этом крайне мала и составляет для первого осциллятора не более 1–2 н.е., а для второго — не более 0.5 н.е.

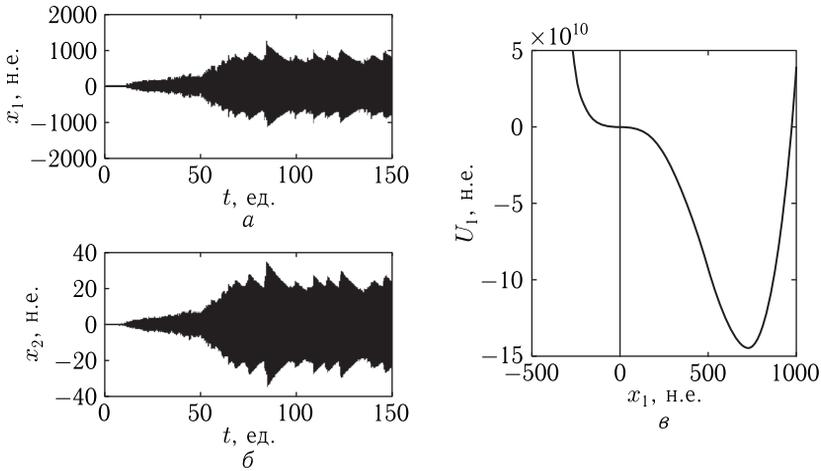


Рис. 8.2. Высокоамплитудный режим средней связи. Параметры связи: $\gamma = 10$ н.е., $\eta = -200$ н.е. В установившемся режиме амплитуды колебаний следующие: $x_1 = 750$ н.е., $x_2 = 22$ н.е. Отношение амплитуд: $x_1/x_2 = 34$. (a , b , v — те же, что на рис. 8.1)

Настоящие интенсивные колебания начинаются скачкообразным образом с сильным запаздыванием относительно момента включения возбуждения. Амплитуда первого скачка для первого осциллятора составляет несколько десятков нормированных единиц, после чего постепенно растет, достигая нескольких тысяч таких единиц, вследствие чего этот режим и назван «высокоамплитудным».

Потенциал имеет глубокий минимум в значительном удалении от нуля. Имеется также небольшой минимум вблизи нуля (около перегиба), но он настолько мал, что на рисунке не заметен и серьезного влияния на колебания не оказывает. Колебания происходят в весьма глубокой потенциальной яме далеко от нуля. Именно удаление основного минимума потенциала от нуля обуславливает значительную амплитуду установившихся колебаний в этом режиме. Динамический характер потенциала здесь проявляется в механизме самовоздействия осцилляторов друг на друга, с участием положительной обратной связи первого осциллятора самого на себя через посредство второго. Колебания второго осциллятора с высокой точностью повторяют колебания первого осциллятора, только лишь со значительно меньшей амплитудой. Рост амплитуды в процессе установления происходит с сильной примесью хаотических колебаний (до 20% от средней величины). В установившемся режиме колебания имеют автомодуляционный пилообразный характер, близкий к периодическому. Время установления более или менее стабильного режима составляет около 80 ед. времени, что значительно превышает время релаксации второго осциллятора (22 ед. времени).

Замечание. Из рассмотрения рис. 8.1 и рис. 8.2 можно видеть, что установление колебаний может требовать времени, значительно превышающего время собственной релаксации того и другого осцилляторов. Такое затягивание времени установления может говорить о наличии каких-то механизмов, противодействующих релаксации, но проявляющихся не через первую производную по времени (как сила трения, пропорциональная скорости), а каким-то другим образом. В рамках настоящей работы такой механизм не рассматривается, однако, по-видимому, может составить интерес для более подробного исследования.

8.4.3. Малоамплитудный режим сильной связи

Рассмотрим теперь пример режима, относящегося ко второй группе малоамплитудных режимов, имеющего место при сильной величине связи. Сильный порядок связи здесь соответствует значению константы линейной связи γ более 200 н.е. и нелинейной связи η по абсолютной величине между 200 и 1000 н.е. Этот режим можно образно назвать «перенапряженным», так как слишком большие значения связи в совокупности приводят опять к падению амплитуды колебаний того и другого осцилляторов. Характерным свойством этого режима является установлением колебаний того и другого осцилляторов вокруг новых положений равновесия, формирование которых обсуждено в гл. 7. Развитие колебаний в таком режиме показано на рис. 8.3.

Из рисунка можно видеть, что внешнее сходство характера колебаний первого и второго осцилляторов остается, однако равновесные

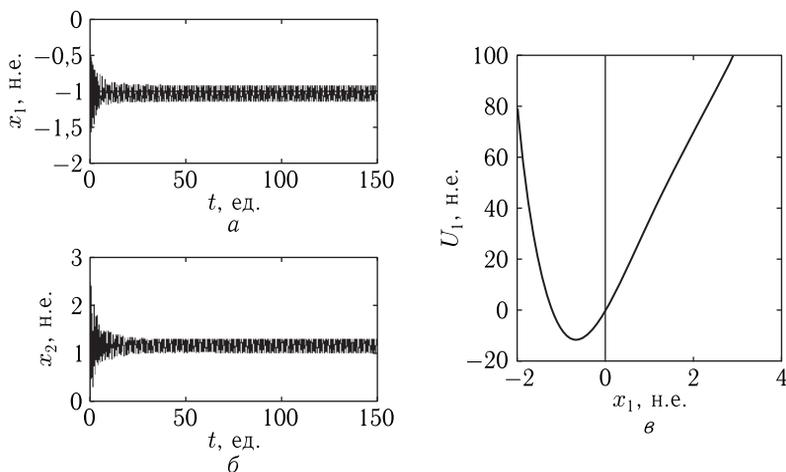


Рис. 8.3. Малоамплитудный режим сильной связи. Параметры связи: $\gamma = 250$ н.е., $\eta = -200$ н.е. В установившемся режиме амплитуды колебаний следующие: $x_1 = 1,0$ н.е., $x_2 = 0,12$ н.е. Отношение амплитуд: $x_1/x_2 = 8$. (а, б — те же что на рис. 8.1.)

положения, вокруг которых происходят колебания после установления, для обоих осцилляторов различны. В обоих случаях колебания начинаются сразу после включения возбуждения, с заметной амплитудой (до нескольких единиц), однако, такие колебания быстро затухают, освобождая место установившимся регулярным колебаниям с малой амплитудой, происходящим вокруг нового положения равновесия. Время затухания первичных колебаний составляет порядка 10 ед., что приходится между временами релаксации того и другого осцилляторов. Амплитуда установившихся колебаний составляет порядка 0,1 н.е., смещение равновесного положения — до 1–2 н.е., причем знаки смещения для того и другого осцилляторов различны.

Потенциал имеет минимум в небольшом удалении от нуля, причем степень этого удаления как раз соответствует новому установившемуся положению равновесия. Следует заметить, что полный потенциал имеет также второй более глубокий минимум, подобный показанному на рис. 8.2, *в*, однако он отделен от минимума вблизи нуля, соответствующего рис. 8.3, *в*, довольно высоким потенциальным барьером, который препятствует развитию высокоамплитудного режима. В гл. 7 показано, что преодоление такого барьера возможно или путем значительного увеличения амплитуды возбуждения, или путем задания начального отклонения хотя бы одного из осцилляторов по другую сторону от барьера.

8.5. Общий характер развития колебаний при низкой степени линейной связи

В гл. 6, 7 было исследовано развития колебаний в сравнительно небольшой промежуток времени, который можно считать начальным после первичного запаздывания.

В гл. 7 были выявлены четыре режима, соответствующих возрастающим уровням параметра линейной связи: режим № 1 — двухступенчатое запаздывание; режим № 2 — плавное насыщение; режим № 3 — перемежающиеся скачки; режим № 4 — малоамплитудная релаксация. В режиме № 1 развитие колебаний после первичного запаздывания происходит путем двух следующих друг за другом резких возрастаний амплитуды. В режиме № 2 развитие колебаний после первичного двухступенчатого запаздывания происходит путем плавного увеличения амплитуды с выходом на стационарный уровень. Режим № 3 характеризуется двумя свойствами: амплитуда перемежающихся скачков более чем на два порядка меньше амплитуды установившихся колебаний в режиме № 2, а после окончания скачков колебания происходят вокруг нового положения равновесия. Режим № 4 имеет место только при весьма высоких значениях параметров линейной связи и характеризуется быстрым затуханием колебаний обоих осцилляторов с их собственными временами релаксации.

Характерные значения параметра линейной связи γ , принятые в главе 7 за отправные точки исследования перечисленных режимов, были следующими: для режима № 1 — 10 н.е. (слабая связь), для режима № 2 — 50 н.е. (средняя связь), для режима № 3 — 300 н.е. (сильная связь), для режима № 4 — 800 н.е. (сверхсильная связь).

Развитие колебаний во всех этих режимах исследовалось лишь при временах, сравнимых со временем первичного запаздывания, то есть в пределах 30–50 единиц времени в нормировке, приведенной выше. При изменении времени в этих пределах изменение переменной x_2 в качестве параметра в выражении для потенциала (8.4) по мере ее возрастания не учитывалось, так что она, как правило, полагалась равной 4 н.е. Однако более подробное исследование показало, что переменная x_2 с течением времени меняется, как и переменная x_1 , имея лишь амплитуду, значительно меньшую, чем x_1 (примерно на два порядка). Такое изменение x_2 приводит к значительному изменению характера колебаний, имеющему место при достаточно больших промежутках времени. Этот характер различен в зависимости от величины параметров линейной связи в обусловленных этими параметрами режимах.

Первичное запаздывание развития колебаний наиболее ярко проявляется в режиме № 1, то есть при сравнительно невысоком уровне линейной связи. Слабость связи обеспечивает достаточно медленное развитие колебаний во времени, позволяющее проследить тонкие детали их развития, поэтому более подробно остановимся именно на этом случае. Типичная картина развития колебаний показана на рис. 8.4, который соответствует интервалу времени от нуля до 150 ед. при параметре линейной связи $\gamma = 10$ н.е. и параметре нелинейной связи $\eta = -200$ н.е. Там же показана схема определения основных рассматриваемых далее параметров колебаний.

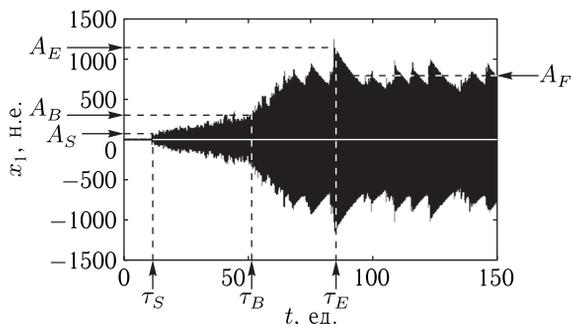


Рис. 8.4. Развитие колебаний во времени и схема определения основных характеристик процесса при значениях параметров: параметр линейной связи $\gamma = 10$ н.е., параметр кубической нелинейности $\delta = 6$ н.е., параметр нелинейной связи $\eta = -200$ н.е., амплитуда возбуждения $A_0 = 50$ н.е. Остальные параметры указаны в тексте

Из рисунка можно видеть, что развитие колебаний проходит последовательно следующие стадии:

- запаздывание развития колебаний, малая амплитуда, колебания нерегулярные, типа биений;
- резкий скачок амплитуды после запаздывания;
- плавное увеличение амплитуды, амплитуда меняется хаотическим образом в пределах 10–20 % от средней величины;
- резкое увеличение скорости роста амплитуды, колебания остаются частично хаотическими (хаотическая составляющая — до 20 % от средней величины);
- установившиеся колебания с пилообразной модуляцией амплитуды, амплитуда зубцов пилы составляет 20-30% от средней величины.

В связи с этим в качестве основных параметров, характеризующих развитие колебаний, были выбраны следующие:

τ_S — момент времени первого (основного) скачка, то есть собственно время запаздывания в принятом ранее смысле;

A_S — амплитуда, достигаемая непосредственно в момент первого скачка;

τ_B — момент времени резкого увеличения скорости роста амплитуды;

A_B — амплитуда, соответствующая моменту увеличения скорости роста амплитуды;

τ_E — момент времени начала пилообразных колебаний;

A_E — амплитуда первого пилообразного колебания;

A_F — средняя амплитуда установившихся пилообразных колебаний.

Можно заметить, что в интервалах времени от τ_S до τ_B и от τ_B до конца рисунка средняя амплитуда тех и других колебаний, меняется по закону, близкому к «единице минус экспонента в отрицательной степени». На этот закон накладываются колебания амплитуды, близкие к хаотическим. В установившемся режиме, то есть когда размах колебаний насыщается, что имеет место, начиная со времени τ_E , колебания приобретают пилообразный характер автомодуляционного типа, близкий к периодическому. При этом период такой «пилы», составляющий около 10 ед. времени, занимает по продолжительности среднее положение между временем релаксации первого (2,2 ед.) и второго (22 ед.) осцилляторов.

Из сравнения приведенного здесь рисунка с рис. 8.2 можно видеть, что в интервале времени до 30 ед. колебания на том и другом рисунках ведут себя, в общем, одинаковым образом. Здесь второй скачок амплитуды выражен слабее, однако и там он был довольно малым по сравнению с первым. Остальные незначительные отличия можно отнести к различию масштабов и погрешностям машинного расчета при нестационарном развитии колебаний с заметной хаотической составляющей.

Замечание. Введенные здесь временные и амплитудные параметры колебаний дополняют принятые в гл. 7, распространяя их на более продолжительный промежуток времени. Так время запаздывания в обоих случаях обозначается как τ_S , а еще два временных параметра τ_B и τ_E введены только здесь, так как они значительно превышают τ_S и выходят за пределы рассмотренного в гл. 7 интервала времени. То же касается амплитуд: A_S в обоих случаях одна и та же, а A_B , A_E и A_F подробно рассматриваются только здесь. Параметры τ_C и A_C , введенные в гл. 7, здесь подробно не анализируются, так как их роль на больших интервалах времени становится незначительной, а характерные их свойства уже в достаточной степени рассмотрены в гл. 7.

8.5.1. Динамические характеристики колебаний при низкой степени линейной связи

Рассмотрим теперь, как зависят основные временные и амплитудные характеристики процесса развития колебаний от величины параметра нелинейной связи. Поскольку в гл. 6 установлено, что для реализации нестационарного запаздывания параметр нелинейной связи должен быть отрицательным, ограничимся далее только этим случаем, а все характеристики будем строить в виде зависимостей от абсолютной величины этого параметра, то есть от $|\eta|$. Начнем рассмотрение со случая сравнительно слабой линейной связи, $\gamma = 10$ н.е., так как при этом вариации параметра нелинейной связи η выявляются наиболее рельефно. Остальные параметры положим теми же, что и ранее.

На рис. 8.5 приведены зависимости временных параметров процесса развития колебаний τ_S , τ_B , τ_E от абсолютной величины параметра нелинейной связи $|\eta|$. Точки соответствуют параметрам, измеренным с шагом по $|\eta|$ в 10 н.е., причем в области наиболее резкого их изменения (от 180 до 230 н.е.) этот шаг уменьшен до 5 н.е. Тонкие сплошные кривые построены путем соединения последовательных точек отрез-

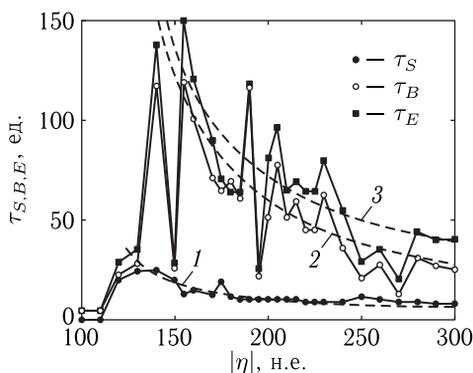


Рис. 8.5. Зависимости временных параметров процесса развития колебаний от абсолютной величины параметра нелинейной связи

ками прямых. Утолщенные пунктирные кривые 1, 2, 3, приближенно аппроксимирующие точки, построены по следующим эмпирическим формулам:

$$\text{кривая 1} \quad \tau_S = \frac{800}{|\eta| - 100} + 2; \quad (8.8)$$

$$\text{кривая 2} \quad \tau_B = \frac{6500}{|\eta| - 100} - 5; \quad (8.9)$$

$$\text{кривая 3} \quad \tau_E = \frac{6500}{|\eta| - 100} + 7 \quad (8.10)$$

Из рисунка можно видеть, что все зависимости в среднем с той или иной степенью приближения соответствуют функциям обратной пропорциональности. Такая зависимость наблюдается после превышения $|\eta|$ критического значения около 120–130 н.е. При этом время запаздывания τ_S составляет около 20–30 ед., а времена τ_B и τ_E , хотя и составляют несколько большие величины, но отличаются незначительно (на 20%). Обратная пропорциональная зависимость характерных времен аналогична отмеченной в гл. 7 подобной зависимости введенных там параметров τ_S и τ_C . Можно полагать, что такой характер временных зависимостей просто отражает факт усиления связи между осцилляторами, не важно, какой именно — линейной или нелинейной.

По мере увеличения $|\eta|$ время τ_S более или менее монотонно уменьшается в соответствии с законом (8.8), тогда как времена τ_B и τ_E при переходе $|\eta|$ через критическое значение, резко увеличиваются до величин порядка 120–140 ед. времени, после чего в среднем постепенно спадают в несколько раз в соответствии с (8.9) и (8.10). Однако, как и подобные зависимости в гл. 6, 7, точки для времен τ_B и τ_E (кривые 2 и 3) испытывают сильный разброс.

Характерным является тот момент, что разброс точек, соответствующих времени τ_S , то есть собственно запаздыванию (кривая 1), составляет не более 20–30%, что по величине согласуется с подобным разбросом в гл. 6, 7, однако для τ_B и τ_E (кривые 2 и 3) разброс достигает нескольких раз. Так при $|\eta| = 190$ н.е. эти времена достигают 120 ед., при $|\eta| = 195$ н.е. падают до 40 ед., а при $|\eta| = 205$ н.е. снова возрастают до 70–80 ед. То есть амплитуда скачков достигает трех раз и более. Более подробное исследование показывает, что зависимости τ_B и τ_E , как и подобные зависимости в гл. 7, имеют фракталоподобный характер.

Замечание. Природа этих скачков, по-видимому, состоит в особенностях условий синхронизма между колебаниями осцилляторов и воздействием возбуждения, что особенно критично должно проявляться в режиме умножения частоты. В настоящей работе вопрос о скачках подробно не рассматривается, констатируется лишь их наличие. Исследованию скачков авторы намереваются посвятить отдельную работу.

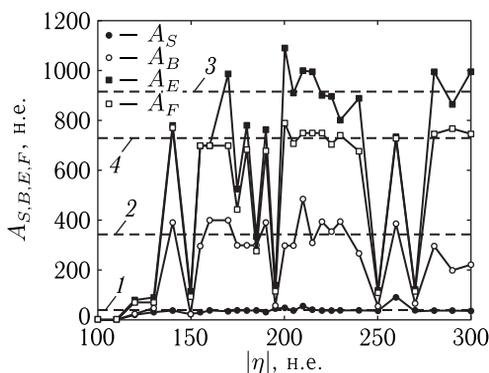


Рис. 8.6. Зависимости амплитудных параметров процесса развития колебаний от абсолютной величины параметра нелинейной связи

Перейдем теперь к рассмотрению амплитудных характеристик развития колебаний, показанных на рис. 8.6. Точки соответствуют амплитудам A_S , A_B , A_E , A_F , снятым при тех же значениях $|\eta|$, что на предыдущем рисунке. Тонкие сплошные кривые также соединяют точки отрезками прямых линий. Аппроксимирующие зависимости здесь представляют собой прямые линии, показанные утолщенным пунктиром, параллельные горизонтальной оси.

Эти прямые соответствуют следующим уровням амплитуды:

$$\text{линия } 1 \quad A_S = 30 \text{ н.е.}; \quad (8.11)$$

$$\text{линия } 2 \quad A_B = 350 \text{ н.е.}; \quad (8.12)$$

$$\text{линия } 3 \quad A_E = 910 \text{ н.е.}; \quad (8.13)$$

$$\text{линия } 4 \quad A_F = 730 \text{ н.е.} \quad (8.14)$$

Из рисунка можно видеть, что все зависимости в среднем с той или иной степенью приближения соответствуют аппроксимирующим приближениям (8.11)–(8.14), означающим отсутствие зависимости характерных амплитуд от параметра нелинейной связи $|\eta|$. Такое отсутствие зависимости начинается также с критического значения $|\eta|$, составляющего около 130 н.е. При $|\eta|$ меньше этого значения все амплитуды являются малыми (порядка 20–100 н.е.) и их значения сливаются друг с другом. По достижении критического значения $|\eta|$ происходит резкий рост амплитуд: A_B до 400 н.е. A_E и A_F до 800 н.е., тогда как амплитуда первичного скачка A_S остается достаточно малой (около 30 н.е.). Дальнейшее увеличение $|\eta|$ амплитуду A_S практически не меняет, тогда как A_B , A_E и A_F по величине резко разграничиваются и проходят через ряд скачков, группируясь вокруг стационарных значений (8.11)–(8.14).

В большинстве случаев амплитуда A_E превышает A_F , что соответствует несколько большему значению скачка амплитуды при времени τ_E , чем установившееся в среднем значение A_F . Пример такого превышения можно видеть из рис. 8.4, где A_E равняется 1100 н.е., тогда как A_F равно всего 900 н.е.

Следует отметить, что, несмотря на постоянство средних значений амплитуд A_B , A_E , A_F (кривые 2–4), их зависимости от $|\eta|$ имеют резко скачкообразный характер. Так при $|\eta|$ около 150, 190, 250, 270 н.е. эти зависимости имеют резкие провалы вниз вплоть до величины порядка 100 н.е., то есть меняются почти на порядок (так A_E при $|\eta| = 195$ н.е. составляет 120 н.е., а при $|\eta| = 200$ н.е. — уже 1100 н.е.). Из сравнения с рис. 8.5 можно видеть, что такие перепады приходятся как раз на аналогичные скачки зависимостей характерных времен от $|\eta|$, то есть обе характеристики колебаний — амплитуда и время изменения характера колебаний отражают одни и те же внутренние процессы в системе осцилляторов. Более подробное исследование показывает, что зависимости амплитуд A_B , A_E , A_F от параметра $|\eta|$, как и подобные зависимости характерных времен развития колебаний τ_B и τ_E от того же параметра, имеют фракталоподобный характер.

Природа скачкообразного характера обсуждаемых кривых, по-видимому, является той же, что и для временных зависимостей, то есть состоит в сложности условий синхронизма между собственными колебаниями осцилляторов и периодом возбуждения (см. замечание к рис. 8.5).

Замечание. Следует заметить, что фракталоподобный характер приведенных кривых весьма затрудняет точное определение критического значения параметра нелинейной связи η , начиная с которого амплитуда колебаний резко растет. Так из рис. 8.6 можно полагать, что критическое значение $|\eta|$ составляет около 120–130 н.е. Однако прохождение величины $|\eta|$ с более мелким, чем 5 н.е. показывает, что и ниже 120–130 н.е. имеются редко расставленные узкие «островки» значений η , где амплитуда колебаний принимает довольно высокие значения. Такие островки наблюдаются примерно начиная с величины $|\eta|$ порядка 60 н.е. Так один из «островков» имеет место между 67,980 и 68,025 н.е. (то есть ширину 0,045 н.е.), где амплитуда колебаний первого осциллятора достигает 30–40 н.е., а в точке 68,020 даже возрастает до 120 н.е. Вне этого «островка» та же амплитуда составляет всего 2 н.е. Такой «всплеск» установившейся амплитуды сопровождается резким увеличением времени запаздывания $|\eta_S|$, которое внутри «островка» достигает 70–80 ед., в отличие от полного отсутствия запаздывания вне него (см. рис. 8.5). Другой подобный «островок» находится в районе значений $|\eta|$ около 80–90 н.е. и также имеет ширину порядка 0,05 н.е. Однако более или менее сплошной диапазон $|\eta|$, где амплитуда колебаний заведомо является достаточно высокой и время запаздывания значительным, начинается все же с $|\eta| = 120$ –130 н.е., как это видно из рис. 8.5 и рис. 8.6.

8.6. Интерпретация наблюдаемых явлений на основе модели потенциала

Рассмотрим возможность интерпретации описанных в предыдущих разделах явлений на основе модели динамического потенциала.

В гл. 6 отмечено, что нелинейная связь с отрицательным параметром взаимодействия между осцилляторами приводит к значительному первичному запаздыванию возбуждения колебаний. Линейная связь, согласно гл. 7, существенным образом меняет время запаздывания, однако на небольших интервалах времени на амплитуде установившихся колебаний значительным образом не сказывается. В настоящей работе выявлено, что нарастание амплитуды происходит в течение промежутка времени, значительно превышающего время первичного запаздывания, причем амплитуда в этих случаях может достигать весьма высоких значений (см. рис. 8.4).

Для интерпретации характера наблюдаемой в гл. 6 амплитуды колебаний первого осциллятора предложена модель динамического потенциала, минимум которого определяется амплитудой колебаний второго осциллятора. При амплитуде колебаний второго осциллятора порядка 5 н.е. минимум потенциала приходится на 200 н.е., что и определяет амплитуду колебаний первого осциллятора (см. рис. 8.3 в гл. 6).

В гл. 7 отмечена в некоторых случаях возможность увеличения амплитуды колебаний первого осциллятора до 500 н.е., однако ограничение сравнительно малым временем развертки колебаний (порядка 30 ед.) не позволило выявить более высоких уровней установления амплитуды. Для оценки уровня амплитуды первого осциллятора была привлечена модель динамического потенциала, хотя роль амплитуды второго осциллятора в достаточной степени не выявлялась. Однако подробное исследование показывает, что в формировании уровня амплитуды колебаний первого осциллятора второй осциллятор играет решающую роль.

Для демонстрации такой роли обратимся к системе (8.1)–(8.2), которую повторим здесь с целью наглядности:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = A \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (8.15)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (8.16)$$

Как можно видеть из уравнения (8.16), первый осциллятор через переменную x_1 обеспечивает возбуждение второго посредством слагаемого линейной связи вида $\gamma_2 x_1$. При этом второй осциллятор отдает первому часть энергии своих колебаний через посредство слагаемого линейной связи в уравнении (8.15) вида $\gamma_1 x_2$. Кроме того, второй осциллятор воздействует на первый за счет нелинейной связи вида $\eta \cdot x_1^2 x_2$. Однако, в отличие от линейной связи через $\gamma_1 x_2$, здесь эффективность воздействию пропорциональна квадрату переменной первого

осциллятора x_1^2 . То есть эффективность воздействия второго осциллятора на первый тем выше, чем больше амплитуда колебаний первого осциллятора, причем благодаря квадратичности это воздействие увеличивается.

Таким образом, благодаря нелинейной связи, первый осциллятор через посредство второго воздействует сам на себя, подобно цепи положительной обратной связи, приводящей к лавинообразному процессу нарастания колебаний. Вообще говоря, такое самовоздействие в общем случае может привести к неограниченному росту амплитуды колебаний, то есть к уходу системы на бесконечность. Однако, как показано в гл. 6, в ограничении амплитуды решающую роль играет член кубической нелинейности вида $\delta \cdot x_1^3$, не допускающий такой уход при надлежащей величине параметра δ . Тем не менее можно ожидать, что механизм самовоздействия первого осциллятора, реализуемый в виде положительной обратной связи, через достаточный промежуток времени приведет к значительной величине установившейся амплитуды первого осциллятора. Решающую роль здесь будет играть также амплитуда колебаний второго осциллятора, так как член нелинейного воздействия $\eta \cdot x_1^2 x_2$ содержит эту амплитуду в виде коэффициента, прямо пропорционального x_2 .

Таким образом, в формировании динамического потенциала для уравнения (8.15) следует учитывать рост амплитуды колебаний второго осциллятора по мере увеличения амплитуды колебаний первого.

Рассмотрим, какую роль играет амплитуда второго осциллятора в формировании высокоамплитудных режимов колебаний. Обратимся к рис. 8.7, где показаны зависимости амплитуд установившихся колебаний первого A_{F1} и второго A_{F2} осцилляторов (*a*) и их отношения A_{F1}/A_{F2} (*b*) от параметра линейной связи γ . Параметр нелинейной связи положен равным $\eta = -200$ н.е. и от его изменения в пределах от 100 н.е. до 800 н.е. характер картины не меняется.

Из рисунка можно видеть, что при параметре связи меньше 4 н.е. имеет место режим малой амплитуды: A_{F1} составляет порядка 2, отношение амплитуд: $x_1/x_2 = 6 \pm 2$. При изменении параметра линейной связи γ от 4 до 200 н.е., то есть в высокоамплитудных режимах, где A_{F1} составляет от 60 н.е. до 1000 н.е. (согласно терминологии, введенной в гл. 7, режим №1 — двухступенчатое запаздывание и режим №2 — плавное насыщение), отношение амплитуд: $x_1/x_2 = 33 \pm 2$. При параметре связи больше 200 н.е., наступает снова малоамплитудный режим (режим №3 — перемежающиеся скачки), так что A_{F1} составляет от 0,5 до 2 н.е., а отношение амплитуд: $x_1/x_2 = 1,0 \pm 0,2$.

Примечательным является тот факт, что во всем интервале существования высокоамплитудных режимов отношение амплитуд колебаний осцилляторов составляет около 33 н.е. и практически не меняется. То есть при амплитуде первого осциллятора порядка 800–1000 н.е., что, согласно рис. 8.6, имеет место в интервале изменения $|\eta|$ от 140

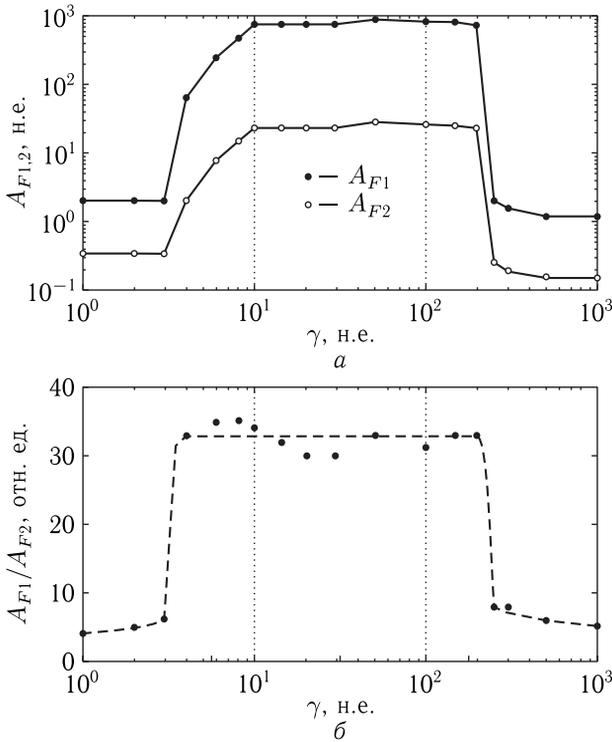


Рис. 8.7. Зависимости амплитуд установившихся колебаний первого и второго осцилляторов (а) и их отношения (б) от параметра линейной связи

до 300 н.е., амплитуда колебаний второго осциллятора составляет порядка 30 н.е. Можно полагать, что именно такая величина, в отличие от принятого в гл. 6, 7 значения 2–5 н.е., является основой для формирования динамического потенциала в случае высокоамплитудных режимов.

Рассмотрим теперь, как в этих случаях ведет себя динамический потенциал, для чего обратимся к рис. 8.8. На этом рисунке показаны зависимости потенциала (8.3)

$$U = \frac{\omega_1^2}{2} \cdot x_1^2 + \gamma_1 \cdot x_1 x_2 + \frac{\delta}{4} \cdot x_1^4 + \frac{\eta}{3} \cdot x_1^3 x_2 \quad (8.17)$$

от величины x_1 при различных значениях x_2 в качестве параметра.

Из рисунка можно видеть, что по мере увеличения x_2 минимум потенциала смещается в сторону больших значений x_1 , что и обеспечивает высокий уровень амплитуды в соответствующих режимах. На рис. 8.9 показана зависимость переменной x_1 от x_2 в точках, соответствующих минимумам потенциала на предыдущем рисунке.

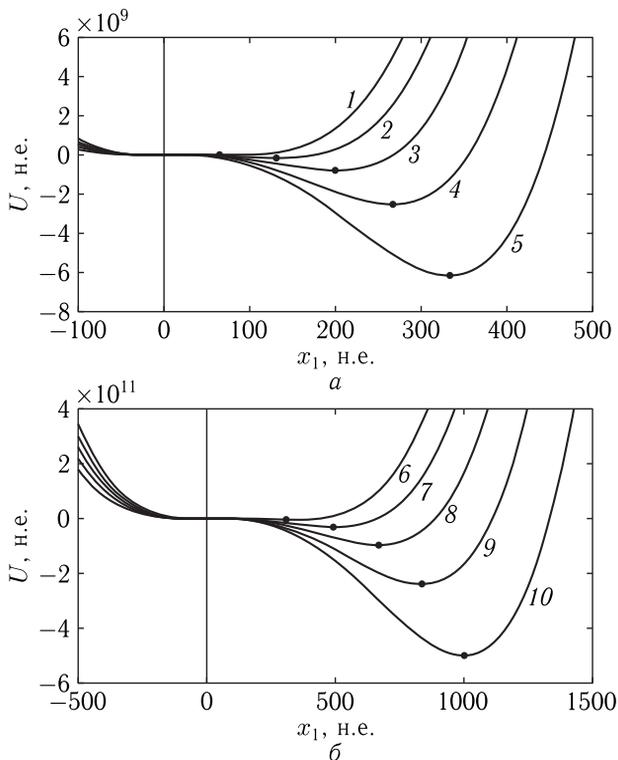


Рис. 8.8. Потенциал при разных амплитудах второго осциллятора. С целью наглядности рисунок разбит на две части «а» и «б», отличающиеся разными масштабами по обеим осям. Кривые построены по формуле (8.17), где x_2 равняется: а — 1 — 2 н.е.; 2 — 4 н.е.; 3 — 6 н.е.; 4 — 8 н.е.; 5 — 10 н.е.; б — 6 — 10 н.е.; 7 — 15 н.е.; 8 — 20 н.е.; 9 — 25 н.е.; 10 — 30 н.е. Значение x_2 для кривых 5 и 6 — одно и то же: 10 н.е. Точки соответствуют минимумам кривых

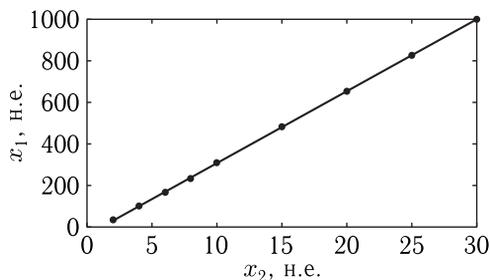


Рис. 8.9. Зависимость переменной x_1 от x_2 в точках, соответствующих минимумам на предыдущем рисунке. Параметры — те же

Из рисунка можно видеть, что точки с высокой степенью точности ложатся на линейную зависимость вида:

$$x_1 = kx_2, \quad (8.18)$$

где $k = 33,3$. Положения минимумов соответствуют равенству нулю производной от потенциала (8.17), то есть решению относительно x_1 следующего кубического уравнения:

$$\delta x_1^3 + \eta x_2 x_1^2 + \omega_1^2 x_1 + \gamma x_2 = 0. \quad (8.19)$$

Это уравнение содержит x_2 в качестве параметра. При этом оно в общем случае описывает кубическую параболу, однако при принятых в настоящей задаче значениях параметров первые два слагаемых значительно (на несколько порядков) превышают остальные, так что уравнение в первом приближении принимает вид

$$\delta x_1^3 + \eta x_2 x_1^2 = 0, \quad (8.20)$$

что и дает линейную зависимость x_1 от x_2 вида

$$x_1 = -\frac{\eta}{\delta} x_2, \quad (8.21)$$

которая при $\eta = -200$ н.е. и $\delta = 6$ н.е. соответствует (8.18).

Замечание. Приведенное здесь рассмотрение относится к единственному довольно специфическому набору параметров. То есть здесь везде (кроме рис.8.7, приведенного для наглядности) приняты значения $\gamma = 10$ н.е. и $\delta = 6$ н.е. Однако в общем случае высокоамплитудные режимы сменяют малоамплитудные при различном соотношении параметров γ , η и δ . По-видимому, для получения наиболее полной информации о характере режимов, следует построить плоскость, по одной из координат которой будет отложен параметр линейной связи, а по другой — нелинейной. На такой плоскости можно наглядно отметить границы областей между различными режимами. Набор подобных плоскостей при различных значениях δ , как параметра, позволил бы получить трехмерную картину распределения режимов колебаний. Исследование возможности построения такой картины авторы оставляют до отдельной работы.

8.7. Развитие колебаний при средней степени линейной связи

Рассмотрим теперь особенности колебаний системы при средней степени линейной связи $\gamma = 50$ н.е., где переход к установившемуся режиму происходит за более короткий промежуток времени, чем в предыдущем случае.

Прежде всего отметим, что для реализации представленных далее высокоамплитудных режимов необходимо превышение первого крити-

ческого значения параметра нелинейной связи $|\eta_{C1}| = 11$ н.е. При $|\eta|$ ниже этого значения запаздывание отсутствует и амплитуда остается постоянной на уровне 2–3 н.е., то есть режим является малоамплитудным, подобным рассмотренному в гл. 7, имеющему место ниже критического значения линейной связи. Здесь этому режиму уделять внимания не будем, а рассмотрим лишь режимы, где амплитуда колебаний принимает большие значения.

На рис. 8.10 показаны наиболее характерные варианты развития таких колебаний при различных уровнях параметра нелинейной связи $|\eta|$.

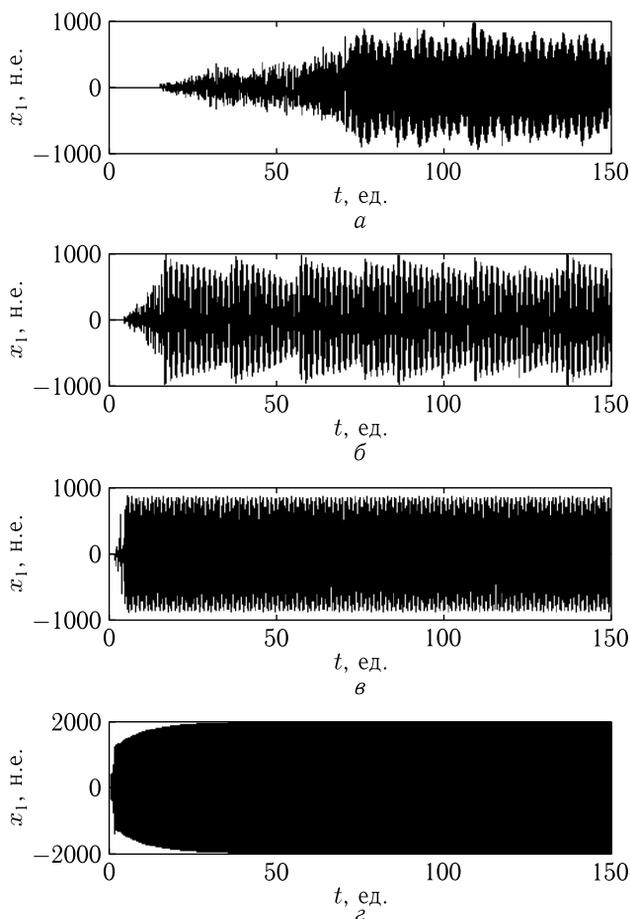


Рис. 8.10. Развитие колебаний при средней степени линейной связи ($\gamma = 50$ н.е.) и различных уровнях параметра нелинейной связи $|\eta|$: а — 36 н.е., б — 110 н.е., в — 300 н.е., г — 1200 н.е.

Из рисунка можно видеть, что во всех случаях имеет место начальное запаздывание развития колебаний, причем по мере увеличения параметра $|\eta|$ такое запаздывание уменьшается. Так на рис. 8.10, *а* время запаздывания равно 17 ед., на рис. 8.10, *б* — 7 ед., на рис. 8.10, *в* — 3 ед., а на рис. 8.10, *г* — всего около 1 ед. времени. В первых трех случаях установившаяся амплитуда имеет примерно одну и ту же величину — около 700–900 н.е., что говорит о едином значении главного минимума динамического потенциала, то есть об определенном единстве первых трех процессов. Однако видно, что характер самих колебаний во всех случаях заметно различается, что позволяет выделить три различных режима.

Итак, первый из показанных на рис. 8.10 режимов (*а*), вообще говоря, тождественен обсужденному в гл. 7 режиму двухступенчатого запаздывания. Этот режим имеет место при изменении $|\eta|$ от 11 до 40 н.е., то есть ограничен двумя критическими значениями параметра η : снизу $|\eta_{C1}| = 11$ н.е. и сверху $|\eta_{C2}| = 40$ н.е. Характерным свойством этого режима является сильно выраженный хаотический характер вариаций амплитуды, достигающих 30% от средней величины. После установления амплитуды при времени около 75 ед. колебания приобретают несколько более упорядоченный характер, имеющий следы двухпериодичности, однако элемент хаотичности остается достаточно сильным в пределах тех же 30%.

Второй режим (рис. 8.10, *б*) также близок к двухступенчатому запаздыванию, однако здесь скорее можно говорить не о двух, а о трех скачках амплитуды: при 7, 11 и 17 ед. времени. В установившемся состоянии (после 17 ед. времени) здесь наблюдаются сильно выраженные пилообразные почти периодические колебания амплитуды. Этот режим имеет место при изменении $|\eta|$ от 40 до 140 н.е., то есть ограничен двумя критическими значениями параметра η : снизу $|\eta_{C2}| = 11$ н.е. и сверху $|\eta_{C3}| = 140$ н.е. Период «пилы» составляет около 20–25 н.е. и во времени несколько варьируется. Высота «зубьев» достигает 20–30% от средней величины. Хаотическая составляющая выражена слабо и проявляется только до третьего скачка амплитуды, то есть до времени около 17 ед.

Третий режим (рис. 8.10, *в*) тоже в какой-то степени можно отнести к варианту двухступенчатого запаздывания, однако здесь промежуток времени между первым и вторым скачками крайне мал (от 3 до 5 ед. времени), после чего колебания сразу устанавливаются в полностью регулярном виде с постоянной амплитудой без какой-либо примеси хаотической составляющей. То есть такой режим можно назвать режимом «регулярного установления». Этот режим ограничен двумя критическими значениями параметра η : снизу $|\eta_{C3}| = 140$ н.е. и сверху $|\eta_{C4}| = 400$ н.е. При увеличении параметра нелинейной связи выше $|\eta_{C4}|$ система уходит на бесконечность, причем увеличение параметра кубической нелинейности δ выше принятого значения 6 н.е. вплоть до 100 н.е. уход системы на бесконечность полностью не предотвра-

щает, лишь несколько увеличивая значение $|\eta_{C4}|$, однако не более чем на 20%. Следует отметить, что при $\delta = 6$ н.е. значение $|\eta_{C4}| = 400$ н.е. не является четко установленным. Так при $|\eta| = 405$ н.е. колебания снова возобновляются, но при 410 н.е. система все же уходит на бесконечность. Такие скачкообразные вариации зависимости амплитуды от $|\eta|$ продолжаются вплоть до нового критического значения $|\eta_{C5}| = 935$ н.е., после которого уход системы на бесконечность прекращается и колебания принимают четкий регулярный характер. Типичный пример таких колебаний показан на рис. 8.10, з. Этот режим уже не является «родственным» по отношению к первым трем. Установившаяся амплитуда по мере увеличения $|\eta|$ от значения 700–900 н.е. начинает расти и, как можно видеть из рис. 8.10, з, при $|\eta| = 1200$ н.е. составляет 2000 н.е., а при дальнейшем увеличении $|\eta|$ еще более увеличивается. То есть главный минимум потенциала приходит в движение и начинает «сползать» к более высоким значениям x_1 .

Из рис. 8.10, з можно видеть, что после первичного скачка до примерно 1000 н.е., имеющего место при времени порядка 2–3 ед., амплитуда устанавливается не сразу (как на рис. 8.10, в), а постепенно растет по закону, типа «единица минус экспонента в отрицательной степени». При времени порядка 30 ед. амплитуда наконец устанавливается на уровне 2000 н.е. и далее не меняется. Таким образом, по своим свойствам это режим соответствует рассмотренному в гл. 7 режиму №2 — плавного насыщения. Этот режим имеет место до следующего критического значения $|\eta_{C6}| = 4000$ н.е., выше которого система уже более или менее устойчиво уходит на бесконечность. Заметим однако, что это критическое значение, подобно η_{C4} , определено не вполне четко. Так отдельные «островки» регулярного режима встречаются вплоть до $|\eta| = 10\,000$ н.е., однако эти «островки» довольно узки и немногочисленны, так что для характеристики режима значение $|\eta_{C6}| = 4000$ н.е. можно считать вполне приемлемым.

8.7.1. Динамические характеристики колебаний при средней степени линейной связи

После общего обзора характера колебаний при средней степени линейной связи, обратимся к изучению некоторых наиболее характерных их характеристик. Из рис. 8.10 можно видеть, что наибольшее разнообразие режимов имеет место при сравнительно небольшой величине параметра нелинейной связи, поэтому ограничимся сверху значением $|\eta| = 400$ н.е. и рассмотрим в этом интервале временные и амплитудные характеристики возбуждаемых колебаний более подробно. Сначала проследим за временем первичного запаздывания τ_S и временем последнего резкого скачка амплитуды колебаний τ_E (рис. 8.4), после которого характер колебаний принимает более или менее установившееся значение. Рассмотрим рис. 8.11, где показаны зависимости τ_S и τ_E от $|\eta|$.

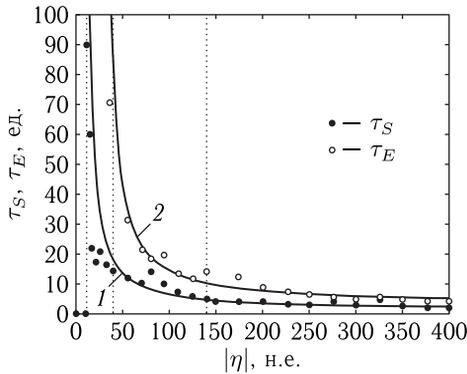


Рис. 8.11. Зависимости временных параметров развития колебаний от абсолютной величины параметра нелинейной связи. Параметр линейной связи $\gamma = 50$ н.е. Вертикальные точечные линии соответствуют границам между режимами

Приведенные на рисунке линии 1, 2, приближенно аппроксимирующие точки, построены по следующим эмпирическим формулам:

$$\text{кривая 1} \quad \tau_S = \frac{500}{|\eta| - 10} + 1; \quad (8.22)$$

$$\text{кривая 2} \quad \tau_E = \frac{800}{|\eta| - 30} + 3. \quad (8.23)$$

Из рисунка видно, что обе зависимости, подобно таковым на рис. 8.5 (кривые 1 и 3), аппроксимируются кривыми зависимостями типа обратной пропорциональности. Здесь однако область высоких запаздываний (порядка 100 ед. времени) начинается при $|\eta| = 11$ н.е. (то есть при $|\eta_{C1}|$), тогда как на рис. 8.5 — при $|\eta| = 130$ н.е., то есть при значении $|\eta|$ более чем на порядок меньшем. Время запаздывания τ_S здесь также несколько меньше, однако не более чем в 2–3 раза. Время установления стационарной амплитуды здесь также намного меньше такового при слабой связи. Так при $|\eta| = 150$ н.е. на рис. 8.5 это время составляет порядка 120 ед. времени, здесь же — всего около 12 ед., что меньше как раз на порядок.

Следует заметить также, что здесь скачкообразный характер приведенных зависимостей, особенно τ_E , по сравнению с рис. 8.5, значительно сглажен. Разброс значений τ_S примерно такой же, однако разброс значений τ_E в области $|\eta|$ от 150 н.е. до 200 н.е. там достигает двух–трех раз, тогда как здесь не превышает 30%.

Обратимся теперь к рис. 8.12, где показана зависимость установившейся амплитуды A_F от $|\eta|$ при тех же условиях.

Приведенная на рисунке аппроксимирующая кривая построена по формуле:

$$A_F = 1000 \cdot \left\{ 1 - \frac{\exp[-(|\eta| - 10)]}{50} \right\}. \quad (8.24)$$

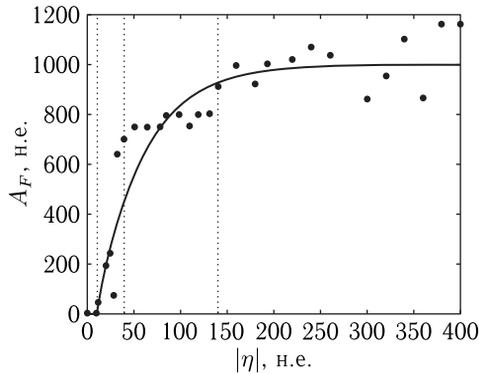


Рис. 8.12. Зависимость амплитуды установившихся колебаний первого осциллятора от абсолютной величины параметра нелинейной связи. Параметр линейной связи $\gamma = 50$ н.е. Вертикальные точечные линии соответствуют границам между режимами

Из рисунка можно видеть, что зависимость установившейся амплитуды в среднем аппроксимируется кривой типа «единица минус экспонента с отрицательным показателем». Такое поведение составляет заметное отличие от кривых, приведенных на рис. 8.6 (кривая 4), где в среднем какая-либо зависимость отсутствует. Заметим однако, что там кривые также начинались при $|\eta| = 130$ н.е. с весьма малых значений (около 70 н.е.), так что, вообще говоря, кривую типа «единица минус экспонента с отрицательным показателем» там построить также было бы можно. Однако роста этой кривой на начальном участке был бы весьма крутым. Так значение $A_F = 750$ н.е., приходящееся как раз на аппроксимирующую прямую 4 там достигалось уже при $|\eta| = 140$ н.е. (то есть правее начала кривой на 10 н.е.). Здесь же выход на более или менее установившийся уровень в 900 н.е. требует изменения $|\eta|$ с 10 до 150 н.е., то есть на 140 н.е. Поэтому зависимость типа «единица минус экспонента с отрицательным показателем» здесь более уместна, чем горизонтальная прямая на рис. 8.6. Заметим дополнительно, что здесь скачкообразные отклонения от аппроксимирующей зависимости выражены также значительно слабее. Так на рис. 8.6 отдельные выбросы точек относительно кривой 4 в области $|\eta|$ от 150 до 200 н.е. достигают 4–5 раз, тогда как здесь отклонения точек от аппроксимирующей кривой не превышают 20%.

Контрольная проверка конфигурации динамического потенциала показывает, что здесь, как и в случае слабой связи, амплитуда колебаний соответствует главному минимуму потенциала с учетом амплитуды колебаний второго осциллятора. Однако здесь, в отличие от предыдущего случая, где во всем интервале существования высокоамплитудных режимов соотношение амплитуд первого осциллятора ко второму A_{F1}/A_{F2} сохранялось постоянным, равным 33 отн. ед.

(рис. 8.8, б), подобное соотношение по мере изменения $|\eta|$ меняется. Так, при $|\eta| = 40$ н.е. отношение A_{E1}/A_{E2} равно 7, при $|\eta| = 200$ н.е. оно составляет 33, при $|\eta| = 300$ н.е. увеличивается до 50, а при $|\eta| = 3800$ н.е. возрастает до 630. Если оставить в стороне последнее значение, как относящееся к другому режиму, то все равно, в первых трех случаях, являющихся разновидностями режима двухступенчатого запаздывания, отношение установившихся амплитуд осцилляторов в полном интервале изменения $|\eta|$ все же возрастает примерно в 5–7 раз. Тем не менее, как уже сказано выше, амплитуда установившихся колебаний главному минимуму потенциала соответствует с довольно высокой степенью точности.

8.8. Развитие колебаний при высокой степени линейной связи

Рассмотрим теперь особенности колебаний системы при высокой степени линейной связи $\gamma = 300$ н.е. Как показано в гл. 7, при такой степени связи (то есть выше критической равной 214 н.е.) высокоамплитудные колебания в обычных условиях не возбуждаются. Вместо них происходит установление нового равновесного положения, вокруг которого затем происходят более или менее регулярные колебания малой амплитуды (согласно гл. 7 — режим малоамплитудной релаксации). Там же показано, что колебания с малой амплитудой обусловлены наличием дополнительного локального минимума потенциала вблизи нулевого значения переменной первого осциллятора, отделенного от главного минимума потенциальным барьером (рис. 8.14 в работе [28]).

Для возбуждения колебаний большой амплитуды следует выйти из локального минимума и перейти в область главного минимума потенциала, для чего надо преодолеть разделяющий эти минимумы потенциальный барьер.

В гл. 7 предложены два варианта преодоления такого барьера: задание достаточно большого начального смещения осциллятора, проходящего по другую сторону барьера или задание достаточно большой амплитуды возбуждения, способной «выкинуть» колебания осциллятора за пределы локального минимума. Воспользуемся обеими такими возможностями возбуждения высокоамплитудных колебаний и рассмотрим это способы более подробно.

8.8.1. Задание начального смещения

Рассмотрим сначала вариант задания начального смещения. Из рис. 8.14 в работе [28] можно видеть, что вершина разделяющего минимумы потенциального барьера приходится примерно на 1.5 н.е. Более подробная проверка показывает, что имеет место критическое значение начального смещения первого осциллятора $x_{10C} = 2,5$ н.е. Ниже этого значения при амплитуде возбуждения $A_0 = 50$ н.е. наблюдается малоамплитудный режим перемежающихся скачков со

смещением положения равновесия на величину порядка 2–4 н.е., а выше — ряд высокоамплитудных режимов без смещения центра. Эти режимы по мере увеличения параметра нелинейной связи сменяют друг друга при достижении этим параметром определенных критических значений. Типичный ряд наблюдаемых при задании начального отклонения высокоамплитудных режимов колебаний показан на рис. 8.13.

Из рисунка можно видеть, что большинство наблюдаемых режимов совпадает с рассмотренными в гл. 7. Так рис. 8.13,а соответствует малоамплитудному режиму перемежающихся скачков с равновесным положением около 4 н.е. Рис. 8.13,б соответствует варианту режима двухступенчатого запаздывания с пилообразным развитием колебаний.

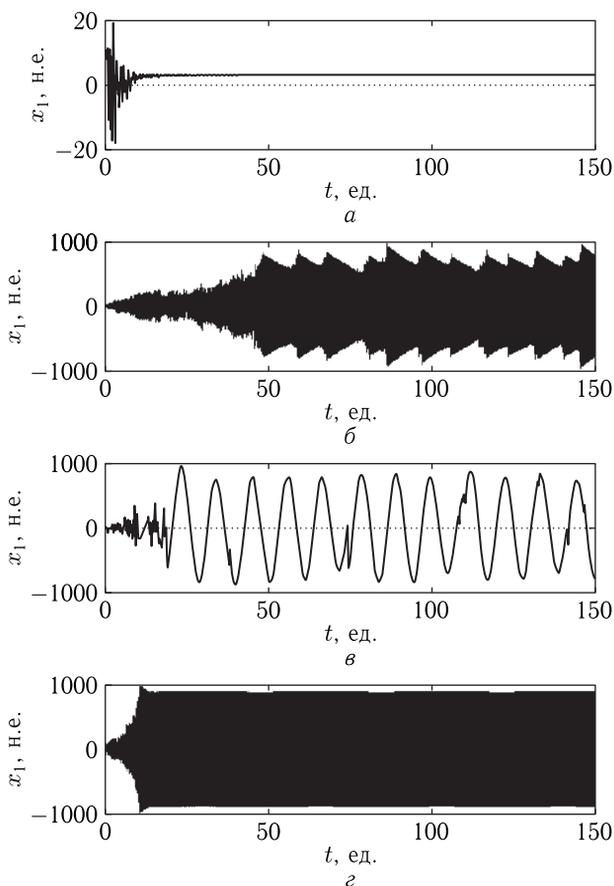


Рис. 8.13. Развитие колебаний при высокой степени линейной связи ($\gamma = 300$ н.е.) и начальном смещении $x_{10} = 20$ н.е., соответствующих различным уровням параметра нелинейной связи $|\eta|$: а — 6 н.е., б — 10 н.е., в — 22 н.е., г — 30 н.е.

Рис. 8.13, *г* соответствует другому варианту режима двухступенчатого запаздывания — регулярному установлению.

Исключением является отсутствующий в гл. 7 режим, показанный на рис. 8.13, *в*, где колебания развиваются в виде высокоамплитудной синусоиды, не коррелирующей по фазе ни с колебаниями обоих осцилляторов, ни с сигналом возбуждения. Будем называть далее этот режим «асинхронной синусоидой». Период такой синусоиды значительно превышает периоды колебаний как обоих осцилляторов, так и возбуждения. Так период собственных колебаний первого осциллятора (а также и возбуждения) равен 1,25 ед. времени, второго — 0,417 ед. времени, тогда как период наблюдаемой синусоиды меняется от 2 до 12 ед. времени и составляет тем большую величину, чем параметр нелинейной связи больше.

Можно полагать, что причиной значительной величины периода асинхронной синусоиды является почти плоский участок потенциала (вблизи нуля, где имеется перегиб), на котором рабочая точка вследствие малости его наклона движется медленно, поэтому проводит на нем много времени.

Из приведенных на рис. 8.13 численных значений параметра нелинейной связи $|\eta|$ можно видеть, что наблюдаемое многообразие режимов имеет место при сравнительно небольших величинах этого параметра. Так при возбуждении колебаний с нулевым начальным отклонением, рассмотренных в гл. 7, требуется величина параметра нелинейной связи $|\eta| = 200$ н.е. Здесь же все подобные режимы реализуются уже при $|\eta| = 30$ н.е. Дальнейшее (выше 30 н.е.) увеличение параметра $|\eta|$, вплоть до 400 н.е., к изменению режима регулярного установления (рис. 8.13, *г*) не приводит, а при еще большем превышении система уходит на бесконечность.

Наблюдаемые малые величины параметра нелинейной связи можно объяснить тем, что в реализации того или иного режима главным фактором является конкретная конфигурация динамического потенциала [1, 2]. В формировании такого потенциала участвуют одновременно оба вида связи осцилляторов: линейная и нелинейная. Можно полагать, что, чем выше линейная связь, тем меньшее значение нелинейной связи требуется для реализации того же вида потенциала, что и приводит к следующему из этой конфигурации виду режима.

Важно отметить, что первичное запаздывание отсутствует во всех режимах. То есть можно считать, что именно нулевое начальное отклонение является необходимым условием первичного запаздывания.

Замечание. В работе [28] в разделе 13 при описании рис. 8.14 отмечено, что при начальном отклонении $x_{10} = 3$ н.е. режим перемежающихся скачков сменяется режимом плавного насыщения, имеющим время запаздывания $\tau_S = 0,5$ ед. времени, что противоречит высказанному выше утверждению. Однако можно полагать, что столь малое время запаздывания (меньше периода колебаний первого осциллято-

ра) находится в пределах ошибки измерения, особенно с учетом фракталоподобного характера зависимости τ_S от параметров связи. Поэтому можно считать, что высказанное выше положение о необходимости для первичного запаздывания нулевого значения начального отклонения, в первом приближении является достаточно достоверным.

По мере увеличения параметра нелинейной связи характер возбуждаемых режимов сменяется пороговым образом при определенных его критических значениях, которые обозначим далее в порядке возрастания $|\eta_{D1,2,3,4}|$, так что $|\eta_{D1}| \leq |\eta_{D2}| \leq |\eta_{D3}| \leq |\eta_{D4}|$. Так, при $0 \leq |\eta| \leq |\eta_{D1}|$ имеет место малоамплитудный режим перемежающихся скачков. Между $|\eta_{D1}|$ и $|\eta_{D2}|$, то есть при $|\eta_{D1}| \leq |\eta| \leq |\eta_{D2}|$, — высокоамплитудный режим пилообразной амплитуды. Между $|\eta_{D2}|$ и $|\eta_{D3}|$, то есть при $|\eta_{D2}| \leq |\eta| \leq |\eta_{D3}|$, — высокоамплитудный режим асинхронной синусоиды. Выше $|\eta_{D3}|$, то есть при $|\eta_{D3}| \leq |\eta| \leq |\eta_{D4}|$, — высокоамплитудный режим регулярного установления, а еще выше, то есть при $|\eta_{D4}| \leq |\eta| \rightarrow +\infty$, система уходит на бесконечность.

Обратимся к рис. 8.14, где показаны зависимости критических значений параметра нелинейной связи от величины начального смещения первого осциллятора. Кривые соответствуют следующим критическим значениям: 1 — $|\eta_{D1}|$, 2 — $|\eta_{D2}|$, 3 — $|\eta_{D3}|$.

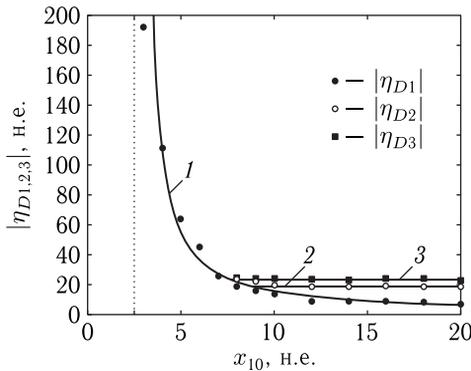


Рис. 8.14. Зависимости критических значений параметра нелинейной связи от величины начального смещения первого осциллятора. Кривые соответствуют следующим критическим значениям: 1 — $|\eta_{D1}|$; 2 — $|\eta_{D2}|$; 3 — $|\eta_{D3}|$. Вертикальная точечная линия соответствует критическому начальному смещению первого осциллятора $x_{10C} = 2,5$ н.е.

Приведенная на рисунке аппроксимирующая кривая 1 построена по формуле

$$|\eta_{D1}| = \frac{110}{x_{10} - 3}. \tag{8.25}$$

Аппроксимирующие кривые 2 и 3 — прямые линии, параллельные горизонтальной оси, проведенные на уровнях: 2 — 18 н.е., 3 — 20 н.е.

Из рисунка можно видеть, что основная аппроксимирующая кривая 1 довольно хорошо аппроксимируется зависимостью типа обратной пропорциональности. При этом ниже кривой 1 , а также левее вертикальной точечной линии везде имеет место только малоамплитудный режим перемежающихся скачков. Выше аппроксимирующей кривой 1 имеют место высокоамплитудные режимы. Линии 2 и 3 , определяющие верхние границы режимов асинхронной синусоиды и регулярно установления при $x_{10} < 8$ н.е. полностью сливаются с кривой 1 , так что в этой области остается только этот последний режим. Выше линии 3 также имеет место только режим регулярного установления, а при $x_{10} > 8$ н.е. (или 9 н.е.) наблюдаются две узких полосы существования режимов пилообразной амплитуды и асинхронной синусоиды.

Таким образом, из высокоамплитудных режимов преобладающим является режим регулярного установления, а остальные режимы существуют только в довольно узких областях изменения параметра нелинейной связи, расположенных вблизи нижнего его критического значения.

8.8.2. Задание амплитуды возбуждения

Рассмотрим теперь вариант формирования высокоамплитудных режимов за счет задания достаточно большой амплитуды возбуждения при отсутствии начального отклонения.

Исследование показывает, что высокоамплитудные режимы имеют место только при превышении амплитудой возбуждения определенного критического значения A_{0C} , зависящего от величины параметра нелинейной связи $|\eta|$. Так в гл. 7 показано, что при $|\eta| = 200$ н.е. малоамплитудный режим перемежающихся скачков сменяется режимом плавного насыщения при достижении амплитудой возбуждения значения $A_{0C} = 160$ н.е. Более подробно зависимость критического значения амплитуды возбуждения от величины параметра нелинейной связи иллюстрируется рис. 8.15.

Приведенная на рисунке аппроксимирующая кривая построена по формуле

$$A_{0C} = \frac{15000}{|\eta| + 20} + 75. \quad (8.26)$$

Из рисунка можно видеть, что аппроксимирующая кривая довольно хорошо аппроксимируется зависимостью типа обратной пропорциональности. Ниже этой кривой везде имеет место малоамплитудный режим перемежающихся скачков. Выше — высокоамплитудный режим типа регулярного установления. Нижняя граница $|\eta|$ четко не выражена и находится около 12–15 н.е. Другие режимы, если где-то и существуют, то выражены в крайне малой степени и на рисунке не отражены.

Важным моментом является тот факт, что при превышении амплитудой возбуждения критического значения режим регулярного установ-

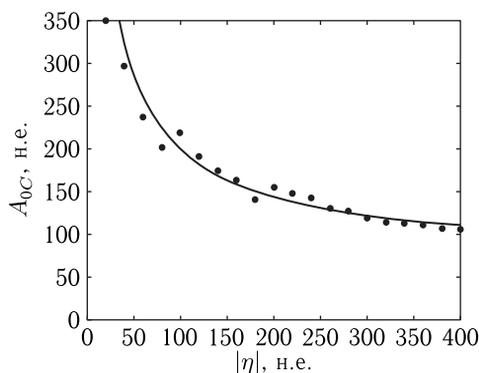


Рис. 8.15. Зависимость критического значения амплитуды возбуждения от величины параметра нелинейной связи. Параметр линейной связи: $\gamma = 300$ н.е.

ления всегда сопровождается значительным первичным запаздыванием развития колебаний. При этом время такого запаздывания τ_S , в зависимости от параметра нелинейной связи $|\eta|$, меняется резкими скачками в интервале от 10 до 110 ед. времени и ведет себя фракталоподобным образом. Так при $|\eta| = 200$ н.е. время запаздывания $\tau_S = 25$ ед., при $|\eta| = 300$ н.е. это время составляет уже 110 ед., а при $|\eta| = 400$ н.е. падает до 10 ед. времени. Такое поведение τ_S сходно с наблюдаемым на рис. 8.5 (кривая 1), однако проявляется здесь в значительно более сильной степени, более похожей на характер изменения времен τ_B и τ_E (кривые 2 и 3), однако относящейся все же к первичному запаздыванию τ_S .

Можно полагать, что такое усиление фракталоподобного характера изменения τ_S вызвано усложнением условий синхронизма колебаний при высоких уровнях возбуждения. Заметим однако, что точное выяснение этого вопроса требует подробного исследования, в настоящей работе не проводившегося.

Таким образом, можно полагать, что реализация высокоамплитудных режимов при нулевом начальном отклонении за счет увеличения амплитуды возбуждения, хотя и отличается меньшим их разнообразием (уверенно возбуждается только режим регулярного установления), но все же приводит к значительным вариациям времени первичного запаздывания. Такое обстоятельство может служить подтверждением сделанного выше вывода о том, что для реализации первичного запаздывания начальное отклонение должно отсутствовать.

Приведем в заключение еще одно небольшое наблюдение, касающееся амплитуды возбуждающего сигнала. Так при параметре $|\eta|$ вблизи нуля и даже равно нулю, если амплитуда возбуждения низкая (до 1000 н.е.) — имеют место регулярные синусоидальные колебания с малой амплитудой и частотой, соответствующей частоте возбуждения. Однако если амплитуда возбуждения превышает примерно

2000 н.е. (проверено до 10 000 н.е.) колебания приобретают стохастический характер (амплитуда 4–20 н.е., смещение равновесия отсутствует), то есть наблюдается как бы квазихаотический шум малой амплитуды. При превышении параметром $|\eta|$ критического значения порядка 10–12 н.е. такой шум переходит в режимы, описанные выше. Квазихаотический режим авторы намереваются рассмотреть в отдельной работе.

8.9. Некоторые заключительные замечания

В этой и двух предыдущих главах 6, 7 рассмотрено явление нестационарного запаздывания возбуждения нелинейных колебаний системы из двух связанных осцилляторов в режиме умножения частоты. Основные стороны наблюдаемых явлений, в первую очередь амплитудные и пороговые характеристики, объяснены на основе модели динамического потенциала. Однако остается ряд вопросов, выходящих за рамки этой модели, по крайней мере в том виде, как она представлена в настоящей работе. Эти вопросы еще требуют разрешения, поэтому перечислим их вкратце, не вдаваясь в излишние подробности:

- 1) природа первичного запаздывания возбуждения колебаний;
- 2) причины различия характера высокоамплитудных режимов колебаний;
- 3) стохастический фракталоподобный характер временных и амплитудных зависимостей от параметров связи;
- 4) роль синхронизма между частотами обоих осцилляторов и возбуждающего воздействия;
- 5) роль времен релаксации первого и второго осцилляторов и необходимость их различия для реализации запаздывания;
- 6) роль несимметричности потенциала;
- 7) роль знака параметра нелинейной связи;
- 8) необходимость умножения частоты второго осциллятора относительно частоты первого;
- 9) природа шума при большой амплитуде возбуждения.

Очевидно, ввиду сложности явления, этот список вопросов нельзя считать полным, однако можно надеяться, что их разрешение прольет дополнительный свет на общую природу нелинейных колебаний системы с двумя степенями свободы.

Выводы по главе 8

Продолжено рассмотрение задачи о возбуждении вынужденных нелинейных колебаний намагниченности и упругого смещения в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. В основу рассмотрения положена модель двух

связанных осцилляторов — магнитного и упругого, первый из которых обладает нелинейными свойствами, а второй остается линейным.

На основе квадратичного приближения для осцилляторов записана система из двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка. Нелинейная связь в такой системе обеспечивается членом первого уравнения, пропорциональным произведению квадрата первой переменной на вторую. Линейная связь в каждом уравнении обеспечивается членом, пропорциональным переменной другого уравнения.

Интерпретация развития колебаний в такой системе проведена на основе модели динамического потенциала, предложенной в первой части настоящей работы. Во второй части рассмотрены различные режимы колебаний, имеющие место при вариации параметра линейной связи. В настоящей, третьей части работы исследованы различные режимы колебаний при вариации параметра нелинейной связи.

Выполнена классификация наблюдаемых режимов по величине амплитуды возбуждаемых колебаний. Показано, что из всего многообразия наблюдаемых колебаний можно выделить две большие группы режимов — малоамплитудные и высокоамплитудные. Амплитуда колебаний в высокоамплитудном режиме превышает таковую в малоамплитудном режиме на три порядка и более. Отношение амплитуды колебаний первого осциллятора к амплитуде второго в малоамплитудном режиме составляет несколько единиц, а в высокоамплитудном режиме достигает нескольких десятков. Малоамплитудные режимы имеют место в двух случаях: при очень слабой степени линейной связи и при очень сильной. Высокоамплитудные режимы имеют место при промежуточной величине линейной связи. Малоамплитудные режимы слабой связи характеризуются отсутствием запаздывания и высокой стабильностью возбуждаемых колебаний. Малоамплитудные режимы сильной связи характеризуются сильной хаотической составляющей начальных колебаний, после чего их амплитуда резко падает и далее колебания происходят с малой амплитудой вокруг смещенного положения равновесия. Высокоамплитудные режимы характеризуются значительным запаздыванием, сильной примесью хаотических колебаний в процессе установления и высокой стабильностью установившихся колебаний.

Исследовано развитие колебаний во времени в типичных высокоамплитудных режимах. Показано, что развитие колебаний последовательно проходит следующие стадии: первичное запаздывание, первичный скачок амплитуды, постепенный хаотический рост амплитуды, пилообразные колебания, регулярное установление. Выделены типичные временные и амплитудные параметры, характеризующие развитие колебаний. Показано, что характер колебаний при изменении параметра нелинейной связи существенным образом зависит от величины параметра линейной связи. Выявлены три различных степени величины этого параметра: сильная, средняя и слабая, приводящие к различным режимам колебаний.

Рассмотрен случай низкой степени линейной связи. Показано, что по мере увеличения параметра нелинейной связи последовательно наступают следующие режимы: двухступенчатое запаздывание с сильной хаотической составляющей, пилообразные колебания амплитуды и регулярное установление. Показано, что зависимости временных параметров процесса развития колебаний от абсолютной величины параметра нелинейной связи в среднем описываются функциями типа обратной пропорциональности. В качестве причины формирования такой функциональной зависимости предложено усиление степени связи между осцилляторами. Выявлен сильный разброс значений времени запаздывания при малых изменениях параметра нелинейной связи, имеющий фракталоподобный характер. В качестве причины такого разброса высказано предположение о сложности условий синхронизма между колебаниями обоих осцилляторов и сигналом возбуждения.

Рассмотрены зависимости амплитудных параметров возбуждаемых колебаний от величины параметра нелинейной связи. Показано, что, начиная с критической величины этого параметра, амплитуды возбуждаемых колебаний имеют в среднем постоянные значения, от величины параметра не зависящие. Однако фактические амплитуды колебаний вокруг средних значений испытывают сильные скачки фрактального характера.

Наблюдаемые явления интерпретированы на основе модели динамического потенциала. Показано, что по мере увеличения амплитуды колебаний первого осциллятора имеет место сильный рост амплитуды второго осциллятора. Выявлена решающая роль амплитуды второго осциллятора в формировании амплитуды первого осциллятора.

Отмечен эффект самовоздействия первого осциллятора на амплитуду собственных колебаний через посредство второго осциллятора. В качестве механизма воздействия предложена модель положительной обратной связи, приводящая к лавинообразному росту амплитуды колебаний. Показано, что ограничение такого роста происходит за счет кубической нелинейности системы, вызывающей нелинейную расстройку и выход системы из резонанса с частотой возбуждения.

Показано, что реализация механизма положительной обратной связи ограничена сверху и снизу двумя критическими значениями параметра нелинейной связи, по обе стороны от которых реализуются малоамплитудные режимы. Рассмотрена конфигурация динамического потенциала в пределах реализации режима положительной обратной связи. Показано, что амплитуда возбуждаемых колебаний во всех случаях точно соответствует главному минимуму динамического потенциала.

Получено уравнение, связывающее амплитуды первого и второго осцилляторов при различных значениях параметра нелинейной связи. Выявлена линейная зависимость между этими амплитудами, соответствующая положению минимума динамического потенциала.

Рассмотрен случай средней степени линейной связи. Показано, что по мере увеличения параметра нелинейной связи последовательно наступают следующие режимы: двухступенчатое запаздывание с сильной хаотической составляющей, пилообразные колебания амплитуды, регулярное установление и плавное насыщение. По величине параметра нелинейной связи эти режимы отделены друг от друга и от режима малоамплитудных колебаний четырьмя критическими значениями. Выявлено пятое критическое значение параметра нелинейной связи, при превышении которого система уходит на бесконечность. Показано, что зависимости временных параметров процесса развития колебаний от абсолютной величины параметра нелинейной связи в среднем описываются функциями типа обратной пропорциональности. Показано, что зависимость амплитуды установившихся колебаний от абсолютной величины параметра нелинейной связи в среднем описывается функцией типа «единица минус экспонента с отрицательным показателем». Выявлен некоторый разброс значений времени запаздывания и амплитуды от величины параметра нелинейной связи, однако значительно меньший, чем в предыдущем случае. Показано, что значение установившейся амплитуды колебаний полностью соответствует модели динамического потенциала.

Рассмотрен случай высокой степени линейной связи. Показано, что при параметре линейной связи выше критического значения, высокоамплитудные режимы в рассмотренных выше условиях не реализуются, а всегда имеет место только малоамплитудный режим перемежающихся скачков. В этом случае для реализации высокоамплитудных режимов необходимо задание достаточного начального отклонения смещения первого осциллятора или достаточно высокая амплитуда возбуждающего сигнала. Такие требования обусловлены необходимостью преодоления потенциального барьера, отделяющего дополнительный минимум динамического потенциала от главного.

Показано, что в случае задания начального смещения, по мере увеличения параметра нелинейной связи, последовательно наступают следующие высокоамплитудные режимы: двухступенчатое запаздывание с пилообразным характером колебаний, асинхронная синусоида и регулярное установление. Показано, что период колебаний в режиме асинхронной синусоиды значительно превышает как периоды собственных колебаний обоих осцилляторов, так и период сигнала возбуждения. В качестве причины значительной величины периода асинхронной синусоиды предложено существование плоского участка потенциала, где рабочая точка колебаний проводит значительное время. Отмечено, что перечисленные режимы реализуются при величине параметра нелинейной связи значительно меньшей, чем в предыдущем случае. Выявлены критические значения параметра нелинейной связи, при которых происходит последовательное изменение перечисленных режимов. Показано, что зависимость минимального критического значения возбуждения высокоамплитудного режима от величины

начального смещения соответствует функции обратной пропорциональности.

Рассмотрено формирования высокоамплитудных режимов за счет задания достаточно большой амплитуды возбуждающего сигнала. Показано, что для возбуждения таких режимов амплитуда возбуждения должна превышать определенное критическое значение. Исследована зависимость критического значения амплитуды возбуждения от величины параметра нелинейной связи. Показано, что эта зависимость в среднем соответствует функции обратной пропорциональности. Отмечено, что необходимым условием первичного запаздывания возбуждения колебаний является нулевое значение начального отклонения колебаний того и другого осцилляторов.

В заключительном разделе приведены некоторые дополнительные вопросы, направленные на дальнейшее развитие работ.

Глава 9

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ УСТАНОВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ. ЧАСТЬ 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ. ФОРМИРОВАНИЕ УПРОЩЕННОЙ СИСТЕМЫ

В настоящей главе продолжено рассмотрение нелинейных вынужденных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Основное внимание уделяется математической стороне дела, в первую очередь формированию упрощенной системы уравнений, описывающих основные свойства наблюдаемых колебаний. В качестве исходной приведена система, в которой при достаточном уровне внешнего сигнала возникают высокоамплитудные хаотические колебания. Начало возбуждения таких колебаний происходит скачком по прошествии определенного времени запаздывания относительно начала воздействия возбуждающей силы, то есть имеет место нестационарное запаздывание возбуждаемых колебаний. Ввиду сложности исходной системы, в качестве главной задачи настоящей работы поставлено выделение из полной системы максимально упрощенного ядра, сохраняющего свойства высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием. Такое выделение выполнено путем исключения второстепенных слагаемых исходных уравнений. В качестве основных факторов, влияющих на существование хаоса с нестационарным запаздыванием, исследовано внешнее возбуждение, начальное смещение, соотношение частот осцилляторов и внешнего возбуждения. В результате проделанного рассмотрения, из исходной полной системы уравнений выделено ядро, ответственное за возбуждение высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием. В этом случае уравнение для смещения первого осциллятора содержит вторую производную по времени, слагаемые кубической нелинейности и нелинейной связи со вторым осциллятором. Уравнение для смещения второго осциллятора содержит вторую производную по времени, потенциальное слагаемое, соответствующее частоте второго осциллятора, и слагаемое линейной связи второго осциллятора с первым. При этом возбуждение системы может быть осуществлено путем

задания начального смещения или начальной скорости любого из осцилляторов.

Основное изложение материала в данной главе следует работе [31]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

9.1. Краткий обзор предшествующих работ по нелинейным колебаниям в системе двух связанных осцилляторов

Исследование нелинейных и нестационарных явлений представляет собой одну из важнейших задач современной физики [1–7, 80]. Особенно широким разнообразием здесь отличаются явления, связанные с магнитными свойствами вещества. Диапазон проявления нелинейности в магнитных явлениях необычайно широк — от динамики доменных структур [93–97] до параметрического возбуждения обменных спиновых волн [8, 9, 98, 99] и ударного изменения магнитного состояния вещества под действием мощного импульса света от фемтосекундного лазера [100–108].

В условиях ферромагнитного резонанса, кроме регулярных явлений типа умножения частоты, детектирования и параметрического усиления СВЧ-сигнала [109–116], имеют место разнообразные явления автоколебательного и стохастического характера — автомодуляция за порогом возбуждения обменных волн [8], колебания шумового характера в системе — феррит-резонатор [10, 11], стохастическая неустойчивость поверхностных магнитостатических волн в неоднородном поле типа «вала» [117–120].

Значительное разнообразие обеспечивает взаимодействие магнитных колебаний с упругими, в том числе возбуждение упругих колебаний в диапазоне СВЧ [13], упругая накачка спиновых волн [8], упругий резонанс в условиях параметрического возбуждения обменных волн [14], комбинационное рассеяние спиновых волн на упругих («спиновый эффект Мандельштама–Бриллюэна») [8, 15, 121–123].

Другой круг явлений дает взаимодействие магнитных колебаний с электромагнитными в резонаторе [10, 11], где также наблюдаются автомодуляционные и стохастические явления.

Важнейшей практической задачей является возбуждение мощного гиперзвука [16–20] с помощью магнитострикционного преобразователя, работающего в режиме ферромагнитного резонанса. Дополнительные особенности дает использование двухслойной структуры, позволяющей реализовать комбинационные колебания [72, 73]. По сравнению с линейным режимом показана возможность увеличения мощности гиперзвука в 30 раз, а в двухслойной структуре — до 100 раз с одновременным расширением полосы преобразователя до пяти раз [16–20, 72, 73].

Кроме возбуждения мощного гиперзвука была показана, возможность умножения и деления частоты, в том числе в дробном отношении [112, 113, 116].

Сложность явлений и необходимость использования для их интерпретации громоздкого математического аппарата стимулирует поиск более простых моделей, позволяющих в основных чертах описать наблюдаемую физику.

Весьма удачной в этом плане явилась предложенная в работе [17] и получившая дальнейшее развитие в [18–20] модель двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным. В этих работах, применительно к задаче о возбуждении мощного гиперзвука, рассматриваются сильно нелинейные колебания в магнитоупругой среде. В качестве главного элемента преобразователя используется нормально намагниченная ферритовая пластина, обладающая магнитоупругими свойствами. При этом роль одного из осцилляторов играет магнитная подсистема, в которой возбуждается ферромагнитный резонанс, а роль другого играет упругий резонатор, в котором возбуждаются упругие колебания по толщине ферритовой пластины.

Существенным недостатком предложенной модели является отсутствие прямого выражения параметров уравнений через параметры материала. Тем не менее, предложенная модель позволила выявить и описать различные режимы автоколебаний.

Дальнейшее развитие модель получила в рамках линейного и особенно квадратичного приближений [21–25]. Для интерпретации наблюдаемых явлений была предложена модель динамического потенциала, отражающая потенциальную энергию колебаний намагниченности, меняющуюся под действием упругого возмущения [26]. Наличие двух осцилляторов потребовало введения отдельного потенциала для каждого осциллятора. Относительно связи была отмечена важность характера и степени взаимодействия колебаний обоих осцилляторов. Были рассмотрены различные режимы вынужденных колебаний намагниченности и упругого смещения, в том числе имеющие автоколебательный и хаотический характер. Важным моментом явилось получение явных аналитических выражений, связывающих параметры предложенной системы уравнений с параметрами материала — намагниченностью и коэффициентами упругости.

Были предложены различные варианты систем уравнений для связанных осцилляторов, отличающиеся степенью и характером принятых приближений, а также отмечена важность дальнейшей математической разработки решения таких систем, отражающих те или иные стороны наблюдаемых явлений.

В работе [35], применительно к задачам о возбуждении гиперзвука [16–20, 72, 73] и магнитных колебаний в электродинамическом резонаторе [10, 11], описаны колебания регулярного и хаотического характера в условиях кубической нелинейности и квадратичной связи.

В работах [27–29] сообщается о проявлении нестационарного запаздывания возбуждения колебаний, имеющего место в режиме умножения частоты. Было показано, что развитие колебаний значительной амплитуды запаздывает относительно момента включения возбуждения на интервал времени, значительно превышающий времена релаксации обеих систем. Для интерпретации запаздывания была привлечена модель динамического потенциала [28–30]. Определенное количественное объяснение величина запаздывания нашла на основе механизма биений между собственными колебаниями первого осциллятора и возбуждающим сигналом, так что время запаздывания соответствовало времени первого периода биений.

В ходе дальнейших исследований, продолженных авторами работ [27–30], было отмечено, что механизм биений не всегда достаточным образом отражает реальную картину запаздывания. Также оставались неясными роль различных компонент системы уравнений, степени нелинейности и характера связи. Недостаточно рассматривалась роль релаксационных свойств и уровня возбуждения. Таким образом, ряд вопросов, касающихся явления запаздывания, оставался нерешенным.

Главной задачей настоящей работы является дальнейшая разработка модели нестационарного запаздывания, в первую очередь ее математической стороны с целью максимального упрощения, выделения главных характеристик и более подробной интерпретации наблюдаемых явлений.

9.2. Основные системы уравнений для связанных колебаний двух осцилляторов

Настоящая работа является развитием и в какой-то мере продолжением работ [21, 26, 35] (здесь — главы 1–4). В качестве первичных рассматриваются те же две основные задачи — возбуждение мощного гиперзвука на основе магнитострикционного преобразователя и возбуждение шумовых колебаний в ферритовом диске, помещенном в электродинамический резонатор.

В работе [35] показано, что обе задачи допускают интерпретацию посредством представления колебаний в системе из двух связанных осцилляторов, один из которых является гиромагнитным и обладает нелинейными свойствами, а другой — упругим или электродинамическим, в обоих случаях оставаясь линейным.

В математической трактовке обеих задач выявлено единство, то есть показано, что они сводятся к одной и той же системе из двух дифференциальных уравнений второго порядка. Первое уравнение соответствует колебаниям магнитной системы и содержит нелинейные слагаемые, второе уравнение соответствует упругой или электродинамической системе и является линейным.

Квадратичное приближение для намагнитченности позволило ввести динамический потенциал в виде степенной функции четвертого поряд-

ка по двум переменным. При этом оба уравнения и связь между ними приобрели дополнительные нелинейные составляющие, возникающие благодаря последовательному учету граничных условий. Полученная при этом обобщенная система имеет вид [26, форм. (46), (47)], [35, форм. (31), (32)]:

$$a_{11} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + a_{12} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + a_{13} \cdot x_1 + a_{14} \cdot x_2 + \\ + d_{11} x_1^2 + d_{12} x_1 x_2 + d_{13} x_2^2 + \\ + b_{11} \cdot x_1^3 + b_{12} \cdot x_1^2 x_2 + b_{13} \cdot x_1 x_2^2 + b_{14} \cdot x_2^3 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (9.1)$$

$$a_{21} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + a_{22} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + a_{23} \cdot x_2 + a_{24} \cdot x_1 + \\ + d_{21} x_1^2 + d_{22} x_1 x_2 + d_{23} x_2^2 + \\ + b_{21} \cdot x_1^3 + b_{22} \cdot x_1^2 x_2 + b_{23} \cdot x_1 x_2^2 + b_{24} \cdot x_2^3 = 0, \quad (9.2)$$

где коэффициенты a_{ik} , b_{ik} , d_{ik} определяются магнитными и упругими параметрами материала пластины. Явные выражения для этих коэффициентов приведены в работе [26, форм. (7)–(29) с учетом (6)].

Оба уравнения являются нелинейными до третьей степени и связь также является нелинейной до той же степени. Система как целое является симметричной, то есть замена индексов «1» на «2» и обратно структуры левых частей уравнений не меняет. Несимметричность возбуждения принципиальным моментом не является, так как второе уравнение также может быть дополнено подобным слагаемым.

В работе [35, форм. (28), (29)], из полной системы (9.1)–(9.2) была выделена часть, ответственная за получение ряда автомодуляционных режимов колебаний:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \delta_1 x_1^3 + \gamma_1 \cdot x_2^2 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (9.3)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (9.4)$$

Здесь $x_{1,2}$, $\beta_{1,2}$, $\omega_{1,2}$ — координатные переменные, параметры затухания и собственные частоты осцилляторов, δ_1 — параметр нелинейности первого осциллятора, $\gamma_{1,2}$ — коэффициенты связи, A_0 и ω_0 — амплитуда и частота возбуждающей силы. С целью приближения вида уравнений к традиционно используемому в задачах о колебаниях (см. напр. [1, стр. 27, форм. (2.20)]), в системе (9.1)–(9.2) выполнена следующая замена обозначений: $a_{11} \rightarrow 1$; $a_{12} \rightarrow \beta_1$; $a_{13} \rightarrow \omega_1^2$; $b_{11} \rightarrow \delta_1$; $d_{13} \rightarrow \gamma_1$; $a_{21} \rightarrow 1$; $a_{22} \rightarrow \beta_2$; $a_{23} \rightarrow \omega_2^2$; $a_{24} \rightarrow \gamma_1$, остальные коэффициенты положены равными нулю.

Эти уравнения совпадают с системой, впервые предложенной в работе [123] и исследовавшейся далее в работах [18–20], применительно к задаче о возбуждении мощного гиперзвука.

В работах [27–29] вместо слагаемого $\gamma_1 x_2^2$ были введены два слагаемых $\gamma_1 x_2$ и $\eta \cdot x_1^2 x_2$, первое из которых отвечает за линейную связь второго осциллятора с первым, а второе учитывает более высокую степень нелинейной связи. При этом система приобрела вид [27, форм. (6), (7)],

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = A \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (9.5)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (9.6)$$

В этой системе относительно (9.1), (9.2) произведены замены обозначений переменных: $a_{11} \rightarrow 1$; $a_{21} \rightarrow 1$; $a_{12} \rightarrow \beta_1$; $a_{22} \rightarrow \beta_2$; $a_{13} \rightarrow \omega_1^2$; $a_{23} \rightarrow \omega_2^2$; $a_{14} \rightarrow \gamma_1$; $a_{24} \rightarrow \gamma_2$; $b_{11} \rightarrow \delta$; $b_{12} \rightarrow \eta$; $A_0 \rightarrow A$. Остальные коэффициенты положены равными нулю. Явный вид коэффициентов a_{ik} , b_{ik} приведен в работе [18, форм. (7)–(29) с учетом (6)].

Замечание. Параметры слагаемых систем (9.5)–(9.6) и (9.3)–(9.4) являются нормированными, то есть разделенными на коэффициент при второй производной, что позволило привести этот коэффициент к единице. Поэтому далее не будем обращать внимания на конкретную размерность этих параметров, а будем их измерять в нормированных единицах без употребления соответствующих обозначений. Более подробно вопрос о нормировке рассмотрен в работе [27], где приведена связь между нормированными параметрами и реальными константами материала исходных задач.

9.3. Общий характер развития колебаний во времени

Система вида (9.5)–(9.6) исследовалась в работах [27–30]. Рассматривалось развитие колебаний во времени, происходящее после включения возбуждения. Было показано, что довольно характерная общая структура развития колебаний следующая. Сначала возбуждаются колебания весьма малой амплитуды (в большинстве случаев порядка 1–2 нормированных единиц). Эти колебания имеют характер, близкий к синусоидальному с четко выраженным периодом около 0,4–0,5 ед., однако амплитуда их может меняться в пределах 10–20%.

По прошествии некоторого промежутка времени, составляющего собственно запаздывание, амплитуда колебаний резким скачком увеличивается на 2–3 порядка, составляя около 100–500 ед. Эти колебания имеют характер, близкий к хаотическому, хотя максимальные выбросы амплитуды в некоторых случаях повторяются с периодом около тех же 0,4–0,5 ед.

Хаотические колебания с большой амплитудой имеют определенный порог по уровню возбуждения или начального смещения. Если этот порог не достигнут, то колебания остаются малоамплитудными при любом сколь угодно продолжительном промежутке времени.

При значительном превышении порога (как правило, в несколько раз), высокоамплитудные хаотические колебания возникают почти сразу после включения возбуждения, так что время запаздывания становится меньше одного полупериода малоамплитудных колебаний, то есть можно говорить о «пропадании» запаздывания. Однако хаос с высокой амплитудой в этом случае сохраняется, по-видимому, при сколь угодно большом уровне возбуждения (по крайней мере на порядок выше порога и более).

Замечание. В настоящей работе численное решение системы (9.5)–(9.6) и систем, полученных далее на ее основе, выполнялось методом Рунге–Кутты четвертого порядка [54, стр. 702], для которого характерно последовательное вычисление переменных и их производных с определенным шагом по времени. Исследуемые в настоящей работе высокоамплитудные хаотические колебания в общем случае имеют фрактальный характер [91, 92], частично отмечавшийся ранее в работе [28]. Вообще говоря, фрактальность является достаточно общим свойством хаотических систем [4, лекция 11]. При этом конкретная структура хаотических колебаний при уменьшении шага по времени окончательно не стабилизируется, что в настоящей работе было проверено до шага 10^{-8} ед. времени. Было установлено, что при изменении шага от 10^{-2} до 10^{-8} время запаздывания меняется в ту или иную сторону в пределах $\pm 10\%$. Поэтому чтобы соблюсти единство приведенных далее результатов, шаг развертки по времени всегда выбирался единым, равным $5 \cdot 10^{-4}$ ед. времени. Такая величина шага при частоте собственных колебаний второго осциллятора $\omega_2 = 15$ составляла около 10^{-3} от их периода, так что развертка по времени получалась достаточно плавной. Дальнейшее уменьшение шага хотя и приводило к некоторым вариациям времени запаздывания (не более 10%), однако, не внося заметных деталей в рассматриваемые явления, значительно увеличивало время машинного счета, так что было признано авторами нерациональным. В качестве условного приближения можно считать, что приведенные далее результаты имеют точность $\pm 10\%$. Тем не менее, по мнению авторов, более подробное исследование фрактального характера описываемых явлений вполне достойно того, чтобы составить предмет для отдельной работы.

9.4. Основные задачи настоящей работы

Итак, в работах [27–30] показано, что при определенных условиях, в первую очередь в режиме умножения частоты, возбуждение высокоамплитудных хаотических колебаний в системе (9.5)–(9.6) происходит с запаздыванием, время которого на порядок и более может превышать времена релаксации обеих колебательных систем, определяемые параметрами β_1 и β_2 . В этих работах параметры линейной связи для обоих осцилляторов были приняты равными друг другу, то есть полагалось,

что $\gamma_1 = \gamma_2$ и для такого общего параметра было введено единое обозначение γ . Были выявлены четыре основных режима, соответствующие различным уровням параметра γ , условно названные «двухступенчатым запаздыванием», «плавным насыщением», «перемежающимися скачками» и «малоамплитудной релаксацией». По мере увеличения линейной связи эти режимы поочередно сменяли друг друга.

В гл. 7, 8 была дана определенная интерпретация запаздывания на основе модели динамического потенциала. Выявлена роль линейной связи γ между осцилляторами и отмечена крайняя важность в формировании режимов также нелинейной связи, определяемой параметром η .

Тем не менее еще в работе [29] был приведен ряд вопросов, исчерпывающие ответы на которые до конца не были получены. К числу таких вопросов относятся следующие (нумерация соответствует принятой в гл. 8):

- 1) природа первичного запаздывания возбуждения колебаний;
- 4) роль синхронизма между частотами обоих осцилляторов и возбуждающего воздействия;
- 5) роль времен релаксации первого и второго осцилляторов и необходимость их различия для реализации запаздывания;
- 8) необходимость умножения частоты второго осциллятора относительно частоты первого.

Из перечисленных вопросов, по-видимому, главным следует считать первый, так как первичное запаздывание присутствует во всех режимах и наблюдается даже при малой величине линейной связи. Вопросы 4 и 8 в известной мере являются едиными, так как касаются частотных параметров системы. Вопрос 5 поставлен по той причине, что различие времен релаксации осцилляторов для реализации запаздывания в рамках гл. 6–8 признано весьма важным: при совпадении этих времен запаздывание не наблюдалось.

В настоящей работе авторы предполагают основное внимание уделить первому вопросу, так как именно он является наиболее общим и на настоящий момент не интерпретированным. Остальные вопросы будут считаться подчиненными, и обращение к ним будет производиться по мере необходимости. Рассмотрение будет выполняться на основе системы (9.5)–(9.6).

9.5. Время запаздывания при изменении внешнего возбуждения и начального смещения

Итак, начнем рассмотрение с системы (9.5)–(9.6), имеющей вид:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = A \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (9.7)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (9.8)$$

Для подробного изучения эта система является довольно сложной, так как содержит в общей сложности девять параметров, которые могут меняться независимо. Для упрощения анализа пойдем по пути выявления роли отдельных слагаемых обоих уравнений, с тем, чтобы часть из них можно было бы исключить и оставить только те, которые принципиально необходимы для реализации запаздывания возбуждения высокоамплитудных хаотических колебаний.

Прежде всего обратим внимание на возбуждение, осуществляемое единственным слагаемым $A \cdot \cos(\omega_0 t)$, находящимся в правой части уравнения (9.7). Именно через это слагаемое осуществляется поставка энергии в систему, которая далее рассеивается за счет диссипативных слагаемых $\beta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt}$ и $\beta_2 \cdot \frac{dx_2}{dt}$. Если диссипативные слагаемые убрать, то размах колебаний будет расти неограниченно, однако если при этом убрать возбуждение, то колебания могут установиться на стационарном уровне. Для их возбуждения в этом случае будет необходимо какое-то начальное смещение того или другого осциллятора. Таким образом, полагая $A = 0$, а также $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = 0$, приводим систему (9.7)–(9.8) к виду:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = 0; \quad (9.9)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (9.10)$$

Исходя из общих принципов колебаний можно полагать, что, благодаря отсутствию диссипации при условии сохранения механизмов превращения потенциальной энергии в кинетическую и обратно (то есть наличия второй производной смещения и возвращающей силы), система будет колебаться вокруг какого-то среднего положения с частотой, определяемой ее собственными параметрами. Для сообщения системе начального запаса энергии следует задать начальное смещение или скорость одного из осцилляторов.

Необходимо проверить, возможна ли в такой системе задержка установления колебаний после того, как она будет отпущена в свободное движение после задания определенной начальной энергии.

Для проверки такого положения сравним колебания в полной системе (9.7)–(9.8) с колебаниями в системе (9.9)–(9.10) при одинаковых параметрах, не отвечающих за диссипацию и начальное возбуждение, то есть $\omega_1^2, \omega_2^2, \gamma_1, \gamma_2, \delta, \eta$.

Обратимся к рис. 9.1 и рис. 9.2. Первый из них относится к колебаниям первого осциллятора, второй — второго. Левый столбец обоих рисунков соответствует системе (9.7)–(9.8), правый — системе (9.9)–(9.10).

Для построения левого столбца на обоих рисунках приняты следующие параметры: $\omega_1 = 5$; $\omega_2 = 15$; $\beta_1 = 1,0$; $\beta_2 = 0,1$; $\gamma_1 = 10$; $\gamma_2 = 10$;

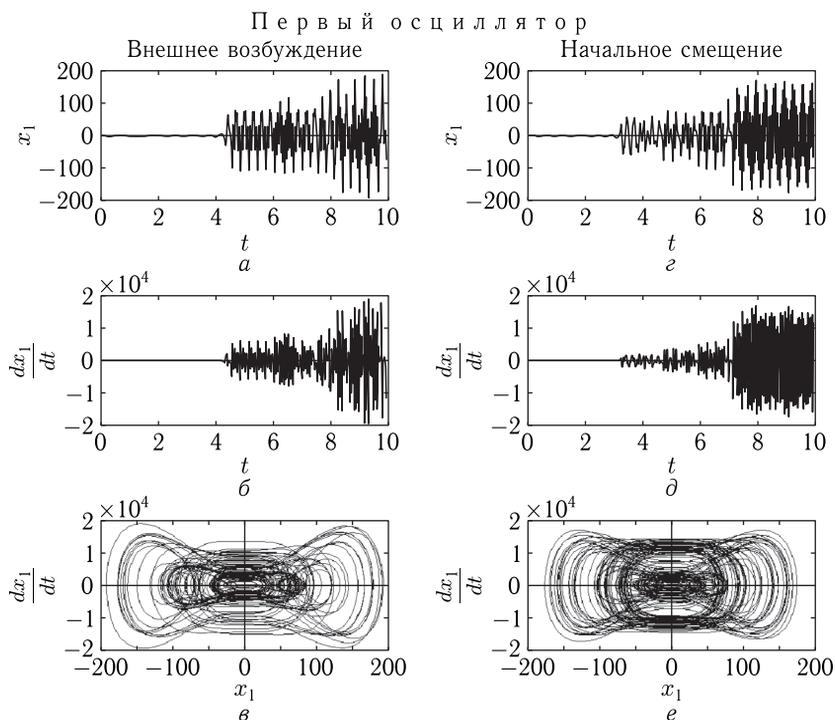


Рис. 9.1. Колебания ПЕРВОГО осциллятора при внешнем возбуждении (a , b , v) и задании начального смещения первого осциллятора (z , d , e). a , z — развитие колебаний смещения во времени; b , d — развитие колебаний производной от смещения во времени; v , e — параметрические (фазовые) портреты. Эпюры a , b , v соответствуют решению системы (9.7)–(9.8), эпюры z , d , e соответствуют решению системы (9.9)–(9.10)

$\delta = 5$; $\eta = -200$; $A = 70$; $\omega_0 = 5$. При этом начальные значения смещений и скоростей обоих осцилляторов равнялись нулю. Такие параметры выбраны близкими к использовавшимся в работах [27–30] (см. напр. рис. 2 в работе [27]), при которых эффект запаздывания проявлялся весьма ярко. Уровень возбуждения, по сравнению с принятым в работе [27] значением $A = 50$, был выбран несколько большим ($A = 70$), чтобы запаздывание реализовалось при несколько меньшем времени, чем в той работе (там — около 12 ед., здесь будет около 4 ед.). Проверка показала, что каких-либо принципиальных отличий такое изменение не вносит.

Для построения правого столбца на обоих рисунках приняты следующие параметры: $\omega_1 = 5$; $\omega_2 = 15$; $\beta_1 = 0$; $\beta_2 = 0$; $\gamma_1 = 10$; $\gamma_2 = 10$; $\delta = 5$; $\eta = -200$; $A = 0$; $\omega_0 = \text{любое}$. Начальные условия задавались смещением первого осциллятора: $x_{10} = 2,15$. Начальное смещение

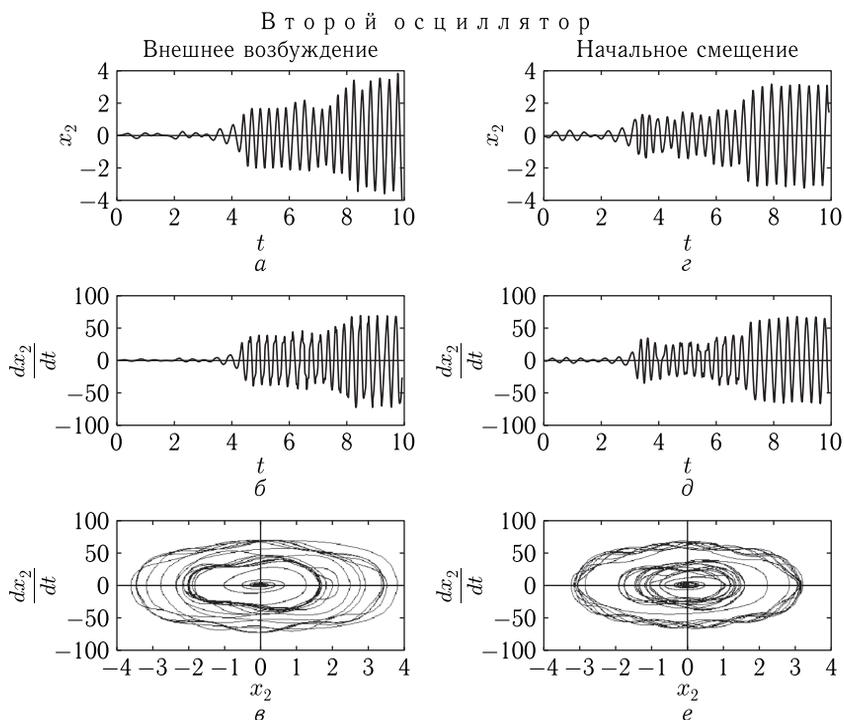


Рис. 9.2. Колебания ВТОРОГО осциллятора при внешнем возбуждении (а, б, в) и задании начального смещения первого осциллятора (г, д, е). а, г — развитие колебаний смещения во времени; б, д — развитие колебаний производной от смещения во времени; в, е — параметрические (фазовые) портреты. Эпюры а, б, в соответствуют решению (9.7)–(9.8), эпюры г, д, е соответствуют решению системы (9.9)–(9.10)

второго и начальные скорости обоих осцилляторов полагались равными нулю.

В случае внешнего возбуждения время запаздывания равно 4,1 ед. времени, в случае начального смещения — 3,4 ед. времени. Для построения рисунков соотношение уровня возбуждения $A = 70$ и начального смещения $x_{10} = 2,15$ специально были подобраны такими, чтобы времена запаздывания в обоих случаях примерно совпадали. Единственной целью такого подбора было повышение наглядности рисунков и удобство их сравнения. Выбор других значений возбуждения и смещения принципиальной картины не меняет.

Из физического содержания систем (9.7)–(9.8) и (9.9)–(9.10) видно, что в первом случае поступление энергии в систему осуществляется внешним возбуждением, а рассеяние энергии — механизмами диссипации, чем поддерживается ее постоянный уровень, тогда как

во втором — энергия не поступает и не рассеивается, а необходимый ее уровень (постоянный запас) задается начальным отклонением (то есть начальной потенциальной энергией) первого осциллятора.

Сравнение рисунков по парным эпюрам каждого из горизонтальных рядов показывает, что характер колебаний в обоих случаях один и тот же. Для первого осциллятора сразу после окончания запаздывания развиваются близкие к хаотическим колебания, амплитуда которых сначала поддерживается постоянной, а после некоторого промежутка времени еще одним скачком увеличивается примерно в два раза. Подобный характер развития колебаний отмечался в гл. 7 и назван там «двухступенчатым запаздыванием». Примерно такой же характер развития колебаний имеет место и для второго осциллятора (рис. 9.2).

Параметрический портрет для первого осциллятора (рис. 9.1, *в* и рис. 9.1, *е*) имеет вид «горизонтальной восьмерки», свойственный колебаниям в системе, динамический потенциал которой имеет два минимума [27, рис. 4], [5, рис. 5].

Параметрический портрет для второго осциллятора (рис. 9.2, *в* и рис. 9.2, *е*) вместо восьмерки имеет вид горизонтального овала, так как динамический потенциал для него имеет всего один минимум, однако общий характер колебаний подобен колебаниям первого осциллятора, так как возбуждение второго происходит за счет линейной связи, описываемой коэффициентом γ_2 в уравнениях (9.8) и (9.10).

Таким образом, можно видеть, что в обоих случаях, как при внешнем возбуждении, так и при задании начального смещения, характер колебаний, описываемых системами (9.7)–(9.8) и (9.9)–(9.10) практически совпадает. Некоторые более тонкие вопросы будут рассмотрены далее.

Замечание. В традиционной литературе относительно кривых, приведенных на рис. 9.1, *в*, *е* и рис. 9.2, *в*, *е*, как правило, используется термин «фазовый портрет» (см. напр. [2, стр. 12, рис. 1.5]). При этом по горизонтальной оси откладывается координата, а по вертикальной ее производная по времени (или в механике — импульс). Однако такой же термин употребляется в ряде других случаев, например при анализе системы Лоренца, когда по всем осям откладываются переменные (см. напр. [4, стр. 57, рис. 4.2]). Поэтому в рамках настоящей работы с целью единообразия, не меняя физической сущности исследуемого объекта, используется более общий термин «параметрический портрет», охватывающий различные виды портретов, рассматриваемые в литературе.

9.5.1. Интервал реализации запаздывания

В гл. 6, посвященной эффекту запаздывания при внешнем возбуждении, показано, что время запаздывания зависит от уровня возбуждения значительным образом. Соответствующая зависимость приведена в этой работе на рис. 6.4. Установлено, что реализация запаздывания

требует превышения уровня возбуждения выше порога, при принятых там параметрах составляющего около 32 ед. Вблизи порога, сразу после его превышения, время запаздывания τ_S стремится к достаточно большой величине (по данным гл. 6 порядка 155 ед.), причем испытывает несколько скачков, а при дальнейшем превышении (на 3–5 ед.) успокаивается и по мере увеличения возбуждения спадает по закону, близкому к обратной пропорциональности. Поскольку времена запаздывания для обоих осцилляторов совпадают, на данном этапе ограничимся рассмотрением запаздывания только для первого осциллятора и прежде всего сравним запаздывание при внешнем возбуждении (система (9.7)–(9.8)) и при изменении начального смещения в отсутствие возбуждения (система (9.9)–(9.10)).

Обратимся к рис. 9.3, где показаны зависимости времени запаздывания от уровня внешнего возбуждения (*а*) и начального смещения (*б*). При этом рис. 9.3, *а*, с точностью до интервалов изменения параметров, представляет ту же зависимость, что приведена на рис. 6.4 гл. 6. На рис. 9.3, *б* построена подобная зависимость, имеющая место при изменении начального смещения. Обе зависимости ограничены максимальным временем запаздывания 10 ед., так как именно ниже этого значения их вид является наиболее важным для настоящего рассмотрения (изображение представляется в удобном для анализа масштабе). Порог по уровню возбуждения составлял около 40 ед. Соответствующий порог начального смещения — около 1,6 ед. Ниже того и другого порогов запаздывание отсутствовало. При этом до порога колебания имели близкий к регулярному характер, причем амплитуда их была крайне малой и составляла порядка 1–2 ед. По достижении порога амплитуда колебания резко возрастала, как правило, на два-три порядка, составляя 100–200 ед, причем их характер был близок к хаотическому. То есть общая структура колебания полностью соответствовала описанной в разделе 9.5. В непосредственной близости от порога (по возбуждению выше на 1–2 ед., по смещению на 0,02 ед.) максимальное значение запаздывания составляло около 40 ед. (находится за пределами обоих рисунков).

Из сравнения обеих частей рис. 9.3 можно видеть, что обе зависимости имеют сходный характер.

На рис. 9.3, *а* точки соответствуют решению системы (9.7)–(9.8), а сплошная кривая построена по формуле:

$$\tau_S = \frac{200}{A - 32} - 0,5. \quad (9.11)$$

Можно видеть, что эта формула по структуре близка к приведенной в гл. 6, так что тоже представляет собой обратную пропорциональность.

Для построения рис. 9.3, *б*, поскольку там по горизонтальной оси другой масштаб, в формуле (9.11) была выполнена замена переменной;

$$A \rightarrow 115 \cdot (x_{10} - 1,25), \quad (9.12)$$

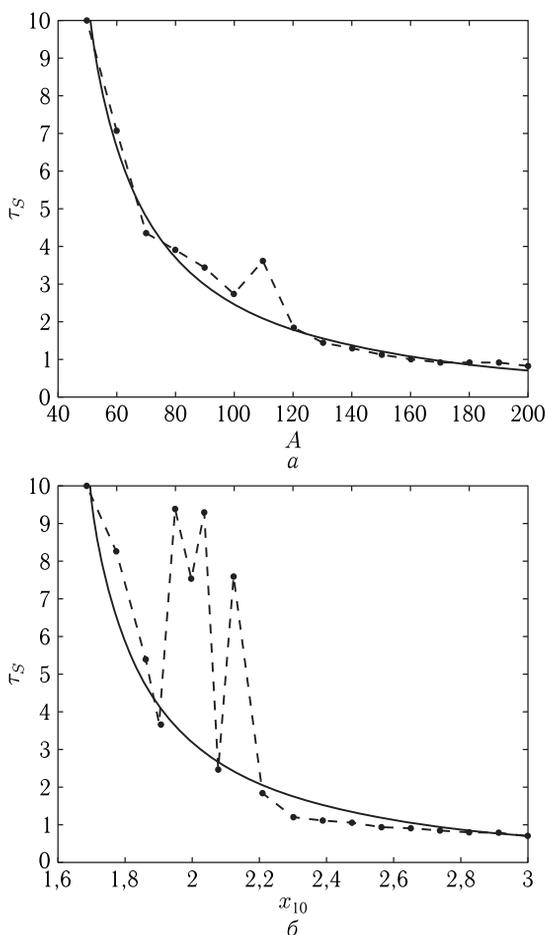


Рис. 9.3. Зависимость времени запаздывания от уровня внешнего возбуждения (а) и начального смещения (б). Точки — результаты машинного эксперимента. Пунктирные линии получены соединением точек отрезками прямых. Сплошная кривая на эюре «а» построена по формуле (9.11), сплошная кривая на эюре «б» — по формуле (9.13). Параметры — те же, что на предыдущих рисунках

что привело к формуле

$$\tau_S = \frac{200}{115 \cdot (x_{10} - 1,25) - 32} - 0,5, \quad (9.13)$$

которая и использовалась при построении кривой на рис. 9.3, б.

Из рис. 9.3, а можно видеть, что аппроксимирующая формула отражает реально наблюдаемую зависимость вполне приемлемым образом. Имеет место только один небольшой скачок вблизи $A = 100$, так что τ_S

в этой точке увеличивается примерно в два раза, тогда как точки по обе стороны от этого значения ложатся на кривую с точностью около 5 %.

Из рис. 9.3, б можно видеть, что при изменении x_{10} от 1,7 до 1,9, а также выше $x_{10} = 2,2$, точки хорошо ложатся на аппроксимирующую кривую. В области от 1,9 до 2,1 имеются скачки, соответствующие увеличению τ_S примерно в 2–3 раза, после которых величина τ_S опять возвращается на кривую аппроксимации.

Таким образом, из сравнения рис. 9.3, а и рис. 9.3, б видно, что зависимости времени запаздывания, как при изменении уровня возбуждения, так и при изменении начального смещения, с точностью до нескольких скачков в довольно узких интервалах изменения того и другого параметров, вполне приемлемо описываются одной и той же аппроксимирующей зависимостью, имеющей характер обратной пропорциональности.

Замечание. Наличие скачков, по-видимому, связано со стохастическим характером явления запаздывания в целом. Проверка показывает, что при времени, меньшем τ_S , то есть до резкого скачка амплитуды, начальные колебания уже имеют нерегулярный характер, как правило, близкий к синусоиде, амплитуда которой на каждом периоде меняется в пределах до 20 % и более. Такое изменение амплитуды во времени носит случайный характер. Если положить, что резкое увеличение амплитуды колебаний при окончании запаздывания соответствует преодолению начальными колебаниями какого-то порога, то амплитуда таких колебаний, меняющаяся во времени случайным образом, может достичь этого порога тоже в случайный момент времени. Поэтому время запаздывания τ_S , определяемое преодолением порога, при случайном характере допороговых колебаний также может меняться случайным образом. Более подробная интерпретация природы скачков требует исследования, могущего составить предмет для отдельной работы.

9.5.2. Характер колебаний по обе стороны от интервала эффективного запаздывания

Из рис. 9.3 видно, что запаздывание реализуется наиболее эффективным образом при уровне возбуждения или начального смещения, заключенного в пределах определенного интервала своих значений. При возбуждении менее 40 ед. или смещении менее 1,6 ед. запаздывание отсутствует. При возбуждении более 200 ед. и смещении более 3 ед. запаздывание составляет менее 1 ед. времени, что меньше максимального значения (здесь — 10 ед.) более чем на порядок. Интервал изменения параметров в этих пределах (то есть по возбуждению от 40 до 200 ед. и по смещению от 1,6 до 3,0 ед.) можно охарактеризовать как «интервал эффективного запаздывания», в котором запаздывание реализуется наиболее явным образом.

Для полноты картины сопоставления роли внешнего возбуждения и начального смещения, рассмотрим характер колебаний по обе

стороны от этого интервала. Как и ранее, ограничимся рассмотрением колебаний только первого осциллятора, так как второй ведет себя сходным образом.

На рис. 9.4 показано развитие колебаний и их производных во времени, а также соответствующие параметрические портреты при уровне возбуждения, не достаточном для реализации запаздывания (левый столбец), а также при уровне настолько большом, что запаздывание становится малым (правый столбец).

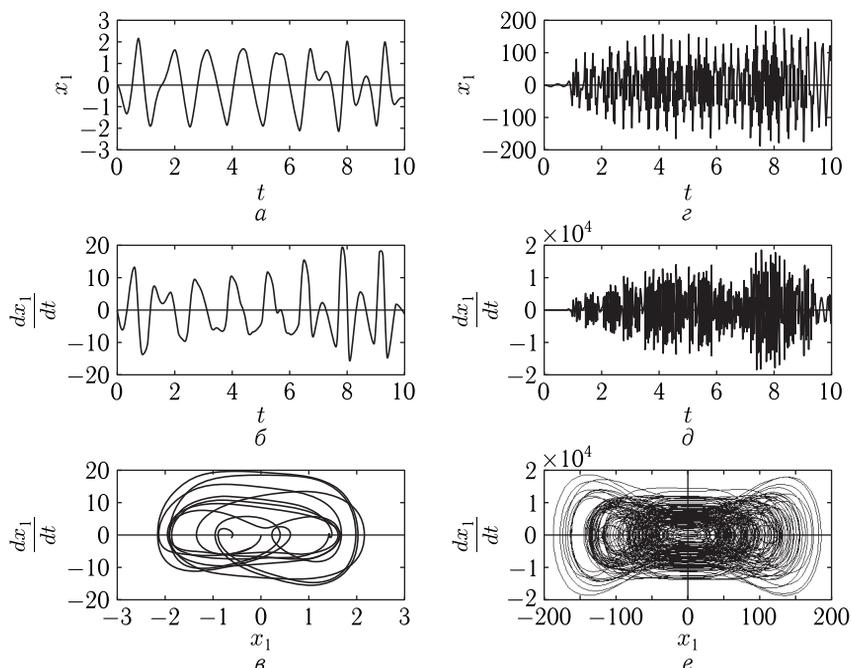


Рис. 9.4. Колебания (а, з), их производные (б, д) и параметрические портреты (в, е) для первого осциллятора при значениях возбуждения за пределами интервала реализации запаздывания. Левый столбец (а, б, в) — $A = 30$; Правый столбец (з, д, е) — $A = 200$

Из рисунка можно видеть, что при уровне возбуждения, не достаточном для реализации запаздывания (левый столбец), колебания все же являются нестационарными и имеют вид искаженной синусоиды, амплитуда которой меняется почти хаотическим образом. Амплитуда колебаний составляет около 2 ед., а амплитуда производной — около 15 ед., иногда достигая 20 ед. Параметрический портрет имеет вид горизонтального овала с едва намечающимися следами горизонтальной восьмерки. Траектории идут в мешающемся порядке, замечая по образующей более половины своего максимального размаха. Такой вид

траекторий граничит с хаосом, что отражает неустойчивость амплитуды колебаний и их производной на рис. 9.3, *а* и рис. 9.3, *б*.

При уровне возбуждения, находящемся далеко за пределами порога, где время запаздывания уже упало более чем на порядок (правый столбец), как сами колебания, так и их производная имеют четко выраженный хаотический характер. Амплитуда колебаний составляет около 150–170 ед., амплитуда производной достигает $1,5 \cdot 10^4$ ед. Оба эти значения превышают таковые до порога более чем на два порядка. Параметрический портрет имеет четко выраженный характер горизонтальной восьмерки с сильно замазанной сердцевинкой и размазанными крыльями. В целом картина полностью аналогична представленной на рис. 9.1, *а*, *б*, *в*, с тем отличием, что там время запаздывания составляет около 4 ед., а здесь оно уменьшено до 1 ед.

Рассмотрим теперь те же колебания, возбуждаемые начальным смещением, для чего обратимся к рис. 9.5.

На этом рисунке левый столбец опять соответствует заданию смещения ниже порога запаздывания, а правый — превышению этого

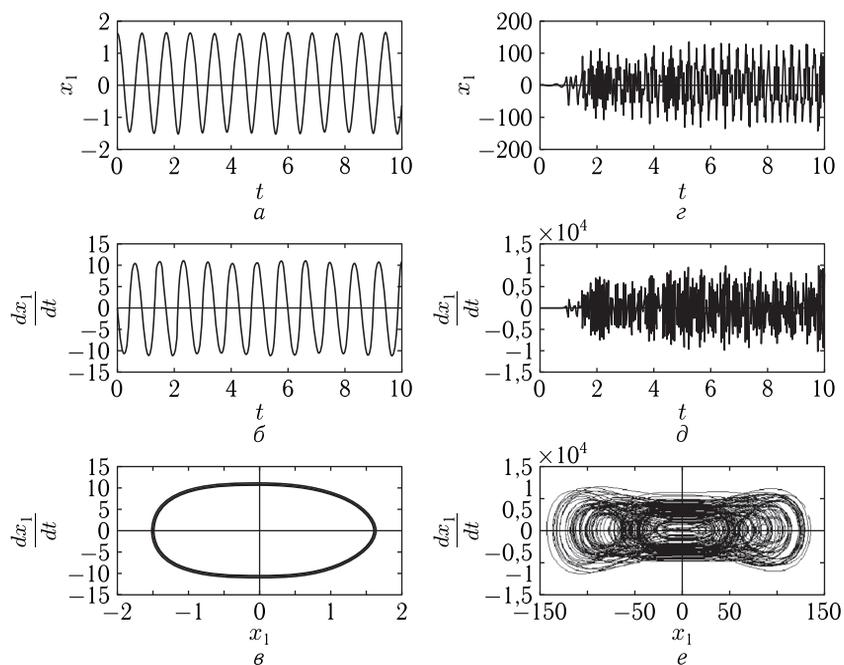


Рис. 9.5. Колебания (*а*, *z*), их производные (*б*, *д*) и параметрические портреты (*в*, *е*) для первого осциллятора при значениях начального смещения за пределами интервала реализации запаздывания. Левый столбец (*а*, *б*, *е*) — $x_{10} = 1,50$; Правый столбец (*z*, *д*, *е*) — $x_{10} = 2,70$

порога до величины, когда время запаздывания уменьшается более чем на порядок от максимальной величины.

В левом столбце колебания и их производная опять имеют вид синусоиды, однако здесь, в отличие от предыдущего случая, синусоида почти правильная и ее амплитуда сохраняется с точностью до нескольких процентов. В соответствии с этим параметрический портрет имеет вид горизонтального овала почти без размазки, хотя дробный характер траекторий все же заметен (превышает ширину линии рисунка в 3–5 раз). Проверка показывает, что при большем отклонении от порогового значения, например при $x_{10} = 1,00$ ед. и менее, нестационарный характер обоих синусоид все же проявляется, однако девиация амплитуды составляет не более 10%. Амплитуды синусоид колебаний и производных составляют около 1,7 ед. и 10 ед. соответственно, что довольно близко к таким же значениям при внешнем возбуждении (рис. 9.4, а, б, 2,0 и 15 ед. соответственно). Параметрический портрет по размерам также близок к приведенному на рис. 9.4, в, однако отличается значительно более высокой упорядоченностью.

При начальном смещении, превышающем порог настолько, что время запаздывания упало уже более чем на порядок, характер колебаний и их производной полностью хаотический. Амплитуда колебаний составляет около 100 ед., а амплитуда производной — около $0,9 \cdot 10^4$ ед. Параметрический портрет имеет вид сильно размазанной горизонтальной восьмерки, полностью соответствующей хаотическому характеру образующих ее колебаний и их производной. Картина также аналогична представленной на рис. 9.1, г, д, е с тем отличием, что там время запаздывания составляет около 3,5 ед., а здесь — меньше 1 ед.

В целом, из сравнения рис. 9.4 с рис. 9.5 можно видеть, что в обоих случаях как внешнее возбуждение, так и начальное смещение, за незначительными отклонениями, приводят к одним и тем же результатам: колебания и их производные за пределами интервала эффективного запаздывания ведут себя вполне сходным образом.

9.6. Различные начальные условия

Согласно общим положениям теории колебаний, начальные условия для системы (9.9)–(9.10) можно задать не только смещением первого осциллятора, но и смещением второго, а также заданием скоростей каждого из осцилляторов в отдельности или любым сочетанием этих параметров, в том числе всех вместе.

Для проверки такого положения обратимся к рис. 9.6, где показано развитие колебаний первого осциллятора во времени при задании различных значений начальных параметров. При построении рисунка задавался только один параметр, а остальные начальные параметры полагались равными нулю. Для удобства наблюдения значения параметров подобраны так, чтобы времена запаздывания во всех случаях приходились вблизи середины рисунка. На рисунке отражены коле-

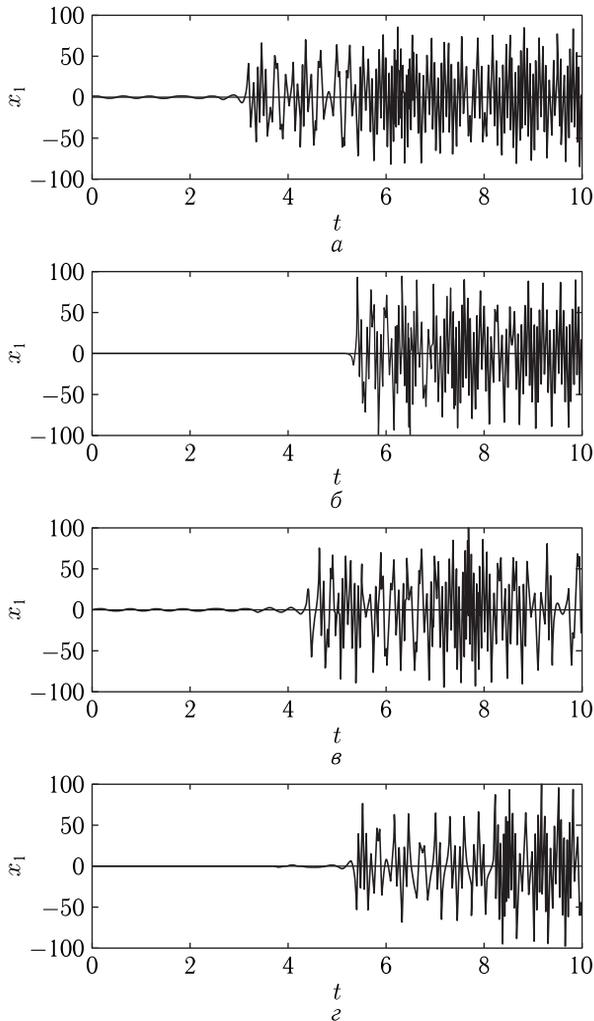


Рис. 9.6. Колебания первого осциллятора при задании различных значений начальных параметров: $a - x_{10} = 2,16$; $б - x_{20} = 1,90$; $в - (dx_1/dt)_0 = 15,10$; $г - (dx_2/dt)_0 = 10,00$. Остальные параметры — те же, что на предыдущих рисунках

бания только первого осциллятора. Проверка показывает, что второй осциллятор, а также производные колебаний обоих осцилляторов ведут себя аналогичным образом.

Из рисунка можно видеть, что запаздывание реализуется при задании смещений или скоростей любого из осцилляторов. Сочетание каких либо двух начальных параметров, как правило, позволяет уменьшить

каждый из них в 3–4 раза при сохранении времени запаздывания тем же самым. Так например, время запаздывания около 5 ед. реализуется при одновременном задании $x_{10} = 0,5$ ед. и $x_{20} = 0,5$ ед., то есть когда каждый из параметров принимает значение примерно в 4 раза меньшее, чем принято при построении рис. 9.6, а, б.

Таким образом, можно полагать, с точки зрения возможности реализации запаздывания, выбор задания того или иного начального параметра критичным не является.

9.7. Эквивалентность систем с внешним возбуждением и начальным смещением

В результате проделанной работы можно сделать предварительный вывод. Сравнение характера колебаний, описываемых системами (9.7)–(9.8) и (9.9)–(9.10), показывает их весьма значительное сходство. Обе системы допускают развитие высокоамплитудных хаотических колебаний с соответствующим запаздыванием, а также отражают последующие развитие таких колебаний в одинаковой степени. Таким образом, можно говорить об эквивалентности возбуждения колебаний системы из двух осцилляторов как внешним воздействием, так и заданием начального смещения. При этом как высокоамплитудный хаос, так и запаздывание его развития реализуются в обеих этих системах примерно одинаковым образом.

Причиной эквивалентности систем является тот факт, что в обоих случаях динамические потенциалы обоих осцилляторов являются одними и теми же. При этом потенциал первого осциллятора имеет два минимума, разделенные определенным максимумом. В пользу двух минимумов говорит характер параметрического портрета в виде горизонтальной восьмерки. При малом уровне возбуждения или начального смещения колебания происходят в одном из минимумов, не выходя за его пределы. Для того, чтобы реализовалось запаздывание, максимальный уровень потенциальной энергии должен превысить максимум, расположенный между минимумами. Это превышение как раз определяет порог запаздывания. После превышения колебания уже не ограничиваются одним минимумом, а происходят в пределах всего потенциала в целом, в результате чего их размах, то есть амплитуда, резко увеличивается.

Следует заметить, что приведенная здесь трактовка предполагает, что потенциал первого осциллятора заведомо имеет два минимума. При этом в случае недостаточной амплитуды колебания происходят в окрестности одного из минимумов, центр которого смещен в ту или иную сторону относительно нулевого значения координаты. Однако подробное рассмотрение рисунков, например рис. 9.1, а, рис. 9.1, г и других подобных, показывает, что колебания до момента роста амплитуды,

то есть в течение времени запаздывания, происходят не сбоку, а точно в нуле координаты x_1 .

Причина локализации малых колебаний вблизи нуля состоит в динамическом характере потенциала первого осциллятора. Этот потенциал имеет вид (гл. 6):

$$U = \frac{\omega_1^2}{2} \cdot x_1^2 + \gamma_1 \cdot x_1 x_2 + \frac{\delta}{4} \cdot x_1^4 + \frac{\eta}{3} \cdot x_1^3 x_2. \quad (9.14)$$

Дифференцирование этого выражения по x_1 дает потенциальные группы слагаемые уравнений (9.7) или (9.9). При этом переменную x_2 следует рассматривать как постоянный параметр. Влияние этого параметра на формирование минимумов потенциала подробно рассмотрено в гл. 6. Для построения потенциала используются те же параметры, что приняты здесь. Выполнен анализ характера динамического потенциала первого осциллятора при различных значениях амплитуды второго. Показано, что в отсутствие колебаний второго осциллятора потенциал первого имеет единственный минимум, приходящийся на $x_1 = 0$. По мере увеличения x_2 , после достижения критического значения около 1,2 ед., минимум при $x_1 = 0$ раздваивается и замещается максимумом, а новые минимумы резко разъезжаются в противоположные стороны, стремясь к большим значениям $\pm x_1$, что проявляется как скачкообразный рост амплитуды колебаний.

В гл. 6 интерпретация времени запаздывания выполнена на основе анализа времен релаксации того и другого осцилляторов. Отмечено, что необходимым условием проявления запаздывания является сильное различие этих времен релаксации. Характерные примеры различия таких времен на порядок в ту или иную сторону приведены в гл. 6. Однако там же отмечена недостаточность модели различия времен релаксации для полной интерпретации картины явлений. Сказано, что «вопрос о роли различия времен релаксации осцилляторов требует более подробного исследования». Далее высказано предположение о том, что «динамический характер потенциала требует синхронизма между колебаниями обоих осцилляторов», а также утверждается, что «при равенстве частот запаздывание отсутствует при любых значениях параметров». В качестве осторожного предположения сказано: «видимо, требование синхронизма и является причиной, почему запаздывание проявляется только в режиме умножения частоты».

В гл. 6 все исследования выполнены на основе системы (9.7)–(9.8). Однако выполненное выше сравнение этой системы с системой (9.9)–(9.10) показывает, что различие времен релаксации для проявления запаздывания необходимым не является. Действительно, в системе (9.9)–(9.10) релаксация как таковая отсутствует ($\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$), а запаздывание проявляется в такой же степени, как в системе (9.7)–(9.8). Можно полагать, что различие времен релаксации необходимо лишь при внешнем возбуждении, то есть тогда, когда релаксация

сама по себе является необходимой, так как предотвращает уход системы на бесконечность.

Таким образом, вопрос 5 из раздела 9.4 (или с тем же номером в гл. 8), по крайней мере относительно системы с начальным смещением, можно считать решенным.

Возвращаясь к сравнению систем (9.7)–(9.8) и (9.9)–(9.10), можно утверждать, что безразлично, за счет чего происходит запаздывание развития колебаний: за счет большой амплитуды внешнего возбуждения или за счет достаточно высокого уровня начального смещения, так как развитие колебаний и их начальное запаздывание в обоих случаях происходят одинаковым образом.

Несмотря на столь важный факт эквивалентности систем, а также возможности интерпретации порога запаздывания и резкого скачка амплитуды на основе модели потенциала, остаются открытыми три вопроса.

1. Является ли условие синхронизма или кратного соотношения частот осцилляторов необходимым для проявления запаздывания?

2. Чем определяется время запаздывания и почему оно столь велико, что многократно превышает периоды собственных колебаний обоих осцилляторов?

3. Почему характер колебаний после преодоления порога становится хаотическим?

Можно полагать, что в какой-то мере найти ответы на эти вопросы поможет максимальное упрощение системы (9.9)–(9.10) с условием сохранения явления запаздывания.

Из сравнения структуры систем (9.7)–(9.8) и (9.9)–(9.10) видно, что во второй отсутствуют только внешнее возбуждение и параметры затухания при первых производных (A , β_1 , β_2 положены равными нулю). Параметры линейной связи γ_1 , γ_2 , кубической нелинейности δ и нелинейной связи η , а также частоты свободных колебаний осцилляторов ω_1 , ω_2 до сих пор в обеих системах полагались одинаковыми. То есть, несмотря на явное упрощение, система (9.9)–(9.10) все еще остается достаточно сложной. С целью дальнейшего упрощения системы, рассмотрим теперь роль перечисленных параметров в возможности реализации запаздывания более подробно.

9.8. Произвольное соотношение частот осцилляторов

В гл. 6 высказано утверждение, что эффект запаздывания имеет место только в условиях умножения частоты, причем наиболее ярко проявляется в том случае, когда частота второго осциллятора ω_2 в три раза превышает частоту первого осциллятора ω_1 , то есть выполняется соотношение $\omega_2 = 3\omega_1$. В гл. 6 исследовалась система (9.7)–(9.8), соответствующая внешнему возбуждению и наличию диссипации у каждого из осцилляторов. Предметом настоящей работы является система (9.9)–(9.10), в которой внешнее возбуждение отсутствует, а коле-

бания в системе возбуждаются путем задания начального смещения или скорости одного из осцилляторов. Диссипация в осцилляторах также отсутствует, что является необходимым условием реализации незатухающего режима.

Рассмотрим теперь, какую роль в такой системе играет соотношение между частотами осцилляторов. Предварительная проверка показала, что запаздывание имеет место при произвольном значении такого соотношения, требуется только определенный уровень начального смещения.

Для более точного рассмотрения обратимся к рис. 9.7, где показаны зависимости величины начального смещения x_{10} , требуемой для запаздывания τ_S на 5 и на 2 единицы времени (пунктирные кривые 1 и 2) от соотношения между частотами осцилляторов ω_2/ω_1 , при $\omega_1 = 5$ ед.

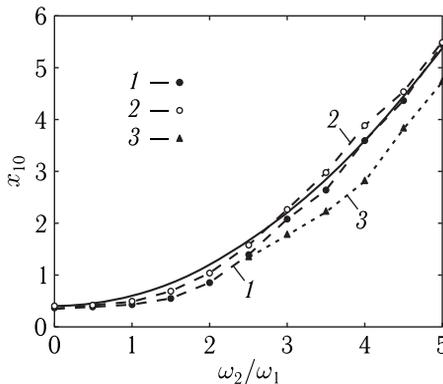


Рис. 9.7. Зависимость величины начального смещения x_{10} , требуемой для запаздывания τ_S на 5 (1) и 2 (2) единицы времени от соотношения между частотами осцилляторов ω_2/ω_1 , где $\omega_1 = 5$ ед. частоты. 1 — $\tau_S = 5$ ед. времени; 2 — $\tau_S = 2$ ед. времени; 3 — τ_S — нижняя (пороговая) граница начального смещения, необходимая для реализации запаздывания. Сплошная кривая построена по формуле (9.15). Параметры — те же, что на предыдущих рисунках

Из рисунка видно, что запаздывание реализуется во всем исследованном диапазоне соотношений частот — от нуля до пяти относительных единиц. Можно видеть, что обе приведенные зависимости (1 и 2) довольно хорошо описываются сплошной квадратичной кривой вида

$$\tau_S = 0,2 \cdot (\omega_2/\omega_1)^2 + 0,4. \quad (9.15)$$

Кривой 3 показана зависимость, соответствующая пороговому значению начального смещения, необходимому для реализации запаздывания. Видно, что эта кривая также имеет квадратичный характер. Она отражает «раздел» плоскости рисунка на две части: выше кривой 3 запаздывание есть, ниже — отсутствует. Соответственно при значении x_{10} ниже кривой 3 амплитуда колебаний на протяжении

любого промежутка времени всегда остается малой, соответствующей уровню начального смещения, с сами колебания сохраняют упорядоченный характер, близкий к синусоидальному. При значении x_{10} выше кривой 3 амплитуда остается малой только на протяжении времени запаздывания (здесь — 2 или 5 ед. времени), после чего резко возрастает на два порядка и более, причем характер колебаний становится хаотическим. Сразу после порога запаздывание является значительным и может составлять до нескольких десятков единиц времени, однако при дальнейшем увеличении x_{10} постепенно уменьшается в соответствии с законом обратной пропорциональности, подобно показанному на рис. 9.3, б.

Итак, из рисунка видно, что запаздывание реализуется при любой кратности (от нуля до пяти) частоты второго осциллятора относительно частоты первого. Таким образом, требование для реализации запаздывания трехкратного умножения частоты, отмеченное в работе [27], к системе (9.9)–(9.10) не относится. Правомерность утверждения о необходимости умножения частоты на три для системы (9.7)–(9.8), то есть соответствующей внешнему возбуждению с учетом релаксации осцилляторов, в рамках настоящей работы не проверялась и требует отдельного исследования.

Замечание. Из рис. 9.7 видно, что запаздывание по первому осциллятору реализуется даже при $\omega_2/\omega_1 = 0$, причем достижимы времена запаздывания до 5 ед. Следует заметить, что при этом во втором уравнении системы (9.9)–(9.10) отсутствует потенциальная возвращающая сила, то есть оно не является в обычном смысле колебательным, так как содержит только вторую производную в качестве инерционного слагаемого. Можно полагать, что в этом случае колебательный режим обеспечивается за счет слагаемого линейной связи $\gamma_2 x_1$ через посредство первого осциллятора. Запаздывание реализуется обычным образом, то есть имеется критическое значение смещения около 0,38 ед., ниже которого запаздывание отсутствует, а выше плавно спадает подобно закону обратной пропорциональности. При этом после запаздывания возбуждается хаос. Ниже критического значения при смещении от 0,01 до 0,30 реализуется синусоида с амплитудой около 0,02, осевая линия которой смещается от нуля на одно из боковых значений, составляющее около 0,2 ед. Знак этого значения меняется при изменении знака начального смещения, что говорит о наличии потенциала с двумя минимумами. При смещении от 0,30 до критического 0,38 реализуется такая же синусоида, но без смещения, то есть ее осевая линия остается около нуля. Во всех этих случаях запаздывание и хаос отсутствуют, а оба реализуются только после преодоления критического значения. Авторы полагают, что подробное исследование такого состояния представляет заметный интерес, в том числе с позиций модели динамического потенциала, так что намереваясь посвятить ему отдельную работу.

9.9. Запаздывание при изменении начального смещения

В предыдущем разделе установлен факт реализации запаздывания при произвольном соотношении частот осцилляторов, причем отмечено только критическое значение смещения и два значения, соответствующие временам запаздывания 2 и 5 ед. Рассмотрим теперь роль смещения более подробно, для чего обратимся к рис. 9.8, где показаны зависи-

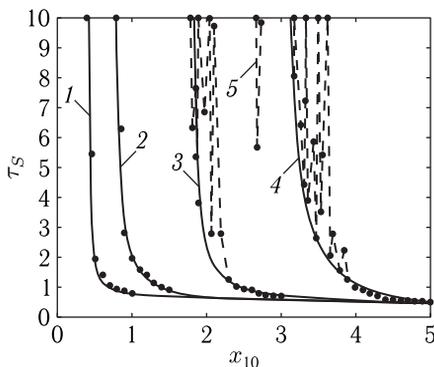


Рис. 9.8. Зависимости времени запаздывания от начального смещения при различных соотношениях частот: 1 — $\omega_2/\omega_1 = 1$; 2 — $\omega_2/\omega_1 = 2$; 3 — $\omega_2/\omega_1 = 3$; 4 — $\omega_2/\omega_1 = 4$; 5 — дополнительная кривая, также соответствующая $\omega_2/\omega_1 = 4$. Во всех случаях $\omega_1 = 5$. Точки — результаты машинного эксперимента. Пунктирные линии — соединение точек отрезками прямых. Сплошные кривые построены по формулам (9.16)–(9.19). Остальные параметры — те же, что на предыдущих рисунках

симости времени запаздывания от начального смещения при различных соотношениях частот. Для простоты выбраны кратные целочисленные соотношения, равные 1, 2, 3, 4. Точки являются результатом машинного эксперимента, а кривые 1–4 построены по аппроксимирующим формулам:

$$(\tau_S)_1 = 0,10(x_{10} - 0,43)^{-1} + 0,60; \quad (9.16)$$

$$(\tau_S)_2 = 0,50(x_{10} - 0,74)^{-1} + 0,22; \quad (9.17)$$

$$(\tau_S)_3 = 0,40(x_{10} - 0,43)^{-1} + 0,60; \quad (9.18)$$

$$(\tau_S)_4 = 1,35(x_{10} - 3,00)^{-1} - 0,21. \quad (9.19)$$

Замечание. В разделе 9.5.1 на рис. 9.3, б приведена кривая, аналогичная построенной здесь кривой 3, однако формула (9.13) по структуре несколько отличается от формулы (9.18). Путем простого преобразования можно убедиться, что формула (9.13) эквивалентна следующей формуле:

$$\tau_S = 1,74(x_{10} - 1,53)^{-1} - 0,50, \quad (9.20)$$

структура которой та же, что у формулы (9.18). Эта формула при построении дает кривую, близкую к кривой 3 на рис. 9.8, проходящую через те же точки с точностью около 10%. Различие формул продиктовано удобством построения для каждого конкретного случая. Главным моментом является тот факт, что обе формулы соответствуют зависимости типа обратной пропорциональности.

Из рисунка видно, что при малых значениях отношения $\omega_2/\omega_1 = 1$ и $\omega_2/\omega_1 = 2$ (кривые 1 и 2 соответственно) точки ложатся на аппроксимирующие кривые без заметных отклонений. Однако при увеличении отношения частот при $\omega_2/\omega_1 = 3$ и особенно при $\omega_2/\omega_1 = 4$ (кривые 3 и 4 соответственно) время запаздывания испытывает сильные скачки до величины 10 ед. и более (выше верхнего края рисунка), так что с кривыми (9.18) и (9.19) совпадают участки зависимостей не более τ_S порядка 1,5 ед. времени. В то же время, по мере изменения x_{10} скачки все время возвращаются к зависимостям, описываемым формулами (9.18) и (9.19), так что эти формулы отражают как бы «нижний край» диапазона скачков, играя для этого края роль огибающей. Исключением является зависимость 5, соответствующая, как и кривая 4, соотношению $\omega_2/\omega_1 = 4$, однако проявляющаяся в узком диапазоне значений x_{10} ниже критического значения, соответствующего уходу на бесконечность кривой 4 (то есть $x_{10} = 3,0$). Ввиду малости диапазона проявления такой аномалии в рамках настоящей работы ее рассмотрение не проводилось, однако авторы полагают, что подробное изучение этого явления, в том числе при значениях ω_2/ω_1 больше четырех, может явиться предметом для отдельного исследования.

Факт существования скачков уже отмечался в разделе 9.5.1 при рассмотрении рис. 9.3, б, соответствующего $\omega_2/\omega_1 = 3$. Было отмечено, что в условиях внешнего возбуждения, соответствующего системе (9.7)–(9.8) скачки тоже могут иметь место, однако из сравнения рис. 9.3, б с рис. 9.3, а видно, что они выражены значительно слабее, чем при задании начального смещения. Так что наличие скачков следует считать принципиальным моментом системы (9.9)–(9.10). Некоторые соображения об их природе высказывались также в разделе 9.5.1, однако там же отмечено, что этот вопрос требует более подробного исследования.

Возвращаясь к рис. 9.8, можно видеть, что все зависимости в основном ведут себя сходным образом: спадают по мере увеличения начального смещения по закону обратной пропорциональности. Все кривые по мере увеличения x_{10} стремятся к значению τ_S порядка 0,7. При этом время запаздывания становится почти в два раза меньше периода собственных колебаний первого осциллятора (для $\omega_1 = 5$ период составляет 1,25 ед. времени). Так что более или менее регулярный характер движения системы еще не успевает проявиться должным образом, как происходит резкий скачок амплитуды с переходом к хаосу. То есть здесь можно говорить не о запаздывании колебаний, а о небольшой задержке с последующим ступенчатым развитием хаоса.

Относительно рис. 9.8 заметим, что приведенные там зависимости по верхнему уровню ограничены значением запаздывания $\tau_S = 10$ ед. времени, что сделано для удобства рассмотрения. Однако проверка показывает, что запаздывание при заданном значении кратности частот ω_2/ω_1 выше 3 имеет место в диапазоне непрерывного изменения x_{10} . При этом время запаздывания может достигать нескольких десятков единиц, после чего в любом случае происходит скачок амплитуды с развитием хаоса. Более подробно вопрос о непрерывности изменения начального смещения и соответствующих значениях времени запаздывания требует отдельного рассмотрения.

9.9.1. Роль линейной связи в первом уравнении

Продвинемся дальше по пути упрощения системы и рассмотрим роль линейной связи в первом уравнении системы (9.9)–(9.10).

Если положить линейную связь отсутствующей, то система (9.9)–(9.10) переходит в следующую:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_1^2 x_1 + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (9.21)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_2^2 x_2 + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (9.22)$$

Обратимся к рис. 9.9, где показаны зависимости времени запаздывания от начального смещения при различных соотношениях частот. Кривые 1 соответствуют полной системе (9.9)–(9.10), кривые 2 — системе (9.21)–(9.22), отличающейся от системы (9.9)–(9.10) тем, что в полной системе положено $\gamma_1 = 0$. Области изменения начального смещения соответствуют таковым, приведенным на рис. 9.8.

Замечание. В отличие от рис. 9.8 здесь интервал времени запаздывания значительно расширен (до 100 ед. времени). Такое расширение позволяет более подробно выявить не только участок малых значений времени запаздывания (на рис. 9.8 — 10 ед.), где кривые проявляют явный характер обратной пропорциональности, но также и достаточно большие времена запаздывания, где такой характер нарушается из-за возможного присутствия скачков. Более того, значительные времена запаздывания представляют больший интерес, чем малые, так как именно на них эффект запаздывания проявляется в максимальной степени.

Сначала рассмотрим рис. 9.9, а, соответствующий равенству частот обоих осцилляторов. Можно видеть, что отсутствие линейной связи приводит к значительному сдвигу всей кривой 2 относительно кривой 1 в сторону меньших значений начального смещения. Характер кривой 2 геометрически подобен кривой 1, так что тоже может быть описан законом обратной пропорциональности. Критическое значение смещения

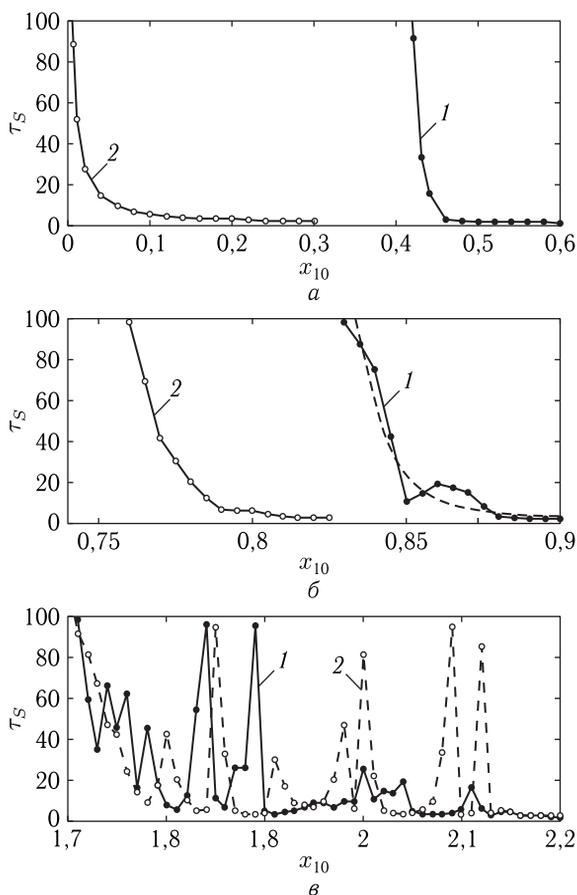


Рис. 9.9. Зависимости времени запаздывания от начального смещения при различных соотношениях частот: *a* — $\omega_2/\omega_1 = 1$; *б* — $\omega_2/\omega_1 = 2$; *в* — $\omega_2/\omega_1 = 3$. На всех эпюрах кривые *1* построены с помощью системы (9.9)–(9.10), кривые *2* — с помощью системы (9.21)–(9.22). Во всех случаях $\omega_1 = 5$. Точки — результаты машинного эксперимента. Сплошные и пунктирные линии — соединение точек отрезками прямых. Остальные параметры — те же, что на предыдущих рисунках

для кривой *1* составляет около 0,43, тогда как для кривой *2* — около 0,005, то есть сдвиг происходит более чем в 80 раз. Какие-либо скачки на обеих кривых полностью отсутствуют.

Теперь обратимся к рис. 9.9, *б*, соответствующему случаю, когда частота второго осциллятора превышает частоту первого в два раза. Здесь кривая *1*, соответствующая наличию линейной связи, уже испытывает некоторый скачок в области 0,86 ед. смещения. На рис. 9.8 (кривая *2*) такой скачок не заметен из-за ограничения рассматриваемого

мого там интервала времени. Величина скачка сравнительно невелика (примерно в два раза), так что общий характер кривой 1 также остается близким к обратной пропорциональности, показанной на рисунке точечной линией. Кривая 2, соответствующая отсутствию линейной связи, не имеет скачков и остается довольно близкой к обратной пропорциональности, изображенной точечной линией в области кривой 1. То есть здесь также наблюдается геометрическое подобие характера кривых. Критическое значение смещения для кривой 1 составляет около 0,83. Отсутствие связи для кривой 2 сдвигает это значение до величины около 0,75. То есть здесь величина сдвига далеко не столь значительна как на рис. 9.9, а и составляет всего около 10%.

Рассмотрим теперь рис. 9.9, в, соответствующий случаю, когда частота второго осциллятора превышает частоту первого в три раза. Здесь обе кривые испытывают весьма значительные скачки, составляющие до 10 раз и более, причем взаимно перепутываются в заметной степени. Кривая 1 (сплошные точки, сплошные линии), соответствующая наличию связи, имеет два больших скачка вблизи 1,84 и 1,90. Кривая 2 (открытые точки, пунктирные линии) имеет единичный скачок вблизи 1,86 и два парных в областях около 2,0 и 2,1. То есть какое-либо соответствие между скачками не наблюдается. Сдвиг кривой 2 относительно кривой 1 также отсутствует, для обеих кривых критическое значение смещения составляет около 1,70. Характер типа обратной пропорциональности в какой-то степени можно проследить, если пренебречь скачками, примерно так, как это было сделано для кривой 3 на рис. 9.8. Общим является тот факт, что вблизи критического значения смещения обе кривые принимают большие значения (около 60–100), а по мере увеличения смещения спадают, стремясь к малым значениям около 1–2 ед. времени, особенно после смещения порядка 2,14 ед.

Таким образом, можно считать, что исключение линейной связи в первом уравнении системы при равенстве частот осцилляторов, сохраняя вид зависимости времени запаздывания от начального смещения, приводит к значительному (в десятки раз) уменьшению критического значения смещения. При увеличении частоты второго осциллятора относительно частоты первого в два раза уменьшение критического значения смещения падает до нескольких процентов, а при увеличении в три раза полностью отсутствует. Во всех этих случаях запаздывание сохраняется и может достигать весьма больших значений (до 100 ед. времени и более).

При равенстве частот осцилляторов и кратном увеличении частоты второго относительно частоты первого, значительные времена запаздывания имеют место сразу после критического значения смещения. При умножении частоты второго осциллятора в три раза значительное время запаздывания может наблюдаться при скачках на заметном (до 20%) удалении от критического значения смещения.

В качестве причины сдвига кривой 2 относительно кривой 1 в сторону меньших значений начального смещения можно полагать нагружение первого осциллятора вторым, то есть первый осциллятор, благодаря собственной линейной связи со вторым, вынужден «тащить за собой» второй осциллятор, на что требуется определенная энергия. В отсутствие линейной связи необходимость «таскания» отпадает, так что первый осциллятор как бы высвобождается, и для его возбуждения до уровня, необходимого для запаздывания, требуется меньше энергии, то есть меньшее начальное смещение. Такое уменьшение «потребности» энергии первым осциллятором и проявляется как сдвиг критического значения смещения в меньшую сторону. Можно полагать, что такой механизм работает тем эффективнее, чем ближе частота второго осциллятора к частоте первого, то есть при равенстве частот обоих осцилляторов (что соответствует рис. 9.9, а). Когда частота второго осциллятора полагается в два раза выше частоты первого, механизм «таскания» реализуется значительно слабее, так как их частоты сильно различаются. При этом влияние линейной связи становится меньше, так что ее устранение приводит к меньшему «высвобождению» первого осциллятора, чем в случае равенства частот. В результате сдвиг кривой 2 относительно кривой 1 уменьшается, как это и проявляется на рис. 9.9, б. Когда частота второго осциллятора в три раза превышает частоту первого, то рассогласование частот становится столь сильным, что сдвиг уже перестает проявляться заметным образом (рис. 9.9, в).

Замечание. Поскольку в разделе 9.8 было установлено, что запаздывание в системе (9.9)–(9.10) возможно при любой кратности частот (проверено до пяти), было бы интересным проследить изменение критического смещения при плавном изменении такой кратности. При этом может проявиться зависимость резонансного типа с основным пиком вблизи совпадения частот осцилляторов. Исследование этого вопроса авторы оставляют в качестве отдельной задачи.

Итак, если отвлечься от частных случаев, то главным результатом настоящего раздела можно считать тот факт, что в отсутствие линейной связи в первом уравнении явление запаздывания сохраняется, так что линейная связь для проявления запаздывания фактором критическим не является. То есть на данном этапе рабочим инструментом для реализации запаздывания можно считать систему (9.21)–(9.22).

9.9.2. Роль собственной частоты первого осциллятора

Для дальнейшего упрощения системы уравнений (9.21)–(9.22) рассмотрим роль слагаемого вида $\omega_1^2 x_1$, где ω_1 — собственная частота первого осциллятора. Если это слагаемое исключить, то возможность периодических колебаний у первого осциллятора все равно остается, так как теперь роль инерционной составляющей будет играть слагаемое δx_1^3 , соответствующее потенциалу четвертой степени. Более подробно роль этого слагаемого обсуждается далее, а здесь рассмотрим, к чему

приведет исключение слагаемого $\omega_1^2 x_1$, для чего в системе (9.21)–(9.22) положим $\omega_1 = 0$, так что эта система перейдет в следующую:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (9.23)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_2^2 x_2 + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (9.24)$$

Обратимся к рис. 9.10, где показаны зависимости времени запаздывания от начального смещения при равенстве нулю частоты первого осциллятора и различных значениях частоты второго осциллятора.

Из рисунка можно видеть, что новые кривые 2 значительно отличаются от старых 1. При этом на рис. 9.10, а новая кривая сместилась в область больших значений начального смещения, а на рис. 9.10, б и рис. 9.10, в — в сторону меньших.

Из рис. 9.10, а, соответствующего $\omega_2 = 5$, видно, что критическое значение начального смещения теперь составляет около 0,12 ед., что более чем на порядок превышает значение, где частота первого осциллятора равна частоте второго (5 ед.). При этом зависимость приобрела изрезанный характер, однако время запаздывания в основном увеличилось, причем в некоторых случаях более чем на два порядка ($\tau_S = 90$ ед. при $x_{10} = 0,22$ ед.).

Из рис. 9.10, б, соответствующего $\omega_2 = 10$, видно, что критическое значение начального смещения резко уменьшилось и составляет около 0,45 ед. вместо 0,76 ед. при $\omega_1 = 5$ ед. Как раз вблизи старого критического значения, около $x_{10} = 0,8$ ед., новая кривая имеет резкий подъем до $\tau_S = 90$ ед. Однако зависимость (кривая 2) все же остается непрерывной, так что ниже этого подъема, то есть в области от 0,7 до 0,8 ед. высокоамплитудный хаос все же наблюдается.

Из рис. 9.10, в, соответствующего $\omega_2 = 10$, видно, что кривая 2 теперь потеряла непрерывность и образовался широкий разрыв в области от 1,4 до 1,6 ед. начального смещения. То есть в этой области высокоамплитудный хаос отсутствует. Так что теперь уверенно можно говорить, что имеют место два критических значения — при 1,0 и 1,6 ед. При этом в области x_{10} от 1,3 до 1,4 ед. кривая 2 имеет плавный подъем вплоть до весьма больших значений порядка 90 ед.

Можно предположить, что столь большое разнообразие зависимости времени запаздывания от начального смещения при $\omega_1 = 0$ связано с тем, что, несмотря на отсутствие традиционного инерционного слагаемого в уравнении (9.23), первый осциллятор все же остается системой колебательной, так как роль такого слагаемого теперь играет δx_1^3 . При этом второй осциллятор, описываемый уравнением (9.24), в любом случае является системой колебательной, так как инерционное слагаемое с ω_2 сохраняется. Частота первого осциллятора теперь зависит от амплитуды, как решение уравнения с кубической нелинейностью [35], поэтому между частотами первого и второго осцилляторов

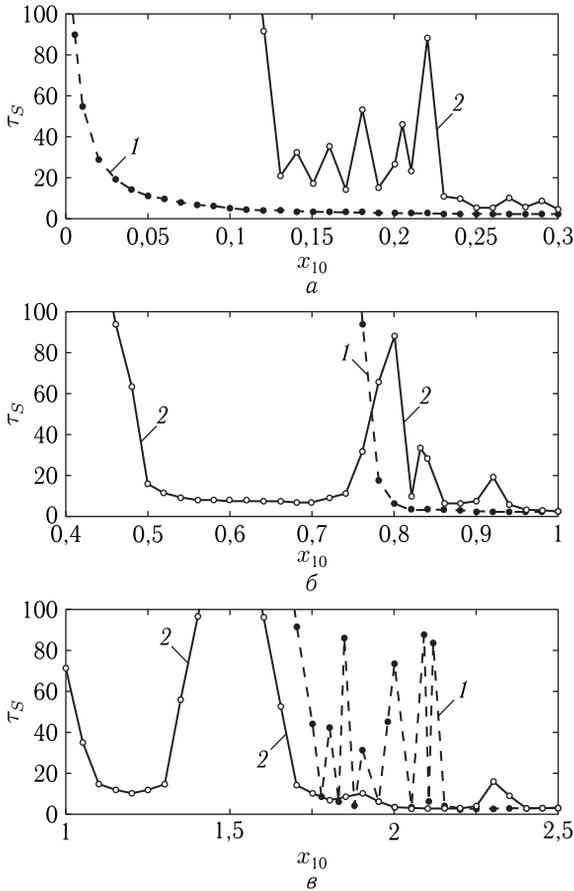


Рис. 9.10. Зависимости времени запаздывания от начального смещения при равенстве нулю частоты первого осциллятора ($\omega_1 = 0$) и различных значениях частоты второго осциллятора: а — $\omega_2 = 5$; б — $\omega_2 = 10$; в — $\omega_2 = 15$. Кривые 1 (пунктирные линии, сплошные точки) соответствуют системе (9.21)–(9.22), кривые 2 (сплошные линии, открытые точки) — системе (9.23)–(9.24)

при изменении начального смещения, да и просто в процессе колебаний, могут возникнуть сложные соотношения, так или иначе влияющие на возбуждение высокоамплитудного хаоса.

Более подробное выяснение роли равенства нулю частоты первого осциллятора требует рассмотрения в отдельной работе. Здесь же ограничимся констатацией того факта, что при обращении в нуль частоты первого осциллятора, то есть при $\omega_1 = 0$, запаздывание возбуждения высокоамплитудного хаоса реализуется вплоть до значений τ_S порядка 90 ед. и более в довольно широком диапазоне как частоты второго

осциллятора ω_2 (от 5 до 15 ед.), так и начального смещения x_{10} (от 0,12 до 2,5 ед. в зависимости от ω_2). То есть система (9.23)–(9.24) вполне допускает описание как высокоамплитудного хаоса, так и запаздывания его возбуждения.

9.10. Сравнение с колебаниями полных систем

Из проведенного рассмотрения можно видеть, что полученная система (9.23)–(9.24) сохраняет главные свойства полной системы (9.9)–(9.10), возбуждаемой путем задания начального смещения. В разделе 9.5 показано, что система (9.9)–(9.10) по характеру возбуждаемых колебаний в свою очередь эквивалентна исходной системе (9.7)–(9.8), получаемой из реальных задач о возбуждении мощного гиперзвука и шума в резонаторе с ферритом.

В качестве главных свойств системы (9.23)–(9.24), унаследованных от систем (9.9)–(9.10) и (9.7)–(9.8), следует отметить возбуждение высокоамплитудного хаоса и запаздывание во времени для такого возбуждения относительно момента включения начального смещения. Рассмотрим теперь несколько подробнее характер возбуждаемых колебаний, для чего обратимся к рис. 9.11, где показано развитие колебаний во времени и соответствующие параметрические портреты для первого (левый столбец) и второго (правый столбец) осцилляторов. Для удобства сравнения с предыдущими результатами, развитие колебаний рассмотрено в том же интервале времени от 0 до 10 ед., что на рис. 9.1 и рис. 9.2, соответствующих полной системе (9.9)–(9.10).

Из рисунка можно видеть, что колебаний обоих осцилляторов ведут себя практически таким же образом, как колебания тех же осцилляторов на рис. 9.1, *г*, *д*, *е* и рис. 9.2, *г*, *д*, *е*. Точно так же имеется запаздывание около 5 ед. времени, после чего развивается высокоамплитудный хаос с примерно такой же амплитудой. Параметрический портрет для первого осциллятора также имеет вид горизонтальной восьмерки, а для второго — горизонтального овала.

Видимое различие состоит в том, что на рис. 9.1 и рис. 9.2 высокоамплитудный хаос развивается двухступенчатым образом, а здесь второй ступени не наблюдается. Однако проверка показывает, что здесь также имеется вторая ступень, в результате которой амплитуда x_1 скачком возрастает до 250–300 ед., а амплитуда x_2 возрастает до 6,4 ед. Такой скачок происходит при времени около 60 ед., так что находится за правым краем рис. 9.11 и здесь не приведен для сохранения масштаба с рис. 9.1 и рис. 9.2. Следует заметить, что здесь амплитуда хаоса после второго скачка уже превышает таковую на рис. 9.1 и рис. 9.2 примерно в полтора-два раза.

Другое отличие состоит в том, что для возбуждения режимов, представленных на рис. 9.1 и рис. 9.2, величина начального скачка составляет $x_{10} = 2,15$ ед., тогда как здесь для такого же времени запаздывания достаточно $x_{10} = 0,57$ ед. При задании большего начального

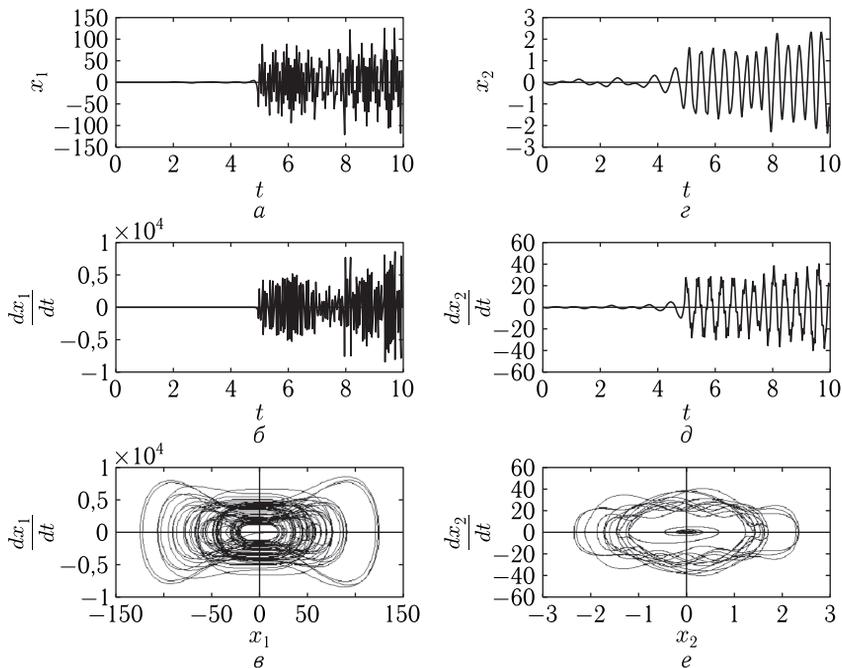


Рис. 9.11. Развитие колебаний во времени и соответствующие параметрические портреты для первого (а, б, в) и второго (г, д, е) осцилляторов. Расчет выполнен по системе (9.23)–(9.24). Параметры: $\delta = 5$; $\eta = -200$; $\omega_2 = 10$; $\gamma_2 = 10$. Начальное смещение: $x_{10} = 0,57$

смещения здесь время запаздывания довольно резко уменьшается и при $x_{10} = 1,0$ ед. составляет около 0,8 ед., а при $x_{10} = 2,0$ — всего 0,05 ед.

Можно полагать, что оба эти отличия не являются принципиальными, так что система (9.23)–(9.24) в достаточной степени определяет общий характер колебаний в системах (9.9)–(9.10), а также (9.7)–(9.8). Для удобства дальнейшей терминологии систему (9.23)–(9.24) можно назвать «первичным ядром» обеих этих систем.

Замечание. Приведенные два обстоятельства, а именно возбуждение большой амплитуды хаоса сразу после запаздывания и высокая амплитуда хаоса после второй ступени, а также значительно меньший требуемый уровень начального смещения, наводят на мысль, что дополнительные слагаемые, присутствующие в системе (9.9)–(9.10) по сравнению с системой (9.23)–(9.24), то есть линейная связь и задание частоты первого осциллятора, как бы «мешают» реализации эффекта нестационарного запаздывания высокоамплитудного хаоса, который в достаточной степени обеспечивается системой (9.23)–(9.24). Таким образом, можно полагать, что для исследования этого эффекта в чистом виде следует исходить только из системы (9.23)–(9.24).

9.11. Замечание о возможности дальнейшего упрощения системы

Таким образом, в результате проделанного рассмотрения из исходной системы (9.5)–(9.6) выделено ядро, сохраняющее возможность возбуждения высокоамплитудного хаоса с запаздыванием. Это ядро имеет вид (9.23)–(9.24):

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (9.25)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_2^2 x_2 + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (9.26)$$

Проверка показывает, что исключение из первого уравнения какого-либо из слагаемых δx_1^3 или $\eta x_1^2 x_2$ нарушает возможность возбуждения высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием. Исключение из второго уравнения слагаемого связи $\gamma_2 x_1$ недопустимо, так как разрывает связь осцилляторов. При исключении слагаемого $\omega_2^2 x_2$ система (9.25)–(9.26) сводится к следующей:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (9.27)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (9.28)$$

Проверка показывает, что в этом случае возможность возбуждения хаоса с запаздыванием при некотором соотношении параметров все же сохраняется, однако при этом второе уравнение перестает быть колебательным, то есть теперь вместо двух осцилляторов остается всего один.

Таким образом, на данном этапе рассмотрения дальнейшее упрощение системы (9.25)–(9.26) при условии сохранения колебательных свойств обоих осцилляторов, признано нецелесообразным. Более подробно возможность такого упрощения авторы намереваются рассмотреть в следующей части настоящей работы.

Выводы по главе 9

Рассмотрено явление нестационарного запаздывания возбуждения высокоамплитудных хаотических колебаний в системе из двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным.

Приведено краткое описание двух реальных физических систем, допускающих возбуждение хаотических колебаний. Первая система представляет собой нормально намагниченную ферритовую пластину, обладающую магнитоупругими свойствами. Возбуждение ферромагнитного резонанса в такой системе приводит к генерации интенсивных гиперзвуковых колебаний, после определенного порога принимающих хаотический характер. Другая система представляет собой электроди-

намический резонатор волноводного типа с намагниченным по нормали ферритовым диском. При поступающей мощности выше определенного порога в такой системе происходит возбуждение электромагнитных колебаний шумового характера. Показано, что колебания в обеих системах могут быть описаны на основе одной и той же модели двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным, а второй — линейным. Приведена общая система двух дифференциальных уравнений второго порядка, нелинейность в которых представлена в виде разложения в степенной ряд по двум переменным до четвертого порядка. Установлена связь между коэффициентами разложения и реальными параметрами обеих физических систем.

На основе квадратичного приближения выделены основные слагаемые уравнений предложенной системы. Так, первое уравнение содержит кроме второй производной по времени, диссипативного и потенциального членов также слагаемые кубической нелинейности, линейной и нелинейной связью со вторым уравнением. Второе уравнение, кроме второй производной по времени, диссипативного и потенциального членов, содержит слагаемое линейной связи с первым уравнением. Возбуждение колебаний в системе осуществляется путем подачи на первый осциллятор внешней силы синусоидального характера.

Показано, что в такой системе при достаточном уровне внешнего сигнала возникают высокоамплитудные хаотические колебания, причем начало их возбуждения происходит скачком не сразу, а только по прошествии определенного времени запаздывания относительно начала воздействия возбуждающей силы.

Ввиду сложности исходной системы в качестве главной задачи настоящей работы поставлено выделение из полной системы максимально упрощенного ядра, сохраняющего свойства высокоамплитудного хаоса, развивающегося с запаздыванием относительно начала возбуждения системы. Такое выделение выполнено путем отсечения второстепенных слагаемых обоих уравнений с условием сохранения высокоамплитудного хаоса и запаздывания.

В качестве первого шага упрощения рассмотрена возможность исключения внешнего возбуждения системы. При этом возбуждение колебаний осуществляется путем задания начального смещения с последующим высвобождением системы в режим свободных колебаний. Для обеспечения незатухающего режима колебаний диссипативные слагаемые в обоих уравнениях положены равными нулю. Показано, что при надлежащем выборе начального смещения характер колебаний каждого из осцилляторов, а также их параметрические портреты, образованные самими колебаниями, в сочетании с производными по времени, полностью подобны таковым для системы с внешним возбуждением. Отмечено пороговое значение начального смещения и приведена интерпретация параметрических портретов для каждого из осцилляторов на основе модели динамического потенциала.

Для укороченной системы рассмотрены условия реализации запаздывания возбуждения высокоамплитудного хаоса. Выявлен интервал допустимых значений начального смещения, снизу ограниченный пороговым значением, а сверху условием превышения длительности запаздывания над полупериодом собственных колебаний системы.

Выполнено сравнение зависимостей времени запаздывания от уровня внешнего возбуждения (для полной системы) и начального смещения (для укороченной системы). Показано, что в обоих случаях зависимости, в основном, являются геометрически подобными и описываются законом обратной пропорциональности. В случае начального смещения отмечено наличие скачков зависимости, достигающих двух-трех раз, в области, близкой к порогу возбуждения. Показано, что при превышении начального смещения выше порога около полутора раз скачки прекращаются и дальнейшая зависимость, оставаясь плавной, следует закону обратной пропорциональности. В качестве возможной причины скачков отмечен стохастический характер возбуждения высокоамплитудного хаоса.

Исследован характер колебаний системы по обе стороны от интервала реализации запаздывания. Показано, что при недостаточном для реализации запаздывания уровне как внешнего возбуждения, так и начального смещения, колебания близки к синусоидальным с некоторыми следами нестационарности. При уровне, превышающем интервал реализации запаздывания, колебания остаются резко нестационарными, сохраняющими характер высокоамплитудного хаоса с той же амплитудой и параметрическими свойствами, что и внутри интервала. Установлено, что в обоих случаях, как внешнего возбуждения, так и начального смещения, характер колебаний по обе стороны от интервала реализации запаздывания остается одинаковым.

Рассмотрены колебания, задаваемые начальными условиями различных видов: смещением первого осциллятора, смещением второго, а также заданием скоростей каждого из осцилляторов в отдельности или любым сочетанием этих параметров, в том числе всех вместе. Показано, что во всех случаях возбуждение высокоамплитудного хаоса и соответствующее запаздывание, с точностью до конкретных уровней начальных условий, реализуются полностью тождественным образом.

В результате проделанного сравнения сделан промежуточный вывод об эквивалентности возбуждения колебаний системы из двух осцилляторов как внешним воздействием, так и заданием начального смещения. При этом как высокоамплитудный хаос, так и запаздывание его развития реализуются в обеих этих системах примерно одинаковым образом. Отмечено, что причиной эквивалентности является тождество динамического потенциала в обоих случаях.

С целью установления возможности дальнейшего упрощения системы связанных уравнений рассмотрена роль соотношения собственных частот того и другого осцилляторов. Отмечено, что для системы с внешним возбуждением, согласно данным предшествующих работ,

реализация запаздывания имеет место только в режиме умножения частоты, в простейшем случае, когда частота второго осциллятора превышает частоту первого в три раза.

Для проверки правомерности такого положения в системе с заданием начального смещения выполнено исследование характера колебаний при произвольном соотношении частот осцилляторов. Показано, что возбуждение высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием при надлежащем уровне начального смещения реализуется в непрерывном диапазоне соотношений частот осцилляторов вплоть до пяти относительных единиц. Установлено, что зависимость порогового уровня начального смещения от отношения частоты второго осциллятора к частоте первого является непрерывной и имеет четко выраженный возрастающий квадратичный характер.

Исследована зависимость времени запаздывания от начального смещения при различных соотношениях частот. Показано, что при любой величине такого соотношения время запаздывания при увеличении начального смещения, начиная с определенного критического значения, спадает по закону обратной пропорциональности. Критическое значение смещения по мере увеличения соотношения частот также увеличивается. При этом до соотношения частот порядка двух относительных единиц спад является достаточно плавным, а при увеличении соотношения до трех единиц и более на закон обратной пропорциональности вблизи критического значения накладываются скачки, по времени запаздывания достигающие полутора-двух раз. По прохождении такого участка дальнейшие зависимости спадают плавно, по закону обратной пропорциональности.

С целью исследования возможности дальнейшего упрощения системы рассмотрена роль слагаемого первого уравнения, отражающего линейную связь первого осциллятора со вторым. Для двух случаев — наличия и отсутствия линейной связи, рассмотрены зависимости времени запаздывания от начального смещения при соотношениях частот осцилляторов в 1, 2 и 3 раза. При равенстве частот осцилляторов исключение линейной связи приводит к значительному (в десятки раз) уменьшению критического значения смещения. При отношении частот осцилляторов в два раза уменьшение критического значения смещения падает до нескольких процентов, а при увеличении в три раза полностью отсутствует. В первом случае зависимости остаются полностью плавными, во втором наблюдаются небольшие скачки, в третьем скачков становится столь много, что зависимости приобретают изрезанный характер. Во всех этих случаях высокоамплитудный хаос сохраняется, а его запаздывание может достигать весьма больших значений.

На основе сделанного вывода из первого уравнения линейная связь исключена, в результате чего достигнуто упрощение рассматриваемой системы. С целью дальнейшего упрощения рассмотрена роль собственной частоты первого осциллятора. Отмечено, что исключение потенциального слагаемого из уравнения для первого осциллятора не приводит

к ликвидации колебательного характера этого осциллятора, так как теперь роль возвращающей силы начинает играть слагаемое с кубической нелинейностью, соответствующее потенциалу четвертой степени. Рассмотрены зависимости времени запаздывания от начального смещения при равенстве нулю частоты первого осциллятора и трех различных значениях частоты второго осциллятора. Показано, что во всех случаях характер зависимости типа обратной пропорциональности с соответствующим критическим значением смещения в основном сохраняется. При этом критическое значение смещения уменьшается тем сильнее, чем частота второго осциллятора ниже. Скачкообразный характер зависимостей при малых значениях частоты второго осциллятора почти отсутствует, а при увеличении этой частоты увеличивается, однако всегда остается значительно менее выраженным, чем в случае отличия от нуля частоты первого осциллятора.

Во всех случаях при исключении слагаемого, соответствующего частоте первого осциллятора, общий характер высокоамплитудного хаоса и соответствующего запаздывания сохраняется.

На основе сделанного вывода из первого уравнения слагаемое, соответствующее собственной частоте первого осциллятора, то есть потенциалу второй степени, исключено, в результате чего достигнуто дальнейшее упрощение рассматриваемой системы.

В ходе проверки установлено, что исключение других слагаемых из первого уравнения нарушает возможность реализации высокоамплитудного хаоса с запаздыванием. Исключение потенциального слагаемого из второго уравнения нарушает его колебательный характер, так что также не является допустимым. Таким образом, на данном этапе рассмотрения дальнейшее упрощение системы признано нецелесообразным.

В результате проделанного рассмотрения, из исходной полной системы уравнений для двух осцилляторов выделено ядро, ответственное за возбуждение высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием. Уравнение для смещения первого осциллятора содержит вторую производную по времени, слагаемое кубической нелинейности и слагаемое нелинейной связи со вторым. Уравнение для смещения второго осциллятора содержит вторую производную по времени, потенциальное слагаемое, соответствующее частоте второго осциллятора, и слагаемое линейной связи второго осциллятора с первым. При этом возбуждение системы может быть осуществлено путем задания начального смещения или начальной скорости любого из осцилляторов.

Глава 10

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ УСТАНОВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ. ЧАСТЬ 2. ВОЗДЕЙСТВИЕ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ДРУГ НА ДРУГА

В настоящей главе продолжено рассмотрение нелинейных вынужденных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Основное внимание уделяется исследованию упрощенной системы уравнений, описывающих основные свойства наблюдаемых колебаний. Главным предметом рассмотрения такой системы в настоящей главе является воздействие осцилляторов друг на друга. Рассмотрение проведено на основе полученной в первой части работы (в гл. 9) упрощенной системы двух связанных уравнений второго порядка. Предложены два вида упрощенных систем: колебательная и релаксационная. Рассмотрена роль потенциала первого осциллятора в формировании характера колебаний, в первую очередь — высокоамплитудного хаоса. Предложена модель «прыгающего» потенциала, в процессе колебаний совершающего «прыжки» от одного крайнего положения до другого. Приведены некоторые соображения, касающиеся дальнейшего развития работы.

Основное изложение материала в данной главе следует работе [32]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

10.1. Постановка задачи и основные системы уравнений

Одной из важнейших задач современной физики является исследование нелинейных и нестационарных явлений [1–7]. Значительный интерес представляет исследование магнитоупругих явлений для задач возбуждения гиперзвуковых и хаотических колебаний. Сложность явлений и громоздкость необходимого математического аппарата стимулирует поиск простых моделей, позволяющих описать наблюдаемую

физику. Весьма удобной моделью можно считать представление исследуемой системы в виде совокупности двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным. При этом нелинейный осциллятор соответствует магнитной части системы, а линейный — упругой или электромагнитной ее части [17–20]. Особенно успешное развитие модель получила в рамках квадратичного приближения, при котором параметры осцилляторов были выражены через параметры материала и геометрию структуры [21–25]. Были предложены различные варианты систем уравнений для связанных осцилляторов, отличающиеся степенью и характером принятых приближений [26, 35].

В гл. 6 сообщалось о проявлении нестационарного запаздывания возбуждения колебаний, имеющего место в режиме умножения частоты. Дальнейшее исследование запаздывания, в том числе с привлечением модели динамического потенциала, было выполнено в гл. 7–9.

Несмотря на подробное исследование явления запаздывания, ряд его моментов оставался невыясненным. Так, оставалась неясной роль различных компонент системы уравнений, степени нелинейности и характера связи. Недостаточно рассматривалась роль релаксационных свойств и уровня возбуждения. Таким образом, ряд вопросов, касающихся явления запаздывания, оставался нерешенным. Значительная трудность задачи состояла в высокой сложности системы уравнений, содержащей в самом простейшем варианте до 10 независимых параметров.

Для преодоления этой трудности была поставлена задача выделения из полной системы той ее части, которая была бы ответственна непосредственно за эффект запаздывания. Эта задача в значительной степени была решена в работе [31]. Из полной системы было выделено «первичное ядро», содержащее всего 3 или 4 независимых параметра, в зависимости от колебательного или релаксационного характера линейного осциллятора.

Ранее было рассмотрено явление нестационарного запаздывания возбуждения высокоамплитудных хаотических колебаний в системе из двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным. Для физического обоснования постановки задачи приведено краткое описание двух реальных систем, каждая из которых в качестве нелинейного элемента содержит ферритовую пластину, а в качестве линейного — упругую пластину или электродинамический резонатор. При достаточной мощности внешнего возбуждения в первой системе генерируются высокоамплитудные гиперзвуковые колебания, а во второй — шумовые колебания стохастического характера.

Показано, что колебания в обеих системах могут быть описаны на основе одной и той же модели двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным, а второй — линейным.

Для такой модели приведена система двух дифференциальных уравнений второго порядка (6.6), (6.7) следующего вида:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = A \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (10.1)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (10.2)$$

Здесь x_1 и x_2 — смещение первого и второго осцилляторов, β_1 и β_2 — соответствующие параметры диссипации, ω_1 и ω_2 — собственные частоты колебаний осцилляторов в отсутствие нелинейности и связи, γ_1 и γ_2 — параметры линейно связи между осцилляторами, η — параметр нелинейной связи, δ — параметр кубической нелинейности первого осциллятора, A — амплитуда и ω_0 — частота внешнего воздействия.

Замечание. Здесь и далее системы и все последующие выражения приведены в нормированных единицах, тех же, что использованы в работе [31]. Там же приведена схема нормировки и связь нормированных величин с параметрами реальных задач. Ввиду такого упрощения далее размерные обозначения единиц не приводятся.

Отмечено, что в такой системе при достаточном уровне внешнего сигнала возникают высокоамплитудные хаотические колебания, начало возбуждения которых происходит скачком по прошествии определенного времени запаздывания относительно начала воздействия возбуждающей силы.

Ввиду сложности исходной системы, поставлена задача выделения из нее упрощенного ядра, сохраняющего свойства высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием.

В качестве первого шага упрощения показана возможность исключения внешнего возбуждения, так что развитие колебаний обеспечивается заданием начального смещения или скорости любого из осцилляторов. Для обеспечения незатухающих колебаний параметры диссипации положены равными нулю. В результате таких преобразований система принимает вид:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = 0; \quad (10.3)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (10.4)$$

На основе исследования развития во времени показана эквивалентность этой системы с начальной (10.1)–(10.2).

В качестве дальнейших шагов упрощения выявлена роль линейной связи и частоты первого осциллятора. Показано, что при исключении обоих этих параметров общие свойства и динамические характеристики запаздывания заметным образом изменяются, однако само запаздывание

как таковое сохраняет тот же порядок амплитудных и временных параметров. При этом система (10.3)–(10.4) принимает вид:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (10.5)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_2^2 x_2 + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (10.6)$$

Здесь оба уравнения являются колебательными, так как собственная частота первого осциллятора определяется потенциальным слагаемым кубической нелинейности, а второго — потенциальным слагаемым, содержащим квадрат собственной частоты.

Проверка показала, что исключение из первого уравнения слагаемых кубической нелинейности и нелинейной связи нарушает запаздывание. При этом исключение кубической нелинейности приводит к уходу системы на бесконечность, а исключение нелинейной связи уничтожает эффект запаздывания.

Дополнительного упрощения можно достичь при обращении в нуль потенциального слагаемого второго уравнения, так что система принимает вид:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (10.7)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (10.8)$$

При этом запаздывание также имеет место, однако второе уравнение теряет колебательный характер, так что из двух осцилляторов колебательным остается всего один первый, а второй приобретает релаксационный характер.

Таким образом, в случае сохранения колебательного характера обоих осцилляторов, «первичным ядром», обеспечивающим запаздывание, является система (10.5)–(10.6), а в случае отказа от колебательного характера второго осциллятора «первичным ядром» остается система (10.7)–(10.8). Для различения далее обоих полученных первичных ядер будем первое называть «колебательным ядром», а второе — «релаксационным ядром». В дальнейшем рассмотрении уделим основное внимание именно этим двум системам.

10.2. Сравнение колебательной и релаксационной систем

В предыдущем разделе приведены две системы (10.5)–(10.6) и (10.7)–(10.8), которые можно рассматривать как первичное ядро исходной системы, обеспечивающее запаздывание. Для сравнения

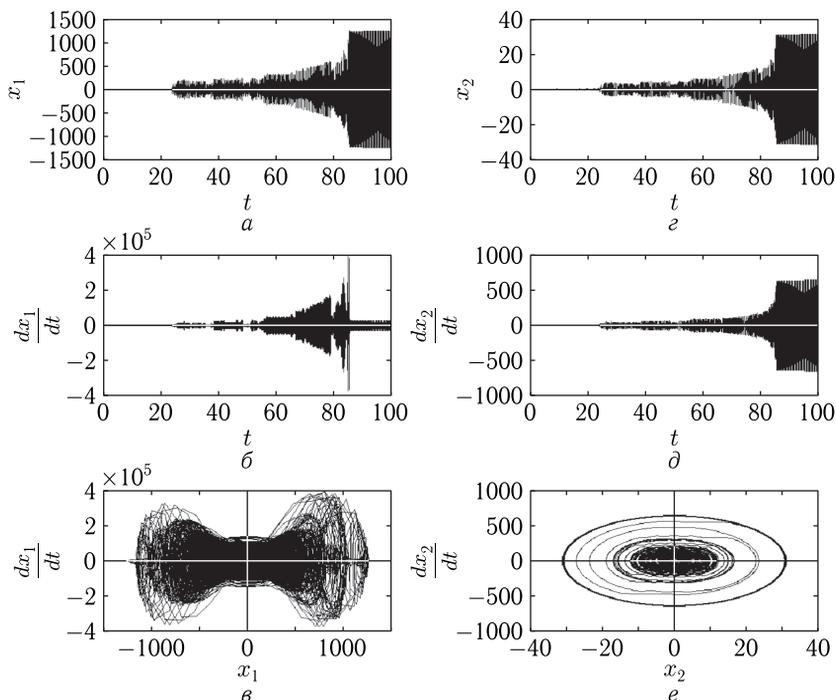


Рис. 10.1. Колебания (а, з), их производные (б, д) и параметрические портреты (в, е) для первого (левый столбец — а, б, в) и второго (правый столбец — з, д, е) осцилляторов, рассчитанные по системе (10.5)–(10.6). Параметры: $\delta = 5$; $\eta = 200$; $\gamma_2 = 10$; $\omega_2 = 5$. Начальное смещение: $x_{10} = 0,21$

систем обратимся к рис. 10.1 и рис. 10.2, первый из которых касается системы (10.5)–(10.6), а второй — системы (10.7)–(10.8). Оба рисунка построены в одинаковом масштабе по осям, для чего в первом случае начальное смещение положено равным 0,21, а во втором — 0,001 ед.

Из сравнения рисунков можно видеть, что при таком соотношении начальных смещений колебания в обеих системах весьма сходны между собой. В обоих случаях величина запаздывания составляет около 20–25 ед. времени, развитие колебаний имеет двухступенчатый характер, параметрические портреты для первого осциллятора представляют собой «горизонтальную восьмерку», а для второго — «горизонтальный овал».

Таким образом, можно полагать, что колебательный или релаксационный характер второго осциллятора для реализации запаздывания решающим не является, а различие состоит только в том, что при релаксационном характере те же колебания достигаются при начальном смещении, более чем на два порядка меньшем. То есть колебательный характер как бы «мешает» реализации запаздывания.

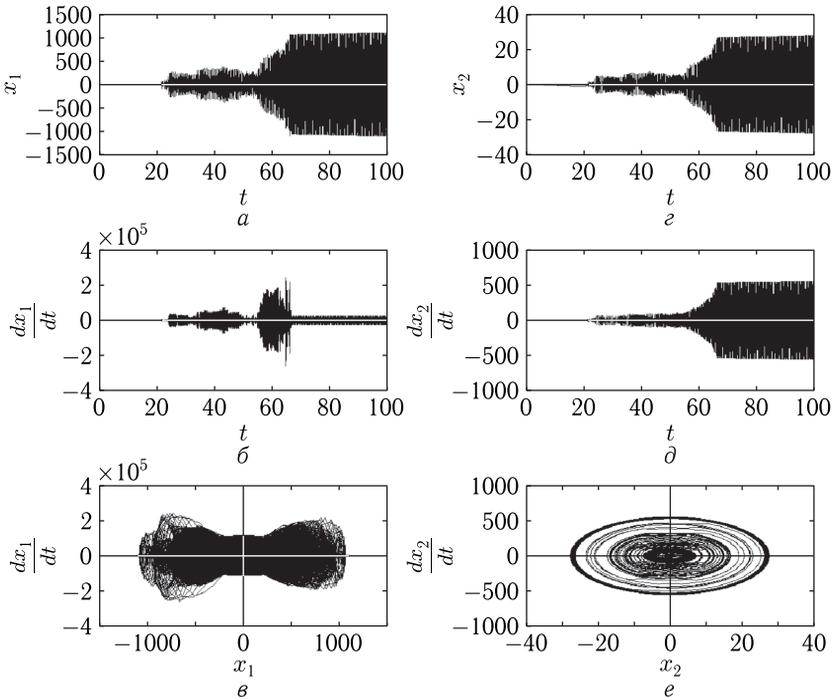


Рис. 10.2. Колебания (*a, z*), их производные (*б, д*) и параметрические портреты (*в, e*) для первого (левый столбец) и второго (правый столбец) осцилляторов, рассчитанные по системе (10.7)–(10.8). Параметры: $\delta = 5$; $\eta = 200$; $\gamma_2 = 10$. Начальное смещение: $x_{10} = 0,001$

10.2.1. Роль частотного слагаемого во втором уравнении

Прямолинейная логика анализа запаздывания требует, чтобы дальнейшее рассмотрение касалось только системы (10.7)–(10.8), так как эта система обеспечивает запаздывание при наиболее простом виде уравнений. Однако, поскольку в системе (10.7)–(10.8) второе уравнение становится релаксационным, сделаем небольшую остановку и сначала рассмотрим несколько подробнее систему (10.5)–(10.6), в которой оба уравнения остаются колебательными. В первую очередь обратим внимание на роль частоты ω_2 , присутствующей во втором уравнении, ибо именно она обеспечивает его колебательный характер.

Сравнение двух систем, выполненное в предыдущем разделе, показывает, что одинаковый характер колебаний требует для системы (10.5)–(10.6) уровня начального смещения значительно (в ~ 200 раз) более высокого, чем для системы (10.7)–(10.8). В то же время система (10.5)–(10.6) переходит в систему (10.7)–(10.8) при $\omega_2 \rightarrow 0$. В этом отношении представляет интерес проследить, как зависит критическое значение начального смещения x_{10} от частоты второго осциллятора ω_2 .

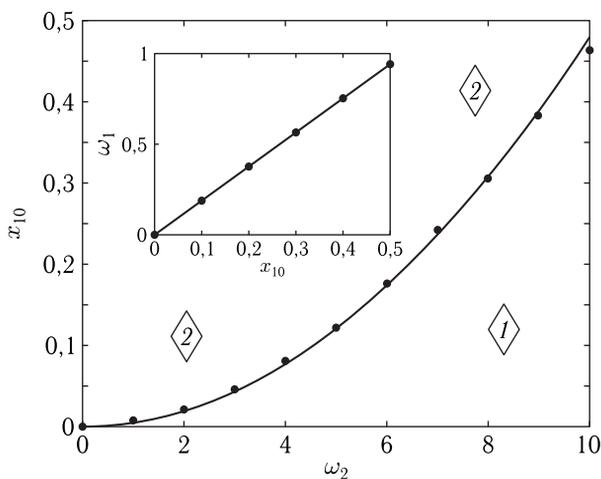


Рис. 10.3. Зависимость критического значения начального смещения от частоты второго осциллятора. 1 — область квазирегулярных малоамплитудных колебаний; 2 — область запаздывающего высокоамплитудного хаоса. Точки — результат машинного эксперимента. Кривая на основном рисунке построена по формуле (10.9). На врезке — зависимость частоты собственных колебаний первого осциллятора от начального смещения. Параметры: $\delta = 5$; $\eta = 200$; $\gamma_2 = 10$, на врезке $\gamma_2 = 0$

Ответ на этот вопрос дает рис. 10.3, где приведена такая зависимость в интервале частот от 0 до 10 ед. Точки — результаты машинного эксперимента, аппроксимирующая кривая построена по формуле

$$x_{10} = 0,0048 \cdot \omega_2^2. \quad (10.9)$$

Из рисунка можно видеть, что аппроксимирующая зависимость, построенная по формуле (10.9), соответствует полученным в машинном эксперименте точкам, с весьма высокой точностью: отклонение точек от кривой не превышает 0,3%. По квадратичности эта зависимость подобна кривым, приведенным в гл. 9, однако здесь она отличается значительной чистотой, видимо благодаря тому, что исключены «мешающие» факторы (ω_1 , γ_1 , η , а также влияние второго осциллятора).

Приведенная кривая на рисунке разделяет две области 1 и 2. Ниже этой кривой, то есть в области 1, колебания имеют вид, близкий к синусоиде со слегка меняющейся амплитудой (не более 5%). Амплитуда составляет несколько единиц (как правило, менее 10). Изменения амплитуды носят характер, близкий к хаотическому. Период колебаний наименьший вблизи порога запаздывания и составляет порядка нескольких единиц времени, а по мере уменьшения x_{10} возрастает и при $x_{10} \rightarrow 0$ стремится к бесконечности. Выше приведенной на рис. 10.3 кривой, то есть в области 2, колебания имеют вид высокоамплитудного хаоса с запаздыванием. Амплитуда хаоса составляет

от 300 ед. до 1500 ед. Запаздывание максимально сразу после порога, где оно может составлять до 100 и более единиц времени (в некоторых случаях наблюдалось запаздывание до 500 ед.). По мере увеличения начального смещения x_{10} время запаздывания уменьшается, так что при значительном увеличении (в 2–3 раза и более) стремится к нулю. В общем, зависимость времени запаздывания от начального смещения имеет тот же характер, что кривые, приведенные в работе [35] на рис. 8, однако опять здесь они проявляются в значительно более чистом виде, хотя скачки в некоторых случаях также сохраняются.

На врезке показана зависимость частоты первого осциллятора от величины начального смещения при отсутствии связи со вторым осциллятором, то есть при $\gamma_2 = 0$ и $x_2 = 0$, так что уравнение для него (10.7) приобретает вид чистого уравнения второго порядка с кубической нелинейностью:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \delta \cdot x_1^3 = 0. \quad (10.10)$$

В работе [35] рассмотрено подобное уравнение:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + b^2 \cdot x^3 = 0. \quad (10.11)$$

Показано, что это уравнение является колебательным, в формуле (39) приведен его общий вид, а в формулах (44), (48), (51), (52) той же работы приведены решения, полученные разными способами, причем во всех случаях частота прямо пропорциональна амплитуде колебаний.

Можно видеть, что (10.10) сводится к (10.11) заменой $\delta = b^2$, так что $b = \sqrt{\delta}$. При такой замене полученные в [35] выражения для частоты (44), (48), (51) принимают вид:

$$\omega = \sqrt{\delta} \cdot x_{10}; \quad (10.12)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\delta}{2}} \cdot x_{10}; \quad (10.13)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\delta(9 + \sqrt{\delta})}{12}} \cdot x_{10}. \quad (10.14)$$

При $\delta = 5$ из этих выражений получаем: из (10.12) — $\omega = 2,24 \cdot x_{10}$; из (10.13) — $\omega = 1,58 \cdot x_{10}$; из (10.14) — $\omega = 2,16 \cdot x_{10}$.

Из врезки на рис. 10.3 видно, что частота ω_1 прямо пропорциональна величине начального смещения с коэффициентом 1,90. То есть линейная зависимость между ω_1 и x_{10} выполняется с высокой точностью, а из формул точнее всего подходит (10.14), однако и две другие (10.12) и (10.13) тоже получаются довольно близкими.

10.3. Роль потенциала в формировании характера колебаний

Теперь, поскольку роль частоты в основном выявлена, перейдем к более подробному рассмотрению системы (10.7)–(10.8) как наиболее простой, но в то же время сохраняющей эффект запаздывания. Эта система имеет вид:

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (10.15)$$

$$\frac{d^2 x_2}{d t^2} + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (10.16)$$

Прежде всего рассмотрим роль потенциала. Слагаемые, имеющие потенциальный характер, имеются только в первом уравнении, то есть в (10.15). Соответствующий потенциал имеет вид:

$$U = \frac{\delta}{4} x_1^4 + \frac{\eta}{3} x_1^3 x_2. \quad (10.17)$$

Можно видеть, что потенциал определяется не только значением смещения первого осциллятора x_1 , но также и смещением второго осциллятора x_2 , реализуемого через нелинейную связь с параметром η . Поскольку в процессе колебаний величина x_2 меняется, то потенциал является динамическим (гл. 6–8). Основные свойства потенциала иллюстрируются рис. 10.4.

На рис. 10.4, *а* показана зависимость потенциала U от смещения первого осциллятора x_1 при двух противоположных по знаку значениях смещения второго осциллятора x_2 . Для построения выбрано достаточно типичное значение x_2 , равное ± 20 ед. Можно видеть, что в обоих случаях потенциал имеет минимумы, положения которых показаны стрелками. Они чередуются в такт с колебаниями второго осциллятора. То есть потенциал в такт с колебаниями второго осциллятора «перепрыгивает» от одного положения до другого.

На рис. 10.4, *б* показана зависимость положения одного из минимумов (соответствующего кривой 1 на рис. 10.4, *а*) от величины смещения второго осциллятора x_2 . Видно, что зависимость представляет собой прямую линию. Такой характер зависимости становится очевидным, если учесть, что условием минимума зависимости $U(x_1)$ является равенство нулю ее производной, то есть выполнение условия

$$\delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0, \quad (10.18)$$

из которого получаем

$$(x_1)_{\min} = -\frac{\eta}{\delta} x_2. \quad (10.19)$$

Подставляя в это выражение принятые параметры $\delta = 5$ и $\eta = -200$, находим угловой коэффициент прямой на рис. 10.4, *б* равным

$$k_m = -\eta/\delta = 40. \quad (10.20)$$

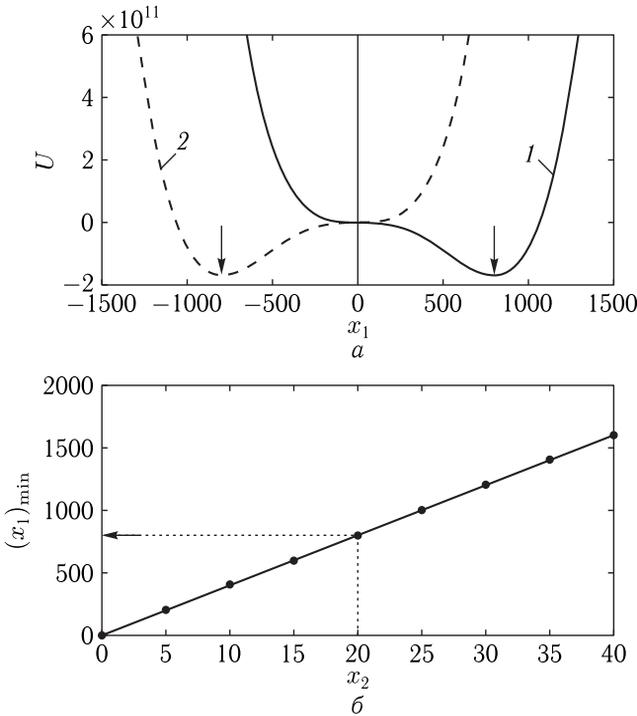


Рис. 10.4. Потенциал для первого осциллятора. *a* — зависимость потенциала U от x_1 при $x_2 = 20$ (сплошная кривая 1) и при $x_2 = -20$ (пунктирная кривая 2); *б* — зависимость положения минимума потенциала от x_2 . Параметры: $\delta = 5$; $\eta = -200$

При этом значение $x_2 = 20$, при котором построен потенциал на рис. 10.4, *a*, соответствует $(x_1)_{\min} = 1600$ ед. (показано точечной линией и стрелкой).

Рассмотрим теперь, как влияет потенциал на амплитуду колебаний, развивающихся во времени. Обратимся к рис. 10.5, где показаны колебания смещения первого и второго осцилляторов на промежутке времени, значительно превышающем время запаздывания.

Из рисунка можно видеть, что имеет место двухступенчатое запаздывание, подобное рассмотренному в работе [29, раздел 7, рис. 5], однако имеющее заметные отличия. Так, здесь после первого запаздывания амплитуда не возрастает, а держится на постоянном уровне, а после второго — пилообразные колебания сменяются также постоянным по амплитуде режимом. Таким образом, здесь картина более простая, что, по-видимому, связано с простотой рассматриваемой здесь системы (10.15)–(10.16) по сравнению со значительно более сложной системой, рассматривавшейся в работе [43, раздел 1, формулы (1)–(2)].

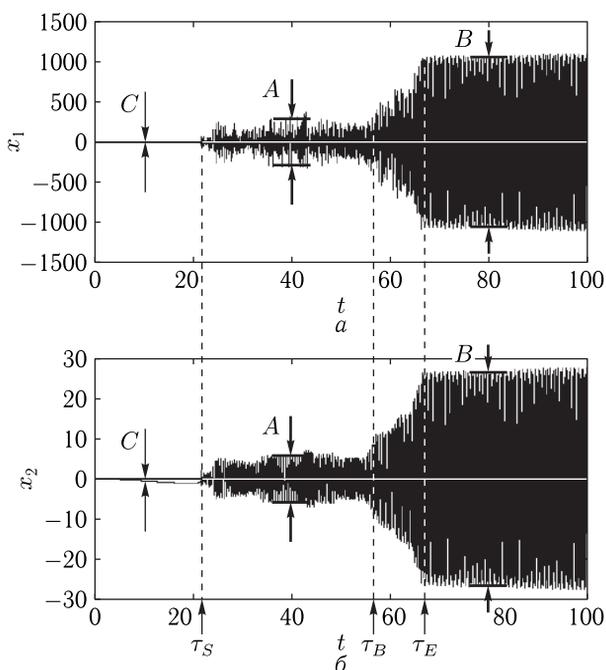


Рис. 10.5. Колебания первого (а) и второго (б) осцилляторов в течение большого промежутка времени. A , B , C — позиции по времени, в которые измеряется максимальная амплитуда колебаний. τ_S , τ_B , τ_E — характерные моменты времени. Расчет выполнен по системе уравнений (10.15)–(10.16). Параметры: t ; t_B ; $\tau_S = 10$. Начальное смещение $t = 0,001$

Подобно [29], введем основные характеристики наблюдаемых здесь колебаний. Прежде всего отметим $t = 21$ ед. времени — момент первого (основного) скачка, то есть собственно время запаздывания в принятом ранее смысле. После τ_S резким скачком начинается высокоамплитудный хаос, однако максимальная амплитуда колебаний остается постоянной до момента $\tau_B = 56$ ед. времени, откуда начинается второй скачок амплитуды хаоса. По достижении времени $\tau_E = 66$ ед. амплитуда колебаний перестает расти, колебания значительно упорядочиваются. Проверка показывает, что в этом случае колебания второго осциллятора становятся близкими к синусоидальным с периодом около 0,5 ед. времени, причем амплитуда меняется хаотическим образом в пределах 10%. Колебания первого осциллятора содержат близкую к синусоиде основную составляющую с тем же периодом и хаотически меняющейся амплитудой также в пределах 10%, однако теперь на эту синусоиду накладываются хаотические колебания с периодом, примерно на порядок меньшим, и амплитудой, меньшей амплитуды основной составляющей в 4–5 раз.

Таким образом, имеются два интервала времени, в которых колебания, хотя и остаются хаотическими, но максимальная амплитуда хаоса сохраняется постоянной. Первый интервал — от τ_S до τ_B , второй — от τ_E до времени не менее 100 ед.

Рассмотрим теперь, как соотносятся между собой амплитуды колебаний первого и второго осцилляторов в пределах этих двух интервалов. Схема регистрации амплитуды колебаний хаоса показана на рис. 10.5 горизонтальными ограничивающими (габаритными) линиями, отмеченными стрелками.

В первом интервале (позиция *A* на рис. 10.5) амплитуда колебаний второго осциллятора составляет 6 ед., а первого — около 240 ед. Отношение этих амплитуд равно 40, что как раз соответствует угловому коэффициенту прямой на рис. 10.4, б.

Во втором интервале (позиция *B* на рис. 10.5) амплитуда колебаний второго осциллятора составляет около 27 ед., а первого — около 1100 ед. Отношение этих амплитуд равно 40,74, что также весьма близко к величине углового коэффициента прямой на рис. 10.4, б. Таким образом, можно видеть, что в обоих случаях амплитуда колебаний первого осциллятора определяется шириной кривой динамического потенциала (рис. 10.4, а) при заданном значении амплитуды второго осциллятора. То есть в обоих случаях первый осциллятор колеблется в пределах четко определенной потенциальной ямы, размер которой определяется величиной смещения второго осциллятора.

При этом важным является тот факт, что первый осциллятор в процессе колебаний не переходит с одной ветви потенциала на другую, как это было бы при статическом потенциале, а следует за положением минимума динамического потенциала, определяемого значением смещения второго осциллятора.

Таким образом, после первичного запаздывания модель потенциала, «прыгающего» от одного положения до другого в такт с колебаниями второго осциллятора, отражает развитие колебаний высокоамплитудного хаоса в достаточной степени.

Однако в интервале времени от нуля до $\tau_S = 21$ ед., то есть в течение первичного запаздывания, такое положение нарушается. Так, при времени 10 ед. (позиция *C* на рис. 10.5) величина смещения первого осциллятора составляет $4 \cdot 10^{-4}$ ед., а величина смещения второго — $-0,47$ ед. Отношение этих величин составляет около 340, да еще является отрицательным.

Более того, из рис. 10.5, б видно, что смещение второго осциллятора в этом интервале не является колебательным, а монотонно увеличивается с отрицательным знаком (особенно хорошо заметно между позицией *C* и временем τ_S). Контрольная проверка показывает, что смещение первого осциллятора при этом также меняется монотонно без каких-либо колебаний. Более подробно эта область времени будет рассмотрена далее.

10.4. Движение осцилляторов в интервале первичного запаздывания

В предыдущем разделе отмечено, что в интервале запаздывания (от нуля до 21 ед. времени) колебания осцилляторов имеют некоторые особенности, не укладывающиеся в представление о «прыгающем» потенциале. Рассмотрим колебания осцилляторов в этом интервале более подробно, для чего обратимся к рис. 10.6 и рис. 10.7.

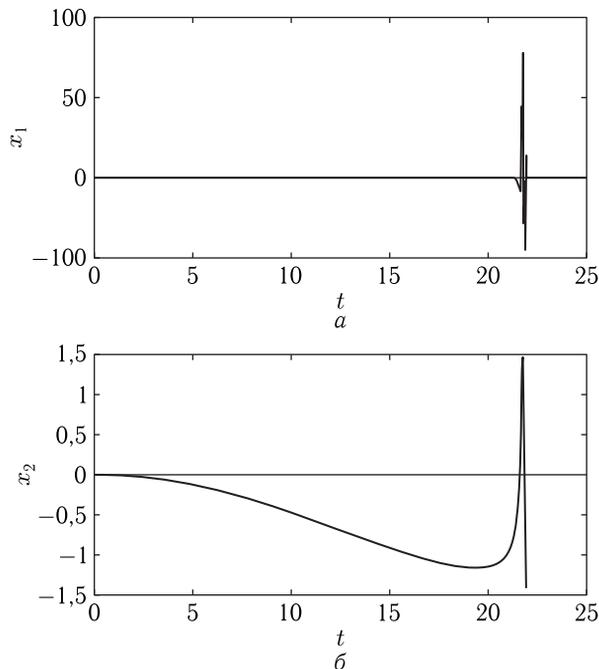


Рис. 10.6. Колебания первого (а) и второго (б) осцилляторов в течение первичного интервала запаздывания. Расчет выполнен при значении времени $t = 22$ ед. Параметры — те же, что на рис. 10.5

Из рис. 10.6, а видно, что колебания первого осциллятора в течение всего времени запаздывания, то есть до момента $t = \tau_S = 21,5$ ед. времени, практически отсутствуют. Проверка показывает, что небольшое смещение все же есть, но оно не превышает начального отклонения (0,001 ед.) и является монотонным, то есть не проявляет характерных периодических колебаний, хотя и меняет знак один или два раза с интервалом по времени порядка 5–10 ед. В момент времени 21,5 ед. смещение скачком резко увеличивается на пять порядков, достигая величины 50–70 ед. За пределами рисунка смещение еще более увеличивается до 200–250 ед., как это видно из рис. 10.5, а.

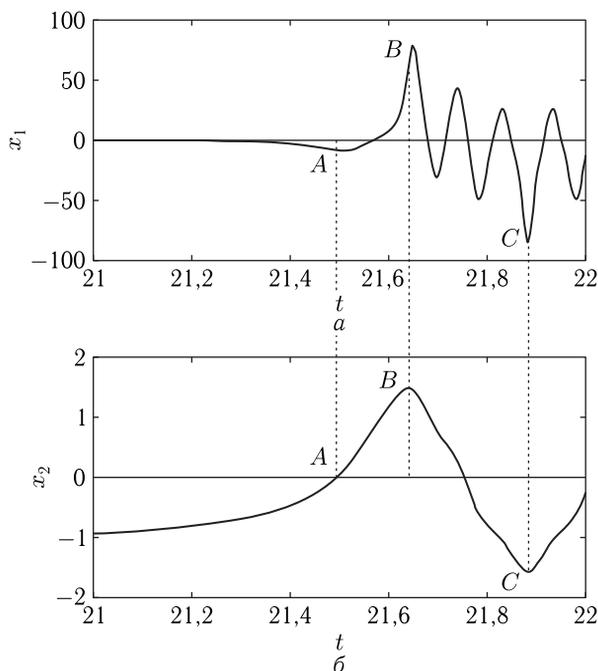


Рис. 10.7. Колебания первого (а) и второго (б) осцилляторов в окрестности окончания запаздывания — фрагмент того же развития колебаний, что на рис. 10.6, представленный в более крупном масштабе. Параметры — те же, что на рис. 10.5

Из рис. 10.6, б видно, что смещение второго осциллятора уже с начального момента времени ($t = 0$ ед.) по абсолютной величине монотонно увеличивается, достигая максимума при $t = 20$ ед., где составляет около $-1,1$ ед., после чего уменьшается, проходя через нуль вблизи времени $21,5$ ед. и далее резко возрастает до величины $1,5$ ед., после чего испытывает резкие колебания. Из рис. 10.5, б видно, что далее смещение растет до $5-7$ ед. и более, приобретая хаотический характер.

Заметным является тот факт, что в момент окончания запаздывания, то есть при $t = \tau_S = 21,5$ ед. времени смещение первого осциллятора скачком возрастает на пять порядков, а второго — почти не меняется, так как подходит к этому моменту уже достаточно большим (около $1,1$ ед.).

С целью более подробного выявления характера выхода системы из запаздывания, на рис. 10.7 показано развитие тех же колебаний в более крупном масштабе по времени.

Из сопоставления кривых на рис. 10.7, а и рис. 10.7, б можно видеть, что начало развития колебаний первого осциллятора происходит в тот момент, когда смещение второго осциллятора проходит через

нуль (точка A на обоих рисунках). Далее смещение второго осциллятора претерпевает подъем до точки B , а колебания первого также следуют этому подъему, резким скачком достигая величины около 70 ед. (точка B на рис. 10.7, a). Далее движение первого осциллятора происходит колебательным образом с периодом около 0,1 ед. времени, а движение второго также становится колебательным с периодом примерно в пять раз большим (около 0,5 ед. времени). В точке C смещения того и другого осцилляторов достигают максимума, после чего происходят дальнейшие колебания (уже за пределами правого края рисунка). Из сравнения верхней и нижней эпюр на рис. 10.7 можно видеть, что средняя линия колебаний первого осциллятора в основном следует величине смещения второго осциллятора, то есть от точки B до точки C спадает, как и кривая на нижней эпюре, соответствующая второму осциллятору.

10.5. Качественная картина развития смещений в области запаздывания

Качественную картину развития смещений в области запаздывания можно представить следующим образом. В начальный момент времени первый осциллятор имеет некоторое начальное смещение. Благодаря связи осцилляторов это смещение передается второму, однако, ввиду слабости связи, не может раскачать его до заметной величины, а смещает лишь весьма незначительно. Далее это незначительное смещение возвращается к первому осциллятору, вызывая некоторое увеличение его смещения. Ввиду слабости связи добавка к начальному смещению первого осциллятора является незначительной, но все же теперь полное его смещение оказывается несколько большим, чем в начальный момент времени. Такое слегка увеличенное смещение снова действует на второй осциллятор, вызывая дополнительное увеличение его отклонения. Такое увеличенное смещение второго осциллятора еще более увеличивает смещение первого. Далее процесс повторяется таким же кольцеобразным образом, вызывая лавинообразное все более значительное смещение второго осциллятора.

Согласно рис. 10.4, a смещение второго осциллятора постепенно формирует боковой минимум потенциала, так что, когда он становится достаточно заметным, первый осциллятор скатывается в него, что и проявляется как резкий скачок его смещения, то есть выход из режима запаздывания. Вблизи начального момента времени смещение первого осциллятора увеличивается на незначительную величину, так что рост смещения второго происходит очень медленно. Далее процесс ускоряется, приобретая кольцевой лавинообразный характер, что и приводит в конце концов к скатыванию первого осциллятора в боковую потенциальную яму, сформированную к тому времени вторым осциллятором.

10.5.1. Влияние пошагового развития колебаний

Нарисованная в предыдущем разделе качественная картина развития колебаний в процессе запаздывания предполагает, что расчет происходит последовательными шагами по времени. В настоящей работе в качестве такого пошагового алгоритма использовался метод Рунге–Кутты четвертого порядка, однако принципиальным моментом здесь является не использование конкретного метода, а сам факт кольцевого пошагового расчета движения осцилляторов. Приведем схему такого расчета по шагам.

Шаг № 1.

Задание смещения первого осциллятора.

Шаг № 2.

Вычисление смещения второго осциллятора по имеющемуся значению смещения первого.

Шаг № 3.

Вычисление добавки к смещению первого осциллятора по полученному на шаге № 2 смещению второго.

Шаг № 4.

Вычисление смещения первого осциллятора с учетом добавки, полученной на шаге № 3 от второго.

Шаг № 5.

Повторение шага № 2 с использованием смещения первого осциллятора, полученного на шаге № 4.

Таким образом, смещение нарастает ступенчатым образом. В этом случае можно полагать, что изменение шага может привести к изменению скорости нарастания смещения. В этом отношении должна быть какая-то достаточно малая величина шага, дальнейшее уменьшение которой не приведет к заметному изменению нарастания смещения. Для проверки такого предположения было выполнено исследование развития колебаний во времени при различной величине шага. Полученные результаты иллюстрируются рис. 10.8. Для каждой последующей развертки величина шага уменьшается в два раза по сравнению с предыдущей.

Из рисунка можно видеть, что интервал первичного запаздывания во всех случаях остается одним и тем же, равным 21,5 ед. времени. Однако дальнейшее развитие колебаний происходит с некоторыми отличиями. Так, начало второй ступени запаздывания для рис. 10.8, *а* соответствует 62 ед. времени, для рис. 10.8, *б* — 80 ед. времени, а на рис. 10.8, *в* эта ступень вообще не наблюдается. Однако проверка показала, что и в этом случае второй скачок амплитуды все же имеет место, однако он происходит при времени 170 ед. Во всех случаях после окончания первичного запаздывания колебания являются хаотическими, однако структура хаоса получается совершенно различной.

Такой характер колебаний можно понять, если учесть, что в течение интервала первичного запаздывания (до 21,5 ед. времени) характер

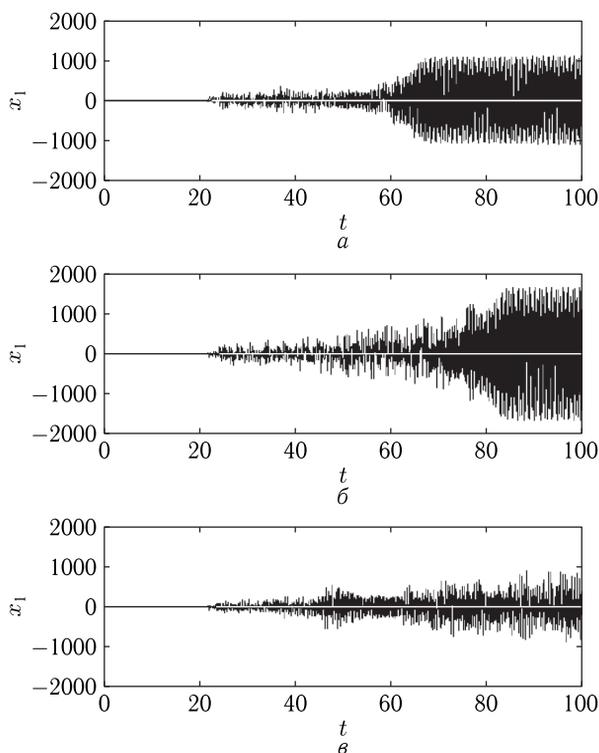


Рис. 10.8. Развитие во времени колебаний первого осциллятора, рассчитанное при различном шаге по времени: $a - 5 \cdot 10^{-4}$ ед., $б - 2,5 \cdot 10^{-4}$ ед., $в - 1,25 \cdot 10^{-4}$ ед. Все параметры — те же, что на рис. 10.5

процесса является регулярным, смещения обоих осцилляторов остаются непрерывными, меняются плавно вполне монотонным образом. Поэтому время выхода из первичного запаздывания от величины шага не зависит.

Однако не так обстоит дело в области хаоса. Там даже малое изменение смещения на каком-то шаге в корне меняет все последующее развитие колебаний. Проверка показывает, что процесс развития хаоса имеет фрактальный характер, так что любое сужение интервала наблюдения не меняет подобия предыдущему, во всяком случае, по спектральному составу колебаний. Заметим, что такой фрактальный характер для хаоса является свойством достаточно общим [4, лекция 11].

10.6. Влияние основных параметров системы

В предыдущих разделах кратко рассмотрена общая картина эффекта запаздывания, базирующегося на системе уравнений (10.15)–(10.16). Однако все рассмотрение проведено при одном и том же наборе

параметров, входящих в систему уравнений, а именно: $\gamma_2 = 10$, $\delta = 5$, $\eta = -200$. В работе [31] в какой-то степени отражена роль начального смещения x_{10} , однако упомянутые параметры также оставлены без изменений. Обратимся теперь к рассмотрению влияния этих параметров на свойства эффекта запаздывания. Начнем с коэффициента линейной связи второго осциллятора γ_2 .

10.6.1. Коэффициент линейной связи второго осциллятора

На рис. 10.9 показана зависимость времени первичного запаздывания τ_S от коэффициента линейной связи второго осциллятора γ_2 , построенная в линейном (а) и двойном логарифмическом (б) масштабах.

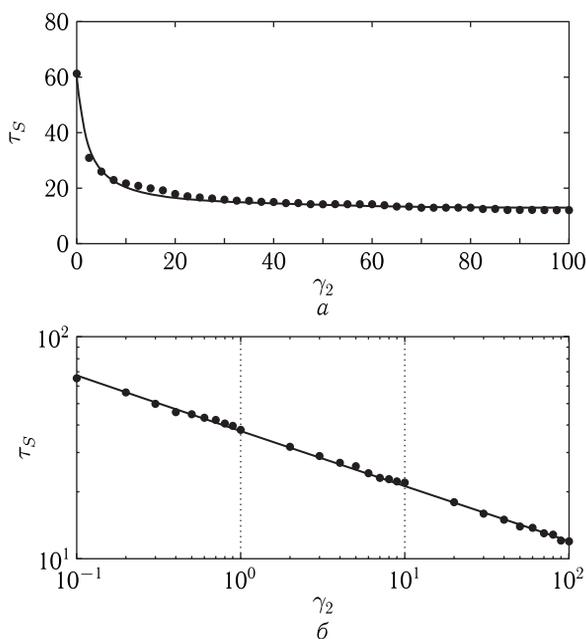


Рис. 10.9. Зависимость времени запаздывания от коэффициента линейной связи второго осциллятора. а — масштаб линейный; б — масштаб двойной логарифмический. Точки — результаты машинного эксперимента. Сплошные линии построены по формуле (10.21). Параметры: $\delta = 5$; $\eta = -200$. Начальное смещение $x_{10} = 0,001$

Из рисунка видно, что при малом значении параметра γ_2 время запаздывания велико, а при увеличении этого параметра постепенно уменьшается. Такое поведение можно понять, если учесть, что второй осциллятор является необходимым компонентом системы, требующимся для возбуждения высокоамплитудного хаоса. При этом уменьшение связи затрудняет условия формирования хаоса, так что время запаздывания увеличивается, стремясь к бесконечности. С другой стороны,

увеличение связи обеспечивает более легкие условия для возбуждения хаоса, вследствие чего время запаздывания уменьшается, в конечном счете стремясь к нулю.

Из рис. 10.9, а видно, что зависимость τ_S от γ_2 хорошо (до единиц процентов) аппроксимируется функцией обратной пропорциональности вида:

$$\tau_S = \frac{100}{\gamma_2 + 1,9} + 12. \quad (10.21)$$

На рис. 10.9, б приведена та же зависимость, построенная в двойном логарифмическом масштабе. Видно, что точки ложатся на прямую линию, в данном масштабе соответствующую той же функции (10.21). Прямолинейный характер дополнительно подтверждает аппроксимацию наблюдаемой зависимости функцией обратной пропорциональности.

Полученную зависимость можно описать с помощью эмпирической формулы

$$\tau_S = 12 \left(\frac{8,33}{\gamma_2 + 1,9} + 1 \right) \quad (10.22)$$

или в символизированном виде:

$$\tau_S = a_\gamma \left(\frac{b_\gamma}{\gamma_2 + c_\gamma} + 1 \right), \quad (10.23)$$

где $a_\gamma = 12$, $b_\gamma = 8,33$, $c_\gamma = 1,9$.

Рассмотрим теперь, как меняется характер высокоамплитудного хаоса, возбуждаемого по окончании запаздывания. Обратимся к рис. 10.10, где показаны зависимости амплитуд хаоса для первого (а) и второго (б) осцилляторов от коэффициента линейной связи второго осциллятора.

Замечание. Доверительные интервалы точек здесь отражают вариации амплитуды хаоса довольно условно (с точностью порядка 20% и более). Такое приближение принято из-за сильной неоднородности хаоса, в том числе не только двухступенчатого, но иногда имеющего три и более ступеней, или плавный рост, где ступени вообще размыты и не выражены. В данном случае доверительные интервалы точек показаны в первую очередь для обеспечения большей наглядности картины. Вообще говоря, характер хаоса с учетом разнообразия его режимов требует более подробного исследования, могущего составить предмет для отдельной работы.

Из рисунка видно, что по мере увеличения параметра γ_2 амплитуда хаоса того и другого осцилляторов увеличивается. Можно полагать, что такое увеличение вызвано усилением воздействия осцилляторов друг на друга при увеличении связи между ними. При этом часть потенциала (10.17), определяемая параметром δ , не меняется, однако второе его слагаемое, определяемое параметром η , возрастает пропорционально произведению квадрата x_1 на x_2 , так что положение минимума потенциала,

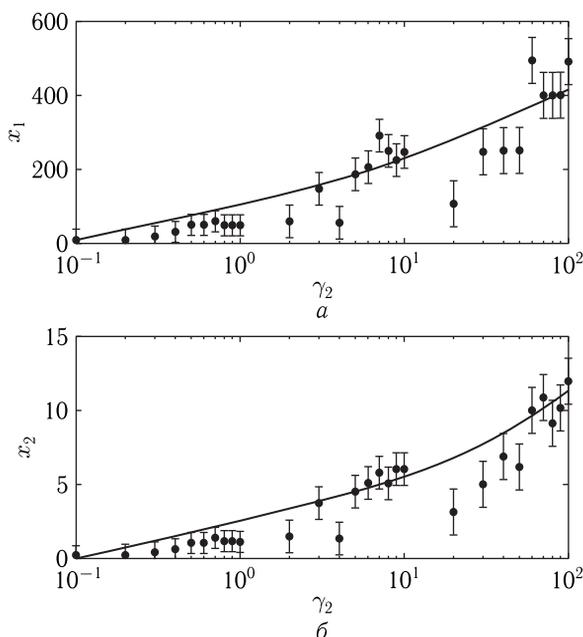


Рис. 10.10. Зависимости амплитуд хаоса для первого (а) и второго (б) осцилляторов от коэффициента линейной связи второго осциллятора. Точки — результаты машинного эксперимента. Сплошные линии проведены приближенно через места скопления точек. Параметры: $\delta = 5$; $\eta = -200$. Начальное смещение $x_{10} = 0,001$

определяющее амплитуду хаоса, по мере увеличения x_1 и x_2 от нуля удаляется, что и приводит к росту амплитуды хаоса.

Примечательно отметить, что обе кривые на рис. 10.10 подобны друг другу, и между амплитудами колебаний осцилляторов на всем протяжении кривых наблюдается одно и то же соотношение x_1/x_2 , равное или весьма близкое к 40. Именно такое соотношение отмечалось ранее на рис. 10.4, б в разделе 10.3, причем там было признано линейным как следствие того же механизма определения амплитуды хаоса положением минимума потенциала.

10.6.2. Параметр потенциальности

Другим независимым параметром, содержащимся в системе (10.15)–(10.16) является параметр потенциальности δ , определяющий слагаемое вида δx^3 .

Замечание. Другое название, используемое для δ , например в работе [35] — параметр кубической нелинейности, однако, поскольку в общем случае нелинейное слагаемое степенного вида может иметь любую другую степень, кроме первой, причем определяет характер потенциала,

будем здесь употреблять более общее название — параметр потенциальности.

На рис. 10.11 показана зависимость времени первичного запаздывания τ_S от параметра потенциальности δ первого осциллятора γ_2 , построенная в логарифмическом масштабе.

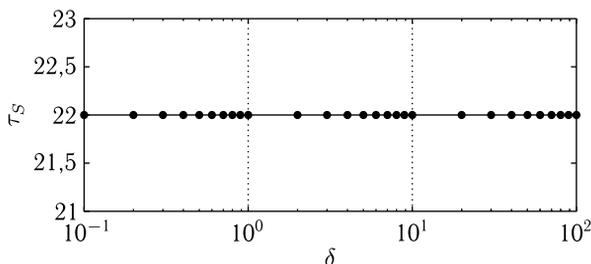


Рис. 10.11. Зависимость времени запаздывания от параметра потенциальности. Точки — результаты машинного эксперимента. Сплошная линия — прямая, параллельная горизонтальной оси. Параметры: $\gamma_2 = 10$; $\eta = -200$. Начальное смещение $x_{10} = 0,001$

Из рисунка видно, что точки хорошо ложатся на прямую, параллельную горизонтальной оси, то есть зависимость отсутствует. Проверка показывает, что при уменьшении или увеличении представленного на рисунке интервала изменения δ на один-два порядка зависимость также отсутствует. При этом зависимость потенциала от δ , оставаясь пропорциональной x_1 в четвертой степени, лишь сжимается или расширяется по горизонтали, в остальном не меняется.

Можно полагать, что такое изменение потенциала должно приводить к изменению амплитуды хаоса, возбуждаемого после запаздывания. Ответ на этот вопрос дает рис. 10.12, где показаны зависимости амплитуд хаоса первого (*a*) и второго (*b*) осцилляторов от параметра потенциальности δ . Точки приведены с доверительными интервалами, однако величина этих интервалов дана приближенно, учитывая резко неоднородный характер хаотических колебаний.

Из рис. 10.12, *a* видно, что амплитуда хаотических колебаний первого осциллятора по мере увеличения δ падает, стремясь к нулю. Такое падение обусловлено сужением слагаемого потенциальной кривой четвертой степени (10.17) вида $\delta/4 \cdot x_1^4$, происходящим тем сильнее, чем больше параметр δ .

Однако колебания хаоса второго осциллятора (рис. 10.12, *b*) этому правилу не следуют, а сначала увеличиваются, после чего, пройдя через максимум около $\delta = 50$, уменьшаются. Факт первичного увеличения x_2 выражен не ярко и скорее походит на некоторую стабилизацию уровня смещения x_2 при общем изменении потенциала, тогда как уменьшение x_2 после прохождения максимума обусловлено сужением раскрыва потенциала и уменьшением общей амплитуды колебаний обо-

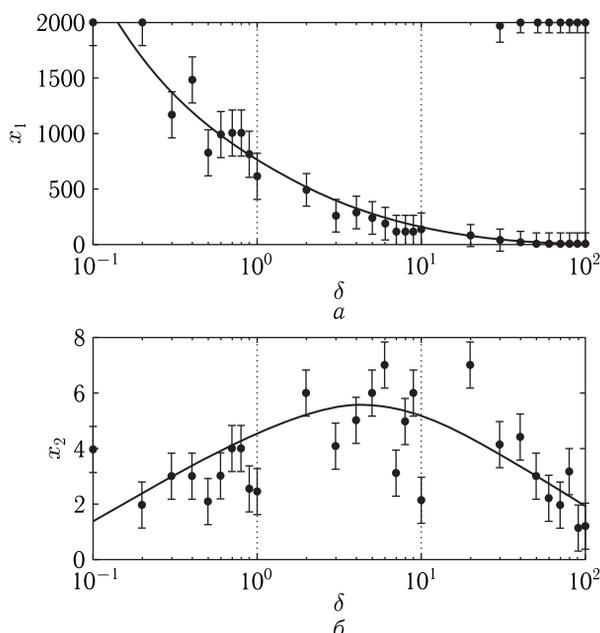


Рис. 10.12. Зависимости амплитуд хаоса первого (а) и второго (б) осцилляторов от параметра потенциальности. Точки — результаты машинного эксперимента. Доверительные интервалы точек имеют тот же характер, что на рис. 10.10. Кривые проведены приблизительно через места скопления точек. Амплитуда измерена при времени, превышающем время запаздывания на 20%, то есть до второй ступени запаздывания. Параметры — те же, что на рис. 10.11

их осцилляторов. Важно отметить, что здесь отношение амплитуд колебаний осцилляторов x_1/x_2 значению 40, отмеченному для рис. 10.4, б и рис. 10.10, не соответствует, составляя, как правило, в 2–3 раза больше, уменьшаясь по мере увеличения δ . Такое несоответствие обусловлено тем, что рис. 10.4, б и рис. 10.10 построены при неизменной величине параметра δ , так что раскрыв потенциала при изменении других параметров не меняется и только минимум потенциала претерпевает сдвиг. Здесь же по мере увеличения δ меняется раскрыв, что вызывает более сильное изменение положения минимума, в результате чего поведение соотношения x_1/x_2 приобретает более сложный характер. Заметим однако, что вопрос о точном соотношении между x_1 и x_2 в таких условиях требует более подробного рассмотрения, могущего составить предмет для отдельной работы.

10.6.3. Параметр нелинейной связи

Последним независимым параметром, содержащимся в системе (10.15)–(10.16), является параметр нелинейной связи η , определяющий слагаемое вида $\eta x_1^2 x_2$. Обратимся к рис. 10.13, где представлены

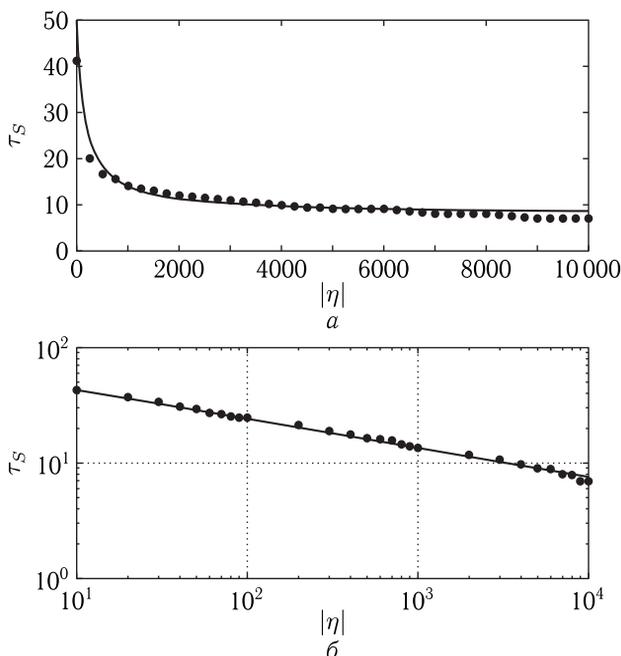


Рис. 10.13. Зависимость времени запаздывания от модуля параметра нелинейной связи в линейном (а) и двойном логарифмическом (б) масштабах. Сплошные линии построены по формуле (10.24). Параметры: $\delta = 5$; $\gamma_2 = 10$. Начальное смещение $x_{10} = 0,001$

зависимости времени запаздывания от модуля параметра нелинейной связи в линейном (а) и двойном логарифмическом (б) масштабах.

Замечание. Вообще говоря, проверка показывает, что необходимым условием возбуждения высокоамплитудного хаоса колебаний в системе (10.15)–(10.16) является отрицательность параметра нелинейной связи η . При этом в арифметическом отношении большое по абсолютной величине значение этого параметра меньше значения, малого по абсолютной величине. Однако связь определяется не столько знаком, сколько абсолютной величиной параметра, поэтому для характеристики связи здесь выбран не сам параметр η , а его модуль, то есть абсолютная величина $|\eta|$.

Из рисунка можно видеть, что увеличение параметра нелинейной связи $|\eta|$ приводит к уменьшению времени запаздывания. В самом деле, при слабой связи влияние осцилляторов друг на друга мало, и возбуждение высокоамплитудного хаоса затруднено, вследствие чего и время запаздывания получается большим. При увеличении связи влияние осцилляторов друг на друга увеличивается, в результате чего

возбуждение хаоса облегчается, и время запаздывания получается малым.

В этом отношении явление полностью аналогично имеющему место при изменении параметра линейной связи второго осциллятора (раздел 10.6.1). Различие состоит только в численных значениях коэффициентов, а механизм остается тем же самым, общим как для линейного, так и для нелинейного параметров. Следует заметить, что здесь, как и в случае линейной связи (рис. 10.9, *a*), время запаздывания при значительном увеличении η (по крайней мере, в пределах рисунка) стремится не к нулю, а к малой, но все же конечной величине. Можно полагать, что эта величина определяется инерционными свойствами обоих осцилляторов, так что колебания начинаются не мгновенно, а с некоторой задержкой, требуемой для развития их до значительной амплитуды. Заметим, что вопрос об инерционности, по-видимому, является достаточно важным, так что также может потребовать отдельного рассмотрения.

Из рис. 10.13, *a* видно, что зависимость τ_S от $|\eta|$ хорошо (до единиц процентов) аппроксимируется функцией обратной пропорциональности вида:

$$\tau_S = \frac{7000}{|\eta| + 170} + 8. \quad (10.24)$$

На рис. 10.13, *b* приведена та же зависимость, построенная в двойном логарифмическом масштабе. Видно, что точки ложатся на прямую линию, в данном масштабе соответствующую той же функции (10.24). Прямолинейный характер дополнительно подтверждает аппроксимацию наблюдаемой зависимости функцией обратной пропорциональности.

Полученную зависимость можно описать с помощью эмпирической формулы

$$\tau_S = 8 \left(\frac{875}{|\eta| + 170} + 1 \right), \quad (10.25)$$

или в символизированном виде:

$$\tau_S = a_\eta \left(\frac{b_\eta}{|\eta| + c_\eta} + 1 \right), \quad (10.26)$$

где $a_\eta = 8$, $b_\eta = 875$, $c_\eta = 170$.

В разделе 10.6.1 показано, что время запаздывания обратно пропорционально также параметру линейной связи γ_2 в соответствии с формулой (10.23). Объединяя эту формулу с (10.26) получаем общую эмпирическую формулу, отражающую зависимость времени запаздывания от параметров γ_2 и η :

$$\tau_S = a_\gamma a_\eta \left(\frac{b_\gamma}{\gamma_2 + c_\gamma} + 1 \right) \left(\frac{b_\eta}{|\eta| + c_\eta} + 1 \right), \quad (10.27)$$

где $a_\gamma = 12$, $a_\eta = 8$, $b_\gamma = 8,33$, $c_\gamma = 1,9$, $b_\eta = 875$, $c_\eta = 170$.

Рассмотрим теперь, как при изменении $|\eta|$ меняется характер высокоамплитудного хаоса, возбуждаемого по окончании запаздывания. Обратимся к рис. 10.14, где показаны зависимости амплитуд хаоса для первого (а) и второго (б) осцилляторов от модуля параметра нелинейной связи.

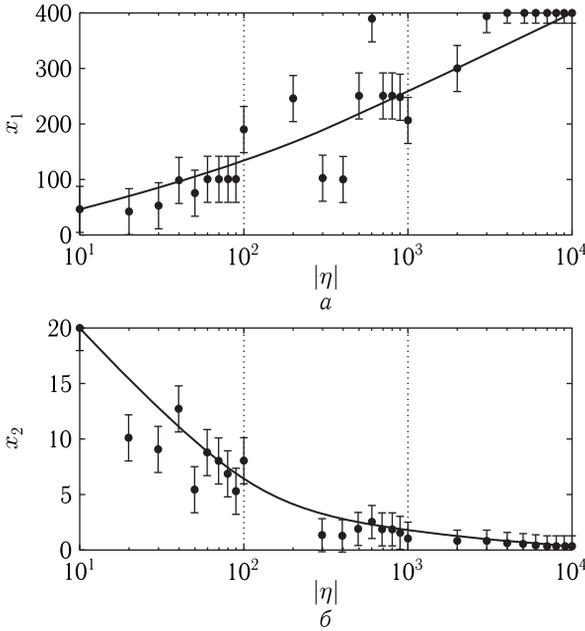


Рис. 10.14. Зависимости амплитуд хаоса первого (а) и второго (б) осцилляторов от модуля параметра нелинейной связи. Точки — результаты машинного эксперимента. Характер доверительного интервала — тот же, что на рис. 10.10 и рис. 10.12. Сплошные линии проведены приблизительно через места скопления точек. Параметры — те же, что на рис. 10.13

Из рис. 10.14, а можно видеть, что амплитуда хаоса для первого осциллятора по мере увеличения $|\eta|$ возрастает. Характер возрастания подобен таковому при увеличении параметра линейной связи γ_2 , представленному на рис. 10.10, а. Так что и механизм — тот же самый: увеличение $|\eta|$ соответствует усилению связи между осцилляторами, в результате чего амплитуда колебаний растёт.

Однако характер изменения амплитуды хаоса для второго осциллятора (рис. 10.14, б) здесь прямо противоположный: увеличение $|\eta|$ приводит к уменьшению x_2 . Характер изменения соотношения x_1/x_2 также противоположен наблюдаемому на рис. 10.12, б. В качестве возможной причины такого поведения x_2 можно отметить влияние знака η , который является отрицательным. Однако следует полагать, что более подробное выяснение этого вопроса требует отдельного рассмотрения.

10.7. Замечание о возможном дальнейшем развитии работы

В настоящей работе довольно подробно исследован характер запаздывания развития нелинейных колебаний, а также в некоторой степени затронуты характеристики возбуждаемого после запаздывания высокоамплитудного хаоса. По ходу работы неоднократно приведены замечания, касающиеся дальнейшего развития и уточнения рассматриваемых явлений. Можно полагать, что некоторые из приведенных замечаний могут оставить предмет для отдельной работы.

Однако в качестве важнейшего нерешенного вопроса следует отметить построение модели первичного запаздывания. В самом деле, подробно рассмотрены процессы начала запаздывания и выхода из него. Приведены соответствующие развертки процессов во времени. Установлены зависимости характеристик времени запаздывания от различных параметров системы. В то же время остается открытым вопрос о продолжительности самого процесса запаздывания. С внешней стороны явление протекает так, как будто бы в течение интервала запаздывания происходит постепенное накопление какой-то величины, по достижении критического значения которой монотонный рост сменяется лавинообразным увеличением смещения того и другого осцилляторов. Модель потенциала на этот вопрос прямого ответа не дает, различные попытки анализа потенциальной и кинетической энергии колебаний или исследование бифуркационного характера траекторий параметрических портретов прямого ответа не дали. Попытки привлечь аналогии с моделью бильярда Синая также пока к успеху не привели. Тем не менее авторы продолжают исследования и надеются на положительный успех в этом вопросе, а также предлагают задачу вниманию других заинтересованных исследователей.

Выводы по главе 10

Настоящая работа является продолжением исследования нестационарного запаздывания установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Отмечено, что физической основной рассматриваемой системы является возбуждение мощных гиперзвуковых колебаний в ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами, а также возбуждение интенсивных шумовых колебаний в ферритовом диске, помещенном в электродинамический резонатор. Главным предметом рассмотрения такой системы в настоящей работе является воздействие осцилляторов друг на друга.

Рассмотрение проведено на основе полученной в первой части работы упрощенной системы двух связанных уравнений второго порядка. Предложены два вида упрощенных систем: колебательная и релаксационная.

Колебательная система состоит из двух уравнений, первое из которых содержит инерционный член в виде второй производной по времени от смещения первого осциллятора, потенциальный член, пропорциональный кубу того же смещения, и член нелинейной связи, содержащий произведение квадрата смещения первого осциллятора на смещение второго. Второе уравнение колебательной системы содержит инерционный член в виде второй производной по времени от смещения второго осциллятора, потенциальный член, пропорциональный величине того же смещения, и член линейной связи, содержащий смещение первого осциллятора.

Релаксационная система также состоит из двух уравнений, первое из которых совпадает с таковым для колебательной системы, а второе отличается от второго уравнения колебательной системы отсутствием потенциального члена.

Рассмотрено развитие колебаний во времени в той и другой системах, происходящее после задания начального смещения первого осциллятора. Установлено, что развитие колебаний требует превышения начального смещения первого осциллятора над определенным критическим значением. Выявлено сходство развития колебаний во времени в той и другой системах. В обоих случаях отмечено наличие довольно продолжительного интервала малоамплитудного запаздывания, после которого скачком возбуждается высокоамплитудный хаос. Для обеих систем построены параметрические портреты колебаний, образованные смещением и соответствующей ему производной каждого из осцилляторов. Выявлено сходство портретов для той и другой систем, для первого осциллятора имеющего форму горизонтальной восьмерки, а для второго — горизонтального овала, в обоих случаях образованных наложением друг на друга множества хаотических траекторий.

Установлено, что колебательный или релаксационный характер второго осциллятора для реализации запаздывания решающим не является, а различие состоит только в том, что при релаксационном характере те же колебания достигаются при начальном смещении более чем на два порядка меньшем.

Рассмотрена роль потенциального (частотного) слагаемого во втором уравнении колебательной системы. Получена зависимость критического значения смещения первого осциллятора от величины частотного коэффициента второго уравнения. Показано, что эта зависимость имеет четко выраженный квадратичный характер, разделяющий две области: квазирегулярных малоамплитудных колебаний и запаздывающего высокоамплитудного хаоса.

Установлено, что время запаздывания максимально сразу после превышения начального смещения первого осциллятора над критическим значением, а далее, по мере увеличения, смещения уменьшается, стремясь к нулю по закону, близкому к обратной пропорциональности.

Благодаря сходству колебаний в обеих системах, дальнейшее исследование выполнено только для релаксационной системы, как более простой и содержащей меньше число свободных параметров.

Для релаксационной системы исследована зависимость частоты собственных колебаний первого осциллятора при отсутствии связи со вторым от величины начального смещения. Показано, что эта зависимость имеет линейный характер, соответствующий кубическому виду потенциального слагаемого первого уравнения.

Рассмотрена роль потенциала первого осциллятора в формировании характера колебаний, в первую очередь — высокоамплитудного хаоса. Отмечено, что потенциал определяется не только значением смещения первого осциллятора, но также и смещением второго осциллятора, реализуемого через нелинейную связь со вторым уравнением. Показано, что в процессе колебаний потенциал первого осциллятора является динамическим, причем по обе стороны от нуля имеет симметрично расположенные минимумы, чередующиеся в такт с колебаниями второго осциллятора. В качестве механизма такого поведения предложена модель «прыгающего» потенциала, в процессе колебаний совершающего «прыжки» от одного крайнего положения до другого. Рассмотрена зависимость положения одного из минимумов от величины смещения второго осциллятора. Выполнен аналитический анализ положения такого минимума, определяемого равенством нулю производной от потенциала. Установлен линейный характер зависимости, связывающей законом прямой пропорциональности амплитуды колебаний первого и второго осцилляторов.

На основе рассмотрения развития колебаний во времени, значительно превышающем время запаздывания, установлено, что первый осциллятор в процессе колебаний не переходит с одной ветви потенциала на другую, как это было бы при статическом потенциале, а следует за положением минимума динамического потенциала, определяемого значением смещения второго осциллятора. Такое его поведение проверено в режиме как простого, так и двухступенчатого запаздывания, причем в обоих случаях установлено его выполнение. Отмечено, что установленное выше положение относится только к режиму высокоамплитудного хаоса, имеющего место по окончании первичного запаздывания, тогда как в области запаздывания смещение осцилляторов не является колебательным, а имеет монотонный характер.

Рассмотрено движение осцилляторов в интервале первичного запаздывания. Установлено, что в интервале первичного запаздывания смещение первого осциллятора, оставаясь монотонным, за все время запаздывания меняет знак один-два раза, но никогда не превышает величины начального смещения. При этом смещение второго осциллятора, также оставаясь монотонным и сохраняя один и тот же знак, постепенно увеличивается до величины, превышающей начальное смещение на один-два порядка. Окончание запаздывания характеризуется тем, что смещение первого осциллятора резким скачком увеличивается

на пять порядков, а смещение второго осциллятора также скачком увеличивается в 5–10 раз, причем оба осциллятора переходят в режим высокоамплитудных хаотических колебаний.

Предложена качественная картина развития колебаний. Так, в начальный момент времени первый осциллятор имеет некоторое начальное смещение. Благодаря связи осцилляторов это смещение передается второму, после чего возвращается к первому, вызывая некоторое увеличение его смещения. Такое слегка увеличенное смещение снова действует на второй осциллятор, вызывая дополнительное увеличение его смещения. Далее процесс повторяется таким же кольцеобразным образом, вызывая лавинообразное все более значительное смещение второго осциллятора. Отмечено, что такой кольцеобразный процесс постепенно формирует боковой минимум потенциала, так что первый осциллятор через некоторое время скатывается в него, что и проявляется как резкий скачок его смещения, то есть выход из режима запаздывания.

Установлена пошаговая природа развития колебаний обоих осцилляторов. Приведен алгоритм расчета колебаний методом Рунге–Кутты и исследовано влияние величины шага расчета. Показано, что в области первичного запаздывания процесс развития колебаний является регулярным, так что от величины шага как сам процесс, так и величина запаздывания не зависят. Установлено, что в области высокоамплитудного хаоса характер колебаний при изменении величины шага даже на весьма малую величину (единицы и доли процента) резко меняется, форма колебаний и их структура меняются хаотическим образом. Установлен фрактальный характер хаоса, проявляющийся в том, что уменьшение интервала наблюдения общего характера хаоса не меняет, во всяком случае, по его спектральному составу.

Исследовано влияние на общий характер колебаний основных параметров системы, таких как параметр линейной связи второго осциллятора, а также параметры потенциальности (кубической нелинейности) и нелинейной связи первого осциллятора. Показано, что увеличение параметра линейной связи второго осциллятора приводит к уменьшению времени запаздывания по закону обратной пропорциональности. Отмечено, что причиной уменьшения является усиление воздействия осцилляторов друг на друга, обусловленное увеличением связи между ними. Получена эмпирическая формула, содержащая три характерных коэффициента, позволяющих описать наблюдаемую зависимость с точностью до единиц и долей процента.

Исследованы зависимости амплитуд хаоса для первого и второго осцилляторов от параметра линейной связи второго осциллятора. Показано, что обе зависимости имеют монотонный возрастающий характер, причем во всем исследованном интервале изменения связи остаются подобными друг другу с постоянным коэффициентом, равным отношению амплитуд колебаний осцилляторов, полученному при исследовании характера «прыгающего» потенциала.

Исследовано влияние на характер колебаний параметра потенциальности, соответствующего кубической нелинейности первого осциллятора. Показано, что время запаздывания от параметра потенциальности не зависит, так как этот параметр обеспечивает лишь изменение «раскрыва» ветвей потенциала, не меняя его основной структуры. Отмечено, что такое изменение «раскрыва» существенным образом сказывается на положении минимума «прыгающего» потенциала, что приводит к изменению амплитуды хаотических колебаний, наступающих после окончания запаздывания. Так, при увеличении параметра потенциальности амплитуда хаотических колебаний первого осциллятора падает, что обусловлено сужением раскрыва потенциала. При этом амплитуда колебаний второго осциллятора сначала слегка увеличивается, после чего, пройдя через слабо выраженный максимум, также уменьшается. Отмечено, что в этом случае зависимости амплитуды хаоса для того и другого осцилляторов подобными не являются, а их отношение по мере увеличения параметра потенциальности постепенно уменьшается.

Исследовано влияние на характер колебаний параметра нелинейной связи первого осциллятора. Показано, что по мере увеличения этого параметра время запаздывания уменьшается по закону обратной пропорциональности. Отмечено, что причиной уменьшения является усиление воздействия осцилляторов друг на друга, обусловленное увеличением связи между ними. Получена эмпирическая формула, содержащая три характерных коэффициента, позволяющих описать наблюдаемую зависимость с точностью до единиц и долей процента. Отмечено аналогия наблюдаемого явления с таковым имеющим место при изменении линейной связи второго осциллятора.

Выполнено объединение эмпирических формул для того и другого процессов, в результате чего получена общая формула, описывающая зависимость времени запаздывания от параметров линейной связи второго осциллятора и нелинейной связи первого, содержащая шесть характерных коэффициентов.

Исследованы зависимости амплитуд хаоса для первого и второго осцилляторов от параметра нелинейной связи первого осциллятора. Показано, что при увеличении параметра нелинейной связи амплитуда хаоса первого осциллятора возрастает подобно таковой при увеличении параметра связи второго осциллятора. Отмечен спадающий характер зависимости амплитуды хаоса второго осциллятора от абсолютной величины параметра нелинейной связи. В качестве возможной причины спада вместо роста такой зависимости отмечен отрицательный характер параметра нелинейной связи, вызывающий аномальное поведение рассматриваемой зависимости.

Приведены некоторые соображения, касающиеся дальнейшего развития работы. В качестве главной задачи отмечено построение модели, отражающей продолжительность первичного запаздывания. Перечислены некоторые возможные направления и приведены предварительные соображения о построении такой модели.

Глава 11

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ УСТАНОВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ. ЧАСТЬ 3. ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ

В настоящей главе продолжено рассмотрение нелинейных вынужденных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. В основании настоящего исследования лежит полученная в предыдущей части работы упрощенная система двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка, имеющих колебательный характер. В качестве главного шага упрощения задачи выполнено замещение колебаний второго осциллятора вспомогательной функцией, имеющей гармоническую зависимость от времени. При этом динамический потенциал приобрел характер симметричных периодических «прыжков» в прямом и обратном направлениях, в связи с чем введенная функция была названа «прыжковой». Результатом введения прыжковой функции явилась замена двух уравнений исходной системы одним «определяющим» уравнением, обеспечивающим свойства высокоамплитудного хаоса и нестационарного запаздывания. На основе определяющего уравнения рассмотрено развитие колебаний во времени, найдена их производная и построен соответствующий параметрический портрет. Рассмотрено влияние начального смещения, амплитуды и частоты прыжковой функции на время запаздывания. Отмечено, что определяющее уравнение содержит инерционный и потенциальный члены, для характеристики которых введены параметры инерционности и потенциальности как коэффициенты при второй производной и слагаемом кубической нелинейности. Рассмотрено влияние введенных параметров на время запаздывания. Приведены некоторые замечания, касающиеся возможного развития работы. В качестве главных задач отмечено построение модельного представления о продолжительности времени запаздывания, более подробное выявление природы критического характера ряда параметров, а также более подробное изучение фазового характера рассматриваемых явлений.

Основное изложение материала в данной главе следует работе [33]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

11.1. Постановка задачи и основные системы уравнений

Исследование колебательных явлений нестационарного и хаотического характера представляет собой значительную ветвь науки о колебаниях [1, 55, 80]. Основным способом теоретической интерпретации здесь является аппарат дифференциальных уравнений, содержащих нелинейные составляющие в том или ином виде [2–6].

В работе [16] теоретически интерпретировано возбуждение нелинейных гиперзвуковых колебаний в схеме магнитострикционного преобразователя. В работах [10, 11] также интерпретировано возбуждение мощных шумовых электромагнитных колебаний в системе ферритовый диск — электродинамический резонатор.

Для теоретического описания явлений в таких устройствах традиционно используется система связанных дифференциальных уравнений для магнитных и упругих или магнитных и электрических колебаний. При этом уравнение для намагниченности является нелинейным, а уравнения для упругих и электрических колебаний — линейными. Связь может иметь как линейный, так и нелинейный характер. Общая система обычно содержит от семи до одиннадцати нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка при шести и более граничных условиях.

Высокая сложность математического аппарата вынуждает искать более простые пути описания наблюдаемых явлений.

Удачным эквивалентом рассматриваемой системы можно считать модель двух связанных осцилляторов, один из которых отражает магнитные колебания и является нелинейным, а другой — упругие или электромагнитные и в простейшем случае является линейным. Впервые такая модель была предложена для описания возбуждения мощного гиперзвука в работах [17–20]. Дальнейшее развитие модель получила на основе квадратичного приближения колебаний магнитной системы [21–26, 35]. Была показана возможность описания как стационарных явлений, так и нестационарного хаоса высокой амплитуды.

В работах [27–30] в системе связанных осцилляторов было обнаружено явление нестационарного запаздывания, состоящее в том, что высокоамплитудный хаос развивается не сразу после включения возбуждения, а по прошествии определенного промежутка времени, значительно большего, чем собственные период и время релаксации обеих подсистем.

Исследование явления запаздывания продолжено в последовательно развивающихся работах [31, 32].

Первая работа [31] (здесь — глава 9) посвящена выделению из полной системы уравнений «первичного ядра» — упрощенной системы, сохраняющей явление запаздывания во всех его проявлениях при условии минимального числа свободных параметров.

Вторая работа [32] (здесь — глава 10), являющаяся продолжением первой, посвящена исследованию свойств запаздывания на основе анализа «первичного ядра». Рассмотрены зависимости параметров запаздывания и высокоамплитудного хаоса от свободных параметров системы, приведена схема развития и окончания запаздывания с переходом к высокоамплитудному хаосу.

Настоящая работа является продолжением [31, 32], поэтому приведем из них краткую сводку необходимых далее результатов.

Рассмотрено явление нестационарного запаздывания возбуждения высокоамплитудных хаотических колебаний в системе из двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным. Физическим обоснованием постановки задачи являются две реальные системы, каждая из которых в качестве нелинейного элемента содержит ферритовую пластину, а в качестве линейного — упругую пластину или электродинамический резонатор. При достаточной мощности внешнего возбуждения в каждой из этих систем генерируются высокоамплитудные колебания хаотического характера, причем начало таких колебаний отстает по времени от момента включения возбуждения на величину, значительно превышающую как период, так и время релаксации каждой из подсистем, в чем собственно и состоит эффект нестационарного запаздывания.

Показано, что колебания в обеих системах могут быть описаны на основе модели двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным, а второй — линейным. Для такой модели получена система двух дифференциальных уравнений второго порядка, оба из которых имеют колебательный характер, причем первое уравнение является нелинейным со степенной нелинейностью третьего порядка, а второе — линейным:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = A \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (11.1)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (11.2)$$

Здесь x_1 и x_2 — смещение первого и второго осцилляторов, β_1 и β_2 — соответствующие параметры диссипации, ω_1 и ω_2 — собственные частоты колебаний осцилляторов в отсутствие нелинейности и связи, γ_1 и γ_2 — параметры линейно связи между осцилляторами, η — параметр нелинейной связи, δ — параметр кубической нелинейности первого осциллятора, A — амплитуда и ω_0 — частота внешнего воздействия.

С целью упрощения математической структуры задачи предложен эквивалент такой системы, в котором внешнее возбуждение заменено начальным смещением первого осциллятора. В результате исключения восторщенных слагаемых из полной системы выделена укороченная

система — «первичное ядро», сохраняющее свойство нестационарного запаздывания. Полученная система имеет вид:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (11.3)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (11.4)$$

В работе [32] показано, что главным ингредиентом, ответственным за формирование высокоамплитудного хаоса, является слагаемое нелинейной связи первого уравнения вида $\eta x_1^2 x_2$. Входящее в это уравнение смещение второго осциллятора x_2 задается вторым уравнением за счет линейной связи с первым через параметр γ_2 .

При этом, если та или другая связь недостаточна, то есть высокоамплитудный хаос не формируется, то система совершает колебания весьма малой амплитуды, что можно интерпретировать как стремление времени запаздывания к бесконечности.

Однако основной предмет настоящей работы и двух ее первых частей [31, 32] составляет именно высокоамплитудный хаос, так что связь должна быть достаточной для того, чтобы время запаздывания составляло конечную, ограниченную по длительности величину.

Таким образом, необходимым условием формирования хаоса, а следовательно, и реально наблюдаемого нестационарного запаздывания, является достаточная амплитуда смещения второго осциллятора x_2 .

11.2. Определяющее уравнение и прыжковая функция

Как отмечено в предыдущем разделе, решающим фактором, определяющим начало лавинообразного роста смещения первого осциллятора, то есть выход из режима запаздывания, является достаточный уровень смещения второго осциллятора. Рассмотрим теперь, как именно этот уровень сказывается на развитии колебаний.

Выделим из полной системы (11.3)–(11.4) только одно первое уравнение для x_1 , а вместо второго зададим определенный уровень смещения $x_2 = x_{2S}$. То есть получим уравнение

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_{2S} = 0. \quad (11.5)$$

Поскольку второй осциллятор тоже совершает колебания, то будем считать его смещение зависящим от времени по синусоидальному закону. Для формирования такого смещения введем вспомогательную функцию, которую далее будем называть «прыжковой»:

$$x_{2S} = x_{2S0} \cdot \cos(\omega_{2S} \cdot t). \quad (11.6)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (11.5) приводит его к виду:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \delta x_1^3 + (\eta x_{2S0}) x_1^2 \cdot \cos(\omega_{2S} \cdot t) = 0. \quad (11.7)$$

Соответствующий потенциал принимает вид:

$$U = \frac{\delta}{4}x_1^4 + \frac{(\eta x_{2S0})}{3}x_1^3 \cdot \cos(\omega_{2S} \cdot t). \quad (11.8)$$

Этот потенциал является динамическим в том отношении, что с течением времени совершает «прыжки» из одной конфигурации в другую, подобно потенциалу, изображенному на рис. 4 в работе [32]. Только теперь такие прыжки совершаются принудительным образом под действием прыжковой функции (11.6).

Можно ввести вспомогательный параметр

$$\xi = \eta x_{2S0}, \quad (11.9)$$

при котором (11.7) и (11.8) принимают вид:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \delta x_1^3 + \xi x_1^2 \cdot \cos(\omega_{2S} \cdot t) = 0; \quad (11.10)$$

$$U = \frac{\delta}{4}x_1^4 + \frac{\xi}{3}x_1^3 \cdot \cos(\omega_{2S} \cdot t). \quad (11.11)$$

Далее будет показано, что уравнение (11.7) или (11.10) определяет эффект запаздывания без привлечения второго уравнения в явном виде. Поэтому для удобства дальнейшей терминологии назовем такое уравнение «определяющим». Важно отметить, что здесь система из двух уравнений (11.3)–(11.4) может быть сведена к одному-единственному уравнению (11.7) или (11.10).

Рассмотрим развитие во времени колебаний первого осциллятора, соответствующих определяющему уравнению (11.7). Обратимся к рис. 11.1, где показаны колебания (*а*), их производные (*б*) и соответствующий параметрический портрет (*в*).

Из рисунка видно, что развитие колебаний испытывает значительное запаздывание, составляющее около 16 ед. времени. В этот момент смещение скачком увеличивается с уровня около 0,01 ед. (этот уровень скрыт в толщине линии рисунка) до уровня 50 ед., то есть в 5000 раз. Дальнейшее развитие колебаний следует сильно размазанной синусоиде с более или менее постоянной амплитудой около 50 ед., на которую наложен хаос с амплитудой порядка 20–30 ед. Период основной синусоиды составляет 2,5133 ед., что соответствует периоду прыжковой функции (11.6) при частоте $\omega_{2S} = 2,5$ ед.

Производная (рис. 11.1, *б*) в области подъемов и спадов смещения остается на почти одинаковом (хотя и несколько меняющемся от раза к разу) уровне, а в моменты перехода смещения от подъемов к спадам, имеет резкие выбросы, период которых в два раза меньше периода основной синусоиды смещения. Между этими выбросами колебания имеют хаотический характер.

Параметрический портрет (рис. 11.1, *в*) имеет вид сильно замазанной горизонтальной восьмерки, типичный для хаотического характера колебаний.

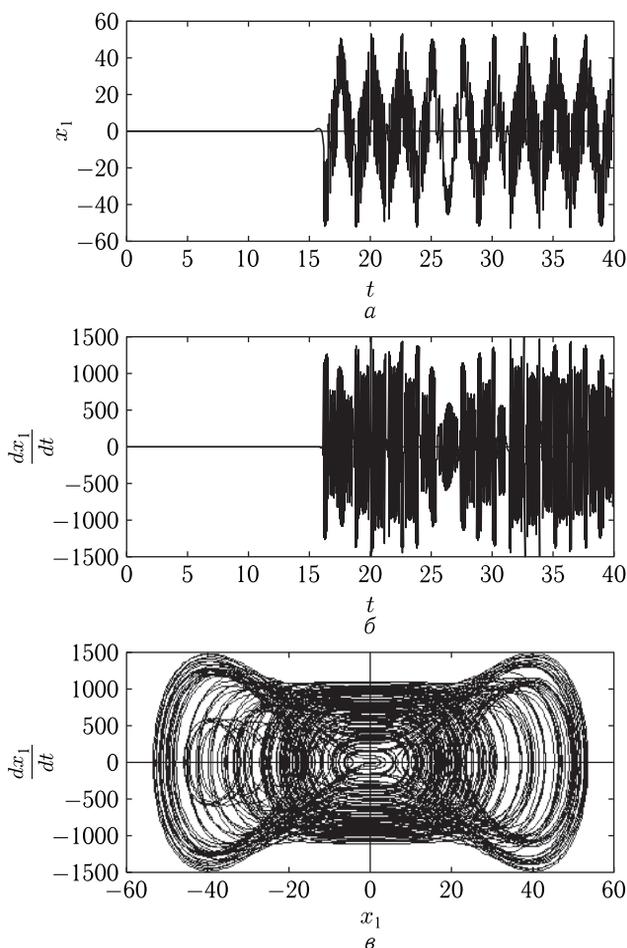


Рис. 11.1. Колебания смещения (а), их производные (б) и соответствующий параметрический портрет (в) для первого осциллятора, развивающиеся в соответствии с уравнением (11.7). Параметры: $\delta = 5$; $\eta = -200$; $x_{2S0} = 1$; $\omega_{2S} = 2,5$. Начальное смещение: $x_{10} = 0,005$

В отличие от разверток, приведенных на рис. 5 в работе [32], здесь запаздывание является одноступенчатым, так что амплитуда колебаний смещения всегда остается на одном уровне около 50 ед. (проверено до времени 500 ед.).

Более подробно хаотический характер колебаний первого осциллятора иллюстрируется рис. 11.2, где показано развитие колебаний во времени (а), то же что на рис. 11.1, а, колебания прыжковой функции (б), а также разности между смещением и умноженной на 20 (с целью нормировки) прыжковой функцией (в).

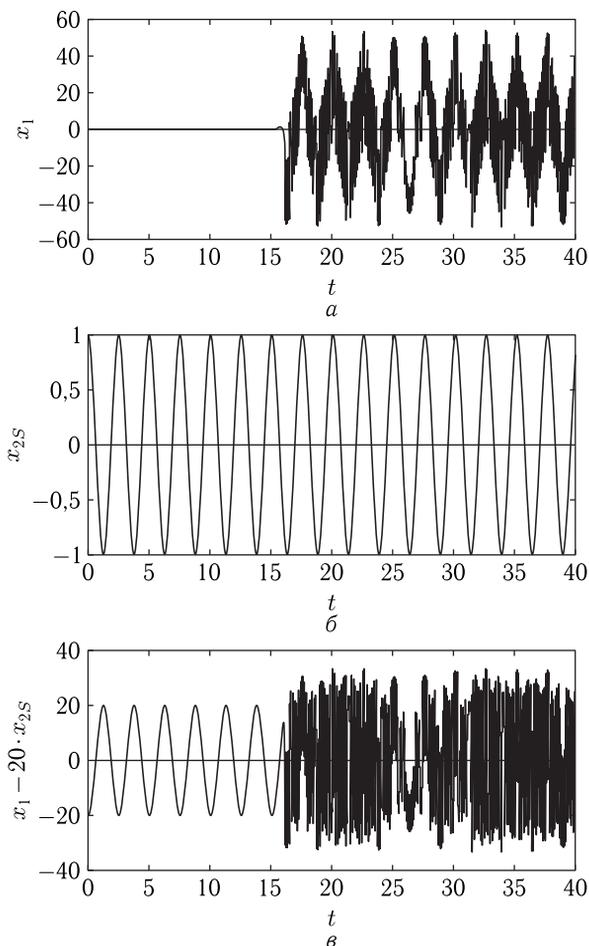


Рис. 11.2. Иллюстрация хаотического режима колебаний первого осциллятора. *a* — развитие колебаний во времени (соответствует рис. 11.1, *a*); *б* — «прыжковая» функция (11.6); *в* — развитие во времени разностной функции $x_1 - 20x_{2S}$. Параметры — те же, что на рис. 11.1

Из сравнения кривых, приведенных на верхних двух эпюрах этого рисунка, видно, что синусоидальная составляющая колебаний смещения (рис. 11.2, *a*) как раз точно следует синусоидальным же колебаниям прыжковой функции (рис. 11.2, *б*). При этом вычитание из смещения нормированной прыжковой функции (рис. 11.2, *в*) демонстрирует в чистом виде хаотическую составляющую колебаний смещения, максимумы которой здесь сохраняют амплитуду на уровне около 30 ед.

Из сравнения рис. 11.2, *a* и рис. 11.2, *в* видно, что характер колебаний в области хаоса заметно различается. Рассмотрим, в какой

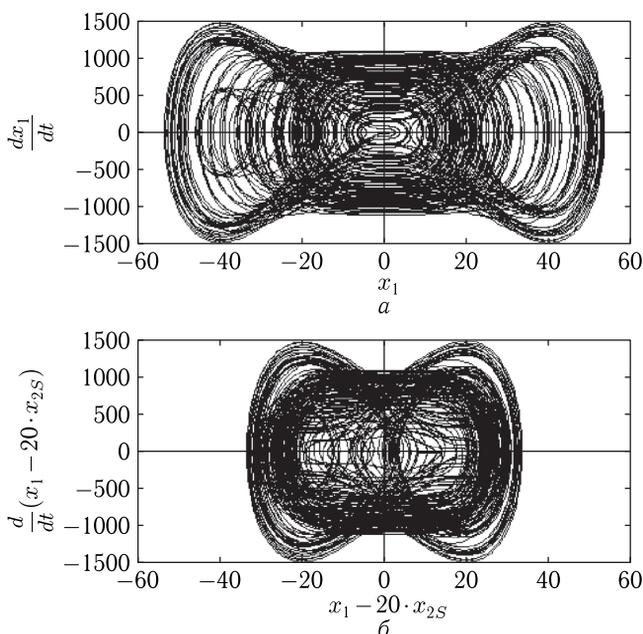


Рис. 11.3. Параметрические портреты для смещения первого осциллятора x_1 (а) и разностной функции $x_1 - 20x_{2S}$ (б). Параметры — те же, что на рис. 11.1

степени такое различие сказывается на параметрическом портрете колебаний, для чего обратимся к рис. 11.3, где приведены такие портреты для смещения первого осциллятора x_1 (а) и разностной функции $x_1 - 20x_{2S}$ (б).

Из рисунка видно, что в обоих случаях портрет представляет собой горизонтальную восьмерку, причем густота и хаотический характер траекторий также одинаков. Горизонтальный размах портрета для разностной функции (б) несколько меньше такового для смещения (а), так как здесь отсутствует главная составляющая колебаний на частоте прыжковой функции, приведенной на рис. 11.2, б. На втором портрете можно отметить лишь некоторое сгущение траекторий в форме горизонтального овала с двумя округлыми «окнами», что связано с большей группировкой колебаний вокруг горизонтальной оси на рис. 11.2, в. В остальном заметные отличия отсутствуют, то есть характер хаоса сохраняется.

11.2.1. Соотношение между временем запаздывания и периодом прыжковой функции

Дополнительным весьма важным моментом, видимым из рис. 11.2, является тот факт, что развитие высокоамплитудного хаоса происходит не за один период и не за половину периода прыжковой функции,

а по прошествии 6–7 ее периодов. В этом состоит отличие от механизма, рассмотренного в гл. 6, где для возбуждения хаоса было достаточно лишь одного смещения второго осциллятора до значительной величины. То есть в этом случае рассмотренный механизм постепенного развития боковой ямы потенциала не реализуется, так как здесь такая яма формируется сразу в течение первого полупериода прыжковой функции.

Можно предположить, что здесь сказывается весьма высокая инерционность первого осциллятора, обусловленная его колебательным характером. В самом деле, как показано в работе [32, врезка в рис.3], частота собственных колебаний первого осциллятора связана с начальным смещением через коэффициент 1,9, так что период колебания при принятом здесь смещении 0,005 ед. составляет 661 ед., что более чем на два порядка (точнее — в 263 раза) превышает частоту прыжковой функции. То есть здесь, прежде чем прыжковая функция «задействует» смещение первого осциллятора, ей приходится раскачивать его в течение нескольких периодов, как это и видно из рис. 11.2.

Таким образом, из проведенного рассмотрения можно сделать вывод, что для реализации запаздывания наличие системы из двух уравнений второго порядка не является условием безусловно необходимым, так как второе уравнение может быть заменено модельной функцией, обеспечивающей «прыжковый» характер динамического потенциала. При этом эффект запаздывания может быть реализован в одном уравнении с кубической нелинейностью, содержащем нелинейное слагаемое, пропорциональное квадрату смещения с коэффициентом, периодически зависящим от времени. Для удобства дальнейшей терминологии такое уравнение названо «определяющим».

11.3. Спектральный состав высокоамплитудного хаоса

Рассмотрим теперь спектральный состав высокоамплитудных колебаний после запаздывания, для чего обратимся к рис. 11.4, где показан исходный спектр колебаний (а) и тот же спектр за вычетом нормированной прыжковой функции (б).

Из рисунка видно, что в полном спектре (а) значительно преобладает частота $f = 0,3979$ ед. (показана стрелкой), соответствующая частоте прыжковой функции $\omega_{2S} = 2,5$ ед. Амплитуда этой спектральной линии составляет 50 ед.

В области частот от 4,6 до 6,2 наблюдаются составляющие хаоса, однако амплитуда их здесь на порядок меньше (около 5 ед.).

Вычитание из полных колебаний x_1 нормированной прыжковой функции $20x_{2S}$ (б) приводит к подавлению спектральной линии на частоте $f = 0,3979$ ед., так что ее амплитуда падает на два порядка (до 0,5 ед.). В результате на этой частоте возникает провал (положение частоты $f = 0,3979$ ед. показано вертикальной точечной линией и отмечено стрелкой), а спектральные составляющие хаотических колебаний выявляются в чистом виде. Основное скопление линий хаоса

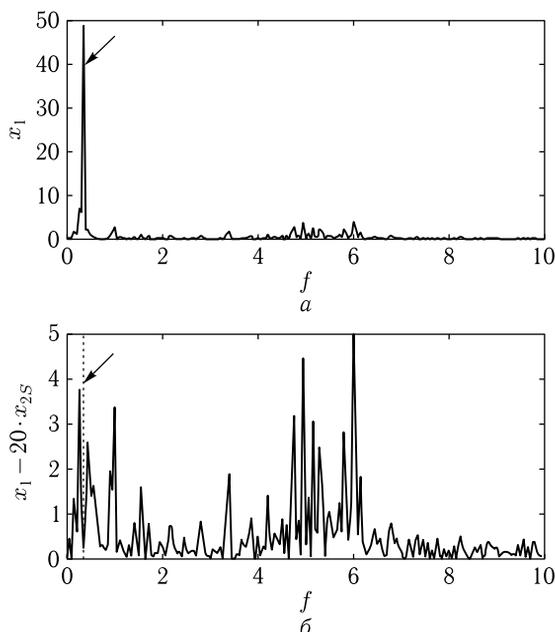


Рис. 11.4. Спектральный состав высокоамплитудных колебаний после запаздывания (промежуток времени от 16 до 40 ед.). *a* — полный спектр колебаний первого осциллятора (x_1); *b* — спектр тех же колебаний за вычетом нормированной прыжковой функции ($x_1 - 20x_{2S}$). Параметры — те же, что на рис. 11.1

наблюдается между 4,6 и 6,2 ед. частоты, где их амплитуда достигает 5 ед. Другое скопление с амплитудой до 4 ед. имеет место в интервале от 0,1 до 1,2 ед. частоты. Вне этих скоплений спектр, хотя и спадает по амплитуде почти на порядок (до уровня около 0,5 ед.), но все равно остается достаточно богатым, заполняя непрерывным образом все остающиеся места вплоть до частоты в 10 ед. Проверка показывает, что далее амплитуда спектра постепенно спадает, стремясь к нулю в области около 15 ед. частоты.

Таким образом, подавление линии, соответствующей частоте прыжковой функции, позволяет наглядно выявить спектральные составляющие хаоса, непрерывным образом распределенные в широком интервале частот.

11.4. Вариация параметров определяющего уравнения

Рассмотрим теперь определяющее уравнение (11.7) несколько подробнее. Главным его свойством должно быть запаздывание развития высокоамплитудного хаоса относительно момента начала возбуждения колебаний, обусловленного высвобождением системы при задании начального смещения.

11.4.1. Влияние начального смещения

Обратимся к рис. 11.5, где приведена зависимость времени запаздывания от величины начального смещения, построенная в соответствии с уравнением (11.7). Аппроксимирующие кривые 1 и 2 построены по формулам:

$$\tau_S = \frac{0,035}{x_{10} - 0,003} + 1,7; \quad (11.12)$$

$$\tau_S = \frac{0,002}{x_{10} - 0,00427} + 15. \quad (11.13)$$

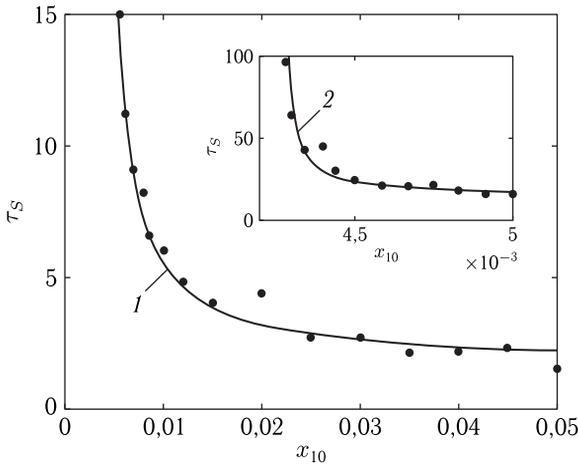


Рис. 11.5. Определяемая уравнением (11.7) зависимость времени запаздывания от величины начального смещения. На врезке — начальный участок той же зависимости. Критическое значение начального смещения — $x_{10C} = 0,00427$ ед. Точки — результаты машинного эксперимента. Кривая 1 построена по формуле (11.12), кривая 2 — по формуле (11.13). Параметры: $\delta = 5$; $\eta = -200$; $x_{2S0} = 1$; $\omega_{2S} = 2,5$

Из рисунка можно видеть, что приведенная зависимость довольно хорошо аппроксимируется функцией обратной пропорциональности. Некоторое различие в числовых параметрах формул (11.12) и (11.13) обусловлено разными масштабами основного рисунка и врезки, так что принципиального значения не имеет. Общий характер зависимости соответствует полученным ранее подобным зависимостям для полной системы, приведенным на рис. 11.3, б и рис. 11.8 в работе [31], а также в еще более раннем варианте на рис. 5 в работе [27]. Зависимость полностью плавная, какие-либо скачки, отмечавшиеся ранее для полных систем (11.7)–(11.8) и (11.9)–(11.10) в работе [31], здесь отсутствуют. Можно полагать, что отсутствие скачков обусловлено простотой лежа-

щей в основе уравнения (11.7) системы (11.3)–(11.4), по сравнению с системами, рассматривавшимися ранее.

Таким образом, из результатов настоящего и предыдущих разделов можно сделать вывод, что уравнение (11.7) отражает эффект запаздывания в достаточной степени. Рассмотрим теперь свойства этого уравнения более подробно.

11.4.2. Влияние амплитуды прыжковой функции

Главным свойством определяющего уравнения (11.7) является реализация запаздывания. При этом роль второго уравнения исходной системы (11.3)–(11.4) замещает прыжковая функция (11.6). Таким образом, представляет интерес проследить, как параметры этой функции сказываются на времени запаздывания.

Рассмотрим сначала, как зависит время запаздывания от амплитуды прыжковой функции, для чего обратимся к рис. 11.6, где приведены такие зависимости в широком интервале значений x_{2S} . При построении этого рисунка начальное смещение первого осциллятора $x_{10} = 0,00430$ ед. было выбрано вблизи критического значения ($x_{10C} = 0,00427$) для того, чтобы выявить достаточно большие времена запаздывания более наглядно.

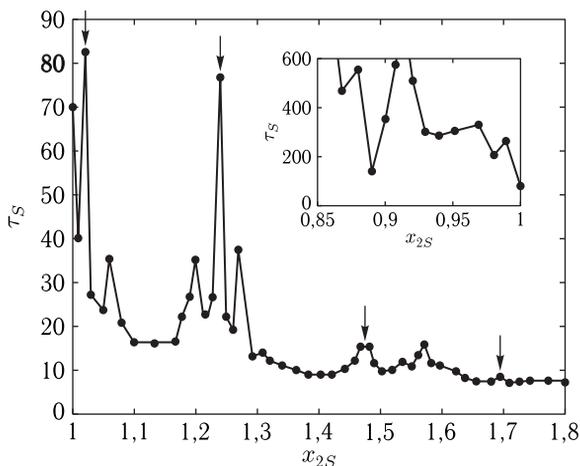


Рис. 11.6. Зависимость времени запаздывания от амплитуды прыжковой функции. На врезке — начальный участок той же зависимости в более удобном масштабе. Параметры: $\delta = 5$; $\eta = -200$; $\omega_{2S} = 2,5$; $x_{10} = 0,0043$

Из рисунка можно видеть, что по мере увеличения x_{2S} время запаздывания, в основном, спадает, хотя и крайне неоднородно. Критическое значение x_{2SC} равно 0,846 ед. При этом значении время запаздывания устремляется в бесконечность (левый конец кривой на врезке). Ниже этого значения запаздывание не было обнаружено (проверено

по τ_S в интервале до 1000 ед.). Выше x_{2SC} время запаздывания τ_S , испытывая несколько скачков, в основном убывает. Самый большой скачок наблюдается в области около $x_{2S} = 0,92$ ед. (врезка), где время запаздывания опять стремится к бесконечности (конечное значение в интервале τ_S до 1000 ед. не было обнаружено). При дальнейшем увеличении x_{2S} время запаздывания всегда остается конечным (проверено до $x_{2S} = 5$ ед.).

Главные скачки наблюдаются при $x_{2S} = 1,02$ ед. и 1,24 ед. (отмечены стрелками вверх). Амплитуда этих скачков превышает окружающие значения до пяти раз. При $x_{2S} = 1,48$ ед. и 1,70 ед. также наблюдаются небольшие скачки с амплитудой в 1,7 и 1,1 раза больше окружающей (также отмечены стрелками). Неожиданным свойством этих четырех скачков (отмеченных стрелками) является тот факт, что по величине x_{2S} они располагаются на одинаковых промежутках друг от друга (по горизонтальной оси около 0,22 ед.).

Можно полагать, что скачкообразный характер приведенной зависимости, а также равноотстоящее расположение скачков отражают какие-то свойства колебаний резонансного характера.

В самом деле, основу определяющего уравнения (11.7) составляет уравнение второго порядка с кубической нелинейностью, которое, как показано в [35, раздел 13], имеет колебательный характер. Частота колебаний такого осциллятора прямо пропорциональна их амплитуде. С другой стороны, максимумы кривой на рис. 11.6 приходятся на вполне определенные значения амплитуды прыжковой функции x_{2S} , причем эти максимумы являются весьма резкими. Относительно уравнения (11.7) прыжковую функцию можно в какой-то мере рассматривать как возбуждающую силу. То есть изменение амплитуды этой силы должно приводить к изменению амплитуды колебаний, такой силой возбуждаемых в колебательной системе с кубической нелинейностью. Поскольку собственная частота колебаний такой системы определяется ее амплитудой, то в тот момент, когда навязываемая прыжковой функцией частота совпадает с собственной, амплитуда колебаний может резко возрасти, что и будет проявляться как резонансное свойство.

Таким образом, можно ожидать, что время запаздывания будет зависеть от частоты прыжковой функции, а также меняться при изменении резонансных свойств основной системы второго порядка с кубической нелинейностью. Эти возможности будут рассмотрены далее.

11.4.3. Изменение частоты прыжковой функции

Кроме амплитуды важнейшим параметром прыжковой функции x_{2S} (11.6) является ее частота. В предыдущем разделе отмечено, что возможным механизмом резко неоднородного характера зависимости времени запаздывания от амплитуды прыжковой функции может быть попадание параметров этой функции в условия собственных колебаний системы второго порядка с кубической нелинейностью. То есть

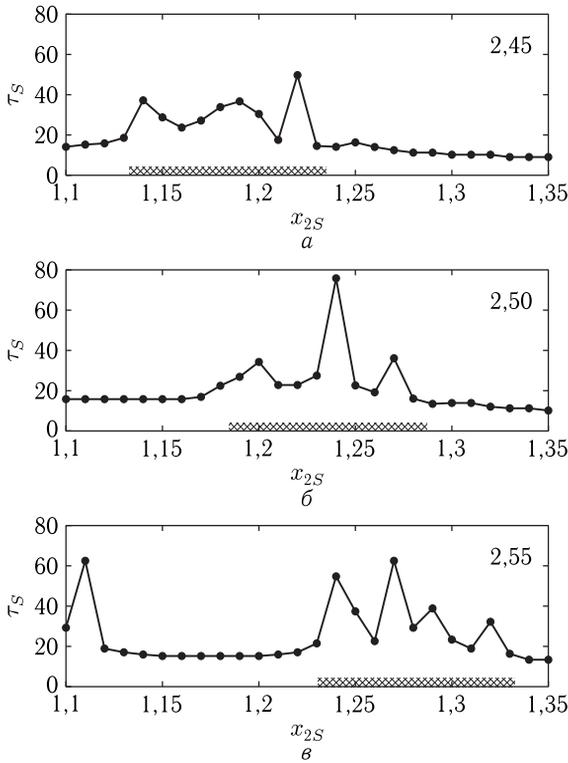


Рис. 11.7. Зависимость времени запаздывания от амплитуды прыжковой функции при различных значениях ее частоты ω_{2S} : а — 2,45 ед.; б — 2,50 ед.; в — 2,55 ед. Цифры в правых верхних углах эпюр — значения частоты ω_{2S} . Параметры: $\delta = 5$; $\eta = -200$; $x_{10} = 0,0043$

изменение частоты прыжковой функции должно влиять на характер зависимости времени запаздывания от амплитуды этой функции.

Обратимся к рис. 11.7, где показаны зависимости времени запаздывания от амплитуды прыжковой функции при различных значениях ее частоты ω_{2S} . В качестве рабочей области выбрана окрестность наиболее заметного пика на рис. 11.6, соответствующего $x_{2S} = 1,24$ ед. На рисунке рассмотрены три значения частоты, лежащие по обе стороны от фиксированного значения $\omega_{2S} = 2,50$ ед., принятого при построении рис. 11.6.

Из рисунка можно видеть, что зависимость на рис. 11.7, б соответствует таковой, приведенной на рис. 11.6. Виден основной пик при $x_{2S} = 1,24$ ед. и два расположенные около него сателлита при $x_{2S} = 1,20$ ед. и $1,27$ ед. Основная область значений x_{2S} , за которой осуществляется наблюдение, отмечена вдоль нижней оси краевой штриховкой. Центр этой области приходится на $x_{2S} = 1,24$ ед.

На рис. 11.7, *а* приведена та же зависимость при более низкой частоте, составляющей 2,45 ед. Видно, что вся область сместилась вниз и теперь ее центр приходится на $x_{2S} = 1,18$ ед. Центральный пик несколько размылся и его амплитуда упала почти в два раза, однако выделились боковые, так что ширина всей области осталась прежней и амплитуда, если и уменьшалась, то не более чем в полтора раза.

На рис. 11.7, *в* приведена та же зависимость при более высокой частоте, составляющей 2,55 ед. Видно, что вся область сместилась вверх и теперь ее центр приходится на 1,28 ед. Амплитуда центрального пика уменьшилась в 1,2 раза, однако нижнего бокового увеличилась в те же 1,2 раза, в верхний боковой сохранил ту же амплитуду, но разделился на два вблизи $x_{2S} = 1,29$ ед. и 1,32 ед.

Таким образом, можно видеть, что увеличение частоты ω_{2S} с 2,45 ед. до 2,55 ед. требует увеличения амплитуды прыжковой функции с 1,18 ед. до 1,28 ед. В принятом интервале частот зависимость получается линейной с угловым коэффициентом равным единице.

Заметим теперь, что основу определяющего уравнения (11.7) составляет колебательное уравнение второго порядка с кубической нелинейностью. В работе [35] показано, что собственная частота решения такого уравнения прямо пропорциональна амплитуде колебаний. То есть полученная здесь прямо пропорциональная связь между частотой и амплитудой прыжковой функции имеет такой же характер, что и для уравнения, составляющего основу (11.7). Такое совпадение явно говорит в пользу резонансной природы пиков на зависимости времени запаздывания от амплитуды прыжковой функции, представленной на рис. 11.6.

Рассмотрим теперь влияние частоты прыжковой функции на эффект запаздывания несколько более подробно, для чего обратимся к рис. 11.8, где показана зависимость времени запаздывания от частоты прыжковой функции в широком диапазоне ее изменения. В качестве рабочей области выбрана та же окрестность наиболее заметного пика на рис. 11.6, соответствующего $x_{2S} = 1,24$ ед. Частота ω_{2S} меняется, а остальные параметры оставлены прежними. Рисунок начинается с частоты $\omega_{2S} = 2,2$ ед., так как ниже этой частоты зависимость является плавной, какие-либо особенности отсутствуют, а время запаздывания постепенно спадает, составляя при частоте 0,1 ед. около 5 ед. времени.

Из рисунка видно, что зависимость является резко неоднородной и имеет несколько пиков, разделенных сравнительно монотонными областями. Наиболее сложная структура наблюдается при изменении ω_{2S} от 2,47 ед. до 2,57 ед., где имеют место три пика высотой от 50 до 120 ед. Именно здесь по середине приходится значение частоты 2,5 ед., соответствующее наиболее характерному пику на рис. 11.6 (отмечено стрелкой). То есть здесь, как и там, подъем имеет трехпиковую структуру, однако теперь по амплитуде выделен не средний, а крайний, более высокочастотный пик. Ширина пиков составляет около

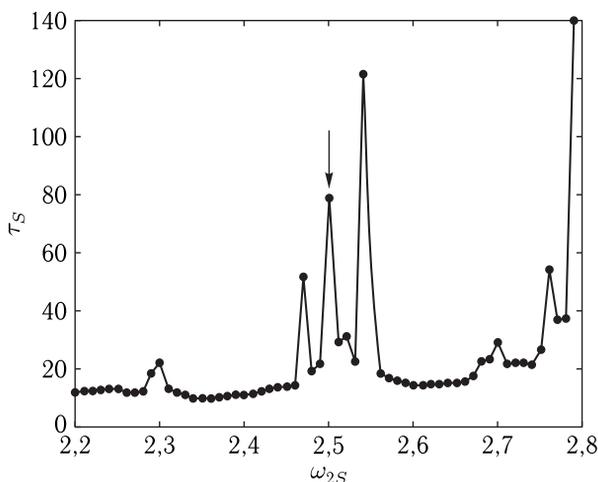


Рис. 11.8. Зависимость времени запаздывания от частоты прыжковой функции. Стрелкой отмечена частота, соответствующая главному пику на рис. 11.6 при $x_{2S} = 1,24$ ед. Параметры: $\delta = 5$; $\eta = -200$; $x_{10} = 0,0043$; $x_{2S} = 1,24$

0,01 ед. частоты, а расстояние между ними — около 0,03 ед. В области выше $\omega_{2S} = 2,68$ ед. наблюдается все более возрастающий подъем, на котором слегка выделяются два пика при 2,70 и 2,77 ед. Главный подъем начинается после 2,79 ед. частоты, где амплитуда резко возрастает до весьма больших значений. Так, при частоте 2,82 ед. время запаздывания составляет 260 ед. (выходит за пределы рисунка), при частоте 2,83 ед. составляет 500 ед., при частоте 2,84 — 610 ед., а при частоте 2,86 ед. превышает 1000 ед. Выше частоты 2,87 ед. высокоамплитудный хаос вообще не наблюдается, то есть время запаздывания стремится к бесконечности (проверено до времени запаздывания 2000 ед.). Таким образом, частота $\omega_{2S} = 2,87$ ед. является критической, выше которой хаос отсутствует.

Можно отметить, что области подъемов по горизонтальной оси опять расставлены на близкие по величине промежутки. Так, первый подъем приходится на 2,3 ед. частоты, середина группы из трех пиков — на частоту 2,5 ед., а последний подъем приходится на 2,8 ед. То есть расстояния между первыми двумя значениями составляет 0,2 ед., а между вторым и последним — 0,3 ед.

Таким образом, общий характер приведенной зависимости (резко выраженные узкие максимумы, расставленные на близкие по величине промежутки) говорит в пользу резонансной природы явления.

В качестве причины существования критического значения частоты можно предположить связь между скоростью «прыжков» прыжковой функции и временем собственных колебаний системы. Так, при низкой частоте прыжков смещение осциллятора полностью следует изменению

динамического потенциала, а при высокой может несколько отставать. Когда частота прыжков станет настолько высокой, что в течение одного прыжка смещение не успеет развиться до заметной величины, колебания прекратятся, высокоамплитудный хаос возбуждаться не будет. То есть имеет место явление такого же характера, как и возбуждение электрического колебательного контура синусоидальной силой [2, стр. 27]. При низкой частоте возбуждения смещение следует за силой, а при высокой — отстает по фазе на π . В этом плане было бы интересно посмотреть поведение фазы колебаний в режиме запаздывания при изменении частоты прыжковой функции, в том числе вблизи критического значения. Авторы полагают, что более подробное исследование фазы колебаний в рассматриваемом уравнении (11.7) могло бы составить предмет для отдельной работы.

11.5. Параметры собственных колебаний

Вспомним теперь, что основой определяющего уравнения (11.7) является уравнение с кубической нелинейностью вида:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \delta x_1^3 = 0. \quad (11.14)$$

В работе [35] показано, что это уравнение является колебательным, причем роль инерционного члена играет коэффициент при второй производной по времени (здесь принятый равным единице с целью нормировки), а роль потенциального члена, то есть возвращающей силы, играет слагаемое δx_1^3 . Таким образом, колебательные свойства и в первую очередь частота собственных колебаний для уравнения (11.14) определяются коэффициентами при второй производной и при кубическом члене.

Вполне естественно полагать, что параметры запаздывания и хаоса будут также зависеть от этих коэффициентов.

Введем упомянутые коэффициенты в определяющее уравнение (11.7) в явном виде. При этом уравнение (11.7) принимает вид:

$$A_R \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} + B_R \cdot \delta x_1^3 + (\eta x_{2S0}) x_1^2 \cdot \cos(\omega_{2S} \cdot t) = 0, \quad (11.15)$$

где A_R — параметр инерционности, B_R — параметр потенциальности (возвращающей силы).

Рассмотрим теперь, что будет происходить с явлением запаздывания при изменении A_R и B_R .

11.5.1. Влияние параметра инерционности

Рассмотрим сначала влияние параметра инерционности, для чего обратимся к рис. 11.9, где показана зависимость времени запаздывания от параметра инерционности в области наиболее заметного пика на рис. 11.6, соответствующего $x_{2S} = 1,24$ ед.

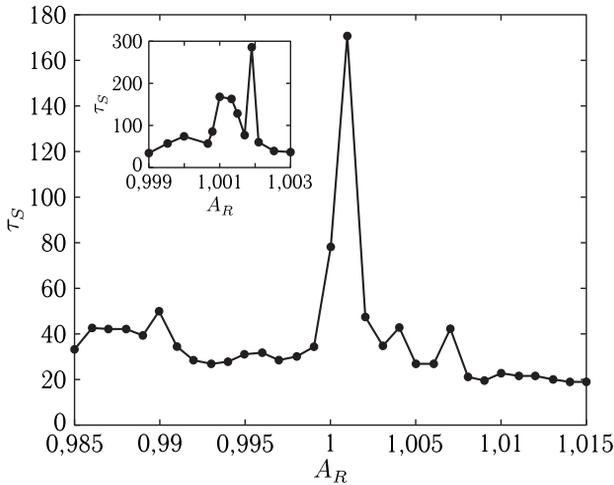


Рис. 11.9. Зависимость времени запаздывания от параметра инерционности. На врезке — структура главного пика в крупном масштабе. На основном рисунке шаг по A_R составляет 0,001 ед., на врезке — 0,0002 ед. Параметры: $\delta = 5$; $\eta = -200$; $x_{10} = 0,0043$; $x_{2S} = 1,24$; $\omega_{2S} = 2,5$

Из рисунка можно видеть, что зависимость имеет неоднородный характер с резко выделенным пиком при A_R вблизи значения 1,002 ед. Поскольку здесь меняется параметр инерционности, то есть частота собственных колебаний уравнения (11.14), составляющего основу уравнения (11.7), то такой пик следует отнести к явлению резонансного характера. Ширина пика на половине высоты (то есть при τ_S около 80–90 ед.) составляет около 0,001 ед., однако пик не является единым, а имеет более сложную структуру, показанную на врезке. Здесь, благодаря более мелкому шагу по A_R , удается выделить узкий пик, имеющий ширину в пять раз меньшую и амплитуду, составляющую 280 ед. Проверка показала, что дальнейшее уменьшение шага, вплоть до 0,00005 ед. к выявлению более дробного характера расщепления и увеличения амплитуды пика не приводит. То есть здесь явно фрактальный характер зависимости не наблюдается, но имеет место расщепление основного резонанса на две линии, отстоящие друг от друга на весьма малом расстоянии (порядка 0,0006 ед.).

Зависимость на рис. 11.3 представляет единственный пик, выбранный из рис. 11.6 как наиболее характерный. С целью выявления тонкой структуры пика шаг по A_R принят крайне малым (0,001 ед., на врезке — 0,0002 ед.). Однако столь малый шаг позволил рассмотреть только небольшую окрестность пика. Для более подробного выявления влияния параметра инерционности на время запаздывания обратимся к рис. 11.10, снятому при шаге 0,005 ед. в более широком диапазоне

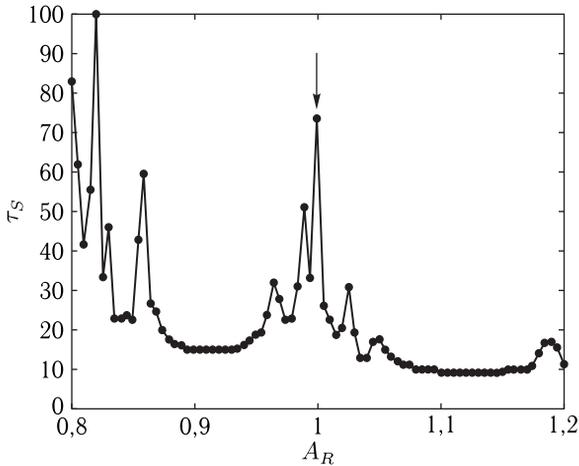


Рис. 11.10. Зависимость времени запаздывания от параметра инерционности в широком диапазоне его изменения. Шаг по A_R составляет 0,005 ед. Параметры — те же, что на рис. 11.9

изменения A_R . Все параметры приняты теми же, что на рис. 11.9, а рассмотренный на рис. 11.9 пик отмечен стрелкой.

Из рисунка можно видеть, что представленный на рис. 11.9 пик является только главным из целой группы пиков, расположенных по A_R между 0,97 и 1,05 ед. Как и на врезке, в рис. 11.9, основной пик, показанный стрелкой, расщеплен на два, хотя здесь его структура выявлена заметно грубее, так как шаг по A_R значительно больше. Однако охват большего диапазона позволяет отметить сильный многократно расщепленный подъем вблизи левого края рисунка. Сразу за левым краем, при $A_{RC} = 0,780$ ед., величина τ_S стремится к бесконечности, так что это значение можно считать критическим. При значении A_R меньше критического высокоамплитудный хаос отсутствует. Вблизи A_{RC} время запаздывания может достигать весьма больших величин. Так, при $A_R = 0,784$ ед. величина τ_S составляет около 900 ед. времени, а при $A_R = 0,781$ ед. достигает 1100 ед. На рисунке эти значения не представлены, чтобы не увеличивать масштаб по вертикальной оси, при котором все остальные пики будут выглядеть крайне малыми.

Обращает на себя внимание небольшой пик вблизи $A_R = 1,190$ ед. Можно видеть, что этот пик, а также главный при $A_R = 1,000$ ед. и группа пиков вблизи $A_R = 0,800$ ед. разнесены по A_R на одинаковые расстояния. То есть и здесь можно отметить эквидистантность пиков, подобную отмеченной на рис. 11.6.

Таким образом, здесь, как и для зависимости времени запаздывания от амплитуды прыжковой функции, представленной на рис. 11.6, можно отметить проявление свойств резонансного характера.

11.5.2. Влияние параметра потенциальности

Рассмотрим теперь влияние параметра потенциальности, для чего обратимся к рис. 11.11, где показана зависимость времени запаздывания от параметра потенциальности в области наиболее заметного пика на рис. 11.6, соответствующего $x_{2S} = 1,24$ ед.

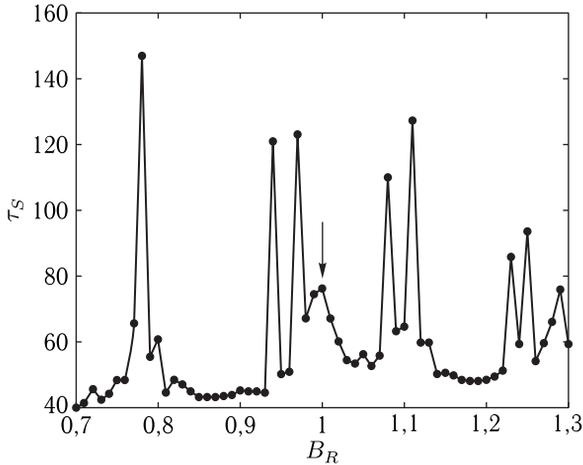


Рис. 11.11. Зависимость времени запаздывания от параметра потенциальности. Стрелкой показано положение главного пика на рис. 11.6. Шаг по B_R составляет 0,01 ед. Параметры: $\delta = 5$; $\eta = -200$; $x_{10} = 0,0043$; $x_{2S} = 1,24$; $\omega_{2S} = 2,5$

Из рисунка можно видеть, что зависимость имеет неоднородный характер с несколькими группами пиков, разделенных широкими пологими промежутками. В качестве довольно общего свойства группировки пиков наблюдается объединение в пары, то есть можно говорить о расщеплении основных резонансов. Ширина каждого отдельного пика по основанию составляет около 0,01 ед., а на половине высоты — 0,005 ед. В каждой паре расстояние между соседними пиками составляет около 0,03 ед. Можно видеть, что каждый пик как раз укладывается в величину шага по B_R , равную 0,01 ед. Проверка показала, что уменьшение шага на порядок (до значения 0,001 ед.) более тонкой структуры пиков не выявляет, но значительно увеличивает трудоемкость работы, поэтому величина шага в 0,01 ед. была признана оптимальной.

Зависимость, представленная на рис. 11.11, была получена при параметрах прыжковой функции, соответствующих наиболее выделенному пику на рис. 11.6, то есть при $x_{2S} = 1,24$; $x_{2S} = 2,5$. Здесь этот пик соответствует $x_{2S} = 1,0$ ед. (отмечен стрелкой). Однако теперь он не является главным, так как по обе стороны имеются пары пиков, высота которых больше в 2–3 раза.

Важным моментом является размещение пар пиков по горизонтальной оси с равными промежутками по 0,15 ед. Такое «эквидистантное»

размещение напоминает стоячую волну в струне с закрепленными концами, содержащей множество узлов по ее длине.

Таким образом, наблюдаемое влияние на время запаздывания параметра потенциальности, как и влияние параметра инерционности, также свидетельствует в пользу резонансного характера явления.

Зависимость на рис. 11.11 демонстрирует поведение времени запаздывания в сравнительно небольшом диапазоне изменения параметра потенциальности B_R . Довольно мелкий шаг, равный 0,01 ед., выбран для выявления тонкой структуры пиков. Рассмотрим теперь то же время запаздывания в более широком диапазоне изменения B_R , для чего обратимся к рис. 11.12.

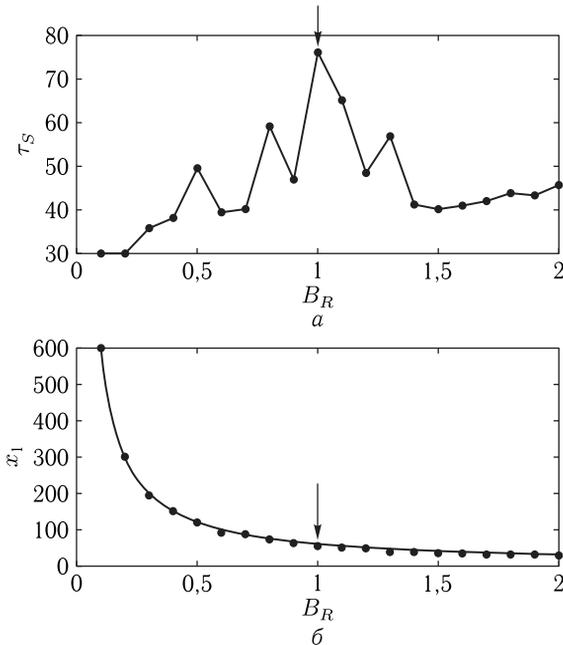


Рис. 11.12. Зависимость времени запаздывания (а) и амплитуды хаоса (б) от параметра потенциальности в широком диапазоне его изменения. Шаг по $\Delta\varphi_S$ составляет 0,1 ед. Параметры — те же, что на рис. 11.11

В верхней части этого рисунка (а) показана зависимость времени запаздывания от параметра потенциальности, снятая с более крупным шагом, равным 0,1 ед. Можно видеть, что полученная кривая является значительно более грубой, чем такая же на рис. 11.11, так что отдельные пики слиты друг с другом, однако общий характер основного подъема по B_R от 0,7 до 1,4 ед. сохранен. Основной пик, отмеченный стрелкой, здесь выделен сильнее боковых, так как узкие пики, представленные на рис. 11.11, здесь просто пропущены.

Тем не менее из рисунка видно, что при отходе от основного пика в сторону уменьшения B_R время запаздывания постепенно снижается, останавливаясь при $B_R = 0,1$ ед. на уровне 30 ед. времени. Увеличение B_R выше 1,4 ед. также не дает заметных пиков. Проверка показывает, что здесь время запаздывания монотонно снижается, стремясь к 20 ед. при $B_R \rightarrow 100$ ед. Исключением являются узкие пики вблизи $B_R = 5$ ед. и 10 ед., где время запаздывания увеличивается до 80–100 ед. (подобно пику при 0,79 ед. на рис. 11.11), после чего опять монотонно спадает.

Дополнительная проверка показала, что во всем интервале B_R от 0,0001 ед. до 100 ед. эффект запаздывания и возбуждения высокоамплитудного хаоса везде имеет место, причем время запаздывания нигде не превышает 160 ед. и не опускается ниже 20 ед. Таким образом, можно отметить, что параметр потенциальности критического характера не имеет. Это означает, что нет такого значения параметра, вблизи которого время запаздывания стремится к бесконечности, то есть высокоамплитудный хаос отсутствует. Такого значения нет ни при уменьшении, ни при увеличении B_R .

Однако характер высокоамплитудного хаоса в зависимости от параметра потенциальности сильно меняется. В первую очередь по мере увеличения B_R происходит уменьшение амплитуды хаоса, как это показано на рис. 11.12, б. Здесь точки — результат машинного эксперимента, а аппроксимирующая кривая построена по формуле

$$x_1 = \frac{60}{B_R}, \quad (11.16)$$

представляющей собой закон обратной пропорциональности. Видно, что аппроксимирующая кривая приближает точки с весьма высокой точностью.

Такой характер высокоамплитудного хаоса обусловлен тем, что положение осциллятора следует за минимумом потенциальной ямы, задаваемой прыжковой функцией. Согласно (11.8), потенциал имеет вид:

$$U = \frac{\delta}{4}x_1^4 + \frac{(\eta x_{2S0})}{3}x_1^3 \cdot \cos(\omega_{2S} \cdot t). \quad (11.17)$$

Подстановка параметра потенциальности B_R приводит эту формулу к виду:

$$U = B_R \frac{\delta}{4}x_1^4 + \frac{(\eta x_{2S0})}{3}x_1^3 \cdot \cos(\omega_{2S} \cdot t). \quad (11.18)$$

Учитывая, что максимальная абсолютная величина косинуса равна единице, получаем крайние значения потенциала, обеспечиваемые прыжковой функцией:

$$U_{\max} = B_R \frac{\delta}{4}x_1^4 + \frac{(\eta x_{2S0})}{3}x_1^3. \quad (11.19)$$

Изменение косинуса на π дает то же выражение с отрицательным знаком перед вторым слагаемым.

На рис. 11.13 приведен вид потенциала, построенного по формуле (11.19) при параметрах: $\delta = 5$; $\eta = -200$; $x_{10} = 0,0043$; $x_{2S0} = 1,24$. Положения минимумов отмечены стрелками.

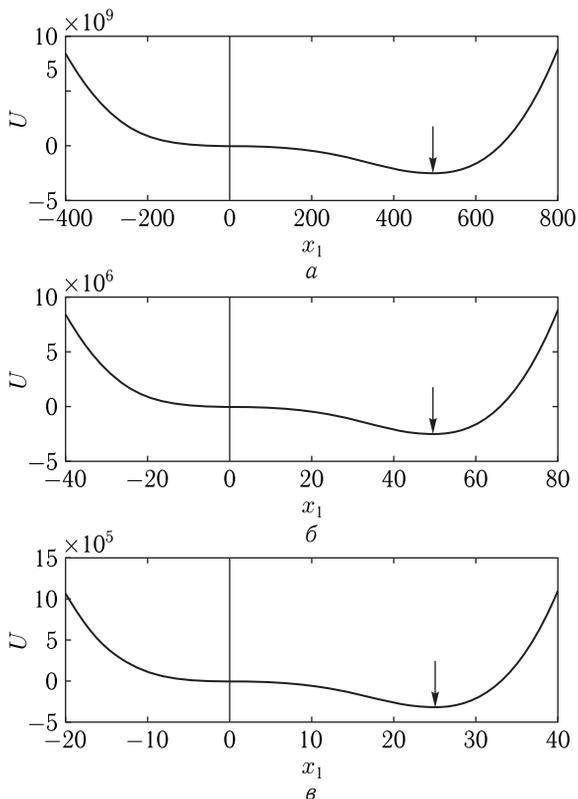


Рис. 11.13. Зависимость крайней величины потенциала от смещения осциллятора при различных значения параметра потенциальности B_R : *a* — 0,1 ед., *б* — 1,0 ед., *в* — 2,0 ед.

Из рисунка видно, что минимум при $B_R = 0,1$ ед. (*a*) дает $x_1 = 500$ ед. На рис. 11.12 то же значение B_R соответствует амплитуде хаоса около 600 ед. Минимум при $B_R = 1,0$ ед. (*б*) дает $x_1 = 50$ ед., а минимум при $B_R = 2,0$ ед. (*в*) дает $x_1 = 25$ ед. Соответствующие значения на рис. 11.12 равны 55 и 30 ед. Во всех трех случаях совпадение составляет не хуже 20%, что, учитывая неустойчивость амплитуды хаоса, можно считать вполне успешным.

Таким образом, можно сделать вывод, что амплитуда хаоса определяется величиной динамического потенциала, задаваемой прыжковой функцией.

11.5.3. Влияние фазы прыжковой функции

До сих пор предполагалось, что прыжковая функция, имеющая вид косинуса, стартует в тот момент, когда начинается отсчет времени, то есть со значения, равного единице. Однако машинный эксперимент показывает, что время запаздывания довольно сильно зависит от соотношения между этими моментами, то есть от начальной фазы прыжковой функции.

Характер зависимости при различных значениях амплитуды прыжковой функции сильно меняется, поэтому сначала обратимся к рассмотрению случая, когда время запаздывания при изменении амплитуды прыжковой функции меняется достаточно плавно и не содержит скачкообразных выбросов. Из рис. 11.6 видно, что удобный плавный участок, где время запаздывания еще не устремилось к нулю, заключен между значениями x_{2S} равными 1,10 и 1,19, поэтому возьмем $x_{2S} = 1,15$.

Фазу прыжковой функции учтем в виде добавки к ее аргументу, равной $\Delta\varphi_S$, так что уравнение (11.15) примет вид:

$$A_R \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} + B_R \cdot \delta x_1^3 + (\eta x_{2S}) x_1^2 \cdot \cos(\omega_{2S} \cdot t + \Delta\varphi_S) = 0, \quad (11.20)$$

Полученная зависимость времени запаздывания τ_S от сдвига фазы прыжковой функции $\Delta\varphi_S$ показана на рис. 11.14, а. На рис. 11.14, б для сравнения приведена величина косинуса от такого сдвига в момент начала отсчета времени.

Из рис. 11.14, а видно, что зависимость имеет сильно изрезанный характер. Точки, как результаты машинного эксперимента, измерены с точностью не менее 5%, так что передают изрезанность в действительном виде, не обусловленном ошибками измерения. Поэтому на рисунке аппроксимация не проводилась, а точки напрямую соединены отрезками прямых линий. Можно полагать, что причина изрезанности состоит в общем статистическом разбросе явления высокоамплитудного хаоса.

В области $\Delta\varphi_S$ от 160 до 200 градусов, центр которой приходится на 180 градусов, зависимость резко уходит вверх за пределы рисунка. В этом интервале значений $\Delta\varphi_S$ возбуждение высокоамплитудного хаоса не было обнаружено вплоть до времени запаздывания 2000 ед. Таким образом, можно полагать, что здесь время запаздывания стремится к бесконечности. Из рис. 11.14, б видно, что эта область как раз совпадает с отрицательным минимумом косинуса, являющегося частью прыжковой функции. То есть для возбуждения высокоамплитудного хаоса значение начальной фазы прыжковой функции должно быть достаточно удалено от 180 градусов (не менее чем на ± 10 градусов).

Обращает на себя внимание острый пик вблизи $\Delta\varphi_S = 50^\circ$. Проверка показывает, что этот пик является достаточно узким, не шире $\pm 5^\circ$, причем другие пики подобной высоты во всем исследованном интервале углов не были обнаружены. В то же время явной связи значения

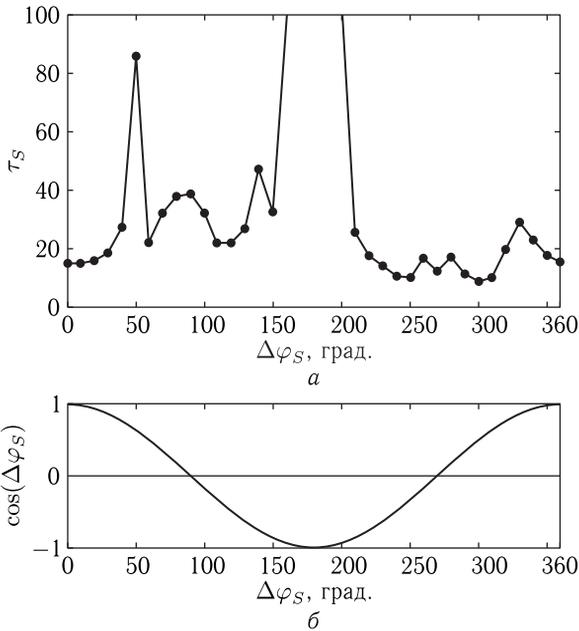


Рис. 11.14. Зависимость времени запаздывания от сдвига фазы прыжковой функции (а) и косинус соответствующего значения сдвига (б). Параметры: $\delta = 5$; $\eta = -200$; $x_{2S} = 1,15$; $\omega_{2S} = 2,5$; $x_{10} = 0,0043$; $A_R = 1$; $B_R = 1$

$\Delta\varphi_S = 50^\circ$ для этого пика с близкими характерными углами (например $\pi/4 = 45^\circ$ или $1 \text{ рад.} = 57^\circ$) не было обнаружено. По-видимому, этот пик представляет собой явление того же типа, что и остальные пики, образующие общую изрезанность рассматриваемой зависимости.

Как отмечено выше, для построения рис. 11.14 амплитуда прыжковой функции x_{2S} выбрана равной 1,15 на участке, где время запаздывания τ_S зависит от этой амплитуды достаточно мало. Не так, однако, обстоит дело в случае сильной зависимости времени запаздывания от x_{2S} . Из рис. 11.6 видно, что максимум такой зависимости приходится на $x_{2S} = 1,24$ ед. Проверка показывает, что в этом случае зависимость времени запаздывания от фазы прыжковой функции становится крайне резкой и приобретает хаотический характер. В качестве иллюстрации обратимся к рис. 11.15, где показано развитие колебаний во времени при трех крайне мало различающихся значениях фазы прыжковой функции $\Delta\varphi_S$.

Из рисунка видно, что если при $\Delta\varphi_S = 0$ время запаздывания составляет 77 ед., то при $\Delta\varphi_S = 0,0002^\circ$ оно увеличивается до 82 ед., а при $\Delta\varphi_S = 0,0004^\circ$ падает до 66 ед. времени. Столь резкое изменение τ_S при крайне малом изменении $\Delta\varphi_S$ говорит о явно выраженной

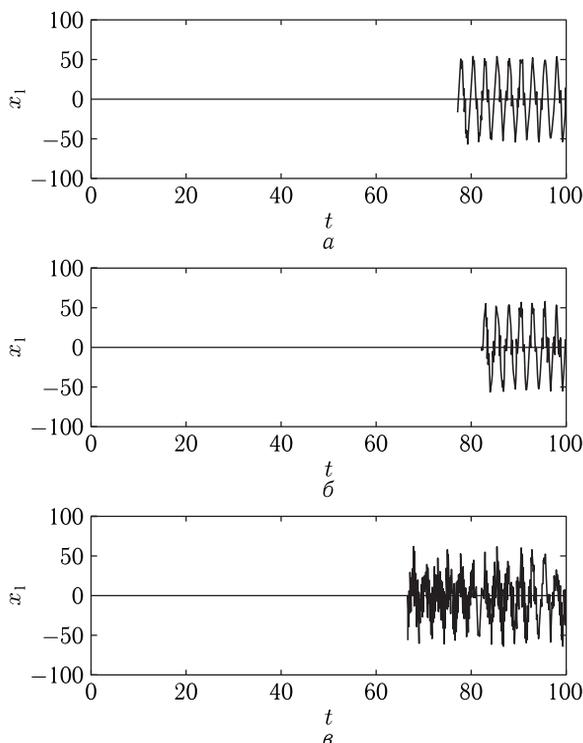


Рис. 11.15. Развитие колебаний во времени при различных значениях фазы прыжковой функции $\Delta\varphi_S$: a — 0; b — $0,0002^\circ$; c — $0,0004^\circ$. Параметры — те же, что на рис. 11.14, кроме $x_{2S0} = 1,24$

статистической природе явления. При других значениях $\Delta\varphi_S$ характер зависимости остается столь же резким и нестационарным.

Можно полагать, что столь сильная зависимость времени запаздывания от фазы прыжковой функции в рассматриваемых условиях заслуживает более подробного исследования, могущего составить предмет для отдельной работы.

11.6. Некоторые замечания о возможном развитии работы

Главным результатом настоящей работы можно считать демонстрацию возможности сведения системы из двух уравнений второго порядка для связанных осцилляторов к одному уравнению того же второго порядка, в котором роль второго осциллятора играет прыжковая функция, определяемая собственными независимыми параметрами — частотой и амплитудой. При этом сохранены главные свойства исходной системы, такие как существование высокоамплитудного хаоса

и запаздывание возбуждения такого хаоса от момента задания начальных условий. Приведены свойства полученного уравнения, выявлены зависимости времени запаздывания и некоторых свойств высокоамплитудного хаоса от параметров прыжковой функции и самого уравнения.

Таким образом, можно полагать, что сделан определенный шаг в направлении упрощения задачи и выделения наиболее простого ее варианта, сохраняющего свойства высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием.

Тем не менее некоторые вопросы остаются рассмотренными недостаточно. Ряд замечаний о возможном продолжении исследований приведены по тексту работы, поэтому здесь на них останавливаться не будем. Отметим лишь два момента, которые, по-видимому, являются наиболее важными.

Так, по-прежнему остается задача построения механизма, определяющего время первичного запаздывания. Эта задача указывалась ранее в работе [32], некоторые качественные соображения высказывались там же. Возможные варианты механизма рассматривались еще в работах [27–29]. Однако там картина была осложнена значительным количеством дополнительных параметров, что затруднило получение полного аналитического критерия. Механизмы входа в режим запаздывания и выхода из него рассмотрены в работе [32, раздел 5]. Там же приведены некоторые качественные соображения, касающиеся продолжительности запаздывания. В настоящей работе выявлена еще одна важная характеристика запаздывания — влияние фазы прыжковой функции, в том числе до полного исключения возбуждения высокоамплитудного хаоса. В качестве возможного механизма здесь можно предполагать отставание по фазе собственных колебаний системы (то есть ее собственная инерционность) от вынуждающих колебаний прыжковой функции. В пользу решающего влияния фазы говорит крайне высокая зависимость времени запаздывания от малого изменения фазы прыжковой функции. Кроме того, проверка показывает, что изменение знака начального смещения также меняет свойства запаздывания, вплоть до полного исключения высокоамплитудного хаоса. Таким образом, в качестве важной задачи для дальнейшего исследования можно рассматривать изучение фазовых свойств рассматриваемых явлений.

Другим важным моментом остается изучение критических значений ряда параметров системы, таких как начальное смещение, амплитуда и частота прыжковой функции и ряд других, отмеченных в настоящей и предыдущих работах. Здесь также можно предполагать влияние инерционности системы, как это отмечено в разделе 11.4.3, посвященном изучению влияния частоты прыжковой функции. Там же приведены некоторые качественные соображения о влиянии фазы, что делает этот вопрос родственным предыдущему.

Таким образом, можно полагать, что приведенные вопросы заслуживают достаточного внимания и могут составить предмет для отдельной работы.

Выводы по главе 11

Настоящая работа является продолжением исследования нестационарного запаздывания установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Физической основной задачей является возбуждение мощных гиперзвуковых колебаний в ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами, а также возбуждение интенсивных шумовых колебаний в ферритовом диске, помещенном в электродинамический резонатор.

В основании настоящего исследования лежит полученная в первой части работы упрощенная система двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка, имеющих колебательный характер. Первое из уравнений системы содержит инерционный член в виде второй производной по времени от смещения первого осциллятора, потенциальный член, пропорциональный кубу того же смещения, и член нелинейной связи, содержащий произведение квадрата смещения первого осциллятора на смещение второго. Второе уравнение содержит инерционный член в виде второй производной по времени от смещения второго осциллятора и член линейной связи, содержащий смещение первого осциллятора.

В качестве главного шага дальнейшего упрощения задачи выполнено замещение смещения второго осциллятора вспомогательной функцией, имеющей гармоническую зависимость от времени. Введение такой функции в динамический потенциал привело к периодическому изменению его формы, имеющему характер симметричных периодических «прыжков» в прямом и обратном направлениях. Вследствие такого характера потенциала введенной функции было дано название «прыжковой».

Прыжковая функция заняла место входящего в первое уравнение смещения второго осциллятора, содержащегося в слагаемом нелинейной связи, представляющим собой произведение квадрата смещения первого осциллятора на смещение второго. Результатом такого введения прыжковой функции явилась замена двух уравнений исходной системы одним, в достаточной степени обеспечивающим свойства высокоамплитудного хаоса и нестационарного запаздывания. Благодаря сохранению основных свойств исходной системы полученное уравнение было названо «определяющим».

Рассмотрено развитие во времени колебаний первого осциллятора, соответствующих определяющему уравнению. Найдена производная колебаний по времени и построен соответствующий параметрический портрет. Показано, что развитие колебаний испытывает значительное запаздывание, в несколько раз превышающее период прыжковой функции. После запаздывания скачком развиваются нестационарные колебания, амплитуда которых превышает начальное смещение осциллятора более чем на три порядка. Дальнейшее развитие колебаний следует сильно размазанной синусоиде, на которую наложен хаос с амплитудой порядка

половины от ее амплитуды. Установлено, что размазанная синусоида соответствует синусоидальным колебаниям прыжковой функции. После вычета из полных колебаний синусоиды прыжковой функции с соответствующей нормировкой, остающиеся колебания имеют вид полностью хаотический. Параметрический портрет имеет вид сильно замазанной горизонтальной восьмерки, типичный для хаотического характера колебаний.

Исследован спектральный состав высокоамплитудного хаоса. Показано, что в полном спектре преобладает линия, соответствующая частоте прыжковой функции, а при вычете этой функции остается чистый хаос, ширина спектра которого превышает частоту прыжковой функции на два порядка.

Выполнено исследование соотношения между временем запаздывания и периодом прыжковой функции. Показано, что развитие высокоамплитудного хаоса происходит по прошествии нескольких периодов прыжковой функции, так что боковой минимум динамического потенциала формируется еще в процессе развития запаздывания, значительно раньше его окончания.

Рассмотрено влияние начального смещения на время запаздывания. Показано, что время запаздывания зависит от величины начального смещения в соответствии с законом обратной пропорциональности. Отмечено отсутствие скачков полученной зависимости, отмечавшихся ранее для более сложных систем уравнений. В качестве возможной причины отсутствия скачков выдвинута крайне простая структура определяющего уравнения по сравнению с другими системами.

Рассмотрено влияние амплитуды прыжковой функции на время запаздывания. Выявлено критическое значение амплитуды, ниже которого высокоамплитудный хаос отсутствует. Показано, что по мере увеличения амплитуды прыжковой функции время запаздывания, в основном, спадает, однако на общей плавной зависимости имеется ряд острых максимумов, соответствующих резкому росту времени запаздывания на порядок и более. Отмечен эквидистантный характер расположения максимумов. В качестве возможного объяснения характера полученной зависимости выдвинута гипотеза о ее резонансном характере. В обоснование гипотезы приведен колебательный характер уравнения с кубической нелинейностью, составляющего основу уравнения для первого осциллятора без учета смещения второго.

Рассмотрено влияние частоты прыжковой функции на время запаздывания. Показано, что по мере увеличения частоты время запаздывания увеличивается вплоть до критического ее значения, выше которого возбуждение высокоамплитудного хаоса отсутствует. В качестве причины существования критического значения частоты высказано предположение о связи между скоростью «прыжков» прыжковой функции и временем собственных колебаний системы. Отмечено, что при низкой частоте прыжков смещение осциллятора полностью следует изменению

динамического потенциала, а при высокой может несколько отставать. В случае значительного отставания смещение не успевает развиться до заметной величины, колебания прекращаются, и высокоамплитудный хаос отсутствует. Отмечена аналогия наблюдаемого явления с возбуждением электрического колебательного контура синусоидальной силой, при котором на низкой частоте ток в контуре колеблется в одной фазе с возбуждающей силой, а после прохождения резонансной частоты колебания становятся противофазными. На полученной зависимости выявлен ряд узких максимумов, подтверждающий гипотезу о резонансном их происхождении.

Отмечено, что определяющее уравнение содержит инерционный и потенциальный члены, для характеристики которых введены параметры инерционности и потенциальности как коэффициенты при второй производной и слагаемым кубической нелинейности.

Рассмотрено влияние параметра инерционности на время запаздывания. Выявлено критическое значение параметра, ниже которого высокоамплитудный хаос отсутствует. Установлено, что при увеличении параметра инерционности выше критического значения время запаздывания уменьшается, однако также содержит несколько узких выбросов с высокой амплитудой, дополнительно подтверждающих резонансный характер явления.

Рассмотрено влияние параметра потенциальности на время запаздывания. Выявлено возбуждение высокоамплитудного хаоса во всем возможном интервале изменения параметра без какого-либо критического значения. Отмечен ряд острых выбросов, как правило, имеющих раздвоенный характер, что дополнительно подтверждает гипотезу о резонансной их природе. По мере увеличения параметра потенциальности отмечен плавный спад амплитуды хаоса, с высокой точностью соответствующий закону обратной пропорциональности. Характер такой зависимости интерпретирован на основе модели динамического потенциала, боковой минимум которого как раз соответствует амплитуде хаоса.

Рассмотрено влияние на время запаздывания сдвига фазы прыжковой функции относительно начала возбуждения. Выявлена весьма сильная зависимость, различным образом проявляющаяся при малых и больших временах запаздывания. Малая величина времени запаздывания здесь характеризуется отсутствием резких выбросов на зависимости времени запаздывания от начального смещения. Показано, что в этом случае зависимость времени запаздывания от величины сдвига фазы имеет резко выраженный широкий максимум, когда зависимость прыжковой функций от этого сдвига становится отрицательной, так что в этом случае высокоамплитудный хаос отсутствует. При положительных значениях прыжковой функции время запаздывания имеет типичную среднюю величину и меняется мало. Отмечено, что при больших временах запаздывания, то есть в области резких выбросов

на зависимости времени запаздывания от начального смещения, влияние сдвига фазы прыжковой функции резко возрастает. В этом случае изменение сдвига фазы на величину четвертого порядка малости относительно нулевого значения приводит к изменению времени запаздывания на 20% и более.

Приведены некоторые замечания, касающиеся возможного развития работы. В качестве главных задач отмечено построение модельного представления о продолжительности времени запаздывания, более подробное выявление природы критического характера ряда параметров, а также более подробное изучение фазового характера рассматриваемых явлений.

Глава 12

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ УСТАНОВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ. ЧАСТЬ 4. КОЛЬЦЕВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

В настоящей главе продолжено рассмотрение нелинейных вынужденных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Основное внимание уделяется рассмотрению упрощенной системы уравнений, сохраняющей основные свойства наблюдаемых колебаний. Выявлен кольцевой характер укороченной системы, состоящий в том, что полная связь уравнений между собой образует как бы «кольцо», замкнутое само на себя. Подробно рассмотрен кольцевой характер релаксационной системы для двух осцилляторов. Полученное при этом уравнение названо «кольцевым уравнением», а его решение — «кольцевой функцией». Установлено, что ввиду сложности кольцевого уравнения, единственным способом его решения является пошаговый. Отмечена аналогия такого решения с расчетом дискретных одномерных отображений. Предложены два вида кольцевых функций — первого и второго рода, в качестве дискретно меняющейся переменной использующих время. Показано, что кольцевые функции второго рода обеспечивают удобную имитацию запаздывания и развития высокоамплитудного хаоса в системе из двух осцилляторов. Приведены некоторые замечания о возможном развитии работы. В качестве важной задачи отмечена разработка модельного представления продолжительности интервала запаздывания.

Основное изложение материала в данной главе следует работе [34], остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

12.1. Постановка задачи и основные системы уравнений

Исследование нелинейных явлений составляет значительную ветвь общей науки о колебаниях [1–3, 55, 80]. Особый интерес представляет изучение нестационарных, в том числе хаотических проявлений нелинейности [4–6, 124, 125].

В предыдущих главах настоящей монографии с использованием квадратичного приближения колебаний намагниченности получена система двух связанных уравнений второго порядка, нелинейность в которых представлена на основе разложения потенциала в степенной ряд до четвертой степени. Показано, что при достаточном уровне сигнала возможно возбуждение интенсивных нестационарных колебаний, имеющих хаотический характер.

В 6–8 главах настоящей монографии показано, что в определенных условиях возбуждение высокоамплитудного хаоса происходит не сразу после включения возбуждения, а со значительным запаздыванием во времени, продолжительность которого намного превышает как периоды, так и времена релаксации свободных колебаний каждого из осцилляторов.

В главе 9 настоящей монографии из полной системы уравнений для обоих осцилляторов выделена упрощенная система, являющаяся «первичным ядром» в том отношении, что она отличается простотой и при этом сохраняет свойства нестационарного запаздывания и высокоамплитудного хаоса.

В главе 10 настоящей монографии выполнено всестороннее исследование явления запаздывания, выявлена его зависимость от параметров системы, а также рассмотрены механизмы начала запаздывания и выхода из него.

В главе 11 настоящей монографии рассмотрена роль второго уравнения системы как элемента, возвращающего в первое уравнение его же собственные колебания в преобразованном виде. На основе анализа динамического потенциала показана возможность сведения системы из двух уравнений к одному с помощью особой «прыжковой» функции, отражающей симметричное гармоническое изменение потенциала (его «прыжки»), происходящее под действием второго осциллятора. Подробно исследованы характеристики запаздывания при изменении параметров системы. Выявлены критические значения ряда параметров, а также резонансный характер полученных зависимостей.

Настоящая глава является продолжением и дальнейшим развитием исследований нестационарного запаздывания, предпринятых в главах 9–11. Основное внимание уделено кольцевому характеру развития нестационарных колебаний, в том числе введены в рассмотрение кольцевые функции, реализующие эффект запаздывания в наиболее простом виде.

12.1.1. Основные системы уравнений

Рассматриваются колебания двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным.

Обоснованием постановки задачи являются реально существующие системы, содержащие в качестве нелинейного элемента ферритовую пластину, а в качестве линейного — упругую пластину или электродинамический резонатор.

Для описания возбуждаемых колебаний в работах [17–26, 35] на основе квадратичного приближения по намагниченности была предложена общая система, состоящая из двух дифференциальных уравнений второго порядка (1.31)–(1.32) [26, форм. (46), (47)], [35, форм. (31), (32)]:

$$a_{11} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + a_{12} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + a_{13} \cdot x_1 + a_{14} \cdot x_2 + \\ + d_{11}x_1^2 + d_{12}x_1x_2 + d_{13}x_2^2 + \\ + b_{11} \cdot x_1^3 + b_{12} \cdot x_1^2x_2 + b_{13} \cdot x_1x_2^2 + b_{14} \cdot x_2^3 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (12.1)$$

$$a_{21} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + a_{22} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + a_{23} \cdot x_2 + a_{24} \cdot x_1 + \\ + d_{21}x_1^2 + d_{22}x_1x_2 + d_{23}x_2^2 + \\ + b_{21} \cdot x_1^3 + b_{22} \cdot x_1^2x_2 + b_{23} \cdot x_1x_2^2 + b_{24} \cdot x_2^3 = 0, \quad (12.2)$$

где коэффициенты a_{ik} , b_{ik} , d_{ik} определяются магнитными и упругими параметрами материала пластины [26, форм.(7)–(29) с учетом (6)].

На основе сравнения входящих в систему (12.1)–(12.2) коэффициентов с реальными параметрами физических задач, из нее была выделена упрощенная система, отражающая основные свойства наблюдаемых явлений (6.6), (6.7) [27, форм. (6), (7)]:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = A \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (12.3)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (12.4)$$

Здесь x_1 и x_2 — смещение первого и второго осцилляторов, β_1 и β_2 — соответствующие параметры диссипации, ω_1 и ω_2 — собственные частоты колебаний осцилляторов в отсутствие нелинейности и связи, γ_1 и γ_2 — параметры линейной связи между осцилляторами, η — параметр нелинейной связи, δ — параметр кубической нелинейности первого осциллятора, A — амплитуда и ω_0 — частота внешнего воздействия.

В работах [27–30] было показано, что под действием внешнего возбуждения в системе (12.3)–(12.4) генерируются высокоамплитудные колебания хаотического характера, причем начало таких колебаний запаздывает по времени от момента включения возбуждения на значительную величину.

В работе [31] для упрощения математической структуры задачи предложена эквивалентная система, где внешнее возбуждение заменено начальным смещением первого осциллятора. В результате исключения второстепенных слагаемых, из полной системы (12.3)–(12.4) выделена упрощенная система — «первичное ядро», сохраняющее свойство

нестационарного запаздывания. Предложены два варианта первичного ядра:

система колебательная

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (12.5)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_2^2 x_2 + \gamma_2 x_1 = 0 \quad (12.6)$$

и система релаксационная

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (12.7)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (12.8)$$

В обеих системах первое уравнение — одно и то же, а второе в первой системе является колебательным, то есть в отсутствие связи со вторым описывает периодические колебания с частотой ω_2 , тогда как во второй системе это уравнение имеет релаксационный характер, периодических колебаний не допускающий. Именно такими свойствами второго уравнения обусловлено название каждой из систем.

В то же время, каждая из систем в целом сохраняет возможность существования высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием, причем в обоих случаях хаос и запаздывание имеют одинаковый характер, отличаясь лишь конкретными значениями параметров (амплитудой хаоса и временем запаздывания).

12.2. Кольцевой характер обеих систем

В работе [32] было показано, что высокоамплитудный хаос в обеих системах (12.5)–(12.6) и (12.7)–(12.8) формируется за счет слагаемого нелинейной связи первого уравнения вида $\eta x_1^2 x_2$. Входящее в это слагаемое смещение второго осциллятора x_2 задается вторым уравнением через слагаемое линейной связи $\gamma_2 x_1$, то есть в конечном счете опять-таки определяется смещением первого осциллятора x_1 . Таким образом, имеет место связь смещения первого осциллятора x_1 через посредство смещения второго x_2 опять со смещением первого осциллятора x_1 . Образно говоря, полная связь в той или другой системе образует как бы «кольцо», замкнутое само на себя. В этом кольце имеется «посредник» — второй осциллятор, который играет подчиненную роль.

Относительно колебательной системы (12.5)–(12.6) в работе [32] рассматривалась роль слагаемого, содержащего частоту $\Delta\omega$, причем было показано, что одинаковый характер колебаний требует для системы (12.5)–(12.6) уровня начального смещения значительно

(в ~ 200 раз) более высокого, чем для системы (12.7)–(12.8). Поэтому основное внимание далее было уделено релаксационной системе (12.7)–(12.8) как имеющей более простую структуру.

В работе [33] кольцевой характер системы (12.7)–(12.8) был нарушен тем, что «кольцо» было разомкнуто и вместо смещения второго осциллятора x_2 на место «разрыва» в первое уравнение была вставлена вспомогательная функция, имеющая гармонический характер. Было показано, что под действием такой функции динамический потенциал совершает симметричные «прыжки» из одного крайнего положения в другое, так что функция была названа «прыжковой». Исследование колебаний под действием прыжковой функции показало, что основные свойства высокоамплитудного хаоса и запаздывания, такие как критический характер и монотонное изменение за пределами критичности, сохраняются в достаточно чистом виде. При этом некоторые зависимости времени запаздывания от параметров задачи приобрели резонансный характер, определяемый первым уравнением, оставшимся колебательным.

Таким образом, было показано, что причиной хаоса и запаздывания является кольцевой характер системы уравнений, причем роль замыкания через кольцо может играть вспомогательная функция, моделирующая этот кольцевой характер, то есть играющая ту же роль, что и полное кольцо.

12.2.1. Кольцевое воздействие осцилляторов друг на друга

В предыдущем разделе установлено, что хаос и запаздывание обусловлены кольцевым характером колебательной (12.5)–(12.6) и релаксационной (12.7)–(12.8) систем, причем кольцо может быть разомкнуто и его действие заменено моделирующей функцией. Рассмотрим теперь, как именно образующие кольцо осцилляторы могут действовать друг на друга. То есть каким образом первый осциллятор действует на второй и как к нему возвращается действие от второго осциллятора.

Предварительная проверка показала, что более наглядно такое действие можно проследить на примере колебательной системы (12.5)–(12.6).

Предположим, что из первого уравнения исходит синусоидальный сигнал постоянной амплитуды без запаздывания, имеющий вид (амплитуду $A_1 = 1,4$ ед. и частоту $\omega_1 = 20$ ед. зададим условно, исходя из наглядности представления):

$$x_1 = A_1 \cdot \cos(\omega_1 t). \quad (12.9)$$

Этот сигнал представлен на рис. 12.1, а.

Будем полагать, что далее он поступает на второй осциллятор, уравнение для которого имеет вид (12.6):

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_2^2 x_2 + \gamma_2 x_1 = 0, \quad (12.10)$$

в котором $\omega_2 = 22$; $\gamma_2 = 10$.

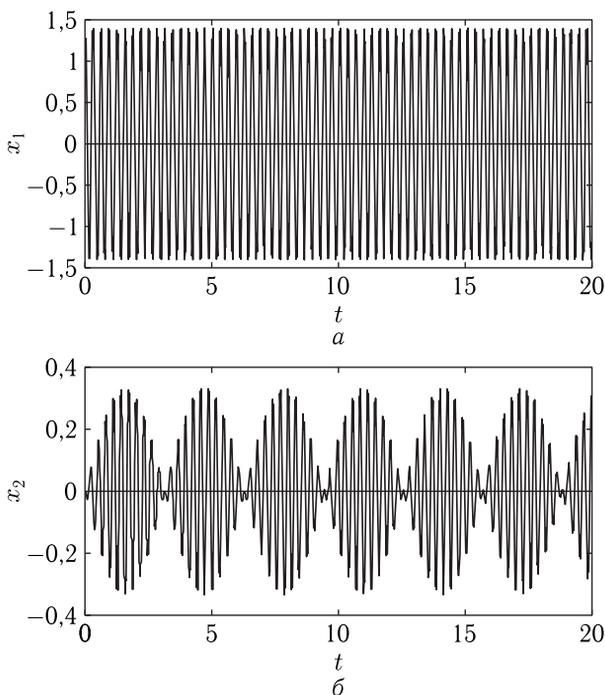


Рис. 12.1. Действие первого осциллятора на второй осциллятор: *а* — первый осциллятор; *б* — второй осциллятор

Получаемые колебания второго осциллятора представлены на рис. 12.1, *б*, из которого можно видеть, что они представляют собой биения, частота которых равна:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1, \quad (12.11)$$

то есть при принятых значениях частот $\Delta\omega = 2$ ед.

Таким образом, синусоидальный сигнал с постоянной амплитудой от первого осциллятора вызывает у второго колебания с биениями, частота которых равна разности собственных частот осцилляторов.

Колебания второго осциллятора (рис. 12.1, *б*) можно рассматривать как прохождение первой половины кольца.

Рассмотрим теперь вторую половину кольца, для чего предположим, что колебания второго осциллятора имеют вид:

$$x_2 = A_2 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \cdot \sin(\Delta\omega/2 \cdot t), \quad (12.12)$$

где $A_2 = 0,32$ ед., $\omega_1 = 20$ ед., $\Delta\omega = 2$ ед.

Здесь амплитуда выбрана такой же, как получена на рис. 12.1, *б*, а деление частоты биений на два обусловлено тем, что биения мо-

делируются синусом, каждый полупериод которого дает один полный период биений. Такие колебания представлены на рис. 12.2, а. Можно видеть, что они полностью повторяют представленные на рис. 12.1, б, так как параметры формулы (12.12) специально выбраны такими, чтобы моделировать переход от первой половины кольца ко второй.

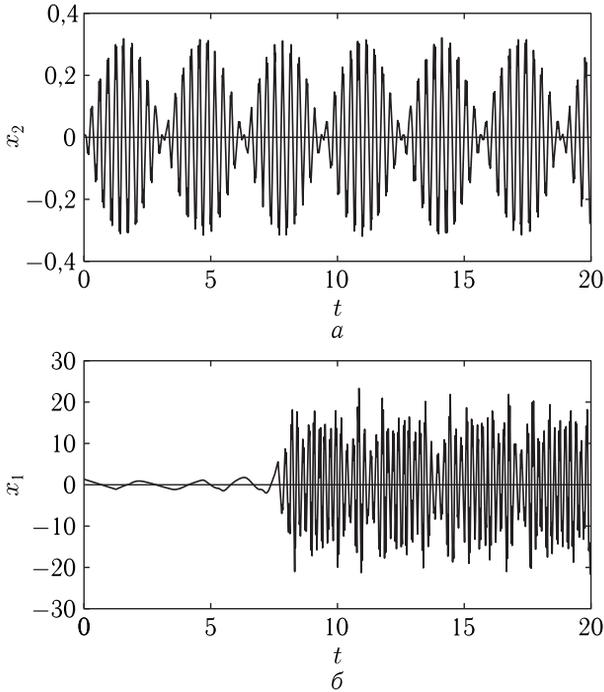


Рис. 12.2. Действие второго осциллятора на первый: а — второй осциллятор; б — первый осциллятор

Положим далее, что эти колебания действуют на первый осциллятор, то есть возвращаются к нему от второго по второй половине кольца. Уравнение для первого осциллятора имеет вид:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0, \quad (12.13)$$

где $\delta = 5$; $\eta = -200$.

Получаемые колебания первого осциллятора представлены на рис. 12.2, б. Можно видеть, что под действием биений, поступающих от второго осциллятора, колебания первого осциллятора происходят с запаздыванием на 8 ед. времени, после чего скачком возникает хаос, амплитуда которого превышает амплитуду колебаний до скачка более чем на порядок.

Таким образом, можно представить общую картину развития событий в следующем виде. Колебания первого осциллятора вызывают биения колебаний второго. Такие колебания с биениями возвращаются к первому осциллятору, вызывая его запаздывание. Эти колебания снова передаются второму и так далее — по кольцу. Имеет место что-то вроде кольцевой связи, аналогией которой можно считать положительную или отрицательную обратную связь в радиотехнических устройствах [126, стр. 365, 370].

12.2.2. Некоторые дополнительные особенности модели кольца

Отметим некоторые дополнительные свойства модели кольцевого взаимодействия осцилляторов, не нашедшие своего освещения в предыдущем разделе.

Проверка показывает, что время запаздывания напрямую с периодом биений не связано, однако запаздывание проявляется только тогда, когда проходит хотя бы один или полтора периода биений (могут проходить два-три и более). Возникающий после запаздывания хаос с периодом биений также не связан.

В качестве важной особенности рассматриваемых явлений следует отметить высокую чувствительность времени запаздывания и характера хаоса к фазам обеих составляющих биений, поступающих на первый осциллятор. Так, изменение в формуле (12.12) второго сомножителя с синуса на косинус, что соответствует изменению фазы на $\pi/2$, приводит к уменьшению времени запаздывания почти в три раза, то есть с 8 ед. до 3 ед., а изменение первого сомножителя с косинуса на синус увеличивает время запаздывания также почти в три раза, то есть с 8 ед. до 23 ед.

Весьма значительно меняется время запаздывания при изменении частоты модулирующего сигнала биений, то есть при изменении аргумента второго синуса в формуле (12.12). Так, умножение аргумента на 1,1 приводит к увеличению времени запаздывания с 8 до 10 ед., а умножение на 1,2 увеличивает время запаздывания до 42 ед., что превышает длительность периода биений в 16 раз.

Заметим, что высокая чувствительность времени запаздывания к фазе возбуждения отмечалась в работе [33, раздел 11], где рассматривалось моделирование запаздывания с помощью прыжковой функции. По-видимому, здесь имеет место явление того же порядка — чувствительность механизма запаздывания к собственным фазовым характеристикам. Можно полагать, что более подробное исследование фазовых свойств предложенной здесь модели кольцевого взаимодействия, наряду с фазовыми явлениями, отмеченными в работе [33], представляет интерес в качестве предмета для отдельной работы.

Таким образом, проведенное модельное представление показывает, что кольцевой характер колебательной системы (12.5)–(12.6), включающий в себя механизм биений, способен обеспечить формирование как высокоамплитудного хаоса, так и предшествующее ему запаздывание

возбуждения. Заметим, что роль биений в формировании запаздывания и хаоса отмечалась ранее в работе [27, раздел 6], однако там биения в чистом виде выделены не были, по-видимому, из-за высокой сложности рассматривавшейся там системы.

12.2.3. Некоторые ограничения модели кольца

Определенным ограничением предложенной модели является тот факт, что она успешно действует в рамках только одного прохода по кольцу. Так, после первого прохождения по кольцу колебания первого осциллятора приобретают вид, показаны на рис. 12.2, б, то есть не соответствуют чисто синусоидальным колебаниям, представленным на рис. 12.1, а. Воздействие таких колебаний на второй осциллятор, если и даст картину биений, то значительно более сложную, чем на рис. 12.1, б, а воздействие получаемых колебаний снова на первый осциллятор еще более усложнит картину. Можно предположить, что здесь определенную роль сыграют резонансные свойства обоих осцилляторов, способствующие выделению из полного спектра колебаний одной определенной частоты или ограниченной группы частот.

Таким образом, несмотря на успешное применение модели для представления запаздывания и хаоса при первом прохождении кольца, необходимо дальнейшее совершенствование модели, что позволило бы применить ее для случая прохождения кольца сколь угодно большое число раз. Авторы полагают, что такое совершенствование может составить предмет для отдельной работы.

В качестве еще одного ограничения предложенной модели следует отметить тот факт, что образование биений, составляющих основу воздействия второго осциллятора на первый, с необходимостью требует, чтобы второй осциллятор имел колебательный характер. То есть во втором уравнении системы (12.5)–(12.6), приведенном здесь в виде (12.10), должно быть слагаемое, имеющее потенциальный характер, то есть $\omega_2^2 x_2$. В отсутствие такого слагаемого уравнение становится релаксационным, так что смещение x_2 биений не образует, а просто повторяет колебания первого осциллятора, сохраняя постоянную амплитуду.

Подобное воздействие синусоидального сигнала на первое уравнение через посредство x_2 аналогично введению прыжковой функции, рассмотренной в гл. 11, с той разницей, что там прыжковая функция была независимой, а здесь она определяется смещением второго осциллятора x_2 , входящего в кольцо. В общем случае такую функцию можно рассматривать как вынуждающую силу, но не в чистом виде, а будучи умноженной на x_1^2 . Более подробное исследование таких вынужденных колебаний, по-видимому, может составить предмет для отдельной работы.

12.3. Кольцо в системе Лоренца

В предыдущих разделах рассмотрено кольцевое воздействие двух осцилляторов друг на друга, состоящее в прохождении кольца последовательными шагами. Показано, что такое прохождение после определенного запаздывания порождает высокоамплитудный хаос. Можно полагать, что кольцевое взаимодействие не является специфическим свойством только одной рассматриваемой системы, но и имеет место во многих других случаях. В качестве примера приведем широко известную систему Лоренца, являющуюся классическим «генератором хаоса». Эта система многократно приводится во множестве учебников, например в [2, стр. 260, форм. (1.6)], [1, стр. 76, форм. (4.66)], а также стр. 101, 177, 401], [4, лекция 3, стр. 43–55]:

$$\dot{x} = \sigma(y - x); \quad (12.14)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz; \quad (12.15)$$

$$\dot{z} = -bz + xy. \quad (12.16)$$

Здесь имеется три уравнения первого порядка, причем можно полагать, например, что y в первом уравнении определяется через x посредством второго, то есть некоторое кольцо уже есть, но в него «вклинена» дополнительная переменная z , которая сама задается третьим уравнением через посредство сразу двух переменных x и y . Таким образом, переплетение получается довольно сложным, ни одно уравнение не имеет колебательного характера и простое кольцо не просматривается.

Однако систему трех уравнений (12.14)–(12.16) можно привести к двум уравнениям, из которых по крайней мере одно является колебательным [4, 124]. Сделаем это, следуя [4, стр. 54–55].

Введем новую переменную u , связанную с z и x соотношением:

$$z = \frac{u + x^2}{2\sigma}. \quad (12.17)$$

Продифференцируем это выражение по t , подставим в (12.16) и освободимся от дроби (полагая $\sigma \neq 0$):

$$\dot{u} + 2x\dot{x} = -bu - bx^2 + 2\sigma yx. \quad (12.18)$$

Подставляя в это выражение \dot{x} в соответствии с (12.14) и выполняя приведение подобных членов, получаем:

$$\dot{u} = -bu + (2\sigma - b)x^2. \quad (12.19)$$

Теперь разрешим (12.14) относительно y :

$$y = \frac{\dot{x}}{\sigma} + x. \quad (12.20)$$

Дифференцируя это выражение, получаем:

$$\dot{y} = \frac{\ddot{x}}{\sigma} + \dot{x}. \quad (12.21)$$

Подставим далее в уравнение (12.15) выражения (12.21), (12.20) и (12.17), чем будет достигнуто исключение из него переменной y . В результате после приведения подобных членов и освобождения от дробей, содержащих σ , получаем:

$$\ddot{x} + (\sigma + 1)\dot{x} - \sigma(r - 1)x + \frac{x^3}{2} + \frac{xu}{2} = 0. \quad (12.22)$$

Итак, получены два уравнения (12.22) и (12.19), содержащие только две переменные x и u . Выпишем их еще раз в виде единой системы:

$$\ddot{x} + (\sigma + 1)\dot{x} - \sigma(r - 1)x + \frac{x^3}{2} + \frac{xu}{2} = 0; \quad (12.23)$$

$$\dot{u} + bu - (2\sigma - b)x^2 = 0. \quad (12.24)$$

Можно видеть, что записанная таким образом система Лоренца является частным случаем общей системы (12.1)–(12.2), в которой выполнена замена переменных $x_1 \rightarrow x$, $x_2 \rightarrow u$, а все отличные от нуля коэффициенты равны:

$$a_{11} = 1; \quad a_{12} = (\sigma - 1); \quad a_{13} = -(r - 1); \quad b_{11} = 1/2; \quad d_{12} = 1/2,$$

а также

$$a_{22} = 1; \quad a_{23} = b; \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0.$$

В полученной системе (12.23)–(12.24) хорошо просматривается кольцевой характер. Так, второе уравнение связано с первым через содержащее x слагаемое $-(2\sigma - b)x^2$, а первое со вторым через слагаемое $xu/2$.

Потенциал для первого уравнения имеет вид:

$$U = \frac{1}{8}x^4 - \frac{\sigma(r - 1)}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2u. \quad (12.25)$$

Можно видеть, что два первых слагаемых обеспечивают симметрично расположенные два минимума (подобно потенциалу на рис. 4, a в работе [32]), а третье при положительном значении u может свести эти минимумы вместе и обратить в один, а при отрицательном углубляет оба. Таким образом, потенциал является динамическим и имеет «прыжковый» характер, однако в отличие от прыжкового потенциала, рассмотренного в работе [33, форм. (8)], здесь прыжки совершаются не с правой стороны на левую симметрично относительно центра, в вверх-вниз, оставляя потенциал симметричным, но меняя один минимум на два и обратно.

Согласно [4, стр. 54–55], именно такой характер потенциала является причиной образования хаоса в системе Лоренца. При этом говорится, что система совершает колебания «в одной из потенциальных ям с перебросом время от времени в другую яму, благодаря изменению величины u и, соответственно, формы потенциала». Кольцевой характер колебаний в сочетании с динамическим характером потенциала

там же описывается фразой: «в нашей системе u не является параметром в обычном смысле слова, а переменной, подчиняющейся уравнению (12.24). Она отслеживает изменение во времени величины x^2 , но не мгновенно, а с инерцией и сглаживанием, которые количественно определяются параметром b ». Здесь под «параметром b » имеется в виду второе слагаемое в уравнении (12.24).

Таким образом, можно видеть, что система Лоренца в записи (12.23)–(12.24) имеет четко выраженный кольцевой характер.

12.3.1. Сравнение системы Лоренца с системой для двух осцилляторов

Чтобы перейти к привычным для настоящего рассмотрения категориям, положим, что первое уравнение (12.23) соответствует первому осциллятору, а второе, то есть (12.24) — второму. Введем новые обозначения переменных: $x \rightarrow x_1$, $u \rightarrow x_2$. При этом система (12.23)–(12.24) принимает вид:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + (\sigma + 1) \frac{dx_1}{dt} - \sigma(r - 1)x_1 + \frac{x_1^3}{2} + \frac{x_1 x_2}{2} = 0; \quad (12.26)$$

$$\frac{dx_2}{dt} + bx_2 - (2\sigma - b)x_1^2 = 0. \quad (12.27)$$

Записанную в таком виде систему Лоренца удобно сравнить с основной рассматриваемой здесь системой (12.7)–(12.8):

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (12.28)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \gamma_2 x_1 = 0, \quad (12.29)$$

которая, согласно [31–33], обеспечивает возбуждение высокоамплитудного хаоса с запаздыванием.

В обеих системах первое уравнение содержит кубическую нелинейность. Слагаемые уравнения (12.26), содержащие dx_1/dt и x_1 отражают диссипацию и частоту первого осциллятора, так что решающего значения для реализации хаоса и запаздывания не имеют. В самом деле, диссипация в умеренных пределах способна лишь снижать амплитуду, а нейтральная роль второго слагаемого установлена в работе [31]. Однако слагаемое нелинейной связи $x_1 x_2/2$ здесь принципиально отлично от такового в уравнении (12.27). В уравнении (12.26) оно пропорционально x_1 в первой степени, а в уравнении (12.27) — во второй.

Уравнение (12.26) принципиально отличается от (12.28) тем, что имеет лишь первый порядок вместо второго, а слагаемое связи здесь является нелинейным, пропорциональным x_1^2 , тогда как в (12.28) оно линейно и пропорционально лишь x_1 .

Рассмотрим теперь развитие колебаний во времени, обеспечиваемое системой (12.26)–(12.27). Для работы методом Рунге–Кутты сведем

систему (12.26)–(12.27) к трем уравнения первого порядка, для чего введем вспомогательную переменную x_3 с помощью соотношения:

$$x_3 = \frac{dx_1}{dt}. \quad (12.30)$$

При этом система (12.26)–(12.27) становится эквивалентной трем уравнениям первого порядка:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_3; \quad (12.31)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -bx_2 + (2\sigma - b)x_1^2. \quad (12.32)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -(\sigma + 1)x_3 + \sigma(r - 1)x_1 - \frac{x_1^3}{2} - \frac{x_1x_2}{2}. \quad (12.33)$$

Здесь основными переменными остаются x_1 и x_2 , а переменная x_3 является производной от x_1 по времени. Дополнительной производной от x_2 по времени (то есть еще одной переменной типа x_4) здесь нет, так как уравнение (12.27) имеет лишь первый порядок.

Решение системы (12.31)–(12.33) методом Рунге–Кутты позволяет получить колебания смещения первого осциллятора, представленные на рис. 12.3. Параметры положены равными классическому набору параметров Лоренца (см. напр. [1, стр. 178], [2, стр. 260]): $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$. Минимумы потенциала (12.25), приходящиеся на $x_1 = \pm 8,6$ ед., отмечены на рис. 12.3, *a* горизонтальными точечными линиями.

Из рис. 12.3, *a* видно, что колебаниям при времени менее 0,05 ед. предшествует весьма кратковременный резкий выброс вверх до уровня 20 ед., после чего наступает довольно длительный, вплоть до времени около 17 ед., интервал довольно регулярных колебаний с постепенно увеличивающейся амплитудой. Эти колебания происходят вблизи одного из минимумов потенциала (нижняя точечная линия). После окончания этого интервала колебания по очереди группируются вокруг верхней и нижней точечных линий, что соответствует перескоку осциллятора от одного минимума потенциала к другому. Эти перескоки уже происходят в случайном порядке, что и представляет собой классический хаос Лоренца. Производная, приведенная на рис. 12.3, *б*, также до времени около 17 ед. имеет довольно регулярный характер, после чего становится хаотической. Параметрический портрет, приведенный на рис. 12.3, *в*, имеет вид горизонтальной восьмерки, соответствующей двум симметричным минимумам потенциала.

Сравнение приведенных разверток с таковыми для системы двух осцилляторов (12.28)–(12.29), пример которых можно найти, например, на рис. 11 в работе [31], а также на сходных рисунках в работах [32, 33], показывает, что в системе Лоренца запаздывание, типичное для системы (12.28)–(12.29), отсутствует.

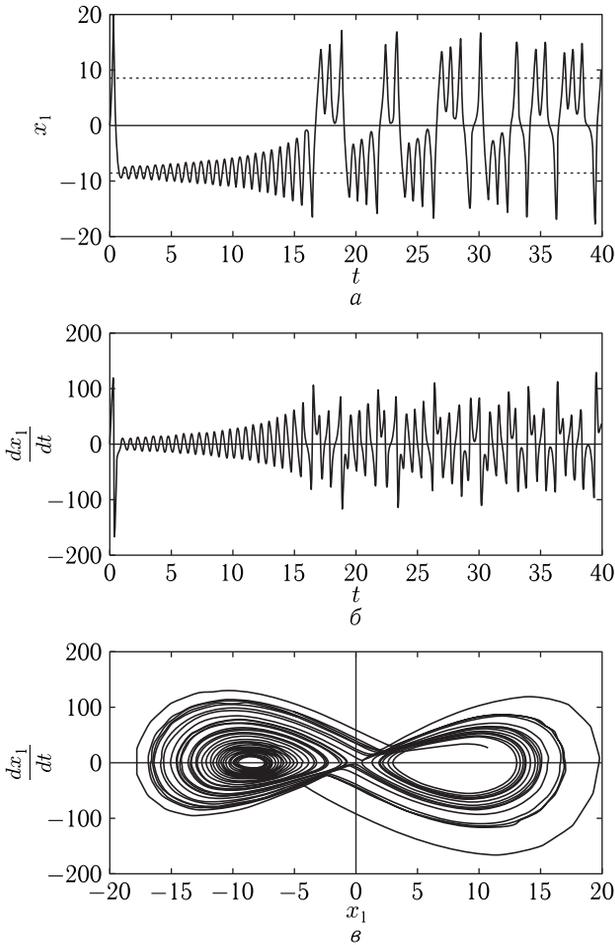


Рис. 12.3. Колебания в системе Лоренца, представленной в виде уравнений (12.26)–(12.27) или (12.31)–(12.33): *a* — колебания смещения первого осциллятора; *б* — производная от колебаний смещения первого осциллятора; *в* — параметрический портрет. Горизонтальными точечными линиями на верхнем рисунке отмечены минимумы потенциала (12.25). Параметры: $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$. Начальное смещение $x_{10} = 1$. Шаг развертки по времени 0,02 ед.

В самом деле, колебания развиваются сразу вблизи одного из минимумов потенциала, а не вблизи нуля, как для системы (12.28)–(12.29). В то же время, амплитуда высокоамплитудного хаоса, развивающегося на рис. 12.3, *a* после времени 17 ед. как раз соответствует минимумам потенциала, как и для системы (12.28)–(12.29). Можно полагать, что такое сходство амплитуд хаоса определяется близким по структуре динамическим характером потенциала для обеих систем, в обоих случаях

имеющим два симметричных минимума, реализуемых в соответствии с «прыжками» амплитуды второго осциллятора.

Что касается запаздывания, то в системе Лоренца следует отметить начальный интервал развития колебаний до времени 17 ед., где они имеют регулярный характер, то есть хаос отсутствует. Изменение шага развертки по времени при расчете методом Рунге–Кутты (по крайней мере, от величины 0,02 ед. в сторону ее уменьшения на порядок и более) характер колебаний в этом интервале не меняет, тогда как хаос, то есть времена перескока от одного минимума к другому, меняются весьма значительно. Такое поведение колебаний в этом интервале роднит его с неизменностью интервала запаздывания, представленного на рис. 8 в гл. 10. Для терминологической характеристики этого интервала его можно назвать «интервалом регулярного развития» или короче — «интервалом регулярности».

В гл. 10–11 установлено, что в уравнении для первого осциллятора (12.28) главным ингредиентом, ответственным за эффект запаздывания является слагаемое, содержащее $x_1^2 x_2$. Можно полагать, что в первом уравнении системы Лоренца (12.26) главную роль в формировании интервала регулярности играет слагаемое, содержащее $x_1 x_2$. Различие состоит в показателе степени смещения первого осциллятора x_1 , что и приводит к различию начального этапа развития колебаний.

Резюмируя сказанное, можно отметить, что классическая система Лоренца, записанная в виде (12.26)–(12.27), имеет кольцевой характер, подобный таковому в системе (12.28)–(12.29), причем развитие высокоамплитудного хаоса сопровождается задержкой в виде интервала регулярности, подобной задержке в системе (12.28)–(12.29) в виде интервала запаздывания.

12.4. Возможные способы решения релаксационной системы уравнений для двух осцилляторов

Вернемся от системы Лоренца к основной для настоящего рассмотрения релаксационной системе для двух связанных осцилляторов (12.7)–(12.8):

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (12.34)$$

$$\frac{d^2 x_2}{d t^2} + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (12.35)$$

Система состоит из двух дифференциальных уравнений, связанных друг с другом. Для решения дифференциальных уравнений подобного типа, по-видимому, наиболее часто используются два подхода.

Первый — использование подстановочной функции, с помощью которой система приводится к состоянию, не содержащему дифференцирования. Так, для линейного дифференциального уравнения

с постоянными коэффициентами такой подстановочной функцией является экспонента, которая при дифференцировании остается неизменной, так что исходное дифференциальное уравнение приводится к алгебраическому, разрешимому (по крайней мере, до четвертой степени) алгебраическими методами. Вариантом такого подхода является решение уравнения с помощью разложения в ряд, так что подстановочными функциями являются члены ряда.

Второй — использование численного метода, при котором решение находится путем последовательного прохождения по шагам, начиная с некоторого начального значения, таким образом, что на каждом последующем шаге используется значение искомой функции, полученное на предыдущем. Вариантом такого подхода является метод Рунге–Кутты.

Выгодный аспект первого подхода состоит в том, что задача решается в единый момент времени, так что решение относительно времени является непрерывным. При втором подходе решение получается шагами в следующие друг за другом моменты времени, то есть непрерывная функция заменяется ломаной, которая должна приближаться к истинной при бесконечно малом уменьшении шага. Такое приближение становится проблематичным при фрактальном характере зависимости, так что здесь достаточно подробно могут быть определены только статистические характеристики исследуемого процесса. В этом случае применение первого подхода, по-видимому, недопустимо, так что единственным вариантом является применение пошагового метода.

12.4.1. Сведение релаксационной системы к единому уравнению

Рассмотрим еще одну возможность подхода к решению системы (12.34)–(12.35), которая может привести к упрощению задачи.

Релаксационная система (12.34)–(12.35) содержит две переменных x_1 и x_2 , чему соответствуют два уравнения второго порядка. Таким образом, при решении надо одновременно искать две неизвестных, то есть решать сразу два уравнения. Можно полагать, что исключение одной из переменных позволит свести систему к одному уравнению, содержащему оставшуюся переменную. По-видимому, проще всего исключить смещение второго осциллятора x_2 , так что останется смещение только первого осциллятора x_1 . Покажем, как это можно сделать.

Итак, релаксационная система для двух связанных осцилляторов имеет вид:

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (12.36)$$

$$\frac{d^2 x_2}{d t^2} + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (12.37)$$

Введем новые обозначения переменных x_1 , x_2 и параметра γ_2 :

$$x_1 \rightarrow x, \quad x_2 \rightarrow y, \quad \gamma_2 \rightarrow \gamma.$$

Система принимает вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta x^3 + \eta x^2 y = 0; \quad (12.38)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma x = 0. \quad (12.39)$$

Умножим первое уравнение на x^{-2} и пересеем последнее слагаемое в правую часть:

$$x^{-2} \frac{d^2x}{dt^2} + \delta x = -\eta y. \quad (12.40)$$

Продифференцируем левую часть по t :

$$\frac{d}{dt} \left(x^{-2} \frac{d^2x}{dt^2} + \delta x \right) = -2x^{-3} \frac{d^2x}{dt^2} + x^{-2} \frac{d^3x}{dt^3} + \delta \frac{dx}{dt}. \quad (12.41)$$

Продифференцируем еще раз и запишем в порядке убывания порядка производных:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(x^{-2} \frac{d^2x}{dt^2} + \delta x \right) = x^{-2} \frac{d^4x}{dt^4} - 4x^{-3} \frac{d^3x}{dt^3} + 6x^{-4} \frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (12.42)$$

Продифференцируем правую часть уравнения (12.40) по t два раза:

$$\frac{d^2}{dt^2} (-\eta y) = -\eta \frac{d^2y}{dt^2}. \quad (12.43)$$

Приравнявая (12.42) и (12.43), приводя подобные члены и перенося все в левую часть, получаем:

$$x^{-2} \frac{d^4x}{dt^4} - 4x^{-3} \frac{d^3x}{dt^3} + (\delta + 6x^{-4}) \frac{d^2x}{dt^2} - \gamma \eta x = 0. \quad (12.44)$$

Умножаем на x^2 :

$$\frac{d^4x}{dt^4} - 4x^{-1} \frac{d^3x}{dt^3} + (\delta x^2 + 6x^{-2}) \frac{d^2x}{dt^2} - \gamma \eta x^3 = 0. \quad (12.45)$$

Это уравнение содержит только одну переменную x .

Однако, поскольку ожидается, что x будет иметь колебательный характер, то есть периодически проходить через нуль, то сдвинем средний уровень ожидаемых колебаний на постоянную положительную величину b , полагая, что эта величина всегда будет больше любого значения x , то есть выполняются условия: $b > 0$, $b > |x_{\max}|$.

То есть произведем замену переменных:

$$x \rightarrow x + b. \quad (12.46)$$

При этом уравнение (12.45) принимает вид:

$$\frac{d^4x}{dt^4} - \frac{4}{(x+b)} \frac{d^3x}{dt^3} + \left[\delta(x+b)^2 + \frac{6}{(x+b)^2} \right] \frac{d^2x}{dt^2} - \gamma \eta (x+b)^3 = 0 \quad (12.47)$$

или в записи без дробей

$$\frac{d^4 x}{dt^4} - 4(x+b)^{-1} \frac{d^3 x}{dt^3} + [\delta(x+b)^2 + 6(x+b)^{-2}] \frac{d^2 x}{dt^2} - \gamma\eta(x+b)^3 = 0. \quad (12.48)$$

При решении этого уравнения начальное смещение x_0 надо отсчитывать от значения b , то есть

$$(x+b)_0 = x_0 + b. \quad (12.49)$$

Можно полагать, что решение уравнения (12.47) будет обладать свойствами возбуждения высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием.

Из структуры этого уравнения видно, что использование какой-либо достаточно простой подстановочной функции здесь вряд ли возможно, так что по-прежнему единственной возможностью решения остается пошаговый метод Рунге–Кутты. Приведем вкратце схему такого решения.

Прежде всего введем новые переменные u , v , w с помощью соотношений

$$u = \frac{dx}{dt}; \quad (12.50)$$

$$v = \frac{du}{dt}; \quad (12.51)$$

$$w = \frac{dv}{dt}. \quad (12.52)$$

При этом

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = v; \quad (12.53)$$

$$\frac{d^3 x}{dt^3} = w. \quad (12.54)$$

С помощью этих соотношений уравнение (12.47) (или (12.48)) приводим к системе уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = u; \quad (12.55)$$

$$\frac{du}{dt} = v; \quad (12.56)$$

$$\frac{dv}{dt} = w; \quad (12.57)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{4}{(x+b)}w - \left[\delta(x+b^2) + \frac{6}{(x+b)^2} \right] v + \gamma\eta(x+b)^3. \quad (12.58)$$

Эта система содержит четыре уравнения первого порядка, левая часть которых представляет собой первые производные от четырех переменных x , u , v , w . То есть она имеет классический вид, требуемый для успешного применения метода Рунге–Кутты [54, стр. 707].

Замечание. В рамках настоящей работы авторы не занимаются подробным анализом уравнения (12.47), а лишь ограничиваются констатацией факта его достаточной сложности, требующей применения пошагового метода. Более подробному изучению этого уравнения авторы предполагают посвятить отдельную работу.

12.5. Кольцевой характер релаксационной системы

Рассмотрим теперь более подробно кольцевой характер релаксационной системы (12.34)–(12.35):

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (12.59)$$

$$\frac{d^2 x_2}{d t^2} + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (12.60)$$

Как показано в предыдущих разделах, такая система должна решаться пошаговым методом, в качестве которого достаточно удобно использовать метод Рунге–Кутты. При этом на каждом шаге вычисляются новые значения обоих переменных x_1 и x_2 по их значениям, полученным на предыдущем шаге.

Однако кольцевой характер системы (12.59)–(12.60) позволяет предположить возможность расчета несколько иным методом. Так, сначала в первом уравнении вычисляется переменная x_1 . При этом значение x_2 предполагается известным. Далее по полученному значению x_1 из второго уравнения определяется переменная x_2 . Это значение x_2 подставляется в первое уравнение, из которого снова вычисляется x_1 , так что процесс повторяется.

Приведем алгоритм решения. Предварительное действие — задание x_2 . Далее — выполнение последовательных шагов.

Шаг № 1.

Вычисление x_1 из первого уравнения. При этом x_2 предполагается заданным.

Шаг № 2.

Подстановка полученного значения x_1 во второе уравнение.

Шаг № 3.

Решение второго уравнения, нахождение значения x_2 , определяемого подставленным значением x_1 .

Шаг № 4.

Подстановка полученного значения x_2 в первое уравнение.

Шаг № 5.

Повторение шага № 1.

При этом на шаге № 1 и шаге № 3 надо решать дифференциальные уравнения второго порядка, что можно сделать тем же методом Рунге–Кутты, в котором будут использоваться значения переменных,

полученные на предыдущем шаге. То есть цельный метод Рунге–Кутты разбивается на две части, выполняемые последовательно.

Замечание. Предложенный здесь метод решения системы (12.59)–(12.60) приведен в качественном виде без строгого математического доказательства, в первую очередь, для обоснования кольцевого характера системы. Важность такого характера для явлений высокоамплитудного хаоса и запаздывания в общем случае будет показана далее. Тем не менее авторы полагают, что решение системы (12.59)–(12.60) предложенным методом представляет заметный интерес для рассмотрения в качестве отдельной задачи.

12.6. Обобщенные кольцевые функции

Рассмотрим теперь кольцевой характер рассматриваемой задачи в более отвлеченном виде. Для удобства приведем здесь еще раз релаксационную систему для двух осцилляторов (12.59)–(12.60):

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (12.61)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (12.62)$$

Представим уравнения системы (12.61)–(12.62) в условном виде:

первое

$$x_1 = \varphi(x_2); \quad (12.63)$$

второе

$$x_2 = \psi(x_1), \quad (12.64)$$

где $\varphi(x_2)$ и $\psi(x_1)$ — интегральные операторы, определяемые решением уравнений (12.61) и (12.62) относительно x_1 и x_2 соответственно.

В явном виде достаточно просто можно представить лишь второй из них, так как уравнение (12.62) можно решить путем двойного интегрирования:

$$x_2 = -\gamma_2 \int_t \left(\int_{\tau} x_1 d\tau + C_1 \right) dt + C_2, \quad (12.65)$$

так что

$$\psi(x_1) = -\gamma_2 \int_t \left(\int_{\tau} x_1 d\tau + C_1 \right) dt + C_2, \quad (12.66)$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования, которые могут быть определены из начальных условий. Заметим, что подстановка (12.65) в (12.61) с использованием того же приема, что в разделе 12.5, должна привести к тому же уравнению четвертого порядка (12.47).

Однако, несмотря на успешное решение уравнения (12.62), разрешить подобным путем уравнение (12.61) не удастся. Так что будем считать выражение (12.66) приведенным здесь для иллюстрации и обратимся к дальнейшему обобщению задачи.

Итак, из системы (12.63)–(12.64) видно, что она имеет кольцевой характер. То есть во втором уравнении (12.64) участвует переменная x_1 , определяющая через посредство функции ψ переменную x_2 . В свою очередь эта переменная через функцию φ , входящую в первое уравнение (12.63) определяет переменную x_1 , которая далее поступает в правую часть уравнения (12.64) и так далее по кругу.

Подстановка (12.64) в (12.63) позволяет свести задачу к одному уравнению относительно x_1 :

$$x_1 = \varphi[\psi(x_1)]. \quad (12.67)$$

Будем называть уравнение такого вида «кольцевым уравнением», а его решение — «кольцевой функцией».

Уравнение (12.67) можно представить в обобщенном виде:

$$x = F(x). \quad (12.68)$$

Здесь левая часть, то есть сама переменная, определяется функцией от той же переменной. В случае колебательного процесса амплитуда колебаний определяется функцией от той же амплитуды, в чем и состоит кольцевой характер функции (12.68).

В общем случае кольцевая функция подразумевает одновременное существование левой и правой частей кольцевого уравнения в единый момент времени. Однако так хорошо получается только в том случае, если уравнение вида (12.68) можно разрешить в аналитическом виде. Но, как показано выше, уравнение (12.61) представить в виде (12.63) затруднительно, так что и (12.68) разрешить вряд ли удастся, поэтому приходится прибегать к численным методам, подразумевающим пошаговое решение.

В этом случае используется метод пошаговых трансформаций, так что левая часть определяется при подстановке в правую часть значения переменной, полученное на предыдущем шаге:

$$x_{n+1} = F(x_n). \quad (12.69)$$

Для такого расчета можно использовать любой метод численного решения дифференциальных уравнений, например метод Рунге–Кутты.

12.7. Пошаговый характер расчета отображения

Математическая конструкция вида, подобного (12.69), рассматривается во многих работах. Так, в [4, стр. 15, 25] она названа «дискретным одномерным отображением» и отмечена достаточно широкая область ее применения для описания динамики биологических популяций. Аналогичные определения приведены также в [2, стр. 31–35]

и в [1, стр. 69–71, форм. (4.44)]. В большинстве случаев отображения трактуются как результат воздействия силы периодическими толчками, однако в [1] на основе «отображения последования» выполнен анализ свободных колебаний линейного осциллятора с трением [1, стр. 69, форм. (4.45)].

Достаточно широкой областью применения отображений для расчета пошагового развития процесса во времени является анализ хаоса. Так в [4, стр. 28, форм. (2.3)] метод пошагового расчета применен для описания хаотического поведения одного из наиболее простых видов отображений — так называемого «логистического» отображения, описываемого формулой:

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad (12.70)$$

где λ — параметр, определяющий характер колебаний.

На рис. 12.4 показано развитие по шагам колебаний логистического отображения (12.70) при различных значениях параметра λ .

Так, на рис. 12.4, *а* колебания являются регулярными и затухают по амплитуде. На рис. 12.4, *б* колебания сначала несколько нарастают, после чего принимают стационарную амплитуду, во всех случаях оставаясь регулярными. Однако на рис. 12.4, *в* регулярность колебаний нарушается, так что они представляют собой хаос. Преобладающим периодом здесь все же остается единица, задаваемая шагом, однако амплитуда меняется случайным образом. При значениях λ меньше приведенного здесь 0,7, характер затухающих колебаний сохраняется, однако они затухают тем быстрее, чем λ меньше. Переход от затухающего режима (рис. 12.4, *а*) к стационарному (рис. 12.4, *б*) происходит плавно: по мере увеличения λ время затухания увеличивается, устремляясь к бесконечности, где по амплитуде достигает устойчивого значения, а на начальном участке амплитуда к этому значению постепенно подтягивается. Переход от стационарного режима (рис. 12.4, *б*) к хаосу (рис. 12.4, *в*) также происходит достаточно плавно: по мере увеличения λ амплитуда регулярных колебаний сначала приобретает чередующийся через единицу характер (то есть появляется вторая гармоника), после чего, по мере усиления таких «чередований» (то есть появления дополнительных гармоник) переходит к хаосу. Максимальным допустимым значением параметра является $\lambda = 2$. При превышении этого значения система сразу после нескольких (3–4) шагов уходит на бесконечность. Величина начального смещения при значении меньше 1,0 к развитию хаоса не критична, амплитуда и характер хаоса остаются постоянными вплоть до весьма малых начальных значениях (проверено до 0,01). При начальном смещении выше 1,0 система уходит на бесконечность.

12.7.1. Замечание о возможности вариации шага расчета

Таким образом, как кольцевая функция, так и отображение имеют сходную математическую конструкцию, определяемую формулой (12.69). Для расчета в обоих случаях приходится применять пошаговую про-

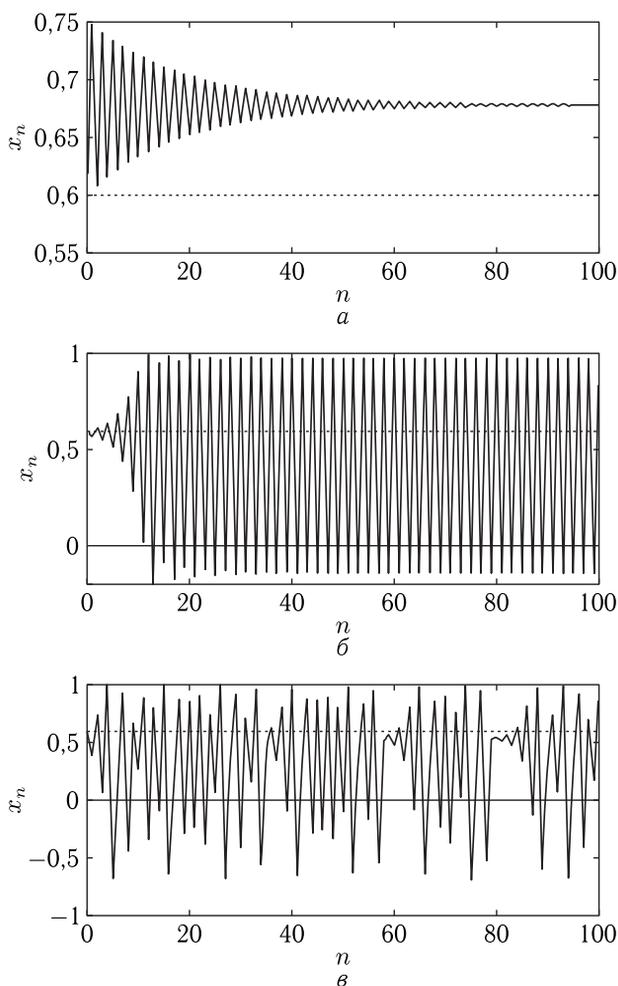


Рис. 12.4. Развитие по шагам колебаний логистического отображения (12.70) при различных значениях параметра λ : $a - 0,7$, $б - 1,2$, $в - 1,7$. Горизонтальная сплошная линия — уровень нуля, горизонтальная точечная линия — уровень начального смещения. Шаг по горизонтальной оси — единичный. Начальное смещение $x_0 = 0,6$

цедуру. Для расчета отображения традиционно используется метод итераций [1, стр. 70, рис. 4.6], [4, стр. 28, рис. 2.3], а для расчета кольцевой функции можно использовать метод Рунге–Кутты.

Однако принципиальное различие состоит в том, что отображение является дискретной функцией, а кольцевая функция — непрерывной. Так, в отображении нельзя изменить величину последовательного

шага, каждое последующее значение определяется предыдущим, отличающимся на величину одного шага. При изменении величины шага вся картина развития по шагам, подобная представленной на рис. 12.4, сжимается или растягивается как целое пропорционально изменению величины шага.

При расчете непрерывной функции, каковой в частности является кольцевая, шаг можно менять в широких пределах. Максимальная величина шага определяется условием чтобы он был меньше характерного размера неоднородности функции. Изменение шага при таком условии, в первую очередь при его уменьшении, общего характера функции не меняет: она не сжимается и не расширяется подобно отображению, а сохраняет прежний характерный размер. В случае хаоса, из-за его фрактального характера конкретный вид хаоса может меняться, однако общие статистические свойства остаются прежними.

С другой стороны, решение уравнений методом Рунге–Кутты также представляет собой последовательную пошаговую процедуру, однако отличие ее от процедуры вычисления отображения состоит в том, что метод Рунге–Кутты опирается на производные, тогда как расчет отображения — чисто дискретный, учитывает только значения функции, но не ее производную.

Важным моментом, имеющим решающее значение для настоящего рассмотрения, является полное отсутствие эффекта запаздывания для отображений (по крайней мере, для логистического). То есть в случае отображений как регулярные, так и хаотические колебания всегда развиваются с самого начала процесса дискретного увеличения переменной.

12.8. Кольцевые функции для синусоидальных колебаний

Согласно показанному в разделе 12.6, кольцевую функцию для задачи о двух осцилляторах можно представить в обобщенном виде (12.69):

$$x_{n+1} = F(x_n). \quad (12.71)$$

Здесь функция $F(x)$ имеет довольно сложный вид, вряд ли доступный аналитическому представлению в элементарных функциях (из-за сложности интегральных операторов), так что применение метода Рунге–Кутты, требующего предварительного вычисления производных, также может вызвать определенные затруднения.

Поэтому попытаемся пройти по пути максимального качественного упрощения, учитывая, что переменная x , по существу представляющая собой смещение первого осциллятора, должна иметь колебательный характер, представимый в виде тригонометрических функций типа синуса или косинуса. При этом функция $F(x)$ также должна иметь вид синуса или косинуса, зависящего от времени по закону типа $\cos(\omega t)$

или $\sin(\omega t)$, где ω — частота колебаний. Далее учтем, что правая часть уравнения (12.71), теперь имеющая вид тригонометрической функции, должна зависеть от x , так что такую зависимость введем в частоту $\omega \rightarrow \omega(x)$. Сконструированная таким образом кольцевая функция с участием косинуса принимает вид:

$$x = \cos \{ \omega(G \cdot x) \cdot t \}, \quad (12.72)$$

где G — постоянное число. Такая же функция может быть сконструирована с участием синуса.

В идеальном случае кольцевая функция должна быть определена в заданный момент времени, то есть уравнение вида (12.72) должно быть решено относительно x при заданном фиксированном значении времени t . Далее, задавая времени последовательные значения, можно получить зависимость x от t . Качественное рассмотрение графическим методом показывает, что зависимость будет иметь пилообразный характер (или несколько пил, следующих друг за другом).

Однако, по-видимому, более удобно ввести дискретное время и предположить, что значение функции в данный момент времени определяется ее значением в предыдущий момент. В этом случае зависимость такой функции от времени можно рассчитать по шагам. Для косинуса и синуса такие функции приобретают вид:

$$x_{n+1} = \cos \{ \omega(G \cdot x_n) \cdot t_n \}, \quad (12.73)$$

$$x_{n+1} = \sin \{ \omega(G \cdot x_n) \cdot t_n \}. \quad (12.74)$$

Такая методика расчета сходна с применяемой для расчета отображений (раздел 12.7).

Настоящее рассмотрение ориентировано на систему из двух связанных осцилляторов, колебания в которой имеют характер, в какой-то степени соответствующий тригонометрическим функциям (во всяком случае, может быть представлен в виде ряда по таким функциям). Можно полагать, что приведенная конструкция (12.73), (12.74) в определенной степени является средством имитации колебаний в исходной системе. Поскольку в формулах (12.73), (12.74) отсутствуют дифференциальные и интегральные операторы, следует ожидать, что расчет развития во времени таких колебаний будет значительно проще, чем метод Рунге–Кутты.

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести два вида таких функций:

кольцевые функции первого рода

$$x = \cos(\omega \cdot A \cdot t), \quad \text{где } A \rightarrow 1 + \alpha \cdot x; \quad (12.75)$$

$$x = \sin(\omega \cdot A \cdot t), \quad \text{где } A \rightarrow 1 + \alpha \cdot x; \quad (12.76)$$

кольцевые функции второго рода

$$x = \cos(\omega \cdot A \cdot t), \text{ где } A \rightarrow A + \alpha \cdot x; \quad (12.77)$$

$$x = \sin(\omega \cdot A \cdot t), \text{ где } A \rightarrow A + \alpha \cdot x. \quad (12.78)$$

Здесь α — постоянный параметр, который характеризует «эффективность» или «силу» влияния предыдущего значения кольцевой функции на последующее.

Можно ввести обобщенное обозначение для частоты:

$$\Omega = \omega \cdot A. \quad (12.79)$$

При этом для функций первого рода получаем

$$\Omega^{(1)} = \omega \cdot (1 + \alpha \cdot x). \quad (12.80)$$

Так как x определяется по шагам, то и частота также имеет пошаговый характер:

$$\Omega_n^{(1)} = \omega \cdot (1 + \alpha \cdot x_n). \quad (12.81)$$

Аналогично для функций второго рода получаем:

$$\Omega^{(2)} = \omega \cdot (A + \alpha \cdot x), \quad (12.82)$$

а также

$$\Omega_n^{(2)} = \omega \cdot (A_n + \alpha \cdot x_n), \quad (12.83)$$

где

$$A_n \rightarrow A_{n-1} + \alpha x_{n-1}. \quad (12.84)$$

Принципиальное различие здесь состоит в том, что частота для функций первого рода просто определяется величиной смещения, а для функций второго рода еще и зависит от величины A_n , определяемой смещением на предыдущем шаге.

В символическом обобщении кольцевые функции приобретают вид

$$x = \cos(\Omega^{(1),(2)}t); \quad (12.85)$$

$$x = \sin(\Omega^{(1),(2)}t), \quad (12.86)$$

что еще больше их роднит с колебательными решениями волновых уравнений.

Из (12.81), (12.83) можно видеть, что в обоих случаях обобщенная частота Ω_n получается пропорциональной смещению x_n , причем для функции первого рода пропорциональность получается линейной, а для функции второго рода еще и зависящей от величины A_n , которая на каждом шаге увеличивается в соответствии с (12.84).

Следует заметить, что, согласно показанному в работе [35], линейная зависимость частоты от амплитуды свойственна решению уравнения с кубической нелинейностью вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta x^3 = 0, \quad (12.87)$$

которое составляет основу первого уравнения системы (12.34)–(12.35). Таким образом, здесь имеет место еще одна аналогия свойств кольцевых функций с задачей о двух связанных осцилляторах.

Как отмечено в разделе 12.2, основная рассматриваемая здесь система для двух связанных осцилляторов (12.34)–(12.35), по своей структуре обладает кольцевым свойством. В то же время, такая система способна описать возбуждение высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием. Можно предполагать, что кольцевые функции, имеющие колебательный характер, также смогут в какой-то степени описать высокоамплитудный хаос с запаздыванием, то есть обеспечить достаточно наглядную и простую имитацию этих явлений.

В связи с этим дальнейшим шагом настоящей работы будет рассмотрение колебаний, описываемых кольцевыми функциями первого и второго рода, которое выполнимо для обеих функций по отдельности. Главной задачей будет демонстрация возможности имитации возбуждения высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием на основе кольцевых функций.

12.8.1. Кольцевые функции первого рода

В качестве имитационных кольцевых функций первого рода выберем следующие:

$$x_{n+1}^{(C)} = \cos [(1 + \alpha x_n^{(C)})(t_n + \Delta t)], \quad (12.88)$$

$$x_{n+1}^{(S)} = \sin [(1 + \alpha x_n^{(S)})(t_n + \Delta t)]. \quad (12.89)$$

Параметры α и Δt полагаются заданными. Начало расчета соответствует $n = 0$. При этом время $t_0 = 0$, а также смещение $x_0^{(C,S)} = 0$. Частота ω здесь в явном виде не участвует, а периодичность функций во времени обеспечивает комбинация

$$\omega_n^{(C,S)} = 1 + \alpha x_n^{(C)}, \quad (12.90)$$

которую можно условно назвать «текущей частотой».

Алгоритм вычисления значений t , ω , x для двух последовательных шагов n и $n + 1$ имеет следующий вид.

Шаг n :

Получение с предыдущего шага: $t = t_n$; $\omega = \omega_n$.

Вычисление: $x_n = \cos(\omega_n t_n)$.

Вывод: t_n , ω_n , x_n .

Вычисление: $\omega_{n+1} = 1 + \alpha x_n$, $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.

Переход к следующему шагу.

Шаг $n + 1$:

Получение с предыдущего шага: $t = t_{n+1}$; $\omega = \omega_{n+1}$.

Вычисление: $x_{n+1} = \cos(\omega_{n+1} t_{n+1})$.

Вывод: t_{n+1} , ω_{n+1} , x_{n+1} .

Вычисление: $\omega_{n+2} = 1 + \alpha x_{n+1}$; $t_{n+2} = t_{n+1} + \Delta t$.

Переход к следующему шагу.

Для простоты обозначений функции (12.88) и (12.89) далее будем записывать в виде

$$x_C = \cos [(1 + \alpha x_C)t], \quad (12.91)$$

$$x_S = \sin [(1 + \alpha x_C)t]. \quad (12.92)$$

Рассмотрим развитие этих функций во времени, для чего обратимся к рис. 12.5.

На рис. 12.5, *а* и рис. 12.5, *б* приведены развертки по времени имитационных колебаний, имеющих вид косинуса (12.88) и синуса (12.89). Видно, что в обоих случаях на начальном участке вплоть до 15 ед. времени развиваются почти регулярные высокоамплитудные колебания, период которых составляет около 6 ед. времени, что в 60 раз больше величины шага по времени. Можно видеть, что при принятых параметрах этот период близок к таковому, определяемому частотой $1 + \alpha x_{C,S} \approx 1$, то есть 2π . Колебания, соответствующие кольцевой функции синуса, близки к синусу, а соответствующие кольцевой функции косинуса — к косинусу. Амплитуда колебаний составляет ± 1 , что характерно для косинуса и синуса.

После 15 ед. времени развиваются высокоамплитудные почти хаотические колебания. Здесь слегка прослеживается некоторая регулярность с тем же периодом 6 ед., однако хаотическая составляющая колебаний значительно преобладает, увеличиваясь со временем. Максимальная амплитуда колебаний здесь также равна ± 1 , однако присутствует множество колебаний значительно меньшей амплитуды. Проверка показывает, что такие высокоамплитудные хаотические колебания продолжают далее при любой протяженности времени.

На рис. 12.5, *в* том же масштабе по времени показана разность колебаний $x_C - x_S$. Видно, что до момента времени 15 ед. разность также претерпевает медленные колебания, период которых составляет те же 6 ед. После этого времени колебания приобретает хаотичность, по амплитуде даже более заметно выраженную, чем на предыдущих рисунках. Амплитуда колебаний и здесь иногда достигает ± 2 ед., что соответствует случайным совпадениям фаз колебаний X_C и X_S .

На рис. 12.5, *г* показан параметрический портрет, образованный колебаниями x_C и x_S , в которых параметром является время. Видно, что траектории хаотическим образом заметают квадрат со сторонами, равными ± 1 , что соответствует полным амплитудам синуса и косинуса.

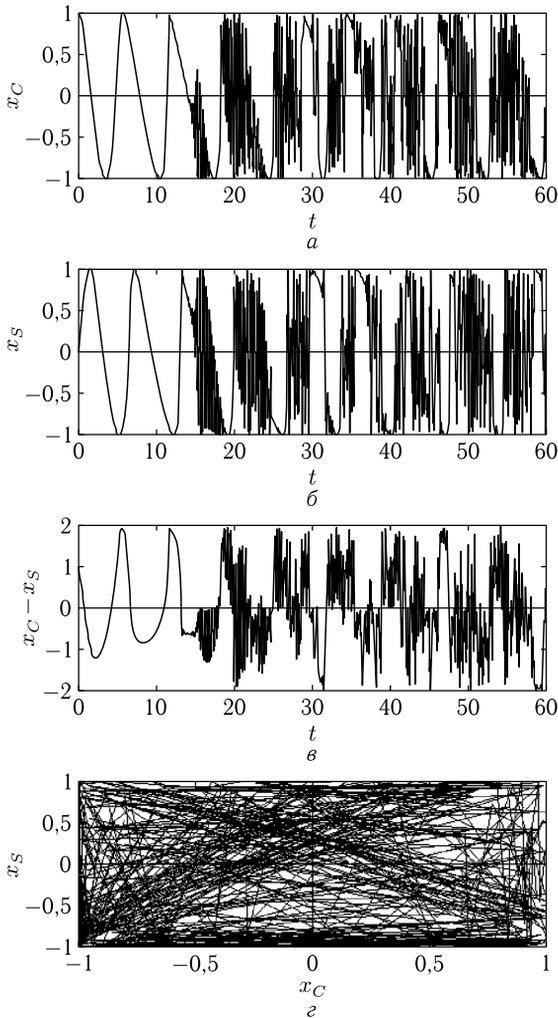


Рис. 12.5. Развитие во времени и параметрический портрет имитационных колебаний: $a - x_C = \cos [(1 + \alpha x_C)t]$; $б - x_S = \sin [(1 + \alpha x_C)t]$; $в - x_C - x_S$; $г -$ параметрический портрет $x_S(x^C)$. Параметры: $\alpha = 0,1$; $\Delta t = 0,1$

Какой-либо упорядоченности в геометрии траекторий не наблюдается. Проверка показывает, что при увеличении времени хаотические траектории полностью застилают квадрат ± 1 , так что свободных участков на нем не остается.

Таким образом, из рис. 12.5 видно, что переход от регулярных к хаотическим колебаниям происходит с запаздыванием, продолжающимся от нуля до 15 ед. времени. Однако в режиме запаздывания амплитуда

колебаний имеет тот же порядок, что и после него, то есть в режиме хаоса. По этому параметру свойства запаздывания существенным образом отличаются от таковых для запаздывания в системе двух связанных осцилляторов, где в режиме запаздывания амплитуда почти на полтора-два порядка меньше амплитуды в режиме хаоса.

12.8.2. Кольцевые функции второго рода

В качестве имитационных кольцевых функций второго рода выберем следующие:

$$x_{n+1}^{(C)} = \cos [(\omega_n^{(C)} + \alpha x_n^{(C)})(t_n + \Delta t)]; \quad (12.93)$$

$$x_{n+1}^{(S)} = \sin [(\omega_n^{(S)} + \alpha x_n^{(S)})(t_n + \Delta t)], \quad (12.94)$$

где

$$\omega_n^{(C,S)} = \omega_{n-1}^{(C,S)} + \alpha x_{n-1}^{(C,S)}. \quad (12.95)$$

Параметры α и Δt полагаются заданными. Начало расчета соответствует $n = 0$. При этом время $t_0 = 0$, а также смещение $x_0^{(C,S)} = 0$. Для обеспечения единства с функциями первого рода начальное значение частоты ω_0 в обоих случаях удобно выбрать равным единице, то есть положить $\omega_0^{(C,S)} = 1$. При этом значение $x_1^{(C,S)}$ вычисляется по формулам (12.93) или (12.94), в которые подставляются $\omega_0^{(C,S)}$, $x_0^{(C,S)}$, t_0 . На следующем шаге, то есть при $n = 1$, значение $\omega_1^{(C,S)}$ вычисляется по формуле (12.95), которое подставляется далее в формулы (12.93) или (12.94). Далее процесс циклически повторяется.

Проверка показывает, что выбор $\omega_0^{(C,S)} = 1$ не является безусловным, так как он сказывается только на начальном участке развития колебаний, когда их форма еще близка к синусоидальной. Далее, то есть после прохождения такого участка, колебания при любом выборе ω_0 развиваются совершенно одинаковым образом. Следует заметить, однако, что в формуле (12.94) начальное значение ω_0 должно быть отличным от нуля, так как в противном случае величина $x_n^{(S)}$ при любом времени получается равной нулю. В остальном выбор ω_0 в известной степени может быть произвольным.

Алгоритм вычисления значений t , ω , x для двух последовательных шагов n и $n + 1$ имеет следующий вид.

Шаг n :

Получение с предыдущего шага: $t = t_n$; $\omega = \omega_n$.

Вычисление: $x_n = \cos(\omega_n t_n)$.

Вывод: t_n , ω_n , x_n .

Вычисление: $\omega_{n+1} = \omega_n + \alpha x_n$; $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.

Переход к следующему шагу.

Шаг $n + 1$:

Получение с предыдущего шага: $t = t_{n+1}$; $\omega = \omega_{n+1}$.

Вычисление: $x_{n+1} = \cos(\omega_{n+1} t_{n+1})$.

Вывод: t_{n+1} , ω_{n+1} , x_{n+1} .

Вычисление: $\omega_{n+2} = \omega_{n+1} + \alpha x_{n+1}$; $t_{n+2} = t_{n+1} + \Delta t$.

Переход к следующему шагу.

Для простоты обозначений функции (12.93) и (12.94) далее будем записывать в виде

$$x_C = \cos [(\omega + \alpha x_C)t]; \quad (12.96)$$

$$x_S = \sin [(\omega + \alpha x_S)t]. \quad (12.97)$$

Рассмотрим развитие этих функций во времени, для чего обратимся к рис. 12.6.

На рис. 12.6, *а* и рис. 12.6, *б* приведены развертки по времени имитационных колебаний, имеющих вид косинуса (12.96) и синуса (12.97). Видно, что в обоих случаях, кроме начального участка, полностью релаксирующего ко времени 10 ед., амплитуда смещения падает практически до нуля и остается таковой вплоть до времени 25 ед., что и представляет собой ярко выраженный эффект запаздывания. После этого происходит резкий рост амплитуды колебаний практически до единицы, то есть до максимальной величины, доступной синусу или косинусу. В промежутке времени от 26 до 38 ед. колебания носят упорядоченный характер, после чего резко переходят в хаос такой же амплитуды. Проверка показывает, что такие высокоамплитудные хаотические колебания продолжаются далее при любой протяженности времени.

На рис. 12.6, *в* в том же масштабе по времени показана разность колебаний $x_1 - x_2 = \cos [(\omega + \alpha x_1)t] - \sin [(\omega + \alpha x_2)t]$. Видно, что до момента времени 25 ед. разность равна нулю (кроме небольшого начального участка релаксации). В этом месте наблюдается небольшой короткий всплеск, после которого до времени 30 ед. колебаний x_1 и x_2 снова равняются друг другу. Такое равенство нулю соответствует участку регуляризации колебаний на развертках (*а*) и (*б*), то есть здесь колебания полностью идентичны. Далее со времени 38 ед. развивается хаос, то есть x_1 и x_2 уже не повторяют друг друга, а отличаются случайным образом, то есть хаос для синуса и косинуса полностью различается. Амплитуда колебаний и здесь иногда достигает ± 2 ед., что соответствует случайным совпадениям фаз колебаний x_1 и x_2 .

На рис. 12.6, *г* показан параметрический портрет, образованный колебаниями x_1 и x_2 , в которых параметром является время. Видно, что траектории хаотическим образом заметают квадрат со сторонами, равными ± 1 , что соответствует полным амплитудам синуса и косинуса. Какой-либо упорядоченности в геометрии траекторий не наблюдается, кроме в некоторой степени выделенной диагонали, образованной участками разверток, где они имеют регулярный характер. Проверка показывает, что при увеличении времени хаотические траектории полностью заметают квадрат ± 1 , так что свободных участков на нем не остается.

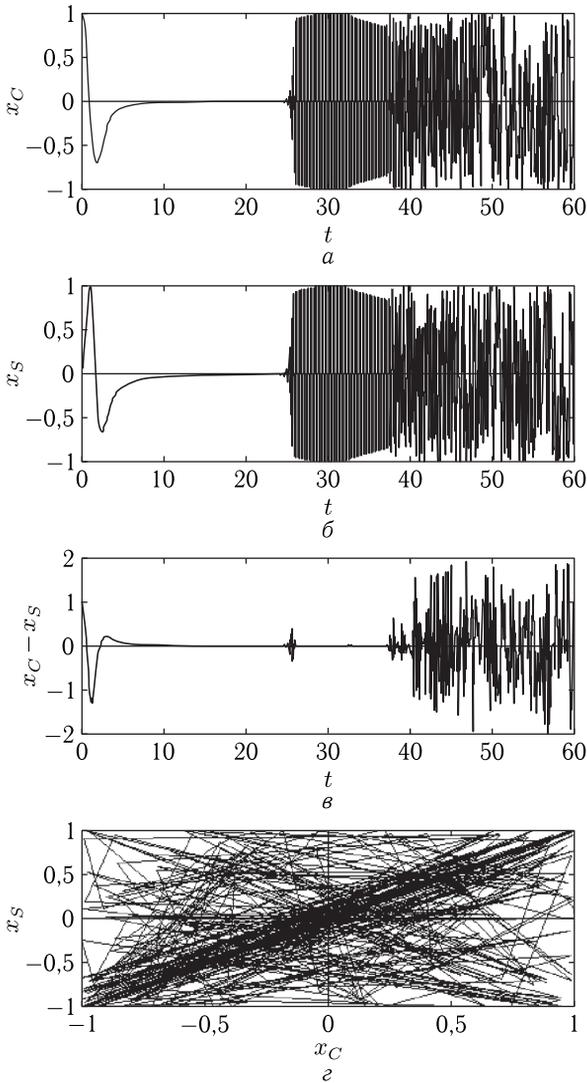


Рис. 12.6. Развитие во времени и параметрический портрет имитационных колебаний. *a* — $x_C = \cos [(\omega + \alpha x_C)t]$; *б* — $x_S = \sin [(\omega + \alpha x_S)t]$; *в* — $x_C - x_S$; *г* — параметрический портрет $x_S(x_C)$. Параметры: $\omega = 1$, $\alpha = 0,1$

Таким образом, из рис. 12.6 видно, что развитие высокоамплитудных колебаний происходит с запаздыванием, продолжающимся от 5 до 25 ед. времени, после чего амплитуда колебаний резким скачком увеличивается до максимума. Такой характер явлений наиболее соответствует высокоамплитудному хаосу и запаздыванию, проявляющему-

ся в системе двух связанных осцилляторов. Таким образом, имитацию возбуждения высокоамплитудного хаоса и запаздывания с помощью колебательной кольцевой функции второго рода можно считать довольно удачной.

Главным преимуществом такой имитации в сравнении с традиционным решением системы (12.34)–(12.35) является крайняя простота и высокая наглядность. То есть можно надеяться, что и рассмотрение хаоса с запаздыванием на основе кольцевой функции будет более простым и доступным. В связи с этим рассмотрим далее эти процессы для кольцевой функции более подробно. Предварительно вкратце остановимся на влиянии величины шага по времени на полученные результаты, после чего основное внимание обратим на начало формирования процесса запаздывания, а также выхода из него с переходом к режиму высокоамплитудного хаоса.

12.8.3. Влияние величины шага на развитие кольцевой функции во времени

Заметим, что проведенное здесь и в предыдущем разделе рассмотрение выполнено в предположении, что кольцевую функцию можно рассчитывать по шагам, подобно отображению. При этом, поскольку дискретным здесь принимается время, а не переменная x , то можно ожидать, что изменение шага может влиять на развитие функции во времени. Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее.

В самом деле, чистая кольцевая функция соответствует пределу пошаговой функции при $\Delta t \rightarrow 0$. В приведенных примерах основной шаг — 0,1. При уменьшении шага до 0,01 время запаздывания уменьшается на 1,5 ед. времени (то есть при времени запаздывания 25 уменьшается на 6%), а при дальнейшем уменьшении шага вплоть до 0,01 уменьшается на 0,1 ед. времени (то есть на 0,4%). То есть можно считать, что начиная с достаточно малого шага (при периоде синусоиды около 2 ед. времени, начиная с момента, когда на периоде синусоиды укладывается 200 шагов) развитие колебаний во времени практически не меняется, то есть от величины шага не зависит.

Таким образом, можно считать, что расчет кольцевых функций пошаговым методом при достаточно малой величине шага является вполне допустимым.

12.9. Механизм запаздывания высокоамплитудных колебаний

В предыдущих разделах описано запаздывание высокоамплитудных колебаний для кольцевых функций, причем выявлены только его основные свойства без выяснения причин, эти свойства вызывающих. Перейдем теперь к рассмотрению механизма формирования такого запаздывания.

12.9.1. Начало формирования режима запаздывания

Рассмотрим формирование запаздывания развития высокоамплитудных колебаний на примере кольцевой функции вида $x = \cos[(\omega + \alpha x)t]$. Поскольку уравнение всего одно, то нижним индексом будем обозначать не номер осциллятора, а момент времени. Обратимся к рис. 12.7, где показано развитие во времени основных составляющих этой функции.

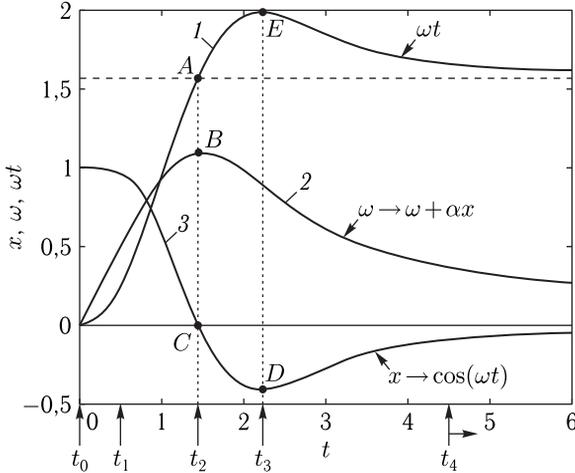


Рис. 12.7. Развитие во времени основных составляющих кольцевой функции. Горизонтальная пунктирная линия соответствует ординате, равной $\pi/2$. Пояснения остальных обозначений даны в тексте

Основные начальные параметры следующие: начальная точка по времени: $t = t_0$, где $t_0 = 0$; начальное значение частоты: $\omega_0 = 0$. При этом: $\omega t = 0$; $x_0 = \cos(\omega t) = 1$. Кривые 1 и 2 выходят из точки 0, кривая 3 — из точки 1.

Рассмотрим развитие колебаний последовательно по времени.

Время $t = t_1$. Предположим, что это — один шаг по времени. При этом: $\omega_1 = \omega_0 + \alpha x_0$, так что $\omega_1 = \alpha$, где $\alpha > 0$, так что частота возрастает, как это видно из кривой 2. Поскольку время тоже возрастает до величины t_1 , то ωt (кривая 1) возрастает пропорционально $\alpha x_0 t_1$. Смещение равно $x_1 = \cos(\omega_1 t_1)$, где $\omega_1 t_1 > 0$, так что x убывает.

Время $t = t_2$. Это время определяется тем, что величина ωt выросла до $\pi/2$ (точка A), так что смещение x_2 , равное косинусу этой величины, упало до нуля. При этом частота перестает увеличиваться, так как ее приращение, определяемое величиной αx_2 , падает до нуля.

Время между t_2 и t_3 . После того, как время прошло точку t_2 , смещение x становится отрицательным, так что добавка к частоте, определяемая как αx , также становится отрицательной, в результате

чего частота уменьшается. Таким образом, кривая 2 в точке В проходит через свой максимум, после чего спадает. Величина ωt пока еще растет, но ее рост замедляется, так как, хотя время и увеличивается, но частота уменьшается. Когда падение частоты становится столь большим, что увеличение времени не может его пересилить, рост кривой 1 прекращается и она достигает максимума в точке Е. Между точками А и Е кривая 1 проходит выше величины $\pi/2$ (горизонтальная пунктирная линия), так что $\cos(\omega t)$ является отрицательным, что и наблюдается для кривой 3, соответствующей смещению. Однако после точки Е кривая 1 начинает спадать, так что смещение $x = \cos(\omega t)$, пройдя через свой минимум в точке D, возрастает.

Таким образом, время $t = t_3$ соответствует максимуму кривой 1 и минимуму кривой 3. При этом кривая 2 продолжает монотонно спадать без каких-либо заметных особенностей.

Рассмотрим теперь дальнейшее развитие времени. Следующая после точки t_3 точка t_4 носит условный характер и отражает лишь стремление времени в сторону дальнейшего увеличения на значительную величину. При времени больше t_3 , поскольку смещение x остается отрицательным, то частота продолжает убывать, постепенно стремясь к нулю. В результате такого уменьшения частоты величина ωt также уменьшается, так что увеличение времени по-прежнему не может спад частоты компенсировать. Величина ωt стремится к $\pi/2$ (горизонтальная пунктирная линия), однако не может эту линию пересечь, так как при этом смещение x станет положительным и частота обязана будет увеличиться. Такое увеличение частоты приведет к росту кривой 1, так что она снова будет вынуждена убраться выше пунктирной линии. То есть имеет место определенное противоречие: стремление кривой 1 опуститься ниже пунктирной линии заставляет ее подняться выше. В такой противоречивой борьбе кривая 1 стремится как можно ближе подойти к пунктиру, кривая 3 выйти на нулевую линию, а кривая 2 также стремится к нулю. Такой противоречивый баланс продолжается довольно долго, что и проявляется как запаздывание развития высокоамплитудных колебаний.

В общих чертах можно полагать, что выход из состояния баланса происходит тогда, когда кривой 3 все же удастся пересечь линию $\pi/2$. Такое пересечение происходит из-за дискретного характера изменения времени. То есть между следующими друг за другом шагами по времени участок кривой 3 представляет собой прямую линию, продолжение которой все же упирается в уровень $\pi/2$. Такой перескок приводит к резкому лавинообразному росту смещения с соответствующим ростом частоты, и колебания приобретают высокоамплитудный характер.

Такова общая довольно грубая картина выхода из режима запаздывания. Однако проверка показывает, что дело обстоит намного сложнее. Более подробно процесс выхода рассматривается далее.

12.9.2. Выход из режима запаздывания

В предыдущем разделе на примере кольцевой функции вида $x = \cos [(\omega + \alpha x)t]$ показана динамика развития режима запаздывания. Приведено развитие во времени основных составляющих кольцевой функции. Отмечено, что запаздывание может быть достаточно длительным.

Рассмотрим теперь, как происходит выход из режима запаздывания, переходящий в развитие высокоамплитудных колебаний. Обратимся к рис. 12.8, где показано развитие во времени тех же составляющих кольцевой функции, что и на рис. 12.7, но теперь уже по прошествии достаточно большого промежутка времени. Вычисление функций произведено с шагом по времени, равным 0,1 ед.

Время t_0 не привязано жестко к какому-то моменту, важно лишь, что оно соответствует пребыванию системы в режиме запаздывания.

Время t_1 соответствует началу осцилляций рассматриваемых функций, то есть тому моменту, когда такие осцилляции становятся достаточно заметными (составляют несколько процентов от установившейся ранее величины).

Моменты времени t_2 и t_3 соответствуют тому шагу по времени, на котором происходит перескок функции ωt (рис. 12.8, а) через величину $\pi/2$, так что косинус, определяющий функцию x (рис. 12.8, в), становится положительным. С этого момента начинается резкий рост амплитуды колебаний.

Время t_4 к какому-то характерному моменту жестко не привязано и отражает просто дальнейшее увеличение времени вплоть до бесконечности.

В промежутке времени от t_0 до t_1 представленная на рис. 12.8, а функция ωt стремится к величине $\pi/2$ сверху, однако это стремление крайне медленное. Функция ω (рис. 12.8, б) медленно спадает почти линейным образом. Функция $x \rightarrow \cos(\omega t)$ (рис. 12.8, в) медленно приближается к нулю, причем в силу того, что $\omega t > \pi/2$, остается отрицательной.

Уменьшение функции ω (рис. 12.8, б) обусловлено тем, что на каждом шаге к ней добавляется величина αx , где $\alpha > 0$, а $x < 0$ (рис. 12.8, в), так что добавка αx является отрицательной.

В формировании функции ωt кроме убывающей величины ω участвует нарастающая величина t , так что их уравнивание приводит к почти горизонтальному характеру зависимости ωt от времени. Но с течением времени абсолютная величина добавки αx постепенно уменьшается (так как $x \rightarrow 0$), так что в формировании функции ωt время σ начинает преобладать. Такое преобладание проявляется в образовании осцилляций функции x_1 , которые с течением времени между t_0 и t_1 постепенно растут. Осцилляции происходят в такт с шагами по времени, в результате чего имеют характер треугольных импульсов, нарастание и спад которых соответствуют одному шагу по времени,

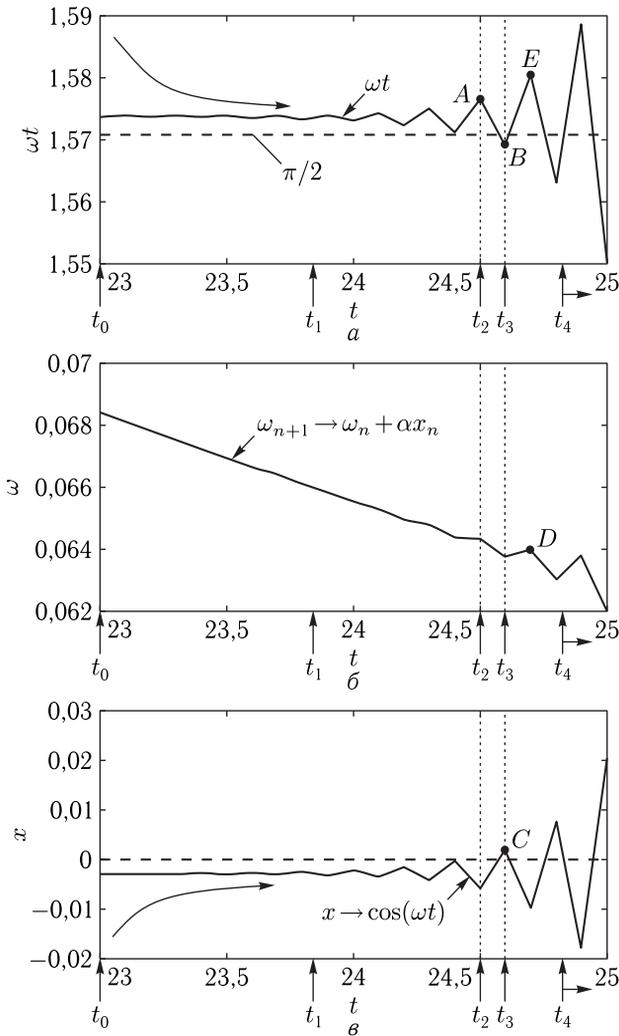


Рис. 12.8. Схема выхода из режима запаздывания. Развитие во времени основных составляющих кольцевой функции. Пояснения обозначений даны в тексте

то есть полная длительность импульса получается равной длительности двух шагов по времени.

Критическое положение наступает на шаге по времени между α и x_1 , когда функция ωt перескакивает через рубеж, равный $\pi/2$. Такой перескок на рис. 12.8, *a* соответствует переходу от точки **A** к точке **B**. При этом косинус, образующий функцию x , становится положительным, что на рис. 12.8, *в* соответствует переходу к точке **C**.

Изменение знака x приводит к изменению знака добавки к частоте αx , так что эта добавка становится положительной, в результате чего спад функции ω прекращается и сменяется нарастанием, так что величина ω на следующем шаге приобретает значение, на рис. 12.8, б обозначенное буквой D . Такой рост частоты приводит к росту функции ωt , которая приобретает значение, обозначенное на рис. 12.8, а буквой E .

Ввиду того, что это значение достигнуто при росте не только времени t , но и частоты ω (тогда как значение A достигнуто при росте только времени) оно значительно превышает значение, соответствующее точке A .

Таким образом, система возвращается в ту же ситуацию, что и в точке A , но теперь на значительно более высоком уровне. Далее происходит тот же цикл развития всех функций, подобный таковому, исходящему из точки A . Значение функции ωt еще более увеличивается, так что происходит как бы лавинообразный процесс увеличения амплитуды колебаний, характеризуемый резким ростом функции x , как это видно на правом краю рис. 12.8, в при времени t_4 .

Таким образом, происходит выход из режима запаздывания и резкий рост высокоамплитудных колебаний. Такой рост ограничивается только максимальной допустимой величиной косинуса, равной ± 1 , как это видно из рис. 12.6, а.

Итак, можно полагать, что «спусковым моментом» выхода из режима запаздывания является достижение осцилляций функции ωt величины, достаточной для перескока этой функции через значение $\pi/2$, что приводит к изменению знака косинуса с последующим ростом величины ω , увеличивающего рост той же функции ωt .

В заключение настоящего раздела следует сказать, что все рассмотрение здесь выполнено для функции вида $x = \cos [(\omega + \alpha x)t]$, содержащей косинус. В то же время, из раздела 12.8.2 видно, что такой же характер колебаний имеет место для функции вида $x = \sin [(\omega + \alpha x)t]$, содержащей синус. Подробное рассмотрение показывает, что все описанные здесь явления для синуса происходят полностью сходным образом. Единственное серьезное отличие состоит в том, что функция ωt при увеличении времени стремится не к $\pi/2$, а к величине π , так же, как здесь, приближаясь сверху. При этом функция x (синус) также остается отрицательной и приближается к нулю снизу, а функция ω стремится к нулю сверху. В остальном повторение практически тождественное.

12.9.3. Критерии выхода из режима запаздывания

Исходя из изложенного можно ввести критерии выхода из режима запаздывания, то есть такие значения переменных, по достижении которых амплитуда колебаний начинает увеличиваться лавинообразным образом.

Из рис. 12.8, *в* видно, что условием лавинного роста является положительность смещения x , то есть критерий имеет вид:

$$x > 0. \quad (12.98)$$

Можно видеть, что этот критерий достигается в точке C в момент времени t_3 .

Из рис. 12.8, *а* следует, что другим критерием может явиться пересечение кривой ωt уровня $\pi/2$, то есть:

$$\omega t < \pi/2. \quad (12.99)$$

Этот критерий достигается в точке B в тот же момент времени t_3 .

Преимуществом второго критерия является возможность определения критического значения времени. Однако определенность этого критерия меньше, чем первого, так как там все определяется только значением x , допускающим непосредственное измерение (по крайней мере, в рамках машинного эксперимента), тогда как здесь необходимо знать (или как-то измерить) величину ω , которая сама с течением времени изменяется. В качестве приближенного способа определения ω можно использовать зависимость $\omega(t)$, представленную на рис. 12.8, *б*, из которой видно, что в интервале от 23 до 25 ед. времени ω меняется мало, всего на $\pm 4,5\%$ около величины 0,065. Из рис. 12.7 видно, что максимальное значение ω (в точке B) составляет около единицы (больше на 8%), так что в области окончания запаздывания величина ω составляет около 7% от максимума. Подстановка значения 0,07 в формулу (12.99) дает время 22,4 ед., что довольно близко соответствует реальному значению $t_3 = 24,6$ ед. времени (отклонение вниз — около 9%).

Таким образом, можно видеть, что критерий (12.98) является независимым, а критерий (12.99) пригоден для оценки времени окончания запаздывания с точностью до единиц процентов.

12.9.4. Замечание об объективной точности полученных результатов

Представленное на рис. 12.8 развитие колебаний соответствует увеличению времени шагами по 0,1 ед. времени. Эта величина является специфической в том отношении, что при изменении времени на один шаг изменение всех функций происходит ступенчатым образом, где величина ступеньки определяется величиной шага по времени. Изменение шага приводит к некоторому изменению полного времени запаздывания (раздел 12.8.3). Увеличение шага в 2–3 раза приводит к нарушению плавности изменения функций на начальном участке времени, представленном на рис. 12.7. Уменьшение шага при стремлении его к нулю (проверено до 0,0001 ед. времени) приводит к стабилизации времени запаздывания на величине, меньшей рассматриваемой здесь примерно на 10%. Однако при этом структура рисунка становится мелкой, что нарушает наглядность рассмотрения. Таким образом, принятая

здесь величина шага в 0,1 ед. времени, полностью соответствуя физической картине явления, позволяет рассмотреть процесс достаточно наглядным образом.

12.9.5. Замечание о механизме треугольных осцилляций

Важнейшим моментом, приводящим к запуску «спускового механизма» роста амплитуды, является развитие осцилляций вида треугольных импульсов, следующих в такт с шагами по времени.

Из рис. 12.8, *a* или рис. 12.8, *в* можно видеть, что такие осцилляции становятся заметными намного раньше, чем кривая ωt достигает значения $\pi/2$ или x становится положительным.

Согласно рис. 12.7, эффективное запаздывание начинается около 5 ед. времени. Из рис. 12.8 видно, что оно заканчивается около 24,5 ед. времени. То есть полная протяженность времени запаздывания составляет около 20 ед. времени. При этом треугольные осцилляции развиваются только в промежутке от 23 до 24,5 ед. времени. Попытки выявить следы осцилляций при временах менее 20 ед. времени, состоявшие в увеличении чувствительности наблюдения, сужении интервала времени наблюдения и уменьшении шага по времени, к безусловному успеху не привели.

В то же время из рассмотрения осцилляций на подходе к моменту лавинообразного роста, было установлено, что их амплитуда нарастает ускоряющимся образом (как это видно из рис. 12.8, *a* и рис. 12.8, *в*) еще задолго до момента пересечения критического уровня (то есть для ωt величины $\pi/2$, а для x — нуля).

То есть можно полагать, что имеется какой-то более глубокий механизм, обуславливающий момент возникновения и дальнейший рост этих осцилляций. Авторы осмеливаются высказать предположение, что подробное исследование такого механизма может составить предмет для отдельной работы.

Замечание. Заметим, что вариация шага по времени, особенно его уменьшение, приводит к проявлению некоторых дополнительных особенностей рассматриваемого явления. Так, уменьшение шага до 0,0001 ед. времени приводит к некоторому «размазыванию» зависимости для x , так что на ней появляются осцилляции крайне малой амплитуды (менее 1 % от средней величины), меняющейся хаотическим образом в такт с шагом по времени. Такая «размазка» наблюдалась во всем промежутке времени запаздывания. Однако проверка показала, что эти осцилляции связаны с предельными возможностями разрядной сетки используемого компьютера, так как при переходе к режиму двойной точности осцилляции полностью сгладились. При расчете такую особенность надо учитывать, чтобы не принять ложные осцилляции за истинные. В простейшем варианте все вновь появляющиеся осцилляции следует проверять в режиме двойной точности.

12.10. Некоторые замечания о возможном развитии работы

Главным результатом настоящей работы можно считать более или менее подробное рассмотрение кольцевого взаимодействия двух осцилляторов в связи с явлением запаздывания развития высокоамплитудного хаоса. Показана возможность успешной имитации таких явлений на основе единой функции кольцевого характера, допускающей расчет крайне простой и наглядный.

Отметим некоторые моменты, которые, по мнению авторов, следовало бы исследовать подробнее.

По-видимому, главной задачей, остающейся без решения, является модельное представление продолжительности интервала запаздывания. Такой вопрос уже обсуждался в работах [32, 33], однако он все еще требует более подробного рассмотрения.

Здесь этот вопрос может быть расширен не только на систему из двух осцилляторов, но и на кольцевые функции, а также дополнен исследованием интервала регулярности в системе Лоренца.

Далее следует отметить, что проведенное в разделах 12.3.1 исследование системы Лоренца является весьма поверхностным, значительно менее подробным, чем выполненное в работах [31–33] исследование системы (12.28)–(12.29), поэтому многие особенности остаются невыясненными.

Так, предварительная проверка показывает, что режим регулярности и амплитуда последующего хаоса весьма мало зависят от начального смещения, так что почти не меняются при изменении смещения на порядок в ту и другую сторону. Изменение параметра σ на единицы процентов приводит к изменению длительности начального интервала регулярности в заметно большем отношении. В работе [2, стр. 260–262] приведен обзор основных исследований поведения фазовых траекторий, выявлены критически значения параметров, приводящие к переходу обычного аттрактора в стохастический, однако начальный интервал регулярности оставлен без внимания.

Можно полагать, что определенным упрощающим действием было бы выделение из системы Лоренца, записанной в виде двух уравнений, «первичного ядра», подобного таковому, выделенному из системы для двух осцилляторов в работе [31]. Необходимым требованием на этом пути было бы сохранение режима первичной регулярности и следующего за ним режима хаоса в сочетании с предельным возможным упрощением системы.

По-видимому, интересно было бы также систематически проследить, как скажется на характере развития колебаний более высокая степень переменной x_1 в слагаемом нелинейной связи в системах типа (12.26)–(12.27) и (12.28)–(12.29) (то есть, например, в виде $x_1^\alpha x_2$, где $\alpha = 3, 4$ и более). Можно предполагать, что при четном значении α будет реализовываться режим запаздывания, а при нечетном — режим

начальной регулярности. Авторы осмеливаются выразить надежду, что более подробное исследование системы Лоренца в плане интервала регулярности, а также обеих систем при более высоких степенях переменной x_1 , может составить предмет для отдельной работы.

Выводы по главе 12

Настоящая работа является продолжением исследования нестационарного запаздывания установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Физической основной задачей является возбуждение мощных гиперзвуковых колебаний в ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами, а также возбуждение интенсивных шумовых колебаний в ферритовом диске, помещенном в электродинамический резонатор. Отмечено, что при определенных условиях колебания в таких системах принимают характер нестационарного высокоамплитудного хаоса, возбуждающегося со значительным запаздыванием после включения системы. Основное внимание уделено кольцевому характеру развития нестационарных колебаний, в том числе введены в рассмотрение кольцевые функции, реализующие эффект запаздывания в наиболее простом виде.

В основании настоящего исследования лежит полученная в первой части работы достаточно общая система двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка, нелинейность в которых представлена в виде степенных функций до третьего порядка. На основе сравнения входящих в систему коэффициентов с реальными параметрами физических задач, из нее была выделена фундаментальная система, отражающая основные свойства наблюдаемых в эксперименте явлений. В результате устранения второстепенных параметров из фундаментальной системы была выделена укороченная система — «первичное ядро», сохраняющее свойство нестационарного запаздывания и хаоса. Первое уравнение такой системы связано со смещением первого осциллятора и содержит вторую производную от такого смещения по времени, слагаемое кубической нелинейности и слагаемое нелинейной связи, пропорциональное произведению квадрата смещения первого осциллятора на смещение второго. Второе уравнение связано со смещением второго осциллятора и содержит вторую производную от такого смещения по времени и слагаемое линейной связи, пропорциональное смещению первого осциллятора. При наличии во втором уравнении потенциально-го слагаемого система является колебательной, а при его отсутствии — релаксационной. При этом в обоих случаях запаздывание и высокоамплитудный хаос имеют одинаковый характер. Отмечено, что главную роль в образовании высокоамплитудного хаоса с запаздыванием играет слагаемое нелинейной связи первого осциллятора.

Выявлен кольцевой характер укороченной системы, состоящий в том, что определяемое первым уравнением смещение первого осциллятора воздействует на смещение второго осциллятора через ли-

нейную связь второго уравнения, а получаемое при этом смещение второго осциллятора снова возвращается в первое уравнение через слагаемое нелинейной связи первого уравнения. При этом полная связь уравнений между собой образует как бы «кольцо», замкнутое само на себя. Относительно первого осциллятора в этом кольце имеется «посредник» — второй осциллятор, который здесь играет подчиненную роль.

Было отмечено, что причиной хаоса и запаздывания является кольцевой характер системы уравнений, причем роль замыкания через кольцо может играть вспомогательная функция, моделирующая этот кольцевой характер.

Рассмотрено последовательное действие осцилляторов друг на друга в схеме разомкнутого кольца. Показано, что воздействие синусоидального сигнала постоянной амплитуды на второй осциллятор, имеющий потенциальную составляющую, приводит к возбуждению колебаний второго осциллятора, имеющих характер биений, частота которых равна разности частот возбуждающего сигнала и собственных колебаний второго осциллятора. Воздействие таких биений на первый осциллятор приводит к сильно запаздывающему возбуждению хаотических колебаний, причем время запаздывания может в несколько раз превышать период биений. Отмечено, что время запаздывания и характер хаоса напрямую с периодом биений не связаны, однако время запаздывания весьма чувствительно к фазе возбуждения относительно момента начала колебаний. Отмечено ограничение модели кольца, состоящее в том, что она успешно действует в рамках только одного прохода по кольцу. Другим ограничением является неприменимость модели в случае релаксационного характера второго осциллятора, то есть при отсутствии во втором уравнении потенциального слагаемого, так как это не допускает формирования биений.

Рассмотрена возможность существования кольца в классической системе Лоренца, допускающей хаотические колебания. Отмечено, что в классическом случае, когда такая система состоит из трех уравнений первого порядка, кольцевой ее характер в явном виде не просматривается. Путем замены переменных выполнено преобразование системы из трех уравнений первого порядка к эквивалентной системе из двух уравнений, одно из которых имеет второй порядок, а другое — первый. Показано, что преобразованная таким образом система Лоренца является частным случаем общей системы, полученной для задачи о двух осцилляторах. Для такой системы установлен кольцевой характер, при котором уравнение первого порядка для второго осциллятора является «посредником» по отношению к уравнению второго порядка для первого осциллятора.

Для системы Лоренца, записанной в виде двух уравнений, рассмотрено развитие колебаний первого осциллятора во времени. Установлено, что колебания приобретают хаотический характер не сразу после включения возбуждения, а по прошествии определенного промежутка

времени, в течение которого колебания имеют регулярный характер с постепенно возрастающей амплитудой. Отмечена аналогия между интервалом регулярности колебаний в системе Лоренца и интервалом запаздывания в системе для двух осцилляторов. Показано, что продолжительность каждого из этих интервалов может значительно (на порядок и более) превышать период собственных колебаний первого осциллятора. Отмечена родственность формирования таких интервалов в обеих системах, состоящая в наличии слагаемого нелинейной связи в уравнении для первого осциллятора. Отмечено, что различие в характере интервалов обусловлено тем, что нелинейная связь в системе Лоренца обусловлена смещением первого осциллятора в первой степени, а в системе для двух осцилляторов — во второй. Таким образом, показано, что классическая система Лоренца, записанная в виде двух уравнений, имеет кольцевой характер, подобный таковому в системе для двух осцилляторов, причем развитие высокоамплитудного хаоса в системе Лоренца сопровождается задержкой в виде интервала регулярности, подобной задержке в системе для двух осцилляторов в виде интервала запаздывания.

Рассмотрены возможные способы решения релаксационной системы уравнений для двух осцилляторов. В качестве первого отмечено использование подстановочной функции, преобразующей дифференциальные уравнения в алгебраические. В качестве второго отмечено численное решение пошаговым методом, наиболее употребительным из которых является метод Рунге–Кутты. Отмечено, что ввиду высокой сложности системы метод подстановки неприменим, так что пошаговый метод остается единственным возможным.

Показана возможность сведения релаксационной системы, содержащей два уравнения второго порядка, к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка. Выявлена крайне высокая сложность полученного уравнения, вынуждающая использование для решения пошагового метода.

Подробно рассмотрен кольцевой характер релаксационной системы для двух осцилляторов. Предложен алгоритм пошагового расчета, имеющий двухступенчатый характер, первая ступень которого состоит в прохождении первой половины кольца, образованной первым уравнением, а вторая — в прохождении второй половины кольца, образованной вторым уравнением.

Отмечена возможность представления системы из двух уравнений в виде, каждое из уравнений которой содержит выделенную из соответствующего уравнения собственную переменную, приравненную к остальной части того же уравнения. Для такого представления каждое из уравнений должно быть разрешено относительно одной из своих переменных. То есть из первого исходного уравнения смещение первого осциллятора должно быть выражено через смещение второго, а из второго исходного уравнения смещение второго осциллятора должно быть выражено через смещение первого. Отмечен кольцевой характер

такого представления. Показано, что подстановка второй переменной из второго уравнения в первое приводит к уравнению, содержащему только первую переменную. Полученное при этом уравнение названо «кольцевым уравнением», а его решение — «кольцевой функцией». Показано, что кольцевое уравнение в левой части содержит только одну собственную переменную в явном виде, а в правой — достаточно сложную функцию от той же переменной. Отмечено, что кольцевое уравнение, будучи образованным из обоих исходных уравнений, должно сохранять те же свойства колебаний, что и исходная система.

Установлено, что ввиду сложности кольцевого уравнения, единственным способом его решения является пошаговый. При этом значение переменной на данном шаге определяется через функцию, содержащую ту же переменную, полученную на предыдущем шаге. Отмечена аналогия такого решения с расчетом дискретных одномерных отображений. Выявлена значительная простота пошагового расчета отображений по сравнению с методом Рунге-Кутты, обусловленная отсутствием необходимости расчета производных.

На примере классического логистического отображения рассчитано развитие колебаний по шагам для ряда значений параметров, в том числе охватывающих регулярный затухающий, регулярный стационарный и хаотический режимы. Установлено, что для логистического отображения запаздывание по шагам отсутствует.

Отмечена возможность решения кольцевого уравнения, то есть расчета кольцевых функций, тем же пошаговым методом, каким рассчитываются отображения. Отмечено, что сложность дифференцирования кольцевой функции, то есть вычисления ее производной, затрудняет применение метода Рунге-Кутты, оставляя только пошаговый метод, аналогичный применяемому для расчета отображений. Относительно релаксационной системы для двух осцилляторов установлено, что представление в виде кольцевого уравнения возможно только для второго уравнения, имеющего релаксационный характер. Ввиду сложности такого представления предложена конструкция кольцевого уравнения, левая часть которого содержит исходную переменную, а правая — колебательную функцию от той же переменной, в наиболее простом случае — синус или косинус.

Предложены два вида кольцевых функций — первого и второго рода, в качестве дискретно меняющейся переменной использующих время. Левая часть колебательных функций того и другого рода представляет собой переменную — смещение первого осциллятора на данном шаге. Правая часть содержит тригонометрическую функцию (синус или косинус), аргумент которой представляет собой произведение обобщенной частоты на время, соответствующие предыдущему шагу. Для кольцевой функции первого рода обобщенная частота пропорциональна смещению осциллятора плюс единица. Для кольцевой функции второго рода обобщенная частота пропорциональна смещению осциллятора плюс значение частоты, полученное на предыдущем

шаге. Отмечено, что пропорциональность между частотой и амплитудой смещения, свойственная кольцевым функциям, аналогична линейному соотношению между теми же параметрами, имеющему место для колебательного уравнения с кубической нелинейностью, являющемуся основой уравнения для первого осциллятора в системе для двух осцилляторов.

Рассмотрена возможность имитации возбуждения высокоамплитудного хаоса с соответствующим запаздыванием на основе кольцевых функций. Рассмотрено развитие колебаний во времени, описываемое кольцевыми функциями первого рода на основе синуса и косинуса. Приведен алгоритм расчета, подобный таковому, применяемому для отображений. Показано, что колебания во времени развиваются в два этапа. В течение первого колебания представляют собой регулярную синусоиду, период которой определяется начальным значением частоты. В течение второго этапа на регулярную синусоиду накладываются колебания со значительно меньшим периодом, имеющие хаотический характер. В продолжение обоих этапов максимальная амплитуда колебаний равна единице, что определяется максимальным значением синуса или косинуса. Параметрический портрет, образованный парой функций, одна из которых соответствует синусу, а другая косинусу, представляет собой квадрат со сторонами в две единицы, сплошь замаскированный траекториями, имеющими хаотический характер.

Рассмотрено развитие колебаний во времени, описываемое кольцевыми функциями второго рода на основе синуса и косинуса. Приведен алгоритм расчета, подобный таковому, применяемому для отображений. Показано, что колебания во времени развиваются в два этапа. В течение первого этапа после первого кратковременного выброса колебания прекращаются, причем смещение становится крайне малым, значительно меньшим единицы и на протяжении довольно длительного времени не меняется. Второй этап начинается с резкого выброса амплитуды вплоть до значения, равного единице, после чего развиваются регулярные колебания с крайне малым периодом, вскоре переходящие в хаос с единичной амплитудой, по времени продолжающийся до бесконечности. Таким образом, первый этап представляет собой запаздывание, а второй — развитие высокоамплитудного хаоса, что подобно запаздыванию и развитию высокоамплитудного хаоса в системе из двух осцилляторов. Параметрический портрет подобен предыдущему случаю.

В результате проделанного рассмотрения показано, что кольцевые функции второго рода обеспечивают удобную имитацию запаздывания и развития высокоамплитудного хаоса в системе из двух осцилляторов.

Для кольцевой функции второго рода рассмотрено начало развития запаздывания высокоамплитудных колебаний, а также его окончание и переход к высокоамплитудному хаосу. Предложена модель, отражающая борьбу между стремлением аргумента функции с течением времени уменьшиться до величины $\pi/2$ и ростом смещения, стремящегося

этот аргумент увеличить, так что баланс между этими стремлениями продолжается достаточно долго, что и обеспечивает запаздывание развития колебаний. Выход из запаздывания и начало возбуждения высокоамплитудных колебаний происходит через нарушение такого баланса, обусловленного возбуждением колебаний треугольной формы, амплитуда которых, начиная с нуля, постепенно увеличивается до величины, достаточной для преодоления аргументом функции значения $\pi/2$, что приводит к лавинообразному росту амплитуды колебаний смещения. Таким образом, достижение аргументом кольцевой функции значения $\pi/2$ является критерием выхода из режима запаздывания и начала роста высокоамплитудного хаоса.

Приведены некоторые замечания о возможном развитии работы. В качестве важной задачи отмечена разработка модельного представление продолжительности интервала запаздывания. Этот вопрос может быть расширен не только на систему из двух осцилляторов, но и на кольцевые функции, а также дополнен исследованием интервала регулярности в системе Лоренца. Отмечена также важность рассмотрения роли нелинейной связи высоких порядков, позволяющей обобщить полученные результаты на более широкий круг явлений.

Глава 13

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ В УСЛОВИЯХ КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ И КВАДРАТИЧНОЙ СВЯЗИ

В предыдущих главах настоящей монографии рассмотрены некоторые аспекты хаотических колебаний в системе из двух связанных осцилляторов. В настоящей главе рассматриваются некоторые другие аспекты таких колебаний в условиях, когда один осциллятор содержит кубическую нелинейность, а связь между осцилляторами является квадратичной. Рассмотрено поведение системы в широком интервале амплитуды возбуждения. Получены разветвки колебаний по времени, параметрические портреты для переменной и ее производной, а также спектральные характеристики возбуждаемых колебаний. Выполнена классификация основных режимов колебаний, наблюдаемых в широком диапазоне амплитуд возбуждения. Выявлены следующие два режима: режим № 1 — мультигармонический регуляризованный; режим № 2 — мультигармонический квазихаотический. Показано, что по мере увеличения амплитуды возбуждения, начиная с регулярного, имеет место чередование регулярного и квазихаотического режимов. Выявлен критерий формирования хаотического режима. Показано, что главной причиной формирования хаоса является последовательная смена гармоник по мере увеличения возбуждения. Показано, что по мере увеличения уровня возбуждения амплитуда колебаний возрастает, причем рост амплитуды следует зависимости корневого типа. На примере уравнения для первого осциллятора в отсутствие связи показано, что причиной замедления роста амплитуды колебаний является кубическая нелинейность.

Основное изложение материала в данной главе следует работе [35], остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

13.1. Постановка задач и основные системы уравнений

Основным предметом исследования в настоящей работе являются автоколебания хаотического типа, которые могут иметь место в возбуждаемой внешней периодической силой системе из двух связанных

осцилляторов. Рассмотрение проводится на основе системы из двух связанных уравнений колебательного типа, в общем случае имеющая вид (1.26)–(1.27), которую повторим здесь для полноты картины:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + 2\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + 3\xi_1 x_1^2 + 2\xi_2 x_1 x_2 + \xi_3 x_2^2 + 4\eta_1 x_1^3 + 3\eta_2 x_1^2 x_2 + 2\eta_3 x_1 x_2^2 + \eta_4 x_2^3 = A \cdot \cos(\omega t); \quad (13.1)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + \zeta_2 x_1 + 2\zeta_3 x_2 + \xi_2 x_1^2 + 2\xi_3 x_1 x_2 + 3\xi_4 x_2^2 + \eta_2 x_1^3 + 2\eta_2 x_1^2 x_2 + 3\eta_4 x_1 x_2^2 + 4\eta_5 x_2^3 = 0. \quad (13.2)$$

13.1.1. Некоторые частные случаи общей системы уравнений

Уравнения (13.1)–(13.2) содержат все возможные варианты степеней и произведений переменных до третьего порядка. Некоторые частные случаи таких систем приведены в работах [17–20] и [21–24]. Все эти работы относятся к задаче о связанных магнитном и упругом осцилляторах.

В первой группе работ [17–20] приближение выполнено путем анализа последовательных преобразований системы полных семи уравнений первого порядка для намагнитченности и упругого смещения в систему из двух уравнений второго порядка, соответствующей рассматриваемой системе из двух осцилляторов. Анализ выполнен путем оценки пропорциональности и сравнительного вклада отдельных слагаемых полных уравнений в укороченные. В результате получена система из двух уравнений следующего вида (1.28)–(1.29):

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \delta_1 x_1^3 + \gamma_1 \cdot x_2^2 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (13.3)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (13.4)$$

Здесь $x_{1,2}$, $\beta_{1,2}$, $\omega_{1,2}$ — координатные переменные, параметры затухания и собственные частоты осцилляторов, δ_1 — параметр нелинейности первого осциллятора, $\gamma_{1,2}$ — коэффициенты связи, A_0 и ω_0 — амплитуда и частота возбуждающей силы.

Замечание. В общем случае собственные частоты осцилляторов $\omega_{1,2}$ могут быть как действительными, так и мнимыми, что соответствует периодическим колебаниям или экспоненциальному изменению переменных $x_{1,2}$. При этом знак коэффициента при третьем слагаемом $\omega_{1,2}^2$ может быть положительным или отрицательным, что определяется условиями конкретной задачи. Все остальные параметры будем полагать действительными без каких-либо ограничений по знакам.

В системе (13.3)–(13.4) первое уравнение содержит нелинейное слагаемое третьей степени. Связь его со вторым осуществляется также

нелинейным слагаемым второй степени. Второе же уравнение и связь его с первым являются чисто линейными.

Во второй группе работ [21–24] используется система, получаемая в квадратичном приближении в задаче о возбуждении гиперзвука (глава 3).

Получаемая при этом система имеет вид (1.31)–(1.32) [26, форм. (46), (47)]:

$$a_{11} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + a_{12} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + a_{13} \cdot x_1 + a_{14} \cdot x_2 + \\ + d_{11}x_1^2 + d_{12}x_1x_2 + d_{13}x_2^2 + \\ + b_{11} \cdot x_1^3 + b_{12} \cdot x_1^2x_2 + b_{13} \cdot x_1x_2^2 + b_{14} \cdot x_2^3 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (13.5)$$

$$a_{21} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + a_{22} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + a_{23} \cdot x_2 + a_{24} \cdot x_1 + \\ + d_{21}x_1^2 + d_{22}x_1x_2 + d_{23}x_2^2 + \\ + b_{21} \cdot x_1^3 + b_{22} \cdot x_1^2x_2 + b_{23} \cdot x_1x_2^2 + b_{24} \cdot x_2^3 = 0, \quad (13.6)$$

где коэффициенты a_{ik} , b_{ik} , d_{ik} определяются параметрами материала пластины. Здесь оба уравнения являются нелинейными до третьей степени и связь также является нелинейной до той же степени. Система как целое является симметричной, то есть замена индексов «1» на «2» и обратно структуры левых частей уравнений не меняет. Возбуждение остается несимметричным, что однако принципиальным не является, так что второе уравнение также может быть дополнено подобным слагаемым.

Можно видеть, что эта система с точностью до обозначений совпадает с приведенной выше системой (13.1)–(13.2). В то же время, система (13.3)–(13.4) является частным случаем как системы (13.5)–(13.6), так и приведенной выше системы (13.1)–(13.2).

В рамках настоящей главы ограничимся лишь рассмотрением наиболее простой системы (13.3)–(13.4), способной проявлять хаотическое поведение, а изучение системы (13.5)–(13.6) оставим в качестве предмета для рассмотрения в следующих главах.

13.2. Разнообразие наблюдаемых видов колебаний

Система (13.3)–(13.4) исследовалась в работах [17–20]. При этом параметры системы задавались в основном исходя из реальных параметров изучаемой магнитоупругой системы. В этом случае частоты каждого из осцилляторов могли различаться, степень связи между ними также менялась.

Были выявлены несколько принципиально различающихся разновидностей колебаний. Так, были обнаружены автоколебания двух видов: синхронные, период которых равен периоду колебаний возбуж-

дения, а также асинхронные, имеющие период, отличный от периода колебаний возбуждения, как правило, значительно превышающий последний. Было отмечено, что синхронные колебания наблюдаются тогда, когда оба осциллятора являются линейными, а нелинейной является только связь, тогда как асинхронные наблюдаются тогда, когда первый осциллятор является нелинейным, второй — линейным, а связь также нелинейна. Для асинхронных колебаний выявлены четыре различных режима, из которых три являются автоколебательными: навязанный, стохастический и регулярный. Отмечено, что стохастический режим имеет значительные элементы хаотичности (то есть вид колебаний в каждом новом периоде отличается от колебаний в предыдущем периоде). Были выявлены пять характерных режимов синхронных колебаний: регулярный синусоидальный, регулярный с расщеплением, регулярный без расщепления, нерегулярный квазихаотический, нерегулярный расходящийся. Отмечен также асинхронный режим, имеющий место при значительном отличии параметров осцилляторов друг от друга. Этот режим характеризуется двухпериодичностью колебаний, малый период которых совпадает с периодичностью возбуждения, а большой — превышает период возбуждения в несколько раз. Для интерпретации режимов предложены две модели — обобщенного потенциала и генерации гармоник. Построены потенциальные поверхности, на основе которых интерпретированы области существования различных режимов. Был выполнен анализ автомодуляционных колебаний в рассматриваемой системе на основе потенциала четвертого порядка. Показано, что, благодаря наличию двух степеней свободы, потенциалы для каждого из уравнений должны отличаться друг от друга, давая собственный вклад в обобщенные силы. Отмечено подобие колебаний второго осциллятора колебаниям первого, что позволяет рассмотреть вынужденные колебания только одного осциллятора с квадратичной нелинейностью, потенциал для которого является кубическим. Выявлены четыре основных режима, сменяющие друг друга по мере увеличения амплитуды возбуждения, причем рассогласование фаз колебаний осциллятора относительно вынуждающей силы объяснено на основе модели фазовой задержки. Показано, что необходимым условием квазихаотического характера колебаний является режим, когда малые изменения координаты осциллятора приводят к большому изменению времени задержки. Для интерпретации увеличения времени задержки в этом случае предложена модель динамического фазового перехода.

Резюмируя результаты работ [17–20], можно сказать, что тот или иной выбор параметров системы (13.3)–(13.4) позволяет получить значительное разнообразие видов колебаний. Несмотря на многообразие предложенных моделей, подробно объяснена лишь часть наблюдаемых явлений. Так, полное единство результатов работ [17–20] до конца не выявлено. Часть явлений объясняется на основе потенциала четвертого порядка, тогда как для других явлений требуется потенциал третьего порядка. Неясным остается роль отдельных слагаемых

системы (13.3)–(13.4) в формировании квазихаотических колебаний, а также степень хаотичности таких колебаний.

Согласно полученным данным, роль второго осциллятора состоит лишь в повторении колебаний первого, хотя там же сделана оговорка, что при достаточном уровне возбуждения подобие колебаний второго осциллятора колебаниям первого нарушается.

Можно полагать, что причиной такого разнообразия результатов, в сочетании с их видимой неполнотой, является отсутствие четкой схемы в выборе параметров осцилляторов и связи между ними. В самом деле, параметры, как правило, выбирались исходя из данных реальных экспериментов, что и обусловило их частный характер. Значительным пробелом упомянутых работ является отсутствие серьезной попытки оценить спектральные свойства возбуждаемых колебаний.

В настоящей работе предпринята попытка более или менее систематического исследования влияния интенсивности возбуждения на хаотический характер наблюдаемых колебаний. В качестве параметров приняты максимально простые числовые значения, причем частоты обоих осцилляторов приняты равными друг другу и частоте возбуждения. Рассматривается роль каждого из параметров системы по отдельности.

13.2.1. Замечание о симметрии системы

Система (13.3)–(13.4) не является симметричной, то есть уравнения при замене индексов 1 на 2 и 2 на 1 друг в друга не переходят. Эта система является частным случаем симметричной системы вида:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \rho_1 \cdot x_1 + \delta_1 \cdot x_1^3 + \gamma_1 \cdot x_2^{\alpha_1} = A_1 \cdot \cos \omega t; \quad (13.7)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \rho_2 \cdot x_2 + \delta_2 \cdot x_2^3 + \gamma_2 \cdot x_1^{\alpha_2} = 0. \quad (13.8)$$

В этой системе единственным несимметричным элементом является возбуждающая сила $A_1 \cdot \cos \omega t$. Для большей симметричности можно было бы ввести во второе уравнение подобное слагаемое, что в реальной физической ситуации, например, показанной на рис. 1.1, означало бы возбуждение, наряду с магнитной, также и упругой подсистемы, однако в рамках настоящей работы этого делать не будем, а оставим рассмотрение такой ситуации в качестве отдельной задачи.

13.2.2. Параметры системы

Параметры системы выберем исходя из их максимальной простоты. Так, положим собственные частоты обоих осцилляторов равными друг другу и частоте возбуждения, параметры затухания для обоих осцилляторов также положим равными друг другу, а нелинейность будем учитывать только для первого осциллятора. Параметры связи обоих осцилляторов положим равными, однако показатель степени слагаемого связи для первого осциллятора положим равным 2, а для второго — 1. Такой выбор показателей обусловлен отмеченным в работе [17]

наиболее удобным соотношением, необходимым для реализации хаотического характера колебаний.

Итак, для дальнейшего рассмотрения примем следующие параметры: $\rho_1 = 1$; $\rho_2 = 1$; $\omega = 1$; $\beta_1 = 0,05$; $\beta_2 = 0,05$; $\delta_1 = 1$; $\delta_2 = 0$; $\gamma_1 = 1$; $\gamma_2 = 1$; $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 1$. При этом амплитуду возбуждения A_1 будем менять в пределах от 0,01 до 10 000.

13.3. Типичные виды колебаний

Рассмотрим сначала наиболее характерное многообразие колебаний на примере среднего уровня возбуждения, для чего обратимся к рис. 13.1 и рис. 13.2.

На рис. 13.1 приведены развертки колебаний по времени (*a*, *b*) и их параметрические портреты (*в*) для первого и второго осцилляторов. Начала разверток выбраны исходя из полного затухания релаксационных процессов (биений), вызванных первичным включением возбуждения. Шаг по времени $\Delta t = 0,01$. Период частоты возбуждения $\tau = 6,28$, то есть на одном периоде укладывается 628 шагов. На одном периоде третьей гармоники укладывается 209 шагов, на одном периоде пятой — 125 шагов. Эти данные важны в связи с фрактальным характером хаотических колебаний, как это более подробно предполагается рассмотреть в отдельной работе.

Из рисунка можно видеть, что для первого осциллятора колебания как смещения (*a1*), так и производной (*b1*) имеют четко выраженный шумовой характер с преобладанием частот, значительно превышающих частоту возбуждения. В колебаниях смещения (*a1*) присутствует заметная постоянная составляющая, в результате чего центральная линия развертки смещена вниз примерно на единицу. В колебаниях производной (*b1*) постоянная составляющая отсутствует. Параметрический портрет (*в1*) имеет вид сильно размазанной лежащей по горизонтали (вдоль оси смещений) двухкольцевой восьмерки, центры колец которой близки к $x_1 = 0$ и $x_1 = 2$. Такой сдвиг оси симметрии восьмерки соответствует постоянной составляющей, отмеченной на рис. 13.1, *a1*. Левое кольцо восьмерки по вертикали несколько расширено по сравнению с правым, что связано с единичными выбросами производной (*b1*), обусловленными резкими скачками смещения (*a1*) в отдельные моменты времени.

Для второго осциллятора колебания как смещения (*a2*), так и производной (*b2*) имеют значительно более упорядоченный характер, чем для первого. Основой колебаний является составляющая на частоте возбуждения, амплитуда которой меняется довольно случайным образом, однако эти изменения носят плавный характер и происходят, как правило, за несколько периодов основных колебаний. Источником возбуждения второго осциллятора являются колебания первого осциллятора через посредство связи, так что изменения амплитуды колебаний второго осциллятора вызваны хаотическим характером колебаний

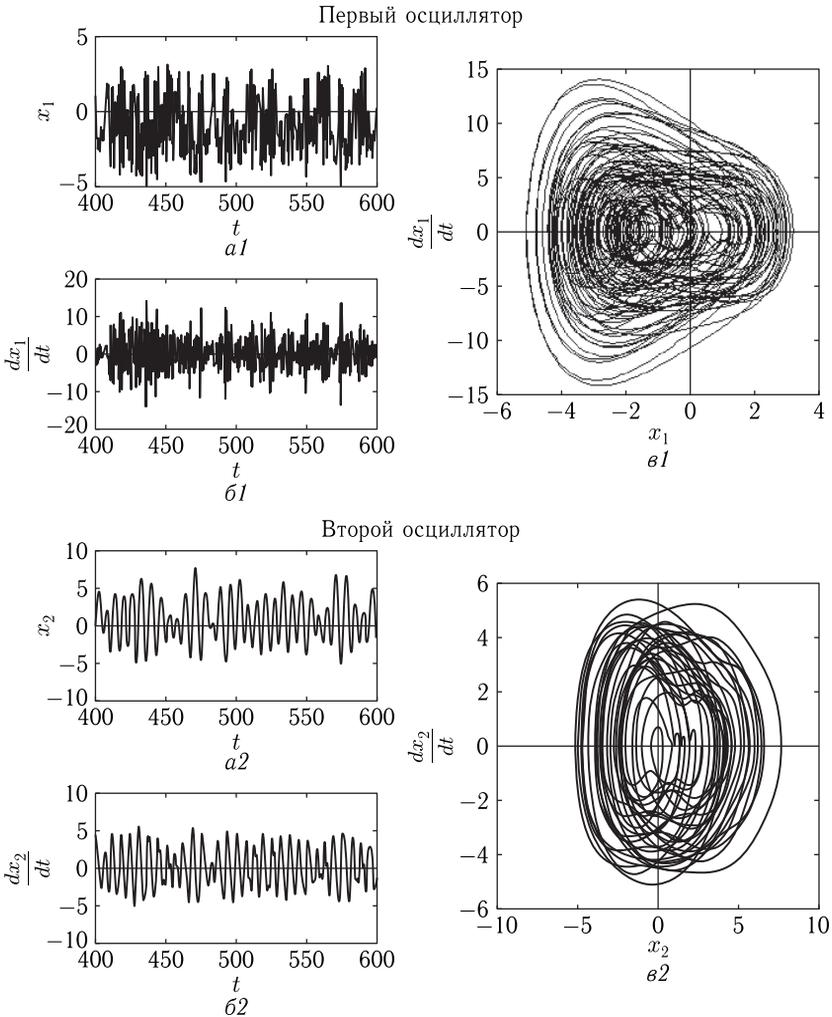


Рис. 13.1. Развертки колебаний по времени (*a*, *б*) и их параметрические портреты (*в*) для первого и второго осцилляторов. Амплитуда возбуждения $A_1 = 6$.
Остальные параметры приведены в разделе 13.2.2

первого. Параметрический портрет (*в2*) имеет вид заметно размазанных нескольких колец, наложенных друг на друга с некоторым сдвигом по горизонтали (вдоль оси смещений). Такое формирование хотя и размазанных, но довольно четко выраженных колец обусловлено отмеченным выше достаточно медленным изменением амплитуды колебаний разверток по времени (*a2*, *б2*), так что траектория успевает несколько раз пробежать по одному и тому же кольцу, прежде чем новый рывок

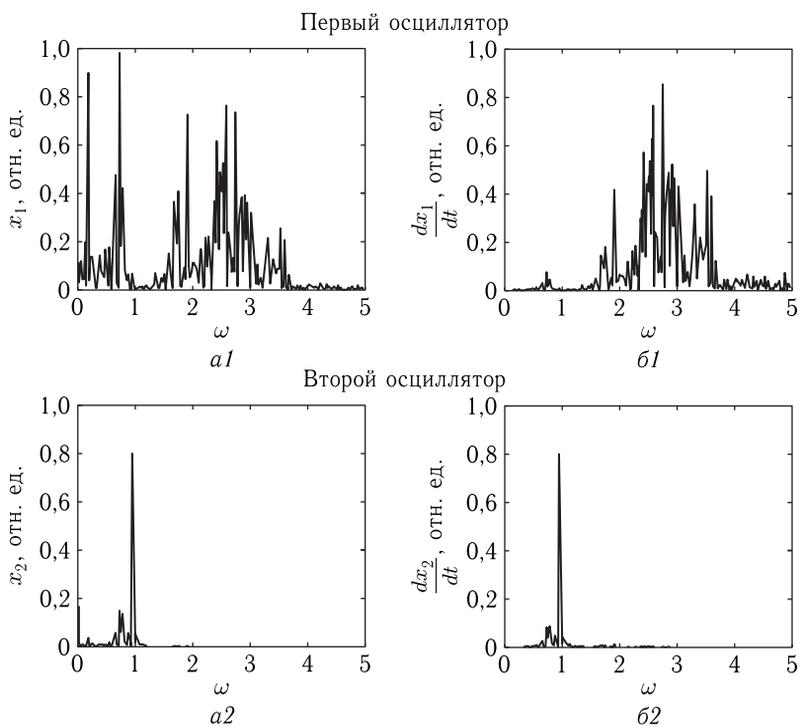


Рис. 13.2. Частотные спектры колебаний (а) и их производных (б) для первого и второго осцилляторов. В спектре *a1* постоянная составляющая убрана. Частота возбуждения по горизонтальной оси соответствует $\omega = 1$. Параметры те же, что на рис. 13.1

возбуждения (поступающего от первого осциллятора) передвинет ее на другое место.

Замечание. Следует заметить, что приведенное в работах [17–19] утверждение о тождественности колебаний второго осциллятора колебаниям первого, в рассматриваемой здесь ситуации, то есть при принятом здесь выборе параметров, нельзя считать достоверным. То есть колебания второго осциллятора являются достаточно самостоятельными, их частота близка к частоте возбуждения и хаотический элемент в них хотя и присутствует, но выражен значительно слабее, чем в колебаниях первого осциллятора. Поэтому для полноты картины следует рассматривать подробности колебаний обоих осцилляторов.

Обратимся теперь к рис. 13.2, где представлены частотные спектры колебаний (а) и их производных (б) для обоих осцилляторов при тех же параметрах, что на рис. 13.1.

Из рисунка можно видеть, что для первого осциллятора спектр колебаний как смещения (*a1*), так и производной (*b1*) имеет весьма

богатый вид, что обусловлено шумовым характером тех и других колебаний. Для колебаний смещения можно выделить узкую линию на частоте около 0,95, что близко к частоте возбуждения, а также довольно узкую совокупность нескольких линий вблизи частоты 2,0, то есть вблизи второй гармоники возбуждения. Особенно широкий набор имеет место в интервале частот от 2,0 до 4,0 с центром вблизи 3,0, что соответствует третьей гармонике возбуждения. Спектр колебаний для производной (*б1*) имеет еще более выраженный максимум на тройной частоте возбуждения. При этом линия на основной частоте (вблизи 0,9) весьма незначительна, а линия вблизи двойной частоты также примерно в два раза уступает линии на третьей гармонике.

Таким образом, можно считать, что для первого осциллятора преобладающими являются колебания на основной частоте и особенно на ее третьей гармонике.

Для второго осциллятора спектр колебаний смещения (*а2*) и производной (*б2*) имеет хорошо упорядоченный вид вблизи основной частоты возбуждения. Наблюдается одна узкая линия на самой этой частоте 1,0 и вблизи нее небольшой спутник на частоте около 0,9. Частота этого спутника приходится как раз на линию вблизи 0,9 первого осциллятора (*а1*). Совокупность спутника и основной частоты для второго осциллятора порождает биения, проявляющиеся в достаточно медленном изменении амплитуды разверток по времени, представленных на рис. 13.1, *а2* и рис. 13.1, *б2*.

Можно полагать, что столь бедный спектр второго осциллятора по сравнению со спектром первого обусловлен линейностью второго осциллятора, существенно отличающей его от сильно нелинейного первого осциллятора.

Таким образом, можно заключить, что главный инициатор формирования хаотического режима — первый осциллятор, а второй является ему в значительной степени подчиненным.

В связи с этим встанут следующие вопросы.

Какова роль нелинейности первого осциллятора в формировании хаотического характера его колебаний?

В какой мере второй осциллятор влияет на формирование и хаотический характер колебаний первого осциллятора?

Какова роль квадратичности связи первого осциллятора со вторым? Эти вопросы будут рассмотрены далее.

Замечание. В рассматриваемой ситуации собственные частоты обоих осцилляторов выбраны равными частоте возбуждения. Поэтому везде в тексте говорится о частоте именно возбуждения. В то же время в работах [17–20] показано, что различие всех этих частот накладывает определенные особенности на характер возбуждаемых колебаний. Выяснение таких особенностей авторы предполагают в виде темы для отдельной работы.

13.4. Классификация основных режимов колебаний

Как показано в предыдущих разделах, основные характеристики колебаний задает первое уравнение системы (13.3)–(13.4). Более подробное рассмотрение показывает, что при принятых параметрах (раздел 13.2.2) все разновидности возбуждаемых колебаний можно классифицировать на основе всего двух основных режимов, задаваемых первым уравнением системы (13.3)–(13.4). В свою очередь, эти два режима задаются первым уравнением системы, тогда как роль второго является подчиненной, как бы «балластной», то есть возвращает первому уравнению то, что получает от него в предыдущих циклах колебаний. Поэтому сначала рассмотрим основные режимы колебаний, свойственные одному первому уравнению в отсутствие связи, то есть уравнению вида (13.3) при $\gamma_1 = 0$:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \delta_1 x_1^3 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t). \quad (13.9)$$

В качестве параметра вариации выберем амплитуду возбуждения A . Остальные параметры будем считать заданными в соответствии с разделом 13.2.2.

Замечание. Следует заметить, что приведенное уравнение является одним из вариантов известного уравнения Дуффинга [1, стр. 90, 300], решение которого при определенном наборе параметров проявляет хаотическое поведение.

Обратимся к рис. 13.3, где показаны развертки по времени переменной (a) и ее производной (b), а также параметрические портреты (θ) и спектры возбуждаемых колебаний (z) при различных уровнях возбуждения A , приведенных слева для каждого из горизонтальных рядов рисунков.

Из рисунка видно, что развертки по времени во всех случаях имеют сильно выраженный период частоты возбуждения, что проявляется и в спектрах, где всегда присутствует заметная составляющая на основной частоте (при $\omega = 1$). По мере увеличения возбуждения возрастает изрезанность разверток, то есть обогащение их более высокочастотными составляющими, что соответствует возбуждению гармоник за счет нелинейности системы.

Важной общей особенностью всех портретов, начиная с $A = 2$, является их форма, соответствующая двум эллипсовидным фигурам, расположенным по обе стороны от вертикальной оси, с горизонтальной перетяжкой, соединяющей боковые эллипсы в единое целое. Такой вид портретов можно условно назвать «горизонтальной», или «лежачей восьмеркой». Из рисунка в целом виден всеобщий характер такой восьмерки.

Параметрические портреты колебаний ($\theta 1$), ($\theta 2$), ($\theta 3$), ($\theta 5$) имеют четко очерченные узкие линии, образованные повторяющимися

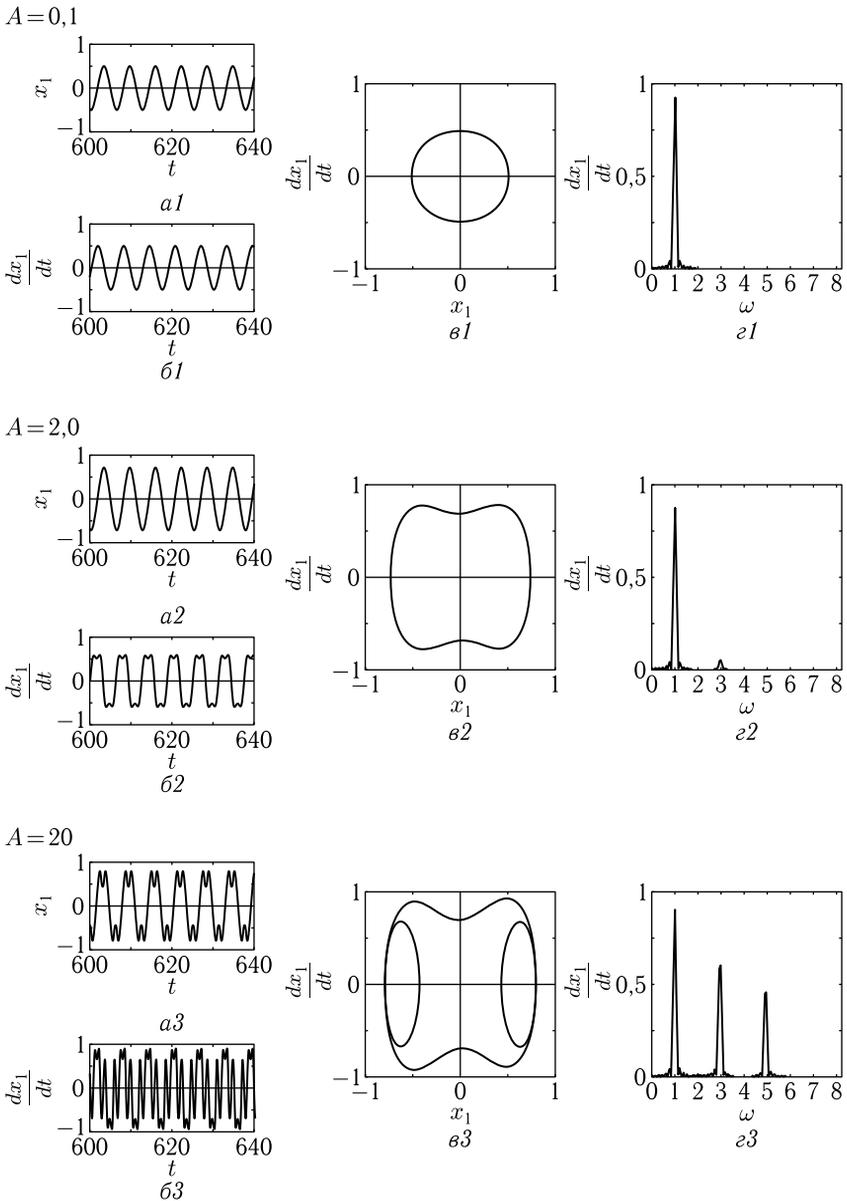


Рис. 13.3. Развертки по времени переменной (*a*) и ее производной (*б*), а также параметрические портреты (*в*) и спектры возбуждаемых колебаний (*г*) при различных уровнях возбуждения A , приведенных слева для каждого из горизонтальных рядов рисунков. Кривые соответствуют решению уравнения (13.8).
 Остальные параметры — те же, что в разделе 13.2.2

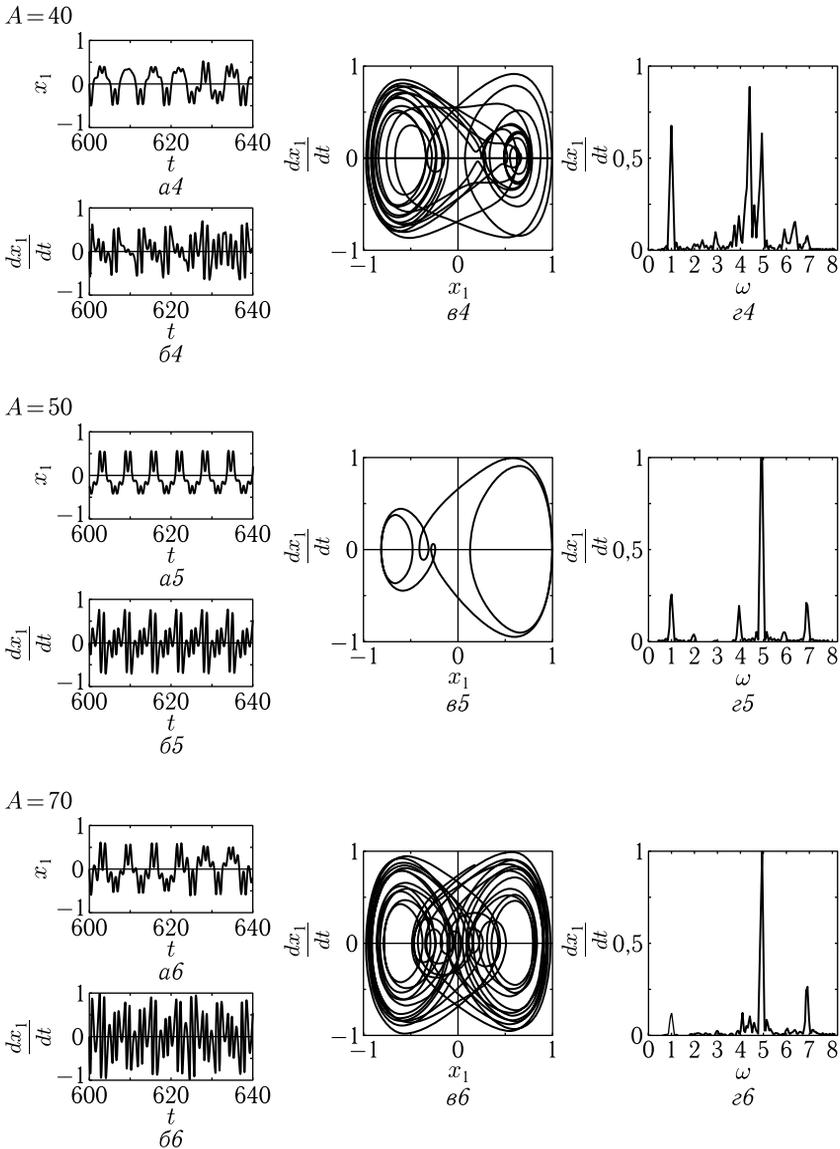


Рис. 13.3. (продолжение). Развертки по времени переменной (а) и ее производной (б), а также параметрические портреты (в) и спектры возбуждаемых колебаний (г) при различных уровнях возбуждения A , приведенных слева для каждого из горизонтальных рядов рисунков. Кривые соответствуют решению уравнения (13.8). Остальные параметры те же, что в разделе 13.2.2. Все развертки, портреты и спектры нормированы с целью приведения к близким величинам, удобным для рассмотрения

траекториями, тогда как параметрические портреты колебаний ($\epsilon 4$) и ($\epsilon 6$) сильно размыты, так что последующие траектории не повторяются.

На приведенных рисунках развертка по времени выбрана в интервале от 600 до 640 единиц, что примерно соответствует шести периодам возбуждения. Столь небольшое время развертки выбрано для того, чтобы можно было подробно различить структуру колебаний с достаточным разрешением по времени. При увеличении интервала времени развертки до нескольких тысяч единиц и более параметрические портреты ($\epsilon 1$), ($\epsilon 2$), ($\epsilon 3$) и ($\epsilon 5$) остаются четко очерченными без заметных изменений, тогда как портреты ($\epsilon 4$) и ($\epsilon 6$) полностью замазываются вплоть до сплошного черного тона. То есть эти две группы портретов отличаются принципиальным образом, что позволяет говорить о различии режимов колебаний.

Портреты ($\epsilon 1$) и ($\epsilon 2$) имеют четкую структуру — все траектории повторяют друг друга. Различие между этими двумя портретами состоит в том, что портрет ($\epsilon 1$) — геометрически правильная окружность, тогда как портрет ($\epsilon 2$) — как бы растянутый по горизонтали эллипс, имеющий «горловидную» перетяжку по меньшей (вертикальной) оси.

Спектральный состав всех режимов колебаний имеет мультигармонический характер, то есть колебания имеют множество гармоник. Исключением являются только колебания 1, где, благодаря низкому уровню возбуждения, колебания происходят на единственной частоте, так что более высокие гармоники отсутствуют. Спектры колебаний ($\epsilon 2$), ($\epsilon 3$), ($\epsilon 5$) имеют четко выраженную гармоническую структуру. Составляющие спектров, не кратные частоте возбуждения, отсутствуют. Спектры колебаний ($\epsilon 4$) и ($\epsilon 6$), кроме частот, кратных возбуждению, содержат промежуточные составляющие, амплитуда которых сравнима или даже больше основных. Так, спектр колебаний ($\epsilon 4$), кроме гармоник 4, 5, 6, 7, содержит сильный выброс между 4 и 5 гармониками, а также заметный выброс между 6 и 7 гармониками. В обоих случаях амплитуда выброса превышает амплитуды соседствующих гармоник. Спектр колебаний ($\epsilon 6$), кроме гармоник 4, 5 и 7, содержит дополнительные выбросы между 4 и 5 гармониками, а также между 6 и 7. В этих случаях амплитуды выбросов не так велики, как в спектре ($\epsilon 4$), однако тоже весьма заметны.

Таким образом, все виды колебаний можно разбить на два больших класса, имеющих следующие режимы.

Режим № 1 — мультигармонический регуляризованный. В этом режиме параметрический портрет имеет четко очерченные повторяющиеся траектории, спектр колебаний содержит только гармоники, кратные частоте возбуждения.

Режим № 2 — мультигармонический квазихаотический. В этом режиме параметрический портрет сильно размазан, траектории не повторяются, спектр колебаний, кроме гармоник, кратных частоте возбужде-

ния, содержит множество промежуточных частот, амплитуда которых может превышать соседствующие кратные гармоники.

По мере увеличения амплитуды возбуждения сначала возбуждается регулярный режим № 1, после чего при достаточном уровне возбуждения он сменяется квазихаотическим режимом № 2, который при дальнейшем увеличении возбуждения снова регуляризируется, переходя в режим № 1, увеличение возбуждения в котором снова приводит к квазихаотическому режиму № 2, и так далее. То есть по мере увеличения возбуждения, начиная с регулярного, имеет место чередование регулярного и квазихаотического режимов. Отметим, что какой-либо пороговый характер смены и чередования режимов отсутствует: все режимы по мере увеличения уровня возбуждения переходят друг в друга довольно плавным образом.

13.5. Модельная имитация формирования параметрического портрета

На примере модельной имитации покажем, что формирование «горизонтальной восьмерки» параметрического портрета обусловлено наличием в спектре колебаний нечетных гармоник высоких порядков. Обратимся к рис. 13.4, где в качестве примера показано сложение колебаний из трех частотных составляющих: основной частоты, третьей и пятой ее гармоник. В качестве имитационной функции выбрана следующая:

$$x(t) = a \sin(t) + b \sin(3t) + c \sin(5t). \quad (13.10)$$

Производная от этой функции равна:

$$dx/dt = a \cos(t) + 3b \cos(3t) + 5c \cos(5t). \quad (13.11)$$

В этих функциях переменную t будем рассматривать как имитацию времени, а саму функцию и ее производную — как имитацию смещения осциллятора и его производной по времени.

На рисунке в горизонтальных рядах представлены развертки по времени смещения (1) и производной (2), а также образованный этими функциями параметрический портрет (3). Каждый горизонтальный ряд образован соответствующим набором параметров, значения которых представлены в подписи к рисунку.

Из рисунка можно видеть, что в отсутствие гармоник (1) колебания смещения ($a1$) и производной ($b1$) имеют чистый синусоидальный характер, а параметрический портрет ($\vartheta1$) имеет форму правильной окружности. При включении третьей гармоники (2) колебания смещения ($a2$) приобретают вид пилы с симметричными зубцами, а производная ($b2$) на каждом максимуме обретает провал. Параметрический портрет ($\vartheta2$) уже имеет элементы горизонтальной восьмерки — два эллипса, центры которых расположены симметрично относительно нуля смещения, сросшиеся вместе в области касания. Включение пятой

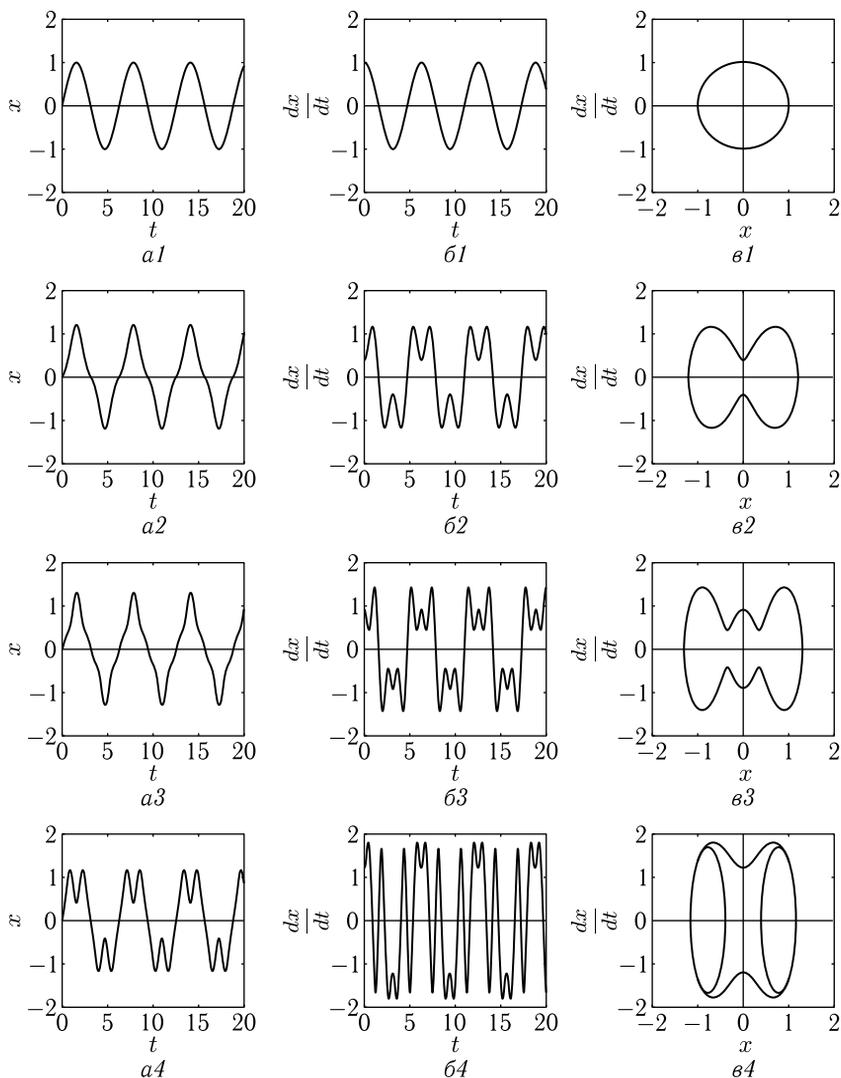


Рис. 13.4. Схема формирования параметрического портрета при различном наборе параметров: 1 — $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$; 2 — $a = 1$, $b = -0,2$, $c = 0$; 3 — $a = 1$, $b = -0,2$, $c = 0,1$; 4 — $a = 1$, $b = 0,4$, $c = -0,2$. a — функция $x(t)$; $б$ — производная dx/dt ; $в$ — модель параметрического портрета $x(dx/dt)$

гармоники (3) еще больше спрямляет зубья пилы колебаний смещения (а3), а для производной (б3) делает провал более зазубренным. На параметрическом портрете (в3) пятая гармоника раздвигает эллипсы дальше друг от друга и формирует между ними перетяжку,

огибающая которой также имеет характер, близкий к эллиптическому, однако размер получающейся горловины значительно меньше размера главных эллипсов.

В качестве дополнительного примера на рисунке представлены данные при частном наборе параметров, дающем параметрический портрет в виде отдельных эллипсов, соединенных вогнутой переемычкой (64). При этом колебания смещения (а4) и производной (б4) обогащаются дополнительными перепадами и приобретают довольно сложный характер.

Таким образом, можно видеть, что изменение соотношений между амплитудами частотных составляющих a , b и c в выражениях (13.10) и (13.11) позволяет получить значительное разнообразие как разверток по времени, так и параметрических портретов, весьма похожих на таковые, соответствующие колебаниям системы при различных уровнях возбуждения (рис. 13.3). Во всех этих случаях параметрический портрет имеет вид «горизонтальной восьмерки», то есть можно считать, что такой его вид является как бы «базовым», обусловленным именно наличием в спектре колебаний нечетных гармоник достаточно высоких порядков.

13.6. Уравнение с кубической нелинейностью

В предыдущем разделе показано, что формирование горизонтальной восьмерки обусловлено нелинейностью третьей степени. Выполним приближенное аналитическое рассмотрение роли кубической нелинейности в формировании амплитуды колебаний.

Сначала обратимся к уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b^2x^3 = 0, \quad (13.12)$$

содержащему кубическую нелинейность в чистом виде без влияния каких-либо других факторов, в том числе в отсутствие возбуждения, то есть свободное движение, реализуемое на основе задания начальных параметров.

Аналитическое решение уравнения (13.12) можно выполнить через представление второй производной через квадрат первой:

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] = 2 \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (13.13)$$

В результате такого представления переменные разделяются, так что получаемое решение имеет вид:

$$x = \frac{i\sqrt{2}}{b} \cdot \frac{1}{t}, \quad (13.14)$$

где мнимость пропадает при знаке минус в уравнении. Других решений стандартная аналитика не дает.

В то же время в (13.12) второе слагаемое — производная от потенциала четвертой степени. Если бы потенциал был второй степени, то это было бы простое уравнение колебаний, разрешимое через экспоненту. Здесь представление решения в виде экспоненты не проходит, так как остается экспонента в квадрате. В то же время из четности потенциала следует, что должно быть колебательное решение.

Поиск решения в виде

$$x = A \cdot \cos(\omega t), \quad (13.15)$$

где A — начальное смещение, приводит к уравнению

$$\left(-\omega^2 + \frac{3A^2 b^2}{4}\right) \cos(\omega t) + \frac{A^2 b^2}{4} \cos(3\omega t) = 0. \quad (13.16)$$

Экспонента дает примерно то же самое.

Это уравнение для частоты, стандартного способа решения не имеющее. Его коэффициенты зависят от времени, то есть частота также должна получаться зависящей от времени. Простое решение имеется при $t = 0$. При этом получаем решение в начальной точке:

$$\omega = bA. \quad (13.17)$$

Из этой формулы видно, что частота собственных колебаний прямо пропорциональна их амплитуде.

Численное решение уравнения (13.12) методом Рунге–Кутты дает колебания, очень близкие к синусоидальным, причем их частота зависит от параметра b и от начального смещения A в полном соответствии с полученной формулой (13.17). Однако проверка показывает, что выражение (13.15) с подставленным в него значением частоты (13.17) в общем случае исходному уравнению (13.12) не удовлетворяет, поэтому далее следует пытаться найти более приемлемое решение.

В качестве наводящего соображения в настоящей работе была выполнена численная проверка роли показателя степени второго слагаемого в уравнении (13.12). Было установлено, что при нечетном показателе решение является колебательным, а при четном — расходящимся. Это находится в соответствии с четностью и нечетностью потенциала. Увеличение нечетного показателя степени (проверено до 17) приводит к спрямлению периодов синусоиды, то есть синусоида превращается в пилу с симметричными зубцами. Согласно классике [127, стр. 473], разложение в ряд Фурье функции типа симметричной пилы имеет вид:

$$x = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \left\{ \cos \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{l} + \dots \right\}, \quad (13.18)$$

где l — половина периода пилы.

Исходя из такой аналогии, будем искать решение уравнения (13.12) в виде

$$x = A \left\{ \cos(\omega t) + \frac{1}{9} \cos(3\omega t) \right\}. \quad (13.19)$$

Подставляем в исходное уравнение, учитываем малость слагаемых с большими знаменателями (степень девяти), а также оставляем только аргументы (ωt) и $(3\omega t)$. В результате получаем уравнение

$$-12\omega^2 [\cos(\omega t) + \cos(3\omega t)] + b^2 A^2 [5 \cos(\omega t) + 10 \cos(3\omega t)] = 0, \quad (13.20)$$

которое при $t = 0$ дает

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} bA, \quad (13.21)$$

то есть опять-таки частота прямо пропорциональна амплитуде колебаний, хотя коэффициент и несколько отличается от такового в формуле (13.17).

Положим теперь, что второе слагаемое в выражении (13.19) содержит неопределенный множитель B , который подберем, исходя из соответствия численному решению. То есть предполагаем решение в виде

$$x = A \left\{ \cos(\omega t) + \frac{B}{9} \cos(3\omega t) \right\}. \quad (13.22)$$

Подстановка (13.22) в (13.12) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} &[-12\omega^2 + A^2 b^2 (9 + b)] \cos(\omega t) + \\ &+ [-12B\omega^2 + A^2 b^2 (3 + 2B)] \cos(3\omega t) = 0. \end{aligned} \quad (13.23)$$

Если в этом выражении положить $B = 0$ и $t = 0$, после чего найти частоту, то получается выражение (13.17).

Аналитическое решение этого уравнения относительно частоты вряд ли возможно, однако, учитывая, что оно должно выполняться при любых значениях времени, можно найти частное решение, положив оба коэффициента при косинусах равными нулю.

При этом для частоты получаем два выражения:

$$\omega = bA \sqrt{\frac{9+b}{12}}; \quad (13.24)$$

$$\omega = bA \sqrt{\frac{3+2B}{12B}}. \quad (13.25)$$

Приравнявая эти выражения, можно найти B :

$$B = \frac{3}{7+b}. \quad (13.26)$$

При $b = 1$ получаем $B = 0,375$. Численная оценка величины B , исходя из условия минимизации выражения (13.23), дает B в интервале от 0,17 до 0,41, что как раз включает в себя полученное значение.

Главным результатом проделанного аналитического рассмотрения можно считать тот факт, что во всех случаях (13.17), (13.21), (13.24), (13.25) — частота всегда прямо пропорциональна амплитуде собственных колебаний.

Таким образом, с определенной достоверностью можно считать, что нелинейность третьей степени в первом приближении обеспечивает линейную возрастающую зависимость частоты собственных колебаний от их амплитуды.

13.7. Области формирования хаотического режима при различных уровнях возбуждения

В ходе проведенного рассмотрения (раздел 13.4) показано, что возникновение хаотического режима по мере увеличения амплитуды возбуждения не является окончательным. То есть при дальнейшем увеличении возбуждения хаотический режим может снова смениться регулярным, который далее снова сменяется хаотическим, и так далее. Особенно ясно это видно из рис. 13.3, где возникший при $A = 40$ хаотический режим уже при $A = 50$ снова регуляризируется, а при $A = 70$ вновь обращается в хаотический. Таким образом, представляет интерес рассмотреть чередование режимов более подробно.

Обратимся к рис. 13.5, где показаны области существования хаотического и регуляризированного режимов для первого осциллятора при различных уровнях возбуждения. Сверху приведены номера преобладающих гармоник. Три схемы соответствуют трем различным видам слагаемых связи в уравнении (13.3): первый вид (а) — отсутствие связи, второй (б) — связь линейная, то есть пропорциональна x_2^1 , третий — связь квадратичная, пропорциональная x_2^2 .

Из рисунка видно, что в отсутствие связи (а) области хаотического и регулярного режимов чередуются в довольно правильном порядке, видимая тенденция к сгущению или разрежению областей не заметна. Увеличение уровня возбуждения приводит к постепенному росту номеров возбуждаемых гармоник.

В случае линейной связи (б) характер чередования областей того и другого режимов в общем сохраняется, однако наблюдается растяжение всей картины в сторону больших значений возбуждения. В отличие от первого случая, где второй осциллятор не участвует, здесь влияние второго осциллятора состоит в отмеченном растяжении расположения областей в сторону увеличения возбуждения. То есть здесь происходит «нагружение» первого осциллятора вторым, за счет чего те же режимы его колебаний требуют более высокого уровня возбуждения. Таким образом, здесь второй осциллятор играет «балластную» роль, то есть отсасывает на себя часть энергии возбуждения, в определенной степени затрудняя возбуждение первого осциллятора.

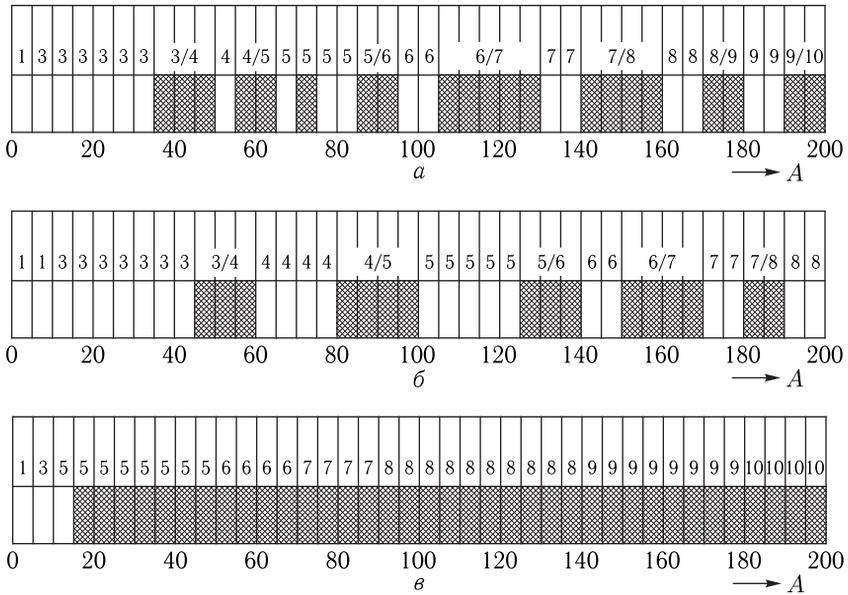


Рис. 13.5. Схемы областей существования хаотического и регуляризованного режимов колебаний первого осциллятора при различной амплитуде возбуждения. Отдельные схемы соответствуют различным показателям степени связи в уравнении (13.3): a — связь отсутствует; $б$ — связь пропорциональна x^1 ; $в$ — связь пропорциональна x^2 . Заштрихованные области — режим хаотический; чистые области — режим регулярный. В верхних рядах приведены соответствующие уровню возбуждения номера гармоник преобладающих максимумов спектров. Дробные значения соответствуют сравнимой величине максимумов на обоих соседствующих гармониках

В случае квадратичной связи ($в$) чередование областей различных режимов уже не наблюдается. Начиная с довольно низкого уровня возбуждения ($A = 15$) колебания приобретают хаотический характер и регуляризация далее не происходит. Как и в двух предыдущих случаях, увеличение уровня возбуждения приводит к росту номеров возбуждаемых гармоник. Здесь, однако, спектры колебаний становятся довольно широкими, так что относительное выделение амплитуд тех и других гармоник происходит слабее, поэтому дробные значения не отмечены. В отличие от предыдущего случая здесь второй осциллятор уже не является «балластом» и участвует в формировании режимов более активно, как бы повышая уровень нелинейности колебаний в целом. В самом деле, если для первого осциллятора нелинейность задается членом вида x^3 , то здесь к ней добавляется нелинейность еще вида x^2 , получаемая за счет того, что второй осциллятор как бы возвращает первому то, что от него получает. А если он получает возбуждение порядка x^3 , то за счет квадратичности связи степень нелинейности

возрастает до x^5 , что и создает более удобные условия для формирования хаоса, проявляющиеся в расширении области хаотического режима на всю горизонтальную ось рис. 13.5, в.

Рассмотрим теперь, что происходит с номерами возбуждаемых гармоник при увеличении уровня возбуждения. Согласно показанному в разделе 13.6, частота, то есть номер гармоники в масштабе частоты возбуждения, должна быть прямо пропорциональна амплитуде возбуждения. Обратимся к рис. 13.6, где такие зависимости построены по материалам рис. 13.5. Приняты те же три случая: отсутствие связи (0), связь, пропорциональная x^1 (1) и связь, пропорциональная x^2 (2). Можно видеть, что во всех трех случаях наблюдаемые точки довольно близко аппроксимируются прямыми с одним и тем же угловым коэффициентом 0,37, но сдвинутыми вверх и вниз на величины порядка $\Delta A = 11$.

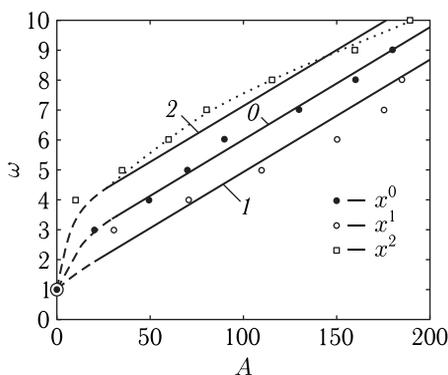


Рис. 13.6. Зависимости частоты максимума спектра от амплитуды возбуждения при различных степенных показателях связи. Прямая 1 соответствует $\omega_1 = 0,37 \cdot A + 12$, прямая 0 соответствует $\omega_0 = 0,37 \cdot A + 23$, прямая 2 соответствует $\omega_2 = 0,37 \cdot A + 34$. Все параметры те же, что в разделе 13.2.2

Таким образом, из рисунка видно, что вывод, принятый в разделе 13.6, о линейном характере этих зависимостей, в основном, подтверждается. Следует отметить однако две существенные особенности. Во-первых, все три зависимости при малых значениях A сходятся к одной точке (отмеченной кружком с сердцевинкой). Соответствующие участки кривых отмечены пунктиром. Видно, что все они лежат ниже линейных зависимостей. Во-вторых, зависимость для x^2 (точки в виде открытых квадратов) не вполне ложится на прямую 2, а имеет определенный выгиб вверх, отмеченный точечной кривой. То есть и здесь зависимость заметно отклоняется от линейной.

Для выяснения дополнительных особенностей спектральных свойств наблюдаемых колебаний представляет интерес их рассмотрение в более широком интервале уровней возбуждения, что и будет сделано далее.

13.7.1. Критерий формирования квазихаотического режима

Приведем некоторые соображения, касающиеся формирования хаоса в рассматриваемой системе (13.3)–(13.4).

Первое уравнение, без учета связи, имеет вид (13.9):

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \beta \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \rho \cdot x + \delta \cdot x^3 = A \cdot \cos(\omega t), \quad (13.27)$$

где предполагается $\rho > 0$, а также $\delta > 0$.

Потенциал является суммой двух слагаемых — второй и четвертой степени:

$$U = \frac{\rho}{2} x^2 + \frac{\delta}{4} x^4, \quad (13.28)$$

то есть парабола второй степени вложена в параболу четвертой степени, причем ветви обеих парабол стремятся к плюс бесконечности. Качественно можно считать, что потенциал имеет вид одной ямы четвертого порядка, имеющей всего один минимум, симметричный относительно нулевого значений координаты. Таким образом, вследствие единственности и симметричности потенциальной ямы, изменение характера потенциала не может обеспечить механизм возникновения хаоса, то есть следует искать другие причины.

Обратимся к рассмотрению характерных признаков изменения структуры колебаний по мере увеличения амплитуды возбуждения. В общем случае, как можно видеть из рис. 13.3, при малой (например, $A = 20$), а также при большой ($A = 50$) амплитудах возбуждения колебания являются регулярными, параметрический портрет представляет собой горизонтальную восьмерку, очерченную узкими линиями. Все траектории на портрете идут по одним и тем же линиям, какой-либо размазки нет. Между этими двумя областями регулярности по среднему уровню возбуждения ($A = 40$) имеется область, где колебания нерегулярные, близкие к хаотическим, параметрический портрет — также горизонтальная восьмерка, однако сильно замазанная множеством траекторий, друг друга не повторяющих.

Можно полагать, что критерий хаоса — изменение количества гармоник по мере увеличения возбуждения. При очень малом возбуждении гармоник нет, колебания строго регулярные, параметрический портрет — четкий эллипс. При достаточно малом возбуждении колебания остаются регулярными, но появляется составляющая на тройной частоте возбуждения. При среднем возбуждении добавляется пятая гармоника. При этом как с третьей, так и с пятой гармониками колебания являются регулярными. Переход от трех гармоник к пяти происходит в узком интервале по уровню возбуждения и сопровождается хаосом. Дополнительное рассмотрение показывает, что при дальнейшем увеличении уровня возбуждения добавляется седьмая гармоника, причем колебания с семью гармониками опять являются регулярными, но переход от пятой к седьмой сопровождается хаосом, хотя выраженным несколько слабее, чем переход от третьей гармоники к пятой.

Таким образом, определенная полоса по уровню возбуждения, в которой формируется хаос, связана с добавлением еще одной очередной гармоники к уже имеющимся. То есть хаотизация колебаний происходит тогда, когда, амплитуда последующей гармоники начинает преобладать над уровнем предыдущей.

13.7.2. Особенности колебаний в широком интервале уровня возбуждения

Завершая рассмотрение типичного примера хаотических колебаний, отметим, что для реализации подобного режима требуется достаточный уровень возбуждения (то есть значения A_1). При слабом возбуждении колебания обоих осцилляторов близки к синусоидальным, параметрический портрет имеет четкую (без размазывания) форму круга или слабо вытянутого по горизонтали эллипса, а спектры смещения и производной содержат только одну узкую линию, частота которой совпадает с частотой возбуждения. При увеличении уровня возбуждения сначала появляется вторая гармоника, причем колебания в целом остаются достаточно регулярными. Хаотический режим возникает только при появлении других более высокочастотных гармоник, в первую очередь третьей и далее. По мере увеличения уровня возбуждения переход от регулярного режима к хаотическому происходит достаточно плавно без резкого порога, то есть сначала появляются небольшие искажения регулярности, которые постепенно растут, приводя к полной хаотизации всего процесса колебаний.

При принятых здесь параметрах регулярный режим начинает искажаться с уровня возбуждения A_1 около 0,2, а при уровне $A_1 = 0,8$ колебания становятся достаточно хаотичными. При дальнейшем увеличении уровня возбуждения вплоть до $A_1 = 1000$ характер колебаний остается близким к описанному выше. Главной особенностью спектра здесь является появление все более высокочастотных гармоник, которые группируются в широкий подъем, подобный представленному на рис. 13.2, *a1* и рис. 13.2, *b1*. При увеличении A_1 выше 1000 вплоть до 10 000 этот подъем сужается, в спектре остаются только две основные составляющие — частота возбуждения и сравнительно неширокий подъем, образованный несколькими наиболее высокочастотными гармониками. При этом развертка колебаний имеет вид синусоиды с частотой возбуждения, на которую наложены крайне частые колебания высокочастотных гармоник. Колебания второго осциллятора постепенно упорядочиваются, и биения затухают. Так, при A_1 порядка 1000 амплитуда биений составляет около 20% от максимального значения амплитуды, а при A_1 порядка 5000 и более биения сглаживаются до единиц процентов. При A_1 порядка 10 000 биения уже отсутствуют, колебания становятся полностью регулярными с частотой, равной частоте возбуждения. Параметрический портрет теряет размазку и представляет собой единственное четко выраженное кольцо с узкой образующей. Однако такое упорядочение колебаний относится только

ко второму осциллятору, тогда как колебания первого во всем рассмотренном интервале содержат значительные элементы хаотичности. Более подробному исследованию этого режима авторы предполагают посвятить отдельную работу.

13.7.3. Спектральные характеристики при изменении уровня возбуждения

Рассмотрим теперь спектральные характеристики колебаний системы при изменении уровня возбуждения несколько более подробно.

Из рис. 13.2 видно, что главная составляющая спектров смещения и производной для первого осциллятора представляет собой широкий подъем с сильно изрезанными склонами. Особенно ярко такая структура спектра проявляется для производной (рис. 13.2, *б1*), где составляющая на частоте возбуждения (заметная для смещения на рис. 13.2, *а1*) почти отсутствует. По мере увеличения уровня возбуждения развертка смещения приобретает все возрастающую постоянную составляющую, отмеченную при рассмотрении рис. 13.1, *а1*. Так, при уровне возбуждения $A_1 = 10$ постоянная составляющая равна 1, при $A_1 = 100$ близка к 3, а при $A_1 = 1000$ достигает 10. Эта составляющая затрудняет построение спектра в едином масштабе для всех частот, так как ее величина превышает амплитуды переменных составляющих спектра более чем на порядок. Введение же логарифмического масштаба хотя и приводит к сравнительному выравниванию составляющих спектра на всех частотах, но обогащает картину множеством пилообразных выбросов, что в значительной мере нарушает ее наглядность. В то же время, как отмечено при рассмотрении рис. 13.1, *б1*, для производной постоянная составляющая отсутствует, а структура главного подъема спектра остается подобной таковой для смещения (что особенно хорошо видно из сравнения рис. 13.2, *а1* с рис. 13.2, *б1*). Поэтому можно полагать, что для исследования свойств главного подъема спектра достаточно рассмотреть спектральные свойства не смещения, а именно производной.

В соответствии со сказанным рассмотрим, как меняется спектр производной при изменении амплитуды возбуждения в широких пределах. Обратимся к рис. 13.7, где представлены зависимости частоты максимума (сплошные точки) и краев (открытые точки) главного подъема спектра производной колебаний первого осциллятора от амплитуды возбуждения.

На рисунке точки получены из спектров колебаний производной, а линии построены по следующим аппроксимирующим формулам:

для кривой 1 (сплошная линия)

$$y = -10^{-5}(x - 1200)^2 + 21,7; \quad (13.29)$$

для кривой 2 (пунктир)

$$y = -10^{-5}(x - 1200)^2 + 24,4; \quad (13.30)$$

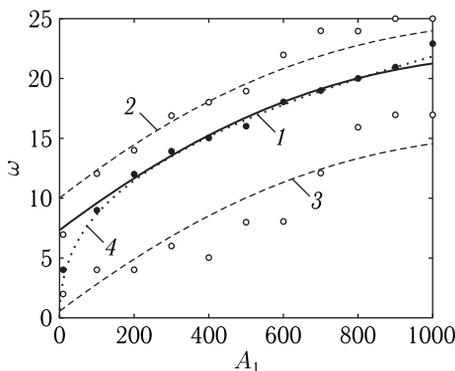


Рис. 13.7. Зависимости частот главного подъема спектра производной для первого осциллятора от амплитуды возбуждения. 1 — аппроксимация частоты максимума главного подъема спектра, построенная по формуле (13.29); 2 — аппроксимация частоты верхнего края главного подъема на уровне 0,1 от максимума, построенная по формуле (13.30); 3 — аппроксимация частоты нижнего края главного подъема на уровне 0,1 от максимума, построенная по формуле (13.31); 4 — аппроксимация частоты максимума главного подъема спектра, построенная по формуле (13.32)

для кривой 3 (пунктир)

$$y = -10^{-5}(x - 1200)^2 + 14,9. \quad (13.31)$$

Линии 2 и 3 соответствуют сдвигу линии 1 вверх и вниз соответственно на 2,7 и $-6,8$.

Недостатком такой аппроксимации является сильное превышение кривой 1 над сплошными точками в области изменения A_1 от нуля до 100. Поэтому для сплошных точек можно предложить более близкую аппроксимацию (кривая 4 — точечная линия)

$$y = 1,38x^{0,4}. \quad (13.32)$$

Заметный разброс точек, особенно для кривой 3, обусловлен сильной изрезанностью спектра, наглядно видимой на рис. 13.2, 61. Тем не менее возрастающий характер зависимостей с постепенным уменьшением скорости нарастания прослеживается вполне четко. Масштаб по вертикали соответствует абсолютным значениям частоты, то есть частота возбуждения соответствует $\omega = 1$, а частота максимума (сплошная кривая), например, при $A_1 = 200$ соответствует $\omega = 11$, то есть одиннадцатой гармонике, частота при $A_1 = 400$ соответствует $\omega = 14$, то есть четырнадцатой гармонике, и так далее.

Важным обстоятельством является тот факт, что увеличение уровня возбуждения приводит не к простому расширению спектра с одновременным увеличением амплитуд как высоких, так и низких гармоник,

а к выделению сравнительно узкой полосы (между пунктирными линиями), практически не расширяющейся далее, центр которой (сплошная линия) по мере увеличения уровня возбуждения сдвигается по частоте вверх.

Отличие от полученных ранее зависимостей, приведенных на рис. 13.6, состоит в заметном их отклонении от линейности, что связано со значительно более широким диапазоном изменения уровня возбуждения. Приведенные на рис. 13.6 зависимости здесь отражают лишь небольшой начальный участок кривых, что, однако, не умаляет их значения, учитывая их аналитический вывод.

Как отмечено в разделе 13.6, можно полагать, что более точное аналитическое рассмотрение может быть выполнено на основе представления решения в виде

$$x = a_1 \sin(\omega t) + a_3 \sin(3\omega t) + a_5 \sin(5\omega t) + \dots \quad (13.33)$$

Однако такой путь, даже при ограничении только первыми двумя слагаемыми, приводит к крайне громоздким вычислениям, поэтому авторы оставляют его рассмотрение в качестве отдельной задачи.

13.7.4. Амплитуда колебаний при различных уровнях возбуждения

В предыдущих разделах рассмотрены частотные свойства колебаний осцилляторов. Отметим теперь амплитудные свойства колебаний, не обращая внимания на их конкретный характер и диапазон частот.

Обратимся к рис. 13.8 и рис. 13.9, где показаны зависимости амплитуды и производной колебаний первого (1) и второго (2) осцилляторов от уровня возбуждения. Точки — результаты отсчетов по разверткам по времени, подобным приведенным на рис. 13.1. Уровни амплитуд и производных в случае шумового режима отсчитывались по максимуму отклонений (выбросов в ту или иную сторону) в интервале времени от 600 до 1000 единиц. В случае смещения нуля за счет постоянной составляющей (что наблюдалось для $x_{1,2}$) бралась половина максимального размаха колебаний от плюса до минуса.

На рис. 13.8 приведены зависимости амплитуды колебаний первого (1) и второго (2) осцилляторов от уровня возбуждения A_1 . Сплошные линии построены по аппроксимирующим формулам

$$y_1 = 0,50 \cdot x^{0,5}; \quad (13.34)$$

$$y_2 = 1,77 \cdot x^{0,5}. \quad (13.35)$$

Из рисунка видно, что обе зависимости являются нарастающими, однако такое нарастание по мере увеличения возбуждения постепенно замедляется. В соответствии с аппроксимирующими формулами, нарастание можно представить в виде корневой зависимости.

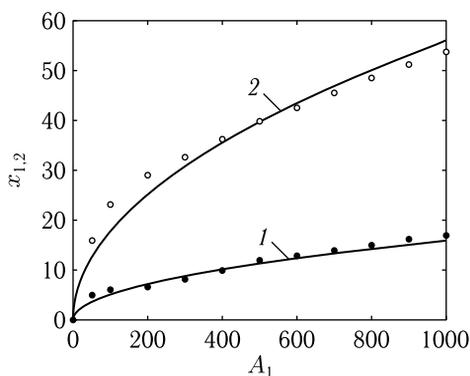


Рис. 13.8. Зависимости амплитуды колебаний первого (1) и второго (2) осцилляторов от уровня возбуждения. Кривая 1 построена по формуле (13.34), кривая 2 — по формуле (13.35). Параметры приведены в разделе 13.2.2

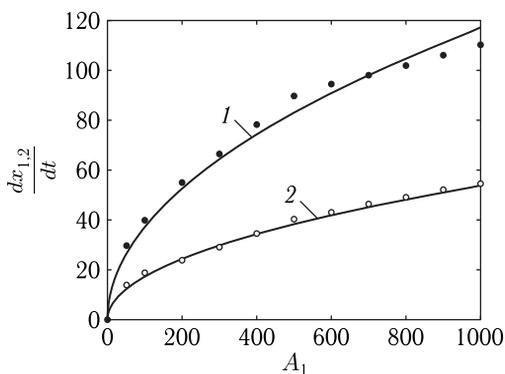


Рис. 13.9. Зависимости амплитуды производных колебаний первого (1) и второго (2) осцилляторов от уровня возбуждения. Кривая 1 построена по формуле (13.36), кривая 2 — по формуле (13.37). Параметры приведены в разделе 13.2.2

На рис. 13.9 приведены зависимости амплитуд производных колебаний первого (1) и второго (2) осцилляторов от уровня возбуждения A_1 . Сплошные линии построены по аппроксимирующим формулам

$$y_1 = 3,70 \cdot x^{0,5}; \quad (13.36)$$

$$y_2 = 1,70 \cdot x^{0,5}. \quad (13.37)$$

Из рисунка видно, что и в этом случае обе зависимости являются нарастающими, причем по мере увеличения возбуждения рост их постепенно замедляется. В соответствии с аппроксимирующими формулами нарастание можно представить в виде корневой зависимости. То есть обе зависимости подобны таковым на рис. 13.8.

13.8. Иллюстрация влияния кубической нелинейности

Рассмотрим теперь характер наблюдаемых зависимостей более подробно. Прежде всего отметим, что корневой рост резко отличается от прямолинейного нарастания, свойственного системе в отсутствие нелинейности. Покажем, что причиной замедления роста амплитуды первого осциллятора является свойственная ему кубическая нелинейность. Колебания же второго осциллятора возбуждаются за счет колебаний первого, поэтому рост их амплитуды имеет тот же характер, что и для первого.

Для явной демонстрации влияния кубической нелинейности на зависимость амплитуды от уровня возбуждения, обратимся к вспомогательному рис. 13.3. При построении кривых на этом рисунке использованы два вспомогательных уравнения:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta \cdot \frac{dx}{dt} + \rho \cdot x = A \cdot \cos \omega t; \quad (13.38)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta \cdot \frac{dx}{dt} + \rho \cdot x + \delta \cdot x^3 = A \cdot \cos \omega t. \quad (13.39)$$

Оба эти уравнения можно рассматривать как «урезанные» варианты первого уравнения системы (13.3)–(13.4), причем в обоих случаях связь со вторым осциллятором отсутствует, то есть колебания первого осциллятора остаются в чистом виде. Первое уравнение является традиционным уравнением вынужденных колебаний, второе отличается от первого наличием слагаемого, пропорционального x^3 , то есть содержит кубическую нелинейность, аналогичную присутствующей в первом уравнении системы (13.3)–(13.4).

Первое уравнение решается аналитически методом вариации постоянных [78, 79]. В результате получаются биения между собственными и вынужденными колебаниями, которые по прошествии времени релаксации затухают, в результате чего амплитуды колебаний выходят на стационарное значение. Второе уравнение при произвольном наборе параметров аналитически разрешить не удается. Аналитический вариант решения одного из частных случаев приведен в [1, стр. 303, форм. (12)], однако такое решение хаотических свойств не проявляет. В сложившейся ситуации, для единства рассмотрения оба уравнения будем решать далее только численно методом Рунге–Кутты и проследим за амплитудой колебаний, установившихся после окончания процесса релаксации. В случае хаотических режимов будем регистрировать амплитуду максимальных выбросов, подобно тому, как это было сделано при рассмотрении рис. 13.8.

Обратимся к рис. 13.10, где показаны зависимости амплитуды колебаний от уровня возбуждения для линейного и нелинейного осцилляторов.

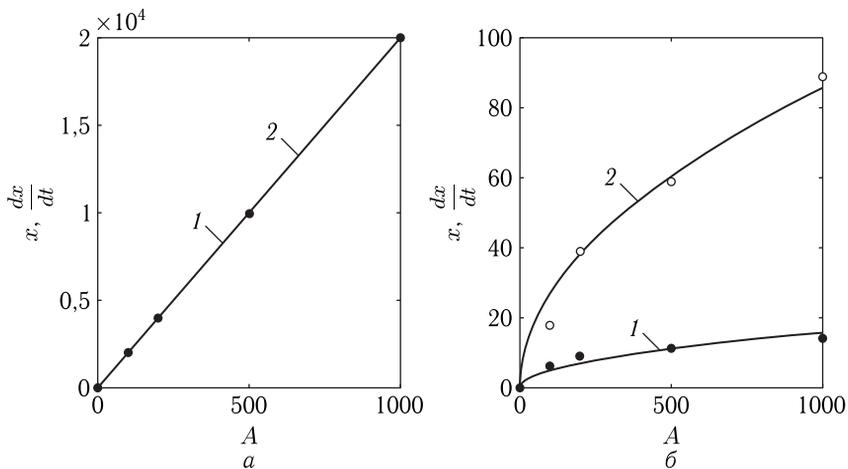


Рис. 13.10. Зависимости амплитуды колебаний от уровня возбуждения для линейного и нелинейного осцилляторов: a — осциллятор линейный, уравнение (13.38); b — осциллятор нелинейный, уравнение (13.39). 1 — функция x ; 2 — производная dx/dt . Параметры заданы в разделе 13.2.2 (кроме случая a), где $\delta = 0$)

Из рисунка можно видеть, что в линейном случае (a) как сама функция x , так и ее производная dx/dt зависят от амплитуды возбуждения A линейно с одним и тем же угловым коэффициентом, равным 20. В нелинейном случае (b) обе зависимости имеют четко выраженный характер нарастания с постепенным замедлением, с высокой точностью аппроксимации описываемым корневыми зависимостями:

кривая 1

$$y_1 = 0,50 \cdot x^{0,5}; \quad (13.40)$$

кривая 2

$$y_2 = 2,70 \cdot x^{0,5}. \quad (13.41)$$

Взаимное расположение кривых для функции и производной с точностью до постоянного коэффициента порядка 2 (здесь кривые раздвинуты несколько больше) также совпадает со взаимным расположением кривых 1 на рис. 13.8 и рис. 13.9.

Таким образом, можно считать, что именно кубическая нелинейность является причиной замедления роста зависимостей функции и ее производной от амплитуды возбуждения. Причиной такого замедления, по-видимому, можно считать то обстоятельство, что переменная, возведенная в третью степень, требует для своей раскачки больше энергии, чем та же переменная в первой степени, то есть, образно говоря, кубическая нелинейность «отсасывает» на себя часть энергии возбуждения,

в результате чего рост амплитуды замедляется. Заметим, что такое утверждение является лишь качественным и на энергетическом уровне требует более подробного рассмотрения, чему авторы предполагают посвятить отдельную работу.

13.9. Относительное расположение зависимостей для обоих осцилляторов

Обратим теперь внимание на наблюдаемое на рис. 13.8 и рис. 13.9 взаимное расположение отдельных зависимостей для того и другого осцилляторов. На рис. 13.8 кривая 1 для первого осциллятора лежит ниже кривой 2 для второго. С первого взгляда это не вполне очевидно, так как первичным сигналом возбуждается именно первый осциллятор, а на второй возбуждение передается уже от первого, то есть с определенным ослаблением. Однако, как показано выше, замедление роста амплитуды колебаний первого осциллятора вызвано их подавлением за счет его кубической нелинейности. Для второго осциллятора такая нелинейность отсутствует, а все остальные параметры совпадают, поэтому амплитуда его колебаний превышает амплитуду колебаний первого.

На рис. 13.9 приведены не сами функции, а их производные, которые характеризуют изрезанность разверток по времени для $x_{1,2}$. При этом кривая 1 лежит выше кривой 2, так что изрезанность развертки колебаний первого осциллятора выше, чем второго. Можно полагать, что высокая изрезанность развертки первого осциллятора обусловлена его нелинейным характером, тогда как второй осциллятор остается линейным, за счет чего изрезанность его развертки падает. В самом деле, нелинейность первого осциллятора вызывает появление множества гармоник, сложение которых и обеспечивает сильную изрезанность развертки, тогда как линейный характер второго осциллятора обеспечивает определенную «фильтрацию» поступающих на него с первого осциллятора колебаний, в результате чего гармоники подавляются и изрезанность колебаний обеспечивается только частотой возбуждения. Типичный характер изрезанности весьма наглядно иллюстрируется приведенным выше рис. 13.1, а соответствующие спектры — рис. 13.2, что и объясняет взаимное расположение кривых 1 и 2 на рис. 13.9.

Выводы по главе 13

Рассмотрены возбуждаемые внешней периодической силой автомодуляционные и хаотические колебания в системе из двух связанных осцилляторов, один из которых содержит кубическую нелинейность, а связь между осцилляторами является квадратичной. Рассмотрение проведено на основе системы из двух связанных дифференциальных

уравнений второго порядка колебательного типа, одно из которых содержит члены, характеризующие нелинейность.

Кратко перечислены основные виды и режимы колебаний в такой системе, наблюдавшиеся в предшествующих работах. Отмечено их крайне высокое разнообразие в сочетании с отсутствием систематического выявления основных свойств и механизмов. С целью упорядочения и наблюдения явлений в чистом виде приняты наиболее простые параметры задачи, а именно: равенство собственных частот обоих осцилляторов и равенство этим частотам частоты возбуждения. Параметры нелинейности и связи выбраны такого же порядка, что и упомянутые частоты.

Рассмотрено поведение системы в широком интервале амплитуды возбуждения. Получены развертки колебаний по времени, параметрические портреты для переменной и ее производной, а также спектральные характеристики возбуждаемых колебаний. На примере среднего уровня возбуждения рассмотрено типичное многообразие колебаний. Показано, что в хаотическом режиме развертки по времени для первого осциллятора имеют сильно выраженный шумовой характер, тогда как в колебаниях второго осциллятора основная частота колебаний совпадает с частотой возбуждения, а шумовая составляющая является значительно более слабой. Параметрический портрет для первого осциллятора имеет вид сильно размазанной «горизонтальной восьмерки», а для второго — совокупности нескольких колец, наложенных друг на друга с относительно небольшим сдвигом.

Рассмотрен спектральный состав возбуждаемых колебаний. Показано, что для первого осциллятора спектр как смещения осциллятора, так и его производной, имеет вид нескольких (двух-трех) широких сильно изрезанных полос с явно выраженным максимумом на середине полосы, причем преобладающими являются колебания на основной частоте и особенно на ее третьей гармонике. Для второго осциллятора спектры колебаний смещения и производной имеют хорошо упорядоченный вид вблизи основной частоты возбуждения. Наблюдается одна узкая линия на самой этой частоте, сопровождаемая небольшим сателлитом, расположенным по частоте несколько ниже основной линии. Отмечено, что бедность спектра второго осциллятора, по сравнению со спектром первого, обусловлена линейностью второго осциллятора, существенно отличающей его от сильно нелинейного первого осциллятора.

На основе анализа параметрических портретов и спектров колебаний выполнена классификация их основных режимов, наблюдаемых в широком диапазоне амплитуд возбуждения. Показано, что все разновидности возбуждаемых колебаний можно классифицировать на основе всего двух основных режимов, задаваемых первым осциллятором. При этом роль второго является подчиненной, как бы «балластной», то есть возвращает первому осциллятору то, что получает от него в предыдущих циклах колебаний. Выявлены следующие два режима: Режим

№ 1 — мультигармонический регуляризованный. Параметрический портрет имеет четко очерченные повторяющиеся траектории, спектр колебаний содержит только гармоники, кратные частоте возбуждения. Режим № 2 — мультигармонический квазихаотический. Параметрический портрет сильно размазан, траектории не повторяются, спектр колебаний, кроме гармоник, кратных частоте возбуждения, содержит множество промежуточных частот. Показано, что по мере увеличения амплитуды возбуждения, начиная с регулярного, имеет место чередование регулярного и квазихаотического режимов.

Выполнена модельная имитация формирования параметрического портрета. Показано, что образование «горизонтальной восьмерки» параметрического портрета обусловлено наличием в спектре колебаний нечетных гармоник высоких порядков, начиная с третьего и далее.

Выполнено аналитическое рассмотрение свободных колебаний, описываемых уравнением, содержащим вторую производную в сочетании с переменной в третьей степени, отражающей кубическую нелинейность. Показано, что частота свободных колебаний такой системы пропорциональна их амплитуде, задаваемой начальным смещением. Отмечено, что наличие в структуре уравнения для первого осциллятора полной системы члена с третьей степенью, по мере увеличения возбуждения также должно вызывать увеличение частоты собственных колебаний, то есть выделение гармоник со все возрастающими номерами.

Рассмотрены области формирования хаотического режима при различных уровнях возбуждения для трех основных случаев: первый — отсутствие связи между осцилляторами, второй — наличие линейной связи и третий — наличие квадратичной связи. Показано, что в отсутствие связи области хаотического и регулярного режимов чередуются в почти правильном порядке, тенденция к сгущению или разрежению областей не заметна. Увеличение уровня возбуждения приводит к постепенному росту номеров возбуждаемых гармоник. В случае линейной связи характер чередования областей того и другого режимов в общем сохраняется, однако наблюдается растяжение всей картины в сторону больших значений возбуждения. То есть здесь второй осциллятор играет как бы «балластную» роль, так что отсасывает на себя часть энергии возбуждения, в определенной степени затрудняя возбуждение первого осциллятора. В случае квадратичной связи чередование областей различных режимов не наблюдается. Начиная с довольно низкого уровня возбуждения колебания приобретают хаотический характер и регуляризация далее не происходит. Вторым осциллятором не является «балластом», а активно участвует в формировании режимов, повышая уровень нелинейности колебаний в целом.

Рассмотрены зависимости номеров возбуждаемых гармоник при увеличении уровня возбуждения. При небольшом и среднем уровне возбуждения отмечен близкий к линейному рост номера гармоник, что соответствует выполненному ранее аналитическому рассмотрению. Однако при высоком уровне возбуждения рост номера гармоник замед-

ляется, приближаясь к степенной зависимости с показателем около 0,4. Выявлен критерий формирования хаотического режима. Показано, что главной причиной формирования хаоса является последовательная смена гармоник по мере увеличения возбуждения. То есть пока преобладающей является какая-то одна гармоника, хаотическая составляющая колебаний выражена слабо, однако в тот момент, когда на смену ей приходит другая, следующая по номеру, гармоника, хаотическая составляющая резко возрастает, а после установления колебаний на новой гармонике хаотическая составляющая снова падает.

Рассмотрена амплитуда колебаний при различном уровне возбуждения. Отмечена тождественность зависимостей, определяемых по максимуму амплитуды, как в регулярном, так и в хаотическом режимах. Показано, что по мере увеличения уровня возбуждения амплитуда колебаний возрастает, однако в отличие от линейного случая, где такой рост является линейным, прямо пропорциональным уровню возбуждения, здесь рост амплитуды следует зависимости корневого типа. На примере уравнения для первого осциллятора в отсутствие связи показано, что причиной замедления роста амплитуды его колебаний является кубическая нелинейность. То есть кубическая составляющая требует для своей раскачки больше энергии, чем линейная, вследствие чего рост амплитуды замедляется. Колебания второго осциллятора возбуждаются за счет колебаний первого, причем второй осциллятор является линейным, поэтому рост амплитуды его колебаний имеет тот же корневой характер, что и для первого.

Глава 14

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ В УСЛОВИЯХ КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ И КУБИЧЕСКОЙ СВЯЗИ. ЧАСТЬ 1. МУЛЬТИРЕЖИМНЫЙ ХАРАКТЕР КОЛЕБАНИЙ

В настоящей главе продолжено рассмотрение нелинейных вынужденных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Основное внимание уделяется рассмотрению упрощенной системы уравнений, в которой нелинейность и связь имеют кубический характер. В зависимости от уровня возбуждения выделены пять основных режимов колебаний: № 1 — синхронизм, № 2 — утроение частоты, № 3 — хаос, № 4 — гигантские осцилляции, № 5 — задержанная стабилизация. В этих режимах исследованы развертки колебаний во времени, их параметрические портреты в координатах смещение — производная от смещения, а также частотные спектры возбужденных колебаний. Режимы № 1, № 2 являются стабильными, колебания в них близки к гармоническим и полностью детерминированы. Режимы № 3–№ 5 являются нестабильными, колебания в них имеют хаотический или близкий к хаотическому характер. По уровню возбуждения стабильные режимы отделены от нестабильных резким порогом, при преодолении которого амплитуда колебаний скачком увеличивается на два-три порядка. При возбуждении нестабильных режимов установлено наложение на основные колебания сопутствующих высокочастотных осцилляций, частота которых выше частоты возбуждения на два-три порядка, а амплитуда ниже амплитуды основных колебаний более чем на два порядка. Предложена модель возбуждения сопутствующих колебаний, на основе которой получена количественная оценка характера колебаний в нестационарных режимах. Приведены рекомендации для дальнейшего развития работы.

Основное изложение материала в данной главе следует работе [36], остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

14.1. Система уравнений с кубической связью

В предыдущей главе рассмотрена система (13.3)–(13.40), имеющая вид [35, форм. (28), (29)]:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \delta_1 x_1^3 + \gamma_1 \cdot x_2^2 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (14.1)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (14.2)$$

Здесь $x_{1,2}$, $\beta_{1,2}$, $\omega_{1,2}$ — координатные переменные, параметры затухания и собственные частоты осцилляторов, δ_1 — параметр нелинейности первого осциллятора, $\gamma_{1,2}$ — коэффициенты связи, A_0 и ω_0 — амплитуда и частота возбуждающей силы.

Нелинейным является только первое уравнение, тогда как второе остается линейным (как в магнитоупругой системе, где нелинейной является только магнитная часть). Связь второго уравнения с первым также линейная (через γ_2), а первого со вторым — нелинейная (через γ_1).

Такая связь между осцилляторами имеет квадратичный характер и обеспечивается слагаемым первого уравнения вида $\gamma_1 \cdot x_2^2$, однако подобную конструкцию с более высокой степенью x_2 имеет слагаемое $\eta_4 x_1 x_2^3$ потенциала (1.23) (глава 1).

Такое слагаемое может обеспечить нелинейную связь между осцилляторами уже не квадратичного, а кубического характера. Если при этом оставить только кубическую связь, то система уравнений (14.1)–(14.2) принимает вид:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \delta_1 x_1^3 + \vartheta_1 \cdot x_2^3 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (14.3)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0, \quad (14.4)$$

где ϑ_1 соответствует η_4 выражения (1.23).

Рассмотрим далее именно этот случай, то есть кубическую связь между осцилляторами.

14.1.1. Параметры задачи

Параметры системы выберем исходя из их максимальной простоты. Так, положим собственные частоты обоих осцилляторов равными друг другу, параметры затухания для обоих осцилляторов также положим равными друг другу, а нелинейность будем учитывать только для первого осциллятора. Подобно [23, 32], все параметры будем задавать в безразмерных единицах (называемых далее «относительными единицами»), сохраняющих пропорциональные соотношения относительно друга.

Итак, для дальнейшего рассмотрения примем следующие параметры: $\omega_1 = 1$; $\omega_2 = 1$; $\omega_0 = 1$; $\beta_1 = 0,05$; $\beta_2 = 0,05$; $\delta_1 = 1$; $\vartheta_1 = 1$;

$\gamma_2 = 1$. Частоту возбуждения, кроме особо оговоренных случаев, положим равной $\omega_0 = 1$ (то есть собственным частотам осцилляторов), что соответствует периоду $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 6,28$. Амплитуду возбуждения A_0 будем менять в пределах от 0,001 до 10 000. Шаг по времени для всех разверток, кроме отдельно указанных, возьмем равным $\Delta t = 0,01$.

Такой выбор параметров обусловлен принятым в работах [21, 38] наиболее удобным их соотношением, обеспечивающим уверенную реализацию хаотического характера колебаний.

14.2. Режимы колебаний связанной системы

Система уравнений (14.3)–(14.4) решалась численно методом Рунге–Кутты. Рассматривалось развитие колебаний после включения возбуждения. Было установлено, что связь при $\vartheta_1 x_2^3$, наряду с режимами, наблюдаемыми при $\xi_3 x_2^2$ (гл. 13), позволяет дополнительно реализовать ряд новых принципиально отличных режимов. При заданной величине связи ϑ_1 эти режимы определяются специфическим выбором уровня возбуждения A .

По характеру колебаний в порядке нарастания уровня возбуждения можно выделить пять основных режимов:

- 1 — синхронизм — при $0,001 \leq A_0 \leq 0,08$;
- 2 — утроение частоты — при $0,08 \leq A_0 \leq 0,171$;
- 3 — хаос — при $0,171 \leq A_0 \leq 2,0$;
- 4 — гигантские осцилляции — при $2,0 \leq A_0 \leq 70,0$;
- 5 — задержанная стабилизация — при $70,0 \leq A_0 \leq 3000,0$.

Приведем краткие характеристики этих режимов.

14.2.1. Режим № 1 — синхронизм

Этот режим имеет место при амплитуде возбуждения от нуля до $A_0 = 0,08$. На рис. 14.1 приведены развертки по времени колебаний смещения (*а*), развертки производных от смещения по времени (*б*) и соответствующие параметрические портреты (*в*) для первого и второго осцилляторов. Для первого осциллятора буквенные обозначения частей рисунка снабжены цифрой «1», для второго — цифрой «2». Шаг по времени $\Delta t = 0,01$ ед. времени. Период частоты возбуждения $\tau = 6,28$ ед. времени. Развертки на рис. 14.1 начинаются со времени 300 отн. ед., при котором процесс начальной релаксации, определяемый параметрами $\beta_{1,2}$, уже закончен.

Из рис. 14.1, *а1* и рис. 14.1, *а2* можно видеть, что колебания смещения того и другого осцилляторов имеют правильный синусоидальный характер с частотой, совпадающей с частоте возбуждения. То же касается производных, приведенных на рис. 14.1, *б1* и рис. 14.1, *б2*. Параметрические портреты для обоих осцилляторов, приведенные на рис. 14.1, *в1* и рис. 14.1, *в2* представляют собой правильные окружности, центры которых совпадают с началом координат. Определенной особенностью является тот факт, что амплитуда колебаний первого

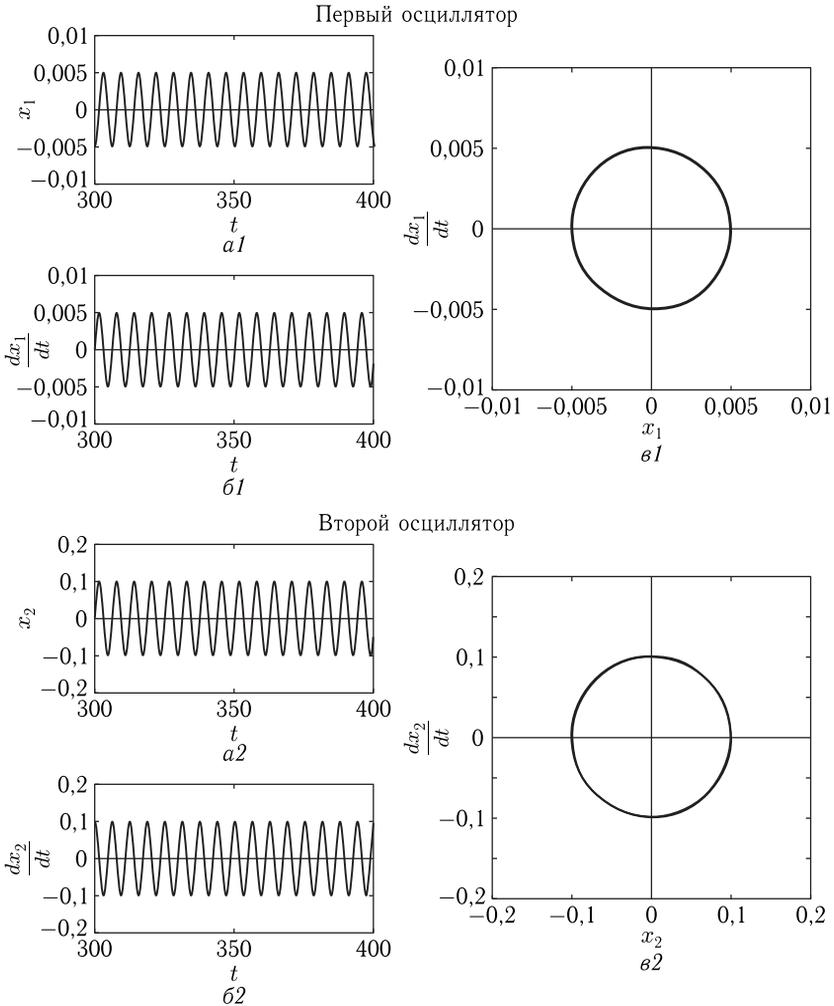


Рис. 14.1. Развертки по времени колебаний смещения (а), развертки производных от смещения по времени (б) и соответствующие параметрические портреты (в) для первого и второго осцилляторов. Амплитуда возбуждения $A_0 = 0,001$. Остальные параметры приведены в разделе 14.1.1

осциллятора составляет 0,005 отн. ед., тогда как амплитуда колебаний второго — 0,100 отн. ед., то есть в 20 раз больше. Подобное же соотношение имеет место и для производных. В то же время, поскольку возбуждающая сила действует именно на первый осциллятор, то и его амплитуда должны быть больше, чем амплитуда второго. Можно полагать, что наблюдаемое здесь обратное соотношение, обусловлено спецификой связи осцилляторов, ибо первый воздействует на

второй линейным образом через слагаемое $\gamma_2 \cdot x_1$ уравнения (14.4), а получает в ответ кубическое воздействие через слагаемое $\vartheta_1 \cdot x_2^3$ уравнения (14.3), то есть оба воздействия эквивалентными не являются. Для более подробного рассмотрения надо учитывать энергетические параметры колебаний обоих осцилляторов, что может явиться предметом для отдельной работы.

Обратимся теперь к рис. 14.2, где представлены частотные спектры колебаний (а) и их производных (б) для обоих осцилляторов при тех же параметрах, что на рис. 14.1.

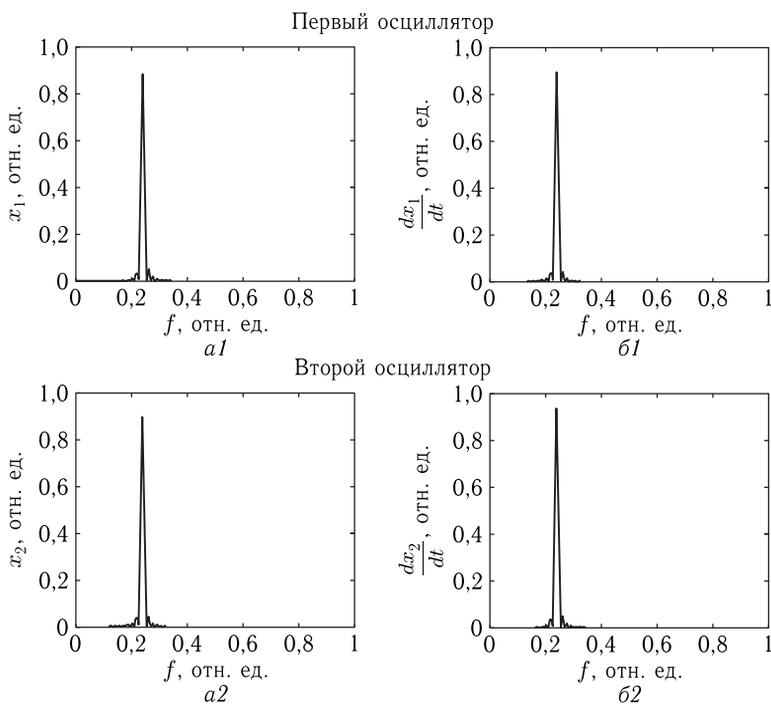


Рис. 14.2. Частотные спектры колебаний (а) и их производных (б) для первого и второго осцилляторов. Параметры по осям приведены в относительных единицах. Параметры те же, что на рис. 14.1

Из рисунка видно, что все спектры как основных колебаний, так и их производных имеют одну-единственную узкую линию, что соответствует четкому синусоидальному характеру колебаний, представленных на рис. 14.1, *a1*, *b1*, *a2*, *b2*.

14.2.2. Режим № 2 — утроение частоты

Этот режим имеет место при амплитуде возбуждения от $A_0 = 0,080$ до $A_0 = 0,171$. При увеличении уровня возбуждения режим утрое-

ния частоты возникает без какого-либо порога, просто путем плавного перехода из режима синхронизма. На рис. 14.3 приведены развертки по времени колебаний смещения (а), развертки производных от смещения по времени (б) и соответствующие параметрические портреты (в) для первого и второго осцилляторов. Для первого осциллятора буквенные обозначения частей рисунка снабжены цифрой «1»,

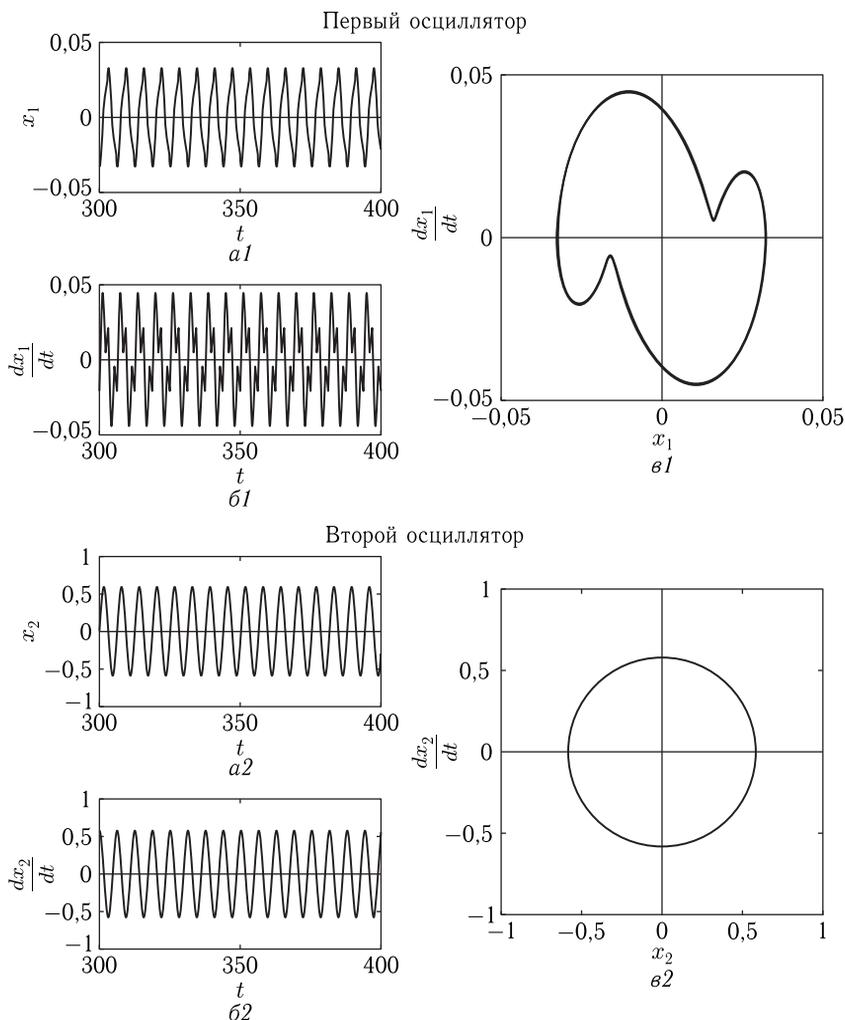


Рис. 14.3. Развертки по времени колебаний смещения (а), развертки производных от смещения по времени (б) и соответствующие параметрические портреты (в) для первого и второго осцилляторов. Амплитуда возбуждения $A_0 = 0,15$. Остальные параметры приведены в разделе 14.1.1

для второго — цифрой «2». Шаг по времени $\Delta t = 0,01$ ед. времени. Период частоты возбуждения $\tau = 6,28$ ед. времени. Подобно рис. 14.1, развертки начинаются со времени 300 отн. ед., при котором процесс начальной релаксации, определяемый параметрами $\beta_{1,2}$, уже закончен.

Из рисунка можно видеть, что колебания обоих осцилляторов во многом сходны с наблюдаемыми в режиме синхронизма. Так, частота основных колебаний по-прежнему совпадает с частотой возбуждения и значительное превышение амплитуды колебаний второго осциллятора над амплитудой колебаний первого также сохраняется. Вследствие увеличения уровня возбуждения амплитуды колебаний как смещений, так и производных для обоих осцилляторов превышают амплитуды таких же колебаний на рис. 14.1 в 5–10 раз.

Колебания смещения первого осциллятора (рис. 14.3, *a1*) близки к синусоидальным с небольшой склонностью к обострению максимумов. Колебания смещения и производной второго осциллятора (рис. 14.3, *a2*, *b2*) сохраняются чисто синусоидальными.

Существенным отличием является «расщепление» колебаний производной первого осциллятора, наблюдаемое на рис. 14.3, *b1*. Четко видно появление малых максимумов, располагающихся по два между большими, причем первый из промежуточных максимумов больше нуля, а второй меньше нуля. Модельная проверка показывает, что такое «обрамление» каждого большого максимума двумя малыми с противоположными знаками амплитуды относительно нулевой линии свойственно примеси третьей гармоники основной частоты. Следует полагать, что причиной такого «расщепления» синусоиды на рис. 14.3, *b1* является проявление нелинейности первого осциллятора, описываемой слагаемым $\delta_1 x_1^3$ в уравнении (14.3). В уравнении для второго осциллятора (14.4) подобное слагаемое и вообще нелинейность отсутствует, поэтому форма колебаний этого осциллятора (рис. 14.3, *a2*, *b2*) остается неискаженной синусоидальной.

Параметрический портрет для второго осциллятора (рис. 14.3, *b2*) сохраняет правильную круговую форму, тогда как на портрете для первого осциллятора (рис. 14.3, *a1*) появляются две симметрично относительно центра расположенные глубокие «зазубрины», отражающие расщепление синусоиды на рис. 14.3, *b1*.

Критерием перехода к этому режиму от режима синхронизма можно считать появление этих зазубрин, что соответствует началу расщепления синусоиды на рис. 14.3, *b1*.

На рис. 14.4 представлены частотные спектры колебаний (*a*) и их производных (*b*) для обоих осцилляторов при тех же параметрах, что на рис. 14.3.

Из рисунка видно, что все спектры как основных колебаний, так и их производных имеют ту же узкую линию, соответствующую частоте возбуждения, что и на рис. 14.2. Для первого осциллятора спектр производной сопровождается еще одной линией, частота которой в три

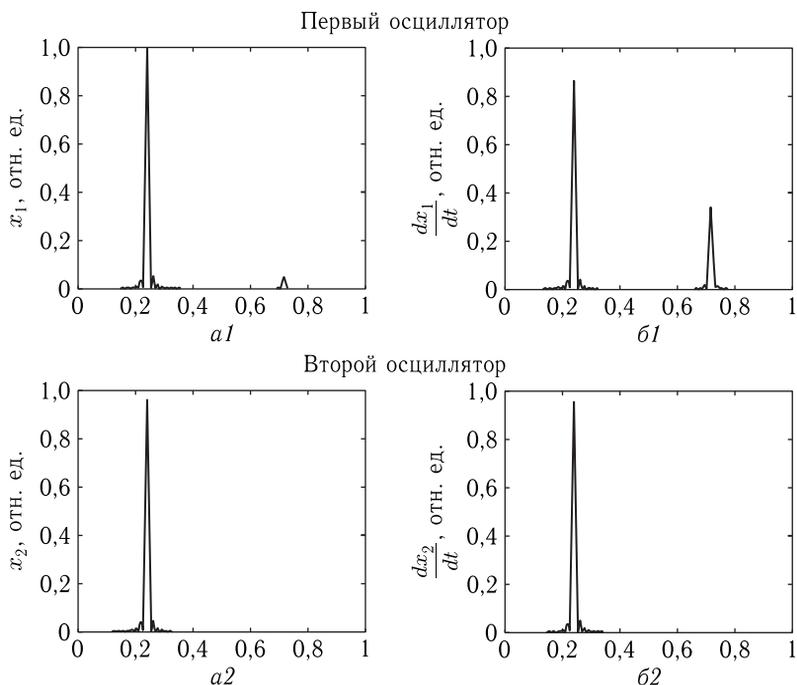


Рис. 14.4. Частотные спектры колебаний (*a*) и их производных (*б*) для первого и второго осцилляторов. Параметры по осям приведены в относительных единицах. Параметры — те же, что на рис. 14.3

раза больше частоты основной, что как раз соответствует утроению частоты.

Примечательно отметить, что в спектре колебаний смещения первого осциллятора (рис. 14.4, *a1*) амплитуда линии на тройной частоте значительно менее выражена, чем в спектре производной (рис. 14.4, *б1*), а составляющая удвоенной частоты в спектрах как смещения (рис. 14.4, *a1*), так и производной (рис. 14.4, *б1*) полностью отсутствует.

В спектрах колебаний для второго осциллятора (рис. 14.4, *a2*, *б2*) спектральные составляющие на двойной и тройной частотах отсутствуют, что обусловлено его линейностью.

14.2.3. Режим №3 — хаос

Этот режим имеет место при амплитуде возбуждения от $A_0 = 0,172$ до $A_0 = 2,0$ отн. ед. Увеличение уровня возбуждения с $A_0 = 0,171$ до $A_0 = 0,172$ отн. ед, то есть всего менее чем на 1%, приводит к резкому возрастанию амплитуд колебаний смещения и производной более чем на два порядка с одновременной хаотизацией того и другого. Таки образом, возбуждение режима хаоса имеет ярко выраженный порог как по амплитуде, так и по характеру колебаний.

На рис. 14.5 приведены развертки по времени колебаний смещения (*а*), развертки производных от смещения по времени (*б*) и соответствующие параметрические портреты (*в*) для первого и второго осцилляторов. Буквенные и цифровые обозначения частей рисунка — те же самые, что на рис. 14.1 и рис. 14.3. Развертка колебаний начинается сразу после включения возбуждения (то есть с $t = 0$ ед. времени),

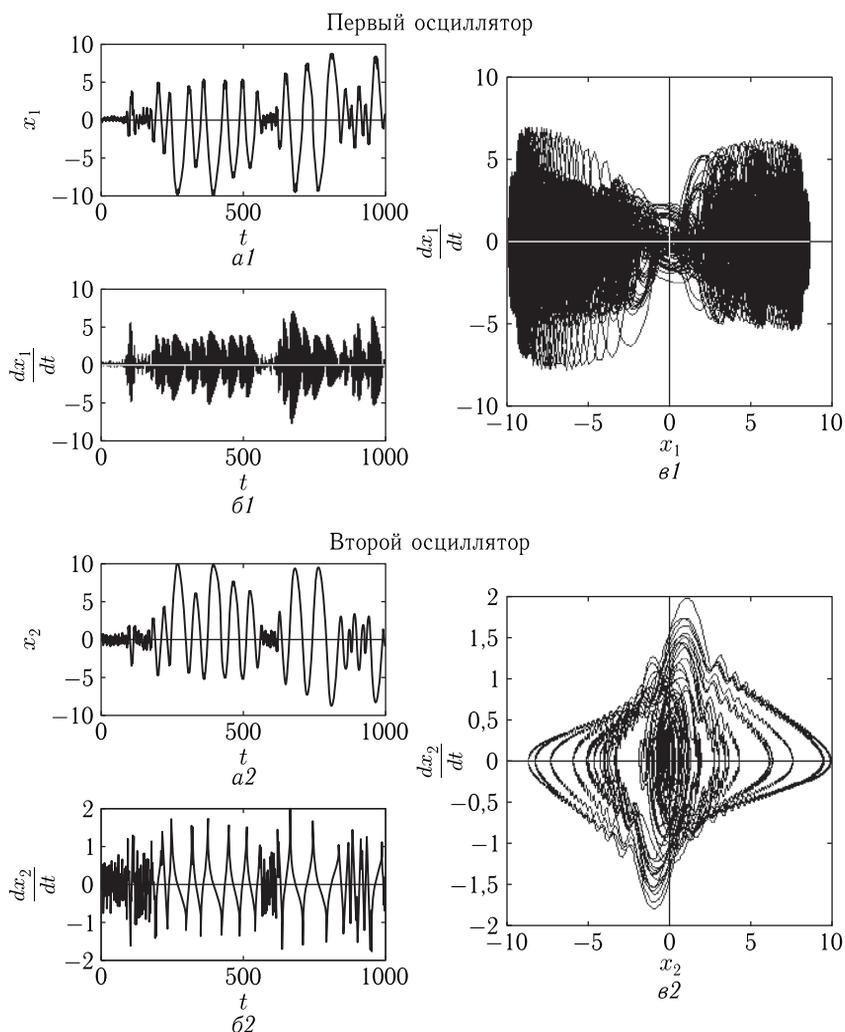


Рис. 14.5. Развертки по времени колебаний смещения (*а*), развертки производных от смещения по времени (*б*) и соответствующие параметрические портреты (*в*) для первого и второго осцилляторов. Амплитуда возбуждения $A_0 = 0,20$. Остальные параметры приведены в разделе 14.1.1

так как первоначальные процессы релаксации заметного изменения в характер колебаний не вносят.

Из рис. 14.5, *a1* можно видеть, что колебания смещения первого осциллятора представляют собой крупные нерегулярные осцилляции, перемежающиеся участками малоамплитудных частых осцилляций шумового характера. Средние расстояния между максимумами крупных колебаний составляют около 70 ± 10 ед. времени, средняя амплитуда составляет около 7 ± 2 отн. ед. Обе эти величины превышают подобные в режимах синхронизма и утроения частоты более чем на два порядка. Колебания производной первого осциллятора (рис. 14.5, *б1*) имеют сплошной шумовой характер, какие либо следы периодичности отсутствуют. Частота таких шумовых колебаний более чем на порядок превышает частоту колебаний смещения (рис. 14.5, *a1*), причем какие-либо следы дифференцирования колебаний смещения (рис. 14.5, *a1*) в колебаниях производной (рис. 14.5, *б1*) отсутствуют. Амплитуда колебаний производной на протяжении промежутков времени, соответствующих высокоамплитудным колебаниям смещения, составляет около 3 ± 1 отн. ед, а в местах, где высокоамплитудные колебания смещения перемежаются низкоамплитудными, падает до 0,5 отн. ед.

Параметрический портрет для первого осциллятора (рис. 14.5, *в1*) имеет вид нечетко локализованной сильно искаженной «горизонтальной восьмерки», внутренние «крылья» которой полностью замазаны из-за сплошного шумового характера производной.

Колебания смещения второго осциллятора (рис. 14.5, *б1*) повторяют колебания смещения первого осциллятора с точностью до изменения знака на обратный. То есть такие колебания являются «зеркальным отражением» первых в горизонтальной оси по рисунку. Колебания производной смещения второго осциллятора (рис. 14.5, *б2*) имеют значительно более регуляризованный характер, чем такие же колебания производной первого осциллятора (рис. 14.5, *б1*). Амплитуда их также меньше в 2–3 раза. Здесь, по крайней мере на участках регуляризации, можно говорить о близком к дифференциальному характеру колебаний производной относительно колебаний смещения. Можно полагать, что более высокая склонность к регуляризации для второго осциллятора по сравнению с первым обусловлена его линейным характером.

Параметрический портрет для второго осциллятора (рис. 14.5, *в2*) имеет вид неразвившейся горизонтальной восьмерки, середину которой образует сильно замазанный вытянутый по вертикали эллипс, образованный колебаниями в местах перемежаемости, а боковые крылья восьмерки образованы недостаточно развитыми участками регуляризованных колебаний, стремящихся сформировать эллипс, ориентированный по горизонтали. Таким образом, портрет представляет собой совокупность двух сильно размазанных эллипсов, длинные оси которых перпендикулярны друг другу.

На рис. 14.6 представлены частотные спектры колебаний (а) и их производных (б) для обоих осцилляторов при тех же параметрах, что на рис. 14.5.

Из рисунка видно, что все спектры как основных колебаний, так и их производных для обоих осцилляторов имеют богатый шумовой характер, однако спектр колебаний второго осциллятора (рис. 14.6, а2, б2) имеет четко выраженную линию, соответствующую частоте возбуждения, тогда как в спектрах колебаний первого осциллятора (рис. 14.6, а1, б1) выделение такой линии из общего хаоса отсутствует. То есть, второй осциллятор ведет себя более упорядоченным образом, чем первый, что, как и ранее, связано с его линейным характером. Спектры колебаний смещения обоих осцилляторов (рис. 14.6, а1, а2) имеют четко выраженную линию в низкочастотной области (около 0,03 отн. ед. частоты), что соответствует крупным колебаниям на рис. 14.5, а1, б1). В спектрах колебаний производных обоих осцилляторов такая линия отсутствует или является крайне слабой, не выделяющейся из окружающих ее составляющих спектра. Особенно богатый спектр имеют

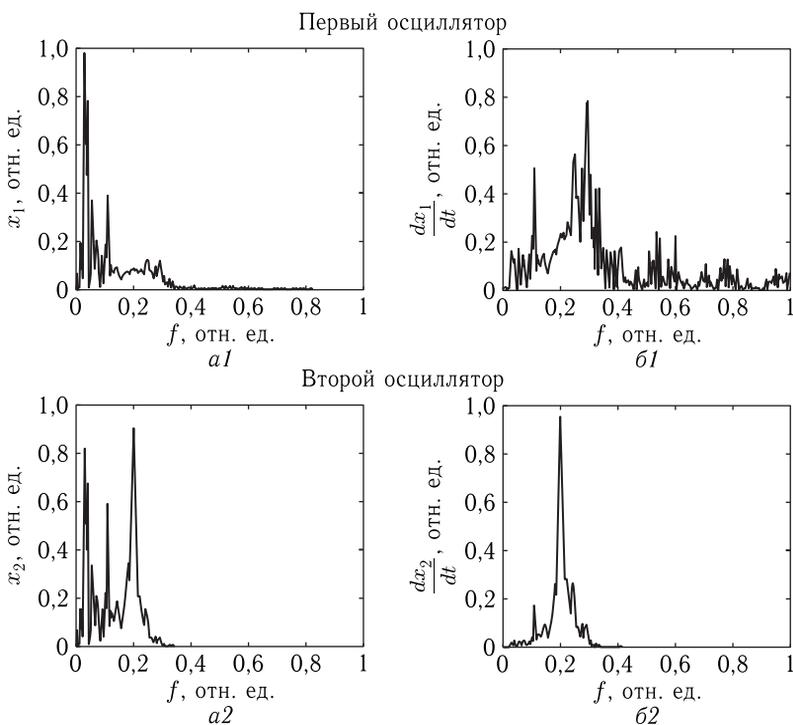


Рис. 14.6. Частотные спектры колебаний (а) и их производных (б) для первого и второго осцилляторов. Параметры по осям приведены в относительных единицах. Параметры те же, что на рис. 14.5

колебания производной для первого осциллятора (рис. 14.6, *б1*), что связано с сильно выраженным шумовым характером колебаний такой производной (рис. 14.5, *б1*). Здесь присутствуют колебания довольно высоких частот (в том числе за правым краем рисунка), причем какая-либо кратность с частотой возбуждения отсутствует. Можно полагать, что столь сложный характер спектра обусловлен сочетанием кубической нелинейности первого осциллятора с кубической же связью его со вторым.

14.2.4. Режим № 4 — гигантские осцилляции

Этот режим имеет место при амплитуде возбуждения от $A_0 = 2,0$ до $A_0 = 70,0$ отн. ед. При увеличении уровня возбуждения режим гигантских осцилляций возникает без какого-либо порога, просто путем плавного перехода из режима хаоса. Различие между этими режимами состоит главным образом в изменении характера колебаний производных смещений обоих осцилляторов.

На рис. 14.7 приведены развертки по времени колебаний смещения (*а*), развертки производных от смещения по времени (*б*) и соответствующие параметрические портреты (*в*) для первого и второго осцилляторов. Для первого осциллятора буквенные обозначения частей рисунка снабжены цифрой «1», для второго — цифрой «2». Шаг по времени $\Delta t = 0,01$. Период частоты возбуждения $\tau = 6,28$ ед. времени.

Из рис. 14.7, *а1* можно видеть, что колебания смещения первого осциллятора представляют собой крупные осцилляции нерегулярного характера. Будем называть такие колебания «гигантскими осцилляциями». Рассмотрение на более продолжительном промежутке времени показывает, что длина осцилляций меняется хаотическим образом. Среднее расстояние между максимумами осцилляций составляет около 300 ед. времени, что почти в 50 раз превышает период частоты возбуждения. Для простоты рассмотрения можно считать, что характер осцилляций близок к синусоидальному с периодом, меняющимся во круг средней величины хаотическим образом.

На рис. 14.7, *б1* приведены производные по времени от тех же колебаний. Следовало бы ожидать, что характер производных должен соответствовать простому дифференцированию кривых, приведенных на рис. 14.7, *а1*, то есть также иметь близкий к синусоидальному характер с тем же периодом по времени. Однако из сравнения рис. 14.7, *б1* с рис. 14.7, *а1* видно, что подобное соответствие отсутствует.

Производные по времени имеют вид резкого начального всплеска, подобного ударному, в результате которого возбуждаются колебания крайне высокой частоты (на два порядка выше частоты колебаний смещения). Амплитуда таких частых колебаний со временем спадает релаксационным образом, близким к экспоненциальному. Начальные всплески производных приходятся на прохождение через нуль колебаний смещения. Релаксационный спад огибающих производных заканчивается, как правило, до прохождения смещения через нуль.

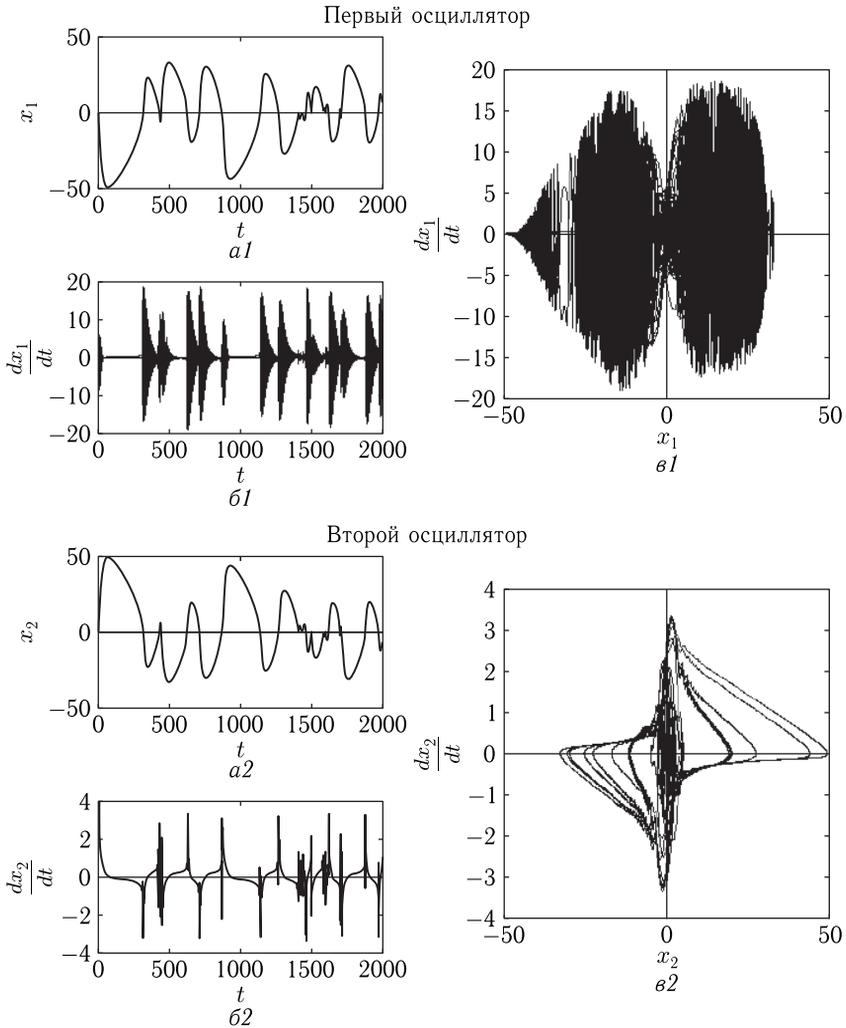


Рис. 14.7. Развертки по времени колебаний смещения (а), развертки производных от смещения по времени (б) и соответствующие параметрические портреты (в) для первого и второго осцилляторов. Амплитуда возбуждения $A_1 = 10$. Остальные параметры приведены в разделе 14.1.1

Параметрический портрет, приведенный на рис. 14.7, $\text{в}1$ имеет вид сильно замазанной горизонтальной восьмерки, центры колец которой близки к $x_1 = \pm 20$. Перетяжка на восьмерке при $x_1 = 0$ получается потому, что на каждый отдельный полупериод колебаний смещения приходится по два прохождения через нуль (по разные стороны от максимума), то есть по два всплеска производных. Сильная замазанность

портрета соответствует следующим за всплеском частым колебаниям производных, смещенных по времени друг относительно друга хаотическим образом.

На рис. 14.7, *a2–в2* приведены подобные зависимости для второго осциллятора.

Из рис. 14.7, *a2* видно, что зависимость колебаний второго осциллятора от времени полностью повторяет такую же зависимость для первого осциллятора с точностью до изменения знака на обратный. То есть эта зависимость представляет собой зеркальное отражение зависимости на рис. 14.7, *a1* относительно горизонтальной оси. Заметим, что подобное отражение наблюдается и при других режимах.

Следует отметить, что такое совпадение имеет место только в рассматриваемом здесь случае кубической связи и отсутствует при квадратичной (глава 13), где колебания осцилляторов существенно различаются (работа [35, рис. 3, *a1*, 3, *a2*], здесь — рис. 13.1, *a1*, 13.1, *a2*).

Проверка показывает, что зеркальная симметричность колебаний первого и второго осцилляторов, а также гигантские осцилляции являются свойством высокой симметричности параметров обоих осцилляторов. Так, при изменении параметров связи на 5% в ту или другую сторону приводит к хаотическим колебаниям или к уходу системы на бесконечность. Во всех случаях зеркальная симметрия колебаний осцилляторов нарушается. Для четкого проявления зеркальной симметричности требуется сохранение обоих параметров связи в пределах не более 2% отклонения от принятых здесь значений $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$.

Замечание. Предварительная проверка показала, что увеличение степени связи первого осциллятора со вторым с третьей на четвертую или пятую вообще не позволяют получить режим гигантских осцилляций, хотя хаос и уход на бесконечность по-прежнему наблюдаются, особенно в небольших пределах изменения параметров связи. При уменьшении параметров связи более чем на 20% колебания становятся близкими к гармоническим с частотой, равной частоте возбуждения. По-видимому, подробное исследование этого вопроса может составить предмет для отдельной работы.

Производные колебаний второго осциллятора, показанные на рис. 14.7, *б2*, в отличие от производных для первого осциллятора, тонкой структуры не имеют, хотя взрывной характер сохраняется. Можно видеть, что такие производные становятся близкими к огибающей производных на рис. 14.7, *б1*. Соответственно параметрический портрет для второго осциллятора, представленный на рис. 14.7, *в2*, уже не является замазанной горизонтальной восьмеркой, а состоит из отдельных извивающихся пучков траекторий, образующих крестообразную фигуру с горизонтальной и вертикальной осями.

Обратимся теперь к рис. 14.8, где представлены частотные спектры колебаний (*a*) и их производных (*б*) для обоих осцилляторов при тех же параметрах, что на рис. 14.7.

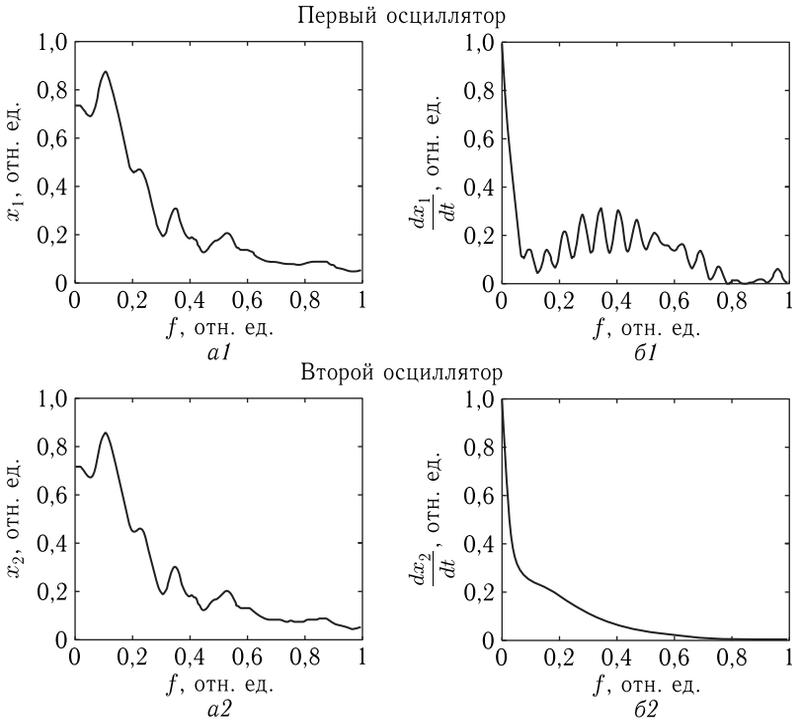


Рис. 14.8. Частотные спектры колебаний (а) и их производных (б) для первого и второго осцилляторов. Параметры по осям приведены в относительных единицах. Масштаб по частоте на рис. б1, б2 — тот же, что на предшествующих рисунках, а на рис. а1, а2 — в 100 раз крупнее. Это сделано для того, чтобы выявить структуру низкочастотной составляющей спектра. Амплитуда производной на рис. б2 составляет 0,4 от амплитуды производной на рис. б1. Параметры те же, что на рис. 14.7

Из рис. 14.8, а1, а2 видно, что спектры в области низких частот для обоих осцилляторов совпадают, что обусловлено тождественностью (с точностью до знака) разверток колебаний на рис. 14.7, а1 и рис. 14.7, а2. Колебания имеют одну сильно размазанную линию с максимумом вблизи 0,11 отн. ед. Этот максимум соответствует преобладающей составляющей частоты колебаний на рис. 14.7, а1 и рис. 14.7, а2. Период таких колебаний, то есть собственно гигантских осцилляций, составляет около 300 ед. времени, то есть частота равна 0,0033 ед. частоты. Максимум размазан из-за непостоянства периода гигантских осцилляций.

На рис. 14.8, б1 показан спектр колебаний производной первого осциллятора. Видно, что максимум соответствует 0,40 отн. ед. Благодаря различию масштабов, линия, соответствующая максимуму

на рис. 14.7, *a1*, то есть частоте 0,0033 ед. частоты, здесь почти совпадает с вертикальной осью рисунка. Однако именно эта составляющая спектра задает масштаб по вертикали. Максимум вблизи частоты 0,40 отн. ед. соответствует частым колебаниям производных на рис. 14.7, *b1*, которые наступают после взрывного роста амплитуды и образуют релаксационный «хвост» с экспоненциальным спадом. На кривой присутствует значительное количество сопутствующих максимумов, соответствующих тонкой структуре релаксационных колебаний.

На рис. 14.8, *b2* подобная зависимость для второго осциллятора, в основном, повторяет огибающую кривой на рис. 14.8, *b1*, однако здесь максимум, соответствующий частоте релаксационных колебаний, отсутствует, что связано с относительно плавным спадом производных на рис. 14.7, *b2*.

14.2.5. Режим № 5 — задержанная стабилизация

Этот режим имеет место при амплитуде возбуждения от $A_0 = 70,0$ до $A_0 = 3000,0$ отн. ед. Дальнейшее увеличение уровня возбуждения приводит к уходу системы на бесконечность.

Режим стабилизации возникает из режима гигантских осцилляций путем плавного перехода. По мере увеличения уровня возбуждения с уровня $A_0 = 64,0$ при довольно большом времени, порядка 1700–1900 ед., появляется участок стабилизации, простирающийся до бесконечности, начало которого при увеличении уровня возбуждения до $A_0 = 70,0$ отн. ед. плавно переходит к временам 700–900 ед. времени, полностью вытесняя гигантские осцилляции.

Типичная картина колебаний осцилляторов в режиме задержанной стабилизации иллюстрируется рис. 14.9.

Из рисунка видно, что смещение первого осциллятора (рис. 14.9, *a1*), оставаясь все время отрицательным, сначала резко спадает, достигая минимума при 70 ед. времени, после чего плавно возрастает, при времени 770 ед. резко выходя на горизонтальный участок, простирающийся до бесконечности. Этот горизонтальный участок и есть режим стабилизации. При этом смещение от интенсивности возбуждения далее не зависит и всегда остается на уровне около 7 отн. ед. Производная от смещения (рис. 14.9, *b1*) после резкого скачка в области малых времен, соответствующих резкому спаду смещения на рис. 14.9, *a1*, принимает малые значения вблизи нуля, что соответствует медленности изменения смещения в этом диапазоне.

Параметрический портрет (рис. 14.9, *в1*) имеет вид вертикально ориентированного эллипса, образованного густой сетью вертикальных линий, соответствующих колебаниям производной. Амплитуда таких колебаний достигает 50 отн. ед., то есть соответствует начальному участку (до времени порядка 30 ед.) кривой на рис. 14.9, *b1*. Отсутствие видимых колебаний на кривой рис. 14.9, *b1* связано с чрезвычайно высокой плотностью колебаний в этой области, так что на рис. 14.9, *b1*

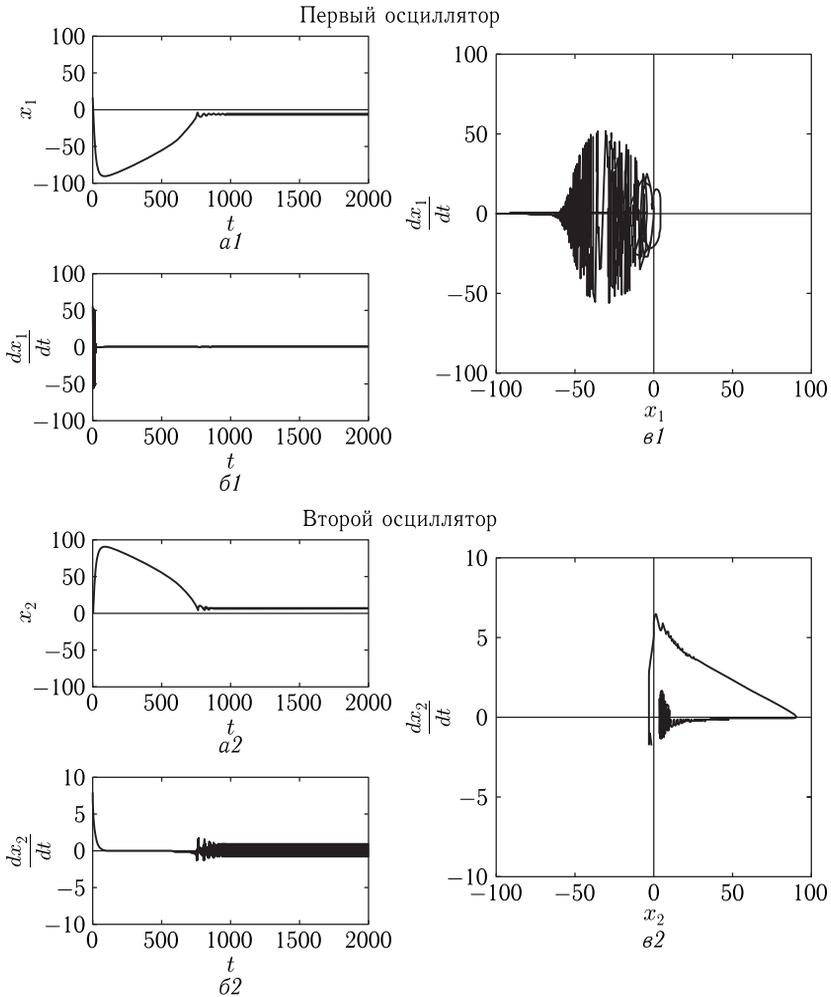


Рис. 14.9. Развертки по времени колебаний смещения (а), развертки производных от смещения по времени (б) и соответствующие параметрические портреты (в) для первого и второго осцилляторов. Амплитуда возбуждения $\Omega \ll \omega \ll p$ отн. ед. Остальные параметры приведены в разделе 14.1.1

все они слились в единую массу, не различимую в масштабе рисунка. Размах портрета по горизонтальной оси, равный 50 отн. ед. в отрицательной области, как раз соответствует единственному резкому колебанию на рис. 14.9, $a1$.

Колебания смещения второго осциллятора (рис. 14.9, $a2$) повторяют колебания первого (рис. 14.9, $a1$) с точностью до зеркального отражения. Однако колебания производной (рис. 14.9, $b2$) здесь имеют

характер, существенно отличный приведенных на рис. 14.9, б. Так, до времени порядка 70 ед., где колебания на рис. 14.9, б1 имеют весьма густой характер, здесь производная плавно спадает стремясь к нулю. Однако при времени около 770 ед. амплитуда колебаний производной резко возрастает до величины около 2 отн. ед. и далее остается неизменной. При этом частота колебаний в этой области является крайне высокой, так что все колебания сливаются в сплошную массу.

Параметрический портрет для второго осциллятора (рис. 14.9, в2) здесь также значительно отличается от портрета для первого осциллятора (рис. 14.9, в1), что обусловлено в первую очередь отличием колебаний производной. Большой треугольник в положительной области, как и ранее, соответствует размаху колебаний смещения, а густая замазанная область вблизи нуля отвечает частым колебаниям производной при времени выше 770 ед.

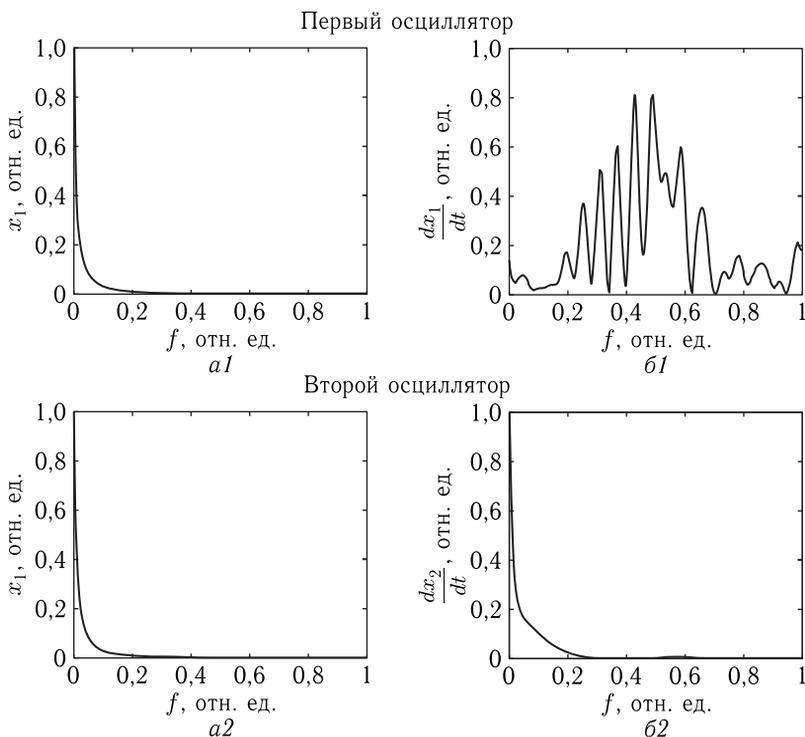


Рис. 14.10. Частотные спектры колебаний (а) и их производных (б) для первого и второго осцилляторов. Параметры по осям приведены в относительных единицах. Масштаб по частоте на рис. (б1), (б2) — тот же, что на предшествующих рисунках, а на рис. (а1), (а2) — в 100 раз крупнее (такой же, как на рис. 14.8). Это сделано для того, чтобы выявить структуру низкочастотной составляющей спектра. Параметры — те же, что на рис. 14.7

Обратимся теперь к рис. 14.10, где представлены частотные спектры колебаний (*а*) и их производных (*б*) для обоих осцилляторов при тех же параметрах, что на рис. 14.9.

Из рисунка видно, что спектры имеют примерно такой же характер, как и для режима гигантских осцилляций (рис. 14.8). Спектры для смещений рис. 14.10, *а1*, 14.10, *а2* здесь отличаются от приведенных на рис. 14.8, *а1* и 14.8, *а2* потому, что там для выявления структуры низкочастотных составляющих введен крупный масштаб. Это было оправдано тем, что гигантские осцилляции совершают несколько колебаний с различными продолжительностями, то есть имеют достаточно богатый спектр. Здесь же колебание смещения всего одно, так что его спектр однообразен и подробного рассмотрения не требует, поэтому масштаб — тот же, что на рис. 14.2, 14.4, 14.6. Других существенных отличий спектры задержанной стабилизации от спектров гигантских осцилляций не имеют.

14.2.6. Общие замечания о характере режимов

Из приведенных здесь режимов только режим синхронизма (№ 1) является чисто линейным, а все остальные — нелинейными. Режим утроения частоты (№ 2) относится к стабильным нелинейным процессам, а все остальные (№ 3–5) к нестабильным. Резкий порог имеет только переход от режима стабильного № 2 к нестабильному № 3, а все остальные режимы переходят друг в друга довольно плавным образом. Приведенные выше границы переходов между режимами определены с точностью не выше 10%. Колебания в стабильных режимах № 1 и № 2 являются полностью детерминированными, то есть начиная с достаточно малой величины шага развертки по времени при дальнейшем уменьшении шага их вид не меняется. При этом можно определить критическое значение шага, меньше которого вид колебаний не меняется. Колебания в нестабильных режимах имеют фрактальный характер, так что при изменении шага их вид меняется и критического значения шага не существует (во всяком случае, при уменьшении шага по сравнению с критическим для стационарных режимов на четыре-пять порядков). При этом, однако, общий характер колебаний, в том числе их спектральные характеристики, сохраняются. Более подробному изучению фрактального характера колебаний в нестационарных режимах авторы предполагают посвятить отдельную работу.

Среди многообразия рассмотренных режимов можно отметить некоторые общие закономерности. Так, колебания в режимах № 1 (синхронизм) и № 2 (утроение частоты) имеют довольно плавный характер без признаков шума. При этом режим № 1 является чисто линейным, а режим № 2 уже заметно нелинейным. Спектр колебаний первого осциллятора имеет одну узкую линию, а спектр колебаний в режиме № 2 — две линии, одна из которых соответствует основной частоте (то есть частоте возбуждения), а вторая — частоте в три раза выше (то есть утроенной частоте возбуждения). При этом колебания обоих

осцилляторов, а также их производных сдвинуты по фазе относительно друг друга на 90 градусов. Порог по уровню возбуждения между режимами отсутствует. Параметрический портрет имеет плавный, четко выраженный характер и состоит из узких линий, отражающих повторение колебаний от периода к периоду.

Таким образом, с точки зрения нелинейности режимы № 1 и № 2 можно считать принадлежащими одной группе — стабильно нелинейных режимов.

Остальные режимы от этой группы имеют значительные отличия. Уже в режиме № 3 (хаос) регулярные колебания сравнительно низкой частоты нарушаются разрывами с колебаниями значительно более высокой частоты. При этом частота первых лежит ниже частоты возбуждения, а вторых — выше. Колебания смещения первого и второго осцилляторов становятся полностью одинаковыми с точностью до отражения в горизонтальной оси. Колебания производных имеют сильно замазанный вид, обусловленный присутствием высоких частот, значительно превышающих частоту возбуждения. Параметрический портрет для первого осциллятора приобретает вид «горизонтальной восьмерки», сильно замазанной траекториями с хаотически меняющимися параметрами. Портрет для второго осциллятора имеет «крестообразный» вид, образуемый траекториями, на которые накладывается сетка малоамплитудных частых осцилляций. Спектры колебаний того и другого осцилляторов обогащаются значительным количеством новых частот. При этом подъемы на частоте возбуждения сохраняются, однако сильно искажаются и почти теряются, будучи окруженными линиями других частот.

В режиме № 4 (гигантские осцилляции) разрывы, нарушающие ход колебаний низкой частоты, почти пропадают, а в картине хаотических колебаний производных, свойственных режиму № 3, появляются четкие разграничения. Более или менее округлые беспорядочные огибающие колебаний производных сменяются четкими резкими всплесками, начинающимися с почти отвесных фронтов и заканчивающимися регулярными спадающими экспонентами, то есть возбуждение колебаний производных приобретает ударный характер. Заполнение огибающих производных для первого осциллятора происходит частыми колебаниями крайне высоких частот, тогда как для второго осциллятора такое заполнение отсутствует. Параметрический портрет для первого осциллятора имеет вид сильно замазанной горизонтальной восьмерки, тогда как для второго — крестообразной фигуры с мелкими резкими колебаниями траекторий. В спектрах выделение на частоте возбуждения полностью пропадает, огибающие спектров для первого осциллятора приобретают регулярный почти синусоидальный характер с общим плавным подъемом выше частоты возбуждения, а для второго — плавный спад в сторону высоких частот.

В режиме № 5 (гигантская стабилизация) гигантские осцилляции сменяются единственной осцилляцией, после которой колебания как

таковые прекращаются и смещение приобретает полностью стабильный характер на постоянном уровне. Смещение первого и второго осцилляторов по-прежнему имеют зеркальную симметрию друг относительно друга, то есть отражаются в горизонтальной оси. Амплитуда колебаний производных для первого осциллятора с течением времени сначала резко падает, после чего стабилизируется на уровне вблизи нуля. Амплитуда производных второго осциллятора сначала также резко падает, обращается почти в нуль, а при переходе смещений к стабилизации возобновляет колебания на крайне высокой частоте, сохраняя постоянную амплитуду. Параметрические портреты для обоих осцилляторов имеют сильно замазанные участки, обусловленные крайне высокочастотными колебаниями производных. В спектрах выделение на частоте возбуждения по-прежнему отсутствует, а плавный подъем в области высоких частот, свойственный режиму № 4, сохраняется.

Общим для режимов № 4–5 можно считать сильно нелинейный характер с присутствием частот, значительно отличающихся от частоты возбуждения, причем колебания являются близкими к хаотическим или полностью хаотическими. Возбуждение этой группы режимов по уровню возбуждения имеет ярко выраженный пороговый характер, что говорит о вступлении в игру резервуара мод нестационарного характера.

Таким образом, с точки зрения нелинейности режимы № 3–5 можно считать принадлежащими одной группе — нестабильных нелинейных режимов.

14.3. Высокочастотные осцилляции

Общим свойством режимов № 3–5 является наложение на главные колебания мелкой сетки из осцилляций весьма высокой частоты, на несколько порядков превышающей частоту возбуждения и частоту основных колебаний. Будем называть далее такие колебания «сопутствующими». В режимах № 1 и № 2 сопутствующие колебания отсутствуют. Наиболее сильно сопутствующие колебания проявляются для первого осциллятора, хотя и для второго осциллятора остаются заметными. Пример сопутствующих колебаний для первого осциллятора в режиме гигантских осцилляций показан на рис. 14.11.

Из рисунка видно, что сопутствующие колебания имеют чисто синусоидальный характер, причем производная (б) четко соответствует результату дифференцирования основных колебаний (а) (как косинус соответствует синусу). Параметрический портрет представляет собой ряд последовательно развивающихся правильных эллипсов, смещение которых по горизонтальной оси с левой стороны направо соответствует спадающему по вертикальной оси характеру развертки смещения (а).

Замечание. Представленный на рис. 14.11, в параметрический портрет в геометрическом отношении является «дрейфом», по характеру

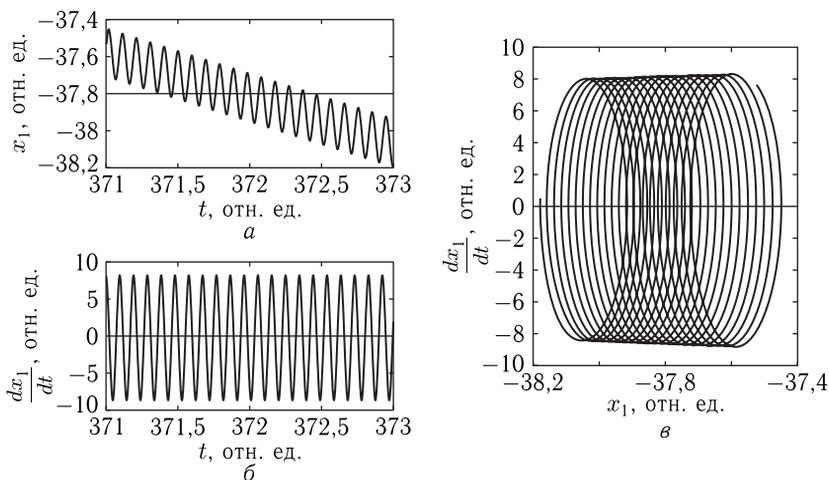


Рис. 14.11. Пример развертки по времени сопутствующих колебаний смещения (а) и производной от смещения по времени (б), а также их параметрический портрет (в). Режим гигантских осцилляций при $A_0 = 7,0$ отн. ед. Шаг по времени $\Delta t = 0,001$ отн. ед. Остальные параметры те же, что на рис. 14.7

напоминающим движение заряженных частиц в неоднородном магнитном поле при наличии слабого электрического поля [128, стр. 383–388, рис. 14.141–216]. Эллиптический характер колец такого дрейфа определяется синусоидальными развертками колебаний смещения (а) и производной (б), сдвинутых по фазе на 90 градусов, а поступательное перемещение «ведущего центра» определяется линейным спадом центральной линии колебаний смещения (а).

Некоторое изменение вертикальных размеров эллипсов отражает соответствующее изменение амплитуды производных (б) (по развертке на глаз не заметное, но на портрете (в) проявляющееся явным образом). Из рис. 14.11, а (или рис. 14.11, б) можно видеть, что период сопутствующих колебаний равен $T_S = 0,0952$ отн. ед., так что частота их равна $\omega_S = 66,0$ отн. ед., то есть выше частоты возбуждения в 66 раз.

Амплитуда сопутствующих колебаний смещения в режимах № 3–5 всегда на два-три порядка меньше амплитуды основных колебаний, причем такая амплитуда сохраняется постоянной на всем интервале развития основных колебаний. Вследствие малости амплитуды на развертках по времени основных колебаний (рис. 14.5, 14.8, 14.10) сопутствующие колебания на глаз не заметны. Однако эти колебания весьма сильно проявляются на развертках производных. Так, резкое замазывание производных на рис. 14.5, б1 и рис. 14.7, б1, а также замазывание соответствующих портретов происходит на частоте именно сопутствующих колебаний. То же касается рис. 14.9, где в усло-

виях стабилизации сопутствующие колебания все же остаются, хотя и с весьма малой амплитудой. Таким образом, несмотря на кажущуюся малой амплитуду и крайне высокую частоту, сопутствующие колебания воздействуют на основные колебания весьма заметным образом.

Замечание. Из сравнения рис. 14.11, *a* с рис. 14.7, *a1* можно видеть, что на первом смещение отрицательно (около минус 38 отн.ед.), тогда как на втором в том же интервале времени положительно (около плюс 25 отн. ед.). Такое различие не должно вызывать недоумения, так как рис. 14.11, *a* построен при шаге по времени $\Delta t = 0,001$, рис. 14.7, *a1* — при шаге $\Delta t = 0,01$. Проверка показывает, что при изменении шага по времени конфигурация колебаний (при условии сохранения их общего характера) может меняться, что является проявлением их фрактального характера [91, 92, 129]. Более подробно фрактальный характер рассматриваемых колебаний и вообще колебаний, описываемых системой (14.3)–(14.4), авторы предполагают рассмотреть в отдельной работе.

14.3.1. Модельная иллюстрация роли сопутствующих колебаний

Подробное рассмотрение сопутствующих колебаний показывает, что они как бы «накладываются» на основные колебания. То есть наблюдаемые колебания являются арифметической суммой основных и сопутствующих колебаний. Пример такого суммирования схематически показан на рис. 14.12. Здесь роль основных колебаний, то есть гигантских осцилляций, играет синусоида, построенная по формуле

$$x_B = \sin(t), \quad (14.5)$$

а роль сопутствующих — синусоида, построенная по формуле

$$x_G = 0,1 \cdot \sin(50 \cdot t). \quad (14.6)$$

Результирующие колебания являются суммой:

$$x_1 = x_B + x_G = \sin(t) + 0,1 \cdot \sin(50 \cdot t). \quad (14.7)$$

Именно эта сумма представлена на рис. 14.12.

Рассмотрим теперь количественную сторону явления, опираясь на данные машинных экспериментов, представленные на рис. 14.7 и рис. 14.11. Для удобства используем временные зависимости с виде экспонент. Положим

$$x_1 = B e^{i\Omega t} + G e^{ipt}, \quad (14.8)$$

где Ω — средняя частота гигантских осцилляций, B — их амплитуда, p — частота сопутствующих колебаний, G — их амплитуда. Частоту возбуждения по-прежнему обозначим через ω , причем положим $\omega = 1$ отн. ед.

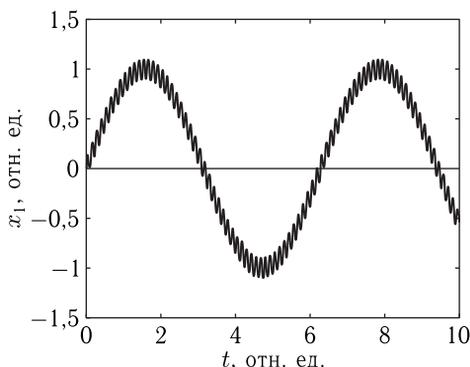


Рис. 14.12. Схема суммы колебаний основных и сопутствующих, построенная в соответствии с форм. (29)

Из приведенных в разделах 14.2.4 и 14.3 рис. 14.7 и рис. 14.11 следует, что

$$\Omega = \omega/50, \quad p = \omega \cdot 66,$$

так что

$$\Omega \ll \omega \ll p.$$

Из тех же рисунков можно видеть, что $B = 50$, $G = 0,14$, то есть

$$x_1 = 50e^{i\Omega t} + 0,15e^{ipt}, \quad (14.9)$$

так что амплитуда колебаний основной частоты значительно (около 360 раз) больше амплитуды сопутствующих колебаний.

Производная (14.8) имеет вид

$$\frac{dx_1}{dt} = i\Omega B e^{i\Omega t} + ipG e^{ipt}, \quad (14.10)$$

Используя числовые значения, находим

$$\Omega B = \omega = 1, \quad pG = 9\omega = 9,$$

так что (14.10) принимает вид

$$\frac{dx_1}{dt} = i(1e^{i\Omega t} + 9e^{ipt}), \quad (14.11)$$

то есть амплитуда производной сопутствующих колебаний значительно преобладает над амплитудой основных колебаний (превышает ее в 9 раз).

Из рис. 14.11, б видно, что амплитуда производной сопутствующих колебаний равна около 8 отн. ед., что как раз соответствует полученному значению.

Из рис. 14.7, а1 и рис. 14.7, б1 видно, что при амплитуде основных колебаний около 50 отн. ед. амплитуда колебаний производной

составляет около 15 отн. ед., что также удовлетворительно согласуется с полученным значением 9 отн. ед.

Таким образом, можно видеть, что в режиме гигантских осцилляций в формировании производных от основных колебаний (рис. 14.7, б1) главную роль играют не столько сами эти колебания (рис. 14.7, а1), сколько высокочастотные колебания, сопутствующие основным. Крайне высокая частота сопутствующих колебаний, в рассматриваемом случае превышающая частоту основных колебаний в 360 раз, что объясняет сплошное замазывание вертикальными траекториями параметрического портрета, приведенного на рис. 14.7, в1. То есть за то время, когда основное колебание пройдет от одного края портрета до другого и вернется обратно, сопутствующее колебание прочертит вертикальную траекторию 360 раз.

14.3.2. Замечание об аналогии с нелинейным ферромагнитным резонансом

По характеру нелинейности рассматриваемых режимов напрашивается аналогия с возбуждением колебания при нелинейном ферромагнитном резонансе в феррите [8, 41, 43]. Так, при низком уровне возбуждения имеют место стабильные нелинейные процессы, такие как умножение частоты или детектирование. При высоком уровне возбуждения, начиная с некоторого порога, возникает параметрическое возбуждение обменных спиновых волн, которому свойственны нестабильности типа «дополнительного поглощения» и «автомодуляции» [8]. То есть имеется весьма емкий резервуар обменных волн, возбуждение которого однородной накачкой происходит только тогда, когда возникают условия для параметрического возбуждения волн этого резервуара. Вследствие значительной емкости и разнообразия волн резервуара, процесс возбуждения колебаний носит стохастический характер, проявляющийся в хаотизации возбуждаемых колебаний.

В качестве аналогии такого резервуара волн можно полагать «сопутствующие» возбуждения, рассмотренные в разделах 14.3 и 14.3.1. Однако существенное отличие резервуара сопутствующих мод от резервуара обменных состоит в том, что обменные волны имеют большое разнообразие частот и волновых чисел, тогда как сопутствующие — только одну частоту и одно волновое число. Кроме того, обменные волны имеют четко определенный резонансный характер, то есть в магнитном материале имеется «резонатор», для которого обменные волны являются собственными модами, тогда как для сопутствующих возбуждений такой резонатор в явном виде не просматривается.

Тем не менее авторы полагают, что приведенная аналогия описываемых здесь явлений с нелинейным ферромагнитным резонансом требует более подробного рассмотрения.

14.4. Замечание о возможности других режимов

Рассмотренные выше режимы представляют собой «линейку» вариаций колебаний системы при изменении только уровня возбуждения. При этом значения всех остальных параметров остаются фиксированными (раздел 14.1.1). Ввиду разнообразия возможных вариаций параметров можно допустить существование также и других режимов. Однако проверка показывает, что такие вариации в большинстве случаев приводят только к некоторому изменению приведенного набора режимов без серьезных качественных отличий. В первую очередь меняются интервалы существования соответствующих режимов по уровню возбуждения. Таким образом, в основном, повторяется тот же набор режимов в различных сочетаниях. Полностью сохраняется деление режимов на две принципиально различные группы — стабильных и нестабильных. Тем не менее авторы не берут на себя смелость утверждать, что другие режимы невозможны, так что поиск их может составить предмет для отдельной задачи.

Выводы по главе 14

Рассмотрена задача о возбуждении магнитоупругих колебаний в геометрии магнитоstrictionного преобразователя, представляющей собой нормально намагниченную ферритовую пластину, на которую подается переменное поле частоты, близкой к частоте ферромагнитного резонанса. Записана система связанных уравнений для намагниченности и упругого смещений. Отмечено, что введение квадратичного приближения позволяет свести задачу к рассмотрению модельной системы из двух связанных осцилляторов — магнитного и упругого. В рамках рассматриваемой задачи магнитный осциллятор предполагается нелинейным с нелинейностью третьего порядка, а упругий — линейным, причем связь между осцилляторами имеет кубический характер. Приведен динамический потенциал системы, позволяющий путем дифференцирования найти обобщенные силы, действующие на осциллятор, выявлены слагаемые потенциала, ответственные за кубическую нелинейность первого осциллятора и кубическую связь между осцилляторами. Приведена полученная на основе потенциала система из двух связанных уравнений второго порядка, отражающая кубическую нелинейность и кубическую связь осцилляторов.

Для численного решения задачи о развитии колебаний во времени выбраны параметры системы, обеспечивающие максимальную простоту задачи: собственные частоты обоих осцилляторов положены равными друг другу и частоте возбуждения, параметры затухания для обоих осцилляторов также положены равными друг другу, кубическая нелинейность и кубическая связь учтены только для первого осциллятора. В относительных единицах все частоты, параметры нелинейности и связи положены равными единице, а параметры затухания состав-

ляющими пять сотых от единицы. Произвольным оставлен только уровень возбуждения, который меняется в широких пределах.

Установлена мультирежимность возбуждаемых колебаний, определяемая уровнем возбуждения. В зависимости от такого уровня выделены пять основных режимов колебаний осцилляторов. В этих режимах исследованы развертки колебаний во времени, частотные спектры возбужденных колебаний и их параметрические портреты в координатах — смещение — производная от смещения.

Краткие характеристики режимов следующие.

Режим № 1 — синхронизм. Этот режим имеет место при низком уровне возбуждения, когда колебания обоих осцилляторов остаются полностью линейными. Колебания обоих осцилляторов имеют вид правильных синусоид на частоте возбуждения, а спектры имеют единственную линию на той же частоте. Параметрические портреты для обоих осцилляторов имеют вид четко очерченных правильных окружностей.

Режим № 2 — утроение частоты, Этот режим имеет место при несколько большем уровне возбуждения, когда колебания становятся слабо нелинейными. При этом основная частота колебаний остается равной частоте возбуждения, а синусоида приобретает небольшое расщепление, обусловленное примесью третьей гармоники. Такое расщепление особенно заметно на колебаниях первого осциллятора. В остальных колебаниях обоих осцилляторов подобны друг другу, а в спектре первого осциллятора кроме основной появляется дополнительная линия на тройной частоте возбуждения. На параметрическом портрете первого осциллятора появляются симметрично расположенные две выемки, соответствующие расщеплению синусоиды за счет третьей гармоники, а параметрически портрет второго осциллятора остается близким к окружности. По мере увеличения уровня возбуждения режим № 1 переходит в режим № 2 без какого-либо порога полностью плавным образом.

Режим № 3 — хаос. Этот режим возникает при увеличении уровня возбуждения настолько, что колебания становятся неустойчивыми. Режим имеет ярко выраженный пороговый характер, так что возникает скачком, при котором амплитуда колебаний по сравнению с режимом № 2 возрастает на два-три порядка. Характер колебаний — хаотический с произвольными скачками величины и длительности перепадов амплитуды. Колебания второго осциллятора являют собой зеркальное отражение колебаний первого в горизонтальной оси развертки по времени. Производные от смещения колебаний того и другого осцилляторов имеют весьма сильный хаотический характер, намного более ярко выраженный, чем хаотичность колебаний смещения. Графический характер разверток производных не соответствует графическому характеру смещений, причем развитие производных имеет вид резких скачков, после которых возбуждаются колебания весьма высокой частоты, амплитуда которых спадает во времени по характерному

для релаксации закону. Последовательное появление во времени таких скачков производных с последующей релаксацией имеет случайный характер, в некоторой степени привязанный к моментам прохождения через нуль колебания смещения. Такой характер производных наиболее выражен для первого осциллятора, а для второго — заметно слабее, так что заполнение релаксирующего спада высокочастотными колебаниями почти отсутствует. Параметрический портрет для первого осциллятора имеет вид сильно замазанной горизонтальной восьмерки, а для второго — размытой крестообразной фигуры, образованной изломанными траекториями. Спектр колебаний первого осциллятора, оставаясь частично сгруппированным около основной частоты, имеет по обе стороны сильные «крылья», заполненные случайными линиями. Спектр колебаний второго осциллятора также сильно размазан, однако заметно слабее, чем спектр первого. Интервал по уровню возбуждения для режима хаоса довольно небольшой, составляет несколько процентов от самого уровня, после чего это режим сменяется следующим — гигантскими осцилляциями, то есть хаос можно считать переходным режимом к следующему.

Режим № 4 — гигантские осцилляции. Этот режим возникает тогда, когда хаос сменяется длительными по времени и большими по амплитуде осцилляциями, по-прежнему имеющими хаотический характер. Длительность гигантских осцилляций превышает величину периода колебаний возбуждения на два-три порядка и более. Амплитуда по сравнению с амплитудной при хаосе возрастает, однако незначительно — не более чем на 20%, оставаясь больше амплитуд при режиме № 2 на два-три порядка. Порог при переходе от режима № 3 явно не выражен, расширение скачков хаоса до длительности гигантских осцилляций происходит плавным образом. Основной характер колебаний обоих осцилляторов, их производных и параметрических портретов остается тем же, что при хаосе, однако здесь колебания становятся значительно более чистыми, освобождаясь от примеси шума. Спектры колебаний теперь окончательно отвязываются от частоты возбуждения и имеют широкий хаотический характер. Интервал уровня возбуждения, соответствующий этому режиму, довольно широкий и превышает в несколько (до трех) десятков уровень возбуждения режима хаоса.

Режим № 5 — задержанная стабилизация. Этот режим по мере увеличения уровня возбуждения приходит на смену режиму № 4, также без порога, то есть достаточно плавно, и далее не меняется при увеличении уровня возбуждения до четырех-пяти порядков по сравнению с порогом возбуждения хаоса (то есть, можно считать, до физической бесконечности). Переход от режима гигантских осцилляций состоит в том, что из всех осцилляций остается только одна, после которой заметные осцилляции прекращаются и смещение осцилляторов выходит на стабильный уровень, весьма малой амплитуды, но превышающий амплитуду колебаний в режиме № 2 вблизи порога перехода к режиму № 3 на порядок и более. Такая единственная

осцилляция имеет высокую амплитуду, ту же или несколько больше амплитуды гигантских осцилляций) и значительную длительность, превышающую длительность гигантских осцилляций в несколько раз. Колебания второго осциллятора по-прежнему остаются зеркальным отражением колебаний первого в горизонтальной оси времени, а производные смещений того и другого имеют амплитуду, близкую к амплитуде в режиме № 4, но теперь скачкообразные осцилляции отсутствуют. Однако в колебаниях обоих осцилляторов, и особенно первого, по-прежнему присутствуют осцилляции весьма высокой частоты с амплитудой на два-три порядка меньшей амплитуды основных колебаний. Параметрические портреты становятся значительно менее сложными траекториями, чем в режиме гигантских осцилляций, так для первого осциллятора портрет утрачивает одно из крыльев горизонтальной восьмерки, однако единственное оставшееся крыло остается замазанным по-прежнему. Параметрический портрет для второго осциллятора содержит всего одну траекторию с небольшим сгустком на ее конце за счет высокочастотных осцилляций малой амплитуды. Спектр колебаний по-прежнему полностью отвязан от частоты возбуждения и имеет ярко выраженную низкочастотную линию, соответствующую выходу смещения на стабильный уровень. Остальная часть спектра подобна спектру при режиме № 4, однако при амплитуде на один-два порядка меньшей амплитуды низкочастотной составляющей.

Отмечены некоторые общие свойства, характерные для всех режимов. Так полный набор режимов можно разбить на две характерные группы: стабильные колебания — режимы № 1, № 2 и нестабильные — режимы № 3–№ 5. Эти две группы по уровню возбуждения разделены ярко выраженным порогом, по прохождении которого амплитуда колебаний скачком увеличивается на два-три порядка. Внутри каждой группы пороги при переходе между режимами отсутствуют. Колебания в стабильных режимах полностью детерминированы, имеют правильный синусоидальный характер, спектры имеют четко выраженные одну-две линии, соответствующие кратные частоте возбуждения, а параметрические портреты — четко очерченные траектории в виде круга, в котором могут присутствовать четкие симметричные выемки. Колебания в нестабильных режимах имеют хаотический характер, спектры шумовые без привязки к частоте возбуждения, параметрические портреты — горизонтальные восьмерки сильно замазанные нерегулярными траекториями. Характерной особенностью нестабильных режимов является наложение на основные колебания дополнительных осцилляций крайне высокой частоты и малой амплитуды. Развертки колебаний во времени в нестабильных режимах имеют фрактальный характер, проявляющийся в отсутствии детерминированности колебаний при изменении шага по времени.

Выполнено отдельное исследование высокочастотных колебаний, сопутствующих режимам нестабильной группы. Установлено, что такие колебания имеют четкий синусоидальный характер, причем частота их

превышает частоту возбуждения почти на три порядка и амплитуда в течение развертки по времени сохраняется постоянной на уровне на два порядка ниже амплитуды основных колебаний. Параметрический портрет имеет вид последовательно сдвинутых по оси смещения правильных эллипсов, в геометрическом отношении напоминая траекторию дрейфа заряженных частиц в неоднородном магнитном поле при наличии слабого электрического поля.

Установлено, что сопутствующие колебания особенно сильно проявляются на развертках производных от смещения, что и обеспечивает сильное замазывание параметрических портретов нестабильных режимов вертикальными траекториями.

Выполнена модельная иллюстрация общего характера нестабильного режима, основанная на представлении нестационарных колебаний в виде суммы основных и сопутствующих колебаний. На основании дифференцирования приведенной суммы получена количественная оценка параметров разверток по времени и параметрических портретов гигантских осцилляций, совпадающая с данными оригинального расчета.

Приведена качественная аналогия нестационарных режимов с возбуждением колебаний намагниченности при нелинейном ферромагнитном резонансе. Отмечена роль сопутствующих колебаний, подобная роли спин-волнового резервуара обменных волн.

Отмечена неполнота решенной задачи, состоящая в ограничении рассмотрения только фиксированной «линейкой» параметров осцилляторов. В качестве предмета для дальнейших исследований предложено расширение постановки задачи и отмечена возможность существования других режимов, в то же время укладывающихся в две основные группы — стабильных и нестабильных.

Глава 15

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ В УСЛОВИЯХ КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ И КУБИЧЕСКОЙ СВЯЗИ.

ЧАСТЬ 2. ВАРИАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ

В настоящей главе продолжено рассмотрение нелинейных вынужденных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Основное внимание уделяется рассмотрению упрощенной системы уравнений, в которой нелинейность и связь имеют кубический характер. В соответствии с уровнем возбуждения имеют место пять базовых режимов: синхронизм, утроение частоты, хаос, гигантские осцилляции и задержанная стабилизация. Первые два режима являются стабильными, беспороговыми и полностью детерминированными. Остальные три режима являются нестабильными и отделены от стабильных режимов порогом по уровню возбуждения. Исследованы зависимость порога возбуждения нестабильных колебаний от частоты возбуждения, характер колебаний при вариации диссипации осцилляторов, вариация собственных частот осцилляторов, вариация кубической нелинейности первого осциллятора, а также вариация связи между осцилляторами. Установлено, что изменение параметров связи любого из осцилляторов приводит к одинаковому порядку смены режимов — от регуляризации к хаосу, гигантским осцилляциям, поджатой синусоиде и уходу на бесконечность. Для интерпретации описанных явлений предложена модель динамического потенциала. Причиной хаотического характера колебаний в нестабильных режимах является рассогласование по фазе между колебаниями осциллятора и скачками потенциала, в котором эти колебания происходят. Рассмотрен кольцевой характер возбуждения колебаний в системе в целом. Приведена аналогия с автоколебаниями в радиотехнической системе с положительной обратной связью. Приведены рекомендации для дальнейшего развития работы.

Основное изложение материала в данной главе следует работе [37], остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

15.1. Система уравнений и основные режимы колебаний

В предыдущей главе рассмотрен мультирежимный характер колебаний осцилляторов в системе с кубической нелинейностью и кубической связью [36]. Получены пять новых режимов: синхронизма, утроения частоты, хаоса, гигантских осцилляций и задержанной стабилизации. Настоящая глава посвящена подробному рассмотрению этих режимов при различных вариациях параметров системы.

В предыдущей главе рассмотрена система (14.3)–(14.4):

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \delta_1 x_1^3 + \vartheta_1 \cdot x_2^3 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (15.1)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (15.2)$$

Рассмотрим теперь характер колебаний при вариации параметров этой системы.

15.1.1. Параметры задачи

В основу дальнейшего рассмотрения положим базовые значения параметров задачи в наипростейшем виде, принятом в работе [36]:

$$\begin{aligned} \omega_1 = 1; \quad \omega_2 = 1; \quad \omega_0 = 1; \quad \beta_1 = 0,05; \quad \beta_2 = 0,05; \\ \delta_1 = 1; \quad \vartheta_1 = 1; \quad \gamma_2 = 1. \end{aligned}$$

Амплитуду возбуждения A_0 будем менять в пределах от 0,001 до 10 000. Шаг по времени для всех разверток, кроме отдельно указанных, возьмем равным $\Delta t = 0,01$. В ходе настоящего рассмотрения эти базовые параметры будем варьировать в пределах, допустимых физическим и математическим содержанием задачи. Как и в главе 14, все параметры будем задавать в безразмерных единицах (называемых далее «относительными единицами»), сохраняющими пропорциональные соотношения относительно друг друга.

15.1.2. Основные режимы колебаний

В предыдущей главе выявлены пять основных режимов колебаний системы, которые будем считать базовыми. Эти режимы получены при вариации уровня возбуждения при базовых значениях параметров, приведенных в разделе 15.1.1. В рамках настоящей работы ограничимся рассмотрением колебаний только первого осциллятора, так как колебания второго в определенной мере отражают колебания первого в упрощенном виде. Такое ограничение принято для упрощения решения поставленной задачи, так как в большинстве случаев, имея в руках колебания первого осциллятора и пользуясь набором базовых режимов, приведенных в работе [36], можно, по крайней мере качественно, судить о характере колебаний второго осциллятора.

Согласно главе 14 в рамках базовой «линейки» параметров по мере увеличения уровня возбуждения можно выделить следующие режимы:

- режим № 1 — $0,001 < A_0 \leq 0,08$ отн. ед. — синхронизм;
- режим № 2 — $0,08 \leq A_0 \leq 0,17$ отн. ед. — утроение частоты;
- режим № 3 — $0,17 \leq A_0 \leq 2,0$ отн. ед. — хаос;
- режим № 4 — $2,0 \leq A_0 \leq 70,0$ отн. ед. — гигантские осцилляции;
- режим № 5 — $70,0 \leq A_0 \leq 3000,0$ отн. ед. — задержанная стабилизация.

При этом режимы № 1 и № 2 являются стабильными, то есть полностью детерминированными, а режимы № 3–5 — нестабильными, колебания в них проявляют стохастичность, при малом изменении начальных условий меняются значительным образом и относительно величины шага развертки по времени имеют фрактальный характер. Колебания в стабильных режимах являются беспороговыми и имеют амплитуду сравнительно малую. Для возбуждения первого нестабильного режима — хаоса, уровень возбуждения должен преодолеть значительный порог, в результате прохождения которого амплитуда колебаний резким скачком увеличивается на два-три порядка. Между собой нестабильные режимы являются беспороговыми, то есть по мере увеличения уровня возбуждения переходят друг в друга плавным образом. Итак, при плавном увеличении уровень возбуждения должен преодолеть только один резкий порог — между режимом № 2, утроением частоты, и режимом № 3 — хаосом. Во всех остальных случаях режимы переходят друг в друга достаточно плавно.

Ввиду малого различия между режимами № 1 и № 2 в рамках настоящей работы объединим их в один класс стабильных режимов, дадим ему новое название — «регуляризованных колебаний» и присвоим двойной номер № 1–2. Для нестабильных режимов названия и номера оставим прежними.

Следуя главе 14, на рис. 15.1 приведем типичные развертки во времени колебаний первого осциллятора в основных режимах.

Здесь режим регуляризации № 1–2 (рис. 15.1, *a*) является стабильным, так что после начального времени около 200 отн. ед., когда в формировании колебаний принимают участие процессы релаксации, колебания принимают стационарную амплитуду и становятся полностью регулярными с частотой, равной частоте возбуждения.

Замечание. Наблюдаемые на (рис. 15.1, *a*) осцилляции амплитуды с периодом около 50 отн. ед. вызваны стробоскопическим эффектом из-за сочетания между периодом возбуждающих колебаний и циклическостью машинного вывода амплитуды через определенное число шагов по времени (вывод через 200 шагов при шаге 0,01 отн. ед. и периоде возбуждения 6,28 отн. ед.). При выводе на каждом шаге амплитуда колебаний остается постоянной и период равным периоду возбуждения. Принятый здесь вывод через 200 шагов обусловлен удобством машинного счета, малым временем и малым объемом выводимого

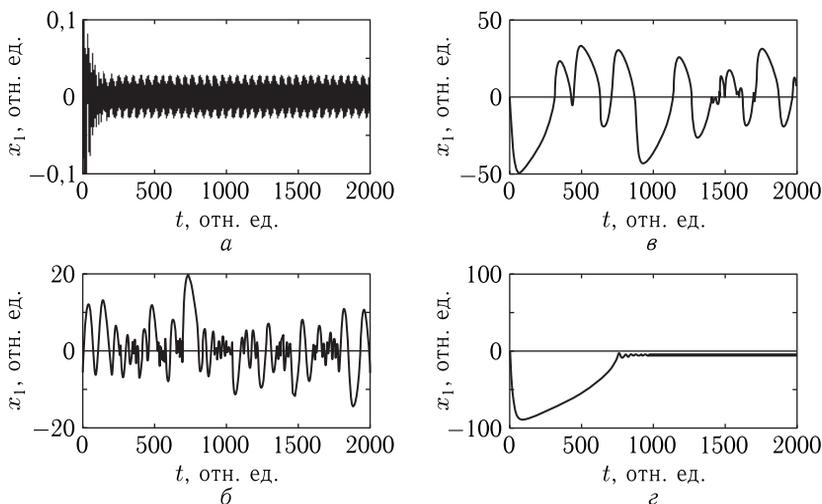


Рис. 15.1. Развертки по времени для базовых режимов колебаний первого осциллятора при различных уровнях возбуждения: *a* — $A_0 = 0,10$ отн. ед., режим № 1–2 — регуляризация; *б* — $A_0 = 1,0$ отн. ед., режим № 3 — хаос; *в* — $A_0 = 10$ отн. ед., режим № 4 — гигантские осцилляции; *г* — $A_0 = 90$ отн. ед., режим № 5 — задержанная стабилизация

файла. Проверка показывает, что стробоскопический эффект проявляется только при периоде колебаний, сравнимым с периодом возбуждения, тогда как во всех рассматриваемых здесь нестабильных режимах период колебаний значительно больше периода возбуждения, так что стробоскопический эффект отсутствует.

Режим хаоса № 3 (рис. 15.1, *б*) является нестабильным, то есть для его реализации уровень возбуждения должен преодолеть определенный порог. Амплитуда колебаний резко возрастает сразу с 0,02 отн. ед. на рис. 15.1, *а* до около 10 отн. ед. и более на рис. 15.1, *б*, причем меняется от колебания к колебанию случайным образом. Период хаотических колебаний в среднем составляет около 100 отн. ед., то есть превышает период возбуждения почти на два порядка.

Режим гигантских осцилляций № 4 (рис. 15.1, *в*) также является нестабильным, однако колебания на вид значительно более упорядочены, чем в режиме хаоса. Отдельные колебания имеют крупный округлый вид, амплитуда увеличивается в среднем до 20–30 отн. ед., а период также увеличивается, составляя около 300 отн. ед.

Последний из реализующихся на линейке базовых параметров — режим задержанной стабилизации (рис. 15.1, *г*), также является нестабильным. Из множества гигантских осцилляций здесь остается только одна, точнее, ее отрицательная половина, а амплитуда такой осцилляции еще больше возрастает, достигая почти 100 отн. ед., при дли-

тельности более 700 отн. ед. По окончании этой осцилляции смещение осциллятора выходит на стационарный отрицательный уровень около 5 отн. ед.

Дальнейшее увеличение уровня возбуждения приводит только к некоторому количественному изменению параметров (амплитуды, времени задержки, уровня стабилизации) режима задержанной стабилизации, оставляя общий характер явления неизменным.

Отметим также, что все нестабильные режимы сопровождаются наложением на основные колебания «сопутствующих» осцилляций, имеющих правильный синусоидальный характер, крайне низкую амплитуду (порядка 0,1 отн. ед. и менее) и крайне высокую частоту (на два порядка выше частоты возбуждения, так что период их составляет около 0,09 отн. ед.). Для уверенного наблюдения сопутствующих осцилляций шаг развертки по времени следует выбирать не более $\Delta t = 0,001$ отн. ед. Более подробно сопутствующие осцилляции рассмотрены в разделах 14.3.1–14.3.2 (разделы 14–16 работы [36]). Значительная роль сопутствующим осцилляциям принадлежит в формировании производных от основных колебаний смещения осцилляторов, а также их параметрических портретов. В рамках настоящей работы производные и портреты не рассматриваются, поэтому сопутствующим осцилляциям, кроме некоторых особых случаев, должное внимание не уделяется. Однако авторы считают роль этих осцилляций в формировании нестационарных режимов весьма значительной, поэтому предполагают рассмотреть их в отдельной работе.

15.2. Пороговый характер возбуждения нестабильных нелинейных колебаний

В предыдущем разделе отмечено, что возбуждение нестабильных колебаний по амплитуде возбуждения имеет пороговый характер. Ввиду сходства и более простого характера колебаний второго осциллятора, в рамках настоящей работы ограничимся рассмотрением только первого осциллятора.

Обратимся к рис. 15.2, где приведены зависимости смещения x_1 и производной dx_1/dt от амплитуды возбуждения A_0 .

Из рисунка видно, что при малых значениях A_0 амплитуда колебаний как смещения, так и производной крайне мала. Это продолжается только до определенного значения A_0 , где амплитуда возбуждаемых колебаний резким скачком увеличивается сразу на несколько порядков, после чего далее увеличивается, но уже довольно плавно. Амплитуда колебаний производной, как правило, несколько меньше амплитуды смещения, однако такое отличие не носит однозначного характера.

Весь диапазон изменения уровня возбуждения A_0 можно условно разделить на три части.

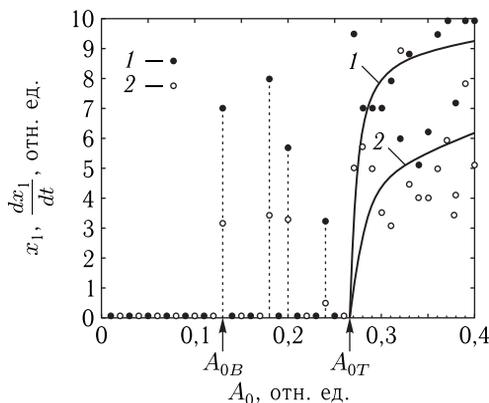


Рис. 15.2. Зависимости смещения и производной от амплитуды возбуждения для первого осциллятора. 1, сплошные точки — смещение x_1 ; 2, открытые точки — производная dx_1/dt . Все точки — результаты машинного эксперимента. Разброс точек обусловлен нестабильностью соответствующих режимов (№ 3–5). Кривые построены приближенно, так что отражают усредненные значения. Параметры приведены в разделе 15.1.1

Первая область изменения A_0 , в которой имеют место только стабильные колебания, то есть режимы № 1 и № 2 (или режим № 1–2). Эта область простирается от нуля до величины A_{0B} . В этой области амплитуды как смещения x_1 , так и производной dx_1/dt составляют сотые доли относительной единицы.

Вторая область изменения A_0 , в которой при плавном увеличении возбуждения области стабильных (режим № 2) и нестабильных (режимы № 3, № 4) колебаний чередуются с неравными промежутками. Эта область простирается от A_{0B} до A_{0T} . Здесь в режиме № 2 амплитуды смещения и производной по-прежнему составляют сотые доли относительной единицы, а в режимах № 3 и № 4 достигают нескольких относительных единиц. На рисунке такие колебания отмечены точками, из которых спускаются вниз пунктирные прямые. Таким образом, можно считать, что здесь порог имеет «дискретный» характер, а амплитуда и режим возбуждаемых колебаний определяется конкретным значением A_0 между A_{0B} и A_{0T} . Для удобства в дальнейшем будем называть A_{0B} «нижним порогом» нестабильных колебаний, а A_{0T} — «верхним порогом» тех же колебаний.

Третья область изменения A_0 , в которой при любых значениях возбуждения имеют место только нестабильные колебания (режимы № 3, № 4, № 5). Эта область простирается от A_{0T} до бесконечности (проверено до $A_0 = 3000$ отн. ед., после чего система уходит на бесконечность). Здесь в режиме № 4 амплитуды смещения и производной составляют десятки и сотни относительных единиц. Режим № 3 по величине A_0 занимает сравнительно узкую область (порядка нескольких

сотых относительной единицы), где-то сразу после A_{0T} , а режим № 5 начинается весьма далеко (при A_0 более 70 отн. ед.). Так что промежуточную часть изменения A_0 , которой в настоящей работе уделено основное внимание, занимает режим гигантских осцилляций № 4.

Зависимости, приведенные на рис. 15.2, в явной степени отражают наличие порога и его дробный характер. В то же время поведение амплитуды колебаний как смещения, так и их производной до порога и после него остаются неясными. Для более подробного выяснения этого вопроса рассмотрим эти области по отдельности.

На рис. 15.3 показаны зависимости смещения и производной от амплитуды возбуждения для первого осциллятора в области до порога, то есть при $A_0 < A_{0B}$.

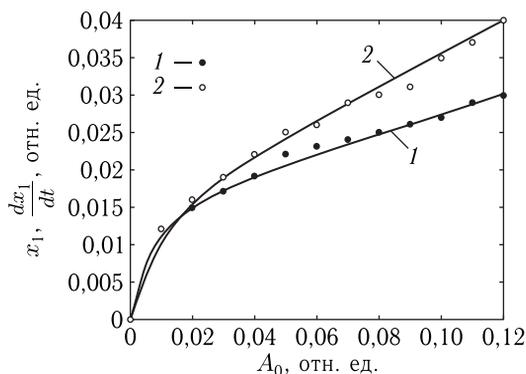


Рис. 15.3. Зависимости смещения и производной от амплитуды возбуждения для первого осциллятора в области до порога: 1, сплошные точки — смещение x_1 ; 2, открытые точки — производная dx_1/dt . Все точки — результаты машинного эксперимента. Разброс точек обусловлен нестабильностью соответствующих режимов (№ 3–5). Кривые построены приближенно, так что отражают усредненные значения. Параметры приведены в разделе 15.1.1

Из рисунка видно, что обе зависимости по мере увеличения A_0 , начинаясь с нуля, плавно возрастают, причем их рост, будучи сначала весьма быстрым, после $A_0 = 0,02$ замедляется и становится почти линейным. Такое поведение соответствует сначала колебаниям в режиме № 1, где амплитуда растет пропорционально уровню возбуждения, с последующим переходом к режиму № 2, где рост амплитуды замедляется из-за постепенного оттока поступающей энергии на возбуждение третьей гармоники. Какой-либо разброс точек, характерный для области возбуждения выше порога, то есть при $A_0 > A_{0T}$ (рис. 15.2) здесь отсутствует, что как раз соответствует стабильному состоянию нелинейных колебаний.

Обратимся теперь к рис. 15.4, где показаны зависимости смещения и производной от амплитуды возбуждения для первого осциллятора

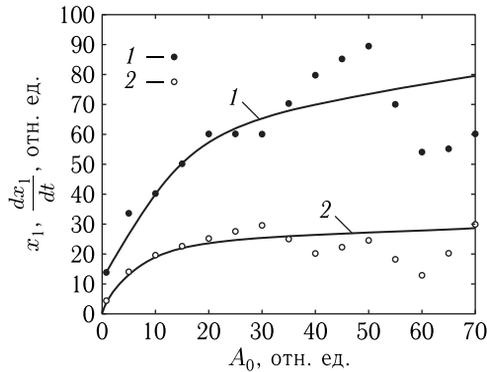


Рис. 15.4. Зависимости смещения и производной от амплитуды возбуждения для первого осциллятора в области выше порога. 1, сплошные точки — смещение x_1 ; 2, открытые точки — производная dx_1/dt . Все точки — результаты машинного эксперимента. Разброс точек обусловлен нестабильностью соответствующих режимов (№ 3–5). Кривые построены приближенно, так что отражают усредненные значения. Параметры приведены в разделе 15.1.1

в области выше порога, то есть при $A_0 > A_{0B}$. Участок, представленный на рис. 15.3 (режимы № 1 и № 2), здесь сливается с нулевой вертикальной линией, так что не рассматривается. То же касается режима № 3, который также занимает весьма узкую область и заметных особенностей не проявляет. Таким образом, приведенные здесь кривые относятся главным образом к режиму № 4 (гигантские осцилляции). Заметим также, что на рис. 15.4 амплитуда производной выше амплитуды смещения, а здесь — ниже. Можно полагать, что такая «перемена мест» обусловлена сильным разбросом точек в области сразу выше порога, показанной в правой части рис. 15.2, где из-за дробности явления отдельные точки перескакивают вверх и вниз в почти хаотическом порядке.

Из рисунка видно, что здесь, как и в предыдущем случае, обе зависимости растут, причем рост по мере увеличения уровня возбуждения все более замедляется, постепенно стремясь к постоянному уровню, что особенно заметно для производной (кривая 2). Такое поведение соответствует увеличению нестабильности колебаний в режиме гигантских осцилляций, когда энергия возбуждения все более «размазывается» на более широкий спектр частот. Обе зависимости, начиная с $A_0 \approx 30$ отн. ед., приобретают скачкообразный характер, причем скачки с ростом A_0 увеличиваются, что соответствует увеличению нестабильности нелинейных колебаний.

В режиме № 5 (задержанная стабилизация) гигантские осцилляции вырождаются, так что осцилляция остается всего одна — для смещения — глубокий спад с последующим сравнительно медленным выходом на стационарный уровень (рис. 15.1, з). Амплитуда, то есть

«глубина» такой единственной осцилляции, приходя через ряд скачков, постепенно увеличивается, хотя весьма медленно, достигая при $A_0 \approx 3000$ отн. ед. уровня порядка — 100 отн. ед. При дальнейшем увеличении возбуждения система уходит на бесконечность. Производная во всем интервале изменения возбуждения имеет характер сопутствующих колебаний с постоянной весьма малой амплитудой.

15.2.1. Зависимость порога от частоты возбуждения

В предыдущем разделе выявлен пороговый характер возбуждения нестабильных колебаний (режимов №3–5). Рассмотрим теперь некоторые свойства порога неустойчивости. Согласно принятым условиям (раздел 15.1.1), собственные частоты обоих резонаторов совпадают и равны $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1$. Можно ожидать, что вынужденные колебания структуры в целом должны иметь резонансный характер. Однако проверка показывает, что это не так. Для пояснения обратимся к рис. 15.5, где приведена зависимость верхнего порога возбуждения нестабильных колебаний (режимов №3–5) A_{0T} от частоты возбуждения ω_0 . Проверка показывает, что пороги неустойчивости для обоих осцилляторов всегда совпадают, поэтому, как и ранее, ограничимся рассмотрением только первого осциллятора.

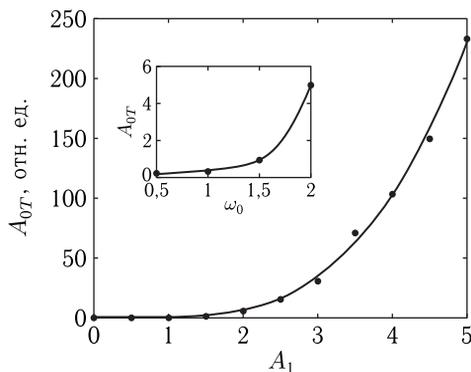


Рис. 15.5. Зависимость верхнего порога гигантских осцилляций от частоты возбуждения. Точки — результат машинного эксперимента. Аппроксимирующая кривая построена по формуле (15.3). На врезке — начальный участок той же кривой. Параметры те же, что на рис. 15.2

Из рисунка видно, что зависимость имеет возрастающий характер, то есть по мере увеличения частоты возбуждения порог возрастает, причем тем скорее, чем частота выше. Такой нарастающий вид имеет место во всем диапазоне исследованных частот (от $\omega_0 = 0,1$ до 5,0 отн. ед.), причем при $\omega_0 = 1$ никаких особенностей резонансного характера не наблюдается. Для исследования возможности аппроксимации наблюдаемой зависимости степенной функцией были опробованы многочлены второй, третьей и четвертой степеней. Проверка

показала, что наиболее подходящей является аппроксимация многочленом третьей степени вида:

$$A_{0T} = 2,9258\omega_0^3 - 6,2301\omega_0^2 + 3,9681\omega_0 + 0,2560. \quad (15.3)$$

Именно по этому многочлену построена кривая на рис. 15.5.

Возможны еще два вида аппроксимации, имеющие более простой вид и дающие почти такую же точность (в пределах 5%):

$$A_{0T} = 3(\omega_0 - 0,7)^3 + 1,1; \quad (15.4)$$

$$A_{0T} = 0,4\omega_0^4. \quad (15.5)$$

При ω_0 больше 5 отн. ед. измерения осложняются высокой дробностью порогов. Так, при $\omega_0 = 8,0$ отн. ед. нижний порог равен $A_{0B} = 1200$ отн. ед., а верхний — $A_{0T} = 2900$ отн. ед. При этом формула (15.4) дает $A_{0T} = 1680$, а формула (15.5) — $A_{0T} = 1640$. То есть обе формулы дают близкие значения, причем они оба оказываются в пределах интервала дробности порога. При $\omega_0 = 10,0$ отн. ед. нижний и верхний пороги равны 2400 отн. ед. и 4800 отн. ед. соответственно, а расчетные значения получаются равными 2400 и 4000 отн. ед. То есть здесь хотя оба значения находятся в пределах дробности, но теперь уже заметно различаются. Однозначный вывод относительно качества аппроксимации зависимости порога от частоты возбуждения, то есть выбора между формулами (15.4) и (15.5), требует более подробного исследования. В любом случае вопрос выбора той или другой формулы, то есть третьей или четвертой степени, должно решить построение качественной модели нестабильных колебаний. Ввиду крайне высокой сложности явления построение такой модели авторы предполагают рассмотреть в отдельной работе.

15.3. Вариация диссипации осцилляторов

В предыдущих разделах варьировался только один параметр — амплитуда возбуждения. Однако форма возбуждаемых колебаний и соответствующие режимы в значительной степени зависят от других параметров. Рассмотрим сначала влияние диссипации, для чего обратимся к рис. 15.6, демонстрирующему характер колебаний первого осциллятора при вариации параметров затухания осцилляторов — первого (левый столбец) и второго (правый столбец). Для каждого осциллятора рассмотрены три величины параметра затухания: малая — 0,005 отн. ед., средняя — 0,05 отн. ед. и большая — 0,5 отн. ед. При этом малая степень затухания соответствует высокой добротности осциллятора, когда амплитуда его колебаний в свободном состоянии уменьшается на порядок при 100–200 периодах, средняя — когда амплитуда спадает на порядок при 10–20 колебаниях, и высокая — соответствует почти апериодическому режиму, когда осциллятор совершает не более 1–2 колебаний.

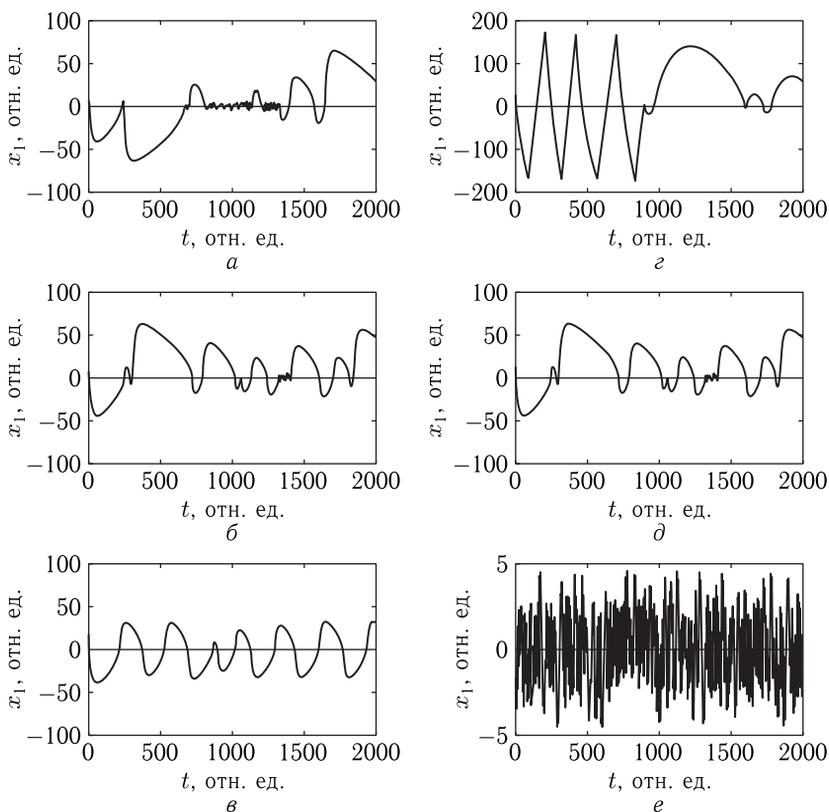


Рис. 15.6. Характер колебаний при вариации затухания осцилляторов. Амплитуда возбуждения — $A_0 = 7$ отн. ед. Левый столбец (а, б, в) — изменение β_1 , правый столбец (з, д, е) — изменение β_2 . а — $\beta_1 = 0,005$; $\beta_2 = 0,05$; б — $\beta_1 = 0,05$; $\beta_2 = 0,05$; в — $\beta_1 = 0,5$; $\beta_2 = 0,05$; з — $\beta_1 = 0,05$; $\beta_2 = 0,005$; д — $\beta_1 = 0,05$; $\beta_2 = 0,05$; е — $\beta_1 = 0,05$; $\beta_2 = 0,5$. Остальные параметры — те же, что приведены в разделе 15.1.1

Из рисунка видно, что изменение затухания первого осциллятора в пределах двух порядков меняет характер колебаний в довольно малой степени. Так, во всех случаях (рис. 15.6, а, б, в) остается режим гигантских осцилляций, причем как длительность отдельных осцилляций, так и их амплитуда в пределах полутора–двух раз сохраняются. Однако изменение затухания второго осциллятора в тех же пределах меняет характер колебаний в значительной степени. Так, при малом затухании (рис. 15.6, з) и среднем (рис. 15.6, д) затухании остается режим гигантских осцилляций, а при большом затухании (рис. 15.6, е) гигантские осцилляции сменяются режимом хаоса. Амплитуда осцилляций при малом затухании (рис. 15.6, з) больше ампли-

туды при среднем затухании (рис. 15.6, *д*) в 3–4 раза, причем часть гигантских осцилляций вместо округлого приобретает пилообразный характер с резко выраженными зубьями. Амплитуда хаоса (рис. 15.6, *е*) крайне мала и более чем на порядок меньше амплитуды при среднем затухании (рис. 15.6, *д*).

Проверка показывает, что колебания второго осциллятора во всех рассмотренных случаях являются отражением в горизонтально оси колебаний первого (как на рис. 15.5, *а1* и рис. 15.5, *а2*, а также на соответствующих рисунках в главе 14), однако при малом и среднем затуханиях (рис. 15.6, *е*, *д*) такое отражение является точным, а при большом затухании (рис. 15.6, *е*), то есть в режиме хаоса, на колебания первого осциллятора накладываются еще сопутствующие колебания (разделы 14.3.–14.3.2 главы 14) с амплитудой в 4–5 раз меньше амплитуды основных колебаний. В этом случае колебания второго осциллятора являются зеркальным отражением колебаний первого осциллятора за вычетом сопутствующих колебаний. В то же время более подробная проверка показывает, что и при малом и среднем затуханиях сопутствующие колебания в первом осцилляторе также присутствуют, но из-за крайней малости их амплитуды (на два–три порядка меньше амплитуды основных колебаний) на развертках типа показанных на рис. 15.6 явно не проявляются. Для их явного выявления следует использовать развертку в малом интервале времени, как это было сделано при построении рис. 14.11 в главе 14.

Таким образом, из проделанного рассмотрения можно сделать вывод, что в характере колебаний первого осциллятора затухание второго осциллятора играет значительно более существенную роль, чем его собственное затухание. Можно полагать, что причиной такого «усиления» влияния второго осциллятора является кубическая связь первого осциллятора со вторым, описываемая слагаемым $\vartheta_1 \cdot x_2^3$ в уравнении (15.1). При этом колебания второго осциллятора возбуждаются слагаемым $\gamma_2 \cdot x_1$, содержащим только первую степень x_1 . То есть первый осциллятор возбуждает второй, а второй, в свою очередь, возвращает колебания первому, возведенными в третью степень, что существенным образом отличается от линейного возвращения при линейной связи. Заметим, что принятое в данном рассмотрении равенство параметров $\vartheta_1 = \gamma_1 = 1$ как раз обеспечивает зеркальный характер колебаний осцилляторов, так что первый осциллятор получает обратно свои же колебания с амплитудой, возведенной в третью степень, что при достаточной их амплитуде (то есть выше порога) значительно превышает исходные колебания и способствует их значительному росту.

Замечание. Проверка показывает, что отмеченное выше равенство параметров связи $\vartheta_1 = \gamma_1 = 1$ является довольно критичным. Так, изменение одного из этих параметров уже на 5–10% в ту или иную сторону приводит к резкому изменению порога и даже иногда характера

колебаний. Ввиду сложности рассматриваемого явления авторы здесь ограничиваются приведенным равенством, а возможные отклонения предполагают рассмотреть в отдельной работе.

15.4. Вариация собственных частот осцилляторов

В предыдущем разделе варьировалась диссипация осцилляторов, а собственных их частоты сохранялись постоянными, равными частоте возбуждения. Было выявлено значительное разнообразие возбуждаемых колебаний. Рассмотрим теперь, как будут меняться колебания при вариации собственных частот осцилляторов. Оба параметра затухания положим одинаковыми: $\beta_1 = \beta_2 = 0,05$ отн. ед., амплитуду и частоту возбуждения положим теми, что в прошлом случае: $A_0 = 7,0$ отн. ед., $\omega_0 = 1,0$ отн. ед. Будем менять собственные частоты осцилляторов, отходя в обе стороны от частоты возбуждения ω_0 , то есть будем полагать $\omega_1 \rightarrow \omega_0 \pm \Delta\omega_1$, $\omega_2 \rightarrow \omega_0 \pm \Delta\omega_2$, где приращения частот $\Delta\omega_1$ и $\Delta\omega_2$ будем менять в интервалах, ограничиваемых режимами регулярных колебаний или уходом системы на бесконечность. Обратимся к рис. 15.7, демонстрирующему характер колебаний первого осциллятора при вариации частоты первого (левый столбец) и второго (правый столбец) осцилляторов. Приращения частот $\Delta\omega_1$ и $\Delta\omega_2$ выбраны соответствующими наиболее типичным случаям. В отсутствие вариаций, то есть при $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = 0$, колебания имеют характер гигантских осцилляций, показанных на рис. 15.6, б и рис. 15.6, д, так что здесь для экономии места не приводятся.

Из левого столбца рис. 15.7 видно, что увеличение частоты первого осциллятора ω_1 на $\Delta\omega_1 = +0,01$ отн. ед., то есть на 10%, уже приводит к режиму хаоса (рис. 15.7, а) а дальнейшее увеличение до $+0,05$ отн. ед. приводит к регуляризации колебаний (рис. 15.7, б).

Замечание. Наблюдаемые на рис. 15.7, б регулярные колебания имеют вид чистой синусоиды с периодом около 50 отн. ед., однако такая величина обусловлена техникой машинного расчета с выводом конечных значений через 200 шагов по времени, при котором имеет место стробоскопический эффект. Проверка показывает, что при более частом выводе регулярный характер колебаний сохраняется, а период уменьшается, так что при выводе на каждом шаге период становится равным 6,28 отн. ед., то есть регулярные колебания происходят с частотой возбуждения.

Полностью регулярные колебаний в виде чистой синусоиды наступают после небольшого периода установления, связанного с первичной релаксацией осциллятора при его включении и заканчивающегося при времени около 600 отн. ед. Дальнейшее увеличение частоты первого осциллятора приводит к сокращению времени установления до 400 отн. ед., после чего колебания остаются полностью регулярными при любом значении отклонения $\Delta\omega_1$ с монотонным уменьшением их

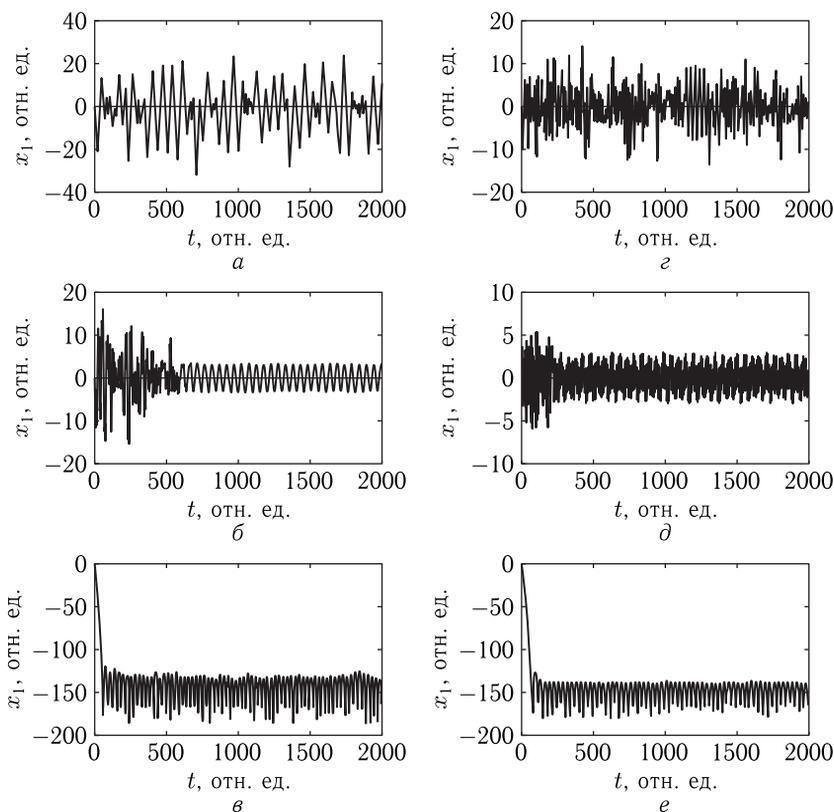


Рис. 15.7. Характер колебаний при вариации собственных частот осцилляторов. Амплитуда возбуждения — $A_0 = 7$ отн. ед. Левый столбец ($a, б, в$) — изменение ω_1 , правый столбец ($г, д, е$) — изменение ω_2 . a — $\Delta\omega_1 = +0,01$; $\Delta\omega_2 = 0$; $б$ — $\Delta\omega_1 = +0,05$; $\Delta\omega_2 = 0$; $в$ — $\Delta\omega_1 = -0,005$; $\Delta\omega_2 = 0$; $г$ — $\Delta\omega_1 = 0$; $\Delta\omega_2 = +0,03$; $д$ — $\Delta\omega_1 = 0$; $\Delta\omega_2 = +0,60$; $е$ — $\Delta\omega_1 = 0$; $\Delta\omega_2 = -0,001$.
Остальные параметры те же, что приведены в разделе 15.1.1

амплитуды. Так, при $\Delta\omega_1 = +1.0$ отн. ед., то есть при частоте вдвое выше первоначальной, амплитуда по сравнению с рис.15.7б уменьшается в два раза и при дальнейшем увеличении $\Delta\omega_1$ продолжает падать, стремясь к нулю (проверено до $\Delta\omega_1 = +10,0$ отн. ед.).

Однако так хорошо колебания ведут себя только при увеличении собственной частоты первого осциллятора, тогда как при ее уменьшении ниже $\omega_1 = 1,0$ отн. ед. характер колебаний существенно меняется, являясь относительно частоты возбуждения δ_1 резко несимметричным. Уже при $\Delta\omega_1 = -0,005$ колебания приобретают вид, показанный на рис. 15.7,в. То есть координата осциллятора сначала падает резким скачком в отрицательном направлении оси координат

до величины порядка минус 150 отн. ед., после чего возникают периодические колебания в виде «поджатой кверху синусоиды», центральная линия которой приходится на минус 150 отн. ед., а полный размах составляет около 50 отн. ед. Период такой «синусоиды» составляет около 50 отн. ед. и от величины шага вывода колебаний не зависит. Дальнейшее уменьшение собственной частоты первого осциллятора на величину $\Delta\omega_1 = -0,010$ отн. ед. приводит к уходу системы на бесконечность (то есть уже при первых шагах по времени x_1 стремится к минус бесконечности и колебания прекращаются).

Колебания вида, показанного на рис. 15.7, в, можно считать отдельным режимом, имеющим собственные свойства, такие как смещение центра колебания вниз на значительную величину и следующие за резким рывком вниз квазирегулярные колебания в виде «поджатой синусоиды», период которой значительно превышает период частоты возбуждения. Условно можно назвать его «режимом поджатой синусоиды со смещенным центром». Однако в последовательной «линейке» режимов, соответствующих увеличению уровня возбуждения при сохранении остальных параметров, описанной в разделе 15.1.2, этот режим отсутствует, а имеет место только при расстройке осцилляторов относительно частоты возбуждения. Поэтому на данном этапе авторы не исследуют этот режим более подробно, оставляя такое исследование в качестве предмета для отдельной работы.

Обратимся теперь к правому столбцу на рис. 15.7, где показаны колебания первого осциллятора при изменении собственной частоты второго. Из рис. 15.7, г видно, что при $\Delta\omega_2 = +0,03$ отн. ед. колебания имеют вид хорошо развитого хаоса, частота которого заметно выше часты хаоса на рис. 15.7, а. Переход к более или менее регулярному режиму наступает только при $\Delta\omega_2$ больше 0,60 отн. ед., причем регулярные колебания все равно остаются «замазанными» хаосом, как это видно из рис. 15.7, д. Тем не менее характер регуляризации, по крайней мере по огибающей, также имеет место. При дальнейшем снижении частоты при $\Delta\omega_2 = -0,001$ отн. ед. колебания приобретают такой же вид «поджатой синусоиды», как на рис. 15.7, в, а при $\Delta\omega_2 = -0,002$ отн. ед. система уходит на бесконечность.

Таким образом, изменение характера колебаний первого осциллятора при вариации собственных частот того и другого осцилляторов вверх и вниз происходит резко несимметричным образом. При увеличении частот обоих осцилляторов режим гигантских осцилляций сменяется хаосом, который при дальнейшем увеличении переходит в регулярные колебания с частотой возбуждения. При этом вариация частоты второго осциллятора вызывает более развитый хаос и большее «засорение» хаосом регулярных колебаний, чем вариация частоты первого осциллятора. При уменьшении частот того и другого осцилляторов гигантские осцилляции, минуя режим хаоса, резко сменяются режимом поджатой синусоиды со смещенным центром, после чего система уходит на бесконечность.

15.5. Вариация нелинейности первого осциллятора

В предыдущих разделах, посвященных вариации параметров осцилляторов (разделы 15.3, 15.4), рассматривалось затухание и собственные частоты осцилляторов. При этом, в соответствии с уравнениями (15.1), (15.2), полагалось, что второй осциллятор является линейным, а первый — нелинейным, причем нелинейность является кубической и описывается слагаемым $\delta_1 x_1^3$ в уравнении (15.1), где $\delta_1 > 0$ (при любых значениях $\delta_1 \leq 0$ система уходит на бесконечность). В проведенном выше рассмотрении параметр δ_1 всегда полагался равным единице (раздел 15.1.1). Рассмотрим теперь вариации этого параметра в обе стороны от единицы, для чего обратимся к рис. 15.8, где показан характер колебаний первого осциллятора при таких вариациях. В левом столбце параметр δ_1 меньше единицы, в правом равен единице и ее превышает. В обоих столбцах параметр нелинейности по рисункам сверху вниз возрастает. Как и ранее, отмечены наиболее типичные случаи.

Изменение характера колебаний по обе стороны от единицы резко несимметрично. Так, при $\delta_1 < 1$ (левый столбец) при величине δ_1 меньше 0,9900 отн. ед. система уходит на бесконечность. То есть колебания существуют только в узком интервале изменения δ_1 от 0,9900 отн. ед. до 1,0000 отн. ед., то есть в пределах 0,0100 отн. ед. При изменении параметра между 0,9900 и 1,0000 везде имеет место режим поджатой синусоиды со смещением центральной линии. При этом смещение всегда одно и то же, равное — 150 отн. ед., а размах поджатых колебаний при приближении δ_1 к единице несколько убывает: с 50 отн. ед. при $\delta_1 = 0,9900$ (рис. 15.8, а) до 25 отн. ед. при $\delta_1 = 0,9995$ (рис. 15.8, в). При этом запаздывание развития поджатых колебаний в то же время увеличивается с 50 отн. ед. (рис. 15.8, а) до 700 отн. ед. (рис. 15.8, в). Период поджатой синусоиды также увеличивается с 10 отн. ед. (рис. 15.8, а) до 120 отн. ед. (рис. 15.8, в).

Следует заметить, что значение δ_1 равное 0,990 отн. ед. не является предельным. Так, при $\delta_1 = 0,9890$ отн. ед. система уходит на бесконечность, но в интервале δ_1 от 0,9870 до 0,9880 отн. ед. колебания снова появляются в виде той же поджатой синусоиды. При $\delta_1 = 0,9860$ отн. ед. колебания отсутствуют, а при $\delta_1 = 0,9850$ отн. ед. поджатая синусоида снова появляется, но при $\delta_1 = 0,9840$ отн. ед. колебания исчезают совсем и при дальнейшем уменьшении δ_1 система всегда уходит на бесконечность. То есть нижняя граница допустимого значения δ_1 является «дробной», подобной по характеру границе «дискретной» порога возбуждения нестабильных режимов, показанной на рис. 15.2. Можно полагать, что в обоих случаях дискретный характер границы обусловлен стохастическим характером колебаний в нестационарных режимах.

При $\delta_1 \geq 1$ интервал существования колебаний с верхней стороны не ограничен (проверено до $\delta_1 = 10^{10}$ отн. ед.). Сначала, то есть

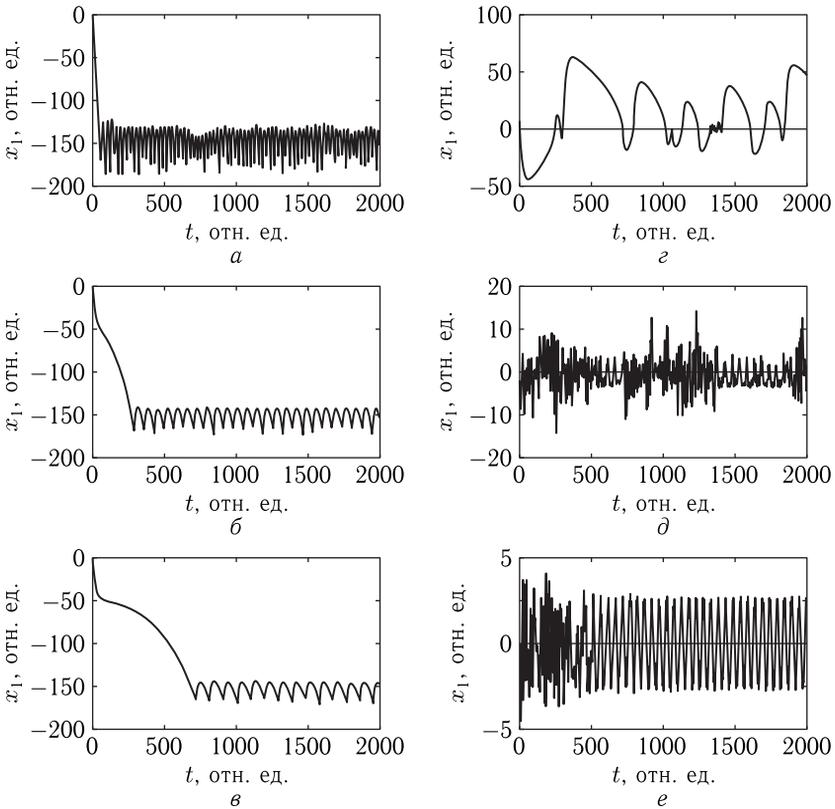


Рис. 15.8. Характер колебаний первого осциллятора при вариации параметра его нелинейности δ_1 . Амплитуда возбуждения — $A_0 = 7$ отн. ед. Левый столбец (а, б, в) — $\delta_1 < 1$, правый столбец (з, д, е) — $\delta_1 \geq 1$. а — $\delta_1 = 0,9900$; б — $\delta_1 = 0,9990$; в — $\delta_1 = 0,9995$; з — $\delta_1 = 1,0000$; д — $\delta_1 = 1,2000$; е — $\delta_1 = 1,7900$.

Остальные параметры те же, что приведены в разделе 15.1.1

при $\delta_1 = 1$, имеет место режим гигантских осцилляций (рис. 15.8, з), совпадающий с представленным ранее на рис. 15.6, б и рис. 15.6, д. При увеличении параметра нелинейности до $\delta_1 = 1,2$ отн. ед. этот режим сменяется хаосом (рис. 15.8, д), а при дальнейшем увеличении δ_1 до 1,7 отн. ед. (рис. 15.8, е) хаос сменяется регулярными колебаниями, развивающимися после небольшого периода установления (около 500 отн. ед.). Эти колебания имеют тот же характер, что и приведенные на рис. 15.7, б, то есть их период равен периоду возбуждения (с учетом стробоскопического эффекта).

При дальнейшем увеличении параметра δ_1 регулярный характер колебаний сохраняется, а амплитуда их постепенно уменьшается, при $\delta_1 = 10$ отн. ед. составляя около 1,5 отн. ед. Начиная с $\delta_1 = 30$ отн. ед.,

где амплитуда их падает до 0,9 отн. ед., регулярные колебания приобретают хаотическую составляющую (подобно показанным на рис. 15.7, д), после чего их амплитуда постепенно растет, при $\delta_1 = 100$ отн. ед. достигая 2,5 отн. ед., однако при дальнейшем увеличении δ_1 снова падает, при $\delta_1 = 1000$ отн. ед. составляя 0,2 отн. ед. При увеличении δ_1 до 100 000 отн. ед. амплитуда колебаний не меняется, оставаясь вблизи 0,2 отн. ед., а регулярность пропадает, заменяясь сплошным густым хаосом. Проверка увеличения δ_1 до величины 10^{10} выявила уменьшение амплитуды колебаний до 10^{-3} отн. ед. и принятие ими частоты возбуждения. Можно полагать, что при столь высокой нелинейности собственная колебательная природа осцилляторов подавляется, а остаются только вынужденные колебания, повторяющие колебания возбуждения.

Таким образом, характер колебаний при изменении степени нелинейности первого осциллятора является резко несимметричным. Если параметр нелинейности меньше единицы, область существования колебаний крайне узка и ограничена снизу критическим значением 0,9850 отн. ед., ниже которого система уходит на бесконечность. При этом колебания всегда имеют вид поджатой синусоиды. Если параметр нелинейности выше единицы, то никакого ограничения для его значения нет, причем колебания, начинаясь, когда это параметр равен единице, с гигантских осцилляций, постепенно проходят режим хаоса, сменяющийся далее регулярными колебаниями с частотой возбуждения.

15.6. Вариация связи между осцилляторами

Рассмотрим теперь наиболее сложный для вариации случай, а именно вариацию параметров связи между осцилляторами. Сложность здесь определяется тем, что меняться могут одновременно два параметра, так что изменение одного, приводящее к смене характера режима колебаний, при изменении второго может вернуть получившийся режим обратно. Поэтому ограничимся рассмотрением вариации каждого из параметров по отдельности при условии сохранения другого параметра постоянным.

Рассмотрение вариации частот, параметров затухания и нелинейности (разделы 15.3–15.5) выполнено при постоянном значении уровня возбуждения $A_0 = 7$ отн. ед. Такой уровень был выбран из соображения получения достаточно полного набора основных режимов колебаний, принимая за основу режим гигантских осцилляций № 4. Неохваченными остались только режимы утробения частоты № 2 и задержанной стабилизации № 5. Однако первый из них проявляется только при достаточно низком уровне возбуждения, где нелинейность еще не успела проявить свой нестабильный характер, а второй — при крайне высоком уровне возбуждения, когда колебательный характер системы уже в значительной степени подавлен, и преобладает навязанный возбуждением

почти стабильный уровень. То есть оба эти режима выходят за рамки наибольшего разнообразия колебаний и в случае необходимости могут быть рассмотрены отдельно.

Здесь же, подобно предыдущим случаям, ограничимся тем же единым уровнем возбуждения, равным $A_0 = 7,0$ отн. ед.

Проверка показывает, что во всех случаях изменения того или другого параметров существенно отличные от прежних режимы колебаний не возникают, а имеет место лишь чередование тех или иных режимов, ранее уже рассмотренных.

Рассмотрим сначала изменение параметра кубической связи первого осциллятора ϑ_1 . При этом полагаем параметр связи второго осциллятора $\gamma_2 = 1$.

Приведем интервалы изменения ϑ_1 , в пределах которых возбуждаются соответствующие режимы. В скобках отметим рисунки, на которых приведены развертки колебаний, типичные для этих режимов:

$0 < \vartheta_1 < 0,5$ — регулярные осцилляции;

$0,5 < \vartheta_1 < 0,9$ — хаос;

$0,9 < \vartheta_1 < 1,0$ — гигантские осцилляции;

$1,0 < \vartheta_1 < 1,010$ — поджатая синусоида;

$1,010 < \vartheta_1 < +\infty$ — уход системы на бесконечность.

Теперь приведем интервалы изменения параметра линейной связи второго осциллятора γ_2 при $\vartheta_1 = 1$:

$0 < \gamma_2 < 0,9$ — регулярные осцилляции;

$0,90 < \gamma_2 < 0,98$ — хаос;

$0,98 < \gamma_2 < 1,0$ — гигантские осцилляции;

$1,0 < \gamma_2 < 1,005$ — поджатая синусоида;

$1,005 < \gamma_2 < +\infty$ — уход системы на бесконечность.

Соответствующие развертки по времени показаны на рис. 15.9. В левом столбце (рис. 15.9, а, б, в, г) приведены развертки при вариации ϑ_1 и сохранении $\gamma_2 = 1$ отн. ед. В правом столбце (рис. 15.9, д, е, ж, з) — развертки при вариации γ_2 и сохранении $\vartheta_1 = 1$ отн. ед.

Из таблиц и рисунка можно видеть, что последовательная смена режимов по мере увеличения одного из параметров связи и сохранении другого в обоих случаях одна и та же. По мере увеличения того или иного параметра сначала идет регулярный режим, затем он сменяется хаосом, который переходит в гигантские осцилляции, на смену которым приходит поджатая синусоида, после чего система уходит на бесконечность.

Интервал режима гигантских осцилляций вместе с хаосом при вариации связи второго осциллятора заметно уже, чем при вариации связи первого, что говорит о том, что роль первого осциллятора в формировании этого режима важнее, чем роль второго. Режим поджатой синусоиды со смещением центра в обоих случаях крайне узкий, то есть как бы является переходным к уходу системы на бесконечность от режима гигантских осцилляций.

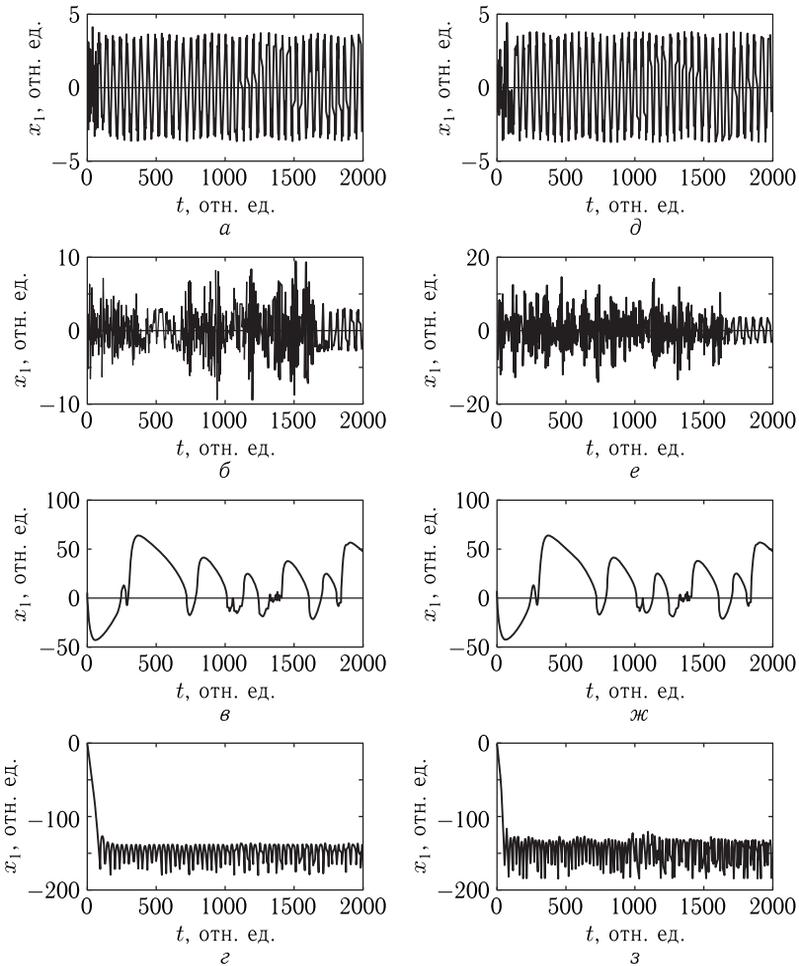


Рис. 15.9. Развертки по времени колебаний первого осциллятора при вариации параметров связи первого ϑ_1 (левый столбец) и второго γ_2 (правый столбец) осцилляторов. Амплитуда возбуждения — $A_0 = 7$ отн. ед. a — $\vartheta_1 = 0,3$ отн. ед., $\gamma_2 = 1,0$ отн. ед.; $б$ — $\vartheta_1 = 0,7$ отн. ед., $\gamma_2 = 1,0$ отн. ед.; $в$ — $\vartheta_1 = 1,0$ отн. ед., $\gamma_2 = 1,0$ отн. ед.; $г$ — $\vartheta_1 = 1,005$ отн. ед., $\gamma_2 = 1,0$ отн. ед.; $д$ — $\vartheta_1 = 1,0$ отн. ед., $\gamma_2 = 0,5$ отн. ед.; $е$ — $\vartheta_1 = 1,0$ отн. ед., $\gamma_2 = 0,92$ отн. ед.; $ж$ — $\vartheta_1 = 1,0$ отн. ед., $\gamma_2 = 1,0$ отн. ед.; $з$ — $\vartheta_1 = 1,0$ отн. ед., $\gamma_2 = 1,004$ отн. ед.

Заметим, что поджатая синусоида возбуждается здесь в условиях совпадения частот ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$), что было исключено при вариации частоты в условиях $\vartheta = 1$, $\gamma = 1$ (раздел 15.4).

Таким образом, во всех случаях по мере увеличения связи происходит последовательно развитие одних и тех же режимов колебаний:

на смену регулярным колебаниям приходит хаос, затем — гигантские осцилляции и после всего — поджатая синусоида. Заметим, что увеличение уровня возбуждения при базовом наборе параметров (раздел 15.1.1) приводит к такой же последовательности режимов: регуляризация — хаос — гигантские осцилляции — задержанная стабилизация, с той разницей, что вместо поджатой синусоиды возбуждается задержанная стабилизация. Однако оба эти последних режима характеризуются, во-первых, задержкой, во-вторых — стабильным уровнем состояния системы. Можно полагать, что более подробное рассмотрение «линейки» последовательной смены режимов, а также замещением в этой линейке последнего режима представляет интерес в качестве отдельной задачи.

Рассмотрим теперь области существования режимов в более широком диапазоне изменения параметров связи. На рис. 15.10 показана приближенная (без точных масштабов) схема расположения областей существования режимов при изменении параметров связи ϑ_1 и γ_2 . Сплошные линии — границы между областями.

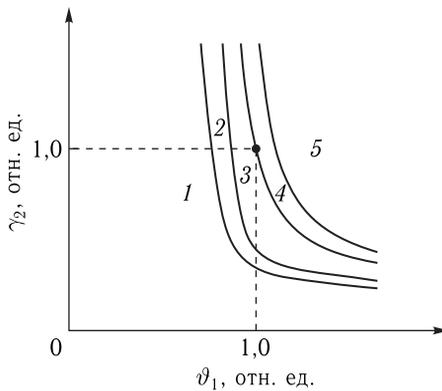


Рис. 15.10. Схема областей существования режимов на плоскости изменения параметров связи ϑ_1 и γ_2 . Сплошные линии — границы между областями. Цифры — номера областей по следующему списку: 1 — регулярные осцилляции; 2 — хаос; 3 — гигантские осцилляции; 4 — поджатая синусоида; 5 — уход на бесконечность. Пунктирные линии отмечают значения $\vartheta_1 = 1$ и $\gamma_2 = 1$

В начале координат, где параметры связи достаточно малы, имеют место регулярные колебания (область 1). При увеличении того или другого параметров колебания проходят последовательно через хаос (область 2), гигантские осцилляции (область 3) и поджатую синусоиду (область 4), после чего, то есть при достаточно большой величине того и другого параметров связи, система уходит на бесконечность (область 5).

Из рисунка видно, что границы между областями имеют вид кривых обратной пропорциональности, сдвинутых в сторону больших

значений параметра связи первого осциллятора ϑ_1 . В то же время для параметра связи второго осциллятора такого сдвига нет.

Можно полагать, что значительный сдвиг по горизонтальной оси при отсутствии сдвига по вертикальной обусловлен тем, что связь по мере увеличения ϑ_1 растет пропорционально кубу амплитуды колебаний, тогда как связь за счет параметра γ_2 растет только пропорционально первой степени амплитуды, а кубический рост при параметре, большем единицы, преобладает над линейным. То есть при $\vartheta_1 < 1$ рост за счет ϑ_1 отстает от роста за счет γ_2 , а при $\vartheta_1 > 1$ его обгоняет.

Замечание. В проведенном здесь рассмотрении оба параметра связи ϑ_1 и γ_2 полагались положительными (то есть $\vartheta_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$). Проверка показывает, что в случае если один из этих параметров является положительным, а другой отрицательным (то есть при $\vartheta_1 > 0$, $\gamma_2 < 0$ или $\vartheta_1 < 0$, $\gamma_2 > 0$) то система уходит на бесконечность. Однако, когда оба параметра одновременно равны минус единице (то есть при $\vartheta_1 = -1$ и $\gamma_2 = -1$) колебания снова возникают в виде гигантских осцилляций. Более подробному изучению отрицательных значений параметров связи авторы предполагают посвятить отдельную работу.

15.7. Динамический потенциал

Проведенное рассмотрение, в совокупности с данными работы [32], показывает, что колебания принятой здесь системы (кубическая нелинейность и кубическая связь) имеют весьма сложный характер. Построение полной модели существенно осложняется тем обстоятельством, что производные от смещений того и другого осциллятора не соответствуют прямому дифференцированию зависимости смещения от времени, а являются результатом значительно влияния сопутствующих колебаний. Поэтому авторы в рамках настоящей работы ограничиваются далее только некоторыми соображениями, относящимися к отдельным характерным деталям явления.

Поскольку колебания всегда происходят в определенной потенциальной яме, приведем выражения для потенциалов осцилляторов [26], соответствующих уравнениям их движения (15.1)–(15.2). Так, следуя работе [36] (или потенциалу (1.19)–(1.23)), получаем:

потенциал для первого осциллятора

$$U_{P1} = \frac{1}{2}\omega_{01}^2 x_1^2 + \frac{1}{4}\delta_1 x_1^3 + \vartheta_1 x_1 x_2^3; \quad (15.6)$$

потенциал для второго осциллятора

$$U_{P2} = \frac{1}{2}\omega_{02}^2 x_2^2 + \gamma_2 x_1 x_2. \quad (15.7)$$

Из (15.6)–(15.7) видно, что потенциал первого осциллятора U_{P1} зависит от величины смещения второго осциллятора x_2 через слагаемое $\vartheta_1 x_1 x_2^3$. Поскольку во втором осцилляторе тоже происходят коле-

бания, то потенциал первого осциллятора зависит от состояния второго осциллятора, то есть является динамическим. Положим смещение второго осциллятора заданным, равным величине X_2 . При этом мгновенное значение потенциала первого осциллятора может быть определено по формуле

$$U_{P1}(X_2) = \frac{1}{2}\omega_0^2 x_1^2 + \frac{1}{4}\delta_1 x_1^3 + \nu_1 x_1 X_2^3 + 10^4, \quad (15.8)$$

где слагаемое 10^4 введено для того, чтобы потенциал при принятых параметрах оставался положительным. В силу определения любого потенциала с точностью до постоянного слагаемого, характер колебаний x_1 от этого слагаемого не зависит.

На рис. 15.11 показаны возможные варианты потенциала первого осциллятора U_{P1} при заданном значении смещения второго X_2 . Амплитуда возбуждения в вычислении потенциала не участвует, а здесь приведена для того, чтобы напомнить, что рассматривается режим гигантских осцилляций, при котором смещение второго осциллятора может быть порядка 10–20 отн. ед. и более. Итак, на рисунке приведены две кривые потенциала, соответствующие $X_2 = 10$ отн. ед. и $X_2 = -10$ отн. ед. Рисунок построен в логарифмическом масштабе по формуле (15.8), где положительность выражения под логарифмом обеспечивается слагаемым 10^4 отн. ед.

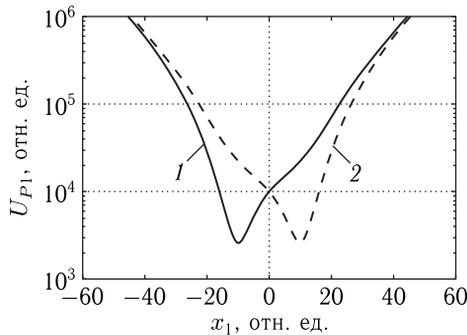


Рис. 15.11. Динамический потенциал первого осциллятора U_{P1} при различных значениях моделирующей величины смещения второго осциллятора X_2 . Амплитуда возбуждения — $A_0 = 7$ отн. ед. 1 — $X_2 = 10$ отн. ед.; 2 — $X_2 = -10$ отн. ед. Остальные параметры приведены в разделе 15.1.1

Из рисунка видно, что потенциал первого осциллятора всегда имеет минимум, причем, в зависимости от величины смещения второго осциллятора, этот минимум перескакивает туда-сюда в ту или другую сторону. То есть колебания первого осциллятора происходят в таком «прыгающем» потенциале. Амплитуда колебаний первого осциллятора определяется размахом ветвей потенциала, и при $U_{P1} = 10^5$ отн. ед. составляет около ± 20 отн. ед. Таким образом, приведенный потенциал

как раз обеспечивает амплитуду колебаний первого осциллятора, соответствующую режиму гигантских осцилляций.

В общем случае колебания смещения второго осциллятора, благодаря релаксационным свойствам структуры в целом, могут не попадать «в такт» с колебаниями первого осциллятора, так что будет какое-то рассогласование по фазе, что и может явиться причиной хаотического характера колебаний, наблюдаемых в нестационарных режимах.

15.8. Кольцевое возбуждение

Колебания в системе происходят таким образом, что внешнее возбуждение $A_0 \cos(\omega_0 t)$ вызывает колебания только первого осциллятора. Второй же осциллятор получает возбуждение от первого через последнее слагаемое уравнения (15.2) вида $\gamma_2 x_1$, так что смещение первого осциллятора x_1 является для второго возбуждающей силой. В то же время на первый осциллятор действует не только возбуждение $A_0 \cos(\omega_0 t)$, но и дополнительный сигнал, поступающий от второго осциллятора посредством слагаемого $\vartheta_1 x_2^3$. То есть возбуждение замыкается в кольцо: первый осциллятор, получая энергию извне, возбуждает второй, который затем возвращает возбуждение первому, что характерно для систем с обратной связью [126, стр. 365]. При этом возбуждающий сигнал $A_0 \cos(\omega_0 t)$ является как бы источником энергии для системы в целом, которая, возбуждая кольцевые колебания, поглощается за счет релаксационных параметров осцилляторов с коэффициентами β_1 и β_2 . Пороговое значение A_0 , соответствующее переходу от стабильных колебаний к нестабильным, также характерно для систем с обратной связью в качестве условия жесткого самовозбуждения [126, стр. 368–370].

15.8.1. Влияние параметров системы

Можно полагать, что в такой кольцевой структуре, питаемой извне постоянным источником энергии $A_0 \cos(\omega_0 t)$, могут существовать колебания, параметры которых, в первую очередь их частота, задаются не частотой источника ω_0 , а параметрами самой системы. Здесь важную роль играют условия, рассмотренные в предыдущих разделах 15.3–15.6.

Следует однако заметить, что полученные в упомянутых разделах данные не являются исчерпывающими. Так, получены только режимы в некоторых точках, соответствующих определенным значениям параметров. Таким образом, встает задача о более полном изучении этих условий, в первую очередь о получении плавных зависимостей. Кроме того, все полученные данные относятся только к одному уровню возбуждения $A_0 = 7$ отн. ед. Такой выбор был сделан авторами, чтобы не утонуть в ворохе получающихся данных. Тем не менее можно полагать, что исследование при других уровнях возбуждения также представляет заметный интерес.

15.9. Некоторые дополнительные особенности

В проделанном рассмотрении можно уловить некоторые характерные особенности, привлекающие внимание, но не находящие должного объяснения. Приведем некоторые из них, особенно ярко бросающиеся в глаза.

В разделе 15.2.1 с помощью рис. 15.5 показано, что порог возбуждения гигантских осцилляций, или точнее нестабильного режима, зависит от частоты возбуждения степенным образом, где показатель степени равен трем или четырем. Высокая точность степенной зависимости говорит о ее фундаментальном характере, однако вопрос о конкретном значении показателя степени остается открытым.

Другой особенностью, наблюдавшейся в работе [36], можно считать «зеркальный» характер колебаний второго осциллятора относительно колебаний первого, что особенно хорошо заметно в работе [36] на рис. 15.5, 15.8, 15.10 с эпюрами $a1$, $a2$. При этом «зеркальность» соблюдается только для колебаний смещения, тогда как для колебаний производных на тех же рисунках с эпюрами $b1$, $b2$ — полностью отсутствует. Здесь точность зеркальных отображений также чрезвычайно высока (просто «один в один»), так что зеркальность также можно считать фундаментальным свойством колебаний системы. Открытым, кроме природы, пока остается вопрос, является ли зеркальность свойством только линейки базовых параметров, использовавшихся в работе [36], или она имеет место при других вариациях параметров, рассмотренных здесь в разделах 15.3–15.6.

Важнейшей особенностью результатов, приведенных в настоящей работе и в ее первой части [36], является существование крайне высокочастотных, но малоамплитудных колебаний сопутствующего характера [36, разделы 14, 15]. Проверка показывает, что во всех описанных в настоящей работе режимах такие колебания существуют. Кроме общей причины их существования, остается выяснить, сохраняют ли они свои характеристики, частоту и амплитуду, при чередовании режимов, а также какими параметрами системы эти характеристики определяются. Ввиду достаточно общего существования и крайне необычных свойств, а также определяющей роли этих колебаний в формировании производных от смещения осцилляторов сопутствующие колебания также можно считать фундаментальным свойством системы, требующим детального рассмотрения.

Выводы по главе 15

Рассмотрена задача о возбуждении магнитоупругих колебаний в геометрии магнитострикционного преобразователя, содержащего нормально намагниченную ферритовую пластину, на которую воздействует переменное магнитное поле. Частота переменного поля близка к частоте

ферромагнитного резонанса пластины, а толщина пластины выбрана соответствующей упругому резонансу на той же частоте.

Записана система связанных уравнений движения для намагниченности и упругого смещения. Путем введения квадратичного приближения представлена возможность описания динамики преобразователя на основе системы уравнений для нелинейных колебаний двух связанных осцилляторов — магнитного и упругого. Оба уравнения, кроме инерционного, диссипативного и потенциального членов, содержат слагаемые связи и нелинейности. В уравнении для магнитного осциллятора нелинейность и связь имеют третий порядок по координате смещения, а в уравнении для упругого осциллятора нелинейность отсутствует, а связь имеет первый порядок. Внешнее возбуждение (переменное поле) действует только на магнитный осциллятор.

Введена система относительных единиц, в рамках которой приведен базовый набор параметров: все частоты, параметры нелинейности и связи положены равными единице, параметры затухания — пять сотых от единицы, а уровень возбуждения оставлен произвольным с возможностью изменения в широких пределах.

Отмечено, что в условиях базовой системы параметров по мере увеличения уровня возбуждения имеют место последовательно сменяющие друг друга пять базовых режимов: синхронизм, утроение частоты, хаос, гигантские осцилляции и задержанная стабилизация, совокупность которых принята в качестве «линейки» базовых режимов. Первые два режима — синхронизм и утроение частоты — являются стабильными, беспороговыми и полностью детерминированными начальными условиями. Остальные три режима — хаос, гигантские осцилляции и задержанная стабилизация — являются нестабильными, отделены от стабильных режимов порогом по уровню возбуждения, причем характер колебаний при малом изменении начальных условий меняется в значительной степени.

Ввиду близости характера колебаний обоих осцилляторов между собой, а также подчиненной роли второго осциллятора относительно первого (так как внешнее возбуждение действует только на первый осциллятор), основное внимание далее уделено колебаниям первого осциллятора.

Рассмотрены возможные вариации параметров системы, приводящие к деформации областей существования и основного характера базовых режимов. Выявлен не входящий в базовую линейку дополнительный режим «поджатой синусоиды со смещенным центром».

Подробно исследован пороговый характер возбуждения нестабильных колебаний. Показано, что по уровню возбуждения характер колебаний можно разделить на три части. Первая область, в которой имеют место только стабильные колебания. В этой области колебания полностью детерминированы, а амплитуды как смещения, так и производных от смещения по времени крайне малы и составляют сотые доли от относительной единицы. Вторая область, в которой при плавном

увеличении уровня возбуждения имеют место интервалы существования как стабильных, так и нестабильных режимов, чередующиеся друг с другом. Здесь амплитуды колебаний в стабильных режимах по-прежнему низки, а в нестабильных — выше на два-три порядка и достигают нескольких относительных единиц. Таким образом, порог в ряде случаев достигается, но имеет «дробный» характер, то есть области, где он достигнут, перемежаются с областями, где уровень возбуждения еще недостаточен. Начало второй области возбуждения названо «нижним порогом» возбуждения нестационарных колебаний. Третья область, где порог достигнут уже безусловно, то есть при плавном изменении уровня возбуждения колебания всегда имеют нестационарный характер. Начало третьей области возбуждения названо «верхним порогом» возбуждения нестационарных колебаний, который далее рассматривается в первую очередь.

Отмечено, что наиболее распространенным и обладающим наибольшим числом особенностей является режим гигантских осцилляций, на базе которого проведена дальнейшая вариация параметров системы.

Исследованы зависимости амплитуды колебаний в первой и третьей областях от уровня возбуждения. Показано, что в первой области при увеличении уровня возбуждения амплитуда колебаний растет плавно, почти линейно, а в третьей области рост амплитуды колебаний, в целом стремясь к насыщению, претерпевает по величине скачки до полутора-двух раз.

Исследована зависимость верхнего порога возбуждения нестабильных колебаний от частоты возбуждения. Показано, что при увеличении частоты возбуждения порог нестабильных колебаний с весьма высокой точностью растет по степенному закону третьего или четвертого порядков. Такой рост сохраняется при изменении частоты возбуждения от одной десятой до пяти значений частоты собственного резонанса осцилляторов. Предложены эмпирические формулы, описывающие такой характер роста порога с точностью не менее 5%.

Исследован характер колебаний при вариации диссипации осцилляторов в пределах на порядок выше и на порядок ниже базовых значений параметров затухания. Показано, что при вариации параметра затухания первого осциллятора в условиях сохранения базового затухания второго колебания в основном сохраняют режим гигантских осцилляций без серьезного изменения амплитуды и периода колебаний. При вариации параметра затухания второго осциллятора в условиях сохранения базового затухания первого характер колебаний меняется значительно более сильным образом. Так, при малом затухании второго осциллятора колебания сохраняют режим гигантских осцилляций, однако амплитуда их увеличивается в два-три раза и сами осцилляции вместо округлых частично становятся пилообразными. При большом затухании второго осциллятора режим гигантских осцилляций заменяется режимом хаоса с падением амплитуды на порядок и более. Таким образом, установлено, что на характер колебаний первого осциллятора

преимущественное влияние оказывает диссипация не первого, а именно второго осциллятора. Отмечено, что причиной такого «усиления» влияния второго осциллятора является кубическая связь первого осциллятора со вторым, то есть первый осциллятор возбуждает второй, а второй, в свою очередь, возвращает колебания первому возведенными в третью степень, причем «эффективность» такого возвращения в значительной степени зависит от параметров второго осциллятора.

Исследована вариация собственных частот осцилляторов. Показано, что увеличение собственных частот как первого, так и второго осцилляторов уже на единицы процентов приводит к переходу от гигантских осцилляций к хаосу, а далее — к регуляризации колебаний при достаточно малой амплитуде. Уменьшение собственных частот того или другого осцилляторов уже на доли процента приводит к переходу от гигантских осцилляций к режиму поджатой синусоиды со смещением центра, а дальнейшее уменьшение частот уводит систему на бесконечность.

Исследована вариация кубической нелинейности первого осциллятора. Отмечена сильная несимметричность изменения характера колебаний при изменении параметра нелинейности в ту или другую сторону. Так, уменьшение параметра нелинейности всего на единицы процентов приводит к замене гигантских осцилляций поджатой синусоидой со смещенным центром, причем период такой синусоиды по мере уменьшения параметра нелинейности также уменьшается. Уменьшение параметра нелинейности более чем на 10% приводит к уходу системы на бесконечность. Увеличение же параметра нелинейности допустимо в значительно более широких пределах. Так, увеличение до полутора–двух раз хотя также выводит систему из режима гигантских осцилляций, но в другую сторону — через хаос к регуляризации.

Исследована вариация связи между осцилляторами. Установлено, что при уровне возбуждения, соответствующем режиму гигантских осцилляций, изменение параметра связи первого осциллятора при сохранении связи второго и изменение параметров второго при сохранении связи первого приводит к одинаковому порядку смены режимов, без заметного преимущества вариации параметра связи одного осциллятора над вариацией параметра связи другого. Так, при малой связи (значительно меньше относительной единицы) колебания имеют регулярный характер и малую амплитуды (несколько относительных единиц). При увеличении параметров связи до 0,7–0,9 относительных единиц наступает режим хаоса с увеличением амплитуды в несколько раз, который при достижении параметром связи единицы переходит в режим гигантских осцилляций с амплитудой до нескольких десятков единиц. Увеличение связи в пределах половины процента выше единицы приводит к режиму поджатой синусоиды, а дальнейшее увеличение уводит систему на бесконечность.

На плоскости в координатах того и другого параметров связи построены области существования различных режимов колебаний.

Отмечены границы между областями регулярных осцилляций, хаоса, гигантских осцилляций, поджатой синусоиды и ухода системы на бесконечность. В начале координат, где параметры связи достаточно малы, имеют место регулярные колебания. При увеличении того или другого параметров колебания проходят последовательно через хаос, гигантские осцилляции и поджатую синусоиду, после чего, то есть при достаточно большой величине того и другого параметров связи, система уходит на бесконечность. Показано, что границы между областями существования имеют вид кривых обратной пропорциональности, сдвинутых в сторону больших значений параметра связи первого осциллятора.

Для интерпретации описанных явлений предложена модель динамического потенциала. Получен потенциал для первого осциллятора. Показано, что он имеет минимум, положение которого определяется величиной смещения второго осциллятора, так что колебания второго осциллятора вызывают перескакивание минимума потенциала первого в ту или другую сторону. Причиной хаотического характера колебаний в нестабильных режимах является рассогласование по фазе между колебаниями осциллятора и скачками потенциала, в котором эти колебания происходят.

Рассмотрен кольцевой характер возбуждения колебаний в системе в целом. Приведена аналогия с автоколебаниями в радиотехнической системе с положительной обратной связью, работающей в условиях жесткого самовозбуждения.

В качестве рекомендации для дальнейшего развития работы отмечена важность получения непрерывных зависимостей характера колебаний системы от ее параметров. Приведены некоторые особенности колебаний системы, требующие более подробного рассмотрения. В качестве таковых отмечена степенная зависимость верхнего порога нестабильности от частоты возбуждения, зеркальный характер колебаний второго осциллятора относительно колебаний первого, а также природа высокочастотных осцилляций сопутствующего характера, в том числе их роль в формировании колебаний производных от смещения осцилляторов.

Литература

1. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2003.
2. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. М.: Наука. 1988.
3. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: Наука. Физматлит. 2000.
4. Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). М.: ФИЗМАТЛИТ. 2001.
5. Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2002.
6. Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А., Панас А.И. Генерация хаоса. М.: Техносфера. 2012.
7. Станкевич Н.В., Попова Е.С., Кузнецов А.П., Селезнев Е.П. Широкополосные хаотические колебания в слабосвязанном ансамбле автоколебательных осцилляторов // Письма в ЖТФ. 2019. Т. 45. № 24. С. 17.
8. Моносов Я.А. Нелинейный ферромагнитный резонанс. М.: Наука. 1971.
9. Львов В.С. Нелинейные спиновые волны. М.: Наука. 1987.
10. Вейсс М. Сверхвысокочастотные и низкочастотные колебания, вызванные нестабильностью резонанса в ферритах / В кн.: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Сборник статей по ред. А.Г. Гуревича. М.: ИЛ. 1961. С. 281–285.
11. Щеглов В.И., Шавров В.Г., Зубков В.И., Власов В.С., Котов Л.Н. Автомодуляционный режим нелинейных вынужденных колебаний намагниченности феррита в резонаторе / Сборник трудов XII Международной конференции «Магнетизм, дальнее и ближнее спин-спиновое взаимодействие». Москва–Фирсановка: Издание МЭИ. 2009. С. 100.
12. Щеглов В.И. Стохастическая неустойчивость траекторий поверхностных магнитостатических волн в поле типа «вала» с пространственной модуляцией // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2014. № 10. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/oct14/1/text.pdf>
13. Ле-Кроу Р., Комсток Р. Магнитоупругие взаимодействия в ферромагнитных диэлектриках / В кн.: У. Мэзон (ред.): Физическая акустика. Т.3Б. Динамика решетки. М.: Мир. 1968. С. 156–243.
14. Моносов Я.А., Сурин В.В., Щеглов В.И. Возбуждение резонансных упругих колебаний при нелинейном ферромагнитном резонансе / Письма в ЖЭТФ. 1968. Т. 7. № 9. С. 315–317.
15. Зубков В.И., Моносов Я.А., Щеглов В.И. Спиновый эффект Мандельштама–Бриллюэна / Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 13. № 5. С. 229–232.

16. Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе // РЭ. 2009. Т. 54. № 7. С. 863–874.
17. Власов В. С., Иванов А. П., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Автоколебания в системе двух связанных осцилляторов, один из которых является гиромагнитным / Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ. 2012. С. 248–259.
18. Власов В. С., Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Анализ линейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2013. № 11. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/nov13/3/text.pdf>
19. Власов В. С., Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Автоколебания в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами / Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ. 2013. С. 188–198.
20. Власов В. С., Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа работы магнитострикционного преобразователя / Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: «НИУ МЭИ». 2013. С. 199–215.
21. Власов В. С., Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Анализ нелинейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов в квадратичном приближении // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2014. № 1. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/11/text.pdf>
22. Власов В. С., Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Анализ колебаний в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами на основе модели квадратичного приближения / Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: ИНФРА-М. 2015. С. 202–216.
23. Власов В. С., Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 1. Основные уравнения // РЭ. 2015. Т. 60. № 1. С. 79–91.
24. Власов В. С., Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 2. Некоторые нелинейные явления // РЭ. 2015. Т. 60. № 3. С. 297–310.
25. Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Анализ автомодуляционных колебаний в магнитоупругой среде на основе модели связанных магнитного и упругого осцилляторов / Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. № 5. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/may15/4/text.pdf>
26. Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Анализ автомодуляционных явлений в системе связанных магнитного и упругого осцилляторов

- на основе модели потенциала / Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. № 6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun15/9/text.pdf>
27. *Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 1. Динамический потенциал // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2017. № 7. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jul17/6/text.pdf>
28. *Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 2. Линейная связь // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2017. № 8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/5/text.pdf>
29. *Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 3. Нелинейная связь // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2017. № 8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/6/text.pdf>
30. *Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Динамический потенциал как модель нестационарного запаздывания возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты / Сборник трудов XXVI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы (фундаментальные физические исследования)». М.: ИНФРА-М. 2018. С. 243–253.
31. *Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Нестационарное запаздывание установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Часть 1. Общие положения. Формирование упрощенной системы // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2021. № 4. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr21/4/text.pdf>
32. *Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Нестационарное запаздывание установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Часть 2. Воздействие осцилляторов друг на друга // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2021. № 4. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr21/5/text.pdf>
33. *Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Нестационарное запаздывание установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Часть 3. Определяющее уравнение // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2021. № 4. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr21/6/text.pdf>
34. *Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Нестационарное запаздывание установления нелинейных колебаний в системе двух связанных осцилляторов. Часть 4. Кольцевое взаимодействие // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2021. № 4. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr21/7/text.pdf>
35. *Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Вынужденные колебания в системе из двух связанных осцилляторов в условиях кубической нелинейности и квадратичной связи // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2020. № 8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug20/7/text.pdf>
36. *Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Вынужденные колебания в системе из двух связанных осцилляторов в условиях кубической нелинейности и кубической связи. Часть 1. Мультирежимный характер колебаний //

- Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2023. №5. Режим доступа: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.5.6>
37. *Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Нестационарные колебания в системе из двух связанных осцилляторов в условиях кубической нелинейности и кубической связи. Часть 2. Вариация параметров системы // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2023. №5. Режим доступа: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.5.7>.
 38. *Шавров В. Г., Щеглов В. И., Иванов А. П.* Нелинейные колебания в задаче возбуждения гиперзвука. Сыктывкар: Коми республиканская типография. 2021.
 39. *Красюк Н. П., Дымович Н. Д.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Высшая школа. 1974.
 40. *Никольский В. В., Никольская Т. И.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука. 1989.
 41. *Гуревич А. Г.* Ферриты на сверхвысоких частотах. М.: Гос.изд.физ.-мат.лит. 1960.
 42. *Гуревич А. Г.* Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. М.: Наука. 1973.
 43. *Гуревич А. Г., Мелков Г. А.* Магнитные колебания и волны. М.: Наука. Физматлит. 1994.
 44. *Gilbert T. L.* A phenomenological theory of damping in ferromagnetic materials // IEEE Trans. on Magn., 2004, v.40, № 6, p.3443-3449.
 45. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972.
 46. Физическая энциклопедия. Т.1. М.: Советская энциклопедия. 1988. Статья «Гиперзвук».
 47. Физическая акустика. Под ред. У. Мэзона, Р. Терстона Т. 1–7. М.: Мир. 1966–1974.
 48. *Такер Дж., Рэмpton В.* Гиперзвук в физике твердого тела. М.: Мир. 1975.
 49. Поверхностные акустические волны. Под ред. А. М. Олинера. М.: Мир. 1981.
 50. *Викторов И. А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука. 1981.
 51. *Comstock R. L., LeCraw R. C.* Generation of microwave elastic vibrations in a disk by ferromagnetic resonance // J. Appl. Phys. 1963. V.34. № 10. P. 3022–3027.
 52. *Гуляев Ю. В., Зильберман П. Е., Темирязов А. Г., Тихомирова М. П.* Нелинейные собственные колебания спинов в плоскопараллельном ферромагнитном резонаторе // РЭ. 1999. Т. 44. № 10. С. 1262–1270.
 53. *Гуляев Ю. В., Зильберман П. Е., Темирязов А. Г., Тихомирова М. П.* Основная мода нелинейного спин-волнового резонанса в нормально намагниченных ферритовых пленках // ФТТ. 2000. Т. 42. № 6. С. 1062–1067.
 54. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука. 1973.
 55. *Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н.* Основы теории колебаний. М.: Наука. 1978.

56. Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Нелинейная динамика установления намагниченности в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами в условиях ориентационного перехода // РЭ, 2010. Т. 55, № 6. С. 689–701.
57. Власов В. С., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Комбинационное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре / Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ. 2013. С. 164–176.
58. Власов В. С., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Ударное возбуждение гиперзвука при перемагничивании ферритовой пластины / Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ. 2013. С. 177–187.
59. Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Вынужденная нелинейная прецессия вектора намагниченности в условиях ориентационного перехода // РЭ. 2011. Т. 56. № 1. С. 84–96.
60. Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Несимметричная вынужденная нелинейная прецессия намагниченности в условиях ориентационного перехода // РЭ. 2011. Т. 56. № 6. С. 719–732.
61. Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Мультирежимный характер нелинейной прецессии намагниченности второго порядка в условиях ориентационного перехода // РЭ. 2011. Т. 56. № 9. С. 1120–1131.
62. Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Несимметричное возбуждение прецессии намагниченности второго порядка в условиях ориентационного перехода // РЭ. 2012. Т. 57. № 5. С. 501–517.
63. Власов В. С., Кирушев М. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Прецессия намагниченности второго порядка в анизотропной среде. Часть 1. Одноосная анизотропия // РЭ. 2013. Т. 58. № 8. С. 806–820.
64. Власов В. С., Кирушев М. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Прецессия намагниченности второго порядка в анизотропной среде. II. Кубическая анизотропия // РЭ. 2013. Т. 58. № 9. С. 857–873.
65. Власов В. С., Котов Л. Н., Щеглов В. И. Нелинейная прецессия вектора намагниченности в условиях ориентационного перехода. Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2013.
66. Кикучи Е. Ультразвуковые преобразователи. М.: Мир. 1972.
67. Карпачев С. Н., Власов В. С., Котов Л. Н. Нелинейная релаксационная динамика магнитной и упругой подсистем тонкой ферритовой пленки вблизи акустического резонанса // Вестник МГУ. Сер. 3. 2006. № 6. С. 60–63.
68. Власов В. С., Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа автомодуляционного режима возбуждения гиперзвука магнитострикционным преобразователем / Сборник трудов XXII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва, М.: «НИУ МЭИ». 2014. С. 161–175.
69. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости (Теоретическая физика, т. VII). М.: Наука. 1965.
70. Ольховский И. И. Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука. 1970.
71. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука. 1964.

72. *Власов В. С., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре // *Электронный «Журнал радиоэлектроники»*. 2013. № 2. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/feb13/10/text.pdf>
73. *Власов В. С., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре при ферромагнитном резонансе // *РЭ*. 2014. Т. 59. № 5. С. 482–497.
74. *Котов Л. Н., Власов В. С., Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Исследование автоколебаний двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным // *Вестник Челябинского государственного университета*. 2013. № 25 (316). Физика. Вып. 18. С. 27–30.
75. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика, т. 1, 2. М.: Гостехиздат. 1950.
76. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика (Теоретическая физика, т. I). М.: Наука. 1965.
77. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика (Теоретическая физика, т. X). М.: Наука. 1979.
78. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М. Л.: ОГИЗ. Гос. изд. техн.-теор. лит. 1945.
79. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука. 1965.
80. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М.: Наука. 1981.
81. *Сивей М., Танненвальд П.* Непосредственное наблюдение спин-волнового резонанса // В сб. *Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах* (ред. — А. Г. Гуревич). М.: ИЛ. 1961. С. 594–597.
82. *Киттель Ч.* Возбуждение спиновых волн в ферромагнетиках однородным СВЧ полем / В сб. *Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах* (ред. — Гуревич А. Г.). М.: ИЛ. 1961. С. 585–593.
83. *Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Возбуждение связанных магнитоупругих колебаний при нелинейном ферромагнитном резонансе / Сборник трудов XVI Международной конференции «Радиолокация и радиосвязь». Москва–Фирсановка: Издание МЭИ. 2008. С. 197–205.
84. *Власов В. С., Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Динамика вынужденных колебаний намагниченности в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами в условиях ориентационного перехода / Сборник трудов XXII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». М.: НИУ МЭИ. 2014. С. 176–188.
85. *Власов В. С., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Нелинейные гиперзвуковые колебания магнитострикционного преобразователя на частотах, кратных частоте возбуждения. Часть 1. Деление частоты возбуждения // *Электронный «Журнал радиоэлектроники»*. 2015. № 9. <http://jre.cplire.ru/jre/sep15/4/text.pdf>
86. *Власов В. С., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Нелинейные гиперзвуковые колебания магнитострикционного преобразователя на частотах, кратных частоте возбуждения. Часть 2. Умножение частоты возбуждения // *Электронный «Журнал радиоэлектроники»*. 2015. № 10. <http://jre.cplire.ru/jre/oct15/1/text.pdf>

87. Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Сборник статей под редакцией Гуревича А. Г. М.: ИЛ. 1961.
88. Щеглов В. И. Взаимодействие упругих колебаний с прецессирующим магнитным моментом // РЭ. 1971. Т. 16. № 12. С. 2321–2322.
89. Щеглов В. И. Двойной акусто-магнитостатический резонанс. // ПЖТФ. 1980. Т. 6. № 15. С. 922–924.
90. Лакс Б., Баттон К. Сверхвысокочастотные ферриты и ферримангнетики. М.: Мир. 1965.
91. Mandelbrot B. B. The fractal geometry of nature. S.F. 1982. Перевод: Мандельброт Б. Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Наука. 2004.
92. Фракталы. Физическая энциклопедия. Т. 5. С. 371–372. М.: Большая российская энциклопедия. 1998.
93. Малоземов А., Слонзуски Дж. Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами. М.: Мир. 1982.
94. Лисовский Ф. В. Физика цилиндрических магнитных доменов. М.: Сов. Радио. 1979.
95. О'Делл Т. Ферромагнитодинамика. Динамика ЦМД, доменов и доменных стенок. М.: Мир. 1983.
96. Шавров В. Г., Щеглов В. И. Ферромагнитный резонанс в условиях ориентационного перехода. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2018.
97. Шавров В. Г., Щеглов В. И. Динамика намагниченности в условиях изменения ее ориентации. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2019.
98. Сул Г. Теория ферромагнитного резонанса при больших уровнях высокочастотной мощности / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича. М.: ИЛ. 1961. С. 163–205.
99. Захаров В. Е., Львов В. С., Старобинец С. С. Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения // УФН. 1974. Т. 114. № 4. С. 609.
100. Kirilyuk A., Kimel A. V., Rasing T. Ultrafast optical manipulation of magnetic order. // Rev. Mod. Phys. 2010. V. 82. № 3. P. 2731.
101. Bigot J. V., Vomir M. Ultrafast magnetization dynamics of nanostructures // Ann. Phys. (StateplaceBerlin). 2013. V. 525. № 1–2. P. 2.
102. Jäger J. V., Scherbakov A. V., Linnik T. I., Yakovlev D. R., Wang M., Wadley P., Holy V., Cavill S. A., Akimov A. V., Rushforth A. W., Bayer M. Picosecond inverse magnetostriction in garfenol thin films // Appl. Phys. Lett. 2013. V. 103. № 3. P. 032409(5).
103. Walowski J., Münzenberg M. Perspective: Ultrafast magnetism and THz spintronics // J. Appl. Phys. 2016. V. 120. № 14. P.140901(16).
104. Janusonis J., Chang C. L., Jansma T., Gatilova A., Vlasov V. S., Lomonosov A. M., Temnov V. V., Tobey R. I. Ultrafast magnetoelastic probing of surface acoustic transients // Phys. Rev. B. 2016. V. 94. № 2. P. 024415(7).
105. Чернов А. И., Кожаев М. А., Ветошко П. М., Додонов Д. В., Прокопов А. Р., Шумилов А. Г., Шапошников А. Н., Бержанский В. Н., Звездин А. К., Белотелов В. И. Локальное зондирование магнитных пленок

- с помощью оптического возбуждения магнитостатических волн // ФТТ. 2016. Т. 58. № 6, С. 1093.
106. *Власов В. С., Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Ориентационные характеристики возбуждения магнитоупругих волн фемтосекундным импульсом света // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2017. № 6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun17/5/text.pdf>
107. *Власов В. С., Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Колебания намагниченности в магнитоупругой среде при ударном воздействии упругого смещения. Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2018. № 4. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr18/3/text.pdf>
108. *Власов В. С., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Излучение электромагнитной волны из магнитной пленки при воздействии фемтосекундного импульса света // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2020. № 6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun20/14/text.pdf>
109. *Джаффе Д., Качерис Дж., Караянис Н.* Ферритовый детектор СВЧ // В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича // М.: ИЛ. 1961. С. 23.
110. *Simon J. C., Broussaud G.* Detection with microwave ferrites // *Compt. Rend. Acad. Sci.* 1954. V. 238. № 24. P. 2294.
111. *Власов В. С., Плешев Д. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Нелинейное детектирование магнитоупругих колебаний в режиме амплитудной модуляции // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2019. № 3. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/mar19/7/text.pdf>
112. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Кратное преобразование частоты в схеме магнитострикционного преобразователя. Умножение частоты в режиме релаксации // РЭ. 2019. Т. 64. № 5. С. 487–489.
113. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Кратное преобразование частоты в схеме магнитострикционного преобразователя. Умножение частоты в непрерывном режиме // РЭ. 2019. Т. 64. № 6. С. 604–618.
114. *Плешев Д. А., Асадуллин Ф. Ф., Оганезова Н. А., Власов В. С., Котов Л. Н., Щеглов В. И.* Особенности динамики магнитной и упругой подсистем в тонкой ферритовой пленке при магнитострикционном преобразовании частот // Известия РАН. Серия Физическая. 2019. Т. 83. № 7. С. 987–989.
115. *Власов В. С., Плешев Д. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Детектирование частотно-модулированного СВЧ-сигнала с помощью магнитострикционного преобразователя // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2020. № 7. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jul20/3/text.pdf>
116. *Плешев Д. А., Котов Л. Н., Власов В. С., Щеглов В. И.* Преобразование частоты при акустическом резонансе в ферритах. Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2019.
117. *Щеглов В. И.* Стохастическая неустойчивость траекторий поверхностных магнитостатических волн в периодически неоднородном поле типа «вала» / XVII Международная школа-семинар «Новые магнитные материалы микроэлектроники». 2000. Москва. Сборник трудов. С. 331–333.
118. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Стохастическая неустойчивость траекторий поверхностных магнитостатических волн в ферритовой пленке,

- намагнитченной модулированным полем с профилем «вала» // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27. № 8. С. 90–94.
119. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Магнитостатические волны в неоднородных полях. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2016.
120. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Магнитостатические и электромагнитные волны в сложных структурах. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2017.
121. *Кирюхин Н. Н., Лисовский Ф. В.* Спиновые волны в среде с пространственно-временной периодичностью // ФТТ. 1968. Т. 10. № 3. С. 709.
122. *Медников А. М., Попков А. Ф., Анисимкин В. И., Нам Б. П., Петров А. А., Спиваков Д. Д., Хе А. С.* Неупругое рассеяние поверхностной спиновой волны в тонкой пленке ЖИГ на поверхностной акустической волне // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33. № 12. С. 646.
123. *Крышталь Р. Г., Медведь А. В.* Экспериментальное исследование рассеяния нелинейных поверхностных магнитостатических волн на поверхностной акустической волне // ФТТ. 1992. Т. 34. № 1. С. 333.
124. *Неймарк Ю. И., Ланда П. С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука. 1987.
125. *Анищенко В. С.* Сложные колебания в простых системах: механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. М.: Наука. 1990.
126. *Харкевич А. А.* Основы радиотехники. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2007.
127. *Будак Б. М., Фомин С. В.* Кратные интегралы и ряды. М.: Наука. 1965.
128. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Т. 3. Электричество. М.: Наука. 1977.
129. *Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Нестационарное запаздывание развития колебаний магнитострикционного преобразователя в условиях умножения частоты возбуждения // РЭ. 2023. Т. 68. № 5. С. 445–453.

Научное издание

ИВАНОВ Алексей Павлович

ШАВРОВ Владимир Григорьевич

ЩЕГЛОВ Владимир Игнатьевич

**ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В СИСТЕМЕ
ИЗ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ**

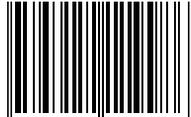
Редактор *Е.С. Артоболевская*
Оригинал-макет: *Д.П. Вакуленко*
Оформление переплета: *В.Ф. Киселев*

Подписано в печать 05.11.2024. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 30,5. Уч.-изд. л. 33,55. Тираж 300 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
117342, г. Москва, ул. Бултерова, д. 17Б
E-mail: porsova@fml.ru, sale@fml.ru
Сайт: <http://www.fml.ru>
Интернет-магазин: <http://www.fmlib.ru>

Отпечатано с электронных носителей издательства
в АО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1
Сайт: www.chpd.ru. E-mail: sales@chpd.ru, тел.: 8 (499) 270-73-59

ISBN 978-5-9221-1998-6



9 785922 119986

