



**Владимир Григорьевич Шавров,**  
доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий лабораторией  
магнитных явлений в микроэлектронике  
Института радиотехники и электроники  
имени В. А. Котельникова РАН

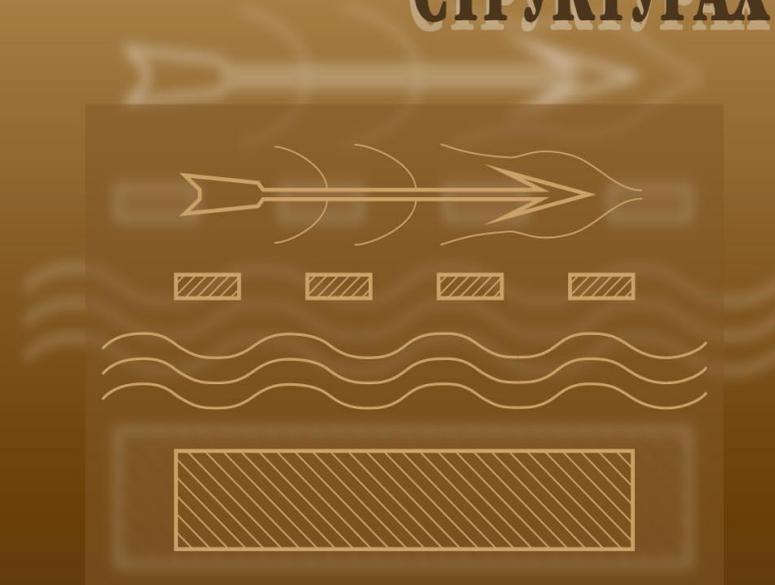


**Владимир Игнатьевич Щеглов,**  
кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник  
Института радиотехники и электроники  
имени В. А. Котельникова РАН

МАГНИТОСТАТИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В СЛОЖНЫХ СТРУКТУРАХ

В. Г. ШАВРОВ  
В. И. ЩЕГЛОВ

# МАГНИТОСТАТИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В СЛОЖНЫХ СТРУКТУРАХ



В. Г. ШАВРОВ  
В. И. ЩЕГЛОВ

**МАГНИТОСТАТИЧЕСКИЕ  
И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ  
ВОЛНЫ  
В СЛОЖНЫХ  
СТРУКТУРАХ**



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2016

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> . . . . .	9
<b>Список наиболее часто используемых сокращений</b> . . . . .	13
<b>Глава 1. Магнитостатические волны в пленках ферритов-гранатов с различными неоднородностями</b> . . . . .	14
1.1. Периодические неоднородности — решетки . . . . .	14
1.1.1. Решетки, образованные упругими волнами . . . . .	15
1.1.2. Решетки, образованные механическими неоднородностями . . . . .	15
1.1.3. Статические магнитные решетки . . . . .	16
1.1.4. Магнитные каналы . . . . .	16
1.1.5. Решетки других видов . . . . .	17
1.1.6. Решетки с малым периодом . . . . .	17
1.2. Обратные волны в магнитных структурах . . . . .	18
1.2.1. Два основных вида волнораспространяющих структур для обратных волн . . . . .	19
1.2.2. Структура феррит-диэлектрик-решетка, как волнораспространяющая среда . . . . .	19
1.3. Стохастические явления, сопровождающие распространение магнитостатических волн . . . . .	21
1.3.1. Стохастическая неустойчивость траекторий магнитостатических волн . . . . .	21
1.4. Излучение электромагнитных волн из феррита . . . . .	22
1.4.1. Диаграмма направленности излучения . . . . .	22
1.4.2. Теоретическая трактовка направленности излучения . . . . .	23
Выводы по главе 1 . . . . .	25
<b>Глава 2. Математический аппарат, используемый при расчете свойств магнитостатических волн</b> . . . . .	27
2.1. Тензор магнитной проницаемости . . . . .	27
2.2. Магнитостатические волны в однородных полях и структурах . . . . .	29
2.2.1. Дисперсия магнитостатических волн в ферритовой пленке со свободными поверхностями (задача Дэймона–Эшбаха) . . . . .	29
2.2.2. Основные свойства дисперсии ПМСВ . . . . .	36
2.3. Дисперсионные соотношения для некоторых простых структур . . . . .	44
2.3.1. Свободная ферритовая пленка (ФСП) . . . . .	44
2.3.2. Структура феррит-металл (ФМ) . . . . .	44
2.3.3. Структура феррит-диэлектрик-металл (ФДМ) . . . . .	44

2.4. Магнитоэлектростатические волны в неоднородных полях . . . . .	45
2.4.1. Методы расчета распространения МСВ в неоднородных полях . . . . .	45
2.5. Электромагнитная волна в среде с тензорными параметрами . . . . .	46
2.5.1. Волна в бигиротропной среде . . . . .	46
2.5.2. Гиромагнитная и гироэлектрическая волны . . . . .	48
2.5.3. Поля гиромагнитной волны . . . . .	49
2.5.4. Переход к полярной системе координат . . . . .	50
2.5.5. Импедансы и адмиттансы . . . . .	51
2.6. Падение гиромагнитной волны на границу раздела двух сред . . . . .	52
2.7. Частотные свойства гиромагнитной волны . . . . .	56
2.7.1. Характерные частоты . . . . .	56
2.7.2. Параметр расходимости . . . . .	56
2.7.3. Три интервала параметра затухания . . . . .	57
2.8. О корректности анализа волновых процессов в приближении магнитоэлектростатики . . . . .	63
Выводы по главе 2 . . . . .	68
<b>Глава 3. Распространение МСВ в решетках, период которых значительно меньше длины волны . . . . .</b>	<b>70</b>
3.1. Основные уравнения и граничные условия . . . . .	70
3.1.1. Общая геометрия задачи . . . . .	70
3.1.2. Качественные предпосылки эффекта просачивания . . . . .	71
3.1.3. Параметр экранирования . . . . .	72
3.1.4. Потенциал в условиях просачивания . . . . .	72
3.1.5. Граничные условия и потенциал при наличии просачивания . . . . .	73
3.2. Дисперсионное соотношение . . . . .	75
3.2.1. Соотношение в декартовой системе координат . . . . .	75
3.2.2. Переход к полярной системе координат . . . . .	77
3.3. Параметр экранирования решетки в виде разложения по волновому числу . . . . .	78
3.3.1. Сравнение со структурой феррит-металл . . . . .	78
3.3.2. Переход от непрерывного металла к дискретной решетке . . . . .	79
3.3.3. Параметр экранирования при различных коэффициентах разложения . . . . .	80
3.3.4. Выражение параметра экранирования через ширину щелей решетки . . . . .	83
3.4. Влияние параметра экранирования на дисперсию поверхностных магнитоэлектростатических волн . . . . .	84
3.4.1. Влияние нулевого члена разложения . . . . .	84
3.4.2. Влияние первого члена разложения . . . . .	86
3.4.3. Влияние второго члена разложения . . . . .	87

3.5. Дисперсионные кривые при различной толщине слоя диэлектрика . . . . .	88
3.6. Дисперсионные кривые при различной толщине ферритовой пластины . . . . .	89
3.7. Дисперсия при высоких порядках разложения параметра экранирования . . . . .	91
3.8. Сравнение с данными эксперимента . . . . .	92
3.9. Распространение ПМСВ в структуре ФДР, намагниченной неоднородным полем . . . . .	95
3.9.1. Метод исследования распространения волн в структуре феррит-диэлектрик-решетка, намагниченной неоднородным полем . . . . .	95
3.9.2. Линейное продольно неоднородное поле . . . . .	97
3.9.3. Квадратичное поле типа «долины» . . . . .	103
3.9.4. Квадратичное поле типа «вала» . . . . .	110
Выводы по главе 3 . . . . .	115
<b>Глава 4. Распространение МСВ в решетках, период которых того же порядка, что и длина волны . . . . .</b>	<b>118</b>
4.1. Традиционный математический аппарат, используемый для анализа распространения волн в периодических структурах . . . . .	118
4.1.1. Теорема Флоке . . . . .	119
4.1.2. Метод Кронига–Пенни . . . . .	123
4.1.3. Метод Хилла . . . . .	131
4.2. Методы решения задач с произвольными неоднородностями . . . . .	142
4.2.1. Метод пошагового алгоритма . . . . .	144
4.3. Результаты расчета амплитуд волн с применением пошагового алгоритма . . . . .	148
4.3.1. Амплитуды волн в крайних слоях структуры . . . . .	148
4.3.2. Пространственная модуляция амплитуды . . . . .	150
4.4. Отражающие и пропускающие свойства структуры . . . . .	158
4.4.1. Отражающие свойства структуры . . . . .	158
4.4.2. Пропускающие свойства структуры . . . . .	160
4.4.3. Некоторые качественные особенности . . . . .	162
4.5. Сравнение различных методов . . . . .	162
4.6. Особенности распространения электромагнитных волн . . . . .	164
4.6.1. Слабая и сильная неоднородность . . . . .	164
4.6.2. Распределение амплитуд в магнитной структуре . . . . .	168
Выводы по главе 4 . . . . .	180

Глава 5. <b>Распространение ПМСВ в решетках, период которых значительно больше длины волны</b> . . . . .	183
5.1. Устойчивое распространение ПМСВ в поле, периодическом по одной координате. . . . .	183
5.1.1. Геометрия задачи . . . . .	183
5.1.2. Магнитное поле, создаваемое периодической магнитной системой . . . . .	184
5.1.3. Траектории ПМСВ в периодическом поле . . . . .	187
5.1.4. Интерпретация хода траекторий . . . . .	191
5.2. Стохастическая неустойчивость ПМСВ в поле типа «вала» с периодической модуляцией . . . . .	192
5.2.1. Геометрия задачи и основные уравнения . . . . .	193
5.2.2. Модуляция поля типа «вала» . . . . .	194
5.2.3. Общая картина неустойчивости траекторий ПМСВ . . . . .	195
5.2.4. Траектории при высвечивании . . . . .	199
5.2.5. Характер траекторий при различных видах модуляции . . . . .	206
5.2.6. Изменение частоты возбуждения ПМСВ . . . . .	211
5.2.7. Некоторые дополнительные особенности неустойчивости траекторий . . . . .	213
5.3. Многоканальная стохастическая неустойчивость траекторий ПМСВ в дважды периодическом поле . . . . .	216
5.3.1. Геометрическая структура дважды периодического поля . . . . .	216
5.3.2. Распространение ПМСВ в многоканальной структуре . . . . .	221
5.4. Рекомендации для наблюдения стохастической неустойчивости в эксперименте . . . . .	223
Выводы по главе 5 . . . . .	225
Глава 6. <b>Распространение ПМСВ в условиях медленно меняющегося поперечно неоднородного поля.</b> . . . . .	228
6.1. Различие между продольной и поперечной неоднородностями поля . . . . .	228
6.2. Распространение ПМСВ в поперечно неоднородном поле . . . . .	229
6.2.1. Линейно меняющееся поперечно неоднородное поле . . . . .	229
6.3. Экспериментальное исследование распространения ПМСВ в поперечно неоднородном поле . . . . .	234
6.4. Распространение ПМСВ в полях других конфигураций и в сложных структурах . . . . .	236
6.4.1. Поля типа «долины» и «вала» . . . . .	236
6.4.2. Поле произвольной конфигурации . . . . .	237
6.4.3. Структуры феррит-металл и феррит-диэлектрик-металл . . . . .	238
Выводы по главе 6 . . . . .	239

Глава 7. <b>Излучение электромагнитных волн при распространении ПМСВ в поперечно неоднородном поле</b> . . . . .	242
7.1. Общая геометрия задачи. . . . .	242
7.2. Общие положения задачи об излучении. . . . .	244
7.3. Введение магнитных зарядов . . . . .	244
7.3.1. Поля и потенциалы, создаваемые магнитными зарядами . . . . .	249
7.3.2. Сравнение уравнений для потенциалов и полей, образованных электрическими и магнитными зарядами . . . . .	251
7.4. Запаздывающие потенциалы . . . . .	252
7.5. Поля, определяемые магнитными зарядами . . . . .	254
7.6. Поля излучаемых волн . . . . .	255
7.6.1. Поле излучения от точечного заряда . . . . .	257
7.6.2. Диаграмма направленности излучения от одного заряда . . . . .	258
7.7. Поле излучения от распределенного заряда . . . . .	258
7.7.1. Приближения, следующие из эксперимента . . . . .	259
7.7.2. Усреднение намагниченности . . . . .	261
7.7.3. Переменная намагниченность . . . . .	263
7.8. Приближения по данным эксперимента . . . . .	266
7.8.1. Функция высвечивания . . . . .	266
7.8.2. Функция координатной зависимости намагниченности . . . . .	268
7.8.3. Приближенный вид динамической намагниченности . . . . .	269
7.8.4. Составляющие интеграла поля излучаемой волны . . . . .	269
7.9. Формирование диаграммы направленности излучения . . . . .	271
7.9.1. Частотные свойства диаграммы направленности . . . . .	273
7.10. Диаграмма направленности при произвольной точке наблюдения . . . . .	274
7.11. Диаграмма направленности при неколлинеарном характере ПМСВ . . . . .	276
7.11.1. Общая геометрия задачи . . . . .	277
7.11.2. Расчет диаграммы направленности . . . . .	279
7.11.3. Конфигурация области излучения . . . . .	280
7.11.4. Ориентационный множитель . . . . .	282
7.11.5. Диаграммы с учетом ориентационного множителя . . . . .	283
7.11.6. Полная диаграмма направленности . . . . .	287
Выводы по главе 7 . . . . .	287
Глава 8. <b>Пространственные характеристики излучения электромагнитных волн, сопровождающего распространение ПМСВ в сложных структурах</b> . . . . .	290
8.1. Общая схема формирования диаграммы направленности . . . . .	290
8.1.1. Геометрия задачи . . . . .	290

8.1.2. Характер распространения ПМСВ . . . . .	292
8.1.3. Суперпозиция полей отдельных источников . . . . .	294
8.1.4. Возбуждение источников ЭМВ затухающей ПМСВ вол- ной . . . . .	300
8.2. Диаграмма направленности для двух источников . . . . .	303
8.2.1. Изменение расстояния между источниками . . . . .	303
8.2.2. Изменение волнового числа ПМСВ . . . . .	305
8.3. Диаграмма направленности при большом числе источников . . . . .	306
8.3.1. Суммирование по одному индексу . . . . .	306
8.3.2. Изменение количества источников . . . . .	308
8.3.3. Изменение расстояния между источниками . . . . .	309
8.3.4. Изменение параметра затухания . . . . .	312
8.4. Нерегулярное распределение источников . . . . .	313
8.4.1. Формирование областей излучения . . . . .	313
8.4.2. Формирование диаграммы направленности . . . . .	316
8.5. Многослойное распределение источников . . . . .	320
8.5.1. Геометрия структуры и областей излучения . . . . .	320
8.5.2. Формирование диаграммы направленности . . . . .	322
8.5.3. Диаграмма направленности от двух источников . . . . .	324
8.5.4. Расщепление диаграммы за счет множественности источ- ников . . . . .	330
8.6. Некоторые заключительные замечания, касающиеся излучения	332
Выводы по главе 8 . . . . .	334
<b>Литература</b> . . . . .	338

## Введение

Магнитостатические волны (МСВ) и явления ферромагнитного резонанса (ФМР) в магнитоэлектрических средах являются основой для создания ряда высокоэффективных устройств аналоговой обработки информации в диапазоне СВЧ. К числу таких устройств относятся фильтры, линии задержки, фазовращатели, невзаимные и нелинейные устройства и другие. В качестве магнитоэлектрической среды используются пленки и пластины ферритов, в первую очередь — железоиттриевого граната (ЖИГ), имеющего рекордно малые магнитные потери.

Распространение МСВ в подобных средах сопровождается многочисленными и весьма разнообразными физическими эффектами, в качестве главных из которых следует отметить сложный характер дисперсии, неколлинеарность векторов фазовой и групповой скоростей, а также невзаимность распространения.

Свойства ФМР существенно усложняются структурированием и неоднородным характером распределения намагниченности среды, появлением новых ветвей спектра и аномальными зависимостями от магнитного поля.

Такие обстоятельства стимулируют обращение к подробному и всестороннему исследованию физических свойств как МСВ, так и ФМР в самых разнообразных условиях. Описанию некоторых аспектов такого исследования и посвящена настоящая монография.

Основной приведенный здесь материал относится именно к магнитостатическим волнам, однако в некоторых случаях, где аппарат магнитостатики оказывается недостаточным, приходится прибегать к рассмотрению полных электромагнитных волн, что и находит свое отражение в общем названии работы.

Приведенные в монографии сведения, ни в коей мере не претендуя на исчерпывающую полноту, не более чем отражают круг научных интересов авторов. Основной объем монографии представляет собой краткое изложение и обобщение главных научных и прикладных результатов, полученных авторами в период с 1990 по 2015 годы.

Монография является второй из цикла, посвященного магнитостатическим волнам, ферромагнитному резонансу и сопутствующим им явлениям. Первая монография [1] носит название «Магнитостатические волны в неоднородных полях» и охватывает круг вопросов, касающихся распространению МСВ в ферритовых пленках со свободными поверхностями (ФСП), а также в некоторых структурах, однородных

в плоскости пленки, в первую очередь — феррит-диэлектрик-металл (ФДМ) и феррит-металл (ФМ), намагниченных неоднородным полем.

Данная монография, в отличие от предыдущей, не содержит подробного обзора литературы за минувшие полвека, так как приведенный в первой главе монографии [1] обзор, по-видимому, в достаточной степени охватывает освещенные и здесь вопросы. Однако по основным затронутым моментам приведен краткий обзор материалов, необходимых для более полного отражения места, занимаемого настоящей работой. Такому краткому обзору посвящена ПЕРВАЯ ГЛАВА монографии.

Предшествующий общему изложению обзор математического аппарата (ВТОРАЯ ГЛАВА) также не повторяет главу вторую монографии [1], а лишь содержит основные полученные там результаты, необходимые для понимания настоящей работы, а также некоторые наиболее общие детали аппарата, используемого в последующем изложении. Вследствие высокой специфичности остального аппарата, необходимые аналитические выкладки с достаточной подробностью приведены в материалах соответствующих глав.

Основным предметом рассмотрения настоящей монографии является распространение магнитостатических и частично электромагнитных волн в более сложных, чем в [1], структурах, в первую очередь содержащих неоднородности в виде периодических решеток. Физические явления, сопровождающие такое распространение, имеют принципиальные особенности в зависимости от соотношения между длиной волны и периодом решетки. В соответствии с этим в последующем изложении выделены четыре основных логически различающихся друг от друга части.

Первая часть (ТРЕТЬЯ ГЛАВА) посвящена рассмотрению волн, длина которых значительно превышает период решетки. При этом прямолинейное направление распространения ограниченного по ширине волнового пучка не меняется, однако дисперсионные свойства волны претерпевают изменения, особенно заметные в области достаточно длинных волн.

Вторая часть (ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА) посвящена рассмотрению волн, длина которых имеет тот же порядок, что и период решетки. Изложение также будет ограничено случаем, когда направление распространения конечного по ширине волнового пучка не меняется. В отличие от предыдущего случая, здесь по частоте или по волновому числу наблюдаются интервалы, в пределах которых волна распространяется практически беспрепятственно (полосы пропускания), перемежающиеся интервалами, где распространение волны недопустимо (полосы непропускания).

Следует отметить, что при таком соотношении длин волн возможна ситуация, когда пучок, оставаясь прямолинейным, испытывает на решетке преломление и расщепление, соответствующее дифракционным эффектам, наблюдаемым в оптике. Однако более или менее подробное

рассмотрение таких особенностей привело бы к значительному увеличению объема монографии, поэтому здесь исключается.

В третьей части настоящей работы (ПЯТАЯ ГЛАВА) рассматриваются волны, длина которых значительно меньше периода решетки. В этом случае волна каждый штрих решетки воспринимает как отдельную неоднородность или известное препятствие, так что волновой пучок на длине периода искривляет свою траекторию в соответствии со структурой локальных полей в окрестности каждого штриха. При этом траектория распространения волнового пучка приобретает периодический или иной характер, определяемый конкретной конфигурацией штрихов решетки.

Четвертая часть включает в себя три главы (с шестой по восьмую) и посвящена ситуации, когда протяженность неоднородности структуры в пространстве настолько велика, что в сравнении с длиной волны ее уже нельзя рассматривать как периодическую. То есть волна распространяется в условиях монотонно меняющейся по координате неоднородности, в результате чего длина волны также плавно изменяется в одну сторону. При этом, если длина магнитостатической волны становится сравнимой с длиной электромагнитной в свободном пространстве, происходит эффективное преобразование магнитостатической волны в электромагнитную, то есть излучение электромагнитных волн из феррита. ШЕСТАЯ ГЛАВА посвящена распространению магнитостатических волн в поперечно неоднородном поле. Главное внимание уделено траекториям волновых пучков и условиям, при которых длина магнитостатической волны приближается к длине электромагнитной. В СЕДЬМОЙ ГЛАВЕ подробно рассмотрен механизм излучения на основе модели ускоренного движения магнитных зарядов. ВОСЬМАЯ ГЛАВА посвящена формированию диаграммы направленности излучения при распространении магнитостатических волн в сложных структурах.

Заметим, что приведенными вариантами распространения магнитостатических волн в сложных структурах все случаи далеко не исчерпываются. Так например, из рассмотрения выпадает распространение волн в ненасыщенных пленках в присутствии доменов, ситуации ориентационных переходов, композиционных структур и многое другое. Некоторые из подобных вопросов предполагается рассмотреть в следующих монографиях данной серии.

Монография, в основном, носит теоретический характер. Экспериментальные результаты приведены в той мере, в которой они являются основой для описываемых физических явлений.

Как и в первой монографии [1], в описанных здесь работах принимали участие многочисленные соавторы. Так в идеологической основе и интерпретации значительной части работ лежат идеи А. В. Вашковского, в теоретических работах важная роль принадлежит В. И. Зубкову, большинство экспериментальных работ выполнено совместно с Э. Г. Локком. Работы, посвященные исследованию свойств

одномерных и электромагнитных волн алгоритмическим методом, в том числе в магнитных средах, выполнены совместно с И. В. Антонцом. В конструировании и выполнении рабочих макетов ряда устройств принимал участие А. Ю. Анненков.

Более подробно участие соавторов работ, положенных в основу монографии, отражено в списке литературы.

Выполнению работы в значительной степени способствовало стимулирующее внимание и неоднократные полезные замечания С. В. Яковлева.

В многочисленных обсуждениях работ принимали участие: С. В. Герус, Ю. И. Беспятых, И. Е. Дикштейн, В. В. Тарасенко, В. Д. Харитонов, Ф. В. Лисовский, Е. Г. Мансветова, Г. В. Арзамасцева, А. В. Вороненко, Д. Г. Шахназарян, В. В. Кильдишев, Л. А. Красножен.

Многочисленные дискуссии с плодотворным обсуждением проходили с участием П. Е. Зильбермана.

В неоднократных полезных обсуждениях, касающихся физики фазовых переходов, участвовали А. Ф. Кабыченков и В. В. Коледов.

Важнейшая роль в создании благоприятных условий для работы, постоянное к ней внимание и неоднократное оказание административной, хозяйственной и научной помощи принадлежит академику РАН Ю. В. Гуляеву.

Непосредственное выполнение работы, в том числе написание настоящей монографии, оказалось возможным благодаря помощи члена корреспондента РАН С. А. Никитова.

Практически все работы были выполнены с деятельным участием многочисленного технического персонала, без помощи которого выполнение приведенного труда было бы совершенно невозможным.

Всем перечисленным участникам и соавторам работ авторы выражают огромную признательность, отдают низкий поклон и приносят глубочайшую благодарность. Величайшее спасибо Вам, дорогие соратники, друзья и помощники!

## Список наиболее часто используемых сокращений

ФМР — ферромагнитный резонанс.

МСВ — магнитостатическая волна.

ПМСВ — поверхностная магнитостатическая волна.

ОМСВ — объемная магнитостатическая волна.

ЭМВ — электромагнитная волна.

АЧХ — амплитудно-частотная характеристика.

ФЧХ — фазо-частотная характеристика.

СВЧ — сверхвысокая частота.

ФП — ферритовая пленка.

ФСП — ферритовая пленка со свободными поверхностями.

ФМ — феррит-металл (структура).

ФДМ — феррит-диэлектрик-металл (структура).

ФФ — феррит-феррит (структура).

ФДР — феррит-диэлектрик-решетка (структура).

ЖИГ — железоиттриевый гранат.

## Глава 1

**МАГНИТОСТАТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ПЛЕНКАХ  
ФЕРРИТОВ-ГРАНАТОВ С РАЗЛИЧНЫМИ  
НЕОДНОРОДНОСТЯМИ**

Настоящая глава служит вводным разделом в основной текст монографии и включает в себя краткий обзор литературы, посвященной распространению магнитостатических и частично электромагнитных волн в ферритовых структурах, содержащих неоднородности различных видов. Главное внимание уделяется неоднородностям, реализуемым в виде периодических решеток, как наиболее исследованным в настоящее время.

Рассмотрены различные случаи соотношения периодов решетки и длины волны: когда они соизмеримы, а также когда тот или иной период значительно больше другого.

Однако структура обзора подчинена в первую очередь не соотношениям периодов, а вариантам физической реализации решетчатых структур, в том числе с учетом исторической очередности их появления.

Отдельно рассмотрен случай, когда период решетки настолько велик, что магнитостатическая волна успевает на его длине полностью релаксировать, так что можно считать, что она распространяется в условиях линейного нарастания или убывания параметров среды. В такой ситуации в определенных условиях наблюдается преобразование магнитостатической волны в электромагнитную, то есть излучение электромагнитных волн из феррита.

Обзор, в основном, кроме нескольких особо важных случаев, не включает в себя работы авторов данной монографии, так как этим работам посвящена ее основная часть, составляющая последующие главы.

Обзор не преследует цель критического разбора сегодняшнего состояния науки о распространении магнитных волн в сложных структурах, а призван ввести читателя в общий курс положения дел в данном вопросе.

**1.1. Периодические неоднородности — решетки**

Первая часть обзора посвящена распространению магнитостатических волн в периодических структурах, реализованных различными способами: упругой волной, механическими канавками, металлическими решетками, разнообразными конфигурациями магнитных полей.

Рассмотрим такие структуры последовательно по ходу их исторического появления.

**1.1.1. Решетки, образованные упругими волнами**

Исторически первыми, по-видимому, следует считать работы, касающиеся взаимодействия МСВ с периодичностью среды, создаваемой упругой волной [2, 3], длина которой соизмерима с длиной распространяющейся МСВ.

В работе [2] теоретически рассмотрены обменные волны, взаимодействующие с упругой волной в безграничном пространстве. Целью работы была интерпретация экспериментов по наблюдению возбуждения упругих колебаний при нелинейном ферромагнитном резонансе [4]. Было показано наличие определенных частотных полос непропускания в условиях совпадения волновых чисел МСВ и упругой волны. В работе [3] впервые в эксперименте было обнаружено достаточно эффективное линейное взаимодействие дипольных объемных МСВ с объемными упругими волнами сравнительно низкочастотного диапазона (частота МСВ — 1200 МГц, частота упругой волны — 10 МГц), сопроваждавшееся комбинационными эффектами. Рассеяние спиновых волн на упругих было трактовано как «спиновый эффект Манделъштама–Бриллюэна», подобный аналогичному эффекту в оптике [5–7]. В работе [8] тот же эффект наблюдался экспериментально на поверхностных магнитостатических и упругих волнах. Подробная теоретическая интерпретация последнего эффекта была дана в работе [9].

В работах [10–15] рассеяние магнитостатических волн на упругих подробно исследовалось в условиях неколлинеарной геометрии, то есть когда направления распространения магнитостатических и упругих волн различались на произвольные углы. Были выявлены различные ориентационные и комбинационные эффекты, а также специфика проявления рассеяния как в свободной ферритовой пленке, так и в структуре феррит-металл, в том числе в условиях невзаимности.

**1.1.2. Решетки, образованные механическими неоднородностями**

Значительное число работ посвящено распространению ПМСВ в периодических структурах, образуемых механическими неоднородностями ферритовой пленки. В ранней работе [16] рассмотрены полосы непропускания при прохождении МСВ по поверхности пленки, покрытой поперечными канавками. Дальнейшее развитие такие исследования получили в работах [17–19], а также [20–23]. В последних работах решетка, в основном, рассматривалась как зеркало в качестве отражающего элемента открытого резонатора. Работы, в основном, экспериментальные.

В работе [24] выполнено теоретическое исследование полос пропускания-непропускания структуры феррит-решетка из металлических полосок на основе модели Кронига–Пенни. Рассмотрены обратные

объемные дипольные и обменные МСВ. В расчете используется метод функций Грина [17, 25, 26].

Работа [27] посвящена волнам дипольно-обменного характера в многослойных структурах с учетом поверхностной анизотропии, в рассмотрении которых также эффективно использован аппарат тензорных функций Грина [17, 25, 26].

В работе [28] рассмотрено туннелирование МСВ через создаваемую магнитным полем локальную неоднородность. В работе [29] рассмотрены магнитоэлектрические спиновые волны в двумерных периодических структурах — магнитофотонных кристаллах.

В работе [30] продемонстрирована возможность применения решетчатых структур для создания фильтров СВЧ сигнала.

### 1.1.3. Статические магнитные решетки

Заметную роль в общей картине распространения магнитоэлектрических волн в периодических структурах играют статические магнитные решетки. Подробное экспериментальное исследование распространения ПМСВ в таких структурах выполнено в работах [31–34]. В этих работах магнитная решетка выполнялась в виде накладываемой на пленку ЖИГ высококоэрцитивной магнитофонной ленты с записью периодического сигнала. Были обнаружены полосы непропускания, соответствующие совпадению периода решетки с длиной распространяющейся ПМСВ, а также рассмотрено отражение и преломление ПМСВ при произвольной ориентации решетки в плоскости магнитной пленки.

Теоретический анализ подобных задач проводился численными методами на основе метода изочастотных кривых. Для интерпретации полученных результатов использовалась модель магнетонного кристалла [34–36]. Одним из результатов проведенных исследований явился предложенный в работе [37] метод измерения параметров магнитных пленок, таких как намагниченность насыщения и константы одноосной и кубической анизотропии.

### 1.1.4. Магнитные каналы

Кроме распространения МСВ перпендикулярно штрихам решетки, важное значение получили работы, касающиеся формированию каналов, образованных той же высококоэрцитивной магнитной лентой с записью. Так в работе [38] рассмотрены моды ПМСВ в одном канале, в работе [39] — в двух параллельных связанных каналах. Отмечена периодическая перекачка энергии волны из одного канала в другой и обратно. В работе [40] методом конечных разностей выполнено численное моделирование распространения ПМСВ в двухканальной структуре. В работах [41, 42] рассмотрена трансформация ПМСВ в ступенчатом поле подмагничивания. В работе [43] рассмотрено взаимодействие объемных и поверхностных МСВ в едином канале. В работе [44] выполнено экспериментальное исследование распространения

МСВ путем сканирования поверхности ферритовой пленки магнитным зондом. В работах [35, 45, 46] приведены результаты формирования пучков ПМСВ в магнетонном кристалле с невзаимностью. Наиболее подробно перечисленные исследования суммированы в работе [36].

Наряду с перечисленными исследовались решетки различной другой природы. Так в работе [47] рассмотрено распространение ПМСВ в структуре, образованной периодической решеткой тонкопленочных ферритовых резонаторов. Выявлены полосы пропускания и непропускания, связанные с периодичностью геометрии структуры. Работы [48, 49] посвящены решеткам, выполненным в виде металлического меандра. В работах [49, 50] показана возможность возбуждения МСВ при падении на решетку электромагнитной волны.

### 1.1.5. Решетки других видов

В работах [51, 52] исследованы особенности распространения ПМСВ в структурах, содержащих решетчатые неоднородности в виде механических канавок, выполненных на пленках линейно изменяющейся толщины. То есть рассмотрена совокупность двух задач: распространения ПМСВ в решетке и в неоднородной структуре. Решение выполнено с использованием метода ВКБ, выявлен линейно зависящий от координаты характер полос пропускания и непропускания, даны рекомендации для наблюдения описываемых явлений в эксперименте и для конструирования фильтров СВЧ.

В работе [53] описано применение МСВ для создания фазированной антенной решетки, представляющей собой совокупность излучателей с подключенными к ним фазовращателями. В работе [54] рассмотрено брэгговское отражение ПМСВ от металлической решетки, а в работе [55] описано использование подобных решеток в СВЧ резонаторах.

Важное место занимают работы, посвященные взаимодействию МСВ с решетками из абрикосовских вихрей в двухслойных структурах феррит-высокотемпературный сверхпроводник [56–66]. Дополняющими разнообразие являются исследования МСВ, ферромагнитного резонанса (ФМР) и обменных волн в сложных структурах, образованных многослойными «сверхрешетками» [67, 68].

### 1.1.6. Решетки с малым периодом

Характерной особенностью подавляющего большинства перечисленных выше работ является соизмеримость периода решетки с длиной распространяющейся МСВ. То есть на периоде решетки укладывается целое или близкое к целому число длин волн, причем это число, как правило, не превышает нескольких единиц. Именно такое соотношение периода решетки и длины волны обеспечивает наличие хорошо разрешимых полос пропускания и непропускания, свойственных периодическим структурам любой природы [69].

Другое важное место в распространении МСВ в периодических структурах занимают решетки, период которых значительно меньше

длины распространяющейся ПМСВ, то есть соизмеримость между длиной волны и периодом решетки отсутствует. В этом случае вместо полос непропускания в эксперименте наблюдается изменение плавных дисперсионных кривых ПМСВ без появления каких-либо разрывов. Так в работах [70, 71], где период решетки, выполненной методом фотолитографии, составлял десятки микрон, а длина ПМСВ — до нескольких миллиметров, было показано, что дисперсионная кривая для структуры феррит-решетка лежит выше кривой для свободной пленки и имеет обратный характер, то есть спадает по мере увеличения волнового числа, причем спад является более крутым, чем для структуры феррит-диэлектрик-металл. Другой особенностью дисперсионных кривых в такой структуре явилось некоторое (до 50%) смещение начального участка дисперсионной кривой, соответствующего прямым волнам, в сторону больших значений волнового числа [72–75].

Идеологическая трактовка наблюдаемых в этих работах явлений была основана на рассмотрении металлической решетки как однородной среды с усредненными по объему параметрами, обладающей отрицательной диэлектрической проницаемостью [76].

В работах [77, 78] впервые построена теория, объясняющая высокую крутизну спада дисперсионной кривой обратных ПМСВ в структуре феррит-диэлектрик-решетка из металлических полосок на основе модели частичного просачивания энергии волны через решетку. В работах [79–90] эта модель применена для анализа распространения ПМСВ в структурах феррит-диэлектрик-решетка, намагниченных неоднородными полями: линейным, типа «долины» и «вала». Именно эти работы более подробно рассматриваются в главе третьей настоящей монографии.

## 1.2. Обратные волны в магнитных структурах

После общего обзора по распространению МСВ в различных решетках, обратимся несколько подробнее к композиционным и наборным средам, часто называемым «фотонными кристаллами». Интерес исследователей к этим средам связан с возможностью конструктивным путем задавать заранее желаемые электродинамические параметры, а также менять их в широких пределах. В числе перспектив, открываемых композиционными средами, важное место занимает возможность распространения в них обратных волн, то есть таких, фазовая и групповая скорости которых противоположны. Многие свойства обратных волн, такие как направленность распространения, законы отражения, преломления и другие, резко отличаются от подобных свойств прямых волн, что открывает широкие возможности новых технических приложений, например для антенн, линз, отражателей, а также приборов аналоговой обработки информации: фильтров, линий задержки и других.

### 1.2.1. Два основных вида волноведущих структур для обратных волн

В настоящее время в качестве носителей обратных электромагнитных волн (ЭМВ) наиболее интенсивно исследуются такие среды, где диэлектрическая и магнитная проницаемости в определенном диапазоне частот одновременно принимают отрицательные значения [91–96]. Удовлетворяющая этому условию среда конструктивно выполняется в виде периодической решетки из токовых элементов — линейных и кольцевых проводников [97–99].

Другой вид обратных волн возможен в слоистых структурах типа феррит-диэлектрик-металл (ФДМ), где, благодаря большой магнитной проницаемости феррита, при условии диэлектрической проницаемости компонент среды порядка единицы, подавляющая часть энергии волны распространяется в виде магнитостатических волн (МСВ), являющихся поверхностными (ПМСВ) [100–104]. Здесь среда состоит из наложенных друг на друга ферритовой и металлической пленок, разделенных слоем диэлектрика (в простейшем случае — воздушным зазором).

Длина обратных ЭМВ (первый случай) того же порядка, что и длина прямых ЭМВ тех же частот, поэтому такие волны удобны для тех применений, где размер устройства близок или больше длины волны (антенны, линзы, отражатели). Длина обратных ПМСВ (второй случай) на два–четыре порядка меньше длин соответствующих ЭМВ, поэтому такие волны удобны для устройств обработки информации (фильтры, линии задержки и другие), что позволяет резко уменьшить их размеры по сравнению с аналогичными устройствами на ЭМВ. С другой стороны, возможности конструирования сред первого типа весьма широки: это как выбор различной формы токовых элементов, так и различное их размещение, в частном случае в виде периодической решетки по двум или трем координатам. В случае структуры ФДМ параметры среды можно варьировать только по одной координате, перпендикулярной плоскости структуры — менять толщину слоев феррита или диэлектрика (воздушного зазора) между ферритом и металлом. Последнее обстоятельство заметно сужает возможности задания желаемых параметров среды, то есть ограничивает возможности ее применения.

### 1.2.2. Структура феррит-диэлектрик-решетка, как волноведущая среда

Отмеченного в предыдущем разделе недостатка можно избежать, если выполнить слой металла не в виде сплошного листа, а в виде плоской периодической решетки. Такая попытка предпринята в экспериментальных работах [70–75], где на феррит была наложена металлическая периодическая решетка, выполненная методом фотолитографии. Попытку следует признать весьма успешной: использование решетки позволило увеличить крутизну спада дисперсионной кривой для обратных ПМСВ более чем на порядок. Другой особенностью явилось небольшое

смещение дисперсионной кривой при малых значениях волнового числа в сторону его больших значений. Идеологическая трактовка наблюдаемых в работах [70–75] явлений основана на рассмотрении металлической решетки, как однородной среды с отрицательной диэлектрической проницаемостью. Такая замена решетки средой с усредненными по объему диэлектрическими параметрами, несколько отличается от традиционной [97–99], так как здесь толщина решетки в направлении, перпендикулярном плоскости пленки, заведомо намного меньше длины волны, и возможность усреднения по трехмерному объему неочевидна.

С другой стороны, экспериментальный факт увеличения крутизны дисперсионной кривой для обратных волн при замене сплошного слоя металла периодической решеткой, в сочетании с наблюдаемым смещением дисперсионной кривой, по-видимому, можно достаточно полно объяснить без привлечения диэлектрических свойств граничащей с ферритом среды, то есть в магнитоэлектрическом приближении, на основе учета просачивания волны через промежутки между штрихами решетки.

Действительно, причиной зависимости дисперсионных свойств ПМСВ от параметров среды, граничащей с ферритом, является взаимодействие поля ПМСВ, выходящего из феррита, с этой средой. Это взаимодействие будет тем сильнее, чем медленнее спад поля волны по мере удаления от поверхности феррита. Магнитное поле длинных волн (с малыми волновыми числами) спадает медленно, а поле коротких волн (с большими волновыми числами) — быстро. Поэтому в случае сплошного металла при фиксированном зазоре металл сильнее сказывается для длинных волн (поднимает дисперсионную кривую) и слабее для коротких (возвращает ее на место). В результате дисперсионная кривая по мере увеличения волнового числа испытывает спад, соответствующий обратным волнам.

Решетку, расположенную вблизи поверхности феррита, можно рассматривать, как экран для поля распространяющейся ПМСВ. Для более длинных волн экранирующие свойства решетки приближаются к сплошному металлу. Для более коротких волн ее экранирующие свойства ухудшаются, так как в окнах решетки металла вообще нет и достаточно короткие волны проходят через них беспрепятственно. Таким образом, эффективность просачивания волны через решетку определяется длиной волны и увеличивается по мере роста волнового числа. Это означает, что для больших волновых чисел наличие решетки сказывается слабее, в результате чего дисперсионная кривая по мере увеличения волнового числа спадает сильнее, чем для сплошного металла.

С другой стороны, подъем дисперсионной кривой за счет металла должен проявляться тем слабее, чем металл дальше, так что при несплошном металле его влияние ослабевает и крутизна дисперсионной кривой на начальном участке уменьшается, что и проявляется как сдвиг этого участка в сторону больших значений волнового числа.

Таким может быть качественное объяснение увеличения крутизны спада дисперсионной кривой и сдвиг ее начального участка при замене сплошного металла решеткой, как это наблюдалось в работах [70–75].

С количественной стороны этот механизм подробно будет рассмотрен на основании работ [76–90] в третьей главе настоящей монографии (в первую очередь — в разделе 3.8).

### 1.3. Стохастические явления, сопровождающие распространение магнитоэлектрических волн

В физике непрерывно растет интерес к процессам, проявляющим стохастические свойства [105, 106]. Значительное внимание привлекают хаотические колебания полностью детерминированной системы, возникающие при также детерминированном периодическом воздействии, в первую очередь — стохастический резонанс [106]. Наряду с общими вопросами, значительное внимание уделяется неустойчивостям стохастического характера в магнитных средах, в первую очередь в ферритах. Подробно исследованы условия нелинейного ферромагнитного резонанса, где при превышении порогового уровня возбуждения наблюдается параметрическое возбуждение обменных спиновых волн, сопровождаемое хаотическим изменением их амплитуды автомодуляционного характера [4, 107, 108]. В работах [109–112] выявлены дополнительные условия возбуждения такой неустойчивости, в частности показано, что в геометрии нормально намагниченной тонкой пластины параметрические явления подавляются, что позволяет достичь углов прецессии вектора намагниченности до сорока и более градусов. В работе [113] описаны возникающие при таких углах весьма разнообразные виды неустойчивостей в том числе бифуркационного характера.

#### 1.3.1. Стохастическая неустойчивость траекторий магнитоэлектрических волн

Все неустойчивости, описанные в перечисленных работах [4, 107–113], относятся к развитию процессов во времени. С другой стороны, в ряде работ [114–116], где рассматривалось пространственное распространение волновых пучков поверхностных магнитоэлектрических волн (ПМСВ) в касательно намагниченных пленках ферритов, было показано, что при намагничивании пленки полем типа «вала» траектории волновых пучков ПМСВ имеют «псевдосинусоидальный» колебательный характер, в котором роль времени играет координата, параллельная оси «вала».

В работе [117] было впервые показано, что при периодическом воздействии на такую пространственно детерминированную систему сигналом, в пространстве также полностью детерминированным, например, при модуляции параметров «вала» по синусоидальному закону, система проявляет стохастические свойства: ее пространственные колебания приобретают хаотический характер.

Несколько более подробно этот эффект рассматривался в работе [118]. В работах [119, 120] были рассмотрены особенности хаотизации траекторий ПМСВ при различных видах модуляции поля «вала», а в работе [121] установлен их фрактальный характер. В работе [122] отмечена возможность хаотизации траекторий ПМСВ для обратных волн, распространяющихся в пленке, намагниченной поперечно неоднородным модулированным полем типа «вала». В работе [123] рассмотрена возможность хаотизации траекторий ПМСВ в условиях распространения в системе нескольких параллельных каналов, образованных полями типа промодулированного «вала».

В работах [124, 125] приведено дальнейшее развитие результатов, полученных в работах [117–123], с целью выявления наиболее общих закономерностей явления стохастической неустойчивости траекторий ПМСВ в модулированном поле типа «вала». Основные моменты этих и предшествующих им работ будут рассмотрены далее в главе пятой (разд. 5.2–5.4) настоящей монографии.

#### 1.4. Излучение электромагнитных волн из феррита

Основное применение магнитоэлектрические волны находят в устройствах обработки информации в СВЧ диапазоне [126–129]. Необходимым фактором действия таких устройств является преобразование энергии электромагнитных волн (ЭМВ) в энергию магнитоэлектрических волн (МСВ) и обратно. В ранних работах, посвященных линиям задержки на объемных волнах [130–136], было показано, что при распространении МСВ в неоднородно намагниченном ферритовом стержне из определенных областей стержня происходит интенсивное излучение ЭМВ. Излученная ЭМВ принималась антенной, расположенной в непосредственной близости около торца ферритового стержня, что и обеспечивало успешное функционирование устройства. Диаграмма направленности излучения не исследовалась.

##### 1.4.1. Диаграмма направленности излучения

В работе [137] впервые было сообщено об обнаружении излучения ЭМВ из ферритовой пленки при распространении в ней поверхностных магнитоэлектрических волн (ПМСВ). Для реализации излучения пленка намагничивалась касательным полем, напряженность которого менялась по линейному закону в направлении, перпендикулярном направлению поля. Поверхностная магнитоэлектрическая волна распространялась перпендикулярно направлению поля в сторону его увеличения. При этом длина ПМСВ постепенно возрастала и стремилась в пределе к длине электромагнитной волны в свободном пространстве, что сопровождалось интенсивным преобразованием энергии ПМСВ в энергию ЭМВ, которая излучалась в открытое пространство. Была отмечена возможность использования наблюдаемых эффектов для создания излучателей ЭМВ.

В работах [138, 139] было исследовано пространственное распределение энергии излученной ЭМВ, показано, что диаграмма направленности излучения в верхнем полупространстве относительно плоскости ферритовой пленки имеет вид широкого лепестка, сильно (на десятки градусов) наклоненного вперед по ходу распространения ПМСВ. В эксперименте нижнее полупространство было закрыто поглощающим слоем, однако предполагалось, что полная диаграмма направленности симметрична относительно плоскости пленки, то есть имеет обращенные вперед два лепестка.

Дальнейшее экспериментальное исследование диаграмм направленности излучения предпринято в работах [140, 141].

Так в работе [140] исследованы диаграммы направленности излучения при различных значениях градиента постоянного поля вдоль направления распространения волны. Показано, что увеличение градиента поля приводит к сужению диаграммы в плоскости, ориентированной вдоль направления распространения волны перпендикулярно плоскости пленки, а также к уменьшению отклонения максимума диаграммы от плоскости пленки. В измерениях на частоте 2732 МГц при увеличении градиента с 3,6 Э/мм до 8 Э/мм ширина диаграммы направленности уменьшалась с 48° до 27°, а угол отклонения с 63° до 34°.

В работе [141] показано, что формирование градиентного поля в виде «вала» вдоль направления распространения ПМСВ приводит к увеличению эффективности преобразования. Аналогичное увеличение отмечено для объемных волн при формировании поля в виде «долины». Приведены схемы реализованных в эксперименте магнитных систем, однако количественные данные о повышении эффективности излучения отсутствуют. Высказано предположение о возможности создания малогабаритных антенн с узкой диаграммой направленности, размер которых будет значительно меньше длины электромагнитной волны.

##### 1.4.2. Теоретическая трактовка направленности излучения

Авторами работ [138–142] был предпринят ряд попыток построения модели излучения ЭМВ из феррита на основе решения полных уравнений Максвелла.

Так в работе [142] рассмотрено распространение поверхностной электромагнитной волны в касательно намагниченной ферритовой пластине на диэлектрической подложке. Направление распространения волны выбрано перпендикулярным направлению подмагничивающего поля. Получено дисперсионное соотношение, переходящее в магнитоэлектрическое приближении в известное соотношение Дэймона–Эшбаха [143]. Показано, что при достаточно малых волновых числах (единицы обратных сантиметров), а также при наличии потерь в феррите, внутри подложки распространяется вытекающая из ферритовой пластины под углом к ее поверхности волна, появление которой отождествлено с возникновением излучения из феррита в неоднородном поле. То есть можно было бы сделать вывод, что необходимыми

условиями излучения являются наличие подложки и потерь в феррите. Заметим однако, что еще в ранних работах, где имело место преобразование МСВ в ЭМВ [130–136], выполненных в схеме линии задержки на цилиндрических стержнях и дисках из ЖИГ, подложка вообще отсутствовала, а ухудшение феррита приводило в первую очередь к нарушению работы устройства. Так что, можно полагать, что результаты теории, развитой в работе [142], требуют более подробной проверки в эксперименте.

С исчерпывающими подробностями локализация энергии магнитоэлектронной и электромагнитной волн в структуре ферритовая пленка-немагнитная подложка рассмотрена в работе [144]. Учет изменения параметров волны при распространении в неоднородном поле выполнен методом ВКБ. Выявлено критическое значение толщины диэлектрика, ниже которого энергия распространяющейся волны локализуется, в основном, в феррите, а выше — в диэлектрике, что, по-видимому, также можно трактовать как излучение.

В работе [145] предложена модель преобразования поверхностной магнитоэлектронной волны в электромагнитную, основанная на аналогии между распространением МСВ в неоднородном поле и распространением ЭМВ в волноводе с плавно меняющимися параметрами. В качестве базовой использована работа [146], где показано, что если на пути распространения волны в волноведущей структуре между двумя однородными участками имеется участок с плавной неоднородностью, то на концах такого участка возможно излучение энергии волны в окружающее пространство.

Математический аппарат работы [146] модернизирован с целью учета гиротропного характера магнитной среды, что дало возможность рассчитать диаграмму направленности излучения с приемлемой для интерпретации экспериментов точностью.

Следует заметить, что несколько неясным моментом такой трактовки является тот факт, что теория, развитая в работе [146], построена в приближении малого изменения параметров структуры на длине волны, тогда как в эксперименте с ПМСВ выполнение такого условия не очевидно. Авторы [145] объясняют это обстоятельство трудностью изготовления ферритовой структуры длиной более нескольких сантиметров, тогда как для приемлемого выполнения упомянутого условия ее длина должна достигать не менее 0,5 м, причем на таком расстоянии ПМСВ затухают практически до нуля.

В несколько более ранних работах [147–150] предложена альтернативная модель, трактующая излучение ЭМВ из феррита как результат ускоренного движения магнитных зарядов, образованных намагниченностью ПМСВ. Такое неравномерное в пространстве движение обусловлено неоднородным изменением поля по ходу распространения ПМСВ, в результате чего локализованная внутри ПМСВ намагниченность приобретает ускорение, необходимо сопровождающееся излучением ЭМВ.

На основе предложенной модели рассчитана диаграмма направленности излучения и показано, что она имеет вид двух лепестков, симметрично расположенных относительно плоскости ферритовой пленки, наклоненных вперед по ходу распространения ПМСВ, причем величина наклона возрастает по мере приближения скорости ПМСВ к скорости ЭМВ в ферритовой пленке. Показано, что локализация области пленки, из которой происходит излучение, определяется полем, соответствующим верхней полевой границе спектра ПМСВ. В этой области рассчитаны компоненты динамической намагниченности, ответственные за излучение, выявлена преобладающая роль компоненты, параллельной плоскости пленки. Полученные результаты сопоставлены с экспериментом, выявлено хорошее качественное согласие, даны рекомендации для учета конкретной геометрии эксперимента.

Дальнейшее развитие подобной идеологии выполнено в работах [151–172]. В настоящей монографии эти вопросы рассматриваются в главах шестой–восьмой.

## Выводы по главе 1

Данная глава посвящена обзору литературы по вопросам распространения магнитоэлектронных и частично электромагнитных волн в сложных структурах. Основное внимание уделено периодическим решеткам различных видов, как наиболее подробно исследованному классу неоднородностей. Другим вопросом является излучение электромагнитных волн из феррита, сопровождающее распространение магнитоэлектронных волн в неоднородном поле. В обзоре по ходу изложения приведены ссылки на оригинальные разделы данной монографии, развивающие рассматриваемые положения.

Основные результаты, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрены решетки, образованные упругими волнами, механическими неоднородностями — канавками и металлическими полосками, решетки, образованные статическими магнитными полями различных конфигураций, а также магнитные каналы, обладающие волноведущими свойствами. Упомянуты решетки других видов, в том числе образованные абрикосовскими вихрями в сверхпроводнике. Отдельное внимание уделено решеткам с малым периодом, формирующим особые свойства дисперсии магнитоэлектронных волн.

2. Рассмотрены обратные волны в магнитных структурах. Отмечены два принципиально различных варианта формирования структур, способных поддерживать обратные волны. К первому варианту относятся композиционные наборные структуры из токопроводящих элементов, где обратный характер волн формируется за счет одновременной отрицательности эффективной магнитной и диэлектрической проницаемостей. Ко второму варианту относятся конструктивно более простые структуры типа феррит-диэлектрик-решетка, где обратный характер

волн формируется за счет гиротропных свойств магнитной среды, сочетающихся с экранирующим действием слоя металла.

3. Рассмотрены некоторые стохастические явления, сопровождающие распространение магнитостатических волн в структуре, намагниченной периодическим полем в двух измерениях. Отмечена стохастическая неустойчивость траекторий магнитостатических волн, распространяющихся в поле типа «вала» с пространственной модуляцией.

4. Рассмотрено преобразование магнитостатических волн в электромагнитные, проявляющееся как излучение электромагнитных волн из феррита. Приведены результаты экспериментального исследования диаграмм направленности излучения в различных условиях. Отмечены две альтернативные трактовки механизма излучения — первая, основанная на аналогии с распространением электромагнитных волн в волноводах с плавными неоднородностями, и вторая, рассматривающая излучение как результат ускоренного движения магнитных зарядов.

## Глава 2

### МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ ПРИ РАСЧЕТЕ СВОЙСТВ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН

Настоящая глава посвящена обзору основного математического аппарата, используемого при решении задач, относящихся к магнитостатическим волнам и ферромагнитному резонансу в сложных структурах. Авторы не ставят целью дублировать главу 2 монографии [1], а приводят лишь основные сведения, необходимые для понимания материала последующих глав. Та часть материала, которая относится к методам, описанным в главе 2 монографии [1], излагается конспективно. Вопросы аппарата, не нашедшие освещения в [1], рассмотрены более подробно с целью возможности их непосредственного воспроизведения.

При рассмотрении перечисленных вопросов будем в основном следовать работам [1, 143, 173, 174], остальные ссылки указаны в тексте.

#### 2.1. Тензор магнитной проницаемости

Высокочастотные магнитные свойства материала описываются на основе модели прецессии вектора намагниченности. Для этого традиционно используется уравнение движения намагниченности Ландау–Лифшица с диссипативным членом в форме Гильберта [175–177]:

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma \cdot [\mathbf{m} \times \mathbf{H}_e] + \alpha \cdot \left[ \mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \right], \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_0$  — нормированный вектор намагниченности,  $M_0$  — намагниченность насыщения,  $\gamma$  — гиромагнитная постоянная,  $\mathbf{H}_e$  — эффективное поле внутри магнетика,  $\alpha$  — параметр затухания Гильберта.

Решая это уравнение с использованием процедуры линеаризации [1, 175–177], получаем компоненты тензора магнитной восприимчивости  $\vec{\chi}$  в виде:

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\Omega_H + i\alpha\Omega}{\Omega_H^2 - (1 + \alpha^2)\Omega^2 + i2\alpha\Omega\Omega_H}; \quad (2.2)$$

$$\chi_a = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\Omega}{\Omega_H^2 - (1 + \alpha^2)\Omega^2 + i2\alpha\Omega\Omega_H}, \quad (2.3)$$

где

$$\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}; \quad (2.4)$$

$$\Omega_H = \frac{H_0}{4\pi M_0}. \quad (2.5)$$

Полагая магнитные потери достаточно малыми ( $\alpha \ll 1$ ) и освобождаясь от мнимости в знаменателе, получаем:

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{(\Omega_H + i\alpha\Omega) \cdot (\Omega_H^2 - \Omega^2 - i2\alpha\Omega\Omega_H)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}; \quad (2.6)$$

$$\chi_a = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\Omega \cdot (\Omega_H^2 - \Omega^2 - i2\alpha\Omega\Omega_H)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}. \quad (2.7)$$

Для дальнейшего упрощения можно положить мнимые части в числителях обоих этих выражений равными нулю (при этом теряются фаза и частично потери, но для первого рассмотрения можно считать это несущественным):

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\Omega_H \cdot (\Omega_H^2 - \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}; \quad (2.8)$$

$$\chi_a = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\Omega \cdot (\Omega_H^2 - \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}. \quad (2.9)$$

Учитывая, что магнитная проницаемость связана с восприимчивостью соотношением

$$\vec{\mu} = \vec{1} + 4\pi \vec{\chi}, \quad (2.10)$$

где  $\vec{1}$  — единичный тензор, получаем компоненты тензора магнитной проницаемости в виде

$$\mu = 1 + \frac{\Omega_H \cdot (\Omega_H^2 - \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}; \quad (2.11)$$

$$\mu_a = \frac{\Omega \cdot (\Omega_H^2 - \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}. \quad (2.12)$$

**Замечание.** Динамическая магнитная восприимчивость вещества, обусловленная прецессией вектора намагниченности, традиционно рассчитывается в системе СГС [175–177]. Однако распространение электромагнитных волн часто рассчитывается в системе СИ [178–184]. Правила перехода от одной системы к другой можно найти, например,

в учебных монографиях [185, 186]. При переходе к системе СИ восприимчивость (2.8)–(2.9) приобретает вид:

$$\chi^{(C)} = \frac{\Omega_H \cdot (\Omega_H^2 - \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}; \quad (2.13)$$

$$\chi_a^{(C)} = \frac{\Omega \cdot (\Omega_H^2 - \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}. \quad (2.14)$$

При этом проницаемость (2.10) вычисляется по формуле:

$$\vec{\mu}^{(C)} = \vec{1} + \vec{\chi}^{(C)}, \quad (2.15)$$

в результате чего формулы (2.11)–(2.12), используемые для расчета импедансов и адмиттансов (раздел 2.5.5), остаются без изменения.

## 2.2. Магнитостатические волны в однородных полях и структурах

Обратимся сначала к наиболее общему случаю, лежащему в основе подавляющего большинства задач о распространении МСВ — волнам в однородных структурах. Начнем рассмотрение с задачи Дэймона–Эшбаха для ферритовой пленки со свободными поверхностями (ФСП), после чего перейдем к более сложным структурам, из которых основной является структура феррит-диэлектрик-металл (ФДМ).

### 2.2.1. Дисперсия магнитостатических волн в ферритовой пленке со свободными поверхностями (задача Дэймона–Эшбаха)

В основе теоретического рассмотрения свойств магнитостатических волн лежит дисперсионное соотношение для МСВ в ферритовой пленке со свободными поверхностями (ФСП), полученное в 1961 году Дэймоном и Эшбахом [143]. Приведем вкратце вывод этого соотношения.

*Общая геометрия задачи.* Рассмотрим общую геометрию задачи, иллюстрируемую рис. 2.1.

Структура представляет собой безграничную в плоскости ферритовую пластину 2 толщиной  $d$ , по обе стороны от которой находятся свободные полупространства 1 и 3.

На рис. 2.1, а показана общая трехмерная геометрия структуры. Система координат  $Oxyz$  выбрана таким образом, что ее плоскость  $Oyz$  параллельна плоскостям ферритовой пластины, а ось  $Ox$  — им перпендикулярна. При этом ось  $Oz$  ориентирована вдоль направления внешнего поля. Начало координат  $O$  находится посередине между поверхностными плоскостями пластины, координаты которых равны  $\pm d/2$ .

На рис. 2.1, б показана геометрия в плоскости магнитной пластины, а также переход к полярной системе в плоскости  $Oyz$ .

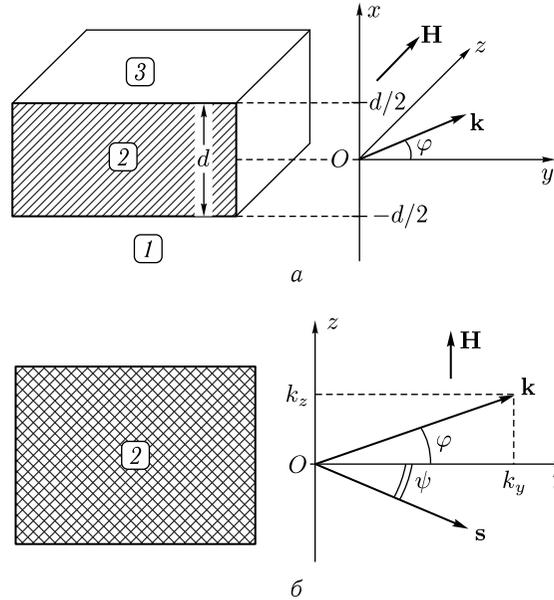


Рис. 2.1. Общая геометрия задачи: *a* — трехмерная геометрия, декартова система координат  $Oxyz$ ; *b* — плоскость пластины, система  $Oyz$ , полярные координаты

Вектор  $\mathbf{k}$  — волновой вектор, соответствующий фазовой скорости волны. Он лежит в плоскости  $Oyz$  и составляет с осью  $Oy$  угол  $\varphi$ .

Компоненты этого вектора соответственно равны:

$$k_y = k \cdot \cos \varphi, \quad (2.16)$$

$$k_z = k \cdot \sin \varphi. \quad (2.17)$$

Вектор  $\mathbf{s}$  — лучевой вектор, соответствующий групповой скорости волны. Он лежит в той же плоскости  $Oyz$  и составляет с осью  $Oy$  угол  $\psi$ . Его компоненты равны:

$$s_y = s \cdot \cos \psi, \quad (2.18)$$

$$s_z = s \cdot \sin \psi. \quad (2.19)$$

*Приближение магнитостатики.* Задача решается в магнитостатическом приближении. Уравнения магнитостатики имеют вид:

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0; \quad (2.20)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (2.21)$$

Здесь:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}. \quad (2.22)$$

Предположим, что поле и намагниченность имеют вид:

$$\mathbf{H} = H_i \cdot \mathbf{n}_z + \mathbf{h} \cdot e^{i\omega t}; \quad (2.23)$$

$$\mathbf{M} = M_0 \cdot \mathbf{n}_z + \mathbf{m} \cdot e^{i\omega t}. \quad (2.24)$$

Здесь:  $H_i$  — внутреннее постоянное поле;  $h \sim m \ll H_i \sim M_0$ .

Подставляя (2.23), (2.24) в (2.20), (2.21), и учитывая, что  $\text{rot}(H_i \cdot \mathbf{n}_z) = 0$ , а также  $\text{div}(M_0 \cdot \mathbf{n}_z) = 0$  (так как  $H_i = \text{const}$ ,  $M_0 = \text{const}$ ), получаем

$$\text{rot } \mathbf{h} = 0; \quad (2.25)$$

$$\text{div}(\mathbf{h} + 4\pi\mathbf{m}) = 0. \quad (2.26)$$

*Граничные условия для поля и индукции.* Граничные условия на поверхностях пластины состоят в непрерывности нормальной компоненты индукции  $\mathbf{B}$  и тангенциальной компоненты поля  $\mathbf{H}$ :

$$B_x^i \Big|_{x=\pm \frac{d}{2}} = B_x^e \Big|_{x=\pm \frac{d}{2}}, \quad (2.27)$$

$$H_{y,z}^i \Big|_{x=\pm \frac{d}{2}} = H_{y,z}^e \Big|_{x=\pm \frac{d}{2}}. \quad (2.28)$$

*Введение потенциала.* Из уравнения (2.25) следует возможность введения потенциала переменного поля  $\psi$  такого, что:

$$\mathbf{h} = \text{grad } \psi = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x}; \frac{\partial \psi}{\partial y}; \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\}. \quad (2.29)$$

При этом уравнение (2.26) принимает вид

$$\text{div}(\text{grad } \psi + 4\pi\mathbf{m}) = 0, \quad (2.30)$$

или

$$\Delta \psi + 4\pi \text{div } \mathbf{m} = 0. \quad (2.31)$$

Это уравнение является основным уравнением для потенциала в среде с намагниченностью. В него входит переменная намагниченность  $\mathbf{m}$ , которая определяется из уравнения движения вектора намагниченности (Ландау–Лифшица) через переменное поле  $\mathbf{h}$  с помощью тензора восприимчивости  $\vec{\chi}$ . Компоненты переменного поля выражаются через потенциал  $\psi$  в соответствии с (2.29). Таким образом, компоненты переменной намагниченности  $\mathbf{m}$  можно выразить через потенциал  $\psi$ , после чего подставить полученные выражения в (2.30). При этом получается уравнение для потенциала  $\psi$  в чистом виде. Это — уравнение Уокера [1, 143, 187], вид которого определяется явным видом тензора восприимчивости  $\vec{\chi}$ . Вне магнитной среды, то есть при намагниченности равной нулю, уравнение Уокера переходит в традиционное уравнение Лапласа [188].

Полная задача для потенциала во всех трех средах. Таким образом, получаем полную задачу для потенциала во всех трех средах.

Среда 1 (вне феррита) — уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = 0. \quad (2.32)$$

Среда 2 (внутри феррита) — уравнение Уокера:

$$\mu \cdot \left( \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} = 0. \quad (2.33)$$

Среда 3 (вне феррита) — уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} = 0. \quad (2.34)$$

Граничные условия на нижней  $\left(x = -\frac{d}{2}\right)$  и верхней  $\left(x = \frac{d}{2}\right)$  поверхностях:

$$\mu \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + i\nu \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \Big|_{x=-\frac{d}{2}} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{d}{2}}; \quad (2.35)$$

$$\mu \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + i\nu \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \Big|_{x=\frac{d}{2}} = \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \Big|_{x=\frac{d}{2}}; \quad (2.36)$$

$$\psi_2 \Big|_{x=-\frac{d}{2}} = \psi_1 \Big|_{x=-\frac{d}{2}}; \quad (2.37)$$

$$\psi_2 \Big|_{x=\frac{d}{2}} = \psi_3 \Big|_{x=\frac{d}{2}}. \quad (2.38)$$

В этих выражениях приняты следующие обозначения:

$$\mu = 1 + \frac{\Omega_H}{\Omega_H^2 - \Omega^2}, \quad (2.39)$$

$$\nu = \frac{\Omega}{\Omega_H^2 - \Omega^2}. \quad (2.40)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}; \quad (2.41)$$

$$\Omega_H = \frac{H_i}{4\pi M_0}. \quad (2.42)$$

Решение уравнений без граничных условий. Уравнения (2.32)–(2.34) решаются методом разделения переменных [188], то есть предполагается, что решение имеет вид:

$$\psi_1 = X_1 \cdot Y_1 \cdot Z_1, \quad (2.43)$$

$$\psi_2 = X_2 \cdot Y_2 \cdot Z_2, \quad (2.44)$$

$$\psi_3 = X_3 \cdot Y_3 \cdot Z_3, \quad (2.45)$$

где  $X_{1,2,3}$  зависят только от  $x$ ,  $Y_{1,2,3}$  зависят только от  $y$ , а  $Z_{1,2,3}$  зависят только от  $z$ .

В результате решения получаются выражения для сомножителей потенциалов в виде экспонент с двумя знаками в показателях.

Предположим теперь, что волна распространяется в плоскости  $Oyz$ . В этом случае зависимости всех трех решений от  $y$  и  $z$  должны совпадать.

Далее будем полагать, что волна распространяется в положительном направлении относительно оси  $Oy$ . Из этого следует, что при зависимости от времени вида  $\exp(i\omega t)$  и положительном значении волнового числа знак показателя экспоненты в зависимости потенциала от  $y$  должен быть отрицательным. Аналогично, полагая, что волна распространяется в положительном направлении относительно оси  $Oz$ , получаем, что знак показателя экспоненты в зависимости потенциала от  $z$  также должен быть отрицательным.

При сделанных предположениях полное решение принимает вид:

— часть решения, зависящая только от  $x$ :

$$X_1 = Ae^{k_x^e x}; \quad (2.46)$$

$$X_2 = A_2 e^{ik_x^i x} + B_2 e^{-ik_x^i x}; \quad (2.47)$$

$$X_3 = Be^{-k_x^e x}, \quad (2.48)$$

где  $k_x^i$  и  $k_x^e$  —  $x$ -компоненты волнового числа внутри и вне ферритовой пластины соответственно;

— части решения, зависящие от  $y$  и  $z$ :

$$Y = e^{-ik_y y}; \quad (2.49)$$

$$Z = e^{-ik_z z}. \quad (2.50)$$

Исключение постоянных разделения приводит к следующим выражениям для  $k_x^i$  и  $k_x^e$ :

$$k_x^e = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}; \quad (2.51)$$

$$k_x^i = \sqrt{-\left(k_y^2 + \frac{k_z^2}{\mu}\right)}. \quad (2.52)$$

Здесь  $k_y$  и  $k_z$  — пока произвольные действительные величины (их действительность обусловлена отсутствием затухания). При этом из (2.51) следует, что  $k_x^e$  тоже всегда действительное, то есть  $X_1$  и  $X_3$  вне пластины экспоненциально спадают во всех случаях. В то же время из (2.52) следует, что  $k_x^i$  может быть как действительным, так и мнимым, в зависимости от знака подкоренного выражения, которое определяется соотношением между величинами  $k_y$  и  $k_z$ , а также величиной и знаком  $\mu$  в зависимости от  $\Omega$ .

Условие действительности  $k_x^i$ , определяемое соотношением:

$$k_y^2 + \frac{k_z^2}{\mu} < 0, \quad (2.53)$$

то есть

$$\frac{k_z}{k_y} > \sqrt{-\mu}, \quad (2.54)$$

позволяет выделить по частоте область, соответствующую  $\mu < 0$ , откуда следует

$$\Omega_H < \Omega < \sqrt{\Omega_H(\Omega_H + 1)}. \quad (2.55)$$

Это область *объемных* волн, для которых зависимость потенциала  $\psi_2$  от координаты  $x$  в соответствии с (2.44), где экспоненты с мнимыми показателями переходят в тригонометрические функции, периодически осциллирует. Условие (2.55) с учетом (2.41)–(2.42), (2.16), (2.17) по углу  $\varphi$  дает сектор, определяющий возможные пределы распространения объемных волн, границы которого соответствуют углам отсечки.

Условие мнимости  $k_x^i$ , соответствующее соотношению:

$$k_y^2 + \frac{k_z^2}{\mu} > 0, \quad (2.56)$$

то есть:

$$\frac{k_z}{k_y} > \sqrt{\mu} \quad (2.57)$$

дает область по частоте, определяемую неравенством:

$$\sqrt{\Omega_H(\Omega_H + 1)} < \Omega < +\infty. \quad (2.58)$$

Это область *поверхностных* волн, для которых зависимость потенциала  $\psi_2$  от координаты  $x$  в соответствии с (2.47), где показатели экспонент становятся действительными, спадает по экспоненте от той или иной поверхности пластины. Условие (2.58) с учетом (2.16), (2.17) по углу  $\varphi$  также дает сектор, ограничиваемый углами отсечки.

*Дисперсионное соотношение в декартовой системе координат.*

Возвращаясь к полному решению (2.46)–(2.48), можно видеть, что в нем имеются 4 коэффициента  $A$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $B$ , для определения которых имеются 4 граничных условия (2.35)–(2.38).

Подстановка решения (2.46)–(2.48) в граничные условия (2.35)–(2.38) приводит к системе уравнений относительно неизвестных  $A$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $B$  следующего вида:

$$A_2 \varepsilon_1 e^{-i\rho} + B_2 \varepsilon_2 e^{i\rho} - A k_x^e e^{-\delta} = 0; \quad (2.59)$$

$$A_2 \varepsilon_1 e^{i\rho} + B_2 \varepsilon_2 e^{-i\rho} + B k_x^e e^{-\delta} = 0; \quad (2.60)$$

$$A_2 e^{-i\rho} + B_2 e^{i\rho} - A e^{-\delta} = 0; \quad (2.61)$$

$$A_2 e^{i\rho} + B_2 e^{-i\rho} - B e^{-\delta} = 0, \quad (2.62)$$

где введены обозначения:

$$\rho = \frac{k_x^i d}{2}; \quad (2.63)$$

$$\delta = \frac{k_x^e d}{2}; \quad (2.64)$$

$$\varepsilon_1 = i\mu k_x^i + \nu k_y; \quad (2.65)$$

$$\varepsilon_2 = -i\mu k_x^i + \nu k_y, \quad (2.66)$$

в которых  $k_x^e$  и  $k_x^i$  определяются соотношениями (2.51)–(2.52).

Условием существования ненулевого решения системы (2.59)–(2.62) является равенство нулю ее определителя:  $D_0 = 0$ , что и дает дисперсионное соотношение:

$$\frac{e^{2i\rho} - e^{-2i\rho}}{e^{2i\rho} + e^{-2i\rho}} = \frac{k_x^e (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(k_x^e)^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}. \quad (2.67)$$

Подстановка  $k_x^e$  и  $k_x^i$  в соответствии с (2.51)–(2.52), после некоторых упрощений приводит к соотношению вида

$$\frac{2\sqrt{(\mu k_y^2 + k_z^2) \cdot (k_y^2 + k_z^2)}}{(\nu^2 - \mu^2 - 1)k_y^2 - (1 + \mu)k_z^2} - \text{th} \left\{ d \sqrt{\frac{\mu k_y^2 + k_z^2}{\mu}} \right\} = 0, \quad (2.68)$$

где  $\mu$  и  $\nu$  определяются формулами (2.39)–(2.40).

Соотношение (2.68) получено в декартовой системе координат. Однако для ряда задач, в том числе касающихся распространения магнитоэлектрических волн в неоднородно намагниченных структурах, более удобным является использование полярной системы координат, переход к которой будет рассмотрен в следующем разделе.

*Переход к полярной системе координат.* В дисперсионное соотношение (2.68) входят декартовы компоненты волнового числа  $k_y$ ,  $k_z$ . Определение их через полярные координаты  $k$  и  $\varphi$  в соответствии с (2.16)–(2.17) приводит к соотношению вида

$$\beta - 1 - 2\mu\alpha \text{cth}(kd\alpha) = 0, \quad (2.69)$$

где введены вспомогательные параметры:

$$\alpha = \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{\mu}}, \quad (2.70)$$

$$\beta = (\nu^2 - \mu^2 + \mu) \cos^2 \varphi - \mu, \quad (2.71)$$

а входящие в них величины  $\mu$  и  $\nu$  определяются соотношениями (2.39)–(2.40).

Это основное дисперсионное соотношение задачи Дэймона–Эшбаха для магнитной пластины со свободными поверхностями (структура ФСП).

В некоторых случаях бывает удобно пользоваться дисперсионным соотношением, разрешенным относительно  $k$ . Соотношение для структуры ФСП позволяет выполнить такое разрешение, в результате чего соотношение (2.69) принимает вид

$$k = \frac{1}{2d\alpha} \cdot \ln \frac{\beta - 1 + 2\mu\alpha}{\beta - 1 - 2\mu\alpha}. \quad (2.72)$$

**Замечание.** В оригинальной статье Дэймона–Эшбаха [143] дисперсионное соотношение для структуры ФСП получено в несколько отличном от (2.69) виде, что связано с применяемой там системой обозначений. Нетрудно видеть, что оба вида полностью эквивалентны. В литературе, например в [129], имеются и другие также эквивалентные виды того же соотношения. В данной монографии, как и в [1] и цитируемых там статьях, используется именно вид (2.69), который, по мнению авторов, является наиболее удобным для анализа распространения поверхностных магнитостатических волн в структурах с неоднородным намагничиванием.

### 2.2.2. Основные свойства дисперсии ПМСВ

Теперь, когда основное дисперсионное соотношение для ПМСВ в свободной ферритовой пленке получено, обратимся к рассмотрению некоторых свойств ПМСВ, следующих из этого соотношения.

**Угол отсечки для ПМСВ.** Как отмечено в разделе 2.2.1, распространение поверхностных магнитостатических волн возможно только в определенном интервале углов между направлениями волнового вектора и приложенного постоянного поля. Крайние значения такого интервала углов называются «углами отсечки». Ввиду симметрии дисперсионного соотношения относительно нормали к направлению поля, положительные и отрицательные значения угла отсечки по абсолютной величине равны между собой, поэтому достаточно определить только одно из этих значений, например, положительное.

Угол отсечки найдем из дисперсионного соотношения в полярной системе координат (2.69). Будем считать, что отсечка соответствует стремлению волнового числа к бесконечности, то есть  $k \rightarrow \infty$ . При этом  $\text{sth}(kd\alpha) \rightarrow 1$ , так что (2.69) принимает вид

$$\beta - 1 - 2\mu\alpha = 0. \quad (2.73)$$

Разрешая это уравнение относительно угла  $\varphi$  с учетом входящих в него выражений, получаем угол отсечки в виде

$$\varphi_c = \pm \arccos \left( \sqrt{\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}} \right), \quad (2.74)$$

где введены вспомогательные обозначения:

$$A = (\nu^2 - \mu^2 + \mu)^2; \quad (2.75)$$

$$B = -2 [(\mu + 1)(\nu^2 - \mu^2 + \mu) + 2\mu(\mu - 1)]; \quad (2.76)$$

$$C = (\mu - 1)^2. \quad (2.77)$$

**Графическая иллюстрация дисперсии ПМСВ.** Приведем некоторые графические иллюстрации дисперсионного соотношения (2.69), позволяющие качественно судить о физических механизмах распространения ПМСВ в неоднородных полях и сложных структурах. Обратимся к рис. 2.2, где приведены дисперсионная зависимость (а) и изочастотные кривые (б) для ПМСВ в ферритовой пластине со свободными поверхностями.

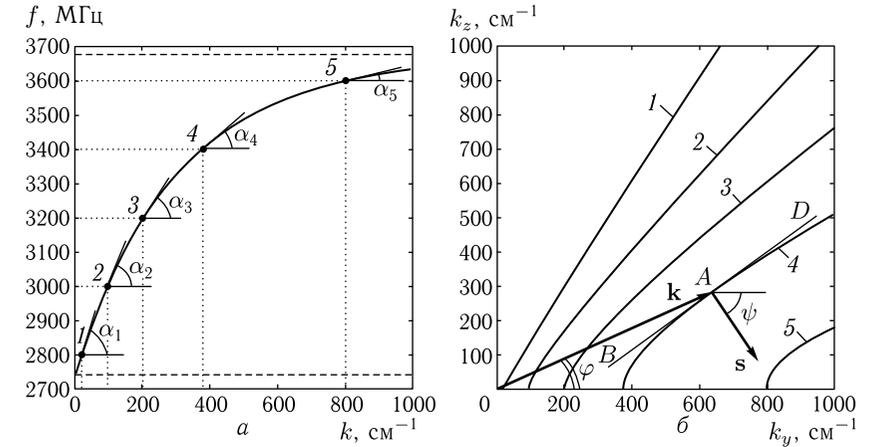


Рис. 2.2. Дисперсионная кривая (а) и изочастотные кривые (б) для ПМСВ в ферритовой пластине со свободными поверхностями. Точки соответствуют частотам: 1 — 2800 МГц; 2 — 3000 МГц; 3 — 3200 МГц; 4 — 3400 МГц; 5 — 3600 МГц. Параметры пластины:  $4\pi M_0 = 1750$  Гс,  $d = 15$  мкм. Поле:  $H = 437,5$  Э

На рис. 2.2, а показана дисперсионная кривая как зависимость частоты  $f$  от волнового числа  $k$ , соответствующая поверхностной магнитостатической волне, распространяющейся перпендикулярно направлению поля (то есть при  $\varphi = 0$ ) в пленке типа ЖИГ ( $4\pi M_0 = 1750$  Гс,  $d = 15$  мкм) при поле 437,5 Э. Интервал существования ПМСВ в этих условиях заключен между 2739 и 3675 МГц (его границы показаны на рисунке горизонтальными пунктирными линиями).

Дисперсионная кривая на всем своем протяжении имеет выпуклость вверх, причем по мере увеличения волнового числа она стремится к горизонтальной асимптоте, соответствующей 3675 МГц. Укрупненными точками отмечены интервалы по частоте через каждые 200 МГц.

Горизонтальные и вертикальные точечные линии соответствуют частоте и волновому числу в заданной точке.

Можно видеть, что фазовая скорость волны, равная отношению частоты к соответствующему волновому числу, по мере увеличения частоты уменьшается. Так на частоте 2800 МГц она равна  $140,0 \cdot 10^6$  см/сек, на частоте 3000 МГц — уменьшается до  $31,2 \cdot 10^6$  см/сек, а на частоте 3600 МГц падает до  $4,5 \cdot 10^6$ . При приближении дисперсионной кривой к горизонтальной асимптоте (при 3675 МГц) фазовая скорость стремится к нулю.

Групповая скорость, определяемая как производная от частоты по волновому числу, соответствует тангенсу угла  $\alpha_{1-5}$  между касательной к дисперсионной кривой и горизонтальной осью. Можно видеть, что имеет место соотношение:  $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > \alpha_5$ , то есть групповая скорость волны по мере увеличения частоты уменьшается, а при приближении дисперсионной кривой к горизонтальной асимптоте, соответствующей 3675 МГц, групповая скорость стремится к нулю.

На рис. 2.2, б показаны изочастотные кривые, соответствующие зависимости  $z$ -компоненты волнового числа от его  $y$ -компоненты при фиксированной частоте. Приведены только верхние ветви изочастотных кривых, нижние — полностью симметричны относительно горизонтальной оси, поэтому для упрощения рисунка не приводятся. Номера кривых соответствуют тем же частотам, что отмечены точками на рис. 2.2, а. Выход изочастотных кривых на горизонтальную ось имеет место при тех же значениях волнового числа, что и проекции точек 1–5 на горизонтальную кривую на рис. 2.2, а.

Можно видеть, что все кривые по форме представляют собой зависимости, подобные гиперболам, причем с повышением частоты кривые сдвигаются к большим значениям  $k_y$ , а их ветви идут более полого. При бесконечном увеличении волнового числа кривые стремятся к наклонным проходящим через точку  $O$  асимптотам (на рисунке не показаны), определяемым углами отсечки.

На примере кривой 4 показана схема расположения векторов фазовой  $\mathbf{k}$  и групповой  $\mathbf{s}$  скоростей. Углы  $\varphi$  и  $\psi$ , характеризующие отклонение этих векторов от горизонтальной оси, соответствуют углам с теми же обозначениями на рис. 2.1.

Вектор фазовой скорости  $\mathbf{k}$  исходит из начала координат  $O$  под углом  $\varphi$  к горизонтальной оси и заканчивается в точке  $A$ , соответствующей пересечению с изочастотной кривой.

Вектор групповой скорости  $\mathbf{s}$  перпендикулярен касательной  $BD$  к изочастотной кривой в точке  $A$  и составляет с горизонтальной осью угол  $\psi$ .

Можно видеть, что при  $\varphi = 0$  угол  $\psi$  также равен нулю, а по мере увеличения  $\varphi$  вплоть до угла отсечки, угол  $\psi$  также увеличивается. На линии отсечки выполняется соотношение:  $\varphi + \psi = 90^\circ$ .

**Замечание.** Из рис. 2.2, б можно видеть, что взаимная ориентация волнового и лучевого векторов определяется наклоном изочастотной

кривой в точке, соответствующей концу волнового вектора. При этом критерием прямого или обратного характера волны можно считать знак проекции лучевого вектора на направление волнового вектора. Так, если проекция вектора групповой скорости на вектор фазовой скорости положительна, то волна является прямой, если отрицательна — обратной. На языке векторной алгебры можно сказать, что волна является прямой, если знак скалярного произведения волнового и лучевого векторов положителен, и обратной, если этот знак отрицателен. В рамках настоящей работы такое определение характера волны является вполне достаточным, однако для более подробного ознакомления с данным вопросом можно обратиться к работам [75, 189].

*Вектор групповой скорости.* Для ряда задач представляет интерес определить как ориентацию, так и величину вектора групповой скорости. Рассмотрим, как это можно сделать на основе полученного дисперсионного соотношения.

Прежде всего отметим, что обозначение вектора групповой скорости  $\mathbf{s}$ , традиционно принятое в оптике [190], для задач о магнитоэлектрических волнах является не вполне удобным, поэтому заменим его на эквивалентное обозначение  $\mathbf{v}_g$ , так что  $\mathbf{v}_g \equiv \mathbf{s}$ . При этом, согласно определению групповой скорости [190]

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \cdot \mathbf{n}_y + \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \cdot \mathbf{n}_z, \quad (2.78)$$

то есть, учитывая, что дисперсионное соотношение имеет вид  $\omega = \omega(k, \varphi)$ , получаем:

$$v_{gy} = \frac{\partial \omega}{\partial k_y} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial k_y} + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial k_y}; \quad (2.79)$$

$$v_{gz} = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial k_z} + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial k_z}. \quad (2.80)$$

Выразим эти производные по  $k_y$  и  $k_z$  через входящие в дисперсионное соотношение переменные  $k$  и  $\varphi$ , учитывая, что:

$$k = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}; \quad (2.81)$$

$$\varphi = \arctg \frac{k_z}{k_y}, \quad (2.82)$$

а также:

$$k_y = k \cdot \cos \varphi; \quad (2.83)$$

$$k_z = k \cdot \sin \varphi. \quad (2.84)$$

При этом получаем:

$$\frac{\partial k}{\partial k_y} = \frac{k_y}{\sqrt{k_y^2 + k_z^2}} = \cos \varphi; \quad (2.85)$$

$$\frac{\partial k}{\partial k_z} = \frac{k_z}{\sqrt{k_y^2 + k_z^2}} = \sin \varphi; \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial k_y} = -\frac{k_z}{k_y^2 + k_z^2} = -\frac{1}{k} \cdot \sin \varphi; \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial k_z} = \frac{k_y}{k_y^2 + k_z^2} = \frac{1}{k} \cdot \cos \varphi. \quad (2.88)$$

Подставляя (2.85)–(2.88) в (2.79)–(2.80), получаем:

$$v_{gy} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \cdot \cos \varphi - \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{k} \cdot \sin \varphi; \quad (2.89)$$

$$v_{gz} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \cdot \sin \varphi + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{k} \cdot \cos \varphi. \quad (2.90)$$

Здесь, согласно (2.41), частота  $\omega$  связана с нормированной частотой  $\Omega$  соотношением:

$$\omega = 4\pi\gamma M_0 \cdot \Omega, \quad (2.91)$$

так что (2.89)–(2.90) можно записать в виде

$$v_{gy} = 4\pi\gamma M_0 \cdot \left( \frac{\partial \Omega}{\partial k} \cdot \cos \varphi - \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{k} \right); \quad (2.92)$$

$$v_{gz} = 4\pi\gamma M_0 \cdot \left( \frac{\partial \Omega}{\partial k} \cdot \sin \varphi + \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{k} \right). \quad (2.93)$$

Полная длина вектора групповой скорости равна

$$v_g = \sqrt{v_{gy}^2 + v_{gz}^2} = 4\pi\gamma M_0 \cdot \sqrt{\left( \frac{\partial \Omega}{\partial k} \right)^2 + \frac{1}{k^2} \cdot \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \right)^2}. \quad (2.94)$$

Полученные компоненты вектора групповой скорости (2.92)–(2.93) позволяют определить угол  $\psi$  между этим вектором и горизонтальной осью, исходя из следующего соотношения:

$$\psi = \arctg \frac{v_{gz}}{v_{gy}} = \arctg \frac{k \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial k} \cdot \sin \varphi + \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \cdot \cos \varphi}{k \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial k} \cdot \cos \varphi - \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \cdot \sin \varphi}. \quad (2.95)$$

Входящие в выражения (2.92)–(2.95) производные  $\partial \Omega / \partial k$  и  $\partial \Omega / \partial \varphi$  определяются конкретным видом дисперсионного соотношения. Приведем их здесь для ферритовой пленки со свободными поверхностями, дисперсионное соотношение в которой имеет вид (2.69):

$$F(\Omega, k, \varphi) = \beta - 1 - 2\mu\alpha \cdot \text{cth}(k d \alpha) = 0. \quad (2.96)$$

Дифференцируя (2.96) как неявную функцию получаем:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial k} = -\frac{\partial F / \partial k}{\partial F / \partial \Omega}, \quad (2.97)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} = -\frac{\partial F / \partial \varphi}{\partial F / \partial \Omega}, \quad (2.98)$$

В эти формулы входят производные  $\partial F / \partial k$ ,  $\partial F / \partial \varphi$ ,  $\partial F / \partial \Omega$ . С учетом (2.96) они приобретают вид:

$$\frac{\partial F}{\partial k} = 2 \left[ \frac{\mu d \alpha^2}{\text{sh}^2(k d \alpha)} \right]; \quad (2.99)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 2\mu \left[ \frac{k d \alpha}{\text{sh}^2(k d \alpha)} - \text{cth}(k d \alpha) \right] \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} + \frac{\partial \beta}{\partial \varphi}; \quad (2.100)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Omega} = 2\mu \left[ \frac{k d \alpha}{\text{sh}^2(k d \alpha)} - \text{cth}(k d \alpha) \right] \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} + \frac{\partial \beta}{\partial \Omega} - 2\alpha \text{cth}(k d \alpha) \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \Omega}, \quad (2.101)$$

а входящие в (2.99)–(2.101) производные имеют вид:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{1}{\mu} - 1 \right) \cdot \sin 2\varphi; \quad (2.102)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} = -\frac{\sin^2 \varphi}{2\alpha \mu^2} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \Omega}; \quad (2.103)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \varphi} = (\mu^2 - \nu^2 - \mu) \cdot \sin 2\varphi; \quad (2.104)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \Omega} = 2\nu \cos^2 \varphi \cdot \frac{\partial \nu}{\partial \Omega} - (\sin^2 \varphi + 2\mu \cos^2 \varphi) \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \Omega}; \quad (2.105)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \Omega} = \frac{2\Omega_H \Omega}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)}. \quad (2.106)$$

При этом, как и ранее,

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{\mu} + \cos^2 \varphi}; \quad (2.107)$$

$$\beta = (\nu^2 - \mu^2 + \mu) \cdot \cos^2 \varphi - \mu; \quad (2.108)$$

$$\mu = 1 + \frac{\Omega_H}{\Omega_H^2 - \Omega^2}; \quad (2.109)$$

$$\nu = \frac{\Omega}{\Omega_H^2 - \Omega^2}; \quad (2.110)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}; \quad (2.111)$$

$$\Omega_H = \frac{H}{4\pi M_0}. \quad (2.112)$$

Выражения для длины вектора групповой скорости (2.94) и его угла  $\psi$  (2.95) для других структур вычисляются аналогичным образом с использованием соответствующих дисперсионных соотношений. Для структуры феррит-диэлектрик-металл (ФДМ) дисперсионное соотношение с соответствующими производными приведено в [1]. Там же показано, что из соотношения для структуры ФДМ получаются соотношения для свободной пленки (ФСП) и структуры феррит-металл (ФМ) с соответствующими производными.

Потенциалы, поля и намагниченности. Приведенное здесь решение задачи Дэймона–Эшбаха не ограничивается нахождением только одного дисперсионного соотношения, но и позволяет определить другие основные характеристики волны, такие как потенциалы, поля и распределение намагниченности, а также угол отсечки. В следующих разделах приведем без вывода краткую сводку таких характеристик в полярной системе координат. За подробным выводом следующих далее соотношений читатель может обратиться к монографии [1].

Система уравнений (2.59)–(2.62) для коэффициентов  $A$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $B$ , определяющих потенциалы в соответствии с (2.46)–(2.48), представляет собой систему из 4 уравнений с 4 неизвестными, определитель которой равен нулю. Поэтому три из неизвестных можно выразить через четвертое, в качестве которого удобно выбрать коэффициент внутри пластины, например  $A_2$ , после чего для перехода к нормированным величинам положить его равным единице. При этом получаем потенциалы в виде:

$$\psi_1 = (1 + g \cdot e^{-2kd\alpha}) \cdot e^{\frac{kd}{2} \cdot (1+\alpha)} \cdot e^{kx} \cdot e^{-i(k \cdot \cos \varphi)y} \cdot e^{-i(k \cdot \sin \varphi)z}; \quad (2.113)$$

$$\psi_2 = [e^{-k\alpha x} + g \cdot e^{-k\alpha d} \cdot e^{k\alpha x}] \cdot e^{-i(k \cdot \cos \varphi)y} \cdot e^{-i(k \cdot \sin \varphi)z}; \quad (2.114)$$

$$\psi_3 = (1 + g) \cdot e^{\frac{kd}{2} \cdot (1-\alpha)} \cdot e^{-kx} \cdot e^{-i(k \cdot \cos \varphi)y} \cdot e^{-i(k \cdot \sin \varphi)z}, \quad (2.115)$$

где  $\alpha$  и  $g$  представляют собой выражения:

$$\alpha = \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{\mu}}; \quad (2.116)$$

$$g = \frac{\mu\alpha - \nu \cos \varphi - 1}{\mu\alpha + \nu \cos \varphi + 1}, \quad (2.117)$$

где  $\mu$  и  $\nu$  определяются формулами (2.39)–(2.40).

Вводя обозначение:

$$\psi_{yz} = e^{-i(k \cdot \cos \varphi)y} \cdot e^{-i(k \cdot \sin \varphi)z}, \quad (2.118)$$

можно записать (2.113)–(2.115) в несколько более компактном виде:

$$\psi_1 = (1 + g \cdot e^{-2kd\alpha}) \cdot e^{\frac{kd}{2} \cdot (1+\alpha)} \cdot e^{kx} \cdot \psi_{yz}; \quad (2.119)$$

$$\psi_2 = [e^{-k\alpha x} + g \cdot e^{-k\alpha d} \cdot e^{k\alpha x}] \cdot \psi_{yz}; \quad (2.120)$$

$$\psi_3 = (1 + g) \cdot e^{\frac{kd}{2} \cdot (1-\alpha)} \cdot e^{-kx} \cdot \psi_{yz}. \quad (2.121)$$

Полученные выражения для потенциалов позволяют найти поле волны в соответствии с формулой

$$\mathbf{h} = \text{grad } \psi = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x}; \frac{\partial \psi}{\partial y}; \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\}. \quad (2.122)$$

При этом из (2.119)–(2.121) получаем поля во всех трех областях в виде:

в области 1:

$$h_{1x} = k \cdot (1 + g \cdot e^{-2kd\alpha}) \cdot e^{\frac{kd}{2} \cdot (1+\alpha)} \cdot e^{kx} \cdot \psi_{yz}; \quad (2.123)$$

$$h_{1y} = -ik \cos \varphi \cdot (1 + g \cdot e^{-2kd\alpha}) \cdot e^{\frac{kd}{2} \cdot (1+\alpha)} \cdot e^{kx} \cdot \psi_{yz}; \quad (2.124)$$

$$h_{1z} = -ik \sin \varphi \cdot (1 + g \cdot e^{-2kd\alpha}) \cdot e^{\frac{kd}{2} \cdot (1+\alpha)} \cdot e^{kx} \cdot \psi_{yz}; \quad (2.125)$$

в области 2:

$$h_{2x} = -k\alpha \cdot [e^{-k\alpha x} - g \cdot e^{-k\alpha d} \cdot e^{k\alpha x}] \cdot \psi_{yz}; \quad (2.126)$$

$$h_{2y} = -ik \cos \varphi \cdot [e^{-k\alpha x} + g \cdot e^{-k\alpha d} \cdot e^{k\alpha x}] \cdot \psi_{yz}; \quad (2.127)$$

$$h_{2z} = -ik \sin \varphi \cdot [e^{-k\alpha x} + g \cdot e^{-k\alpha d} \cdot e^{k\alpha x}] \cdot \psi_{yz}; \quad (2.128)$$

в области 3:

$$h_{1x} = -k \cdot (1 + g) \cdot e^{\frac{kd}{2} \cdot (1+\alpha)} \cdot e^{-kx} \cdot \psi_{yz}; \quad (2.129)$$

$$h_{1y} = -ik \cos \varphi \cdot (1 + g) \cdot e^{\frac{kd}{2} \cdot (1+\alpha)} \cdot e^{-kx} \cdot \psi_{yz}; \quad (2.130)$$

$$h_{1z} = -ik \sin \varphi \cdot (1 + g) \cdot e^{\frac{kd}{2} \cdot (1+\alpha)} \cdot e^{-kx} \cdot \psi_{yz}. \quad (2.131)$$

Полученные потенциалы, кроме полей, позволяют определить также и намагниченности. Вне магнитной среды в областях 1 и 3 намагниченности равны нулю. Внутри магнитной среды в области 2 намагниченности определяются из решения уравнения движения вектора намагниченности (Ландау–Лифшица) через переменное поле  $\mathbf{h}_2$ . Это поле, в соответствии с (2.122), выражается через потенциал  $\psi_2$ , в результате чего компоненты намагниченности, получаемые из (2.31), приобретают вид:

$$m_{2x} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{i\nu}{4\pi} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial y}; \quad (2.132)$$

$$m_{2y} = -\frac{i\nu}{4\pi} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\mu - 1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial y}. \quad (2.133)$$

При этом компонента  $m_{2z}$ , в соответствии с условиями линеаризации, равна единице.

Дифференцируя потенциал  $\psi_2$  (2.120), получаем:

$$m_{2x} = \frac{k}{4\pi} \cdot \left\{ [-(\mu - 1)\alpha + \nu \cos \varphi] \cdot e^{-k\alpha x} + g \cdot [(\mu - 1)\alpha + \nu \cos \varphi] \cdot e^{-k\alpha d} \cdot e^{k\alpha x} \right\} \cdot \psi_{yz}; \quad (2.134)$$

$$m_{2y} = i \frac{k}{4\pi} \cdot \left\{ [-(\mu - 1) \cos \varphi + \nu\alpha] \cdot e^{-k\alpha x} - g \cdot [(\mu - 1) \cos \varphi + \nu\alpha] \cdot e^{-k\alpha d} \cdot e^{k\alpha x} \right\} \cdot \psi_{yz}, \quad (2.135)$$

где  $\alpha$ ,  $g$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  определяются формулами (2.116)–(2.117), (2.39)–(2.40), а волновое число  $k$  соответствует решению дисперсионного соотношения (2.69).

### 2.3. Дисперсионные соотношения для некоторых простых структур

В этом разделе приведем без вывода полезные дисперсионные соотношения для некоторых часто используемых структур. Все соотношения будут приведены в полярной системе координат. В случае необходимости переход к декартовым координатам может быть осуществлен аналогично описанному в разд. 2.2.1 или в более подробном виде в [1, разд. 2.4.12].

#### 2.3.1. Свободная ферритовая пленка (ФСП)

Случай ферритовой пленки со свободными поверхностями соответствует классическому соотношению Дэймона–Эшбаха

$$\beta - 1 - 2\mu\alpha \operatorname{cth}(k d \alpha) = 0, \quad (2.136)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{\mu}}; \quad (2.137)$$

$$\beta = (\nu^2 - \mu^2 + \mu) \cos^2 \varphi - \mu, \quad (2.138)$$

а  $\mu$  и  $\nu$  определяются формулами (2.39), (2.40).

#### 2.3.2. Структура феррит-металл (ФМ)

Структура феррит-металл (ФМ) представляет собой ферритовую пленку, с одной стороны покрытую металлической поверхностью. Дисперсионное соотношение имеет вид

$$\beta - \nu\delta - \mu\alpha \cdot \operatorname{cth}(\alpha k d) = 0. \quad (2.139)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  определяются формулами (2.137)–(2.138) и (2.39)–(2.40), а также:

$$\delta = \cos \varphi. \quad (2.140)$$

#### 2.3.3. Структура феррит-диэлектрик-металл (ФДМ)

Структура феррит-диэлектрик-металл (ФДМ) представляет собой ферритовую пленку, с одной стороны от которой с зазором  $p$  расположена металлическая поверхность. Дисперсионное соотношение

имеет вид

$$\beta - 1 - 2\mu\alpha \cdot \operatorname{cth}(\alpha k d) + (\beta + 1 - 2\nu\delta) \cdot e^{-2kp} = 0, \quad (2.141)$$

где все обозначения совпадают с приведенными выше.

### 2.4. Магнитоэлектрические волны в неоднородных полях

Проделанное выше рассмотрение относится к распространению волн в полностью однородных структурах. Однако для практики весьма важным является вопрос о распространении МСВ в структурах с естественной или искусственно заданной неоднородностью. Важнейшим частным случаем здесь является неоднородное подмагничивание, позволяющее значительно расширить класс устройств на МСВ за счет расширения их функциональных возможностей. К таким устройствам относятся многоканальные фильтры, линии задержки, фазовращатели, различные невзаимные устройства и другие. Основные свойства распространения МСВ в неоднородных полях, а также их некоторые применения рассмотрены в монографии [1], здесь же ограничимся необходимым для понимания дальнейшего изложения кратким упоминанием об основных методах их исследования.

#### 2.4.1. Методы расчета распространения МСВ в неоднородных полях

При исследовании распространения магнитоэлектрических волн в неоднородно намагниченных структурах наиболее удобно использовать два метода: изочастотных кривых и Гамильтона–Аулда. Первый из этих методов удобен для качественного анализа траекторий волновых пучков МСВ и состоит в графическом построении векторов фазовой и групповой скоростей волны в каждой точке траектории на основе изочастотных кривых.

Общее представление о характере изочастотных кривых и соответствующем расположении векторов фазовой и групповой скоростей можно получить из рис. 2.2, б.

Метод изочастотных кривых расчета траекторий МСВ состоит в разбиении плоскости неоднородно намагниченной ферритовой пленки на участки, в пределах каждого из которых изменение поля настолько мало, что его можно считать однородным, после чего предполагается, что траектория распространения ПМСВ в пределах каждого такого участка остается прямолинейной, а на границах между участками преломляется при условии сохранения проекции волнового вектора на границу раздела. Соотношение между углами падения и преломления определяется с помощью изочастотных кривых, строящихся по отдельности для каждого участка в соответствии с полем на этом участке и определяемой этим полем частотой МСВ.

Метод Гамильтона–Аулда использует аналогию между распространяющейся волной и движущейся в поле частицей. Такая аналогия позволяет с использованием аппарата, построенного на основе классических уравнений Гамильтона, находить траектории распространения волновых пучков МСВ путем численного решения задачи Коши методом Эйлера или Рунге–Кутты.

Для метода Гамильтона Аулда приведем без вывода уравнения, позволяющие найти траекторию волны  $z(y)$ , а также зависимости волнового числа  $k$  и угла  $\varphi$  от координаты  $y$ . Эти уравнения имеют следующий вид [114, 173, 174]:

$$\frac{dz}{dy} = \left( k \sin \varphi - \frac{\partial k}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) \cdot \left( k \cos \varphi + \frac{\partial k}{\partial \varphi} \sin \varphi \right)^{-1}; \quad (2.142)$$

$$\frac{dk}{dy} = k \left( \frac{\partial k}{\partial y} \cos \varphi + \frac{\partial k}{\partial z} \sin \varphi \right) \cdot \left( k \cos \varphi + \frac{\partial k}{\partial \varphi} \sin \varphi \right)^{-1}; \quad (2.143)$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = - \left( \frac{\partial k}{\partial y} \sin \varphi - \frac{\partial k}{\partial z} \cos \varphi \right) \cdot \left( k \cos \varphi + \frac{\partial k}{\partial \varphi} \sin \varphi \right)^{-1}; \quad (2.144)$$

где  $k$  — длина волнового вектора ПМСВ,  $\varphi$  — угол между волновым вектором ПМСВ и осью  $Oy$ , а частные производные, входящие в правую часть приведенных уравнений, определяются из дисперсионного соотношения  $f(\omega, k, H(y, z)) = 0$  по правилам дифференцирования неявных функций [191].

Для более подробного ознакомления с методами изочастотных кривых и Гамильтона–Аулда читатель может обратиться к монографии [1].

## 2.5. Электромагнитная волна в среде с тензорными параметрами

Основным предметом рассмотрения в настоящей монографии являются магнитостатические волны и ферромагнитный резонанс. Однако в практике встречается ряд задач, когда приближение магнитостатики является недостаточным, и при рассмотрении магнитных явлений все же возникает необходимость учета полного электромагнитного характера распространяющихся волн. Поэтому вкратце рассмотрим основной математический аппарат, используемый в таких задачах. Будем в основном следовать работам [192, 193], остальные ссылки приведем по ходу текста.

### 2.5.1. Волна в бигиротропной среде

В большинстве сред магнитная проницаемость имеет тензорный гиротропный характер, поэтому рассмотрим свойства электромагнитной волны в подобной среде. Для симметрии математического аппарата положим среду бигиротропной, то есть такой, у которой как магнитная, так и диэлектрическая проницаемости обладают гиротропными свойствами [175–177].

Введем декартову систему координат  $Oxyz$  и направим ось  $Oz$  вдоль общей оси гиротропии, как это иллюстрируется рис. 2.3.

В такой геометрии тензоры проницаемостей для бигиротропной среды имеют вид [175–177]:

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix}; \quad (2.145)$$

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & i\varepsilon_a & 0 \\ -i\varepsilon_a & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}; \quad (2.146)$$

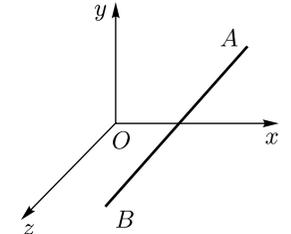


Рис. 2.3. Общая геометрия задачи.  $AB$  — ось гиротропии

Уравнения электродинамики в системе СИ в среде с тензорными параметрами имеют вид [178–184]:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \vec{\mu} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad (2.147)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon_0 \vec{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.148)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — электрическое и магнитное поля,  $\vec{\varepsilon}$  и  $\vec{\mu}$  — тензорные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды,  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  — электрическая и магнитная постоянные в системе СИ.

Среда предполагается однородной, компоненты тензоров могут быть комплексными. Полагая зависимость от времени в виде  $\exp(i\omega t)$ , получаем:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -i\omega\mu_0 \vec{\mu} \mathbf{H}; \quad (2.149)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = i\omega\varepsilon_0 \vec{\varepsilon} \mathbf{E}. \quad (2.150)$$

Составляющие правых частей уравнений (2.149) и (2.150) имеют вид:

$$\vec{\mu} \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu H_x + i\mu_a H_y \\ -i\mu_a H_x + \mu H_y \\ \mu_{\parallel} H_z \end{pmatrix}; \quad (2.151)$$

$$\vec{\varepsilon} \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon & i\varepsilon_a & 0 \\ -i\varepsilon_a & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon E_x + i\varepsilon_a E_y \\ -i\varepsilon_a E_x + \varepsilon E_y \\ \varepsilon_{\parallel} E_z \end{pmatrix}. \quad (2.152)$$

Записывая уравнения (2.149)–(2.150) по компонентам, получаем:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega\mu_0 (\mu H_x + i\mu_a H_y); \quad (2.153)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu_0 (-i\mu_a H_x + \mu H_y); \quad (2.154)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu_0 \mu_{\parallel} H_z; \quad (2.155)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = i\omega\varepsilon_0 (\varepsilon E_x + i\varepsilon_a E_y); \quad (2.156)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega\varepsilon_0 (-i\varepsilon_a E_x + \varepsilon E_y); \quad (2.157)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} E_z. \quad (2.158)$$

Положим, что координатно-временная составляющая волны имеет вид

$$\exp[i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})] = \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)]. \quad (2.159)$$

При этом получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow -ik_x, \quad \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow -ik_y, \quad \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -ik_z. \quad (2.160)$$

Из (2.153)–(2.158), раскрывая скобки, перенося все слагаемые в левую часть и обозначая через  $E_{x,y,z}$  и  $H_{x,y,z}$  амплитуды полей волны, получаем:

$$-ik_y E_z + ik_z E_y + i\omega\mu_0\mu H_x - \omega\mu_0\mu_a H_y = 0; \quad (2.161)$$

$$-ik_z E_x + ik_x E_z + \omega\mu_0\mu_a H_x + i\omega\mu_0\mu H_y = 0; \quad (2.162)$$

$$-ik_x E_y + ik_y E_x + i\omega\mu_0\mu_{\parallel} H_z = 0; \quad (2.163)$$

$$-ik_y H_z + ik_z H_y - i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_x + \omega\varepsilon_0\varepsilon_a E_y = 0; \quad (2.164)$$

$$-ik_z H_x + ik_x H_z - \omega\varepsilon_0\varepsilon_a E_x - i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_y = 0; \quad (2.165)$$

$$-ik_x H_y + ik_y H_x - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_{\parallel} E_z = 0. \quad (2.166)$$

Это — основная система уравнений для волны, распространяющейся в произвольном направлении в бигиротропной среде, имеющей ось гиротропии вдоль оси  $Oz$ . Частные случаи подобной системы для несколько другой геометрии приведены в работах [175–177, 194, 195]. В работах [196, 197] близкая система использовалась для исследования распространения волн в композиционной среде, содержащей ферритовые элементы в условиях ориентационного перехода. В настоящей работе эта система полагается в основу задачи о многослойной среде с магнитными параметрами.

### 2.5.2. Гирромагнитная и гироэлектрическая волны

Рассмотрим теперь простой частный случай — плоскую волну, волновой вектор которой ориентирован по нормали к оси гиротропии, то есть в плоскости  $Oxy$  при  $k_z = 0$ . Из (2.161)–(2.166) получаем:

$$-ik_y E_z + i\omega\mu_0\mu H_x - \omega\mu_0\mu_a H_y = 0; \quad (2.167)$$

$$ik_x E_z + \omega\mu_0\mu_a H_x + i\omega\mu_0\mu H_y = 0; \quad (2.168)$$

$$-ik_x E_y + ik_y E_x + i\omega\mu_0\mu_{\parallel} H_z = 0; \quad (2.169)$$

$$-ik_y H_z - i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_x + \omega\varepsilon_0\varepsilon_a E_y = 0; \quad (2.170)$$

$$ik_x H_z - \omega\varepsilon_0\varepsilon_a E_x - i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_y = 0; \quad (2.171)$$

$$-ik_x H_y + ik_y H_x - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_{\parallel} E_z = 0. \quad (2.172)$$

Эту систему уравнений можно разбить на две независимые группы — одну, содержащую только  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $E_z$  — уравнения (2.167), (2.168), (2.172), другую — содержащую только  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_z$  — уравнения (2.169), (2.170), (2.171). Умножаем уравнения (2.167), (2.169), (2.172) на  $-i$ , (2.170) на  $i$ , (2.171) на  $-1$ , (2.168) — оставляем без изменения. Объединяя уравнения в две группы, получаем две независимые системы уравнений, каждая из которых описывает свою независимую волну:

— гирромагнитная:

$$\omega\mu_0\mu H_x + i\omega\mu_0\mu_a H_y - k_y E_z = 0; \quad (2.173)$$

$$\omega\mu_0\mu_a H_x + i\omega\mu_0\mu H_y + ik_x E_z = 0; \quad (2.174)$$

$$k_y H_x - k_x H_y - \omega\varepsilon_0\varepsilon_{\parallel} E_z = 0. \quad (2.175)$$

— гироэлектрическая:

$$\omega\varepsilon_0\varepsilon E_x + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_a E_y + k_y H_z = 0; \quad (2.176)$$

$$\omega\varepsilon_0\varepsilon_a E_x + i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_y - ik_x H_z = 0; \quad (2.177)$$

$$k_y E_x - k_x E_y + \omega\mu_0\mu_{\parallel} H_z = 0. \quad (2.178)$$

Поскольку в данной задаче (многослойная структура с магнитными свойствами) главный интерес представляют вариации именно магнитной проницаемости, то будем считать диэлектрическую проницаемость скалярной величиной  $\varepsilon$ , то есть в выражении (2.152) положим  $\varepsilon_a = 0$ ,  $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon$ . Таким образом, дальше ограничимся рассмотрением только гирромагнитной волны.

### 2.5.3. Поля гирромагнитной волны

Рассмотрим гирромагнитную волну, геометрия полей для которой, совпадающая с принятой в [194–197], показана на рис. 2.4.

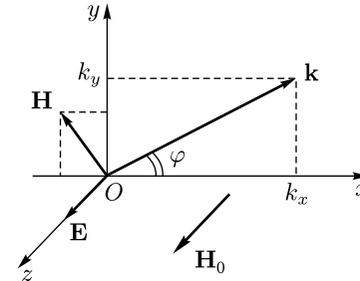


Рис. 2.4. Геометрия полей для гирромагнитной волны

Здесь гиротропия обеспечивается магнитным полем  $\mathbf{H}_0$ , направленным вдоль оси  $Oz$ , волновой вектор лежит в плоскости  $Oxy$ , электрическое поле волны направлено вдоль оси  $Oz$ , а магнитное — лежит в плоскости  $Oxy$ .

Система уравнений для  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $E_z$  имеет вид:

$$\omega\mu_0\mu H_x + i\omega\mu_0\mu_a H_y - k_y E_z = 0; \quad (2.179)$$

$$\omega\mu_0\mu_a H_x + i\omega\mu_0\mu H_y + ik_x E_z = 0; \quad (2.180)$$

$$k_y H_x - k_x H_y - \omega\varepsilon_0\varepsilon E_z = 0. \quad (2.181)$$

Из условия равенства нулю детерминанта этой системы получаем дисперсионное соотношение

$$k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2\mu_0(\mu^2 - \mu_a^2)\varepsilon_0\varepsilon}{\mu}. \quad (2.182)$$

Система (2.179)–(2.181) является однородной (справа — нули) и содержит три уравнения для трех неизвестных, поэтому два неизвестных можно выразить через третье. Полагая заданным  $E_z$ , получаем систему для определения  $H_x$  и  $H_y$ :

$$\omega\mu_0\mu H_x + i\omega\mu_0\mu_a H_y = k_y E_z; \quad (2.183)$$

$$\omega\mu_0\mu_a H_x + i\omega\mu_0\mu H_y = -ik_x E_z; \quad (2.184)$$

$$k_y H_x - k_x H_y = \omega\varepsilon_0\varepsilon E_z, \quad (2.185)$$

решая которую находим поля гиромангнитной волны в виде:

$$H_x = \frac{k_y\mu + ik_x\mu_a}{\omega\mu_0(\mu^2 - \mu_a^2)} \cdot E_z; \quad (2.186)$$

$$H_y = \frac{-k_x\mu + ik_y\mu_a}{\omega\mu_0(\mu^2 - \mu_a^2)} \cdot E_z. \quad (2.187)$$

Здесь, в отличие от изотропной среды, электромагнитная волна с волновым вектором вдоль оси  $Ox$ , кроме поперечных компонент электрического и магнитного полей  $E_z$  и  $H_y$ , имеет также продольную компоненту магнитного поля  $H_x$ . Причиной появления продольной магнитной составляющей поля электромагнитной волны является магнитная гиротропия.

#### 2.5.4. Переход к полярной системе координат

Вводя угол  $\varphi$  между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и осью  $Ox$  (рис. 2.4), получаем

$$k_x = k \cos \varphi; \quad (2.188)$$

$$k_y = k \sin \varphi, \quad (2.189)$$

а также, учитывая, что

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2, \quad (2.190)$$

из (2.182) получаем дисперсионное соотношение в следующем виде:

$$k^2 = \frac{\omega^2\mu_0(\mu^2 - \mu_a^2)\varepsilon_0\varepsilon}{\mu}, \quad (2.191)$$

откуда находим волновое число:

$$k = \omega \cdot \sqrt{\mu_0 \left( \mu - \frac{\mu_a^2}{\mu} \right) \varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (2.192)$$

Из (2.186) и (2.187) получаем компоненты вектора магнитного поля волны:

$$H_x = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{\parallel}}{\mu_0\mu(\mu^2 - \mu_a^2)}} \cdot (\mu \sin \varphi + i\mu_a \cos \varphi) \cdot E_z; \quad (2.193)$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{\parallel}}{\mu_0\mu(\mu^2 - \mu_a^2)}} \cdot (-\mu \cos \varphi + i\mu_a \sin \varphi) \cdot E_z. \quad (2.194)$$

#### 2.5.5. Импедансы и адмиттансы

Для удобства записи выражений (2.193)–(2.194), введем импедансы:

— линейномагнитный

$$Z_e = \frac{1}{\mu} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0\mu(\mu^2 - \mu_a^2)}{\varepsilon_0\varepsilon}}; \quad (2.195)$$

— гиромангнитный

$$Z_m = \frac{1}{\mu_a} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0\mu(\mu^2 - \mu_a^2)}{\varepsilon_0\varepsilon}}. \quad (2.196)$$

При этом поля волны (2.193)–(2.194) принимают вид:

$$H_x = \left( \frac{\sin \varphi}{Z_e} + i \cdot \frac{\cos \varphi}{Z_m} \right) \cdot E_z; \quad (2.197)$$

$$H_y = \left( -\frac{\cos \varphi}{Z_e} + i \cdot \frac{\sin \varphi}{Z_m} \right) \cdot E_z. \quad (2.198)$$

Наряду с импедансами поля гиромангнитной волны можно выразить через обратные им величины — адмиттансы, что при расчете полей электромагнитной волны в многослойной структуре [192] составляет определенное удобство:

— линейномагнитный:

$$A_e = \mu \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu(\mu^2 - \mu_a^2)}}; \quad (2.199)$$

— гиромангнитный:

$$A_m = \mu_a \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu(\mu^2 - \mu_a^2)}}. \quad (2.200)$$

При этом поля (2.193) и (2.194) принимают вид:

$$H_x = (A_e \cdot \sin \varphi + iA_m \cdot \cos \varphi) \cdot E_z; \quad (2.201)$$

$$H_y = (-A_e \cdot \cos \varphi + iA_m \cdot \sin \varphi) \cdot E_z. \quad (2.202)$$

Для волны, волновой вектор которой направлен вдоль оси  $Ox$ , то есть при  $\varphi = 0$ , поля приобретают особенно простой вид:

$$H_x = i \cdot \frac{E_z}{Z_m} = iA_m \cdot E_z; \quad (2.203)$$

$$H_y = -\frac{E_z}{Z_e} = -A_e \cdot E_z. \quad (2.204)$$

В выражении (2.203) коэффициент « $i$ » при  $x$ -компоненте магнитного поля означает изменение фазы на  $\pi/2$  в соответствии с выражением, следующим из формулы Эйлера

$$i = e^{i\pi/2}, \quad (2.205)$$

то есть

$$i \cdot e^{i(\omega t - k_1 x)} = e^{i(\omega t - k_1 x + \pi/2)}; \quad (2.206)$$

$$i \cdot e^{i(\omega t + k_1 x)} = e^{i(\omega t + k_1 x + \pi/2)}. \quad (2.207)$$

В случае изотропной среды, то есть при  $\mu_a = 0$ , ее свойства определяются линейномагнитными импедансом и адмиттансом, которые принимают классический вид [178–184]:

$$Z_e = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}}; \quad (2.208)$$

$$A_e = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}}. \quad (2.209)$$

При этом гиромагнитные импеданс и адмиттанс соответственно равны:

$$Z_m = \infty; \quad (2.210)$$

$$A_m = 0. \quad (2.211)$$

## 2.6. Падение гиромагнитной волны на границу раздела двух сред

Рассмотрим в качестве вспомогательной задачи отражение и прохождение гиромагнитной волны через плоскую границу раздела двух сред при нормальном падении. Частные случаи подобной задачи для среды, содержащей ферритовые элементы в условиях ориентационного перехода, рассмотрены в работах [196, 197], здесь же проведем рассмотрение в более общем виде.

Геометрия задачи, аналогичная принятой в [196, 197], иллюстрируется рис. 2.5. Показаны заполненные волноведущими средами две области пространства 1 и 2, разделенные плоской границей между ними. Ось гиротропии, определяемая заданием постоянного магнитного поля, лежит в плоскости границы.

Волна падает из области 1 на границу раздела между областями 1 и 2, частично проходит в область 2 и частично отражается обратно в область 1. Волновые векторы падающей  $\mathbf{k}_i$ , проходящей  $\mathbf{k}_t$  и отраженной  $\mathbf{k}_r$  волн перпендикулярны границе раздела сред. Электрические поля всех волн параллельны плоскости раздела, магнитные имеют две составляющие — параллельную и перпендикулярную плоскости раздела. Ось координат  $Ox$  перпендикулярна границе раздела, плоскость  $Oxy$  совпадает с плоскостью раздела сред, ось  $Oz$  параллельна вектору электрического поля падающей волны  $\mathbf{E}_i$ .

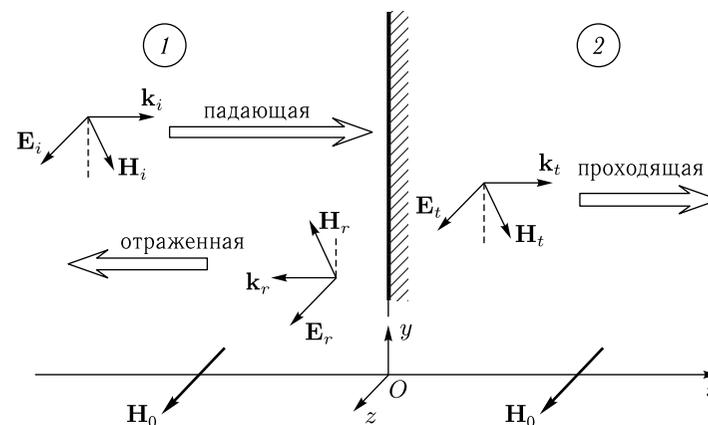


Рис. 2.5. Геометрия падения гиромагнитной волны на плоскую границу раздела двух сред

Полные координатно-временные зависимости полей имеют вид:

— для падающей волны

$$e^{i(\omega t - k_1 x)}, \quad (2.212)$$

— для отраженной волны

$$e^{i(\omega t + k_1 x)}, \quad (2.213)$$

— для проходящей волны

$$e^{i(\omega t - k_2 x)}. \quad (2.214)$$

Обозначая амплитуды электрических полей падающей, отраженной и проходящей волн через  $E_{i0}$ ,  $E_{r0}$  и  $E_{t0}$  соответственно, получаем координатные составляющие полей падающей, отраженной и проходящей

волн, выраженные через  $E_{i0}$ ,  $E_{r0}$ ,  $E_{t0}$  (записываем через адмиттансы только отличные от нуля компоненты):

— для падающей волны

$$E_{iz} = E_{i0} \cdot e^{-ik_1x} \text{ — задано;} \quad (2.215)$$

$$H_{ix} = iA_{m1} \cdot E_{i0} \cdot e^{-ik_1x}; \quad (2.216)$$

$$H_{iy} = -A_{e1} \cdot E_{i0} \cdot e^{-ik_1x}; \quad (2.217)$$

— для отраженной волны

$$E_{rz} = E_{r0} \cdot e^{ik_1x}; \quad (2.218)$$

$$H_{rx} = -iA_{m1} \cdot E_{r0} \cdot e^{ik_1x}; \quad (2.219)$$

$$H_{ry} = A_{e1} \cdot E_{r0} \cdot e^{ik_1x}; \quad (2.220)$$

— для проходящей волны

$$E_{tz} = E_{t0} \cdot e^{-ik_2x}; \quad (2.221)$$

$$H_{tx} = iA_{m2} \cdot E_{t0} \cdot e^{-ik_2x}; \quad (2.222)$$

$$H_{ty} = -A_{e2} \cdot E_{t0} \cdot e^{-ik_2x}. \quad (2.223)$$

Координатные составляющие полей по обе стороны от границы раздела сред равны:

— в среде 1

$$E_{1z} = E_{i0}e^{ik_1x} + E_{r0}e^{-ik_1x}; \quad (2.224)$$

$$H_{1x} = iA_{m1} \cdot E_{i0} \cdot e^{-ik_1x} - iA_{m1} \cdot E_{r0} \cdot e^{ik_1x}; \quad (2.225)$$

$$H_{1y} = -A_{e1} \cdot E_{i0} \cdot e^{-ik_1x} + A_{e1} \cdot E_{r0} \cdot e^{ik_1x}; \quad (2.226)$$

— в среде 2

$$E_{2z} = E_{t0} \cdot e^{-ik_2x}; \quad (2.227)$$

$$H_{2x} = iA_{m2} \cdot E_{t0} \cdot e^{-ik_2x}; \quad (2.228)$$

$$H_{2y} = -A_{e2} \cdot E_{t0} \cdot e^{-ik_2x}. \quad (2.229)$$

*Граничные условия* — непрерывность касательных составляющих полей на границе раздела, имеют вид

$$E_{1z}|_{x=0} = E_{2z}|_{x=0}, \quad (2.230)$$

$$H_{1y}|_{x=0} = H_{2y}|_{x=0}. \quad (2.231)$$

Подставляя (2.224)–(2.229) в (2.230), (2.231) и решая полученную систему относительно амплитуд отраженной и проходящей волн, а также учитывая (2.215)–(2.223), получаем поля всех волн в виде:

— поля падающей волны

$$E_{iz} = E_{i0} \text{ — задано;} \quad (2.232)$$

$$H_{ix} = iA_{m1} \cdot E_{i0}; \quad (2.233)$$

$$H_{iy} = -A_{e1} \cdot E_{i0}; \quad (2.234)$$

— поля отраженной волны

$$E_{rz} = \frac{A_{e1} - A_{e2}}{A_{e1} + A_{e2}} \cdot E_{i0}; \quad (2.235)$$

$$H_{rx} = iA_{m1} \cdot \frac{-A_{e1} + A_{e2}}{A_{e1} + A_{e2}} \cdot E_{i0}; \quad (2.236)$$

$$H_{ry} = A_{e1} \cdot \frac{A_{e1} - A_{e2}}{A_{e1} + A_{e2}} \cdot E_{i0}; \quad (2.237)$$

— поля проходящей волны

$$E_{tz} = \frac{2A_{e1}}{A_{e1} + A_{e2}} \cdot E_{i0}; \quad (2.238)$$

$$H_{tx} = iA_{m2} \cdot \frac{2A_{e1}}{A_{e1} + A_{e2}} \cdot E_{i0}; \quad (2.239)$$

$$H_{ty} = -A_{e2} \cdot \frac{2A_{e1}}{A_{e1} + A_{e2}} \cdot E_{i0}. \quad (2.240)$$

При этом для каждой из волн определяющим является электрическое поле вдоль оси  $Oz$ , а обе компоненты магнитного поля — поперечная вдоль оси  $Oy$  и продольная вдоль оси  $Ox$ , получаются в соответствии с выражениями (2.233)–(2.234), (2.236)–(2.237), (2.239)–(2.240), причем для отраженной волны надо учитывать изменение знака обеих этих составляющих за счет изменения направления распространения, как это видно из рис. 2.5.

Из выражений (2.232), (2.236) и (2.238) видно, что они с точностью до замены импедансов на адмиттансы совпадают с аналогичными выражениями полей для электромагнитной волны в изотропной среде [198–203]. Отсюда можно сделать вывод, что электрические поля волн в различных слоях многослойной структуры, содержащей гиротропные магнитные среды, подчиняются тем же законам распространения, что и поля в случае изотропных сред.

Это означает, что для определения полей волн в такой структуре можно использовать тот же пошаговый алгоритм, что и для одномерной волны, вариант которого для электромагнитной волны приведен в работе [192].

**Замечание.** Проведенное рассмотрение выполнено для случая, когда направления осей гиротропии во всех слоях структуры совпадают. Случай несовпадения таких направлений может отличаться от приведенного здесь и требует отдельного рассмотрения, выходящего за рамки настоящей работы.

## 2.7. Частотные свойства гиромангнитной волны

Тензорный характер магнитной проницаемости связан с явлением ферромагнитного резонанса, так что компоненты тензора зависят от частоты резонансным образом. Для дальнейшего рассмотрения важны будут не только значения полей, но и частотные характеристики распространяющейся гиромангнитной волны, поэтому обратимся теперь к ее частотным свойствам.

### 2.7.1. Характерные частоты

Отметим сначала некоторые параметры, важные для дальнейшего рассмотрения. Будем исходить из компонент тензора магнитной проницаемости, приведенных в разд. 2.1 в виде (2.11)–(2.12). Учитывая частотную зависимость этих компонент, выделим следующие характерные частоты:

— частота, где обе компоненты проницаемости  $\mu$  и  $\mu_a$  в отсутствие затухания расходятся, а при наличии затухания  $\mu$  проходит через единицу, а  $\mu_a$  — через нуль:

$$f_a = \gamma \cdot H; \quad (2.241)$$

— частота, где компонента проницаемости  $\mu$  в отсутствие затухания проходит через нуль:

$$f_b = \gamma \cdot (H + 2\pi M_0); \quad (2.242)$$

— частота, где параметр расходимости  $\vartheta$  (рассмотрен подробно далее в разд. 2.7.2) в отсутствие затухания проходит через нуль:

$$f_c = \gamma \cdot (H + 4\pi M_0); \quad (2.243)$$

В дальнейшем, кроме особо оговариваемых случаев, будем использовать следующие параметры магнитной среды: поле  $H = 10\,000$  Э; намагничённость  $4\pi M_0 = 1750$  Гс; гиромангнитная постоянная:  $\gamma = 2,80$  МГц/Э.

При этих параметрах характерные частоты имеют следующие значения:

$$f_a = 28,000 \text{ ГГц}; \quad f_b = 30,450 \text{ ГГц}; \quad f_c = 32,900 \text{ ГГц}.$$

### 2.7.2. Параметр расходимости

Важной характеристикой, в значительной степени определяющей свойства распространения волн, является параметр  $\vartheta$ , условно названный в работе [193] «параметром расходимости»:

$$\vartheta = \frac{\mu^2 - \mu_a^2}{\mu}. \quad (2.244)$$

Этот параметр входит в подкоренные выражения для волнового числа (2.192) и адмиттанса (2.199)–(2.200). Так что волновое число

и адмиттанс могут быть действительными только при положительности этого параметра. В случае его отрицательности волна не может распространяться.

Предварительное рассмотрение показывает, что в отсутствие затухания на частоте  $f_a$  этот параметр имеет особенность типа расходимости, на частотах  $f_b$  и  $f_c$  меняет знак, то есть проходит через нуль. В интервале между  $f_b$  и  $f_c$  этот параметр отрицателен, то есть этот интервал для распространения волны запрещен. В результате волновое число положительно везде на частотах ниже  $f_b$ , кроме небольшой окрестности около частоты  $f_a$ , а также на частотах выше  $f_c$ . Адмиттанс положителен только на частотах ниже  $f_a$  и выше  $f_c$ . Между частотами  $f_b$  и  $f_c$  он не существует (запрещенный интервал), а между частотами  $f_a$  и  $f_b$  является действительным, но имеет отрицательный знак.

Таким образом, когда параметр расходимости  $\vartheta$  отрицателен, волновое число и адмиттанс не существуют.

При принятых параметрах задачи можно указать приближенные границы запрещенных и разрешенных участков. Так предварительное рассмотрение показало, что при крайне слабом затухании ( $\alpha < 0,001$ ) в пределах исследованного интервала от 20 до 40 ГГц запрещенные участки имеют частоты: 28,0–28,2 ГГц; 30,2–33,0 ГГц. При этом разрешенные участки соответствуют частотам: 28,2–30,2 ГГц; 33,0–40,0 ГГц. При крайне сильном затухании  $\alpha > 0,10$  весь интервал частот разрешен.

После такого краткого введения обратимся к рассмотрению роли затухания в распространении волны более подробно.

### 2.7.3. Три интервала параметра затухания

По свойствам распространения волн можно выделить три характерных вида его поведения, различающихся значениями параметра затухания  $\alpha$ . Интервалы значений  $\alpha$ , определяющие эти свойства, можно условно охарактеризовать затуханием «слабым», «средним» и «сильным». Численное исследование позволило выявить два характерных значения параметра затухания, разделяющего эти три области. Так при  $H = 10\,000$  Э и  $4\pi M_0 = 1750$  Гс характерные значения равны: 0,04198 и 0,08401. Слабое затухание соответствует интервалу  $0 \leq \alpha \leq 0,04198$ , среднее — интервалу  $0,04198 \leq \alpha \leq 0,08401$ , сильное — интервалу  $0,08401 \leq \alpha < +\infty$ . Приведенные численные значения определяются особыми точками характерных значений компонент тензора магнитной проницаемости  $\mu$  и  $\mu_a$ , вследствие чего являются *точными* (в настоящей работе определялись с точностью до четырех значащих цифр).

Рассмотрим важные для дальнейшего характерные частотные свойства компонент тензора проницаемости  $\mu$  и  $\mu_a$ , параметра расходимости  $\vartheta$ , волнового числа  $k$  и адмиттанса  $A_e$  в упомянутых трех интервалах параметра затухания.

*Затухание слабое.* Слабое затухание соответствует интервалу  $0 \leq \alpha \leq 0,04198$ . Обратимся к рис. 2.6, где показаны частотные зави-

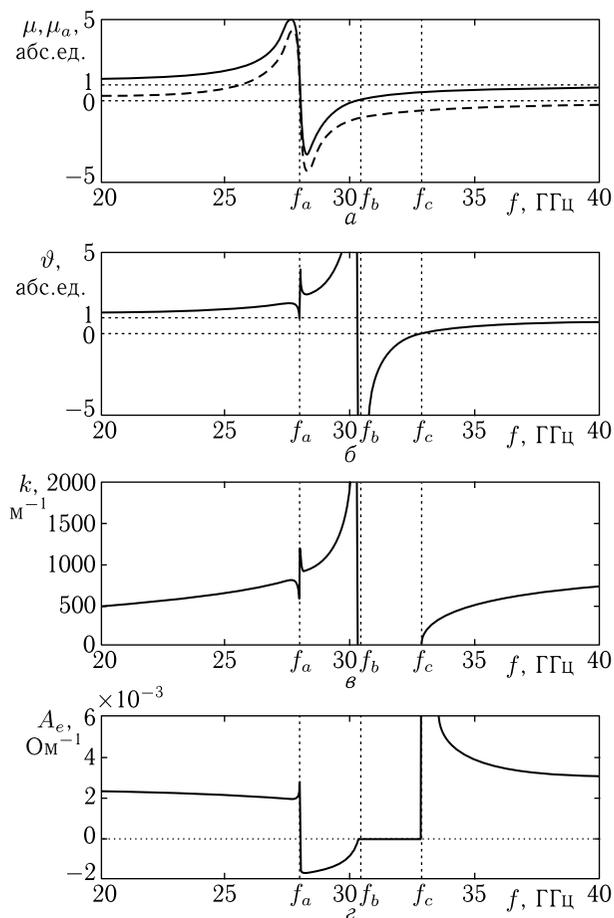


Рис. 2.6. Частотные зависимости характерных параметров распространения волны при слабом затухании:  $\alpha = 0,01$ : а — компоненты тензора проницаемости  $\mu$  — сплошная линия,  $\mu_a$  — пунктир; б — параметр расходимости  $\vartheta$ ; в — волновое число  $k$ ; г — адмиттанс  $A_e$ . Горизонтальные точечные линии соответствуют нулю и единице, вертикальные — значениям характерных частот  $f_a, f_b, f_c$

симости характерных параметров распространения волн при параметре затухания равном  $\alpha = 0,01$ .

Из рис. 2.6, а видно, что обе компоненты проницаемости проходят через нуль вблизи частоты  $f_a$ . Более подробное исследование показывает, что точно на частоте  $f_a$  компонента проницаемости  $\mu$  проходит через единицу, а компонента  $\mu_a$  — через нуль. По обе стороны от этой частоты при стремлении затухания к нулю обе компоненты расходятся на плюс-минус бесконечность. Компонента  $\mu$  проходит через нуль

вблизи частоты  $f_b$  (здесь — несколько ниже, но при  $\alpha \rightarrow 0$  проходит точно). Между  $f_a$  и  $f_b$  величина  $\mu$  отрицательна. При увеличении частоты  $\mu$  стремится к единице, а  $\mu_a$  к нулю, то есть разность квадратов этих компонент, находящаяся в числителе выражения для параметра расходимости  $\vartheta$  (2.244), всегда положительна.

На рис. 2.6, б приведена частотная зависимость для параметра расходимости  $\vartheta$ . Его знак здесь определяется соотношением знаков компонент проницаемости  $\mu$  и  $\mu_a$ . Видно, что этот параметр в областях ниже частоты  $f_b$  и выше  $f_c$  положителен, а между  $f_b$  и  $f_c$  — отрицателен. Это означает, что волновое число и адмиттанс между  $f_b$  и  $f_c$  определены быть не могут. Небольшая особенность параметра при частоте  $f_a$  отражает прохождение  $\mu$  и  $\mu_a$  через нуль, сопровождаемое по обе стороны от этой частоты расходимостью противоположных знаков. При  $\alpha \rightarrow 0$  подобную же расходимость испытывает и  $\vartheta$ .

На рис. 2.6, в приведена частотная зависимость для волнового числа  $k$ . Поскольку, согласно (2.192), волновое число пропорционально квадратному корню из  $\vartheta$ , то его частотная зависимость также подобна зависимости для  $\vartheta$ . Между частотами  $f_b$  и  $f_c$  волновое число не определено, а на частоте  $f_c$  равно нулю в силу равенства нулю на этой частоте параметра  $\vartheta$ . Небольшая особенность  $k$  на частоте  $f_a$  идентична подобной особенности  $\vartheta$ .

На рис. 2.6, г приведена частотная зависимость для адмиттанса  $A_e$ . В соответствии с (2.199) знак его определяется произведением корня из  $\vartheta$  на  $\mu$ . Поэтому в области между  $f_a$  и  $f_b$ , где  $\mu$  отрицательна (рис. 2.6, а), знак адмиттанса  $A_e$  тоже отрицательный. Между частотами  $f_b$  и  $f_c$  адмиттанс не определен в силу отрицательности  $\vartheta$ , а ниже  $f_a$  и выше  $f_c$  — положителен. В положительной окрестности частоты  $f_c$  адмиттанс расходится, что обусловлено прохождением через нуль параметра  $\vartheta$ .

Таким образом, можно сделать вывод, что при слабом затухании волна в магнитной среде может распространяться ниже частоты  $f_a$  и выше частоты  $f_c$  обычным порядком, то есть при положительном адмиттансе, между частотами  $f_a$  и  $f_b$  — при отрицательном адмиттансе, а интервал частот между  $f_b$  и  $f_c$  для распространения волны является полностью запрещенным.

*Затухание среднее.* Среднее затухание соответствует интервалу  $0,04198 \leq \alpha \leq 0,08401$ . Обратимся к рис. 2.7, где показаны частотные зависимости характерных параметров распространения волн при параметре затухания равном  $\alpha = 0,05$ .

Из рис. 2.7, а видно, что на частоте  $f_a$ , как и при слабом затухании, компонента проницаемости  $\mu$  проходит через единицу, а компонента  $\mu_a$  — через нуль. По обе стороны от этой частоты они проходят через небольшие экстремумы — ниже  $f_a$  через максимум, выше — через минимум. Обе зависимости подобны друг другу с учетом сдвига  $\mu$  вверх по отношению к  $\mu_a$  на единицу. Во всем интервале частот  $\mu$

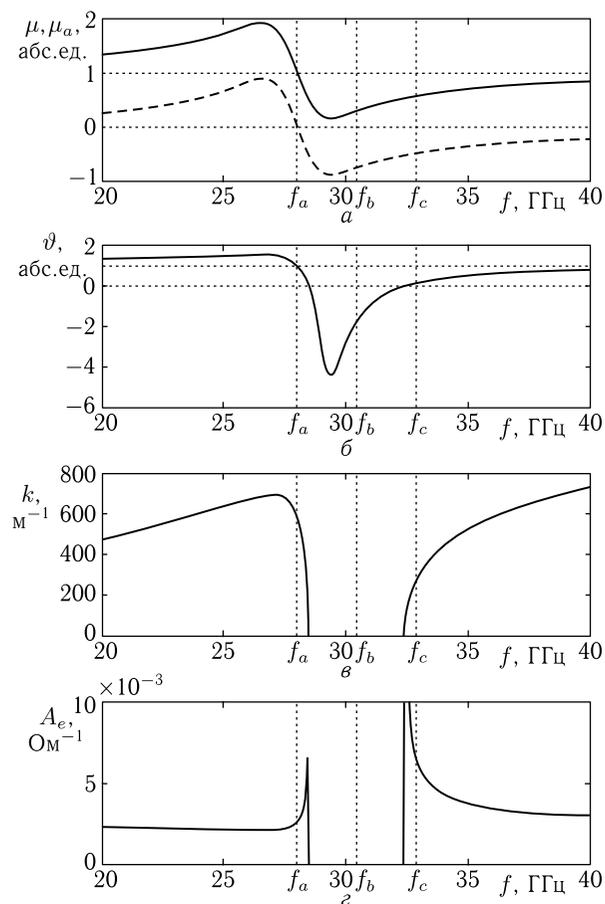


Рис. 2.7. Частотные зависимости характерных параметров распространения волны при среднем затухании:  $\alpha = 0,05$ . Все обозначения и остальные параметры — те же, что на рис. 2.6

положительна, тогда как  $\mu_a$  ниже  $f_a$  положительна, а выше — отрицательна.

В интервале частот, начинающемся несколько выше  $f_b$  и заканчивающемся несколько ниже  $f_c$ , абсолютная величина  $\mu_a$  превышает абсолютную величину  $\mu$ . В этом интервале разность квадратов  $\mu^2 - \mu_a^2$ , присутствующая в числителе выражения для  $\vartheta$ , отрицательна. Вне этого интервала по частоте в обе стороны абсолютная величина  $\mu$  всегда превышает абсолютную величину  $\mu_a$ , то есть разность  $\mu^2 - \mu_a^2$  всегда положительна.

На рис. 2.7, б приведена частотная зависимость для параметра расходимости  $\vartheta$ . Его знак здесь определяется соотношением знаков компо-

нент проницаемости  $\mu$  и  $\mu_a$ . Видно, что этот параметр ниже частоты  $f_a$ , на которой  $\mu$  и  $\mu_a$  проходят через нуль, положителен. Несколько выше частоты  $f_a$  он остается положительным, после чего меняет знак, оставаясь отрицательным почти до частоты  $f_c$ , немного не доходя до которой снова меняет знак, возвращаясь к положительному значению. Выше этого второго изменения знака параметр  $\vartheta$  всегда остается положительным. Таким образом, между  $f_a$  и  $f_c$ , несколько отступая от этих частот, имеется широкая область отрицательных значений параметра расходимости  $\vartheta$ . В этой области подкоренные выражения, входящие в волновое число (2.192) и адмиттанс (2.199) отрицательны, то есть для распространения волн эта область является запрещенной.

На рис. 2.7, в приведена частотная зависимость для волнового числа  $k$ . Поскольку, согласно (2.192), волновое число включает в себя квадратный корень из  $\vartheta$ , то в тех местах, где параметр  $\vartheta$  отрицателен, волновое число не определено. На краях своей области определения волновое число стремится к нулю, что обусловлено прохождением параметра  $\vartheta$  через нуль.

На рис. 2.7, г приведена частотная зависимость для адмиттанса  $A_e$ . Здесь также между  $f_a$  и  $f_b$ , несколько отступая от этих частот, имеется широкая запрещенная область, определяемая интервалом отрицательности параметра  $\vartheta$ . На краях этой области адмиттанс стремится к бесконечности, что также обусловлено прохождением параметра  $\vartheta$  через нуль.

Таким образом, можно сделать вывод, что при среднем затухании волна в магнитной среде может распространяться ниже частоты  $f_a$  и выше частоты  $f_c$  обычным порядком, то есть при положительном адмиттансе. Однако между частотами  $f_a$  и  $f_c$  имеется широкая запрещенная область, края которой близко примыкают к этим частотам, а волна может распространяться только в близких окрестностях частот  $f_a$  и  $f_c$  сверху и снизу соответственно.

*Затухание сильное.* Сильное затухание соответствует интервалу  $0,08401 \leq \alpha < +\infty$ . Обратимся к рис. 2.8, где показаны частотные зависимости характерных параметров распространения волн при параметре затухания равном  $\alpha = 0,10$ .

Из рис. 2.8, а видно, что, подобно случаям малого и среднего затухания, на частоте  $f_a$  компонента проницаемости  $\mu$  проходит через единицу, а компонента  $\mu_a$  — через нуль. По обе стороны от этой частоты обе компоненты проходят через небольшие экстремумы, которые здесь однако выражены слабее, чем в случае среднего затухания. Обе зависимости также подобны друг другу с учетом сдвига  $\mu$  вверх по отношению к  $\mu_a$  на единицу. Как и ранее, во всем интервале частот  $\mu$  положительна, тогда как  $\mu_a$  ниже  $f_a$  положительна, а выше — отрицательна. Однако теперь на любых частотах всегда абсолютная величина  $\mu$  превышает абсолютную величину  $\mu_a$ , в результате чего разность квадратов  $\mu^2 - \mu_a^2$ , присутствующая в числителе выражения

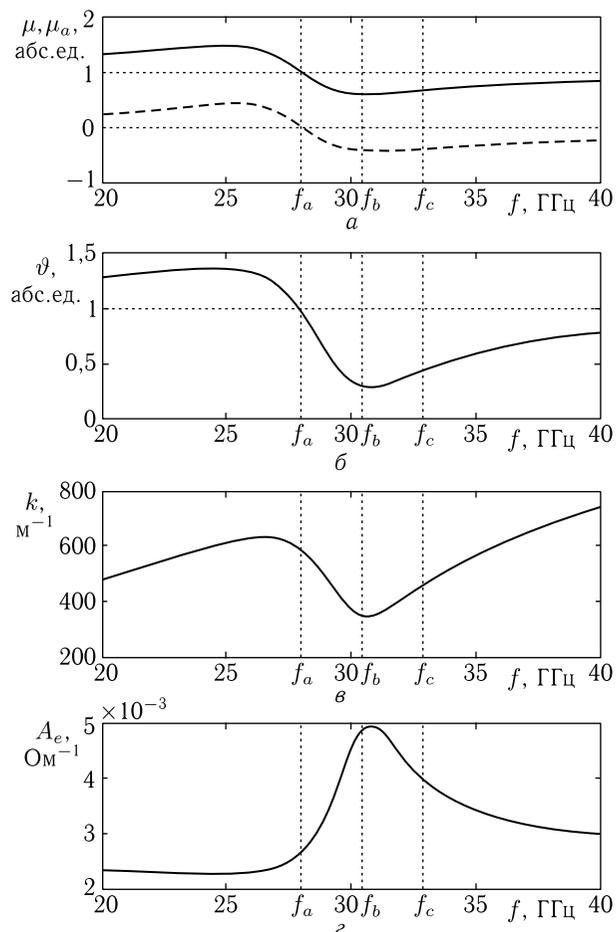


Рис. 2.8. Частотные зависимости характерных параметров распространения волны при сильном затухании:  $\alpha = 0,10$ . Все обозначения и остальные параметры — те же, что на рис. 2.6

для  $\vartheta$  (2.244), всегда положительна. При этом, с учетом того, что в рассматриваемом случае проницаемость  $\mu$  всегда положительна, параметр  $\vartheta$ , в соответствии с (2.244), также всегда является положительным, как это видно из рис. 2.8, б.

Это означает, что для волнового числа и адмиттанса запрещенных областей нет, то есть волна может существовать во всем интервале частот от минус до плюс бесконечности.

Поведение волнового числа и адмиттанса в этом случае иллюстрируется рис. 2.8, в и рис. 2.8, г соответственно. Видно, что оба эти параметра между частотами  $f_a$  и  $f_c$  хотя и испытывают изменение

знака производной, приводящее к наличию экстремумов, но существуют во всех точках шкалы частот, не имея ни нулей, ни каких-либо особенностей и тем более расхождений.

Таким образом, можно сделать вывод, что при сильном затухании волна в магнитной среде может распространяться при любых частотах.

**Замечание.** В ходе проведенного рассмотрения на основе отрицательности параметра расхожимости (2.244) сделан вывод о невозможности распространения при этом волны. Однако, как можно видеть из аналитических выражений для волнового числа (2.192) и адмиттанса (2.199), при отрицательной величине  $\vartheta$  алгебраическое вычисление корня приводит к комплексным выражениям. Вообще говоря, комплексное волновое число означает не просто отсутствие волны, а ее постепенное затухание по пути распространения. Можно полагать, что то же относится к адмиттансу. То есть волна на входе в участок среды с отрицательным значением  $\vartheta$  продолжает распространяться с амплитудой, падающей по экспоненциальному закону. То есть происходит что-то подобное входу волны в запердельный волновод [178–184]. При этом волна на выходе из такого участка будет иметь амплитуду значительно меньшую входной. Прямые свойства прецессии намагниченности, по-видимому, задействованы не будут, то есть волна будет распространяться как в диэлектрике без намагниченности. Такое поведение волны требует отдельного рассмотрения и выходит за рамки настоящей работы.

## 2.8. О корректности анализа волновых процессов в приближении магнитостатики

В основном материале настоящей монографии при расчете свойств электромагнитных волн, в том числе поверхностных, используется магнитостатическое приближение. Однако в работах [70–76, 145, 204] утверждается, что для ряда характеристик ПМСВ, в первую очередь потоков энергии, более целесообразно использование дисперсионного соотношения, полученного на основе решения полных уравнений Максвелла без магнитостатического приближения. При этом поверхностная волна в магнитной среде предполагается обладающей не только магнитным полем, как это получается в магнитостатическом приближении, но также и электрическим, так что диэлектрическая проницаемость материала магнитной пластины играет важную роль.

С другой стороны, при учете полных уравнений Максвелла, математический аппарат существенно усложняется. Введение потенциала исключается (так как  $\text{rot } \mathbf{b}$  зависит от электрического поля, то есть отличен от нуля). В результате вместо системы из четырех уравнений для компонент потенциала, определяющих дисперсионное соотношение в задаче Дэймона–Эшбаха [143], приходится решать систему из шести связанных уравнений для всех компонент магнитного и электрического

полей. Ситуация более или менее упрощается при распространении волны перпендикулярно направлению постоянного поля (то есть при  $\varphi = 0$ ). В этом случае полная система из шести уравнений распадается на две независимые системы по три уравнения для двух волн: гиромагнитной и гироэлектрической. В работе [74] рассмотрена гиромагнитная волна, то есть такая, в которой  $x$  и  $y$  компоненты магнитного поля волны определяются  $z$ -компонентой электрического поля той же волны, параллельной направлению постоянного магнитного поля.

В результате для таких поверхностных волн получено дисперсионное соотношение (формула (13) в работе [74]):

$$\left(\frac{1}{\mu} + \mu_{\perp}\right) \cdot k_y^2 - (\varepsilon_2 + \mu_{\perp}) \cdot k_0^2 + 2k_{1x}k_{2x} \operatorname{cth}(k_{2x}s) = 0, \quad (2.245)$$

в котором:

$$\mu = 1 + \frac{\Omega_H}{\Omega_H^2 - \Omega^2}; \quad (2.246)$$

где

$$\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}; \quad (2.247)$$

$$\Omega_H = \frac{H_i}{4\pi M_0}, \quad (2.248)$$

а также

$$\mu_{\perp} = \frac{\mu^2 - \nu^2}{\mu}; \quad (2.249)$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c}; \quad (2.250)$$

$$k_{1x} = \sqrt{k_y^2 - q_1^2}; \quad (2.251)$$

$$k_{2x} = \sqrt{k_y^2 - q_2^2}; \quad (2.252)$$

$$q_1^2 = k_0^2 \varepsilon_1; \quad (2.253)$$

$$q_2^2 = k_0^2 \varepsilon_2; \quad (2.254)$$

где  $\varepsilon_1$  — диэлектрическая проницаемость свободного пространства;  $\varepsilon_2$  — диэлектрическая проницаемость магнитной пластины;  $s$  — толщина магнитной пластины.

В задаче Дэймона–Эшбаха [143], решенной в магнитостатическом приближении, для ПМСВ получено дисперсионное соотношение (формула (2.69) в разд. 2.2.1):

$$\beta - 1 - 2\mu\alpha \operatorname{cth}(k d \alpha) = 0. \quad (2.255)$$

Разрешенное относительно волнового числа это соотношение имеет вид (2.72):

$$k = \frac{1}{2d\alpha} \cdot \ln \frac{\beta - 1 + 2\mu\alpha}{\beta - 1 - 2\mu\alpha}. \quad (2.256)$$

Здесь в соответствии с (2.70), (2.71), (2.40):

$$\alpha = \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{\mu}}; \quad (2.257)$$

$$\beta = (\nu^2 - \mu^2 + \mu) \cos^2 \varphi - \mu; \quad (2.258)$$

$$\nu = \frac{\Omega}{\Omega_H^2 - \Omega^2}, \quad (2.259)$$

а  $\mu$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega_H$  определяются выражениями (2.39), (2.4)–(2.5).

При распространении ПМСВ перпендикулярно направлению магнитного поля угол  $\varphi$  равен нулю, так что

$$\alpha = 1; \quad (2.260)$$

$$\beta = \nu^2 - \mu^2. \quad (2.261)$$

При этом дисперсионное соотношение (2.255) принимает вид

$$\nu^2 - \mu^2 - 1 - 2\mu \operatorname{cth}(k d) = 0, \quad (2.262)$$

или, разрешенное относительно волнового числа:

$$k = \frac{1}{2d} \cdot \ln \frac{\nu^2 - \mu^2 - 1 + 2\mu}{\nu^2 - \mu^2 - 1 - 2\mu}. \quad (2.263)$$

Заметим, что решение уравнения (2.245) относительно  $k_y$  с учетом (2.251), (2.252) вряд ли возможно, что также в ряде случаев создает дополнительные трудности.

Возвращаясь к уравнению (2.245), отметим, что полная система уравнений Максвелла переходит в уравнения магнитостатики при  $s \rightarrow \infty$  или  $k_0 \rightarrow 0$ . В этом случае второе слагаемое в (2.245) стремится к нулю. При этом также  $q_{1,2} \rightarrow 0$ , то есть  $k_{1x} \rightarrow k_y$ ,  $k_{2x} \rightarrow k_y$ . В результате выражение (2.245) переходит в следующее:

$$\frac{1 + \mu^2 - \nu^2}{\mu} + 2 \operatorname{cth}(k_y s) = 0, \quad (2.264)$$

которое, как легко видеть, с точностью до обозначений, совпадает с (2.262).

Таким образом, использование полных уравнений Максвелла, по сравнению с магнитостатическим приближением, вносит в дисперсионное соотношение (2.245) дополнительное слагаемое вида

$$P_m = -(\varepsilon_2 + \mu_{\perp}) \cdot k_0^2. \quad (2.265)$$

Чтобы влияние этого слагаемого было существенным, оно должно иметь тот же порядок, что и первое слагаемое в (2.245).

То есть полными уравнениями Максвелла следует пользоваться тогда, когда второе слагаемое сравнимо или больше первого. Если первое слагаемое по абсолютной величине значительно преобладает над вторым, то можно пользоваться магнитостатическим приближением.

Таким образом, условие применимости магнитостатического приближения можно записать в виде:

$$\left| \left( \frac{1}{\mu} + \mu_{\perp} \right) \cdot k_y^2 \right| \gg |-(\varepsilon_2 + \mu_{\perp}) \cdot k_0^2|. \quad (2.266)$$

Выделяя  $k_y$ , с учетом (2.249), получаем:

$$k_y \gg \sqrt{\left| \frac{\varepsilon_2 \mu + \mu^2 - \nu^2}{1 + \mu^2 - \nu^2} \right|} \cdot k_0. \quad (2.267)$$

Вводя обозначение

$$N_m = \sqrt{\left| \frac{\varepsilon_2 \mu + \mu^2 - \nu^2}{1 + \mu^2 - \nu^2} \right|}, \quad (2.268)$$

получаем условие применимости магнитостатического приближения в виде

$$k_y \gg N_m \cdot k_0. \quad (2.269)$$

Оценим величину  $N_m$  при типичных параметрах эксперимента, для чего обратимся к рис. 2.9, где показаны зависимости этого параметра от частоты при различных значениях диэлектрической проницаемости магнитной пластины  $\varepsilon_2$ . При принятых на рисунке параметрах спектр ПМСВ заключен между вертикальными пунктирными линиями.

Из рисунка можно видеть, что несмотря на довольно сложный характер зависимости  $N_m$  от частоты (природу которого на данном этапе рассматривать не будем), нигде во всем интервале существования

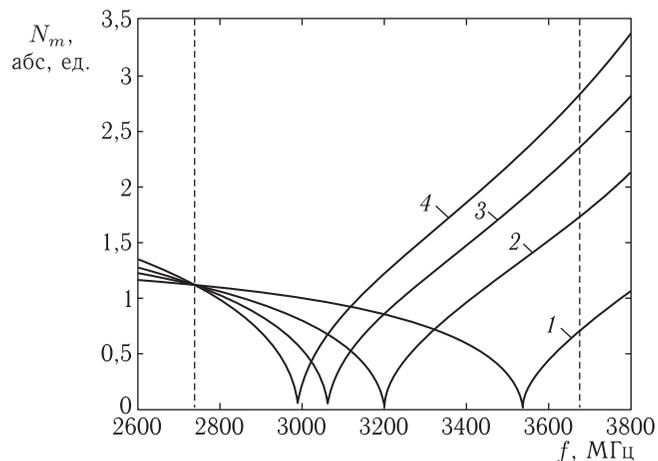


Рис. 2.9. Зависимость параметра  $N_m$  от частоты при различных значениях  $\varepsilon_2$ : 1 — 5, 2 — 10, 3 — 15, 4 — 20. Параметры построения:  $4\pi M_0 = 1750$  Гс,  $H = 437,5$  Э. Вертикальными пунктирными линиями показаны границы спектра ПМСВ, равные 2739 и 3675 МГц

ПМСВ при  $\varepsilon_2 \leq 20$  величина  $N_m$  не превышает 3 ед. Полагая достаточным для выполнения неравенства (2.269) превышения правой части над левой хотя бы на порядок, можно считать, что для возможности применения магнитостатического приближения величина  $k_y$  должна превышать  $k_0$  в 3–4 раза.

Заметим, что ситуация на рис. 2.9 относится к ферритовой пленке со свободными поверхностями. В структуре феррит-металл волновое число в начальной части спектра, как правило, меньше в несколько (3–5) раз, поэтому приведенная оценка становится несколько заниженной. Однако можно полагать, что и в этом случае для корректного применения магнитостатического приближения волновое число в феррите должно превышать таковое в свободном пространстве хотя бы на порядок.

Выполним теперь численные оценки степени применимости магнитостатического приближения к условиям реального эксперимента с учетом толщины ферритовой пластины. Пусть ферритовая пленка имеет намагниченность  $4\pi M_0 = 1750$  Гс (типичная величина для ЖИГ) и толщину 15 мкм. Поле положим равным 437,5 Э. При этом начальная частота спектра ПМСВ равна 2739 МГц. Этой частоте в свободном пространстве соответствует волновое число  $0,5737$  см<sup>-1</sup>. Длина волны 10,95 см.

В реальных экспериментах исследуются ПМСВ длиной не более 1,5 см, что связано с ограниченностью максимальных размеров доступных на сегодняшний день пленок ЖИГ (как правило, диски диаметром не более 10 см).

Расчет по разрешенному относительно  $k$  дисперсионному соотношению в магнитостатическом приближении (2.263) показывает, что при частоте 3000 МГц ( $k_0 = 0,628$  см<sup>-1</sup>,  $\lambda_0 = 10,00$  см) волновое число ПМСВ в пленке со свободными поверхностями составляет  $95$  см<sup>-1</sup>, что соответствует длине волны  $\lambda_m = 0,066$  см, а в структуре феррит-металл —  $23$  см<sup>-1</sup>, то есть длине волны  $\lambda_m = 0,273$  см. При частоте 3200 МГц ( $k_0 = 0,670$  см<sup>-1</sup>,  $\lambda_0 = 9,38$  см) эти же величины составляют  $205$  см<sup>-1</sup> ( $\lambda_m = 0,031$  см) и  $42$  см<sup>-1</sup> ( $\lambda_m = 0,149$  см) соответственно. Таким образом, можно считать, что во всех реальных экспериментах с ПМСВ в пленках ЖИГ условие применимости магнитостатического приближения выполняется с высокой точностью.

Однако, при увеличении толщины пленки условия применимости магнитостатического приближения даже для пленки со свободными поверхностями ухудшаются. Это особенно становится заметным при переходе к достаточно толстым пластинам. Так при толщине пластины в 0,1 см волновое число ПМСВ на частоте 3000 МГц составляет  $1,435$  см<sup>-1</sup> ( $\lambda_m = 4,38$  см), а при толщине 1,0 см волновое число падает до  $0,144$  см<sup>-1</sup> ( $\lambda_m = 14,44$  см). Такие волновые числа уже сравнимы с волновым числом в свободном пространстве, то есть применимость магнитостатического приближения в столь толстых пластинах ограничивается.

Тем не менее, даже в толстых пластинах использование магнитостатического приближения возможно, но на более высоких частотах. Так на частоте 3600 МГц волновое число ПМСВ при толщине пластины в 1 см составляет  $1,200 \text{ см}^{-1}$  ( $\lambda_m = 5,24 \text{ см}$ ), а при толщине 0,1 см — уже  $12,00 \text{ см}^{-1}$  ( $\lambda_m = 0,524 \text{ см}$ ), то есть магнитостатическое приближение опять становится применимым.

Резюмируя сказанное, можно сделать вывод, что в рамках задач, рассмотренных в настоящей монографии, применение магнитостатического приближения для волн в условиях, близких к реальным экспериментам, то есть для материалов типа ЖИГ в виде пленок толщиной 10–100 мкм, частот порядка 1–10 ГГц и полей 500–3000 Э, вполне допустимо для волновых чисел более  $3\text{--}5 \text{ см}^{-1}$ , то есть для ПМСВ короче 1–2 см.

В остальных случаях, то есть при выходе параметров распространяющихся волн за эти рамки, следует пользоваться полными уравнениями типа рассмотренных в предыдущих разд. 2.5–2.6.

## Выводы по главе 2

Данная глава посвящена описанию основного математического аппарата, используемого при расчете свойств магнитостатических волн. В качестве дополнения рассмотрены также некоторые свойства электромагнитных волн в гиротропной среде. Основные полученные в настоящей главе результаты сводятся к следующим.

1. Для случая гиротропной среды рассмотрен общий вид тензора магнитной проницаемости, являющегося основой для описания свойств магнитостатических и электромагнитных волн в среде, обладающей гиромангнитными свойствами.

2. Рассмотрена дисперсия магнитостатических волн в однородно намагниченной ферритовой пленке во свободными поверхностями (задача Дэймона–Эшбах). Путем решения краевой задачи для потенциала получено дисперсионное соотношение в декартовой и полярной системах координат, отражающее свойства дисперсии объемных и поверхностных магнитостатических волн. Получен угол отсечки для ПМСВ и приведена графическая иллюстрация закона дисперсии. Рассмотрен вектор групповой скорости, приведена методика расчета его величины и направления на основе дисперсионного соотношения. Найдены потенциалы, поля и намагниченности распространяющейся волны. Приведены дисперсионные соотношения для структур феррит-металл и феррит-диэлектрик-металл.

3. Рассмотрены методы расчета распространения магнитостатических волн в неоднородно намагниченных пленках и структурах на их основе. Приведены основы методов изочастотных кривых и Гамильтона–Аулда, отмечены области их применимости, кратко перечислены достоинства и недостатки.

4. На основе полных уравнений электродинамики рассмотрены свойства электромагнитной волны в бигиротропной среде. Для случая распространения перпендикулярно направлению постоянного магнитного поля выявлены два основных вида волн — гиромангнитные и гиروهлектрические. Для гиромангнитной волны найдены поля, импедансы и адмиттансы — линейномангнитный и гиромангнитный. Рассмотрено падение гиромангнитной волны на границу раздела двух сред, найдены поля отраженной и проходящей волн.

5. Введен в рассмотрение «параметр расходимости», представляющий собой комбинацию из компонент тензора магнитной проницаемости, определяющий частотные области существования действительных адмиттансов, а также волновых чисел распространяющихся волн. Показано, что в многослойной структуре с тензорными параметрами имеются области частот, где распространение волн невозможно, что определяется отрицательным знаком параметра расходимости. Найдены три характерные частоты, определяющие границы упомянутых областей, выявлена их зависимость от намагниченности среды и величины создающего гиротропию магнитного поля.

6. По величине параметра затухания магнитных колебаний выделены три характерных области: слабого, среднего и сильного затухания. Показано, что в случае слабого затухания в области частот между двумя крайними характерными значениями распространение гиромангнитных волн запрещено, тогда как вне этой области — возможно. В случае сильного затухания какие-либо запрещения для распространения гиромангнитных волн отсутствуют.

7. Рассмотрен вопрос о корректности использования приближения магнитостатики в задачах о распространении волн в гиротропных средах. Выявлено допустимое условие его применимости, состоящее в превышении на заданной частоте значения волнового числа в гиромангнитной среде над величиной волнового числа в свободном пространстве на той же частоте в несколько (не менее 3–4) раз.

## Глава 3

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ МСВ В РЕШЕТКАХ, ПЕРИОД КОТОРЫХ ЗНАЧИТЕЛЬНО МЕНЬШЕ ДЛИНЫ ВОЛНЫ

В соответствии с принятым порядком изложения, рассмотрим сначала физические явления, сопровождающие распространение магнито-статических волн в решетчатых структурах, период которых значительно меньше длины распространяющейся волны. Будем, в основном, следовать работам [79–90].

### 3.1. Основные уравнения и граничные условия

В этом разделе рассмотрим основные физические положения, лежащие в основе постановки задачи о распространении волны под металлической решетчатой структурой, в первую очередь просачивание волны через щели между штрихами решетки.

#### 3.1.1. Общая геометрия задачи

Рассмотрим дисперсионные свойства МСВ в касательно намагниченной структуре диэлектрик-феррит-диэлектрик-решетка-диэлектрик (ДФДРД, или короче ФДР). Общая геометрия задачи показана на рис. 3.1.

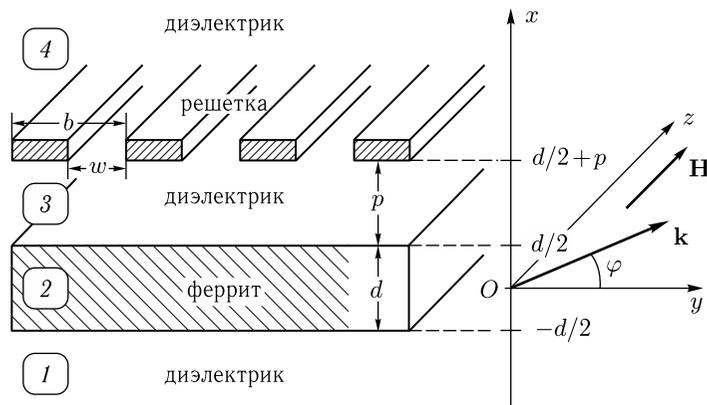


Рис. 3.1. Общая геометрия задачи

Основу структуры составляет ферритовый слой (2), снаружи к которому примыкают два диэлектрических слоя (1) и (3), за одним из слоев диэлектрика расположена металлическая решетка, позади которой расположен еще один диэлектрический слой (4). Толщина ферритового слоя (2) равна  $d$ , толщина диэлектрического слоя (3), расположенного между ферритом и решеткой, равна  $p$ . Решетку считаем бесконечно тонкой, выполненной в виде прямых металлических полос, параллельных направлению магнитного поля. Период решетки равен  $b$ , ширина щели —  $w$ . Намагниченность феррита равна  $M_0$ , а его диэлектрическая проницаемость равна единице. Для всех слоев диэлектрика как диэлектрическая, так и магнитная проницаемости равны единице. В простейшем случае диэлектриком является воздух (или пустота). Начало системы координат находится в середине ферритового слоя толщины  $d$ , плоскость  $Oyz$  параллельна плоскости этого слоя, а ось  $Ox$  ей перпендикулярна. Поле  $H_0$  приложено вдоль плоскости структуры параллельно оси  $Oz$ . Структура в плоскости  $Oyz$  безгранична, внешние слои диэлектрика в направлении, перпендикулярном плоскости структуры, также безграничны. МСВ распространяются в плоскости структуры  $Oyz$  вдоль верхней (по рисунку) поверхности феррита (при  $x = d/2$ ) в положительном направлении оси  $Oy$ . Угол между направлением волнового вектора МСВ  $\mathbf{k}$  и осью  $Oy$  обозначен через  $\varphi$ .

#### 3.1.2. Качественные предпосылки эффекта просачивания

В приближении магнитостатики задача сводится к уравнениям Уо-кера внутри феррита и Лапласа вне феррита с граничными условиями на поверхностях ферритового слоя (при  $x = \pm d/2$ ), аналогичными условиям на свободной поверхности феррита [143]. Граничные условия на поверхности, где располагается решетка (при  $x = d/2 + p$ ), состоят в непрерывности касательной компоненты поля и нормальной компоненты индукции при переходе из среды (3) в среду (4). Поскольку решетка состоит из периодической по координате  $y$  системы металлических проводящих полос, то условия на границе при  $x = d/2 + p$  по этой координате также периодически меняются. Между штрихами решетки металла нет, поэтому поле в области (4) является непосредственным продолжением поля в области (3). На штрихах решетки при идеальной проводимости металла нормальная компонента индукции равна нулю. Таким образом, граничное условие при  $x = d/2 + p$  зависит от координаты  $y$  периодическим образом, благодаря чему решение уравнения Лапласа в области (3) при учете этого граничного условия также должно иметь аналогичную периодическую зависимость от  $y$ . Полное решение задачи с периодическими граничными условиями хотя, наверное, и возможно, но в данном случае неоправданно громоздко. Действительно, наиболее серьезным на сегодняшний день надежным экспериментальным результатом является аномально крутой спад дисперсионной кривой для обратных волн, обусловленный

наличием решетки [70–75]. Никакой корреляции между длиной волны и периодом решетки в эксперименте не выявлено. Известно лишь, что период решетки значительно меньше длины волны, то есть изменение граничного условия на длине волны происходит много раз. Поэтому можно предположить, что условие на поверхности решетки по координате  $y$  является не разрывным, а непрерывным и состоит в том, что нормальная компонента индукции на этой поверхности равна не нулю, а некоторой конечной величине, меньшей, чем она была бы в отсутствие решетки. Такое условие отражает тот факт, что поле не полностью экранируется решеткой, а частично просачивается через нее в свободное пространство.

### 3.1.3. Параметр экранирования

Для количественного выражения частичного просачивания поля введем «параметр экранирования» решетки  $g$  такой, что  $0 \leq g \leq 1$ . При этом значении  $g = 0$  соответствует полному открытию щелей, когда ширина штрихов  $w$  равна нулю, то есть решетка полностью проницаема, и структура в целом ведет себя как ферритовая пластина со свободной поверхностью, тогда как значение  $g = 1$  соответствует полному закрытию щелей, когда ширина штрихов  $w$  равна периоду решетки  $b$ , то есть решетка полностью непроницаема и ведет себя как сплошной слой металла, являющийся сплошным экраном. Промежуточные значения  $g$  соответствуют решетке с той или иной шириной штрихов  $w$  по отношению к периоду  $b$ .

### 3.1.4. Потенциал в условиях просачивания

В приведенной постановке задача решается методом разделения переменных, в результате чего находим потенциал в виде

$$\psi_i = X_i \cdot e^{-ik_y y} \cdot e^{-ik_z z} \cdot e^{i\omega t}, \quad (3.1)$$

где:  $i = 1, 2, 3, 4$ . При этом

$$X_1 = A_1 \cdot e^{k_e x}; \quad (3.2)$$

$$X_2 = A_2 \cdot e^{k_i x} + B_2 \cdot e^{-k_i x}; \quad (3.3)$$

$$X_3 = gA_3 \cdot e^{k_e x} + B_3 \cdot e^{-k_e x}; \quad (3.4)$$

$$X_4 = (1 - g)B_3 \cdot e^{-k_e x} + g \cdot Q, \quad (3.5)$$

где буквами  $k_i$  и  $k_e$  обозначены  $x$ -компоненты волновых чисел внутри и вне феррита соответственно, а также учтено, что потенциал в области  $1$  должен спадать при  $x \rightarrow -\infty$ , а в областях  $3$  и  $4$  — при  $x \rightarrow +\infty$ , причем за пределами решетки спад в этих двух последних областях должен быть одинаковым. При такой записи  $k_e$  должно быть действительным, а  $k_i$  может быть как действительным, так и мнимым, в зависимости от поверхностного или объемного характера волны.

Заметим, что в области  $4$  в составляющую потенциала  $X_4$  (3.5) в данный момент добавлена не определенная пока величина  $Q$ , которую будем считать постоянной. Правомерность такого добавления основывается на том, что потенциал в общем случае определяется с точностью до постоянной величины. Очевидно, что значение этой величины на решении уравнения Лапласа и на амплитуду волны в этой области не сказывается, так как то и другое определяется производной от потенциала по координате  $x$ , которая при постоянном значении  $Q$  равна нулю. Физический смысл и значение постоянной  $Q$  будет определено далее.

Зависимость потенциала от координаты  $y$  имеет вид

$$Y = e^{-ik_y y}, \quad (3.6)$$

что при действительном  $k_y$  соответствует волне вида  $\exp(\omega t - k_y y)$ , распространяющейся вдоль оси  $Oy$ . Составляющая волны вдоль оси  $Oz$  при этом будет определяться  $z$ -компонентой волнового числа в виде  $\exp(\omega t - k_z z)$ , где  $k_z$  соответствует выражению:

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_y^2}, \quad (3.7)$$

а значение  $k$  определяется законом дисперсии, который будет получен далее.

Можно видеть, что записанное в виде (3.2)–(3.5) решение при  $g = 0$ , то есть при полностью открытых щелях, в области  $3$  соответствует экспоненциальному спаду потенциала и при достаточно больших значениях  $p$  стремящегося к нулю. Решение в области  $4$  без учета  $Q$  (то есть при  $Q = 0$ ), совпадает с решением в области  $3$  тождественно. Постоянная  $Q$  в любом случае обеспечивает лишь постоянный уровень потенциала, на амплитуду волны не влияющий.

При  $g = 1$ , то есть когда щели полностью закрыты, потенциал в области  $3$  определяется суммой двух экспонент с противоположными направлениями спада, что соответствует полям волны в промежутке между поверхностью феррита и слоем сплошного металла. В области  $4$  потенциал при этом равен постоянной величине  $Q$ , что соответствует равенству полей волны нулю, как это и должно быть за пределами сплошного металлического экрана.

### 3.1.5. Граничные условия и потенциал при наличии просачивания

Запишем теперь граничные условия. С учетом гиротропных свойств феррита они имеют вид:

— при  $x = -d/2$ :

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} \cdot Y \Big|_{x=-d/2} = \mu \frac{\partial X_2}{\partial x} \cdot Y + i\nu X_2 \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} \Big|_{x=-d/2}; \quad (3.8)$$

$$X_1 \Big|_{x=-d/2} = X_2 \Big|_{x=-d/2}; \quad (3.9)$$

— при  $x = d/2$ :

$$\mu \frac{\partial X_2}{\partial x} \cdot Y + i\nu X_2 \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} \Big|_{x=d/2} = \frac{\partial X_3}{\partial x} \cdot Y \Big|_{x=d/2}; \quad (3.10)$$

$$X_2 \Big|_{x=d/2} = X_3 \Big|_{x=d/2}; \quad (3.11)$$

— при  $x = d/2 + p$ :

$$\frac{\partial X_3}{\partial x} \Big|_{x=d/2+p} = \frac{\partial X_4}{\partial x} \Big|_{x=d/2+p}; \quad (3.12)$$

$$X_3 \Big|_{x=d/2+p} = X_4 \Big|_{x=d/2+p}. \quad (3.13)$$

Дальнейший ход решения задачи состоит в подстановке решения (3.2)–(3.5) в граничные условия (3.8)–(3.13), что дает систему шести линейных алгебраических уравнений, правые части которых равны нулю. Условием нетривиальности решения такой системы является равенство нулю ее определителя, что и дает дисперсионное соотношение.

В такой системе традиционными неизвестными являются  $A_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ , которые являются коэффициентами при зависящих от координаты  $x$  экспонентах. Этим неизвестных всего пять, тогда как граничных условий — шесть. Последовательное решение уравнения Лапласа в области 4 дало бы неизвестный коэффициент, который следовало бы обозначить через  $B_4$ , то есть решение в этой области приняло бы вид:

$$X_4 = (1 - g)B_4 \cdot e^{-k_e x}. \quad (3.14)$$

При этом число неизвестных равнялось бы шести, то есть совпадало бы с количеством уравнений.

Однако непосредственное решение такой системы показывает, что параметр экранирования  $g$  при раскрытии определителя входит как коэффициент во все его слагаемые, так что может быть вынесен за скобку, что при условии равенства определителя нулю позволяет сократить получаемое уравнение на  $g$ , поэтому в дисперсионное соотношение этот параметр не войдет. Очевидно, такое положение физическому смыслу задачи не соответствует.

С другой стороны, из сравнения (3.4) с (3.14) при  $g = 0$  прямо следует, что  $B_4$  надо положить равным  $B_3$ , как это и сделано в формуле (3.5). Тогда на шесть получаемых из граничных условий (3.8)–(3.13) уравнений остается только пять неизвестных  $A_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ , так что система является переопределенной, то есть несовместной. В качестве шестого неизвестного можно добавить постоянную добавку к величине  $X_4$ , которая при  $g = 0$  также равнялась бы нулю, что требуется для совпадения в этом случае решения  $X_4$  с  $X_3$ . Такая добавка и введена в выражение (3.5) в виде произведения постоянной величины  $Q$  на постоянную же величину  $g$ . Таким образом, на шесть уравнений получается шесть неизвестных  $A_1, A_2, B_2, A_3, B_3$  и  $Q$ , то есть система становится разрешимой.

Однако приведенная система шести неизвестных является несимметричной в том отношении, что неизвестные  $A_1, A_2, B_2, A_3, B_3$  содержатся при экспонентах, зависящих от  $x$ , тогда как при неизвестной  $Q$  никакой экспоненты нет. Несимметричную неизвестную  $Q$  можно исключить с помощью условия (3.13). Так, подставляя  $X_3$  согласно (3.4) и  $X_4$  согласно (3.5) в (3.13), после чего выражая из полученного уравнения  $Q$ , находим

$$Q = A_3 \cdot e^{k_e d/2} \cdot e^{k_e p} + B_3 \cdot e^{-k_e d/2} \cdot e^{-k_e p}. \quad (3.15)$$

Таким образом, полное решение (3.2)–(3.5) принимает вид:

$$X_1 = A_1 \cdot e^{k_e x}; \quad (3.16)$$

$$X_2 = A_2 \cdot e^{k_i x} + B_2 \cdot e^{-k_i x}; \quad (3.17)$$

$$X_3 = gA_3 \cdot e^{k_e x} + B_3 \cdot e^{-k_e x}; \quad (3.18)$$

$$X_4 = (1 - g)B_3 \cdot e^{-k_e x} + g \cdot (A_3 \cdot e^{k_e d/2} \cdot e^{k_e p} + B_3 \cdot e^{-k_e d/2} \cdot e^{-k_e p}). \quad (3.19)$$

Из шести граничных условий (3.8)–(3.13) остается только пять — (3.8)–(3.12), так как условие (3.13) при выборе  $X_3$  и  $X_4$  в виде (3.18) и (3.19) выполняется тождественно.

### 3.2. Дисперсионное соотношение

Рассмотрим теперь непосредственно получение дисперсионного соотношения для структуры феррит-диэлектрик-решетка с учетом эффекта просачивания. Сначала обратимся к декартовой системе координат, после чего перейдем к полярной.

#### 3.2.1. Соотношение в декартовой системе координат

Подставляя решение (3.16)–(3.19) в граничные условия (3.8)–(3.12), получаем систему уравнений:

$$A_1 k_e e^{-\delta} - A_2 \varepsilon_1 e^{-\rho} + B_2 \varepsilon_2 e^\rho = 0; \quad (3.20)$$

$$A_1 e^{-\delta} - A_2 e^{-\rho} - B_2 e^\rho = 0; \quad (3.21)$$

$$A_2 \varepsilon_1 e^\rho - B_2 \varepsilon_2 e^{-\rho} - A_3 g k_e e^\delta + B_3 k_e e^{-\delta} = 0; \quad (3.22)$$

$$A_2 e^\rho + B_2 e^{-\rho} - A_3 g e^\delta + B_3 e^{-\delta} = 0; \quad (3.23)$$

$$A_3 e^\delta e^\eta - B_3 e^{-\delta} e^{-\eta} = 0, \quad (3.24)$$

где подобно (2.63)–(2.66) введены обозначения:  $\delta = k_e d/2$ ,  $\rho = k_i d/2$ ,  $\varepsilon_{1,2} = \mu k_i \pm \nu k_y$ , а также  $\eta = \delta + p$ .

Эта система из пяти уравнений содержит пять неизвестных  $A_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ . Последнее уравнение дает простую связь между  $A_3$  и  $B_3$ ,

что позволяет сразу выразить одно из них через другое. Для дальнейших выкладок удобнее выразить  $A_3$  через  $B_3$ , то есть положить:

$$A_3 e^\delta = B_3 e^{-\delta} e^{-2\eta}. \quad (3.25)$$

Подставляя (3.25) в (3.22) и (3.23), получаем систему уже только из четырех уравнений относительно неизвестных  $A_1, A_2, B_2, B_3$ .

$$A_1 k_e e^{-\delta} - A_2 \varepsilon_1 e^{-\rho} + B_2 \varepsilon_2 e^\rho = 0; \quad (3.26)$$

$$A_1 e^{-\delta} - A_2 e^{-\rho} - B_2 e^\rho = 0; \quad (3.27)$$

$$A_2 \varepsilon_1 e^\rho - B_2 \varepsilon_2 e^{-\rho} - B_3 e^{-\delta} k_e (g \cdot e^{-2\eta} - 1) = 0; \quad (3.28)$$

$$A_2 e^\rho + B_2 e^{-\rho} - B_3 e^{-\delta} (g \cdot e^{-2\eta} + 1) = 0. \quad (3.29)$$

Условие нетривиальности решения этой системы требует равенства нулю ее определителя:

$k_e e^{-\delta}$	$-\varepsilon_1 e^{-\rho}$	$\varepsilon_2 e^\rho$	0
$e^{-\delta}$	$-e^{-\rho}$	$-e^\rho$	0
0	$\varepsilon_1 e^\rho$	$-\varepsilon_2 e^{-\rho}$	$-k_e e^{-\delta} (g \cdot e^{-2\eta} - 1)$
0	$e^\rho$	$e^{-\rho}$	$-e^{-\delta} (g \cdot e^{-2\eta} + 1)$

$$= 0. \quad (3.30)$$

Раскрывая этот определитель, получаем дисперсионное соотношение для структуры ФДР в виде

$$(k_e^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2) + k_e (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cdot \frac{e^{2\rho} + e^{-2\rho}}{e^{2\rho} - e^{-2\rho}} - (k_e - \varepsilon_1) \cdot (k_e + \varepsilon_2) g e^{-2\eta} = 0. \quad (3.31)$$

При  $g = 0$  (пленка со свободными поверхностями) остающуюся сумму двух первых слагаемых этого выражения можно привести к виду:

$$\frac{e^{2\rho} - e^{-2\rho}}{e^{2\rho} + e^{-2\rho}} = -\frac{k_e (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)}{k_e^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2}. \quad (3.32)$$

Это выражение по структуре соответствует классическому соотношению Дэймона–Эшбаха (2.67). Некоторое различие обусловлено тем, что в задаче Дэймона–Эшбаха показатель экспоненты, входящей в  $X_2$ , традиционно выбирается в виде  $\pm i k_x^i x$ , тогда как здесь аналогичный показатель записан как  $\pm k_i x$ , то есть соотношение между этими показателями следующее:  $k_i = i k_x^i$ . При этом используемое здесь обозначение  $\varepsilon_1$  остается тем же, что в задаче Дэймона–Эшбаха, а  $\varepsilon_2$  меняет знак. Меняется также принятое здесь обозначение  $\rho$ : в задаче Дэймона–Эшбаха оно умножается на  $i$ . Таким образом, соотношение (3.32) в обозначениях Дэймона–Эшбаха принимает вид:

$$\frac{e^{2i\rho} - e^{-2i\rho}}{e^{2i\rho} + e^{-2i\rho}} = \frac{k_x^e (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(k_x^e)^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}, \quad (3.33)$$

что полностью тождественно классическому виду дисперсионного соотношения для пленки со свободными поверхностями (2.67).

Аналогично можно показать, что при  $g = 1$ , что соответствует структуре ФДМ, соотношение (3.31) все как целое переходит в классическое дисперсионное соотношение для упомянутой структуры. То есть полное соотношение (3.31) представляет собой сумму двух дисперсионных соотношений — для свободной пленки и для структуры ФДМ, причем вклад металлической решетки в полное соотношение определяется «весовым» множителем, в качестве которого выступает «параметр экранирования» решетки  $g$ .

### 3.2.2. Переход к полярной системе координат

Для дальнейшего рассмотрения соотношение (3.31), аналогично задаче Дэймона–Эшбаха, удобно представить в полярной системе координат, плоскость которой соответствует декартовой плоскости  $Oyz$  (рис. 3.1). При этом, учитывая, что

$$k_y = k \cos \varphi; \quad (3.34)$$

$$k_z = k \sin \varphi, \quad (3.35)$$

а также для  $x$ -компонент волнового вектора выполняются полученные при разделении переменных, подобные (2.51)–(2.52), следующие соотношения:

$$k_e = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}; \quad (3.36)$$

$$k_i = -\sqrt{k_y^2 + \frac{k_z^2}{\mu}}, \quad (3.37)$$

приводим дисперсионное соотношение (3.31) для структуры ФДР к виду:

$$[\beta - 1 - 2\mu\alpha \cdot \text{cth}(k d \alpha)] + g(\beta + 1 + 2\nu\delta) \cdot e^{-2k\rho} = 0, \quad (3.38)$$

где введены вспомогательные параметры:

$$\alpha = \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{\mu}}; \quad (3.39)$$

$$\beta = (\nu^2 - \mu^2 + \mu) \cos^2 \varphi - \mu; \quad (3.40)$$

$$\delta = \cos \varphi, \quad (3.41)$$

а входящие в них величины  $\mu$  и  $\nu$  определяются соотношениями:

$$\mu = 1 + \frac{\Omega_H}{\Omega_H^2 - \Omega^2}; \quad (3.42)$$

$$\nu = \frac{\Omega}{\Omega_H^2 - \Omega^2}; \quad (3.43)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}; \quad (3.44)$$

$$\Omega_H = \frac{H_0}{4\pi M_0}, \quad (3.45)$$

где  $\gamma$  — гиромагнитная постоянная.

Можно видеть, что полученное дисперсионное соотношение (3.38) для структуры ФДР при  $g = 0$  переходит в дисперсионное соотношение для ферритовой пластины со свободными поверхностями (2.69) или (2.136), а при  $g = 1$  — в соотношение для структуры феррит-диэлектрик-металл (ФДМ) (2.141).

**Замечание.** Из сравнения приведенного здесь выражения (3.37) с (2.52) можно видеть, что здесь знак минус вынесен за знак корня, тогда как в выражении (2.52) он находится под корнем. Это происходит из-за того, что при выводе (2.52) показатель экспоненты в формуле (2.47) взят в виде  $ik_i x$ , тогда как здесь в формуле (3.17) подобный показатель имеет вид  $k_i x$ , то есть приведенное здесь значение  $k_i$  (3.37) отличается от полученного в формуле (2.52) на  $i$ .

### 3.3. Параметр экранирования решетки в виде разложения по волновому числу

Основным результатом экспериментальных работ [70, 71] является увеличение крутизны спада дисперсионной кривой в области обратных волн для структуры с решеткой по сравнению с дисперсионной кривой для структуры феррит-диэлектрик-металл (ФДМ). Поэтому обратимся к вопросу, каким должен быть параметр экранирования, то есть как он должен зависеть от волнового числа, чтобы обеспечить упомянутое увеличение крутизны спада.

#### 3.3.1. Сравнение со структурой феррит-металл

Поскольку отправной точкой является структура ФДМ, то есть такая, в которой вместо решетки используется сплошной слой металла, рассмотрим сначала закон дисперсии для этой структуры при различной толщине слоя диэлектрика или воздушного зазора. Для расчета в дисперсионном соотношении (3.38) при этом надо положить  $g = 1$ . Для простоты рассмотрим случай распространения ПМСВ вдоль оси  $Oy$ , то есть когда  $\varphi = 0$ . Напомним, что именно этот случай реализован в экспериментальных работах [70, 71]. Полученные дисперсионные кривые приведены на рис. 3.2. Здесь и далее, кроме особо оговоренных случаев, полагаем намагниченность ферритовой пластины  $4\pi M_0$  равной 1750 Гс, а ее толщину  $d$  равной 15 мкм. Кривые на рис. 3.2 соответствуют различной толщине слоя диэлектрика  $p$ , причем кривая 1 соответствует  $p = 0$ , то есть отсутствию зазора между пленкой и слоем металла, а кривая 12 —  $p = 10\,000$  мкм, то есть практически случаю свободной поверхности пленки.

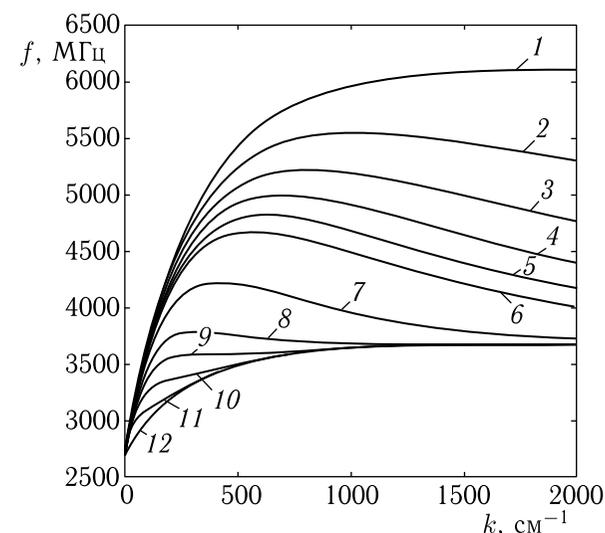


Рис. 3.2. Дисперсионные кривые со сплошным металлом при различных значениях толщины слоя диэлектрика  $p$ : 1 —  $p = 0$ ; 2 — 1 мкм; 3 — 2 мкм; 4 — 3 мкм; 5 — 4 мкм; 6 — 5 мкм; 7 — 10 мкм; 8 — 20 мкм; 9 — 30 мкм; 10 — 50 мкм; 11 — 100 мкм; 12 — 10000 мкм (то есть  $p \rightarrow \infty$ )

Из рисунка видно, что дисперсионные кривые спадают в пределах интервала изменения  $p$  от 0 до 20 мкм (кривые 2–8), причем наиболее крутой спад наблюдается при  $3 \text{ мкм} < p < 5 \text{ мкм}$  (кривые 4–6). С увеличением  $p$  частота, соответствующая максимуму на дисперсионной кривой, уменьшается с 5000 МГц при  $p = 1$  мкм (кривая 2) до 3700 МГц при  $p = 20$  мкм (кривая 8), а волновое число  $k$ , соответствующее тому же максимуму, уменьшается с  $1000 \text{ см}^{-1}$  при  $p = 1$  мкм (кривая 2) до  $250 \text{ см}^{-1}$  при  $p = 20$  мкм (кривая 8).

Далее, можно видеть, что для увеличения крутизны спада дисперсионных кривых желательно при меньших значениях волнового числа ( $k \sim 500\text{--}1000 \text{ см}^{-1}$ ) иметь металл как можно ближе к поверхности феррита ( $p \rightarrow 0$ ), а при больших значениях волнового числа ( $k \sim 1500\text{--}2000 \text{ см}^{-1}$ ) — наоборот, как можно дальше от этой поверхности ( $p \rightarrow \infty$ ). Это означает, что для увеличения крутизны спада дисперсионных кривых величина  $p$  должна зависеть от волнового числа  $k$  таким образом, чтобы при увеличении  $k$  величина  $p$  увеличивалась. Можно сказать, что такое увеличение величины  $p$  означает уменьшение присутствия металла в структуре.

#### 3.3.2. Переход от непрерывного металла к дискретной решетке

Применительно к решетке, при неизменных ее периоде  $b$  и расстоянии от феррита  $p$ , уменьшение присутствия металла может осуществляться двумя путями: 1) увеличением ширины щели  $w$ ; 2) увеличением

просачивания поля через щель решетки. Первый путь означает, что параметр экранирования решетки  $g$  должен с увеличением ширины щели  $w$  уменьшаться. Второй путь означает, что экранирующее действие решетки для длинных волн (с малыми  $k$ ) проявляется сильнее, чем для коротких (с большими  $k$ ), то есть величина параметра экранирования решетки  $g$  должна зависеть от волнового числа  $k$  таким образом, что с увеличением  $k$  она должна уменьшаться.

Простейшим видом зависимости, обеспечивающим уменьшение значений функции при увеличении ее аргумента, является обратная пропорциональность. При этом еще более сильное уменьшение происходит в случае, если функция обратно пропорциональна аргументу в какой-либо положительной степени, большей единицы. Поэтому можно предположить, что параметр экранирования решетки  $g$  связан с волновым числом  $k$  следующим образом:

$$g = \left( A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n k^n \right)^{-1}, \quad (3.46)$$

где  $A_0$  и  $A_n$  — не известные пока коэффициенты, которые могут быть определены из электродинамического расчета на основе какой-либо модели просачивания поля волны через решетку или непосредственно из эксперимента.

### 3.3.3. Параметр экранирования при различных коэффициентах разложения

Рассмотрим теперь количественный вид зависимости параметра экранирования от входящих в него величин, причем на данном этапе ограничимся лишь двумя коэффициентами  $A_0$  и  $A_2$ , так как зависимости при других значениях  $n$  во многом сходны со случаем  $n = 2$ . Обратимся к рис. 3.3, где показаны зависимости параметра экранирования решетки  $g$  от  $A_0$  при фиксированном значении волнового числа  $k$  и различных значениях  $A_2$ .

Рассмотрим далее, как зависит параметр экранирования решетки  $g$  от коэффициента  $A_2$ . Для удобства введем новый параметр  $m = -\lg A_2$ . На рис. 3.4 показаны зависимости параметра экранирования решетки  $g$  от  $m$  при  $k = 100 \text{ см}^{-1}$  и различных значениях  $A_0$ . Кривая 1 ( $A_0 = 1,0$ ) соответствует сплошному слою металла, кривая 10 ( $A_0 = 999\,999$ ) — свободной поверхности феррита.

Из рисунка видно, что с увеличением  $A_0$  величина  $g$  всегда убывает, то есть по мере раскрытия щелей второе слагаемое в дисперсионном соотношении (3.38) уменьшается, и свойства структуры приближаются к свойствам ферритовой пластины со свободной поверхностью. Параметр экранирования  $g$  достигает максимального значения равного единице при  $k = 0$  и  $A_0 = 1$  (кривая 1). При  $k \neq 0$  зависимости  $g(A_0)$  лежат тем ниже, чем больше коэффициент  $A_2$  (кривые 2–5), так как при больших  $A_2$  сильно просачиваются даже очень длинные волны,

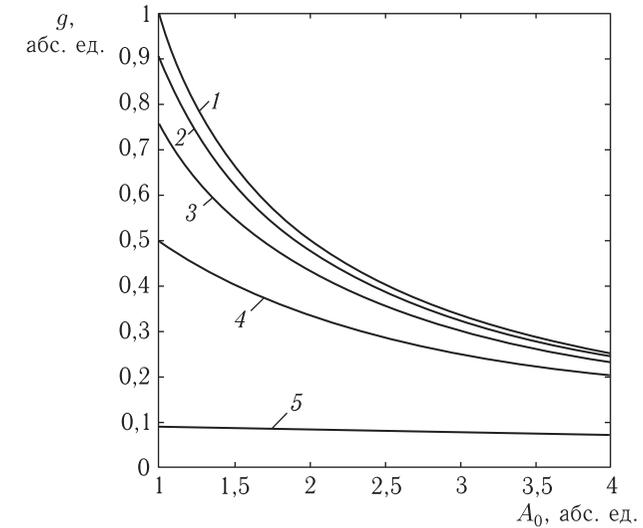


Рис. 3.3. Зависимости параметра экранирования решетки  $g$  от  $A_0$  при  $k = 100 \text{ см}^{-1}$  и различных значениях  $A_2$ : 1 —  $0 \text{ см}^2$ ; 2 —  $10^{-5} \text{ см}^2$ ; 3 —  $10^{-4,5} \text{ см}^2$ ; 4 —  $10^{-4} \text{ см}^2$ ; 5 —  $10^{-3} \text{ см}^2$

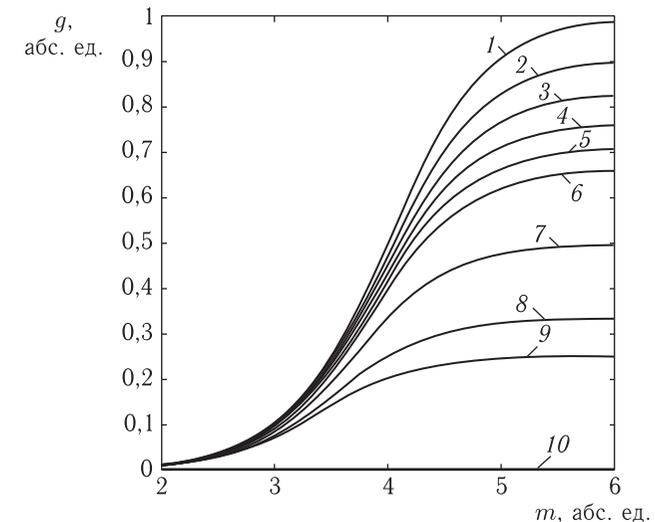


Рис. 3.4. Зависимости параметра экранирования решетки  $g$  от  $m$  при  $k = 100 \text{ см}^{-1}$  и различных значениях  $A_0$ : 1 — 1,0; 2 — 1,1; 3 — 1,2; 4 — 1,3; 5 — 1,4; 6 — 1,5; 7 — 2,0; 8 — 3,0; 9 — 4,0; 10 — 999 999

и свойства структуры приближаются в свойствам ферритовой пластины со свободной поверхностью. При  $A_0 \rightarrow +\infty$  параметр экранирования  $g$  при любых значениях  $A_2$  стремится к нулю, что соответствует переходу к пластине со свободной поверхностью.

Все кривые по мере увеличения  $m$  возрастают. При малых  $m$  величина  $g$  стремится к нулю, при больших — к постоянной величине, равной  $1/A_0$ , то есть определяемой относительной шириной щелей решетки. Перегиб на кривых  $g(m)$  происходит при таких значениях параметра  $m$ , когда второе слагаемое в скобках в выражении (3.46) становится сравнимым с первым, то есть при  $m \approx 2 \lg k - \lg A_0$ . Например, в данном случае для заданного  $k = 100 \text{ см}^{-1}$  при  $A_0 = 1,0$   $m \approx 4$ , при  $A_0 = 2,0$   $m \approx 3,7$ , при  $A_0 = 4,0$   $m \approx 3,4$ .

Рассмотрим теперь, как зависит параметр экранирования решетки  $g$  от волнового числа  $k$ , для чего обратимся к рис. 3.5, где показаны зависимости параметра экранирования решетки  $g$  от  $k$  при  $m = 4$  и различных значениях  $A_0$ . Кривая 1 ( $A_0 = 1,0$ ) соответствует сплошному слою металла, кривая 10 ( $A_0 = 999\,999$ ) — свободной поверхности феррита.

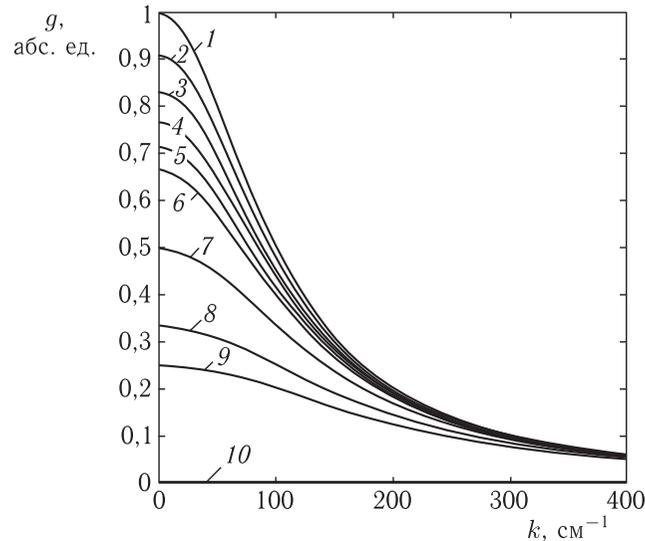


Рис. 3.5. Зависимости параметра экранирования решетки  $g$  от  $k$  при  $m = 4$  и различных значениях  $A_0$ : 1 — 1,0; 2 — 1,1; 3 — 1,2; 4 — 1,3; 5 — 1,4; 6 — 1,5; 7 — 2,0; 8 — 3,0; 9 — 4,0; 10 — 999 999

Из рисунка можно видеть, что все кривые по мере увеличения  $k$  спадают. При малых  $k$  величина  $g$  стремится к  $1/A_0$ , при больших — к нулю. Перегиб на кривых  $g(k)$  соответствует таким значениям  $k$ , при которых второе слагаемое в скобках в выражении (3.46) становится сравнимым с первым, то есть при  $k \approx \sqrt{10^m A_0}$ .

Рассмотрим теперь рис. 3.6, где показаны зависимости параметра экранирования решетки  $g$  от  $k$  при  $A_0 = 1,1$  и различных значениях  $m$ .

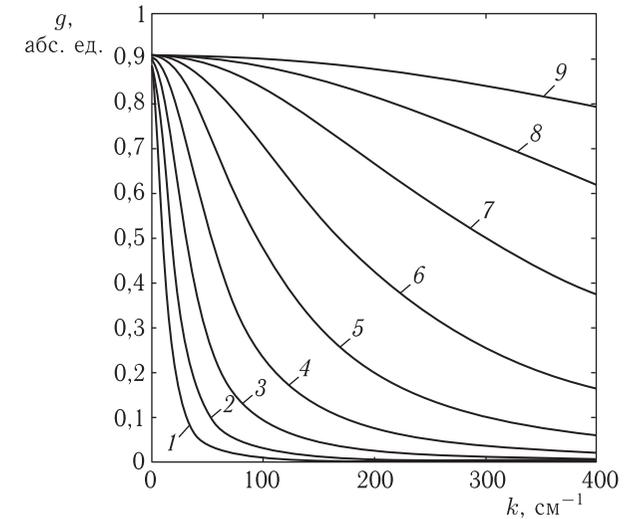


Рис. 3.6. Зависимости параметра экранирования решетки  $g$  от  $k$  при  $A_0 = 1,1$  и различных значениях  $m$ : 1 — 2,0; 2 — 2,5; 3 — 3,0; 4 — 3,5; 5 — 4,0; 6 — 4,5; 7 — 5,0; 8 — 5,5; 9 — 6,0

Из рисунка можно видеть, что все кривые по мере увеличения  $k$  спадают. При малых  $k$  величина  $g$  стремится к  $1/A_0$ , при больших — к нулю. Перегиб на кривых  $g(k)$ , как и в предыдущем случае, соответствует  $k \approx \sqrt{10^m A_0}$ .

### 3.3.4. Выражение параметра экранирования через ширину щелей решетки

При выводе дисперсионного соотношения (3.38) параметр экранирования  $g$  предполагался постоянной величиной. Далее он был задан феноменологически в виде обратной величины от разложения в степенной ряд по волновому числу (3.46):

$$g = \left( A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n k^n \right)^{-1}, \quad (3.47)$$

где  $A_0$  и  $A_n$  — постоянные коэффициенты, причем:  $1 \leq A_0 \leq +\infty$ ,  $A_n \geq 0$ .

В этом выражении коэффициент  $A_0$  характеризует относительное раскрытие щелей решетки: случай  $A_0 = 1$  при  $k = 0$  соответствует полному их закрытию ( $w = 0$ ), когда решетка превращается в сплошной слой металла; случай  $A_0 \rightarrow +\infty$  соответствует полному раскрытию

щелей ( $w = b$ ), когда решетка отсутствует, и структура превращается в ферритовую пластину со свободной поверхностью.

Введем относительную ширину щели  $W_B = w/b$ , полагаем  $A_0 = (1 - W_B)^{-1}$  и перейдем к безразмерным коэффициентам разложения  $A_N = A_n/d$ . При этом (3.47) можно переписать в виде:

$$g = \frac{1 - W_B}{1 + (1 - W_B) \cdot \sum_{N=1}^{\infty} A_N (kd)^N}. \quad (3.48)$$

Недостатком разложения (3.48) является тот факт, что параметр  $g$  при полном закрытии щелей,  $w = 0$ , сохраняет зависимость от волнового числа  $A_2$  в случае  $A_N \neq 0$ , то есть неадекватно описывает структуру ФДМ, для которой такая зависимость при  $w = 0$  должна отсутствовать при любых  $A_N$ . Избежать этого обстоятельства позволяет выражение для параметра экранирования в виде

$$g = \frac{1 - W_B}{1 + W_B \cdot (1 - W_B) \cdot \sum_{N=1}^{\infty} A_N (kd)^N}, \quad (3.49)$$

отличающееся от (3.48) коэффициентом  $W_B$  перед вторым слагаемым в знаменателе. Легко видеть, что введенный так параметр экранирования при  $w = 0$  превращается в единицу без какой-либо зависимости от волнового числа  $k$ . Заметное различие между выражениями (3.48) и (3.49) проявляется только при достаточно малых  $W_B$  по сравнению с единицей, то есть при малой ширине щели  $w$  по сравнению с периодом решетки  $d$ .

В приводимых далее расчетах дисперсии и траекторий ПМСВ используется тот вид разложения параметра экранирования (3.47)–(3.49), который, по мнению авторов, более удобен, исходя из простоты и наглядности изложения.

### 3.4. Влияние параметра экранирования на дисперсию поверхностных магнитоэлектрических волн

Рассмотрим теперь, какое влияние оказывает экранирование ферритовой пленки решеткой на закон дисперсии ПМСВ. Основной задачей явится выяснение вопроса, каким должен быть параметр экранирования, чтобы он обеспечивал увеличение крутизны спада дисперсионной кривой в области обратных волн по сравнению со спадом дисперсии для структуры феррит-диэлектрик-металл (ФДМ).

#### 3.4.1. Влияние нулевого члена разложения

Прежде всего рассмотрим, как меняется дисперсионная кривая при изменении параметров  $A_0$  и  $A_n$ . Пусть сначала все  $A_n$  равны нулю, а меняется только  $A_0$ . Возьмем за основу дисперсионную кривую 2

на рис. 3.2, соответствующую  $p = 1$  мкм, и будем менять  $A_0$ . Поскольку параметр  $g$  безразмерный, то и  $A_0$  является безразмерной величиной. Полученные дисперсионные кривые, соответствующие различным значениям параметра  $A_0$ , показаны на рис. 3.7.

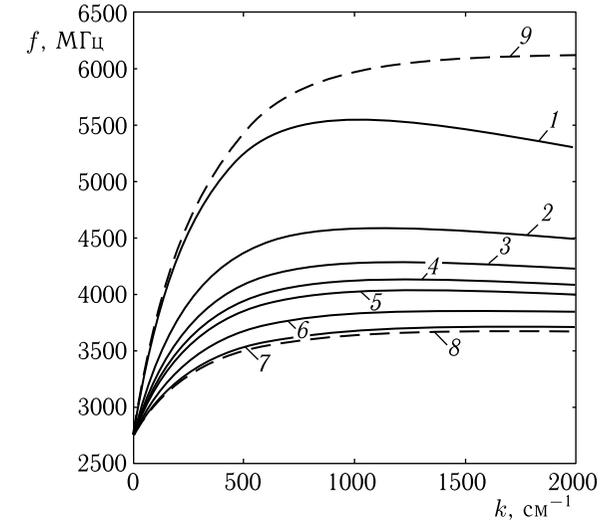


Рис. 3.7. Дисперсионные кривые при различных значениях параметра  $A_0$ : 1 – 1; 2 – 2; 3 – 3; 4 – 4; 5 – 5; 6 – 10; 7 – 50. Кривые: 8 –  $p \rightarrow \infty$ ; 9 –  $p = 0$  (подобно кривым 12 и 1 на рис. 3.2)

Здесь случай  $A_0 = 1$  (кривая 1), для которого  $g = 1$ , соответствует сплошному металлу, отстоящему от феррита на расстоянии  $p = 1$  мкм. При этом щели решетки полностью закрыты и  $w = 0$ . Можно предположить, что случай  $A_0 = 2$  (кривая 2), для которого  $g = 1/2$ , соответствует открытию щелей наполовину, то есть ширина щели равна ширине штриха и половине периода решетки:  $w = b/2$ . Остальные случаи при  $A_0 > 2$  (кривые 3–7) соответствуют постепенному увеличению щелей вплоть до величины периода  $b$ , когда  $g = 0$ . При этом зависимость относительной ширины щели от  $A_0$  может иметь вид:

$$\frac{w}{b} = 1 - \frac{1}{A_0}, \quad (3.50)$$

из которой получаем:

$$A_0 = \frac{1}{1 - w/b}, \quad (3.51)$$

или

$$g = 1 - w/b. \quad (3.52)$$

Эта зависимость получена при  $A_n = 0$  для всех  $n \geq 1$  или, если считать  $A_n \neq 0$ , то она соответствует  $k = 0$ , поэтому с ее помощью можно объяснить лишь уменьшение высоты максимума дисперсионных кривых при увеличении щелей решетки, что доступно экспериментальному наблюдению. Заметим также, что спад кривых на рис. 3.7 по мере увеличения  $A_0$  уменьшается, поэтому одним изменением параметра  $A_0$  (или относительной ширины щелей решетки) нельзя объяснить наблюдаемое в эксперименте увеличение крутизны спада при замене решеткой сплошного металла.

### 3.4.2. Влияние первого члена разложения

Рассмотрим теперь, как меняется закон дисперсии при учете зависимости параметра экранирования решетки  $g$  от волнового числа  $k$ . Предположим далее, что ширина щели решетки  $w$  равна половине периода  $b$ , то есть  $A_0 = 2$ . Пусть сначала все  $A_n$ , кроме  $A_1$ , равны нулю, то есть:

$$g = (2 + A_1 k)^{-1}, \quad (3.53)$$

где размерность  $A_1$  соответствует сантиметрам. Дисперсионные кривые, соответствующие различным значениям параметра  $A_1$ , показаны на рис. 3.8. Здесь, как и ранее, предполагается  $p = 1$  мкм. Кривая 1, соответствующая  $A_1 = 0$ , совпадает с кривой 2 на рис. 3.7.

Из рисунка видно, что по мере увеличения параметра  $A_1$  спад дисперсионных кривых по сравнению с начальной (1) сначала увели-

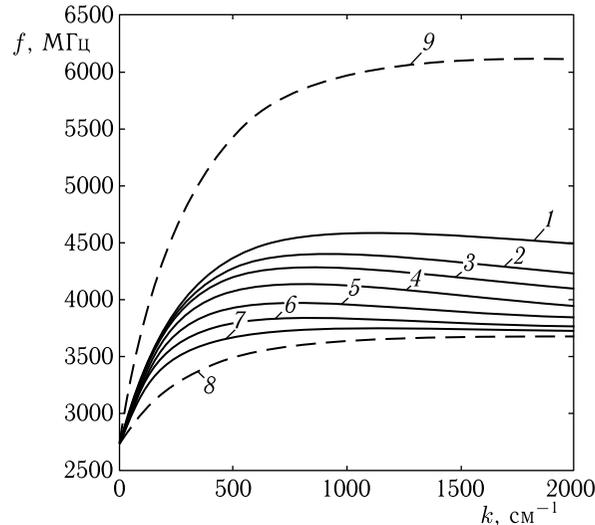


Рис. 3.8. Дисперсионные кривые при различных значениях параметра  $A_1$ : 1 — 0 см; 2 — 0,0005 см; 3 — 0,001 см; 4 — 0,002 см; 5 — 0,004 см; 6 — 0,008 см; 7 — 0,016 см. Кривые: 8 —  $p \rightarrow \infty$ ; 9 —  $p = 0$ .

чивается (кривые 2–5), а затем уменьшается (кривая 6), после чего сменяется ростом (кривая 7). Максимальное увеличение спада соответствует  $A_1$  между 0,001 см и 0,002 см (кривые 3 и 4). Середина спада приходится на  $k \approx 1500$  см<sup>-1</sup>, когда произведение  $A_1 k$  по величине становится близким к первому слагаемому в формуле (3.53).

### 3.4.3. Влияние второго члена разложения

Пусть теперь равны нулю все  $A_n$ , кроме  $A_2$ , то есть:

$$g = (2 + A_2 k^2)^{-1}, \quad (3.54)$$

где размерность  $A_2$  соответствует сантиметрам в квадрате.

Полученные дисперсионные кривые показаны на рис. 3.9. Здесь, как и ранее, предполагается  $p = 1$  мкм. Кривая 1, соответствующая  $A_2 = 0$ , совпадает с кривой 2 на рис. 3.7.

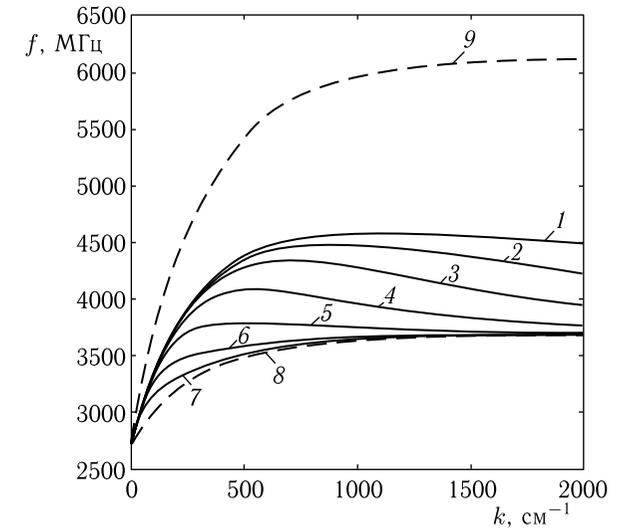


Рис. 3.9. Дисперсионные кривые при различных значениях параметра  $A_2$ : 1 — 0; 2 — 0,00000025 см<sup>2</sup>; 3 — 0,000001 см<sup>2</sup>; 4 — 0,000004 см<sup>2</sup>; 5 — 0,000016 см<sup>2</sup>; 6 — 0,000064 см<sup>2</sup>; 7 — 0,000256 см<sup>2</sup>. Кривые: 8 —  $p \rightarrow \infty$ ; 9 —  $p = 0$ .

Из рисунка видно, что по мере увеличения параметра  $A_2$  спад дисперсионных кривых по сравнению с начальной (1) сначала увеличивается (кривые 2–4), а затем уменьшается (кривая 5), после чего сменяется ростом (кривые 6, 7). Максимальное увеличение спада соответствует  $A_2$  между 0,000001 см<sup>2</sup> и 0,000004 см<sup>2</sup> (кривые 3 и 4). Середина спада, как и на рис. 3.8, приходится на  $k \sim 1500$  см<sup>-1</sup>, когда произведение  $A_2 k^2$  становится близким к первому слагаемому в формуле (3.54).

Заметим, что в рассматриваемом случае максимальная крутизна спада (кривая 3) больше, чем в предыдущем (кривые 3 и 4 на рис. 3.8), то есть квадратичная зависимость  $g$  от  $k$  вида (3.54) сильнее увеличивает спад, чем линейная зависимость вида (3.53).

### 3.5. Дисперсионные кривые при различной толщине слоя диэлектрика

Рассмотрим теперь, что происходит со спадом дисперсионных кривых при изменении толщины слоя диэлектрика  $p$ . Возьмем случай наиболее сильного увеличения крутизны спада, соответствующий  $A_0 = 2$ ,  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = 0,000001 \text{ см}^2$ . Дисперсионные кривые для этого случая приведены на рис. 3.10. Для сравнения на рисунке приведена кривая 10, совпадающая с кривой 2 на рис. 3.7, для которой  $A_2 = 0$ , то есть всякая зависимость параметра экранирования  $g$  от волнового числа  $k$  отсутствует.

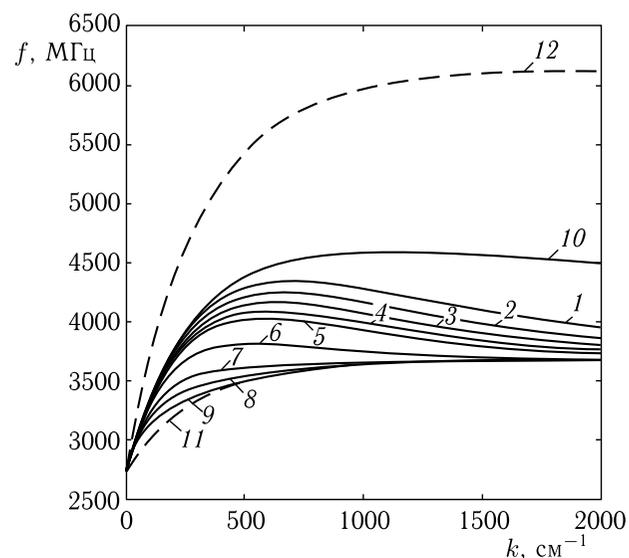


Рис. 3.10. Дисперсионные кривые с решеткой при различных значениях толщины слоя диэлектрика  $p$ : 1 — 1 мкм; 2 — 2 мкм; 3 — 3 мкм; 4 — 4 мкм; 5 — 5 мкм; 6 — 10 мкм; 7 — 20 мкм; 8 — 30 мкм; 9 — 50 мкм; 10 — 1 мкм. Кривые: 11 —  $p \rightarrow \infty$ ; 12 —  $p = 0$

Из рисунка видно, что во всех случаях в пределах изменения толщины слоя диэлектрика  $p$  от 1 мкм до 10 мкм крутизна спада дисперсионных кривых выше, чем в случае отсутствия зависимости параметра экранирования  $g$  от волнового числа  $k$  (кривая 10). Спад про-

является тем сильнее, чем меньше толщина слоя диэлектрика  $p$  (кривые 1, 2).

Таким образом, во всех случаях зависимость параметра экранирования решетки  $g$  от волнового числа  $k$  вида (3.46) (при положительных  $A_n$ ) приводит к увеличению крутизны спада дисперсионной кривой в области обратных волн.

### 3.6. Дисперсионные кривые при различной толщине ферритовой пластины

В предыдущих разделах показано, что увеличение крутизны спада дисперсионных кривых ПМСВ в области обратных волн при наличии решетки можно объяснить, введя зависимость параметра экранирования решетки  $g$  от волнового числа  $k$ . Такая зависимость позволяет качественно объяснить описанные в работах [70, 71] экспериментальные результаты. Однако о количественном объяснении говорить рано, поскольку в приведенных выше расчетах толщина ферритовой пластины равнялась 15 мкм, а в эксперименте [70, 71] она была порядка 1000 мкм. В этом свете имеет смысл разобраться, как зависит описанное выше увеличение спада дисперсионных кривых от толщины ферритовой пластины  $d$ . Для этого далее рассмотрены три значения толщины: 15 мкм, 150 мкм и 1500 мкм, перекрывающие весь диапазон толщин, исследованных в эксперименте. Остальные параметры имели следующие значения:  $p = 1 \text{ мкм}$ ,  $A_0 = 2$ ,  $A_1 = 0$ ,  $A_2$  варьировался от 0 до  $0,01 \text{ см}^2$ .

Полученные дисперсионные кривые показаны на рис. 3.11–3.13. Рис. 3.11 соответствует толщине ферритовой пластины равной 15 мкм, рис. 3.12 — 150 мкм, рис. 3.13 — 1500 мкм. Нумерация кривых на всех рисунках совпадает.

Из рассмотрения рисунков видно, что введение зависимости параметра экранирования решетки  $g$  от волнового числа  $k$  приводит к увеличению крутизны спада дисперсионных кривых в области обратных волн при всех значениях толщины ферритовой пластины, однако оно сказывается тем сильнее, чем толщина больше. Причина такого поведения кривых состоит в том, что зависимость параметра экранирования  $g$  от волнового числа  $k$  (3.54) тем сильнее, чем больше коэффициент  $A_2$ . При этом второе слагаемое в формуле (3.54) становится сравнимым с первым уже при малых значениях  $k$ , поэтому середина спада перемещается в сторону малых волновых чисел. Но при малой толщине ферритовой пластины (рис. 3.11) дисперсионные кривые при  $A_2 = 0$  (кривые 8) вблизи малых  $k$  идут значительно более полого, чем при большой (рис. 3.13), поэтому снижение дисперсионной кривой за счет зависимости  $g$  от волнового числа  $k$  для этих кривых проявляется в области, где они еще не набрали достаточной высоты, что приводит в первую очередь к снижению максимума дисперсионной кривой (рис. 3.11). Напротив, при большой толщине ферритовой пластины

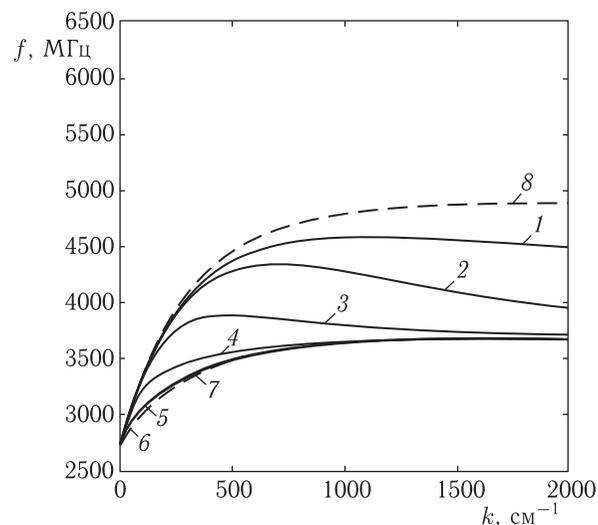


Рис. 3.11. Дисперсионные кривые при толщине слоя феррита равной 15 мкм и различных значениях параметра  $A_2$ : 1 — 0; 2 —  $0,000001 \text{ см}^2$ ; 3 —  $0,00001 \text{ см}^2$ ; 4 —  $0,0001 \text{ см}^2$ ; 5 —  $0,001 \text{ см}^2$ ; 6 —  $0,01 \text{ см}^2$ . Кривые 7 и 8 соответствуют —  $A_0 = 2$ ,  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = 0$ ,  $p = 100\,000 \text{ мкм}$  (кривая 7) и  $p = 0$  (кривая 8), то есть свободной и металлизированной поверхностям ферритовой пластины с учетом ширины штрихов решетки ( $g = 1/2$ )

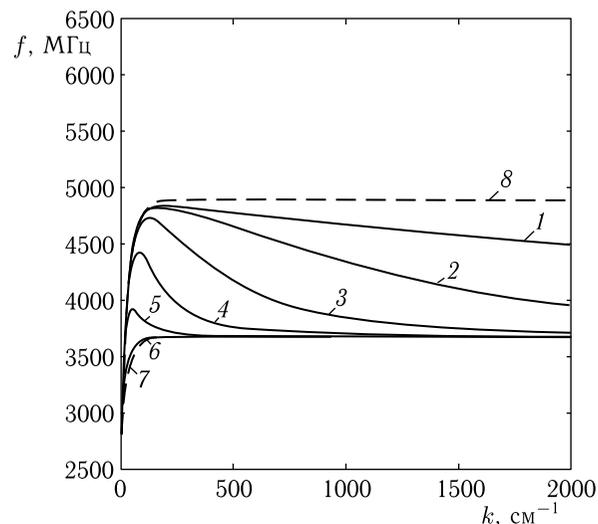


Рис. 3.12. Дисперсионные кривые при толщине слоя феррита равной 150 мкм и различных значениях параметра  $A_2$ . Номера кривых — те же, что на рис. 3.11

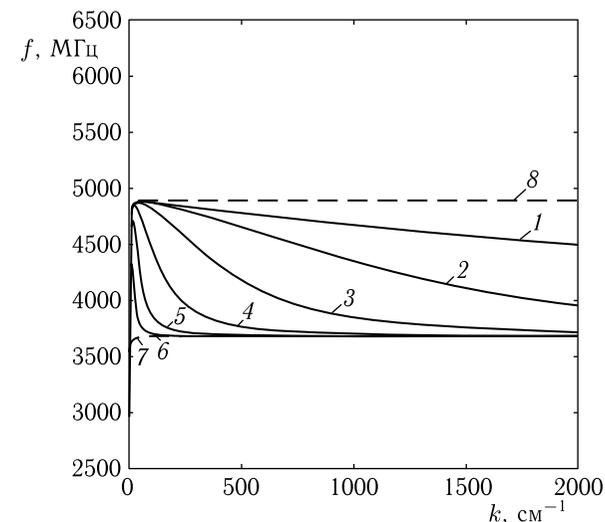


Рис. 3.13. Дисперсионные кривые при толщине слоя феррита равной 1500 мкм и различных значениях параметра  $A_2$ . Номера кривых — те же, что на рис. 3.11

(рис. 3.13) снижение дисперсионных кривых происходит в той области, где максимум уже пройден (правее по рисунку), что, почти не меняя высоты максимума, приводит к резкому спаду дисперсионной кривой в области обратных волн.

### 3.7. Дисперсия при высоких порядках разложения параметра экранирования

В предыдущих разделах рассмотрена дисперсия ПМСВ в структуре феррит-диэлектрик-решетка при разложении параметра экранирования по волновому числу (3.46) до степени не выше второй.

Обратимся теперь к более резкой зависимости, которой соответствуют более высокие степени  $k$ .

Анализ показывает, что при изменении  $A_0$  меняется лишь высота максимума дисперсионной кривой, тогда как при изменении  $A_n$  меняется крутизна спада тем сильнее, чем больше  $n$ . Сказанное иллюстрируется рис. 3.14 и рис. 3.15, при построении кривых на которых использованы параметры: толщина феррита  $d = 15 \text{ мкм}$ ; толщина диэлектрика  $p = 1 \text{ мкм}$ , намагниченность  $4\pi M_0 = 1750 \text{ Гс}$ ; поле  $H_0 = 437,5 \text{ Э}$ ;  $\varphi = 0$ ;  $A_0 = 2$  ( $w = b/2$ ). Кривые на рис. 3.14 построены для разных значений  $n$ , кривые на рис. 3.15 — при  $n = 8$ , а  $A_8$  меняется от  $10^{-26} \text{ см}^8$  до  $10^{-22} \text{ см}^8$ .

Из рис. 3.14 можно видеть, что при изменении порядка разложения  $n$  крутизна спада тем больше, чем больше этот порядок.

Из рис. 3.15, соответствующего постоянному порядку разложения  $n = 8$ , можно видеть, что крутизна спада тем больше, чем больше коэффициент  $A_8$ .

### 3.8. Сравнение с данными эксперимента

Экспериментальному исследованию распространения ПМСВ в структуре феррит-диэлектрик-решетка посвящены работы [70–75]. Отмечены два наиболее заметных результата: первый — значительное увеличение крутизны спада дисперсионной кривой в области обратных волн, второй — некоторый сдвиг дисперсионной кривой для прямых волн в сторону больших значений волнового числа.

Как показано в предыдущих разделах, первый из этих результатов может быть интерпретирован на основе модели частичного просачивания энергии волны через решетку. Действительно, в эксперименте толщина ферритовых пластин составляла 500–1000 мкм, и резкий спад дисперсионных кривых наблюдался в области волновых чисел порядка  $10\text{--}50\text{ см}^{-1}$ , что полностью согласуется с кривыми 4–6 на рис. 3.13. Более того, в общем случае учет эффекта просачивания поля ПМСВ через решетку позволяет варьировать крутизну спада дисперсионной кривой в довольно широких пределах. Так для кривой 2 на рис. 3.15 крутизна составляет  $0,7\text{ МГц/см}^{-1}$ , а для кривой 5 на том же рисунке — около  $2,8\text{ МГц/см}^{-1}$ .

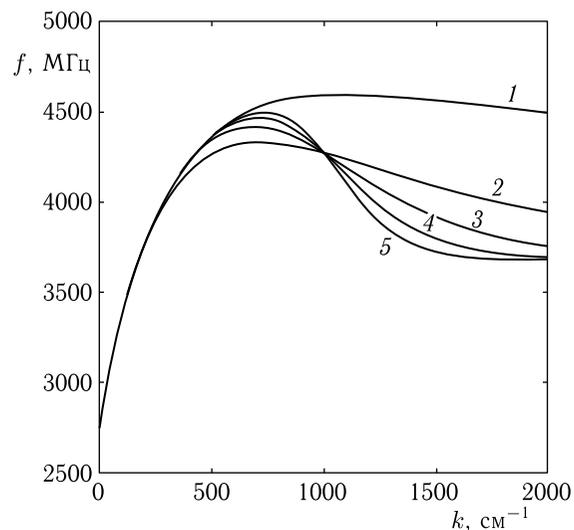


Рис. 3.14. Дисперсионные кривые при различных параметрах  $A_n$ : 1 —  $A_0 = 0\text{ см}^2$ ; 2 —  $A_2 = 10^{-6}\text{ см}^2$ ; 3 —  $A_4 = 10^{-12}\text{ см}^4$ ; 4 —  $A_6 = 10^{-18}\text{ см}^6$ ; 5 —  $A_8 = 10^{-24}\text{ см}^8$

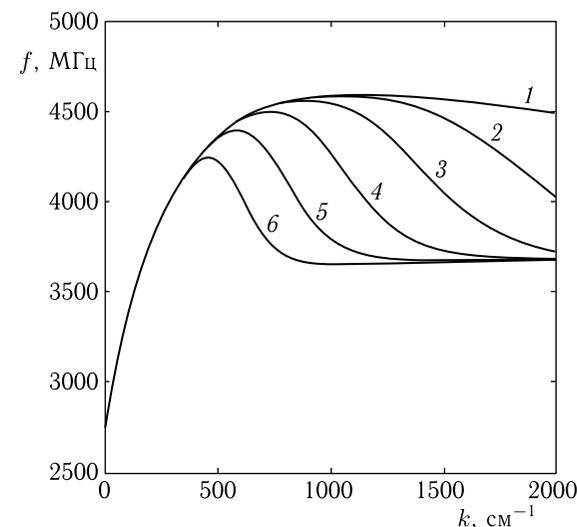


Рис. 3.15. Дисперсионные кривые при изменении параметра  $A_8$ : 1 —  $0\text{ см}^8$ ; 2 —  $10^{-26}\text{ см}^8$ ; 3 —  $10^{-25}\text{ см}^8$ ; 4 —  $10^{-24}\text{ см}^8$ ; 5 —  $10^{-23}\text{ см}^8$ ; 6 —  $10^{-22}\text{ см}^8$

Однако следует отметить, что эти величины намного меньше наблюдавшегося в эксперименте [70, 71] значения  $80\text{ МГц/см}^{-1}$ .

В то же время, приведенные на рис. 3.14 и 3.15 значения получены при толщине пленки равной всего 15 мкм, тогда как в разд. 3.6 показано, что при увеличении толщины пленки крутизна спада дисперсионной кривой резко возрастает. Так при толщине 15 мкм для кривой 2 на рис. 3.11 крутизна спада составляет всего  $0,30\text{ МГц/см}^{-1}$ , при толщине 150 мкм для кривой 4 на рис. 3.12 крутизна увеличивается до  $4,2\text{ МГц/см}^{-1}$ , то есть более чем на порядок, а при толщине 1500 мкм для кривой 6 на рис. 3.13 достигает  $40,0\text{ МГц/см}^{-1}$ . В эксперименте [70, 71] толщина пленки составляла 850 мкм, то есть была столь высокой, что для интерпретации дисперсии в этом случае наиболее подходят кривые, приведенные на рис. 3.15. В самом деле, для полученных там кривых 5 и 6 крутизна спада уже вполне приближается к экспериментальной, то есть можно говорить о соответствии модели просачивания с экспериментом также в количественном отношении.

Заметим дополнительно, что в работах [73, 74], а также в обобщающей их работе [75] толщина пленки составляла 80 мкм, причем о наблюдении обратных ПМСВ, соответствующих спаду дисперсионной кривой, вообще не сообщается. Согласно модели просачивания, спад дисперсионной кривой в этом случае должен располагаться при значениях волнового числа, превышающих исследованный диапазон до  $200\text{ см}^{-1}$  (рис. 3.12), что и может являться причиной его ненаблюдаемости.

Таким образом, можно считать, что предложенная модель просачивания объясняет первый из упомянутых экспериментальных результатов,

увеличение крутизны спада дисперсионной кривой для обратных волн, вполне адекватно.

Из предложенной теоретической концепции просачивания можно сделать некоторые выводы, которые желательно было бы проверить в эксперименте. При уменьшении толщины ферритовой пластины увеличение крутизны спада в области обратных волн должно проявляться слабее (рис. 3.11–3.13). При увеличении толщины слоя диэлектрика увеличение крутизны спада также должно уменьшаться (рис. 3.10). При увеличении ширины щелей решетки в условиях сохранения ее периода максимум дисперсионной кривой должен понижаться (рис. 3.7), а также увеличение крутизны спада проявляться слабее.

С другой стороны следует отметить, что для интерпретации второго из упомянутых выше экспериментальных результатов, сдвига дисперсионной кривой для прямых волн в сторону больших значений волновых чисел, модель просачивания действует слабее. Вообще говоря, такая модель при более внимательном рассмотрении дает некоторый сдвиг или скорее наклон дисперсионной кривой в сторону увеличения волнового числа, однако в количественном отношении для интерпретации эксперимента этот сдвиг недостаточен. Так из приведенного в работе [73] рис. 4 можно видеть, что на частоте 3000 МГц волновое число в свободной пленке составляет около  $30 \text{ см}^{-1}$ , тогда как в структуре ФДР возрастает до  $60 \text{ см}^{-1}$ . На частоте 3200 МГц эти величины составляют 40 и  $100 \text{ см}^{-1}$  соответственно. Модель просачивания дает в этих случаях сдвиг не более чем до 35 и  $50 \text{ см}^{-1}$ .

Для объяснения наблюдаемого столь большого сдвига в работах [73–75] предложена интерпретация на основе увеличения набега фазы волны в структуре ФДР за счет того, что волна в процессе распространения на каждом штрихе решетки «перебирается» (выражение из [74]) от одной поверхности пленки до другой, то есть распространяется по периодической траектории с периодом, равным периоду решетки. За счет извилистости такой траектории волна приобретает дополнительный набег фазы, что и дает сдвиг дисперсионной кривой в сторону больших значений волнового числа.

Следует заметить однако, что гипотеза о «перебирании» волны от одной поверхности пленки к другой на длине периода решетки и получающейся за счет этого извилистости траектории могла бы быть достаточно убедительной, если бы длина волны была значительно меньше периода решетки. На самом деле в экспериментах, как это можно видеть из рис. 4 в работе [74], максимальные значения волнового числа составляют около  $200 \text{ см}^{-1}$ , что соответствует длине волны порядка 0,03 см, то есть 300 мкм, а сдвиг дисперсионной кривой наблюдается уже при волновых числах порядка  $30 \text{ см}^{-1}$  (рис. 2 в работе [74]), что соответствует длине волны 0,21 см, то есть 2100 мкм. Период же решетки в этом случае составляет от 120 до 180 мкм, что по крайней мере на порядок меньше длины волны. То есть волна на своем пути встречает препятствие в виде штриха решетки, протяженность которого меньше

ее длины более чем на порядок. Можно полагать, что в этом случае к гипотезе о формировании «траектории» волны, огибающей такое препятствие и тем более «перебирающейся» на длине препятствия от одной поверхности пленки до другой, следует говорить с известной осторожностью. В самом деле в работе [74] приведены условия (формула (20)), согласно которым для правомерности рассмотрения набега фазы за счет извилистости траектории длина волны должна быть значительно меньше как ширины штриха решетки, так и расстояния между штрихами, то есть значительно меньше периода. Далее в той же работе отмечается, что выполнение этих условий «практически невозможно», однако все же «для коррекции и простоты» условия (20) считаются выполненными. Можно полагать, что такое предположение все же требует достаточно убедительного обоснования, по мнению авторов настоящей монографии, в работе [74] отсутствующего.

### 3.9. Распространение ПМСВ в структуре ФДР, намагниченной неоднородным полем

Рассмотрим теперь распространение ПМСВ в структуре феррит-диэлектрик-решетка, намагниченной в ее плоскости неоднородным полем. Сначала рассмотрим общий метод построения траекторий для такой структуры, после чего в качестве конкретного примера остановимся на поле неизменного направления, величина которого вдоль этого направления меняется, то есть в соответствии с традиционной принятой терминологией — продольно неоднородно.

#### 3.9.1. Метод исследования распространения волн в структуре феррит-диэлектрик-решетка, намагниченной неоднородным полем

Перейдем теперь к исследованию распространения волн в структуре ФДР, намагниченной неоднородным полем. Для решения задачи аналогично [77–80, 86] воспользуемся подробно разработанным для подобных ситуаций методом Гамильтона–Аулда [1, 114, 173, 174, 205, 206], основанным на аналогии между МСВ и частицей, движущейся в неоднородном потенциале.

Для принятой геометрии задачи, показанной на рис. 3.1, система уравнений Гамильтона–Аулда, описывающая распространение ПМСВ в полярной системе координат, имеет вид [1, 114, 173, 174] (2.142)–(2.144):

$$\frac{dk}{dy} = k \left( \frac{\partial k}{\partial y} \cos \varphi + \frac{\partial k}{\partial z} \sin \varphi \right) \left( k \cos \varphi + \frac{\partial k}{\partial \varphi} \sin \varphi \right)^{-1}, \quad (3.55)$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = - \left( \frac{\partial k}{\partial y} \sin \varphi - \frac{\partial k}{\partial z} \cos \varphi \right) \left( k \cos \varphi + \frac{\partial k}{\partial \varphi} \sin \varphi \right)^{-1}, \quad (3.56)$$

$$\frac{dz}{dy} = \left( k \sin \varphi - \frac{\partial k}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) \left( k \cos \varphi + \frac{\partial k}{\partial \varphi} \sin \varphi \right)^{-1}, \quad (3.57)$$

где:  $k$  — длина волнового вектора ПМСВ,  $\varphi$  — угол между волновым вектором ПМСВ и осью  $Oy$ , а частные производные, входящие в правую часть приведенных уравнений, определяются из дисперсионного соотношения  $F(\omega, k, H(y, z)) = 0$  с помощью правила дифференцирования неявной функции [191]:

$$\frac{\partial k}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial k}; \quad \frac{\partial k}{\partial z} = -\frac{\partial F/\partial z}{\partial F/\partial k}; \quad \frac{\partial k}{\partial \varphi} = -\frac{\partial F/\partial \varphi}{\partial F/\partial k}. \quad (3.58)$$

В рассматриваемой здесь структуре феррит-диэлектрик-решетка функция  $F(\omega, k, H(y, z))$ , соответствующая дисперсионному соотношению (3.38), имеет вид

$$F(\omega, k, H(y, z)) = [\beta - 1 - 2\mu\alpha \cdot \text{cth}(kd\alpha)] + g(\beta + 1 + 2\nu\delta) \cdot e^{-2kp}, \quad (3.59)$$

где вспомогательные параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ , а также входящие в них компоненты тензора проницаемости  $\mu$ ,  $\nu$  и нормированные частоты  $\Omega$ ,  $\Omega_H$  определяются соотношениями (3.39)–(3.45). При этом, благодаря неоднородности поля, параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ , а также  $\mu$ ,  $\nu$ , через посредство меняющейся с полем частоты  $\Omega_H$ , имеют зависимость от координат  $y$  и  $z$ , а параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  имеют зависимость еще и от  $\varphi$ . Входящий во второе слагаемое (3.59) параметр экранирования  $g$ , зависит от волнового числа  $k$ .

Дифференцируя (3.59) с учетом сделанных замечаний, получаем входящие в формулы (3.58) производные в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} = & 2\mu \left[ \frac{kd\alpha}{\text{sh}^2(kd\alpha)} - \text{cth}(kd\alpha) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial y} + (1 + ge^{-2kp}) \frac{\partial \beta}{\partial y} - \\ & - 2\alpha \text{cth}(kd\alpha) \frac{\partial \mu}{\partial y} + 2g\delta e^{-2kp} \frac{\partial \nu}{\partial y}; \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z} = & 2\mu \left[ \frac{kd\alpha}{\text{sh}^2(kd\alpha)} - \text{cth}(kd\alpha) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial z} + (1 + ge^{-2kp}) \frac{\partial \beta}{\partial z} - \\ & - 2\alpha \text{cth}(kd\alpha) \frac{\partial \mu}{\partial z} + 2g\delta e^{-2kp} \frac{\partial \nu}{\partial z}; \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial k} = & 2 \left[ \frac{\mu d\alpha^2}{\text{sh}^2(kd\alpha)} - gpe^{-2kp}(\beta + 1 + 2\nu\delta) \right] + \\ & + (\beta + 1 + 2\nu\delta)e^{-2kp} \frac{\partial g}{\partial k}; \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \varphi} = & 2\mu \left[ \frac{kd\alpha}{\text{sh}^2(kd\alpha)} - \text{cth}(kd\alpha) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} + \\ & + (1 + ge^{-2kp}) \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} + 2g\nu e^{-2kp} \frac{\partial \delta}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

а входящие в эти выражения производные в свою очередь имеют вид:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\sin^2 \varphi}{2\alpha\mu^2} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y}; \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} = -\frac{\sin^2 \varphi}{2\alpha\mu^2} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z}; \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{1}{\mu} - 1 \right) \cdot \sin 2\varphi; \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = 2\nu \cos^2 \varphi \cdot \frac{\partial \nu}{\partial y} - (\sin^2 \varphi + 2\mu \cos^2 \varphi) \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y}; \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} = 2\nu \cos^2 \varphi \cdot \frac{\partial \nu}{\partial z} - (\sin^2 \varphi + 2\mu \cos^2 \varphi) \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z}; \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \varphi} = (\mu^2 - \nu^2 - \mu) \cdot \sin 2\varphi; \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial \varphi} = -\sin \varphi; \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = -\frac{\Omega_H^2 + \Omega^2}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2} \cdot \frac{\partial \Omega_H}{\partial y}; \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial z} = -\frac{\Omega_H^2 + \Omega^2}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2} \cdot \frac{\partial \Omega_H}{\partial z}; \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial y} = -\frac{2\Omega_H\Omega}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2} \cdot \frac{\partial \Omega_H}{\partial y}; \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial z} = -\frac{2\Omega_H\Omega}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2} \cdot \frac{\partial \Omega_H}{\partial z}. \quad (3.74)$$

Для параметра  $g$  в виде (3.46), получаем:

$$\frac{\partial g}{\partial k} = -\left( A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n k^n \right)^{-2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n A_n k^{n-1}. \quad (3.75)$$

Приведенные здесь выражения составляют основу вычислительного аппарата для нахождения траекторий волновых пучков ПМСВ в неоднородно намагниченной структуре ФДР.

Система уравнений (3.55)–(3.57) интегрируется численно с помощью традиционного алгоритма численного решения системы дифференциальных уравнений первого порядка, например, методом Эйлера или Рунге–Кутты [191]. При этом первое уравнение дает длину волнового вектора ПМСВ  $k(y)$ , второе — направление этого вектора через угол  $\varphi(y)$  и третье — направление вектора групповой скорости и траекторию ПМСВ, на плоскости  $Oyz$  в виде  $z(y)$ .

### 3.9.2. Линейное продольно неоднородное поле

Приведенный в предыдущем разделе математический аппарат позволяет рассчитать распространение ПМСВ в неоднородном поле любой конфигурации.

Рассмотрим сначала наиболее простой частный случай линейно меняющегося продольно неоднородного поля, то есть такого, напря-

женность  $z$ -компоненты которого в системе координат  $Oxyz$  (рис. 3.1) имеет вид

$$H_z = H_0(1 + az), \quad (3.76)$$

где  $a$  — постоянное число, а  $x$  и  $y$ -компоненты соответственно равны нулю:  $H_x = 0$ ,  $H_y = 0$ .

Будем полагать  $H_0 = 437,5$  Э,  $a = 1/16$  см<sup>-1</sup>, так что  $z$  измеряется в см. Параметры структуры возьмем следующими: толщина ферритовой пластины —  $d = 15$  мкм, ее намагниченность  $4\pi M_0 = 1750$  Гс, толщина слоя диэлектрика между пластиной и решеткой  $p = 10$  мкм, параметры решетки  $A_0$  и  $A_2$  будем задавать в ходе расчета, а все параметры  $A_n$  при  $n \neq 2$  положим равными нулю. Параметры волны: частота 3200 МГц, начальный угол  $\varphi$  равен  $20^\circ$ .

*Изменение относительной ширины щелей решетки.* Рассмотрим сначала особенности распространения волн в структуре ФДР, намагниченной линейно неоднородным полем (3.76), при различной относительной ширине щелей решетки, описываемой коэффициентом  $A_0$  в формуле (3.46).

На рис. 3.16 представлены полученные траектории ПМСВ  $z(y)$  при  $A_2 = 0$  и различных значениях  $A_0$ : Кривая 1 ( $A_0 = 1,0$ ) соответствует сплошному металлу, кривая 10 ( $A_0 = 999\,999$ ) — ферритовой пластине со свободной поверхностью. Остальные кривые (2–9) соответствуют решетке с различной шириной щелей, увеличивающейся по мере увеличения номера кривой.

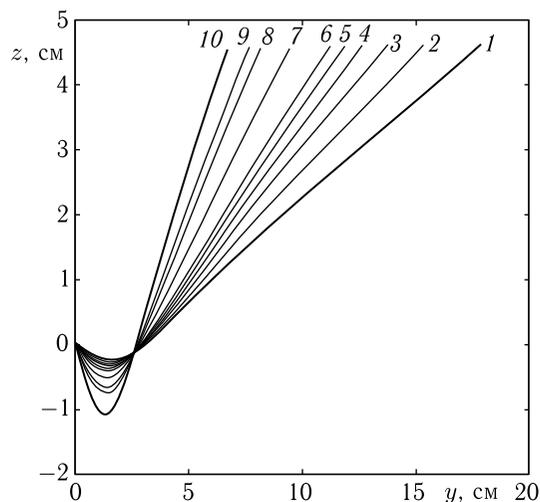


Рис. 3.16. Траектории ПМСВ в линейно неоднородном поле при  $A_2 = 0$  и различных значениях  $A_0$ : 1 — 1,0; 2 — 1,1; 3 — 1,2; 4 — 1,3; 5 — 1,4; 6 — 1,5; 7 — 2,0; 8 — 3,0; 9 — 4,0; 10 — 999 999

Из рисунка видно, что все траектории имеют V-образный характер, причем сначала они идут в сторону меньших полей, что задается положительным начальным значением угла  $\varphi$ , после чего, пройдя через точку минимума, поворачивают в сторону большего поля, где и обрываются, когда поле достигает предельного значения для данной частоты. При малых относительных значениях ширины щелей (малых  $w/b$ ) параметр экранирования  $g$  близок к единице: для кривой 2 он составляет 0,91, для кривой 3 — 0,83, вследствие чего эти кривые проходят довольно близко к траектории для структуры ФДМ (кривая 1). При больших относительных значениях ширины щелей (больших  $w/b$ ) параметр экранирования приближается к нулю: для кривой 8 этот параметр равен 0,33, для кривой 9 — 0,25, вследствие чего эти кривые стремятся к траектории для ферритовой пластины со свободной поверхностью (кривая 10). Траектории, соответствующие открытию щелей примерно на половину периода решетки ( $w/b \sim 0,5$ ) проходят вблизи середины промежутка между кривыми 1 и 10 (кривая 4, для которой  $g = 0,77$ , кривая 5, соответствующая  $g = 0,71$ , кривая 6 с  $g = 0,67$ , кривая 7 с  $g = 0,50$ ). Глубина минимума траекторий по мере раскрытия щелей растет, что также соответствует переходу от сплошного металла (кривая 10) к свободной поверхности феррита (кривая 1).

На рис. 3.17 приведены зависимости волнового числа  $k$  от координаты  $y$ , то есть  $k(y)$  при тех же значениях параметров структуры. Кривая 1 также соответствует сплошному металлу, кривая 10 — свободной поверхности феррита, а кривые 2–9 — различной степени открытия щелей решетки. Все кривые имеют подобный вид, аналогичный структурам ФДМ

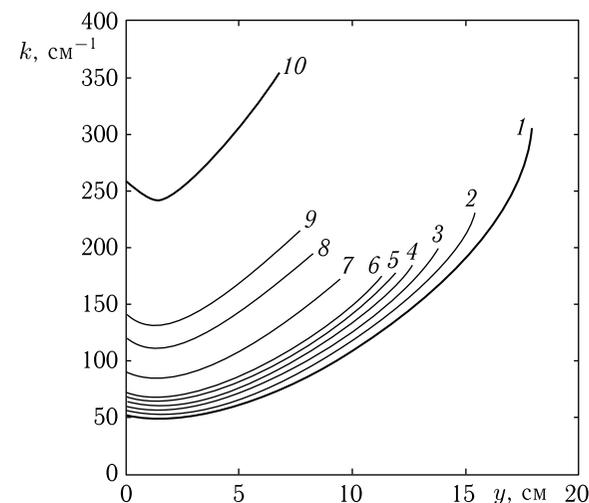


Рис. 3.17. Зависимости волнового числа  $k$  от координаты  $y$  при тех же параметрах, что на рис. 3.16 (номера кривых — те же)

и свободному ферриту. По мере расширения щелей кривые поднимаются, что соответствует переходу от сплошного металла к свободной поверхности феррита. Никаких особенностей, связанных с величиной волнового числа  $k$ , не наблюдается, что становится очевидным, если учесть, что все  $A_n$  равны нулю, то есть параметр  $g$  для каждой траектории всегда сохраняется постоянным.

*Роль зависимости параметра экранирования от волнового числа.* Рассмотрим теперь, как меняются траектории ПМСВ в структуре ФДР, если учесть зависимость параметра экранирования решетки от волнового числа. Обратимся к рис. 3.18, где представлены такие траектории при  $A_0 = 1,1$ ,  $A_n = 0$ , где  $n \neq 2$ , для различных значений параметра  $A_2$ .

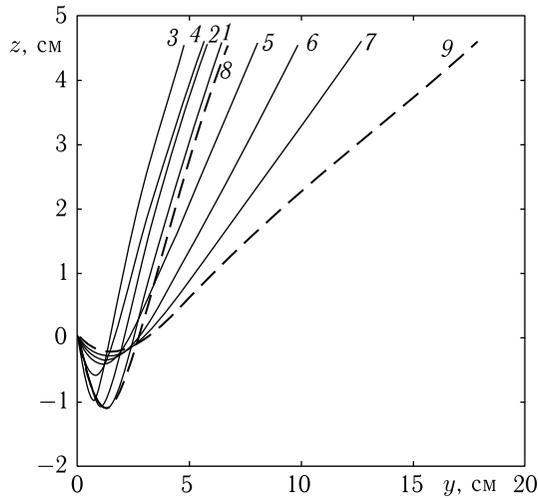


Рис. 3.18. Траектории ПМСВ при  $A_0 = 1,1$  и различных значениях параметра  $A_2$ : 1 —  $10,00 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ ; 2 —  $3,00 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ ; 3 —  $1,77 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ ; 4 —  $1,00 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ ; 5 —  $0,56 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ ; 6 —  $0,31 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ ; 7 —  $0,10 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ . Пунктирные кривые: 8 —  $A_0 = 999\,999$ ,  $A_2 = 0$  — свободная поверхность; 9 —  $A_0 = 1,0$ ,  $A_2 = 0$  — сплошной металл

Из рисунка можно видеть, что подобно предыдущему случаю все траектории имеют V-образный характер, причем по мере уменьшения величины параметра  $A_2$ , то есть увеличения  $g$ , сначала они также идут в сторону меньших полей, а затем, пройдя через точку минимума, поворачивают в сторону большего поля, где обрываются при предельном допустимом его значении. Здесь, однако, в отличие от предыдущего случая, не все траектории заключены между двумя крайними, соответствующими свободному ферриту (кривая 8) и сплошному металлу (кривая 9). При значениях  $A_2 \geq 1,77 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ , что, например при  $k = 100 \text{ см}^{-1}$ , соответствует  $g = 0,35$ , траектории слегка склоняются

в сторону меньших значений  $y$ , однако недалеко уходят от кривой для свободного феррита (кривая 8). При  $A_2 \leq 1,77 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$  ход траекторий по мере уменьшения  $A_2$  меняется на обратный, то есть теперь они склоняются в сторону больших значений  $y$  и стремятся к кривой для сплошного металла (кривая 9).

То есть по мере уменьшения  $A_2$ , что соответствует ослаблению зависимости параметра экранирования от волнового числа, протяженность траекторий вдоль оси  $Oy$  (то есть «раскрыв V-образности») сначала уменьшается, но, пройдя через критическое значение этого параметра, соответствующее  $A_2 \leq 1,77 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ , далее увеличивается, стремясь к таковой, соответствующей сплошному металлу.

Причину такого поведения траекторий можно понять из рассмотрения рис. 3.19 и 3.20, где приведены зависимости волнового числа  $k$  (рис. 3.19) и параметра экранирования  $g$  (рис. 3.20) от координаты  $y$ , меняющейся в процессе распространения волны по траектории. Там же для сравнения приведены аналогичные зависимости для свободного феррита — кривые 8, а также для сплошного металла — кривые 9.

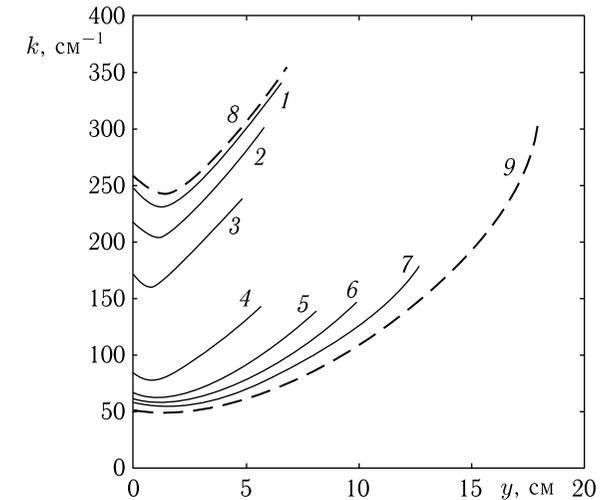


Рис. 3.19. Зависимости волнового числа  $k$  от координаты  $y$  при различных значениях  $m$ . Номера кривых и параметры построения — те же, что на рис. 3.18

Заметим прежде всего, что по мере уменьшения параметра  $A_2$  во всем интервале от  $10,00 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$  до  $0,10 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$  зависимости  $k(y)$  (рис. 3.19) всегда монотонно опускаются вниз, а зависимости  $g(y)$  (рис. 3.20) поднимаются вверх.

Как те, так и другие зависимости всегда заключены между соответствующими кривыми для свободного феррита и сплошного металла (кривые 8 и 9). По мере увеличения координаты  $y$  все зависимости  $k(y)$

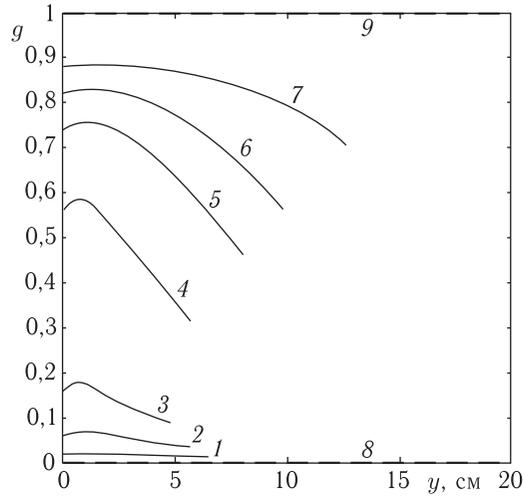


Рис. 3.20. Зависимости параметра экранирования  $g$  от координаты  $y$  при различных значениях  $A_2$ . Номера кривых и параметры построения — те же, что на рис. 3.18

(рис. 3.19) сначала спадают, а затем нарастают, тогда как зависимости  $g(y)$  (рис. 3.20) сначала нарастают, после чего спадают.

Заметим далее, что при уменьшении  $A_2$  параметр экранирования  $g$  при неизменном  $k$  всегда увеличивается, то есть приближение траекторий 5–7 к траектории 9, соответствующей сплошному металлу, является вполне естественным. В то же время удаление траекторий 1–3 от траектории 9 и даже расположение их левее траектории 8, соответствующей свободному ферриту, требует отдельного пояснения.

Такое обстоятельство становится понятным, если учесть, что для кривых 1–3 волновое число уже при малых  $y$  ( $\sim 0$ ) сразу довольно большое, поэтому параметр экранирования мал и эти траектории идут близко к траектории для свободного феррита (кривая 8). По мере увеличения  $y$  (до  $y \sim 1$  см) волновое число несколько уменьшается (рис. 3.19) и параметр экранирования увеличивается (рис. 3.20), в результате чего траектории 1–3 поворачивают в сторону большего поля раньше, чем в свободном феррите (рис. 3.18). При дальнейшем увеличении  $y$  (более 1 см) волновое число снова увеличивается (рис. 3.19), параметр экранирования уменьшается (рис. 3.20) и траектории 1–3 стремятся к большему полю подобно кривой для свободного феррита (кривая 8). Однако, поскольку поворот этих траекторий произошел раньше, чем происходит поворот траектории 8, они располагаются левее ее, то есть ближе к оси  $Oz$ . Другими словами,  $z$ -координаты минимумов траекторий 1–3 повышаются, а основная часть этих траекторий остается подобной кривой 8 для свободного феррита. Таким образом, траектории 1–3 идут ближе к оси  $Oz$ , чем траектория 8 для

свободного феррита, причем эта близость проявляется тем сильнее, чем меньше начальное значение волнового числа вблизи координаты  $y \sim 0$ . При  $A_2 \approx 1,77 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$  эта тенденция нарушается, так как волновое число сразу невелико и траектории близки к сплошному металлу (кривая 9). Уже для траектория 4 минимум стремится к таковому для сплошного металла (кривая 9), а возрастающий участок приближается к возрастающему участку для свободного феррита (кривая 8). Траектории 5–7 уже все более приближаются к траекториям для сплошного металла (кривая 9).

### 3.9.3. Квадратичное поле типа «долины»

В предыдущем разделе было рассмотрено распространение ПМСВ в структуре ФДР, намагниченной в плоскости линейно неоднородным полем вида:

$$H_z = H_0(bz + c), \quad (3.77)$$

где  $b = 1/16 \text{ см}^{-1} = 0,0625 \text{ см}^{-1}$ ,  $c = 1$ ,  $H_0 = 437,5 \text{ Э}$  (в предположении, что  $x$  и  $y$ -составляющие поля малы).

Рассмотрим теперь квадратичное поле вида:

$$H_z = H_0(az^2 + bz + c). \quad (3.78)$$

Для такого поля зависимости нормированной  $z$ -составляющей от координаты  $z$  показаны на рис. 3.21.

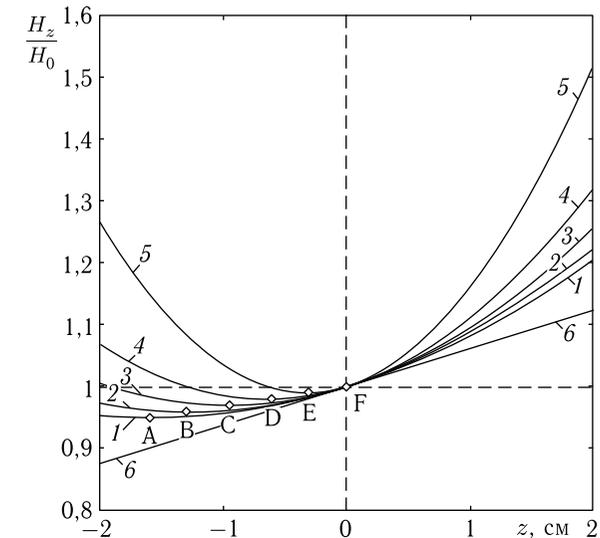


Рис. 3.21. Зависимости нормированной  $z$ -составляющей поля от координаты  $z$ . Параметры кривых приведены в табл. 3.1

Здесь коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  подобраны таким образом, чтобы при  $z = 0$  все зависимости  $H_z(z)$  проходили через точку с координатой  $\frac{H_z}{H_0} = 1$  (точка F) и в этой точке имели одинаковый наклон (производные всех кривых в этой точке одинаковы и равны  $1/16 \text{ см}^{-1} = 0,0625 \text{ см}^{-1}$ ). Таким образом, для всех кривых  $b = 1/16 \text{ см}^{-1} = 0,0625 \text{ см}^{-1}$ ,  $c = 1$ . При этом минимумы квадратичных кривых, обозначенные точками А, В, С, D, Е, приходятся на разные значения координаты  $z$ , которые будем обозначать далее через  $z_0$ . Значения  $a$  для кривых 1–5 подобраны таким образом, чтобы для нормированных значений минимумов обеспечить постоянный шаг по полю вдоль оси  $Oz$ . Этот шаг равен 0,01 нормированных единиц.

Параметры кривых приведены в таблице: столбец 1 — номера кривых на рисунке; столбец 2 — нормированные значения поля в минимумах кривых при  $z = z_0$ ; столбец 3 — разность между единицей и нормированным значением поля в минимуме; столбец 4 — значения  $a$ ; столбец 5 — соответствующие значения  $z_0$ .

Таблица 3.1. Параметры подмагничивающего поля

№№ кривых	$\frac{H_z(z_0)}{H_0}$	$1 - \frac{H_z(z_0)}{H_0}$	$a \text{ (см}^{-2}\text{)}$	$z_0 \text{ (см)}$
1	0,95	0,05	0,0195	-1,6026
2	0,96	0,04	0,0244	-1,2821
3	0,97	0,03	0,0326	-0,9615
4	0,98	0,02	0,0488	-0,6410
5	0,99	0,01	0,0977	-0,3205
6	1,00	0,00	0,0000	—

Линия 6 — прямая, соответствующая линейному полю, которое исследовалось в предыдущем разделе, и приведена здесь для сравнения.

*Траектории ПМСВ в поле типа «долины» для предельных параметров решетки.* Рассмотрим теперь траектории ПМСВ при тех же параметрах структуры, что и ранее: толщина ферритовой пленки  $d = 15 \text{ мкм}$ , ее намагниченность  $4\pi M_0 = 1750 \text{ Гс}$ , зазор между поверхностью пленки и плоскостью решетки  $p = 10 \text{ мкм}$ , начальный угол между направлением волнового вектора и осью  $Oy$   $\varphi = 20^\circ$ , частота СВЧ —  $3200 \text{ МГц}$ .

Предположим сначала, что параметр экранирования  $g$  не зависит от волнового числа  $k$ , то есть  $A_2 = 0$ . Пусть поле соответствует рис. 3.21, то есть  $b = 0,0625 \text{ см}^{-1}$ ,  $c = 1$ , а параметр  $a$  принимает значения, приведенные в таблице.

Рассмотрим траектории ПМСВ при конфигурациях поля, задаваемых различными значениями параметра  $a$ , для двух случаев.

1)  $A_0 = 0$  — щели решетки полностью открыты, поверхность пленки свободна. При этом траектории имеют вид, показанный на рис. 3.22.

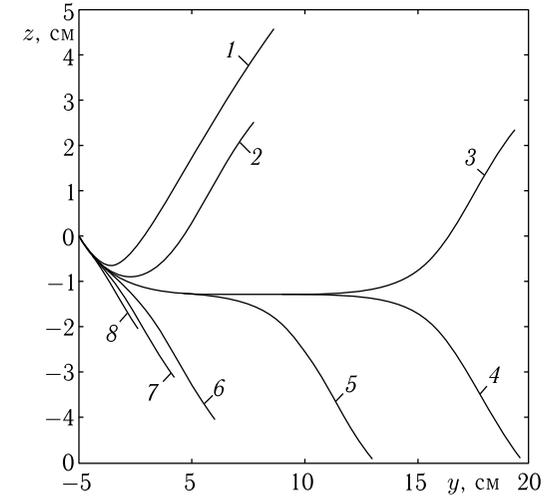


Рис. 3.22. Траектории ПМСВ при полностью открытых щелях решетки ( $A_0 = 0$ ) и различных значениях параметра  $a$ : 1 —  $0,0000 \text{ см}^{-2}$ ; 2 —  $0,01950 \text{ см}^{-2}$ ; 3 —  $0,024333 \text{ см}^{-2}$ ; 4 —  $0,024334 \text{ см}^{-2}$ ; 5 —  $0,0244 \text{ см}^{-2}$ ; 6 —  $0,0326 \text{ см}^{-2}$ ; 7 —  $0,0488 \text{ см}^{-2}$ ; 8 —  $0,0977 \text{ см}^{-2}$ . Горизонтальные участки кривых 3 и 4 соответствуют  $z = -1,278 \text{ см}$

2)  $A_0 = 1$  — щели решетки полностью закрыты, то есть над поверхностью пленки на расстоянии  $p = 10 \text{ мкм}$  находится слой сплошного металла. При этом траектории имеют вид, показанный на рис. 3.23.

Из рассмотрения рис. 3.22 и 3.23 видно, что на обоих рисунках часть траекторий поворачивает вверх, а часть вниз. Для рис. 3.22 (свободная поверхность) переход от кривых вверх к кривым вниз происходит при  $a_s = 0,0243445 \pm 0,0000005 \text{ см}^{-2}$ . При значении  $a$  меньшем этой величины все траектории идут вверх, при значении большем — вниз. Для рис. 3.23 (поверхность с металлом) переход от кривых вверх к кривым вниз происходит при  $a_m = 0,0632425 \pm 0,0000005 \text{ см}^{-2}$ .

Можно видеть, что в обоих случаях, как при свободной поверхности, так и для сплошного металла, при  $a < a_s$  все траектории идут вверх, а при  $a > a_m$  — вниз. Однако, при переходе от свободной поверхности к сплошному металлу траектории, соответствующие  $a_s \leq a \leq a_m$  меняют свой ход с положительного направления оси  $Oz$  на отрицательное.

Таким образом, в интервале полей, определяемом значениями  $a_s$  и  $a_m$ , при изменении раскрытия щелей решетки ход траекторий должен меняться с положительного направления оси  $Oz$  на отрицательное, что и будет рассмотрено в следующем разделе.

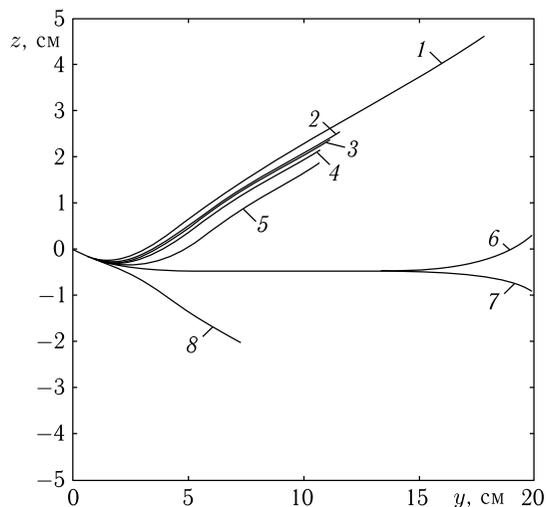


Рис. 3.23. Траектории ПМСВ при полностью закрытых щелях решетки ( $A_0 = 1$ ) и различных значениях параметра  $a$ : 1 —  $0,0000 \text{ см}^{-2}$ ; 2 —  $0,0195 \text{ см}^{-2}$ ; 3 —  $0,0244 \text{ см}^{-2}$ ; 4 —  $0,0326 \text{ см}^{-2}$ ; 5 —  $0,0488 \text{ см}^{-2}$ ; 6 —  $0,063242 \text{ см}^{-2}$ ; 7 —  $0,063243 \text{ см}^{-2}$ ; 8 —  $0,0977 \text{ см}^{-2}$ . Горизонтальные участки кривых 6 и 7 соответствуют  $z = -0,492 \text{ см}$

*Зависимость траекторий ПМСВ от относительной ширины щелей решетки.* Рассмотрим теперь, как меняются траектории ПМСВ при изменении раскрытия щелей решетки. При этом, как и ранее, предположим, что параметр экранирования  $g$  не зависит от волнового числа волны, то есть  $A_2 = 0$ . Пусть поле соответствует кривой 3 на рис. 3.21, то есть  $a = 0,0326 \text{ см}^{-2}$ ,  $b = 0,0625 \text{ см}^{-1}$ ,  $c = 1$ . При этом  $z_0 = -0,9615 \text{ см}$ . Полученные траектории ПМСВ при различных значениях параметра  $A_0$  показаны на рис. 3.24.

Из рисунка видно, что существует критическое значение параметра раскрытия щелей решетки  $A_{0c} = 4,9002025 \pm 0,0000005$ , ниже которого траектории, не доходя до дна «долины», поворачивают вверх, а выше — проходят через дно «долины» и поворачивают вниз. Соответствующее критическое значение  $g \approx 0,2041$ .

*Траектории ПМСВ с учетом зависимости параметра экранирования решетки от волнового числа.* Рассмотрим теперь, как ведут себя траектории ПМСВ, когда параметр экранирования решетки  $g$  зависит от волнового числа  $k$ . Положим далее, что раскрытие щелей решетки не меняется, то есть параметр  $A_0$  остается постоянным, равным, например, 2. На рис. 3.25 показаны зависимости параметра экранирования от волнового числа при различных значениях параметра  $A_2$ .

Из рисунка видно, что в интервале волновых чисел от  $100 \text{ см}^{-1}$  до  $300 \text{ см}^{-1}$  параметр экранирования при  $A_2 = 10^{-3} \text{ см}^2$  (кривая 1)

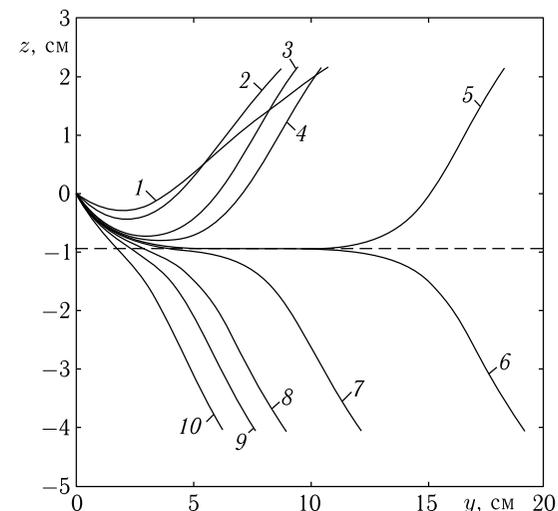


Рис. 3.24. Траектории ПМСВ при различном раскрытии щелей решетки. Номера кривых соответствуют следующим значениям  $A_0$ : 1 — 1,0; 2 — 2,0; 3 — 4,0; 4 — 4,5; 5 — 4,900202; 6 — 4,900203; 7 — 5,0; 8 — 6,0; 9 — 8,0; 10 — 32,0. Пунктирной линией показано дно «долины» поля, соответствующее  $z = -0,9615 \text{ см}$ . Траектория 1 соответствует полному закрытию щелей решетки, траектория 10 — полному их открытию

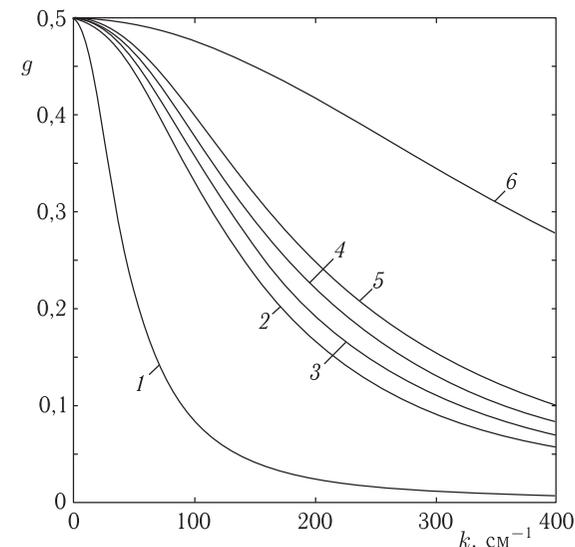


Рис. 3.25. Зависимости параметра экранирования от волнового числа. Номера кривых соответствуют следующим значениям  $A_2$ : 1 —  $10,00 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ ; 2 —  $1,00 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ ; 3 —  $0,80 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ ; 4 —  $0,62 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ ; 5 —  $0,50 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ ; 6 —  $0,10 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$

составляет менее 0,1, то есть свойства структуры приближаются к пленке со свободной поверхностью, тогда как при  $A_2 = 10^{-5} \text{ см}^2$  (кривая 6) он равен 0,3–0,4, то есть металлические штрихи решетки играют значительно большую роль. При  $A_2 = 10^{-4} \text{ см}^2$  (кривая 2) он меняется между этими двумя значениями, то есть именно здесь можно ожидать наиболее сильного изменения свойств структуры при изменении волнового числа. Кривые 3–5 приведены для сгущения сетки значений  $A_2$  и показывают, как меняется параметр экранирования при небольших изменениях  $A_2$ .

Рассмотрим теперь траектории ПМСВ при различных значениях параметра  $A_2$ , иллюстрируемые рис. 3.26. На этом рисунке показаны траектории ПМСВ в структуре ФДР, намагниченной в плоскости полем типа «долины» при  $a = 0,0326 \text{ см}^{-2}$ . Дно «долины» показано пунктирной линией и соответствует  $z = -0,9615 \text{ см}$ . Кривые построены при  $A_0 = 2,0$  для различных значений  $A_2$ .

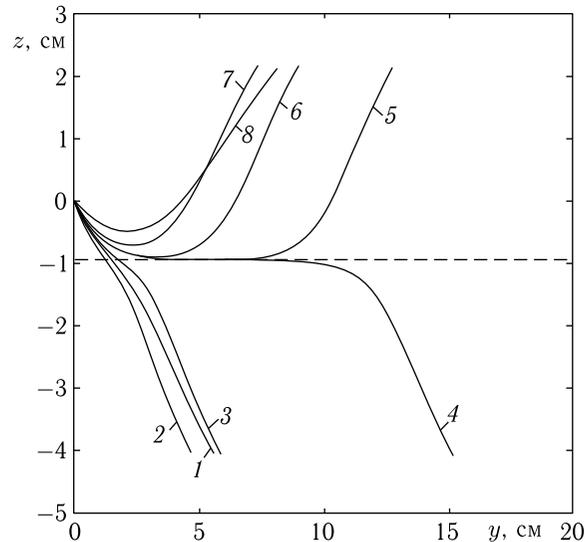


Рис. 3.26. Траектории ПМСВ при следующих значениях параметра  $A_2$ : 1 —  $10,00 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ ; 2 —  $1,00 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ ; 3 —  $0,80 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ ; 4 —  $0,6431 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ ; 5 —  $0,6430 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ ; 6 —  $0,62 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ ; 7 —  $0,50 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ ; 8 —  $0,10 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$

Из рисунка видно, что существует критическое значение  $A_{2c} = (0,64305 \pm 0,00005) \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ , выше которого траектории проходят через дно «долины» и поворачивают вниз, а ниже — не доходя до дна «долины», поворачивают вверх. Переход происходит между траекториями 4 и 5, горизонтальный участок которых соответствует дну «долины».

Рассмотрим теперь, что происходит с волновым числом  $k$  при распространении ПМСВ по траекториям, показанным на рис. 3.26.

Соответствующие зависимости  $k(y)$  для тех же значений  $A_2$  приведены на рис. 3.27.

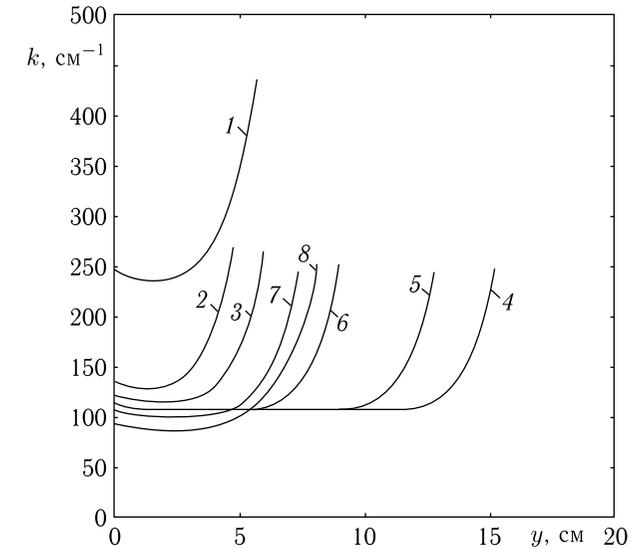


Рис. 3.27. Зависимости волнового числа  $k$  от координаты  $y$  при распространении ПМСВ по траекториям, показанным на рис. 3.26. Номера кривых — те же

Из рис. 3.27 видно, что при любых значениях  $A_2$  зависимости  $k(y)$  сначала идут почти горизонтально, а к концу траекторий поворачивают вверх. Горизонтальный участок кривых 4 и 5 соответствует  $k = 107,0 \text{ см}^{-1}$ . До подъема вверх кривые 1–3 идут выше этого значения, а кривые 6–8 — ниже. Таким образом, значение волнового числа  $k = 107,0 \text{ см}^{-1}$  можно считать критическим, соответствующим критическому значению  $A_{2c} = (0,64305 \pm 0,00005) \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ . При этом  $A_2 \cdot k^2$  равно 0,7362, а  $g = 0,3655$ .

Рассмотрим теперь, что происходит с параметром экранирования  $g$  на тех же траекториях. Соответствующие зависимости  $g(y)$  для тех же значений  $A_2$  приведены на рис. 3.28, где номера кривых соответствуют номерам кривых на рис. 3.26 и 3.27.

Из рис. 3.28 видно, что при любых значениях  $A_2$  зависимости  $g(y)$  сначала идут почти горизонтально, а к концу траекторий поворачивают вниз. Горизонтальный участок кривых 4 и 5 соответствует  $g = 0,3655$ , то есть тому же критическому значению, что и для рис. 3.27. До спада вниз кривые 1–3 идут ниже этого значения, а кривые 6–8 — выше.

Общий ход всей системы кривых, показанных на рис. 3.26–3.28 согласуется с ходом кривых, показанных на рис. 3.24. Действительно, здесь траектории 1–3 (рис. 3.26) идут вниз, что соответствует значениям волнового числа большим критического (рис. 3.27), при этом

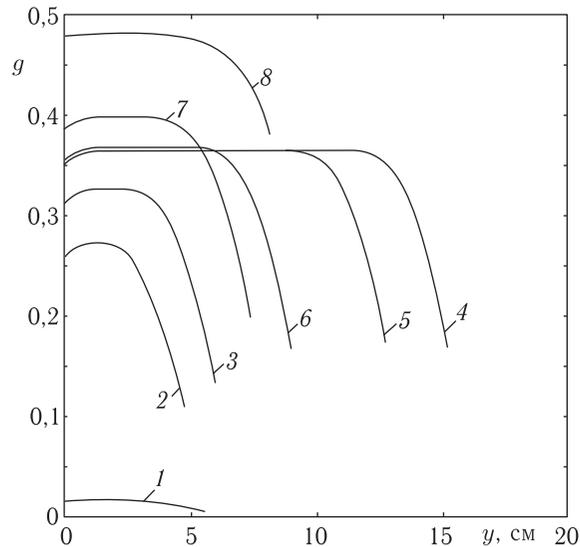


Рис. 3.28. Зависимости параметра экранирования  $g$  от координаты  $y$  при распространении ПМСВ по траекториям, показанным на рис. 3.26. Номера кривых — те же

параметр экранирования меньше критического (рис. 3.28), и траектории приближаются к траекториям для свободной поверхности пленки, аналогично траекториям 6–10 на рис. 3.24. Траектории 6–8 (рис. 3.26) идут вверх, что соответствует значениям волнового числа, меньшим критического (рис. 3.27), при этом параметр экранирования больше критического (рис. 3.28), и траектории приближаются к траекториям для сплошного металла над поверхностью пленки, аналогично траекториям 1–5 на рис. 3.24.

### 3.9.4. Квадратичное поле типа «вала»

В предыдущих разделах рассмотрены траектории волновых пучков прямых ПМСВ в структуре ФДР, намагниченной неоднородными полями — линейным и типа «долины». Основной особенностью траекторий в обоих случаях явилось изменение их вида от характерного для структуры ФДМ к виду, свойственному свободной поверхности феррита, происходящее по мере увеличения волнового числа при распространении в сторону большего значения поля. Такое изменение приводит к выходу части траекторий из сектора, ограниченного траекториями, соответствующими структуре ФДМ и свободной ферритовой пластине, причем выход проявляется тем сильнее, чем больше параметр экранирования зависит от волнового числа. В настоящем разделе будут рассмотрены особенности распространения ПМСВ в структуре ФДР, намагниченной полем типа «вала».

Траектории ПМСВ в поле типа «вала» при различных параметрах решетки. Будем рассматривать квадратичное поле типа «вала», имеющее вид

$$H_z = H_0(az^2 + bz + c), \quad (3.79)$$

где, в отличие от случая «долины» параметр  $a$  является отрицательным. Положим  $a = -1/16 \text{ см}^{-2} = -0,0625 \text{ см}^{-2}$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$ ,  $H_0 = 437,5 \text{ Э}$ . Остальные параметры остаются теми же, что и раньше: толщина ферритовой пленки  $d = 15 \text{ мкм}$ , ее намагниченность  $4\pi M_0 = 1750 \text{ Гс}$ , зазор между поверхностью пленки и плоскостью решетки  $p = 10 \text{ мкм}$ , частота СВЧ —  $3200 \text{ МГц}$ .

В монографии [1] и цитированных там работах было показано, что в поле типа «вала» траектории ПМСВ имеют псевдосинусоидальный характер с периодическими осцилляциями вдоль направления оси «вала», причем для пучка траекторий, выходящих из начальной точки параллельно оси, наблюдается явление псевдофокусировки, состоящее в периодическом сужении пучка вблизи точек пересечения траекторий с осью «вала».

Можно полагать, что в структуре ФДР траектории ПМСВ имеют аналогичный характер, однако, как амплитуда, так и период осцилляций, а также характер псевдофокусировки должны определяться параметрами решетки: шириной щели и зависимостью параметра экранирования от волнового числа. В данном рассмотрении в качестве переменного параметра решетки будем использовать относительную ширину щели  $W_B = w/b$ , где  $w$  — абсолютная ширина щели,  $b$  — период решетки (разд. 3.3.4).

Наблюдаемые явления иллюстрируются рис. 3.29–3.32, где показаны траектории ПМСВ в поле типа «вала» при различной степени открытия щелей решетки, то есть различных значениях относительной ширины щели  $W_B$ . Зависимость параметра экранирования  $g$  от волнового числа  $k$  отсутствует ( $A_2 = 0$ ).

На рис. 3.29 показаны траектории волновых пучков ПМСВ при различной степени открытия щелей. Ориентация волнового вектора в начальной точке траектории при  $y = 0$  соответствует  $\varphi = 20^\circ$ . Кривая 1 соответствует  $W_B = 1$ , то есть щели решетки открыты полностью, поверхность пленки свободна. Кривая 2 соответствует  $W_B = 3/4$ , то есть ширина щели составляет три четверти полного периода решетки. Кривая 3 соответствует  $W_B = 1/2$ , то есть ширина щели равна половине периода решетки. Кривая 4 соответствует  $W_B = 0$ , то есть щель закрыта полностью, над поверхностью феррита расположен сплошной слой металла и структура ФДР вырождается в структуру ФДМ.

Из рисунка видно, что изменение ширины щели приводит к трансформации траекторий от траектории 1, соответствующей свободной пленке, к траектории 4, соответствующей структуре ФДМ, причем эта трансформация происходит плавно и монотонно путем растяжения траектории вдоль оси «вала» с одновременным уменьшением ее амплитуды.

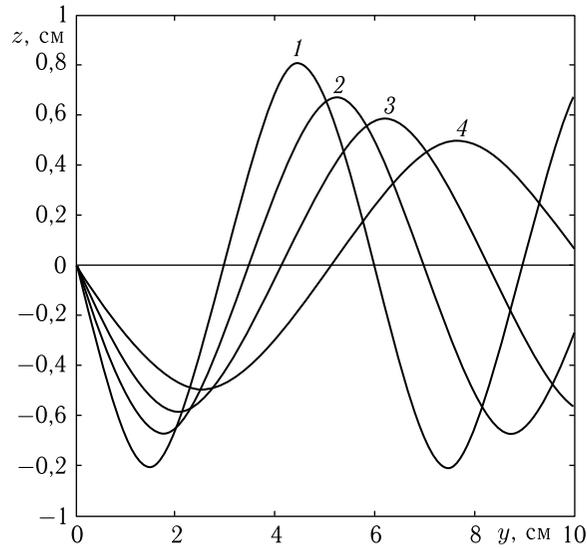


Рис. 3.29. Траектории ПМСВ при  $\varphi = 20^\circ$  для случаев различной относительной ширины щели решетки  $W_B$ : 1 — 1; 2 — 3/4; 3 — 1/2; 4 — 0

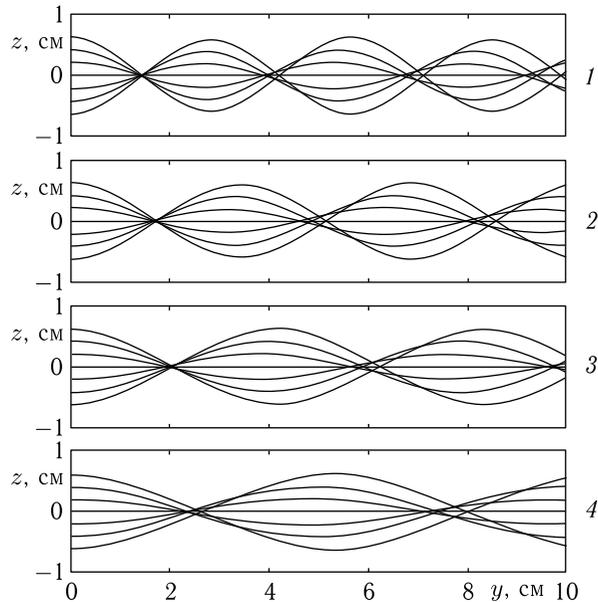


Рис. 3.30. Траектории ПМСВ при  $\varphi = 0^\circ$  для случаев различной степени открытия щелей решетки. Номера частей рисунка соответствуют значениям  $W_B$ : 1 — 1; 2 — 3/4; 3 — 1/2; 4 — 0

На рис. 3.30 показаны траектории ПМСВ в тех же условиях, что и для рис. 3.29, но при начальной ориентации волнового вектора параллельной оси  $Oy$ , то есть при  $\varphi = 0^\circ$ . Показаны шесть траекторий, выходящих из разных точек оси  $Oz$  симметрично относительно точки  $z = 0$ . Для удобства рассмотрения рисунок разделен на четыре части, соответствующие различным значениям ширины щели. Номера отдельных частей рисунка соответствуют тем же значениям ширины щели  $W_B$ , что и номера кривых на рис. 3.29. Таким образом, траектории части 1 соответствуют свободной поверхности ферритовой пленки, траектории части 4 — структуре ФДМ.

Из рисунка видно, что все траектории имеют псевдосинусоидальный характер и периодически собираются в точках псевдофокусировки. Как и в прошлом случае изменение ширины щели приводит к плавной трансформации траекторий от случая 1, соответствующего свободной пленке, к случаю 4, соответствующему структуре ФДМ, при этом период псевдофокусировки плавно и монотонно увеличивается, а амплитуда траекторий сохраняется постоянной.

*Траектории ПМСВ с учетом зависимости параметра экранирования решетки от волнового числа.* Рассмотрим теперь, что происходит с траекториями, когда параметр экранирования зависит от волнового числа.

На рис. 3.31 показаны траектории ПМСВ при  $\varphi = 20^\circ$  для случаев различной зависимости параметра  $g$  от волнового числа. Рассмотрен случай, когда  $A_N$  отлично от нуля только при одном значении  $N = 2$ , то есть сумма ряда в формуле (3.46) содержит только одно слагаемое:  $A_2 \cdot (kd)^2$ . Кривая 1 соответствует  $W_B = 1$ , то есть свободной поверхности феррита. При этом величина  $A_2$  может быть произвольной. Кривые 2–4 соответствуют  $W_B = 0,1$ , то есть ширина щели составляет 0,1 от периода решетки. При этом кривая 2 соответствует  $A_2 = 10^{-3}$ , кривая 3 —  $A_2 = 10^{-4}$ , кривая 4 —  $A_2 = 10^{-5}$ , то есть по мере перехода от кривой 2 к кривой 4 зависимость параметра экранирования от волнового числа уменьшается. Кривая 5 соответствует  $W_B = 0$ , то есть структуре ФДМ со сплошным слоем металла. При этом величина  $A_2$  может быть произвольной.

Из рисунка видно, что при переходе от свободной поверхности к структуре ФДР с сильной зависимостью параметра экранирования  $g$  от волнового числа  $k$  период траектории 2 по сравнению с траекторией 1 сильно уменьшается (приблизительно в полтора раза). Если после этого зависимость  $g$  от  $k$  становится слабее (то есть  $A_2$  уменьшается), то период траекторий 2–4 постепенно увеличивается, стремясь к периоду для структуры ФДМ (кривая 5).

Такое поведение траекторий можно объяснить на основе рассмотрения изочастотных кривых, аналогично тому, как это делается в работах [1, 95, 99, 207]. Действительно, переход от свободной поверхности к решетке с малой шириной щели ( $W_B = 0,1$ ) означает сильный сдвиг

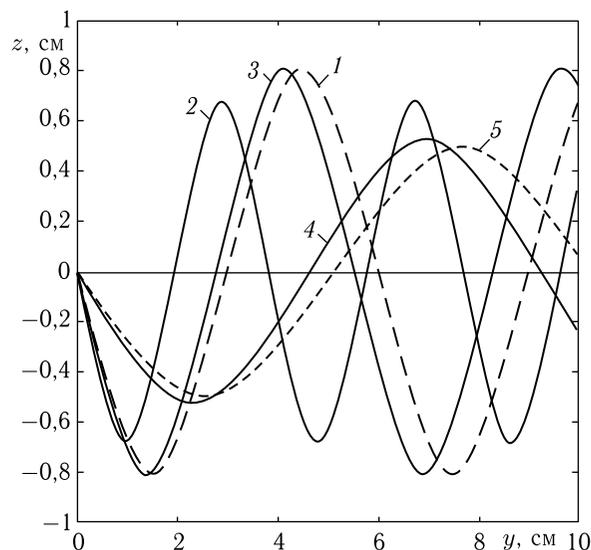


Рис. 3.31. Траектории ПМСВ при  $\varphi = 20^\circ$  для случаев различной зависимости параметра  $g$  от волнового числа. Номера кривых: 1 — свободная поверхность:  $W_B = 1$ ,  $A_2$  — произвольно; 2 —  $W_B = 0,1$ ,  $A_2 = 10^{-3}$ ; 3 —  $W_B = 0,1$ ,  $A_2 = 10^{-4}$ ; 4 —  $W_B = 0,1$ ,  $A_2 = 10^{-5}$ ; 5 — структура ФДМ:  $W_B = 0$ ,  $A_2$  — произвольно

изочастотных кривых в сторону малых волновых чисел. При этом большое значение  $A_2$  способствует включению в работу малых волновых чисел, в результате чего траектория искривляется сильнее, чем в случае свободной поверхности, то есть тем самым смещается в левую сторону по рис. 3.31: кривая 2 идет левее кривой 1. Если после этого величина  $A_2$  уменьшается, то малые волновые числа перестают работать, кривизна траектории уменьшается и траектория постепенно смещается направо по рис. 3.31, то есть кривая 3 идет правее кривой 2, а кривая 4 — еще правее. При бесконечном уменьшении величины  $A_2$  параметр экранирования стремится к единице, что означает стремление траекторий к случаю структуры ФДР: кривая 4 стремится к кривой 5.

Таким образом, при введении решетки период траекторий по сравнению со свободной пленкой резко уменьшается (переход от кривой 1 к кривой 2), после чего, по мере уменьшения зависимости параметра экранирования от волнового числа, постепенно увеличивается, стремясь к периоду, соответствующему структуре ФДМ (переход от кривой 2 к кривой 3, а затем 4).

Рассмотрим теперь в тех же условиях что и для рис. 3.31 пучок траекторий, соответствующих начальной ориентации волнового вектора, параллельной оси  $Oy$ , то есть при  $\varphi = 0^\circ$ . Полученные кривые показаны на рис. 3.32.

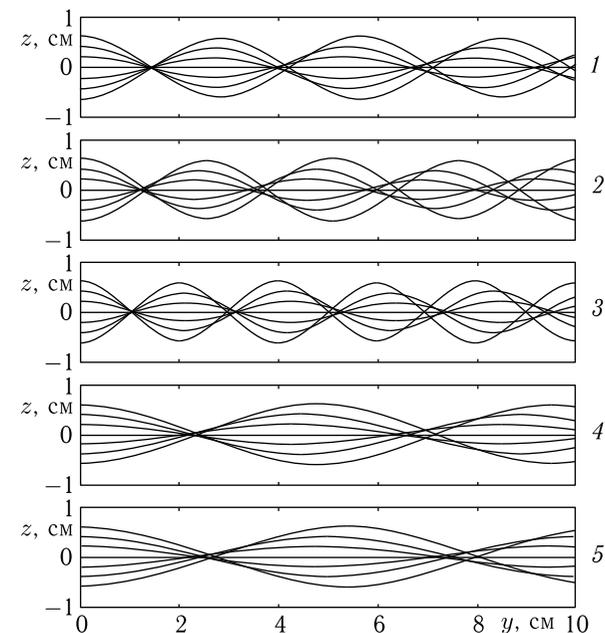


Рис. 3.32. Траектории ПМСВ при  $\varphi = 0^\circ$  для случаев различной зависимости параметра  $g$  от волнового числа. Номера кривых — те же, что на рис. 3.31

Здесь особенности, отмеченные для кривых на рис. 3.31, наглядно проявляются на свойствах псевдофокусировки. Действительно, при переходе от кривых 1 (свободная поверхность) к кривым 2 (структура ФДР с малой шириной щели и сильной зависимостью  $g$  от  $k$ ) период псевдофокусировки заметно уменьшается. Эта же тенденция еще остается при переходе от кривых 2 к кривым 3, то есть когда зависимость  $g$  от  $k$  еще достаточно сильна. Однако при переходе от кривых 3 к кривым 4 период псевдофокусировки резко увеличивается, стремясь к периоду, соответствующему структуре ФДМ (кривые 5).

Таким образом, при введении решетки период псевдофокусировки по сравнению со случаем свободной пленки сначала уменьшается (переход от кривых 1 к кривым 2 и затем 3), после чего, по мере уменьшения зависимости параметра экранирования от волнового числа увеличивается, стремясь к периоду, соответствующему структуре ФДМ (переход от кривой 3 к кривой 4).

### Выводы по главе 3

Основные результаты, полученные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Теоретически рассмотрена дисперсия поверхностных магнитостатических волн (ПМСВ) в однородно намагниченной структуре феррита-

диэлектрик-решетка из металлических полос (ФДР). Для объяснения наблюдаемого в эксперименте значительного увеличения крутизны спада дисперсионных кривых в области обратных волн по сравнению со случаем сплошного металла предложена модель просачивания волны через промежутки между штрихами решетки в открытое пространство. Для количественной характеристики просачивания введен «параметр экранирования», определяемый шириной штрихов решетки и промежутков между ними. Получено дисперсионное соотношение для ПМСВ, распространяющихся в структуре ФДР, представляющее собой линейную комбинацию дисперсионных соотношений для свободной пленки и структуры феррит-диэлектрик-металл, коэффициентом связи между которыми является параметр экранирования. Предложено представление параметра экранирования в виде обратной величины от разложения в степенной ряд по волновому числу магнитостатической волны. Рассмотрен вклад различных степеней разложения в формирование результирующей дисперсионной кривой для ПМСВ. Показано, что наиболее адекватное объяснение наблюдаемого в эксперименте увеличения крутизны дисперсионной кривой для обратных волн имеет место при учете зависимости параметра экранирования от обратного квадрата волнового числа.

2. Для структуры феррит-диэлектрик-решетка из металлических полос, намагниченной линейно неоднородным полем, на основе модели частичного просачивания волны через решетку рассчитаны траектории пучков магнитостатических волн, распространяющихся в плоскости структуры. Параметр экранирования решетки представлен в виде разложения в ряд по волновому числу и получены зависимости этого параметра от коэффициентов разложения. Исследованы траектории волн, распространяющихся в структуре, в зависимости от коэффициентов разложения параметра экранирования. Показано, что траектории ПМСВ в условиях подмагничивания структуры линейно неоднородным полем имеют V-образный характер и стремятся в сторону больших значений поля. При ограничении разложения первым членом ряда, что соответствует изменению относительной ширины щелей решетки при отсутствии зависимости параметра экранирования от волнового числа, траектории магнитостатических волн всегда располагаются между траекториями, соответствующими структуре феррит-диэлектрик-металл и ферритовой пластине со свободной поверхностью. При учете квадратичной зависимости параметра экранирования от волнового числа тенденция поворота траекторий в сторону большего поля усиливается, в результате чего часть траекторий выходит из сектора, ограниченного траекториями, соответствующими структуре феррит-диэлектрик-металл и ферритовой пластине со свободной поверхностью, и распространяется за его пределами.

3. Для структуры феррит-диэлектрик-решетка из металлических полос, намагниченной квадратично неоднородным полем типа «долины», на основе модели частичного просачивания энергии волны через

решетку рассчитаны траектории пучков магнитостатических волн, распространяющихся в плоскости структуры. Параметр экранирования решетки представлен в виде разложения в ряд по волновому числу. Исследованы траектории волн, распространяющихся в структуре, в зависимости от коэффициентов разложения параметра экранирования. Показано, что траектории ПМСВ в условиях подмагничивания структуры квадратично неоднородным полем типа «долины» могут как поворачивать в сторону большего поля, не доходя до дна «долины», так и проходить через дно «долины», стремясь к большему полю по другую ее сторону. Выявлены параметры квадратичного поля, при которых наблюдается тот или иной вид траекторий. Определен интервал значений этих параметров, в пределах которого характер траекторий меняется в ту или другую сторону при изменении параметров решетки. Выявлено существование ряда критических параметров решетки, а именно — величины раскрытия щелей и зависимости параметра экранирования от волнового числа, при переходе через которые меняется характер траекторий с проходящего через дно «долины», на поворачивающий без прохождения.

4. Для структуры феррит-диэлектрик-решетка из металлических полос, намагниченной неоднородным полем типа «вала», на основе модели частичного просачивания энергии волны через решетку рассчитаны траектории пучков магнитостатических волн, распространяющихся в плоскости структуры. Параметр экранирования решетки представлен в виде разложения в ряд по волновому числу. Исследованы траектории волн, распространяющихся в структуре, в зависимости от коэффициентов разложения параметра экранирования. Показано, что траектории ПМСВ в условиях подмагничивания структуры неоднородным полем типа «вала» имеют осциллирующий псевдосинусоидальный характер, причем как амплитуда, так и период осцилляций, а также характер псевдофокусировки в значительной степени определяются параметрами решетки: шириной щели и зависимостью параметра экранирования от волнового числа. При отсутствии зависимости параметра экранирования от волнового числа изменение ширины щели решетки приводит к плавному монотонному переходу от траектории, соответствующей свободной пленке, к траектории, соответствующей структуре ФДМ, а также плавному и монотонному увеличению периода псевдофокусировки. При учете квадратичной зависимости параметра экранирования от волнового числа введение решетки по сравнению со свободной пленкой приводит к резкому уменьшению периода осцилляций траекторий, а также уменьшению периода сужения волнового пучка при псевдофокусировке. По мере уменьшения зависимости параметра экранирования от волнового числа как период осцилляций отдельной траектории, так и период точек псевдофокусировки увеличиваются, стремясь к периодам, соответствующим структуре ФДМ.

## Глава 4

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ МСВ В РЕШЕТКАХ, ПЕРИОД КОТОРЫХ ТОГО ЖЕ ПОРЯДКА, ЧТО И ДЛИНА ВОЛНЫ

Ввиду высокой идеологической сложности материала данной главы, рассмотрим сначала основной математический аппарат, традиционно используемый в подобных задачах, после чего остановимся на специфике многослойных структур ограниченной протяженности, в том числе обладающих магнитными свойствами.

### 4.1. Традиционный математический аппарат, используемый для анализа распространения волн в периодических структурах

Одним из наиболее важных вопросов, касающихся МСВ, является их распространение в структурах с периодическими неоднородностями, то есть разнообразными решетками. Значительная часть известных авторам работ [16–24, 27–30, 51, 52] посвящена волнам, длина которых сравнима или того же порядка, что и период решетки. При этом обобщенное волновое уравнение принимает вид

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + G(x) \cdot u(x) = 0, \quad (4.1)$$

где  $G(x)$  — периодическая функция с периодом  $d$ , то есть подчиняющаяся условию

$$G(x + d) = G(x). \quad (4.2)$$

Это уравнение носит название уравнения Хилла [69], в том числе при  $d = \pi$ , а частный его случай вида:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \left( \eta + \gamma \cdot \cos \frac{2\pi x}{d} \right) \cdot u(x) = 0, \quad (4.3)$$

где  $\eta$  и  $\gamma$  являются постоянными, задаваемыми условиями задачи, называется уравнением Матье [69, 208].

В задачах для МСВ волноведущая структура в пределах каждого штриха решетки, как правило, является однородной. То же касается промежутков между штрихами. Так что решетку можно рассматривать как чередование участков с двумя наборами параметров, то есть функ-

ция  $G(x)$  представляет собой «ступенчатую» функцию [209], на радиотехническом языке — типа последовательности одинаковых прямоугольных импульсов. В этом случае весьма удобным оказывается решение типа Кронига–Пенни, подробное изложение которого приведено в книге Бриллюэна–Пароди [69].

Если параметры структуры внутри штрихов и промежутков не являются постоянными, но структура в целом остается периодической, то в этом случае решение Кронига–Пенни неприменимо и требуется использование решения Хилла. Схематичное изложение этого решения также приведено в книге Бриллюэна–Пароди [69] или в книге Уиттекера–Ватсона [210].

Ввиду важности этих решений рассмотрим их более подробно. Оба решения содержат в своей основе теорему Флоке, определяющую общий вид, в котором производится далее поиск конкретного решения. С этой теоремы и начнем изложение.

#### 4.1.1. Теорема Флоке

Теорема Флоке дает общий вид решения уравнения с периодическим коэффициентом в виде произведения экспоненты на периодическую функцию. Рассмотрим эту теорему более подробно, в основном, следуя [210].

*Общая формулировка.* Уравнение

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + G(x) \cdot u(x) = 0, \quad (4.4)$$

где  $G(x)$  — периодическая функция с периодом  $d$ , имеет решение

$$u(x) = e^{\mu x} \cdot \varphi(x), \quad (4.5)$$

где  $\varphi(x)$  — периодическая функция с тем же периодом  $d$ , а периодичность  $G(x)$  и  $\varphi(x)$  означает выполнение соотношений:

$$G(x + d) = G(x), \quad (4.6)$$

$$\varphi(x + d) = \varphi(x). \quad (4.7)$$

*Доказательство.* Из общей теории линейных уравнений следует, что уравнение (4.4) имеет два линейно независимых частных решения  $g(x)$  и  $h(x)$ , то есть выполняются соотношения:

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2} + G(x) \cdot g(x) = 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{d^2 h(x)}{dx^2} + G(x) \cdot h(x) = 0. \quad (4.9)$$

Заменим  $x$  на  $x + d$  (то есть произведем замену переменных):

$$\frac{d^2 g(x+d)}{dx^2} + G(x+d) \cdot g(x+d) = 0, \quad (4.10)$$

$$\frac{d^2 h(x+d)}{dx^2} + G(x+d) \cdot h(x+d) = 0. \quad (4.11)$$

В силу условия периодичности  $G(x)$  (4.6) из (4.10) и (4.11) получаем

$$\frac{d^2 g(x+d)}{dx^2} + G(x) \cdot g(x+d) = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{d^2 h(x+d)}{dx^2} + G(x) \cdot h(x+d) = 0. \quad (4.13)$$

Эти уравнения совпадают с (4.8) и (4.9) с точностью до замены функций  $g(x)$  и  $h(x)$  на функции  $g(x+d)$  и  $h(x+d)$ . Таким образом получаем, что  $g(x+d)$  и  $h(x+d)$  также являются решениями уравнения (4.4). В силу общей теории линейных уравнений любое решение можно представить в виде линейной комбинации частных линейно независимых решений с постоянными коэффициентами. То есть  $g(x+d)$  и  $h(x+d)$  можно представить в виде:

$$g(x+d) = \alpha_1 g(x) + \alpha_2 h(x), \quad (4.14)$$

$$h(x+d) = \beta_1 g(x) + \beta_2 h(x), \quad (4.15)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  — постоянные коэффициенты, значения которых полностью определяются величиной периода  $d$  и видом функций  $g(x)$  и  $h(x)$ .

Так как  $g(x)$  и  $h(x)$  — частные линейно независимые решения, то полное решение уравнения (4.4) можно представить в виде:

$$F(x) = A \cdot g(x) + B \cdot h(x). \quad (4.16)$$

Заменив переменную  $x$  на  $x + d$ , получаем

$$F(x+d) = A \cdot g(x+d) + B \cdot h(x+d). \quad (4.17)$$

Предположим, что  $F(x+d)$  можно представить в виде:

$$F(x+d) = k \cdot F(x), \quad (4.18)$$

то есть, с учетом (4.17), выполняется равенство:

$$F(x+d) = A \cdot k \cdot g(x) + B \cdot k \cdot h(x), \quad (4.19)$$

где  $k$  — постоянный числовой коэффициент.

Для правомерности сделанного предположения (4.18) надо найти явное выражение для  $k$ . Для этого подставим (4.14), (4.15) в (4.17) и приведем подобные члены, в результате чего получим:

$$F(x+d) = (A \cdot \alpha_1 + B \cdot \beta_1) \cdot g(x) + (A \cdot \alpha_2 + B \cdot \beta_2) \cdot h(x). \quad (4.20)$$

Сравнивая (4.20) с (4.19) получаем:

$$A \cdot k = A \cdot \alpha_1 + B \cdot \beta_1, \quad (4.21)$$

$$B \cdot k = A \cdot \alpha_2 + B \cdot \beta_2. \quad (4.22)$$

Приводя в (4.21) и (4.22) подобные члены, получаем:

$$A \cdot (\alpha_1 - k) + B \cdot \beta_1 = 0, \quad (4.23)$$

$$A \cdot \alpha_2 + B \cdot (\beta_2 - k) = 0. \quad (4.24)$$

Выражения (4.23)–(4.24) можно рассматривать как систему уравнений относительно  $A$  и  $B$ , в которой  $k$  играет роль параметра. Условием наличия ненулевого решения такой системы является равенство нулю ее определителя, что дает условие на  $k$ :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - k & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 - k \end{pmatrix} = 0. \quad (4.25)$$

Раскрывая определитель (4.25) и приводя подобные члены, получаем уравнение для определения  $k$  по известным из соотношений (4.14)–(4.15) величинам  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ :

$$k^2 - k \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) = 0. \quad (4.26)$$

Так как  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  — постоянные числа, то и  $k$  тоже является постоянным числом. Таким образом, правомерность представления (4.18) доказана.

Положим теперь

$$k = e^{\mu d}, \quad (4.27)$$

где постоянное число  $\mu$  определяется по известному значению  $k$  соотношением:

$$\mu = \frac{\ln k}{d}. \quad (4.28)$$

Подставляя (4.27) в (4.18), получаем:

$$F(x+d) = e^{\mu d} \cdot F(x). \quad (4.29)$$

Введем в рассмотрение новую функцию:

$$\varphi(x) = \frac{F(x)}{e^{\mu x}}. \quad (4.30)$$

Найдем  $\varphi(x+d)$ , выполняя последовательные преобразования:

$$\varphi(x+d) = \frac{F(x+d)}{e^{\mu(x+d)}} = \frac{e^{\mu d} \cdot F(x)}{e^{\mu x} \cdot e^{\mu d}} = \frac{F(x)}{e^{\mu x}} = \varphi(x). \quad (4.31)$$

В результате получаем

$$\varphi(x+d) = \varphi(x), \quad (4.32)$$

то есть функция  $\varphi(x)$  является периодической с периодом  $d$ .

При этом из (4.30) следует:

$$F(x) = e^{\mu x} \cdot \varphi(x). \quad (4.33)$$

Полученное равенство означает, что исходное уравнение (4.4) имеет решение именно такого вида, что и доказывает теорему.

*Иллюстрация характера решения Флоке.* Являющийся составной частью решения (4.5) экспоненциальный множитель  $e^{\mu x}$  может быть как периодическим синусоидального типа, так и экспоненциально спадающим (или нарастающим), что определяется действительным или мнимым характером показателя  $\mu$ . Для наглядной иллюстрации роли  $\mu$  обратимся к рис. 4.1. на котором показано развитие колебаний по координате для двух этих случаев.

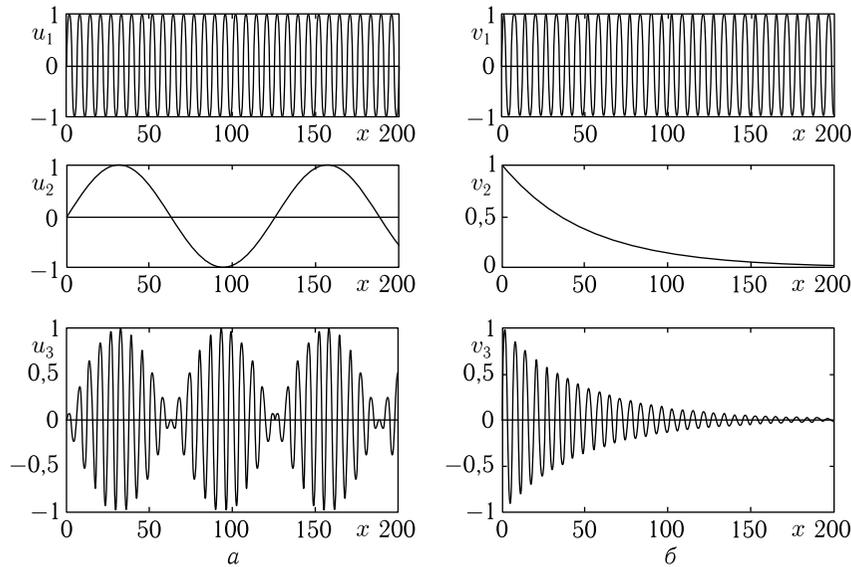


Рис. 4.1. Иллюстрация двухпериодических (а) и экспоненциально затухающих (б) колебаний.  $u_1 = \sin(x)$ ;  $u_2 = \sin(0,05 \cdot x)$ ;  $u_3 = \sin(0,05 \cdot x) \cdot \sin(x)$ ;  $v_1 = \sin(x)$ ;  $v_2 = \exp(-0,05 \cdot x)$ ;  $v_3 = \exp(-0,05 \cdot x) \cdot \sin(x)$

Рис. 4.1, а соответствует мнимому характеру  $\mu$ , при котором экспонента  $e^{\mu x}$ , согласно формуле Эйлера, является периодической функцией типа синуса или косинуса, то есть решение (4.5) представляет собой произведение двух периодических функций. Обе такие функции  $u_1$  и  $u_2$  показаны на двух верхних эпюрах рис. 4.1, а, а на нижней приведено их произведение  $u_3 = u_1 \cdot u_2$ .

Можно видеть, что  $u_3$  представляет собой синусоиду, амплитуда которой меняется также синусоидальным образом. То есть волна по мере распространения осциллирует с периодом основного колебания  $u_1$ ,

а амплитуда таких осцилляций меняется с периодом вдвое меньшим периода дополнительного колебания  $u_2$ , то есть общее колебание является двухпериодическим. Поскольку уравнение (4.4) является координатной частью полного волнового уравнения, а зависимость от времени имеет вид  $e^{i\omega t}$ , то в каждой точке пространства во времени происходят периодические колебания с той амплитудой, которая задается решением координатной части для данной точки. То есть по ходу распространения волны имеются пучности и узлы колебаний, положение которых во времени не меняется, а фактическое расположение определяется граничными условиями для функции  $u_2$  в какой-то определенной точке пространства, например, в начале координат.

В этом случае волна может распространяться на неопределенно большое расстояние, то есть, согласно общепринятой терминологии, имеет место «пропускание» волны.

Рис. 4.1, б соответствует действительному характеру  $\mu$ , при котором экспонента  $e^{\mu x}$  при отрицательном показателе (что соответствует физически реализуемому в эксперименте случаю) спадает по координате, стремясь к нулю, то есть решение (4.5) представляет собой произведение периодической функции на спадающую по координате экспоненту. Обе такие функции  $v_1$  и  $v_2$  для этого случая показаны на двух верхних эпюрах рис. 4.1, б, а на нижней приведено их произведение  $v_3 = v_1 \cdot v_2$ .

Можно видеть, что  $v_3$  представляет собой синусоиду, амплитуда которой по координате спадает, стремясь к нулю. То есть волна по мере распространения осциллирует с периодом основного колебания  $v_1$ , а амплитуда таких осцилляций спадает по экспоненте с показателем, определяемым значением  $\mu$ .

Относительно характера колебаний от времени, то он ведет себя таким же образом, как и в предыдущем случае, то есть в каждой точке пространства во времени происходят периодические колебания с той амплитудой, которая задается экспонентой с показателем  $\mu x$  для данной точки. То есть по ходу распространения волны ее амплитуда спадает, а фактическое расположение спада определяется граничными условиями для функции  $v_2$  в какой-то определенной точке пространства, например, в начале координат.

В этом случае волна затухает, то есть распространяться не может, так что имеет место ее «непропускание».

Ввиду важности параметра  $\mu$ , перейдем к возможным способам его определения — решениям Кронига–Пенни и Хилла.

#### 4.1.2. Метод Кронига–Пенни

Решение Кронига–Пенни применимо в случае решетки, представляющей собой ступенчатую функцию, то есть в пределах штрихов и промежутков между ними функция принимает постоянные значения. Приведем это решение более подробно, в основном, следуя [69].

**Общая постановка задачи.** Рассмотрим распространение одномерной волны вдоль периодической решетки, образованной одинаковыми чередующимися областями двух видов. Геометрия задачи показана на рис. 4.2. Здесь  $1, 2, \dots$  — порядковые номера областей. Области с нечетными номерами имеют длину  $a$ , области с четными — длину  $b$ . Период решетки  $d = a + b$ . Координата вдоль решетки —  $x$ . Начало координат совпадает с границей раздела между областями 1 и 2. Внутри каждой области распространяются две волны — в положительном и отрицательном направлениях оси  $Ox$ , схематически показанные стрелками. Амплитуды волн в областях 1–3 обозначены  $A, B, C, D, E, F$ . Постоянную распространения волны в областях длины  $a$  обозначим  $q_1$ , в областях длины  $b$  —  $q_2$ . Обе постоянные  $q_1$  и  $q_2$  могут быть комплексными.

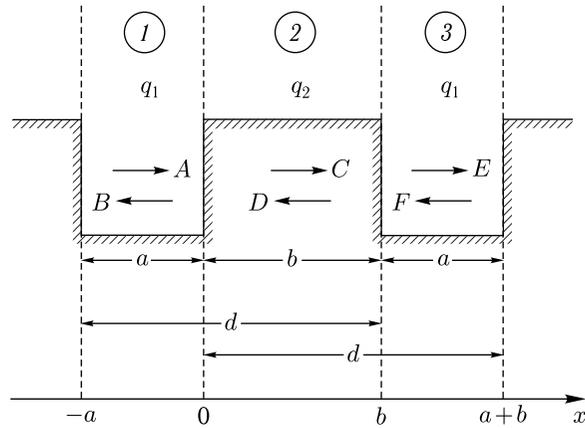


Рис. 4.2. Схема ступенчатой решетки

**Уравнения и граничные условия.** Положим, что все волны подчиняются уравнениям, координатная часть которых имеет вид:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - q^2 u = 0. \quad (4.34)$$

При  $q = ik$  уравнение (4.34) переходит в обычное волновое уравнение вида

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 u = 0. \quad (4.35)$$

Использование в настоящем рассмотрении в качестве постоянной распространения  $q$  вместо  $k$  обусловлено удобством работы с экспонентами и гиперболическими функциями вместо тригонометрических.

Запишем решения волнового уравнения и их производные по  $x$  в областях 1–3.

В области 1:

$$u_1 = A \cdot e^{q_1 x} + B \cdot e^{-q_1 x}; \quad (4.36)$$

$$\frac{du_1}{dx} = A \cdot q_1 e^{q_1 x} - B \cdot q_1 e^{-q_1 x}. \quad (4.37)$$

В области 2:

$$u_2 = C \cdot e^{q_2 x} + D \cdot e^{-q_2 x}; \quad (4.38)$$

$$\frac{du_2}{dx} = C \cdot q_2 e^{q_2 x} - D \cdot q_2 e^{-q_2 x}. \quad (4.39)$$

Для описания волновой функции в области 3 воспользуемся свойством периодичности среды, из которого, согласно теореме Флоке, следует возможность представления решения в виде

$$u(x + d) = e^{\mu d} \cdot u(x), \quad (4.40)$$

или

$$u(x) = e^{\mu d} \cdot u(x - d). \quad (4.41)$$

Это означает, что решение волнового уравнения в области 3 (то есть, когда  $x$  изменяется от  $b$  до  $a + b$ ) можно представить через волновую функцию в области 1 (при изменении  $x$  в тех же пределах):

$$u_3(x) = e^{\mu d} \cdot u_1(x - d). \quad (4.42)$$

Таким образом, получаем

$$u_3 = e^{\mu d} \cdot (A \cdot e^{q_1(x-d)} + B \cdot e^{-q_1(x-d)}), \quad (4.43)$$

откуда

$$u_3 = A \cdot e^{\mu d} \cdot e^{-q_1 d} \cdot e^{q_1 x} + B \cdot e^{\mu d} \cdot e^{q_1 d} \cdot e^{-q_1 x}; \quad (4.44)$$

$$\frac{du_3}{dx} = A \cdot q_1 e^{\mu d} \cdot e^{-q_1 d} \cdot e^{q_1 x} - B \cdot q_1 e^{\mu d} \cdot e^{q_1 d} \cdot e^{-q_1 x}. \quad (4.45)$$

Граничные условия на границах областей 1–2 ( $x = 0$ ) и 2–3 ( $x = b$ ) имеют вид:

$$u_1|_{x=0} = u_2|_{x=0}; \quad (4.46)$$

$$\frac{du_1}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{du_2}{dx} \Big|_{x=0}; \quad (4.47)$$

$$u_2|_{x=b} = u_3|_{x=b}; \quad (4.48)$$

$$\frac{du_2}{dx} \Big|_{x=b} = \frac{du_3}{dx} \Big|_{x=b}. \quad (4.49)$$

*Параметр экспоненты.* Подставляя (4.36)–(4.39) и (4.44)–(4.45) в (4.46)–(4.49) и учитывая, что  $d = a + b$ , получаем систему уравнений, связывающих  $A, B, C, D$ :

$$\begin{cases} A + B - C - D = 0, \\ A \cdot q_1 - B \cdot q_1 - C \cdot q_2 + D \cdot q_2 = 0, \\ A \cdot e^{\mu d} \cdot e^{-q_1 a} + B \cdot e^{\mu d} \cdot e^{q_1 a} - C \cdot e^{q_2 b} - D \cdot e^{-q_2 b} = 0, \\ A \cdot q_1 e^{\mu d} \cdot e^{-q_1 a} - B \cdot q_1 e^{\mu d} \cdot e^{q_1 a} - C \cdot q_2 e^{q_2 b} + D \cdot q_2 e^{-q_2 b} = 0. \end{cases} \quad (4.50)$$

Эта система имеет ненулевое решение тогда, когда ее определитель равен нулю, что и дает искомое дисперсионное соотношение. Этот определитель имеет вид:

$$D_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ q_1 & -q_1 & -q_2 & q_2 \\ e^{\mu d} \cdot e^{-q_1 a} & e^{\mu d} \cdot e^{q_1 a} & -e^{q_2 b} & -e^{-q_2 b} \\ q_1 e^{\mu d} \cdot e^{-q_1 a} & -q_1 e^{\mu d} \cdot e^{q_1 a} & -q_2 e^{q_2 b} & q_2 e^{-q_2 b} \end{vmatrix}. \quad (4.51)$$

Введем обозначение

$$y = e^{\mu d}, \quad (4.52)$$

а также умножим третий и четвертый столбцы на  $-1$ :

$$D_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ q_1 & -q_1 & q_2 & -q_2 \\ y \cdot e^{-q_1 a} & y \cdot e^{q_1 a} & e^{q_2 b} & e^{-q_2 b} \\ y \cdot q_1 e^{-q_1 a} & -y \cdot q_1 e^{q_1 a} & q_2 e^{q_2 b} & -q_2 e^{-q_2 b} \end{vmatrix}. \quad (4.53)$$

Из столбца 2 вычитаем столбец 1, а из столбца 4 — столбец 3, заменим суммы и разности экспонент на гиперболические функции, после чего вынесем из столбцов 2 и 4 общий множитель 2. В результате получаем:

$$\frac{D_0}{4} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ q_1 & -q_1 & q_2 & -q_2 \\ y \cdot e^{-q_1 a} & y \cdot \text{sh}(q_1 a) & e^{q_2 b} & -\text{sh}(q_2 b) \\ y \cdot q_1 e^{-q_1 a} & -y \cdot q_1 \text{ch}(q_1 a) & q_2 e^{q_2 b} & -q_2 \text{ch}(q_2 b) \end{vmatrix}. \quad (4.54)$$

Заменим экспоненты на гиперболические функции в соответствии с соотношениями:

$$e^{-q_1 a} = \text{ch}(q_1 a) - \text{sh}(q_1 a); \quad (4.55)$$

$$e^{q_2 b} = \text{ch}(q_2 b) + \text{sh}(q_2 b), \quad (4.56)$$

после чего, прибавляя столбец 2 к столбцу 1 и столбец 4 к столбцу 3, а также меняя знаки в столбцах 2 и 4, получаем:

$$\frac{D_0}{4} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q_1 & 0 & q_2 \\ y \cdot \text{ch}(q_1 a) & -y \cdot \text{sh}(q_1 a) & \text{ch}(q_2 b) & \text{sh}(q_2 b) \\ -y \cdot q_1 \text{sh}(q_1 a) & y \cdot q_1 \text{ch}(q_1 a) & q_2 \text{sh}(q_2 b) & q_2 \text{ch}(q_2 b) \end{vmatrix}. \quad (4.57)$$

Разложим это определитель по первой строке:

$$\frac{D_0}{4} = D_1 + D_2, \quad (4.58)$$

где:

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} q_1 & 0 & q_2 \\ -y \cdot \text{sh}(q_1 a) & \text{ch}(q_2 b) & \text{sh}(q_2 b) \\ y \cdot q_1 \text{ch}(q_1 a) & q_2 \text{sh}(q_2 b) & q_2 \text{ch}(q_2 b) \end{vmatrix} = q_1 q_2 \cdot [\text{ch}^2(q_2 b) - \text{sh}^2(q_2 b)] - \\ &\quad - y \cdot q_2 \cdot [q_2 \text{sh}(q_1 a) \text{sh}(q_2 b) + q_1 \text{ch}(q_1 a) \text{ch}(q_2 b)] = \\ &= q_1 q_2 - y \cdot q_2 \cdot [q_2 \text{sh}(q_1 a) \text{sh}(q_2 b) + q_1 \text{ch}(q_1 a) \text{ch}(q_2 b)]; \end{aligned} \quad (4.59) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} 0 & q_1 & q_2 \\ y \cdot \text{ch}(q_1 a) & -y \cdot \text{sh}(q_1 a) & \text{sh}(q_2 b) \\ -y \cdot q_1 \text{sh}(q_1 a) & y \cdot q_1 \text{ch}(q_1 a) & q_2 \text{ch}(q_2 b) \end{vmatrix} = \\ &= y^2 q_1 q_2 \cdot [\text{ch}^2(q_1 a) - \text{sh}^2(q_1 a)] - \\ &\quad - y \cdot q_1 \cdot [q_1 \text{sh}(q_1 a) \text{sh}(q_2 b) + q_2 \text{ch}(q_1 a) \text{ch}(q_2 b)] = \\ &= y^2 \cdot q_1 q_2 - y \cdot q_1 \cdot [q_1 \text{sh}(q_1 a) \text{sh}(q_2 b) + q_2 \text{ch}(q_1 a) \text{ch}(q_2 b)]. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Подставляя (4.59) и (4.60) в (4.58), получаем:

$$\frac{D_0}{4} = q_1 q_2 \left\{ y^2 + 1 - y \cdot \left[ 2 \text{ch}(q_1 a) \text{ch}(q_2 b) + \frac{q_1^2 + q_2^2}{q_1 q_2} \cdot \text{sh}(q_1 a) \text{sh}(q_2 b) \right] \right\}. \quad (4.61)$$

Приравняв к нулю и разделив на  $q_1 q_2$ , получаем квадратное уравнение относительно  $y$ :

$$y^2 - 2y \cdot \left[ \text{ch}(q_1 a) \text{ch}(q_2 b) + \frac{q_1^2 + q_2^2}{2q_1 q_2} \cdot \text{sh}(q_1 a) \text{sh}(q_2 b) \right] + 1 = 0. \quad (4.62)$$

Согласно (4.52), один из корней этого уравнения равен  $e^{\mu d}$ . Так как произведение корней равно свободному члену, который здесь равен единице, то второй корень равен  $e^{-\mu d}$ . Сумма корней равна коэффициенту при  $y$  с обратным знаком, то есть:

$$e^{\mu d} + e^{-\mu d} = 2 \cdot \left[ \text{ch}(q_1 a) \text{ch}(q_2 b) + \frac{q_1^2 + q_2^2}{2q_1 q_2} \cdot \text{sh}(q_1 a) \text{sh}(q_2 b) \right], \quad (4.63)$$

откуда получаем соотношение, которое в некотором смысле можно считать законом дисперсии распространяющейся волны:

$$\text{ch}(\mu d) = \text{ch}(q_1 a) \cdot \text{ch}(q_2 b) + \frac{q_1^2 + q_2^2}{2q_1 q_2} \cdot \text{sh}(q_1 a) \cdot \text{sh}(q_2 b). \quad (4.64)$$

Преобразуя дробь, можно записать (4.64) в виде

$$\text{ch}(\mu d) = \text{ch}(q_1 a) \cdot \text{ch}(q_2 b) + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{q_1}{q_2} + \frac{q_2}{q_1} \right) \cdot \text{sh}(q_1 a) \cdot \text{sh}(q_2 b). \quad (4.65)$$

Вспомним теперь, что постоянные распространения  $q_1$  и  $q_2$ , принятые мнимыми для удобства аналитических выкладок, связаны с действительными волновыми числами соотношениями

$$q_{1,2} = ik_{1,2}, \quad (4.66)$$

откуда, учитывая связь между волновым числом, частотой и скоростью волны, получаем:

$$q_1 = i \cdot \frac{2\pi a}{v_1} \cdot f; \quad (4.67)$$

$$q_2 = i \cdot \frac{2\pi b}{v_2} \cdot f, \quad (4.68)$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — скорости волны на участках длиной  $a$  и  $b$  соответственно,  $f$  — частота распространяющейся волны.

Учтем далее следующую из определения связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями:

$$\operatorname{sh}(ix) = i \sin(x); \quad (4.69)$$

$$\operatorname{ch}(ix) = \cos(x). \quad (4.70)$$

Подставляя (4.67)–(4.68) в (4.65), с учетом (4.69)–(4.70), получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\mu d) = & \cos\left(\frac{2\pi a}{v_1} \cdot f\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi b}{v_2} \cdot f\right) - \\ & - \frac{v_1^2 + v_2^2}{2v_1v_2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi a}{v_1} \cdot f\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi b}{v_2} \cdot f\right). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Введем вспомогательное обозначение:

$$\begin{aligned} w = & \cos\left(\frac{2\pi a}{v_1} \cdot f\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi b}{v_2} \cdot f\right) - \\ & - \frac{v_1^2 + v_2^2}{2v_1v_2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi a}{v_1} \cdot f\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi b}{v_2} \cdot f\right). \end{aligned} \quad (4.72)$$

С этим обозначением (4.71) принимает вид:

$$\operatorname{ch}(\mu d) = w. \quad (4.73)$$

Учитывая выражение гиперболического косинуса через экспоненту, получаем квадратное уравнение относительно  $e^{\mu d}$ :

$$(e^{\mu d})^2 - 2we^{\mu d} + 1 = 0, \quad (4.74)$$

решая которое, выражая экспоненту через логарифм и учитывая, что  $d = a + b$ , получаем:

$$\mu = \frac{1}{a+b} \cdot \ln\left(w \pm \sqrt{w^2 - 1}\right), \quad (4.75)$$

где  $w$  связано с частотой волны  $f$  соотношением (4.72).

*Амплитуды волн внутри структуры.* Теперь, когда параметр  $\mu$  определен, можно найти амплитуды волн внутри структуры. Решения  $u_1$  и  $u_2$  определяются соотношениями (4.36) и (4.38), содержащими постоянные коэффициенты  $A, B, C, D$ . Решение  $u_3$  определяется соотношением (4.44), так что выражается через те же коэффициенты  $A, B$ , что и  $u_1$ , а также уже известный параметр  $\mu$ .

Таким образом, для получения решения во всех трех областях достаточно найти коэффициенты  $A, B, C, D$ . Это можно сделать из системы (4.50), полученной в соответствии с граничными условиями (4.46)–(4.49). Эта система содержит четыре уравнения для четырех неизвестных, однако правые части всех уравнений равны нулю. Поэтому только три уравнения являются независимыми, так что можно задать один какой-то коэффициент произвольно, например  $A$ , после чего, выбрав любые три из четырех уравнений (4.50), выразить через него остальные коэффициенты  $B, C$  и  $D$ . При различных вариантах выбора трех уравнений из четырех выражения для  $B, C, D$  будут получаться различными, однако их можно перевести друг в друга с использованием равенства нулю определителя (4.51).

После того как решения  $u_1$  и  $u_2$  в областях 1 и 2 будут определены в соответствии с (4.36) и (4.38), решения в последующих областях могут быть найдены из этих полученных решений с учетом периодичности путем умножения на  $e^{\mu d}$  в соответствии с соотношением (4.40). Так решение в области 3 получается путем умножения решения в области 1 на этот множитель. Решение в области 4 — умножением решения в области 2 на него же, решение в области 5 — умножением решения в области 3 и так далее. Таким образом, последовательно перемещаясь от области к области можно найти решение на всем протяжении заданной структуры.

*Условия пропускания и непропускания по решению Кронига–Пенни.* Рассмотрим теперь условия, определяющие пропускание или непропускание волны.

Согласно теореме Флоке, решение волнового уравнения с периодическим коэффициентом  $G(x)$  представляет собой произведение экспоненты  $e^{\mu x}$  на периодическую функцию  $\varphi(x)$  с тем же периодом, что и  $G(x)$ , так что в силу периодичности  $\varphi(x)$  ее амплитуда по координате  $x$  сохраняется постоянной, а характер изменения амплитуды произведения  $e^{\mu x} \cdot \varphi(x)$  определяется действительностью или мнимостью показателя экспоненты. То есть при  $\mu$  мнимом полное решение осциллирует с постоянной амплитудой, так что волна распространяется без затухания, а при  $\mu$  действительном амплитуда меняется в соответствии со знаком логарифма в выражении (4.75). Надо полагать, что реальный физический смысл имеет только отрицательный знак этого логарифма, при котором  $e^{\mu x}$  с увеличением координаты  $x$  убывает по экспоненте. Таким образом, в зависимости от действительности или мнимости  $\mu$  волна может спадать по экспоненте или распространяться без затухания.

Из выражения (4.75) можно видеть, что действительность или мнимость  $\mu$  определяется знаком подкоренного выражения  $w^2 - 1$ , стоящего под знаком логарифма. В качестве иллюстрации такого положения рассмотрим рис. 4.3, где показана зависимость  $w^2 - 1$  от частоты  $f$ .

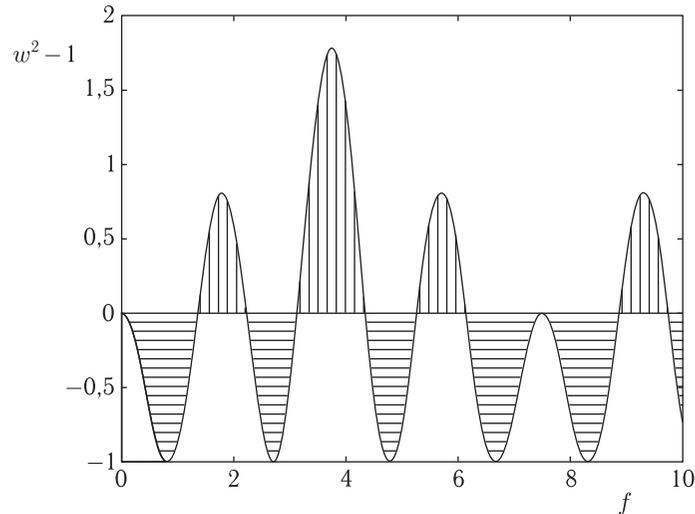


Рис. 4.3. Зависимость выражения  $w^2 - 1$  от частоты. Параметры построения:  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $v_1 = 5$ ,  $v_2 = 15$

Из рисунка можно видеть, что кривая по частоте осциллирует с периодом около 7,50, а на длине своего периода несколько раз меняет знак.

Когда  $w^2 - 1 > 0$  (области, показанные вертикальной штриховкой) выражение под логарифмом в (4.75) действительно, то есть  $\mu$  может быть действительным и волна по мере распространения затухает. В соответствии с общепринятой терминологией это — полоса непропускания, то есть область частот, где волна распространяться не может.

Когда  $w^2 - 1 < 0$  (области, показанные горизонтальной штриховкой) выражение под логарифмом в (4.75) комплексно, так что логарифм заведомо является комплексным, и  $\mu$  может быть мнимым с отрицательным показателем, так что волна распространяется без затухания. В соответствии с общепринятой терминологией это — полоса пропускания, то есть область частот, где волна распространяется свободно на неопределенно большое расстояние. В этом случае волна представляет собой периодическую функцию с постоянной амплитудой  $\varphi(x)$ , умноженную на другую периодическую функцию  $e^{i|\mu|x}$ , причем период первой функции равен периоду исходной ступенчатой функции  $d = a + b$ , а период второй определяется соотношением скоростей волны в периодически чередующихся областях структуры.

Вспомогательный численный расчет показывает, что период второй функции всегда превышает период первой и при увеличении различия скоростей также увеличивается. Обращаясь к радиотехнической терминологии, можно сказать, что полное решение в этом случае имеет вид синусоиды, промодулированной по амплитуде более низкой частотой.

**Замечание.** Заметим, что в классическом смысле дисперсионное соотношение определяет зависимость между длиной волны или волновым числом и частотой. При этом предполагается, что волновая функция имеет единственный период, а сама волна может быть описана периодической функцией типа синусоиды с постоянной амплитудой.

В этом смысле соотношение (4.71), а также следующее из него (4.75), прямо не связаны, так как полное решение в случае распространяющейся волны (в полосе пропускания) представляет собой двухпериодическую функцию, в которой малый период совпадает с периодом структуры, а большой его превышает. Поэтому термином «дисперсионное соотношение» относительно (4.71) и (4.75) следует пользоваться с известной осторожностью, а вообще говоря, этот термин требует более расширенного толкования или нового определения, выходящего за рамки настоящей работы.

#### 4.1.3. Метод Хилла

Решение Хилла применимо в случае решетки, представляющей собой периодическую функцию, значения которой внутри периода, в отличие от ступенчатой функции, не являются постоянными, а зависят от координаты вдоль решетки. Употребление этого решения для рассмотрения распространения МСВ в периодической структуре авторам настоящей монографии не известно, однако ввиду его значительной общности и соответствующей важности, приведем его здесь в конспективном виде, следуя [69, 210].

*Постановка задачи и общая идеология решения.* Уравнение Хилла имеет вид:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + G(x) \cdot u(x) = 0, \quad (4.76)$$

где  $G(x)$  — четная периодическая функция с периодом  $\pi$ , то есть подчиняющаяся условиям:

$$G(x) = G(-x); \quad (4.77)$$

$$G(x + \pi) = G(x). \quad (4.78)$$

Общая идея решения Хилла состоит в разложении функции  $G(x)$  в бесконечный ряд Фурье по косинусам, после чего решение ищется в виде произведения функции  $e^{\mu x}$  (аналогичной содержащейся в теореме Флоке) на другой ряд Фурье из экспонент с комплексными показателями. После подстановки решения и функции  $G$  в уравнение (4.76), из второго его слагаемого получается бесконечное произведение двух

рядов, которое также представляет собой бесконечный ряд. В результате для коэффициентов исходного ряда решения получается бесконечный определитель, равенство нулю которого дает соотношение, позволяющее найти показатель экспоненты  $\mu$ , действительность или мнимость которого, подобно решению Кронига–Пенни, определяет периодический или экспоненциально затухающий характер решения.

*Бесконечный определитель Хилла.* Приведем вкратце основные соотношения метода Хилла. Так разложение функции  $G(x)$  имеет вид:

$$G(x) = \theta_0 + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n \cos(2nx), \quad (4.79)$$

где в силу четности  $G(x)$  полагается  $\theta_{-n} = \theta_n$ , так что можно записать:

$$G(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n e^{2nix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \theta_m e^{2miz}, \quad (4.80)$$

где индекс  $n$  заменен на  $m$ , чтобы избежать наложения в последующих вычислениях.

Решение ищется в виде:

$$u = e^{\mu x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{2nix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{(\mu+2ni)x}. \quad (4.81)$$

Подставляя (4.80) и (4.81) в уравнение (4.76), получаем:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mu + 2ni)^2 b_n e^{(\mu+2ni)x} + \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} \theta_m e^{2miz} \right) \cdot \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{(\mu+2ni)x} \right) = 0, \quad (4.82)$$

откуда, сокращая на  $e^{\mu x}$ , находим:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mu + 2ni)^2 b_n e^{2nix} + \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} \theta_m e^{2miz} \right) \cdot \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{2nix} \right) = 0. \quad (4.83)$$

Во втором слагаемом с целью удобства заменим индекс  $n$  на  $p$  и выполним умножение по правилам перемножения рядов [211] (перемножение «всех на всех» по одному разу):

$$\left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} \theta_m e^{2miz} \right) \cdot \left( \sum_{p=-\infty}^{\infty} b_p e^{2pix} \right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \theta_m \cdot \left( \sum_{p=-\infty}^{\infty} b_p e^{2(p+m)iz} \right). \quad (4.84)$$

Поскольку в левой части (4.83) имеется сомножитель  $e^{2nix}$ , потребуем, чтобы выполнялось равенство  $p + m = n$ . Это требование дополнительных ограничений не накладывает, так как  $p$  пробегает все значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ , так что для любых значений  $m$  и  $n$  всегда найдется

подходящее значение  $p$ . Из этого соотношения следует:  $p = n - m$ . Подставляя это значение  $p$  в (4.84), получаем:

$$\left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} \theta_m e^{2miz} \right) \cdot \left( \sum_{p=-\infty}^{\infty} b_p e^{2pix} \right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \theta_m \cdot \left( \sum_{n-m=-\infty}^{\infty} b_{n-m} e^{2nix} \right). \quad (4.85)$$

Заменим теперь во второй скобке левой части последнего выражения индекс  $p$  на  $n$ , что можно сделать в силу замкнутости суммирования в этой скобке:

$$\left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} \theta_m e^{2miz} \right) \cdot \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{2nix} \right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \theta_m \cdot \left( \sum_{n-m=-\infty}^{\infty} b_{n-m} e^{2nix} \right). \quad (4.86)$$

Заменяя этим выражением второе слагаемое в (4.83), получаем:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mu + 2ni)^2 b_n e^{2nix} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \theta_m \cdot \left( \sum_{n-m=-\infty}^{\infty} b_{n-m} e^{2nix} \right) = 0. \quad (4.87)$$

Запишем получившееся соотношение в виде суммы по  $n$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ (\mu + 2ni)^2 b_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \theta_m \cdot b_{n-m} \right] \cdot e^{2nix} = 0, \quad (4.88)$$

откуда, в силу произвольности  $x$ , полагая каждое слагаемое полученной суммы равным нулю, получаем:

$$(\mu + 2ni)^2 \cdot b_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \theta_m \cdot b_{n-m} = 0, \quad (4.89)$$

где  $n = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$  — целое число, пробегающее все значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Это — бесконечная система уравнений для коэффициентов  $b_n$ , являющихся составной частью решения (4.81). Первое слагаемое содержит только один коэффициент  $b_n$ , а второе, благодаря изменению  $m$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , все коэффициенты  $b_n$ , где  $n$  пробегает также все значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Нетривиальность решения системы (4.89) требует, чтобы ее определитель, в силу бесконечности системы также являющийся бесконечным, равнялся нулю. Из структуры уравнений (4.89) можно видеть, что  $\mu$  войдет только в диагональные элементы такого определителя, а остальные элементы будут представлять собой коэффициенты  $\theta_n$  (или  $\theta_m$ ) разложения (4.80) функции  $G(x)$ .

Определитель системы (4.89) носит название «определителя Хилла». Подобно [210], обозначим его через  $D(i\mu)$ . При этом уравнение для нахождения параметра  $\mu$  принимает вид:

$$D(i\mu) = 0. \quad (4.90)$$

*Структура определителя Хилла.* Покажем структуру определителя Хилла на простом примере, ограничиваясь изменением  $n$  в пределах от  $-2$  до  $+2$ , то есть будем следить только за коэффициентами  $b_{-2}$ ,  $b_{-1}$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ . При этом, для того чтобы охватить все эти коэффициенты, диапазон изменения  $m$  должен простираться от  $-4$  до  $+4$ .

Чтобы перебрать все допустимые при этом значения  $n$  и  $m$  будем задавать  $n$  последовательно от  $-2$  до  $+2$  и при каждом таком значении будем выполнять суммирование при всех  $m$  от  $-4$  до  $+4$ .

Так при  $n = -2$  уравнение (4.89) принимает вид:

$$[\mu + 2(-2)i]^2 \cdot b_{-2} + \sum_{m=-4}^4 \theta_m \cdot b_{-2-m} = 0, \quad (4.91)$$

откуда, выполняя суммирование, получаем:

$$[\mu + 2(-2)i]^2 \cdot b_{-2} + \theta_{-4} \cdot b_2 + \theta_{-3} \cdot b_1 + \theta_{-2} \cdot b_0 + \theta_{-1} \cdot b_{-1} + \theta_0 \cdot b_{-2} + \theta_1 \cdot b_{-3} + \theta_2 \cdot b_{-4} + \theta_3 \cdot b_{-5} + \theta_4 \cdot b_{-6} = 0. \quad (4.92)$$

В этом выражении сохраним только слагаемые, содержащие  $b_{-2}$ ,  $b_{-1}$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  и запишем их в порядке следования индекса при  $b$ :

$$\{[\mu + 2(-2)i]^2 + \theta_0\} \cdot b_{-2} + \theta_{-1} \cdot b_{-1} + \theta_{-2} \cdot b_0 + \theta_{-3} \cdot b_1 + \theta_{-4} \cdot b_2 = 0. \quad (4.93)$$

Продельвая такую процедуру при всех  $n$  от  $-2$  до  $+2$ , получаем систему из пяти уравнений относительно пяти неизвестных  $b_{-2}$ ,  $b_{-1}$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ :

$$[(\mu - 2 \cdot 2i)^2 + \theta_0] \cdot b_{-2} + \theta_{-1} \cdot b_{-1} + \theta_{-2} \cdot b_0 + \theta_{-3} \cdot b_1 + \theta_{-4} \cdot b_2 = 0; \quad (4.94)$$

$$\theta_1 \cdot b_{-2} + [(\mu - 2 \cdot 1i)^2 + \theta_0] \cdot b_{-1} + \theta_{-1} \cdot b_0 + \theta_{-2} \cdot b_1 + \theta_{-3} \cdot b_2 = 0; \quad (4.95)$$

$$\theta_2 \cdot b_{-2} + \theta_1 \cdot b_{-1} + [(\mu + 2 \cdot 0i)^2 + \theta_0] \cdot b_0 + \theta_{-1} \cdot b_1 + \theta_{-2} \cdot b_2 = 0; \quad (4.96)$$

$$\theta_3 \cdot b_{-2} + \theta_2 \cdot b_{-1} + \theta_1 \cdot b_0 + [(\mu + 2 \cdot 1i)^2 + \theta_0] \cdot b_1 + \theta_{-1} \cdot b_2 = 0; \quad (4.97)$$

$$\theta_4 \cdot b_{-2} + \theta_3 \cdot b_{-1} + \theta_2 \cdot b_0 + \theta_1 \cdot b_1 + [(\mu + 2 \cdot 2i)^2 + \theta_0] \cdot b_2 = 0. \quad (4.98)$$

Условие нетривиальности этой системы требует равенства нулю ее определителя:

$(\mu - 2 \cdot 2i)^2 + \theta_0$	$\theta_{-1}$	$\theta_{-2}$	$\theta_{-3}$	$\theta_{-4}$
$\theta_1$	$(\mu - 2 \cdot 1i)^2 + \theta_0$	$\theta_{-1}$	$\theta_{-2}$	$\theta_{-3}$
$\theta_2$	$\theta_1$	$(\mu + 2 \cdot 0i)^2 + \theta_0$	$\theta_{-1}$	$\theta_{-2}$
$\theta_3$	$\theta_2$	$\theta_1$	$(\mu + 2 \cdot 1i)^2 + \theta_0$	$\theta_{-1}$
$\theta_4$	$\theta_3$	$\theta_2$	$\theta_1$	$(\mu + 2 \cdot 2i)^2 + \theta_0$

(4.99)

Учитывая четность разложения (4.89), то есть выполнение равенства  $\theta_{-n} = \theta_n$ , из (4.99) получаем:

$(\mu - 2 \cdot 2i)^2 + \theta_0$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$
$\theta_1$	$(\mu - 2 \cdot 1i)^2 + \theta_0$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$
$\theta_2$	$\theta_1$	$(\mu + 2 \cdot 0i)^2 + \theta_0$	$\theta_1$	$\theta_2$
$\theta_3$	$\theta_2$	$\theta_1$	$(\mu + 2 \cdot 1i)^2 + \theta_0$	$\theta_1$
$\theta_4$	$\theta_3$	$\theta_2$	$\theta_1$	$(\mu + 2 \cdot 2i)^2 + \theta_0$

(4.100)

Полученный определитель является частным случаем бесконечного определителя Хилла и благодаря симметричности своей структуры может быть продолжен во все стороны до бесконечности путем изменения на единицу индексов при  $\theta$ , а также коэффициентов при  $2i$  в круглых скобках.

Для обеспечения его сходимости можно каждое из уравнений (4.89) разделить на  $(\mu - 2 \cdot n \cdot i)^2 + \theta_0$ . При этом равенство нулю каждого из уравнений не изменится, так что система в целом сохранится, но по главной диагонали в определителе будут стоять единицы, а все недиагональные члены разделятся на величины, большие  $\theta_0$ . Определитель Хилла примет вид:

1	$\frac{\theta_1}{(\mu - 2 \cdot 2i)^2 + \theta_0}$	$\frac{\theta_2}{(\mu - 2 \cdot 2i)^2 + \theta_0}$	$\frac{\theta_3}{(\mu - 2 \cdot 2i)^2 + \theta_0}$	$\frac{\theta_4}{(\mu - 2 \cdot 2i)^2 + \theta_0}$
$\frac{\theta_1}{(\mu - 2 \cdot 1i)^2 + \theta_0}$	1	$\frac{\theta_1}{(\mu - 2 \cdot 1i)^2 + \theta_0}$	$\frac{\theta_2}{(\mu - 2 \cdot 1i)^2 + \theta_0}$	$\frac{\theta_3}{(\mu - 2 \cdot 1i)^2 + \theta_0}$
$\frac{\theta_2}{(\mu + 2 \cdot 0i)^2 + \theta_0}$	$\frac{\theta_1}{(\mu + 2 \cdot 0i)^2 + \theta_0}$	1	$\frac{\theta_1}{(\mu + 2 \cdot 0i)^2 + \theta_0}$	$\frac{\theta_2}{(\mu + 2 \cdot 0i)^2 + \theta_0}$
$\frac{\theta_3}{(\mu + 2 \cdot 1i)^2 + \theta_0}$	$\frac{\theta_2}{(\mu + 2 \cdot 1i)^2 + \theta_0}$	$\frac{\theta_1}{(\mu + 2 \cdot 1i)^2 + \theta_0}$	1	$\frac{\theta_1}{(\mu + 2 \cdot 1i)^2 + \theta_0}$
$\frac{\theta_4}{(\mu + 2 \cdot 2i)^2 + \theta_0}$	$\frac{\theta_3}{(\mu + 2 \cdot 2i)^2 + \theta_0}$	$\frac{\theta_2}{(\mu + 2 \cdot 2i)^2 + \theta_0}$	$\frac{\theta_1}{(\mu + 2 \cdot 2i)^2 + \theta_0}$	1

(4.101)

В этом случае произведение диагональных элементов равно единице, то есть величине абсолютно сходящейся.

Сумма членов каждой строки, образованной недиагональными элементами определителя (4.101), будет равна удвоенной сумме ряда  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n$ , который сходится абсолютно в силу таковой сходимости разложения Фурье (4.80), а после деления каждого члена ряда на одну и ту же постоянную величину, большую  $\theta_0$ , сходимость такого ряда не изменится, то есть останется абсолютной.

Сумма всех недиагональных элементов определителя (4.101) будет равна бесконечно большому числу сумм строк, каждая из которых является абсолютно сходящейся. Так что можно полагать, что сумма всех недиагональных элементов определителя в силу абсолютной сходимости суммы двух абсолютно сходящихся рядов в целом также будет абсолютно сходящейся [211]. Вообще говоря, это утверждение не бесспорно в силу бесконечного числа слагаемых, однако для каждого конечного числа слагаемых, как это обычно бывает на практике, абсолютная сходимость будет обеспечена безусловно.

Таким образом, можно полагать, что для бесконечного определителя типа (4.101) удовлетворяются оба условия абсолютной сходимости: абсолютная сходимость произведения диагональных элементов и суммы всех недиагональных элементов [210], поэтому согласно [211] он является абсолютно сходящимся.

*Уравнение для параметра экспоненты.* Равенство нулю бесконечного определителя Хилла является уравнением для определения  $\mu$ , которое после раскрытия определителя будет представлять собой алгебраическое степенное уравнение бесконечно высокой степени. Однако при ограничении определителя конечным числом строк и столбцов степень уравнения будет равна удвоенному их числу. Так при принятом здесь ограничении пятым порядком степень уравнения для  $\mu$  будет равна десяти.

Покажем формирование такого уравнения на примере определителя из трех центральных столбцов и строк определителя Хилла, то есть для случая, когда разложение (4.80) ограничивается первыми двумя слагаемыми с  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Поскольку  $\theta_0$  представляет собой постоянную добавку, то есть на периодичность  $G(x)$  влияния не оказывающую, положим также  $\theta_0 = 0$ . При этом получаем определитель  $D_3(\mu)$  в виде:

$$D_3 = \begin{vmatrix} (\mu - 2i)^2 & \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_1 & \mu^2 & \theta_1 \\ \theta_2 & \theta_1 & (\mu - 2i)^2 \end{vmatrix}. \quad (4.102)$$

Равенство нулю этого определителя дает уравнение для  $\mu$ :

$$\mu^6 + 8\mu^4 + \mu^2(16 - 2\theta_1^2 - \theta_2^2) + 2\theta_1^2(\theta_2 + 4) = 0. \quad (4.103)$$

Можно видеть, что это уравнение содержит только четные степени  $\mu$ , так что является бикубическим. Все коэффициенты этого уравнения являются действительными.

Решение этого уравнения для  $\mu^2$  может быть как положительным, так и отрицательным. Извлечение квадратного корня из положительного квадрата  $\mu$  дает действительные значения, а из отрицательного — мнимые. Таким образом, получаемое значение  $\mu$ , определяющее показатель первой экспоненты в (4.81), может быть как

действительным, так и мнимым. Аналогично решению Кронига–Пенни, мнимое решение соответствует периодической функции, то есть распространению волны в условиях пропускания, тогда как действительное — экспоненциально спадающей функции, то есть условиям непропускания.

*Формирование областей пропускания и непропускания по решению Хилла.* Рассмотрим схему формирования областей пропускания и непропускания на числовом примере, для чего обратимся к рис. 4.4.

На рис. 4.4, а показана функция  $G(x)$ , которая определяет в уравнении (4.4) периодическую зависимость от  $x$  коэффициента при  $u$ .

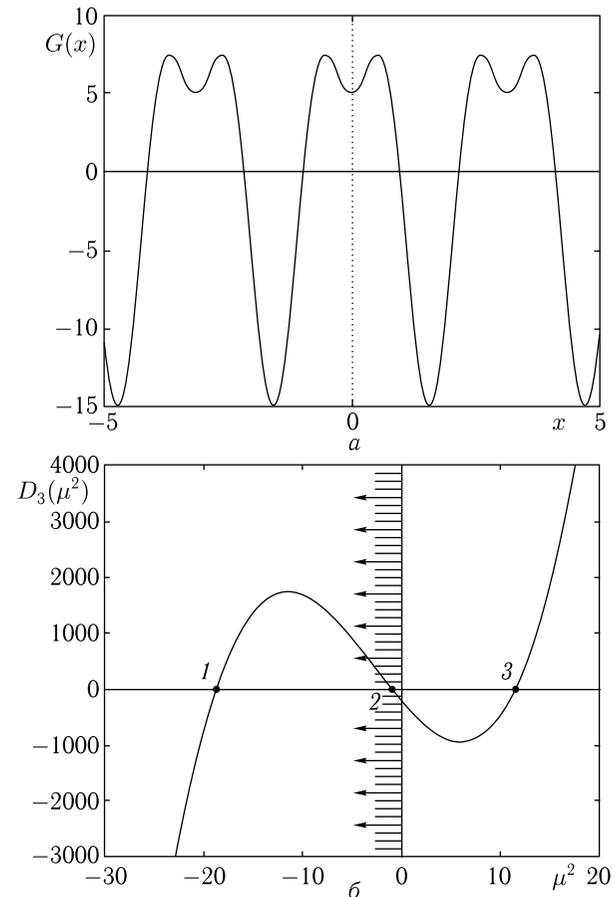


Рис. 4.4. Схема формирования областей пропускания и непропускания. а — функция  $G(x)$ ; б — определитель  $D_3(\mu^2)$ . Параметры построения:  $\theta_0 = 0$ ;  $\theta_1 = 10$ ;  $\theta_2 = -5$

При принятых параметрах построения вид этой функции следующий:

$$G(x) = 10 \cdot \cos(2x) - 5 \cdot \cos(4x). \quad (4.104)$$

Видно, что функция является периодической с периодом  $\pi$ , четной относительно вертикальной оси.

На рис. 4.4, б показана зависимость определителя  $D_3$  от  $\mu^2$ , построенная в соответствии с формулой (4.102).

При принятых параметрах эта зависимость является кубической параболой с тремя нулями при  $(\mu^2)_1 = -19$ ,  $(\mu^2)_2 = -1$ ,  $(\mu^2)_3 = +12$ . Эти нули, в соответствии с решением уравнения (4.103), определяют значения  $\mu$ , соответствующие решению (4.5) при функции  $G(x)$ , показанной на рис. 4.4, а.

Область пропускания соответствует мнимым значениям  $\mu$ , то есть лежит левее вертикальной прямой, проходящей через точку  $\mu^2 = 0$ . Эта область отмечена горизонтальной штриховкой и ее продолжение показано стрелками. В этой области лежат два мнимых значения  $\mu_1 = 4,35i$  и  $\mu_2 = 1,00i$ . Правее вертикальной прямой лежит область непропускания. В этой области лежит действительное значение  $\mu_3 = -3,46$ .

Показанные здесь области соответствуют выбранным для построения параметрам  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , которые определяются заданным видом функции  $G(x)$ . При изменении этой функции соответствующие ей параметры будут меняться, вызывая изменение конфигурации областей пропускания и непропускания.

*Параметры волн внутри структуры.* Теперь, когда параметр  $\mu$  определен, можно найти амплитуду волн внутри структуры. Решение (4.81) имеет вид разложения по экспонентам с показателями  $2ni x$ , то есть может быть представлено тригонометрическими функциями с аргументами  $2nx$ . Коэффициенты при экспонентах  $b_n$  определяются из системы уравнений типа (4.89). В этой системе количество уравнений равно количеству неизвестных, причем правые части уравнений равняются нулю. То есть один из коэффициентов можно задать произвольно и через него определить все остальные коэффициенты. По-видимому, удобнее всего задать  $b_0$  и через него выразить остальные  $b_n$ . При реальном расчете количество уравнений типа (4.89) будет конечным, так в рассмотренном выше примере пяти членов разложения функции  $G(x)$  этих уравнений пять и они образуют систему (4.94)–(4.98), в которой заданы  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_4$ , как коэффициенты разложения  $G(x)$ , а также параметр  $\mu$ , определенный из уравнения типа  $D_5(\mu) = 0$ . При трех параметрах уравнений три с заданными коэффициентами  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  и параметром  $\mu$ , определенным из уравнения (4.103). В обоих случаях можно задать  $b_0$  и через него выразить остальные коэффициенты  $b_n$ , что и даст полное решение типа (4.81).

*Преобразование Уиттекера–Ватсона.* В монографии [210] показано, что равенство нулю бесконечного определителя Хилла типа (4.100)–(4.101) можно свести к довольно простой формуле, позволя-

ющей определить параметр  $\mu$  без обращения к бесконечностям. Эта же формула со ссылкой на [210] приведена также в монографии [69]. К сожалению, крайняя конспективность изложения как в [210], так и в [69], не позволила авторам настоящей монографии подробно проследить логическую последовательность вывода указанной формулы, поэтому, опираясь на отмеченные ссылки, приведем здесь лишь основные вехи ее расчета.

Прежде всего введем некоторые обозначения. Так для исходного определителя Хилла типа (4.100), как и ранее, будем использовать обозначение  $D(i\mu)$ , а для абсолютно сходящегося определителя типа (4.101) обозначение  $D_1(i\mu)$ .

Согласно [210] эти определители связаны соотношением

$$D(i\mu) = D_1(i\mu) \cdot \lim_{p \rightarrow \infty} \prod_{n=-p}^p \frac{(\mu + 2ni)^2 + \theta_0}{\theta_0 - 4n^2}, \quad (4.105)$$

которое можно записать в виде:

$$D(i\mu) = D_1(i\mu) \cdot \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left[ 1 - \frac{\mu^2 + 4n\mu i}{4n^2 - \theta_0} \right]. \quad (4.106)$$

При  $n \rightarrow \infty$  выражение в квадратных скобках стремится к единице, то есть необходимое условие сходимости бесконечного произведения [211] выполняется.

Как показано выше, определитель  $D_1(i\mu)$  сходится абсолютно, поэтому достаточность сходимости определителя  $D(i\mu)$ , то есть конечность уравнения для  $\mu$  определяется достаточностью сходимости бесконечного произведения в (4.106).

В [210] утверждается (к сожалению, без подробного вывода), что произведение в правой части (4.106) можно представить в виде:

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty} \left[ 1 - \frac{\mu^2 + 4n\mu i}{4n^2 - \theta_0} \right] = \frac{\sin \left[ \frac{\pi}{2} \cdot (i\mu - \sqrt{\theta_0}) \right] \cdot \sin \left[ \frac{\pi}{2} \cdot (i\mu + \sqrt{\theta_0}) \right]}{\sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\theta_0} \right)}. \quad (4.107)$$

Можно полагать, что вывод этого соотношения подобен таковому, выполняемому при представлении синуса в виде бесконечного произведения [211]:

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right). \quad (4.108)$$

В конечном счете получается:

$$D(i\mu) = D_1(i\mu) \cdot \frac{\sin \left[ \frac{\pi}{2} \cdot (i\mu - \sqrt{\theta_0}) \right] \cdot \sin \left[ \frac{\pi}{2} \cdot (i\mu + \sqrt{\theta_0}) \right]}{\sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\theta_0} \right)}. \quad (4.109)$$

Дальнейшее преобразование этого выражения, в соответствии с [210], приводит к соотношению:

$$D(i\mu) = D(0) - \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot i\mu\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\theta_0}\right)}, \quad (4.110)$$

где

$$D(0) = D(i\mu)|_{\mu=0}. \quad (4.111)$$

Таким образом, получено достаточно простое выражение для определителя Хилла, в явном виде бесконечности не содержащее.

Из условия равенства определителя Хилла нулю, необходимого для нетривиальности решения системы для  $b_n$  вида (4.89), получаем искомое выражение для нахождения  $\mu$ :

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot i\mu\right) = D(0) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\theta_0}\right). \quad (4.112)$$

Это — уравнение для параметра экспоненты  $\mu$ , содержащее входящие в  $D(0)$  коэффициенты  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n, \dots$  разложения функции  $G(x)$ . Выражая из этого уравнения  $\mu$ , получаем:

$$\mu = -\frac{2i}{\pi} \cdot \arcsin\left[\sqrt{D(0)} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\theta_0}\right)\right]. \quad (4.113)$$

Заметим, что в этом выражении должно быть  $\theta_0 \neq 0$ , что, однако, легко выполняется, если положить  $G(x) > 0$  во всем интервале изменения  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

*Формирование областей пропускания и непропускания по решению Уиттекера–Ватсона.* Рассмотрим общий характер выражения (4.113), для чего обратимся к рис. 4.5, где показана его схема. Функции  $y_{1,2}$  построены по следующим формулам:

$$y_1 = i \cdot \arcsin[1,5 \cdot \sin(x)]; \quad (4.114)$$

$$y_2 = \arcsin[1,5 \cdot \sin(x)]. \quad (4.115)$$

На рисунке приведены действительные части этих функций. При этом  $y_1$  по структуре соответствует действительной части выражения (4.113), а  $y_2$  — его мнимой части.

Из рисунка видно, что обе функции являются периодическими с периодом  $2\pi$ , причем обе содержат плоские горизонтальные участки, для функции  $y_1$  соответствующие нулю, а для функции  $y_2$  — уровню  $\pi/2$ . При этом точки перехода от наклонных участков к горизонтальным для обеих функций соответствуют одним и тем же значениям  $x$ . Таким образом, все протяжение координатной оси  $Ox$  делится на чередующиеся участки, в которых та или иная функция принимает постоянные значения.

Участки, где функция  $y_1$  отлична от нуля соответствуют действительным значениям параметра  $\mu$ , то есть волна при этом затухает (случай нарастания физически нереализуем). Это — полосы непропускания.

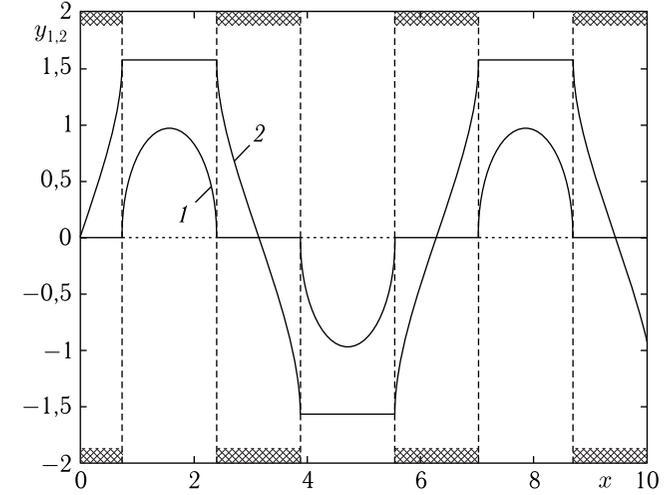


Рис. 4.5. Схема характера решений уравнения (4.113). 1 — функция  $y_1$  (4.114); 2 — функция  $y_2$  (4.115). Параметры построения:  $D(0) = 1,5$ ;  $x \rightarrow \sin(\pi\sqrt{\theta_0}/2)$  — меняется

Участки, где функция  $y_2$  переходит от одного постоянного значения до другого, соответствуют мнимому значению параметра  $\mu$ , где волна распространяется с постоянной амплитудой. Это — полосы пропускания. На рисунке они показаны штриховкой на краях координатной рамки.

Можно видеть, что полосы пропускания и непропускания периодически чередуются, непрерывно переходя друг в друга.

Приведенный здесь характер поведения параметра  $\mu$  соответствует изменению  $\theta_0$  при сохранении величины  $D(0)$  постоянной. Однако, как можно видеть из общей структуры определителя Хилла (4.100), его величина при изменении  $\theta_0$  также меняется, так как происходит изменение диагональных членов. Вообще говоря, член разложения  $\theta_0$ , как видно из (4.79), представляет собой постоянную составляющую функции  $G(x)$ . То есть его изменение при сохранении других членов разложения соответствует движению функции  $G(x)$  вверх и вниз по оси ординат как целого без изменения формы. При этом характер распространения волны все же может меняться за счет изменения величины  $D(0)$ . То есть меняется не только общая высота штрихов решетки, но также и глубина промежутков между ними.

При сохранении величины  $\theta_0$  постоянной характер распространения может изменяться за счет изменения других коэффициентов разложения  $\theta_n$ , то есть изменения  $D(0)$ . Однако предварительное рассмотрение показывает, что здесь наряду с периодическим может иметь место и монотонное изменение пропускания и непропускания.

Такой случай иллюстрируется рис. 4.6, где показана схема характера решений уравнения (4.113) при постоянном значении  $\theta_0$  и изме-

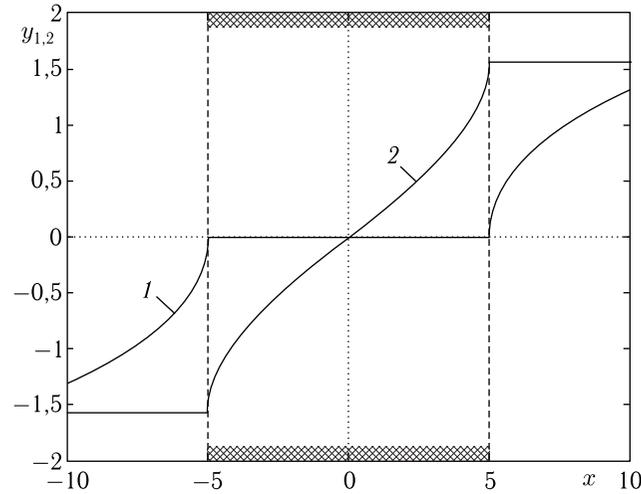


Рис. 4.6. Схема характера решений уравнения (4.113). 1 — функция  $y_1$  (4.116); 2 — функция  $y_2$  (4.117). Параметры построения:  $\sin(\pi\sqrt{\theta_0}/2) = 0,2$ ;  $x \rightarrow D(0)$  — меняется

нении  $D(0)$ , в роли которого здесь выступает  $x$ . Кривые  $y_{1,2}$  построены по следующим формулам:

$$y_1 = i \cdot \arcsin(x \cdot 0,2); \quad (4.116)$$

$$y_2 = \arcsin(x \cdot 0,2). \quad (4.117)$$

На рисунке приведены действительные части этих функций. При этом  $y_1$  по структуре соответствует действительной части выражения (4.113), а  $y_2$  — его мнимой части.

Из рисунка видно, что действительной величине параметра  $\mu$  соответствует кривая 1, а мнимой — кривая 2. Таким образом, здесь имеется всего одна полоса пропускания (отмечена штриховкой на нижнем и верхнем краях рамки), симметричная относительно начала координат и окруженная с обеих сторон полосами непропускания, простирающимися до бесконечности.

В общем случае, при заданном характере функции  $G(x)$ , характер пропускания и непропускания должен исследоваться более подробно, применительно к конкретным условиям.

## 4.2. Методы решения задач с произвольными неоднородностями

В предыдущих разделах рассмотрены классические методы расчета распространения волн в структурах с периодическими неоднородно-

стями, основанные на решении уравнений Хилла, Матье или Кронига–Пенни [69, 208, 210, 212].

К классическим методам, в известной степени обобщенным в монографии [69], близко примыкают задачи о распространении волн в слоистых структурах, параметры которых в направлении распространения волны меняются как периодически, так и любым другим заданным образом. При этом задача решается не сразу применительно к структуре в целом, а последовательно, переходя от одного слоя или штриха решетки к другому. Некоторые приемы решения подобных задач обобщены в монографиях [5, 213, 214]. К таковым в первую очередь относятся методы импеданса [213, 214] и матрицы [5], а также исторически наиболее ранний метод переотражений [5].

В работах [215–217] упомянутые методы применены для решения некоторых частных задач, в первую очередь к средам с неоднородностями «барьерного» типа, то есть такого, структуру которых можно представить в виде набора примыкающих друг к другу ступенек, образующих единый барьер.

Существенное различие между двумя упомянутыми классами задач состоит в том, что в первом случае среда предполагается в обе стороны неограниченно протяженной, причем неоднородность является чисто периодической. Трансляционная симметрия задачи (по Флоке) позволяет получить сравнительно простые аналитические решения как для амплитуд волн в полосах пропускания и непропускания, так и для распределения амплитуд колебаний в отдельных слоях структуры.

Во втором случае среда может быть ограничена по длине, а неоднородность может быть как периодической, так и любой другой, представимой в виде совокупности барьеров, на протяжении отдельных ступенек которых параметры среды не меняются. То есть здесь круг задач по сравнению с классикой значительно расширяется, однако из-за отсутствия трансляционной симметрии аналитическое решение получается значительно более громоздким.

Для решения подобных задач наиболее последовательным является «прямой» метод, состоящий в решении волновых уравнений в каждом слое с последующим их сшиванием на границах [5, 215, 218, 219], однако свойственные этому методу громоздкие определители высоких порядков делают его непригодным уже при количестве сред более пяти. Тем не менее, в работе [220] в структуре, содержащей до пяти слоев, прямой метод применен для анализа баланса энергии волны вполне успешно. Методы последовательных вычислений — матрицы [5, 216] и импеданса [213, 214, 217], хотя и являются менее громоздкими, однако пригодны для рассмотрения за один проход волн только одного направления без учета встречных волн.

В работах [221–227] предложен весьма удобный «метод исключения», позволяющий путем исключения промежуточных вычислений находить амплитуды отраженной и проходящей волн. Универсальность метода позволила применить его для рассмотрения периодических

структур [224], являющихся частным случаем структур с барьерными неоднородностями. Выгодное преимущество предложенного метода по сравнению с классическими состоит в возможности исследования периодических структур не только с бесконечно большим числом слоев, но и с весьма малым, начиная с одного–двух барьеров, вплоть до бесконечного их числа. Однако нахождение амплитуд волн в промежуточных слоях структуры методом исключения недоступно.

В работах [192, 193, 199–201, 228–234] предложен универсальный метод «пошагового алгоритма», позволяющий путем крайне простых «пошаговых» алгебраических преобразований получать аналитические выражения для амплитуд как внешних, так и внутренних волн в многослойной структуре со значительным числом слоев. Машинная реализация предложенного алгоритма также довольно проста и содержит всего два цикла, соответствующих прохождению слоев структуры в прямом и обратном направлениях. Рассмотрим далее этот метод более подробно.

#### 4.2.1. Метод пошагового алгоритма

Обратимся к рассмотрению метода пошагового алгоритма в применении к расчету распространения одномерных и электромагнитных волн в структурах с барьерными неоднородностями в том числе магнитного типа. Будем в основном следовать работам [192, 193, 199–201, 228–234].

*Геометрия задачи.* Рассмотрим распространение волны через ограниченную многослойную структуру, параметры слоев в которой по длине структуры периодически повторяются, то есть неоднородность представляет собой чередование одинаковых прямоугольных барьеров, с одинаковыми промежутками между ними. Такую структуру будем называть «меандровой». В случае равенства длины барьеров длине промежутков меандровую структуру будем называть «симметричной», а в случае различия упомянутых длин — «несимметричной». Общая схема симметричной меандровой структуры иллюстрируется рис. 4.7.

Число слоев может быть произвольным, на рисунке показан частный случай 16 слоев. Структура представляет собой совокупность одинаковых барьеров длиной  $L_E$ , разделенных промежутками длиной  $L_F$ . Период неоднородности структуры равен:  $L_P = L_E + L_F$ . Полная длина структуры равна  $L_N$ .

Структура содержит два вида сред, в одном из которых волновое число равно  $k_p$ , а в другом —  $k_s$ , причем  $k_p < k_s$ . В силу геометрии, показанной на рис. 4.7, будем полагать, что  $k_p$  соответствует слоям с нечетными номерами, а  $k_s$  — с четными. Среднее значение волнового числа равно:

$$k_c = (k_p + k_s)/2, \quad (4.118)$$

причем добавка к нему  $\Delta k_c$ , такова, что:

$$k_p = k_c - \Delta k_c; \quad k_s = k_c + \Delta k_c. \quad (4.119)$$

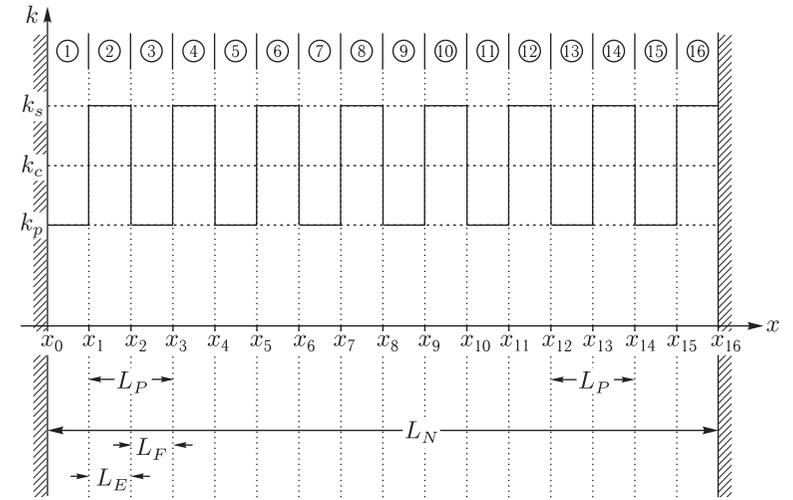


Рис. 4.7. Общая схема симметричной меандровой структуры. Цифры в кругах — номера слоев (сред)

Будем полагать, что отражение волн при координатах  $x_0$  и  $x_{16}$  отсутствует, причем в среде №1 распространяется в положительном направлении волна с амплитудой  $A_0$ , а в среде №16 — в отрицательном направлении волна с амплитудой  $B_{16}$ . Для упрощения записи экспонент введем обозначения:

$$e_n = \exp[-ik_n(x - x_{n-1})]. \quad (4.120)$$

При этом  $e_0 = \exp(i\varphi)$ , где  $\varphi$  — начальная фаза, обычно равная нулю.

*Общая схема пошагового алгоритма.* Рассмотрим алгоритм получения детерминантов, определяющих амплитуды волн, для произвольного числа  $N$  слоев. Алгоритм содержит два этапа, состоящих в последовательном прохождении по слоям структуры от одного конца структуры к другому и обратно.

На первом этапе сначала с помощью простых правил задаются вспомогательные величины, определяемые параметрами первого слоя. Эти величины считаются величинами первого слоя. Из них на основе параметров первого и второго слоев формируются новые величины, принадлежащие второму слою. Затем таким же образом из величин второго слоя формируются величины третьего слоя и так далее до тех пор, пока все слои структуры не будут исчерпаны. Формирование последующих величин из предыдущих происходит с помощью формальной процедуры, состоящей в увеличении порядковых индексов всех предыдущих величин на единицу.

При исчерпании всех слоев структуры первый этап заканчивается и происходит переход ко второму. Второй этап начинается с формирования вспомогательных величин, определяемых параметрами

последнего слоя структуры. Далее из этих величин с использованием параметров последнего и предпоследнего слоев формируются подобные величины для предпоследнего слоя и так далее, подобно первому этапу, но в обратном порядке. Процедура формирования последующих величин из предыдущих состоит в уменьшении порядковых индексов всех предыдущих величин на единицу.

Таким образом, на первом этапе происходит проход от начала структуры к ее концу, а на втором — обратный ход от конца структуры к ее началу.

Из всех величин, получаемых на обоих этапах, с помощью простых правил суммирования формируются детерминанты, определяющие амплитуды волн внутри слоев.

*Аналитическая реализация алгоритма.* Аналитическая реализация алгоритма состоит из двух этапов, результаты которых используются для получения амплитуд распространяющихся волн. Приведем эти этапы последовательно.

#### Этап № 1.

Сначала введем вспомогательное обозначение

$$T_0 = 1, \quad (4.121)$$

а также положим начальную тройку основных обозначений:

$$P_1 = 1; \quad (4.122)$$

$$Q_1 = 0; \quad (4.123)$$

$$T_1 = T_0 \cdot 2k_1 e_1. \quad (4.124)$$

С использованием (4.122)–(4.124) формируем новую тройку выражений:

$$P_2 = P_1(k_1 + k_2) + Q_1(k_1 - k_2) \cdot e_1^2; \quad (4.125)$$

$$Q_2 = P_1(k_1 - k_2) + Q_1(k_1 + k_2) \cdot e_1^2; \quad (4.126)$$

$$T_2 = T_1 \cdot 2k_2 e_2. \quad (4.127)$$

Далее, увеличивая порядковые номера индексов на единицу, получаем следующую тройку подобных выражений и так далее, вплоть до  $P_N$ ,  $Q_N$ ,  $T_N$ . Общие формулы для получения последующих выражений из предыдущих при произвольном номере  $n$  имеют вид:

$$P_{n+1} = P_n(k_n + k_{n+1}) + Q_n(k_n - k_{n+1}) \cdot e_n^2, \quad (4.128)$$

$$Q_{n+1} = P_n(k_n - k_{n+1}) + Q_n(k_n + k_{n+1}) \cdot e_n^2, \quad (4.129)$$

$$T_{n+1} = T_n \cdot 2k_{n+1} e_{n+1}. \quad (4.130)$$

Процесс заканчивается при достижении  $n$  значения  $N - 1$ . При этом получаем:

$$P_N = P_{N-1}(k_{N-1} + k_N) + Q_{N-1}(k_{N-1} - k_N) \cdot e_{(N-1)}^2; \quad (4.131)$$

$$Q_N = P_{N-1}(k_{N-1} - k_N) + Q_{N-1}(k_{N-1} + k_N) \cdot e_{(N-1)}^2; \quad (4.132)$$

$$T_N = T_{N-1} \cdot 2k_N e_N. \quad (4.133)$$

Полученные выражения используются далее для формирования компонент детерминантов  $D_{Bn}$ , соответствующих волнам, распространяющимся в отрицательном направлении оси  $Ox$  (будем называть это направление обратным).

Найдем теперь выражения, позволяющие формировать компоненты детерминантов  $D_{An}$ , соответствующих волнам, распространяющимся в положительном направлении оси  $Ox$  (которое будем далее называть прямым).

#### Этап № 2.

Введем еще одно вспомогательное обозначение

$$U_{N+1} = 1, \quad (4.134)$$

а также положим другую начальную тройку основных обозначений, индексы которых зададим равными полному количеству слоев:

$$R_N = 1; \quad (4.135)$$

$$S_N = 0; \quad (4.136)$$

$$U_N = U_{N+1} \cdot 2k_N e_N. \quad (4.137)$$

С использованием (4.135)–(4.137) формируем тройку выражений:

$$R_{N-1} = (k_{N-1} + k_N)R_N + (k_{N-1} - k_N)S_N \cdot e_N^2; \quad (4.138)$$

$$S_{N-1} = (k_{N-1} - k_N)R_N + (k_{N-1} + k_N)S_N \cdot e_N^2; \quad (4.139)$$

$$U_{N-1} = U_N \cdot 2k_{N-1} e_{N-1}. \quad (4.140)$$

Далее, уменьшая порядковые номера индексов на единицу, получаем следующую тройку подобных выражений, и так далее, вплоть до  $P_1$ ,  $Q_1$ ,  $U_1$ . Общие формулы для получения последующих выражений из предыдущих при произвольном номере  $n$  имеют вид:

$$R_{n-1} = (k_{n-1} + k_n)R_n + (k_{n-1} - k_n)S_n \cdot e_n^2; \quad (4.141)$$

$$S_{n-1} = (k_{n-1} - k_n)R_n + (k_{n-1} + k_n)S_n \cdot e_n^2; \quad (4.142)$$

$$U_{n-1} = U_n \cdot 2k_{n-1} e_{n-1}. \quad (4.143)$$

Процесс заканчивается при достижении  $n$  значения 1. При этом получаем:

$$R_1 = (k_1 + k_2)R_2 + (k_1 - k_2)S_2 \cdot e_2^2; \quad (4.144)$$

$$S_1 = (k_1 - k_2)R_2 + (k_1 + k_2)S_2 \cdot e_2^2; \quad (4.145)$$

$$U_1 = U_2 \cdot 2k_1 e_1. \quad (4.146)$$

При этом детерминанты  $D_0$ ,  $D_{An}$  и  $D_{Bn}$  выражаются через (4.121)–(4.146) следующим образом:

$$D_0 = R_1 - Q_1; \quad (4.147)$$

$$D_{B1} = A_0 \cdot S_1 \cdot T_0 \cdot e_1 + B_N e_0 \cdot P_1 \cdot U_2; \quad (4.148)$$

$$D_{A2} = A_0 \cdot R_2 \cdot T_1 - B_N e_0 \cdot Q_2 \cdot U_3 \cdot e_2; \quad (4.149)$$

$$D_{B2} = A_0 \cdot S_2 \cdot T_1 \cdot e_2 + B_N e_0 \cdot P_2 \cdot U_3; \quad (4.150)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$D_{An} = A_0 \cdot R_n \cdot T_{n-1} - B_N e_0 \cdot Q_n \cdot U_{n+1} \cdot e_n; \quad (4.151)$$

$$D_{Bn} = A_0 \cdot S_n \cdot T_{n-1} \cdot e_n + B_N e_0 \cdot P_n \cdot U_{n+1}; \quad (4.152)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$D_{AN} = A_0 \cdot R_N \cdot T_{N-1} - B_N e_0 \cdot Q_N \cdot U_{N+1} \cdot e_N; \quad (4.153)$$

$$D_0 = S_N + P_N. \quad (4.154)$$

Здесь индексы детерминантов соответствуют номерам слоев, а выражения (4.147) и (4.154), определяющие  $D_0$ , имея различный вид записи, тождественно равны.

Найденные детерминанты (4.147)–(4.154) позволяют определить амплитуды всех волн через  $A_0$  и  $B_N$  с помощью формул, задающих амплитуды волн в точках их исхода:

$$A_n = \frac{D_{An}}{D_0}; \quad B_n = \frac{D_{Bn}}{D_0}. \quad (4.155)$$

При этом амплитуда волны, выходящей из структуры в положительном направлении оси  $Ox$ , в точке  $x_N$  равна

$$A_{NT} = \frac{D_{AN}}{D_0} \cdot e_N; \quad (4.156)$$

а амплитуда волны, выходящей в отрицательном направлении оси  $Ox$ , в точке  $x_0$  равна

$$B_{1T} = \frac{D_{B1}}{D_0} \cdot e_1. \quad (4.157)$$

На этом получение аналитических выражений на основе пошагового алгоритма заканчивается.

### 4.3. Результаты расчета амплитуд волн с применением пошагового алгоритма

Описанный здесь метод был применен для численного расчета амплитуд волн прямого и обратного направлений в структуре, схема которой показана на рис. 4.7. Перейдем к описанию результатов расчетов.

#### 4.3.1. Амплитуды волн в крайних слоях структуры

Рассмотрим сначала амплитуды волн в крайних слоях структуры при изменении волнового числа. Параметры структуры возьмем следу-

ющими:  $L_N = 8$  см;  $L_E = L_F = 0,5$  см;  $L_P = 1$  см. Пусть на структуру падает одна волна прямого направления с амплитудой  $A_0 = 1$  (при этом  $B_{16} = 0$ ). Рассмотрим изменение среднего волнового числа  $k_c$  в интервале от  $1$  см<sup>-1</sup> до  $5$  см<sup>-1</sup>, причем добавка к нему во всем интервале его изменения остается постоянной:  $\Delta k_c = 0,1$  см<sup>-1</sup>.

На рис. 4.8 показаны зависимости амплитуд волн обратного (а) и прямого (б) направлений в крайних слоях структуры от среднего волнового числа.

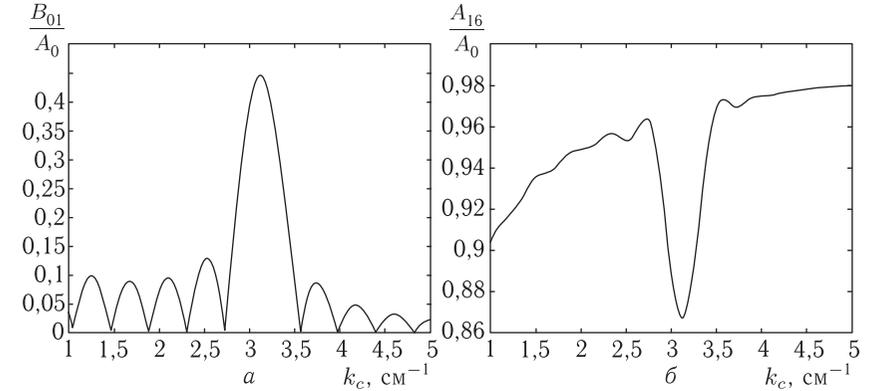


Рис. 4.8. Зависимости амплитуд волн в крайних слоях структуры от среднего волнового числа. а — волна обратного направления (отраженная) в слое № 1. б — волна прямого направления (проходящая) в слое № 16

Из рисунка видно, что амплитуды волн как прямого, так и обратного направлений имеют ярко выраженные особенности вблизи  $k_c = 3,14$  см<sup>-1</sup>. При этом амплитуда волны обратного направления в среде № 1 —  $B_{01}$  имеет максимум, что соответствует максимуму отражения падающей волны от структуры в целом, а амплитуда волны прямого направления в среде № 16 —  $A_{16}$  имеет минимум, что соответствует минимуму прохождения падающей волны через структуру в целом.

Волновое число  $k_c = 3,14$  см<sup>-1</sup> соответствует длине волны 2 см, что вдвое превышает период изменения параметров (волнового числа) структуры. То есть на величине периода укладывается одна половина длины волны. Такое соотношение соответствует хорошо известному условию прохождения волны через периодическую структуру, говорящему о наличии полос непропускания при равенстве между периодом структуры и целым числом распространяющихся в структуре полуволн [69]. Осцилляции по обе стороны от главного максимума, особенно ярко выраженные для амплитуды отраженной волны  $B_{01}$ , обусловлены интерференционными явлениями за счет конечности общего числа барьеров структуры. Дополнительный расчет

показывает, что при увеличении количества барьеров амплитуды осцилляций уменьшаются, а главный максимум сужается.

### 4.3.2. Пространственная модуляция амплитуды

Рассмотрим теперь распределение амплитуд в отдельных слоях структуры, ограничиваясь случаем симметричного меандра. Исследование показывает, что по мере увеличения соотношения волновых чисел, распределение амплитуд приобретает явно выраженный меняющийся по координате характер, то есть амплитуда претерпевает пространственную модуляцию.

Прежде всего отметим, что во всех случаях в распределении амплитуд присутствует периодичность, обусловленная чередованием слоев структуры, то есть амплитуда от слоя к слою изменяется вверх и вниз с периодом, равным периоду структуры. На такую периодическую модуляцию накладывается изменение значительно более плавного характера, которое можно проследить, если брать среднее значение между амплитудами в каждых двух соседствующих слоях. Такое медленное изменение имеет периодический или монотонно спадающий вид. То есть распределение амплитуд ведет себя подобно классическому случаю распространения волны в структуре с периодической неоднородностью и представляет собой произведение двух синусоид с разными периодами или синусоиды на экспоненту (по Флоке), как это рассмотрено в разделе 4.1.1.

В то же время, здесь просматриваются некоторые особенности, связанные в первую очередь с ограниченной длиной структуры, а также с прямоугольным характером барьеров, так что рассмотрим распределение амплитуд в слоях несколько более подробно.

*Режимы пространственной модуляции.* Будем полагать, что структура обладает теми же параметрами, что и раньше:  $L_N = 8$  см;  $L_E = L_F = 0,5$  см;  $L_P = 1$  см, причем на структуру падает одна волна прямого направления с амплитудой  $A_0 = 1$  (при этом  $B_{16} = 0$ ).

В этом случае в поведении пространственной модуляции в зависимости от соотношения волновых чисел в соседствующих слоях  $k_s/k_p$  можно выделить пять характерных режимов: синусоидальный, полусинусоидальный, линейный, экспоненциальный и синусоидальный с верхним пределом, соответствующих различным интервалам значений такого соотношения. Эти режимы отличаются друг от друга главным образом характером медленного изменения амплитуды, которое накладывается на быстрое, соответствующее периоду структуры. Поэтому обратим основное внимание именно на такое медленное изменение.

Будем полагать, что волна падает со стороны начала структуры ( $A_0 = 1$ ,  $B_{16} = 0$ ), и сперва рассмотрим характерные свойства этих режимов, после чего установим интервалы их существования.

**Режим № 1 — синусоидальное изменение амплитуды.**

В этом случае распределение амплитуды медленных колебаний по координате имеет вид довольно правильной синусоиды, не имеющей

ограничений сверху или снизу по своему значению. Типичная картина распределения амплитуд для такого режима иллюстрируется рис. 4.9, где показаны зависимости амплитуд волн прямого ( $a$ ) и обратного ( $b$ ) направлений от координаты в различных слоях структуры. Рисунок построен при отклонении значений волновых чисел в слоях от среднего значения на 47,3%. Укрупненные точки являются результатами машинного эксперимента и построены как середины перепадов между амплитудами волн в соседствующих слоях. Синусоидальная кривая на рис. 4.9,  $a$  построена по эмпирической формуле:

$$A_n/A_0 = 0,11 \cdot \sin(1,79 \cdot x - 3,00) + 0,78, \quad (4.158)$$

подобная кривая на рис. 4.9,  $b$  построена по формуле:

$$B_n/A_0 = 0,21 \cdot \sin(1,79 \cdot x - 3,00) + 0,40. \quad (4.159)$$

Из рисунка видно, что в этом режиме линии, проведенные через экспериментальные точки, близки к многократно осциллирующим синусоидам, вследствие чего режим назван «синусоидальным». При этом эмпирические кривые согласуются с точками, в основном, с точностью не хуже 5%. Несколько большие отклонения наблюдаются только на границе между первым и вторым слоями, где для волн прямого направления отличие составляет 16%, а для волн обратного — 30%, что, по-видимому, связано с недостаточным установлением режима распространения волн вблизи точки их излучения.

Как видно из приведенных формул, частоты и фазы обеих кривых совпадают, однако амплитуды и постоянные составляющие значительно различаются. Так амплитуда синусоиды, соответствующей волнам прямого направления, примерно в два раза меньше амплитуды синусоиды волн обратного направления, а соотношение для постоянных составляющих — обратное: постоянная составляющая синусоиды для волн прямого направления примерно в два раза больше подобной составляющей для волн обратного направления.

Такой синусоидальный характер полученных кривых говорит о том, что для обоих направлений перепады амплитуд волн в соседних слоях по мере изменения координаты периодически осциллируют. Период осцилляций амплитуды здесь равен  $P_m = 3,51$  см, что соответствует изменению аргумента синуса на  $2\pi$ , причем этот период одинаков для волн обоих направлений.

**Режим № 2 — полусинусоидальное изменение амплитуды.**

В этом случае распределение амплитуды медленных колебаний по координате напоминает по форме положительную половину периода синусоиды, вследствие чего режим назван «полусинусоидальным». Типичная картина распределения амплитуд для такого режима иллюстрируется рис. 4.10, где показаны зависимости амплитуд волн прямого (сплошные линии и закрытые точки) и обратного (пунктирные линии и открытые точки) направлений от координаты в различных

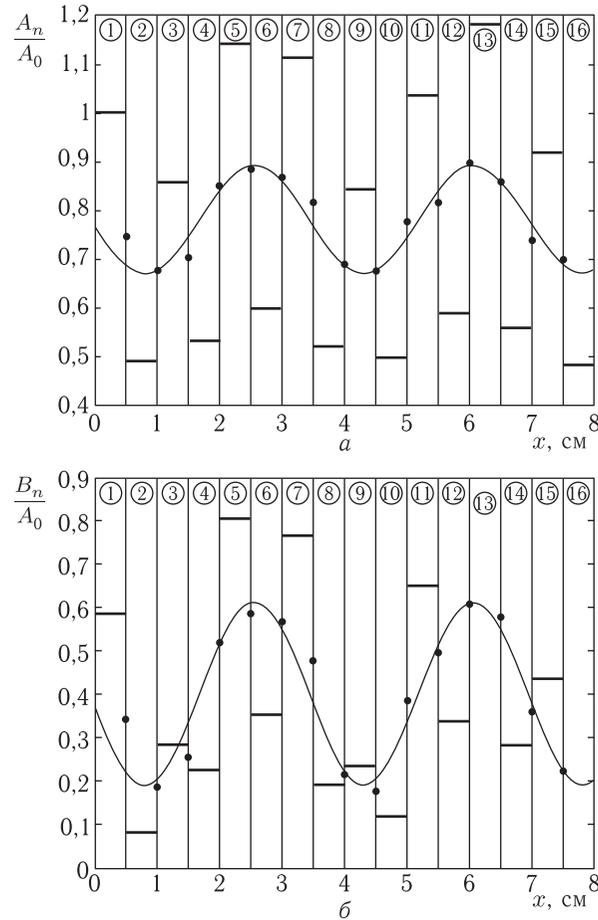


Рис. 4.9. Зависимости амплитуд волн прямого (а) и обратного (б) направлений от координаты в различных слоях структуры. Утолщенные горизонтальные линии — амплитуды волн в слоях. Волновые числа:  $k_p = 1,00 \text{ см}^{-1}$ ;  $k_s = 2,80 \text{ см}^{-1}$ ;  $k_c = 1,90 \text{ см}^{-1}$

слоях структуры. Рисунок построен при отклонении значений волновых чисел в слоях от среднего значения на 53,4%. Укрупненные точки являются результатами машинного эксперимента и построены как середины перепадов между амплитудами волн в соседствующих слоях. Сплошная кривая построена по эмпирической формуле:

$$A_n/A_0 = 0,95 \cdot \sin(0,43 \cdot x) + 0,60, \quad (4.160)$$

пунктирная кривая построена по формуле:

$$B_n/A_0 = 0,95 \cdot \sin(0,43 \cdot x) + 0,48. \quad (4.161)$$

Из рисунка видно, что как и при синусоидальном режиме частоты и фазы обеих кривых совпадают, здесь же совпадают также и амплитуды, а различаются только постоянные составляющие, причем всего на 11% от среднего значения (0,54). То есть зависимости амплитуд волн обоих направлений от координаты, в отличие от синусоидального режима, почти совпадают. Если принять наблюдаемую половину синусоиды за половину периода осцилляций, то можно видеть, что здесь он равен  $P_m = 14,50 \text{ см}$  и одинаков для волн обоих направлений.

### Режим № 3 — линейный спад амплитуды.

В этом режиме амплитуда медленных колебаний по координате спадает линейным образом. Типичная картина распределения амплитуд для такого режима иллюстрируется рис. 4.11, где показаны зависимости амплитуд волн прямого (сплошные линии и закрытые точки) и обратного (пунктирные линии и открытые точки) направлений от координаты в различных слоях структуры. Рисунок построен при отклонении значений волновых чисел в слоях от среднего значения на 54,6%. Укрупненные точки являются результатами машинного эксперимента и построены как середины перепадов между амплитудами волн в соседствующих слоях. Сплошная линия построена по эмпирической формуле:

$$A_n/A_0 = 0,725 - 0,0812 \cdot x, \quad (4.162)$$

пунктирная — построена по формуле:

$$B_n/A_0 = 0,725 - 0,0906 \cdot x. \quad (4.163)$$

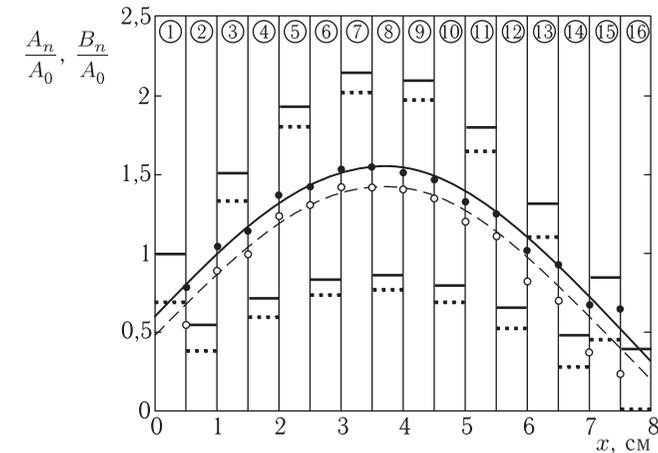


Рис. 4.10. Зависимости амплитуд волн прямого (сплошные линии и закрытые точки) и обратного (пунктирные линии и открытые точки) направлений от координаты в различных слоях структуры. Кривые построены по формулам (4.160) и (4.161). Волновые числа:  $k_p = 1,00 \text{ см}^{-1}$ ;  $k_s = 3,30 \text{ см}^{-1}$ ;  $k_c = 2,15 \text{ см}^{-1}$

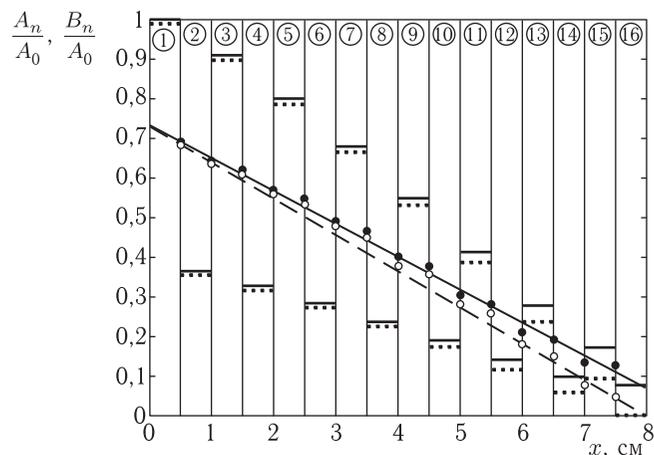


Рис. 4.11. Зависимости амплитуд волн прямого (сплошные линии и закрытые точки) и обратного (пунктирные линии и открытые точки) направлений от координаты в различных слоях структуры. Прямые построены по формулам (4.162) и (4.163). Волновые числа:  $k_p = 1,00 \text{ см}^{-1}$ ;  $k_s = 3,40 \text{ см}^{-1}$ ;  $k_c = 2,20 \text{ см}^{-1}$

Из рисунка видно, что в этом режиме линии, проведенные через экспериментальные точки, являются прямыми, вследствие чего режим назван «линейным». В отличие от синусоидального и полусинусоидального режимов здесь какая-либо периодичность зависимостей полностью отсутствует, постоянные составляющие для волн обоих направлений совпадают, а угловые коэффициенты прямых слегка различаются, хотя и незначительно — всего на 11,8% от среднего значения (0,0859). Зависимости амплитуд волн того и другого направлений от координаты при малых номерах слоев (до 10) практически совпадают (с точностью до 10%) и только при слоях с номерами 14 и 15, то есть вблизи конца структуры, достигают 30%.

#### Режим № 4 — экспоненциальный спад амплитуды.

В этом режиме амплитуда медленных колебаний по координате спадает сначала резко, а потом более плавно. С достаточной точностью такой спад можно описать экспонентой, благодаря чему этот режим назван «экспоненциальным». Типичная картина распределения амплитуд для такого режима иллюстрируется рис. 4.12, где показаны зависимости амплитуд волн прямого и обратного направлений от координаты в различных слоях структуры. Амплитуды волн прямого и обратного направлений в каждом слое попарно совпадают друг с другом с точностью в доли процента, поэтому приведенные на рисунке амплитуды, точки и кривая соответствуют волнам как того, так и другого направлений в равной степени. Рисунок построен при отклонении значений

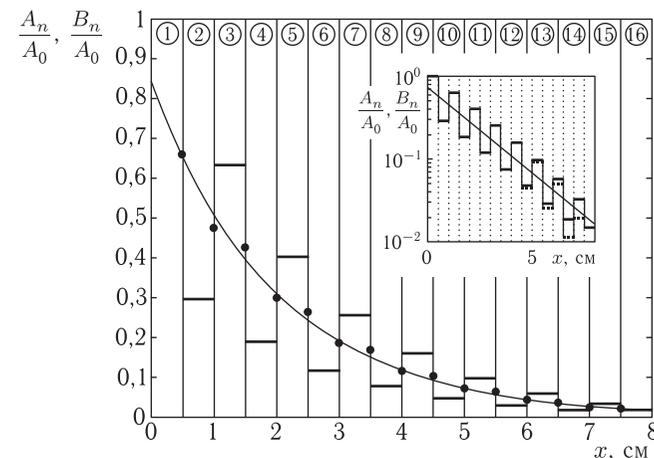


Рис. 4.12. Зависимости амплитуд волн прямого и обратного направлений (совпадают) от координаты в различных слоях структуры. Спадающая кривая построена по формуле (4.164). Волновые числа:  $k_p = 1,00 \text{ см}^{-1}$ ;  $k_s = 3,60 \text{ см}^{-1}$ ;  $k_c = 2,30 \text{ см}^{-1}$

волновых чисел в слоях от среднего значения на 56,5%. Спадающая кривая построена по эмпирической формуле:

$$A_n/A_0, B_n/A_0 = 0,84 \cdot \exp(-0,50 \cdot x). \quad (4.164)$$

На врезке — те же зависимости в логарифмическом масштабе по вертикальной оси. Сплошные горизонтальные линии соответствуют  $A_n$ , пунктирные —  $B_n$ . Видно, что здесь, начиная с  $x = 5 \text{ см}$ , они несколько различаются тем сильнее, чем больше  $x$ . Такое различие обусловлено растягивающим действием логарифмического масштаба при малых амплитудах.

Из рисунка видно, что в логарифмическом масштабе (врезка) зависимость амплитуд от координаты с высокой точностью (доли процента) представляет собой прямую линию, что говорит о хорошем приближении экспериментальных данных спадающей экспонентой, что оправдывает название режима. В этом режиме зависимости амплитуд волн обоих направлений от координаты практически полностью совпадают.

Дополнительное исследование показывает, что спад экспоненты при увеличении отношения волновых чисел от  $k_s/k_p = 3,6$  до 5,00 увеличивается, причем коэффициент при переменной в ее показателе меняется в пределах от  $-0,50$  до  $-1,50$ . В остальном характер режима полностью сохраняется.

#### Режим № 5 — синусоидальные колебания амплитуды с верхним пределом.

В этом случае распределение амплитуды медленных колебаний по координате, как и при режиме № 1, имеет вид довольно правильной

синусоиды, однако здесь все амплитуды ограничены сверху определенным значением, единым для всех слоев. Благодаря такому ограничению в названии режима присутствует формулировка «с верхним пределом». Типичная картина распределения амплитуд для такого режима иллюстрируется рис. 4.13, где показаны зависимости амплитуд волн прямого (сплошные линии и точки) и обратного (пунктирные линии и открытые точки) направлений от координаты в различных слоях структуры. Рисунок построен при отклонении значений волновых чисел в слоях от среднего значения на 89,9%. Укрупненные точки являются результатами машинного эксперимента и построены как середины перепадов между амплитудами волн в соседствующих слоях. Сплошная синусоидальная кривая построена по формуле:

$$A_n/A_0 = -0,20 \cdot \sin(x) + 0,80, \quad (4.165)$$

пунктирная — по формуле:

$$B_n/A_0 = -0,20 \cdot \sin(x) + 0,72. \quad (4.166)$$

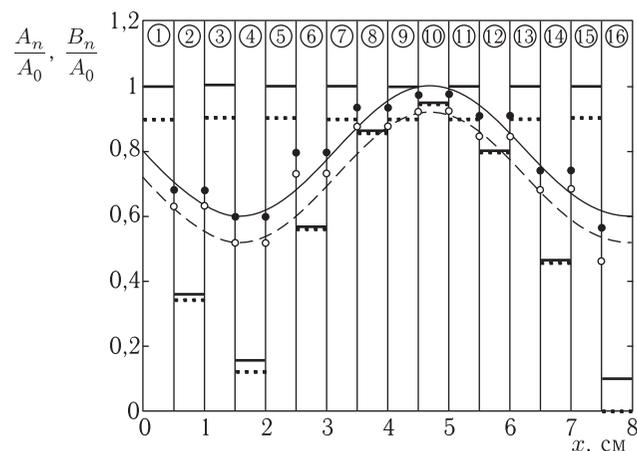


Рис. 4.13. Зависимости амплитуд волн прямого (сплошные линии и точки) и обратного (пунктирные линии и открытые точки) направлений от координаты в различных слоях структуры. Сплошная кривая построена по формуле (4.165), пунктирная — по формуле (4.166). Волновые числа:  $k_p = 1,00 \text{ см}^{-1}$ ;  $k_s = 18,86 \text{ см}^{-1}$ ;  $k_c = 9,93 \text{ см}^{-1}$

Из рисунка видно, что в этом режиме синусоидальные кривые ведут себя подобно таковым при режиме № 1, причем здесь они совпадают не только по фазе, но и по амплитуде. Период осцилляций составляет 6,28 см, что соответствует изменению аргумента синуса на  $2\pi$ . Однако соответствие между упомянутыми кривыми и экспериментальными точками здесь несколько хуже, чем при режиме № 1, и в ряде слоев отклонение достигает 10%.

Амплитуды колебаний в слоях с четными и нечетными номерами ведут себя существенно различным образом. Так амплитуды для нечетных слоев все ограничены сверху одним и тем же значением, для волн прямого направления близким к единице, а для волн обратного направления — близким к величине 0,90. Амплитуды волн в четных слоях везде меньше этих значений. Исключение составляет только амплитуда волны обратного направления в слое № 10, где она равна 0,94, что впрочем, отличается от основного значения всего на 4,4%, то есть весьма незначительно.

Причина отмеченного несколько неполного соответствия синусоидальных кривых экспериментальным точкам состоит в равенстве перепадов между амплитудами волн в слоях с четными номерами.

*Интервалы существования различных режимов.* При увеличении соотношения между волновыми числами составляющих структуру сред в пределах  $k_s/k_p \leq 5,00$  описанные выше режимы № 1–№ 4 по очереди сменяют друг друга следующим образом: при  $2,00 \leq k_s/k_p \leq 3,20$  имеет место синусоидальный режим № 1; при  $3,20 \leq k_s/k_p \leq 3,35$  — полусинусоидальный № 2; при  $3,35 \leq k_s/k_p \leq 3,50$  — линейный № 3; при  $3,50 \leq k_s/k_p \leq 5,00$  — экспоненциальный № 4.

Далее наблюдаются широкие интервалы господства экспоненциального режима № 4, перемежаемые относительно узкими «островками» синусоидального режима № 5, где амплитуды ограничены верхним пределом. Так при  $3,50 \leq k_s/k_p \leq 6,28$  в интервале 2,78 наблюдается режим № 4, при  $6,28 \leq k_s/k_p \leq 8,20$  в интервале 1,92 — режим № 5, при  $8,20 \leq k_s/k_p \leq 12,50$  в интервале 4,30 — режим № 4, при  $12,50 \leq k_s/k_p \leq 13,20$  в интервале 0,70 — режим № 5, при  $13,20 \leq k_s/k_p \leq 18,80$  в интервале 5,60 — режим № 4 и т. д.

Как видим, интервалы существования режима № 5 заметно короче интервалов режима № 4, причем с увеличением отношения  $k_s/k_p$  интервалы режима № 5 сужаются.

Границы между всеми режимами являются плавными, какие-либо скачки отсутствуют, однако интервалы изменения режимов, как правило, значительно короче интервалов, где режимы существуют в устойчивом виде.

Из сравнения величин интервалов существования режимов по величине  $k_s/k_p$  при  $k_s/k_p \leq 5,00$  можно видеть, что наиболее протяженными, то есть основными режимами являются синусоидальный и экспоненциальный, занимающие интервалы 1,20 и 1,50 относительных единиц соответственно, тогда как на долю полусинусоидального и линейного режимов приходятся интервалы всего по 0,15 относительных единиц. То есть основными режимами являются синусоидальный и экспоненциальный, а режимы полусинусоидальный и линейный — переходными.

Области существования режимов по волновому числу. Описанные в предыдущем разделе переходы между режимами хорошо наблюдаются при  $k_s/k_p \leq 5,00$ . При  $k_s/k_p \geq 5,00$  переходы между режимами № 4 и № 5 также являются плавными и происходят через посредство режимов № 2 и № 3 в прямом или обратном порядке, однако интервалы этих переходов становятся крайне узкими, не более 0,10, причем по мере увеличения отношения  $k_s/k_p$  далее сужаются. Рассмотрим чередование режимов № 4 и № 5 при увеличении  $k_s/k_p$  более подробно.

#### 4.4. Отражающие и пропускающие свойства структуры

Рассмотрим теперь на основе пошагового алгоритма отражающие и пропускающие свойства структуры в зависимости от волнового числа.

##### 4.4.1. Отражающие свойства структуры

Естественно предположить, что при увеличении различия между волновыми числами слоев, отражение от структуры в целом должно увеличиваться, так как ее неоднородность при этом возрастает.

Поэтому сначала обратимся к волне обратного направления  $B_{01}$  в слое № 1, характеризующей отражающие свойства структуры в целом. Для этого рассмотрим рис. 4.14, где показана зависимость амплитуды волны обратного направления  $B_{01}$  от волнового числа  $k_s$  при  $k_p = 1,00 \text{ см}^{-1}$ .

Из рисунка видно, что на упомянутой зависимости действительно имеются довольно широкие области, где  $B_{01} = 1,00$ , то есть волна

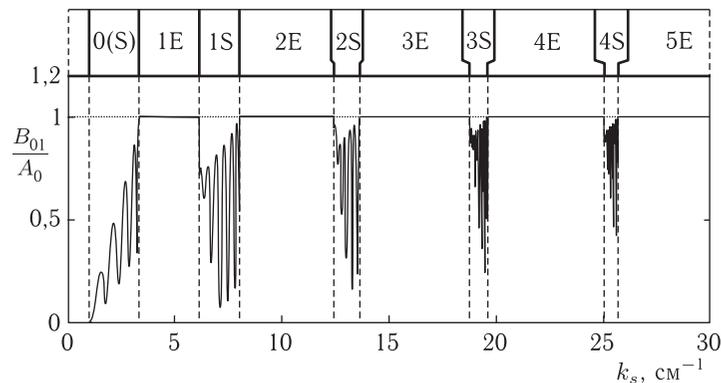


Рис. 4.14. Зависимость нормированной амплитуды волны обратного направления в слое № 1 от волнового числа  $k_s$  при  $k_p = 1,00 \text{ см}^{-1}$ . Полная длина структуры — 8 см, толщины слоев — 0,5 см, число слоев — 16. В верхнем ряду — схема расположения областей существования (по волновому числу  $k_s$ ) экспоненциального (E) и синусоидального (S) режимов

от структуры полностью отражается. Эти области обозначены как 1E, 2E, 3E и так далее, где цифра обозначает порядковый номер области, а буква «E» — экспоненциальный характер распределения амплитуды по слоям структуры, то есть режим № 4.

Однако наряду с областями полного отражения имеются области, где  $B_{01}$  значительно уменьшается, причем зависимость  $B_{01}$  от  $k_s$  имеет осциллирующий характер. Эти области обозначены как 1S, 2S, 3S, ..., где цифра означает порядковый номер области, а буква «S» — синусоидальный с верхним пределом характер распределения амплитуды по слоям структуры, то есть режим № 5.

Малым значениям волнового числа  $k_s$  соответствует область 0(S), где характер распределения амплитуд является синусоидальным, но верхнего предела не имеет, что соответствует режиму № 1.

Начала областей синусоидального режима соответствуют следующим волновым числам: 1S —  $k_s = 6,28 \text{ см}^{-1}$ ; 2S —  $k_s = 12,57 \text{ см}^{-1}$ ; 3S —  $k_s = 18,85 \text{ см}^{-1}$ ; 4S —  $k_s = 25,13 \text{ см}^{-1}$ , то есть выполняется соотношение  $k_s^{(N)} = 2\pi \cdot N$ , где  $N$  — номер соответствующей области.

Можно полагать, что существование подобных чередующихся областей связано с пространственным резонансом волны на длине слоя. То есть синусоидальный режим № 5 наступает тогда, когда на толщине слоя укладывается половина длины волны. Действительно, при толщине слоя 0,5 см, если полагать, что эта толщина соответствует половине длины волны, то полная длина волны равна  $\lambda = 1,0 \text{ см}$ , то есть волновое число при этом равно:  $k = 2\pi/\lambda = 6,2832 \text{ см}^{-1}$ , что как раз соответствует волновому числу  $k_s$  в начале области 1S. Если на толщине слоя укладывается две полуволны, то  $\lambda = 0,5 \text{ см}$ , что соответствует  $k = 12,5664 \text{ см}^{-1}$ , то есть  $k_s$  в начале области 2S. Следующая область 3S соответствует укладыванию на толщине слоя трех полуволн и так далее.

Заметим, что речь идет о тех слоях структуры, где волновое число равно именно  $k_s$ , так как в других слоях волновое число  $k_p$  — другое, то есть резонанс в этих слоях не возбуждается. При этом, в силу геометрии задачи, слои, где волновое число равно  $k_s$ , имеют четные номера, а слои, где волновое число равно  $k_p$  — нечетные. То есть резонансными слоями являются именно четные, а нечетные являются лишь связующими звеньями между резонансными. То есть структура в целом представляет собой многорезонаторную систему, состоящую из цепочки резонаторов, связанных нерезонансными звеньями.

Осциллирующий характер зависимостей амплитуды волны  $B_{01}$  от  $k_s$  внутри резонансных областей 1S, 2S, 3S и так далее, по-видимому, обусловлен взаимодействием связанных колебаний в соседних слоях структуры, обладающих одинаковыми резонансными свойствами, то есть имеет место расщепление общей резонансной кривой, свойственное многорезонаторной системе.

Наблюдаемое сужение резонансных областей по мере увеличения  $k_s$ , по-видимому, связано с уменьшением эффективности возбуждения резонансных мод по мере увеличения их номера (с уменьшением «интеграла перекрытия»).

Таким образом, отражающие свойства рассматриваемой многослойной структуры подобны свойствам классической многорезонаторной системы, где роль частоты играет волновое число, в результате чего частотный резонанс проявляется как пространственный резонанс по координате.

Отметим, что в отличие от классического резонанса, предполагающего высокую амплитуду в резонансных условиях, здесь при выполнении условий резонанса, то есть равенства целого числа полуволн толщине слоя, амплитуда в резонансных слоях (четных) получается меньшей, чем в нерезонансных (нечетных), что в той или иной степени наблюдается во всех режимах. Таким образом, резонансный слой как бы «выталкивает из себя» энергию колебаний, то есть благодаря кратности своей длины целому числу полуволн при попадании в него распространяющейся волны стремится передать эту энергию дальше, не накапливая ее в себе самом.

#### 4.4.2. Пропускающие свойства структуры

Обратимся теперь к рассмотрению пропускающих свойств той же структуры. При рассмотрении рис. 4.13 уже отмечалась сильно различающаяся роль четности и нечетности номера слоя. Так амплитуды волн прямого направления в двух последних слоях равны:  $A_{15} = 1,00$ ,  $A_{16} = 0,10$ , то есть отличаются на порядок. Поэтому далее рассмотрим поведение амплитуд указанных волн в обоих этих слоях, иллюстрируемое рис. 4.15.

Из рисунка видно, что общая структура по волновому числу границ областей максимумов амплитуды прямых волн для обоих слоев совпадает со структурой минимумов обратных волн для слоя № 1, приведенной на рис. 4.14.

То есть, при тех значениях волнового числа, где в слое № 1 наблюдается уменьшение амплитуды, здесь в слоях № 15 и 16 наблюдается ее увеличение. В этих интервалах волнового числа имеет место соответственно режим № 5 — синусоидальный с верхним пределом. Между этими интервалами имеет место режим № 4 — экспоненциальный со спадом амплитуды по координате, при котором амплитуды волн в слоях № 15 и 16 близки к нулю.

В областях существования режима № 5 амплитуда волн в слое № 15, всегда будучи большей единицы, по мере увеличения  $k_s$  возрастает, тогда как в слое № 16, будучи меньшей единицы, соответственно убывает. Так в области 1S при  $k_s \approx 7 \text{ см}^{-1}$  амплитуда  $A_{15}$  составляет около 1,52, а амплитуда  $A_{15} - 0,36$ , тогда как в области 4S при  $k_s \approx 25,4 \text{ см}^{-1}$  эти же величины соответственно равны:

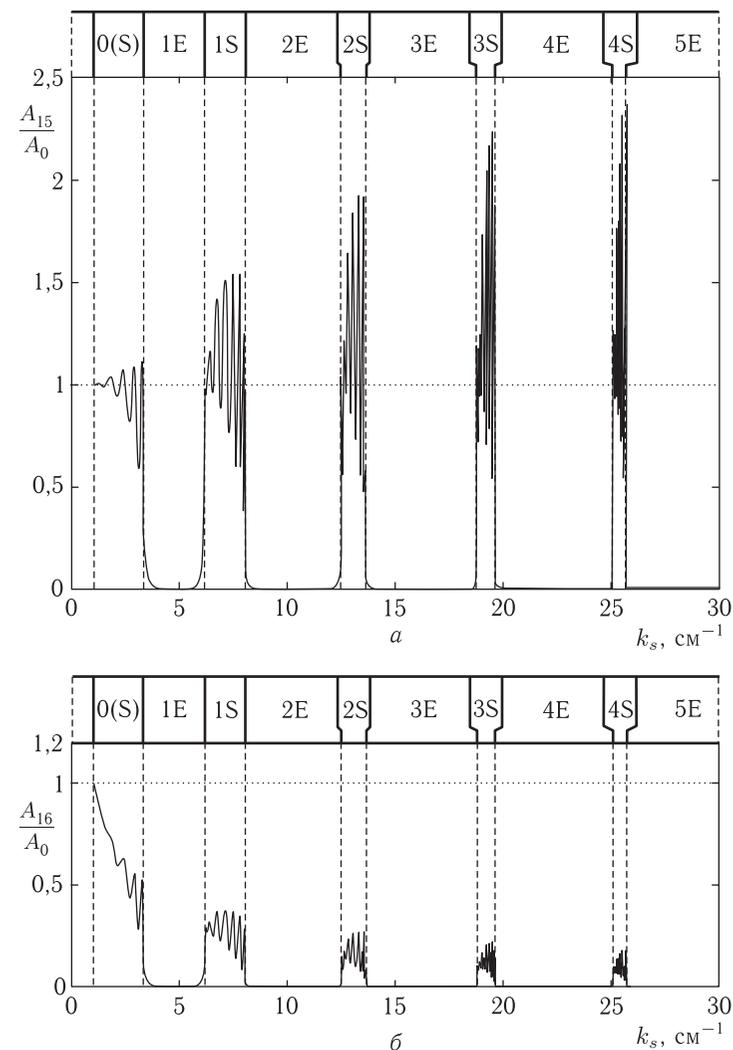


Рис. 4.15. Зависимости нормированных амплитуд волн прямого направления в слоях № 15 (а) и № 16 (б) от волнового числа  $k_s$  при  $k_p = 1,00 \text{ см}^{-1}$ . Все параметры совпадают с приведенными на предыдущем рисунке

$A_{15}/A_0 = 2,37$  и  $A_{16}/A_0 = 0,20$ . То есть с увеличением волнового числа различие между амплитудами в соседствующих слоях растет.

Резонансным размером здесь обладает слой № 16 (четный), так что можно полагать, что по мере увеличения числа укладываемых на его длине полуволн условия резонанса становятся более критичными, то есть резонансная линия сужается, вызывая соответствующее

усиление свойства «выталкивания» энергии из резонансного слоя, отмеченного при разборе рис. 4.14. Такое «выталкивание» и приводит к уменьшению амплитуды в слое № 16 с соответствующим увеличением в слое № 15.

Тонкая структура изрезанности рассматриваемых зависимостей в областях существования режима № 4, надо полагать, обусловлена теми же причинами, что и подобная структура для волны  $B_{01}$ , то есть расщеплением резонансной характеристики за счет сильной связи нескольких резонаторов в многорезонаторной системе.

#### 4.4.3. Некоторые качественные особенности

Из проведенного рассмотрения можно видеть, что распределение амплитуд по волновому числу, а следовательно и по частоте, представляет собой чередование полос пропускания (S) и непропускания (E). Из рис. 4.14 и рис. 4.15 видно, что в полосах пропускания (S) волна хорошо проходит через структуру насквозь и плохо отражается, в полосах непропускания (E) хорошо отражается и плохо проходит.

В данном случае менялось волновое число  $k_s$ , соответствующее четным слоям, причем полагалось  $k_s > k_p$  при сохранении  $k_p$  постоянным.

Можно видеть, что по мере увеличения  $k_s$  полосы непропускания (E) расширяются, а пропускания (S) сужаются. Очевидно это происходит из-за того, что увеличение  $k_s$  при сохранении  $k_p$  означает увеличение степени неоднородности структуры, так что отражение увеличивается, а пропускание снижается. Соответственно амплитуды проходящих волн (S) в четных слоях уменьшаются, стремясь к нулю (рис. 4.15, б), а амплитуды отраженных — возрастают, стремясь к единице (рис. 4.14).

Увеличение амплитуды  $A_{15}$  по сравнению с  $A_{16}$  на рис. 4.15, как отмечено выше, имеет резонансную природу, но и кроме того отражает падение амплитуды при прохождении волны из среды менее плотной (слой № 15 с волновым числом  $k_p$ ) в среду более плотную (слой № 16 с волновым числом  $k_s$ , где  $k_s \gg k_p$ ), то есть более плотная среда не пускает в себя волну, идущую из среды менее плотной.

В рассматриваемом случае изменение именно  $k_s$  в определенных случаях приводило к резонансным условиям для волны с этим волновым числом. Можно полагать, что изменение волнового числа  $k_p$  при сохранении постоянства  $k_s$  также приводит к подобному характеру чередующихся полос пропускания и непропускания с подобными же резонансными свойствами.

### 4.5. Сравнение различных методов

В предыдущих разделах показано, что распределение локальных амплитуд в структуре с периодическими неоднородностями можно получить тремя методами: Кронига–Пенни, Хилла и пошагового алгоритма. Во всех случаях получается чередование полос пропускания

и непропускания, так что можно определить амплитуду колебаний как на выходе структуры, так и внутри каждого ее слоя.

Отметим вкратце преимущества и недостатки перечисленных методов.

Методы Кронига–Пенни и Хилла предназначены для аналитического решения в случае структуры бесконечной протяженности, однако в случае конечной структуры их точность тем хуже, чем меньше периодов неоднородности помещается на полной длине структуры. То есть приемлемая точность получается в случае не менее чем десятка периодов.

Метод Кронига–Пенни пригоден для неоднородности только в виде ступенчатой функции с прямоугольными ступеньками. Конечные формулы в методе Кронига–Пенни получаются путем решения системы из четырех линейных однородных уравнений с четырьмя неизвестными.

Метод Хилла пригоден при любой форме четной периодической функции и приводит к определителю, порядок которого определяется необходимой точностью разложения в ряд Фурье этой функции по косинусам. Соответственно приходится решать алгебраическое степенное уравнение того же порядка, что и порядок определителя. С другой стороны, чередование полос пропускания и непропускания может быть получено из весьма простой формулы, представляющей собой арксинус от произведения синуса на постоянное число.

Алгоритмический метод позволяет найти достаточно точное распределение амплитуд в структуре конечной длины при произвольном числе периодов на ее протяженности, в том числе начиная с малого их числа (один–два). Аналитическая реализация метода состоит в весьма простой процедуре механического увеличения индексов переменных на единицу, что позволяет найти амплитуду колебаний в любом слое путем простых последовательных шагов. Численная реализация алгоритма является крайне простой и содержит всего два цикла прохождения структуры в прямом и обратном направлениях.

Метод позволяет выявить ряд дополнительных особенностей полос пропускания и непропускания, в первую очередь связанных с конечностью структуры, в том числе боковые лепестки и расщепление полос, обусловленное интерференционными эффектами.

Дополнительным важным достоинством алгоритмического метода является его универсальность, то есть возможность применения не только к периодическим структурам, но и к любым другим, обладающим произвольным характером неоднородности, например, если протяженность барьеров, их высота или взаимное расположение меняются любым наперед заданным образом. В этом случае методы Кронига–Пенни и Хилла становятся неприменимыми, а традиционный прямой метод требует расчетов неоправданно громоздких, то есть за алгоритмическим методом остается неоспоримое преимущество.

## 4.6. Особенности распространения электромагнитных волн

Основным предметом рассмотрения в настоящей монографии является распространение электромагнитных волн в структурах, обладающих магнитными свойствами. Однако в предыдущих разделах метод пошагового алгоритма был рассмотрен только для задач о распространении одномерных волн. Случаи применения метода пошагового алгоритма к задачам о распространении магнитостатических волн авторам настоящей монографии не известны, но для электромагнитных волн метод применялся неоднократно [198–201]. Основным идеологическим приемом перехода от одномерных волн к электромагнитным в задачах о многослойных структурах является использование эквивалентных замен амплитуд волн и волновых чисел в соответствии с правилами, приведенными, например, в работах [200, 202, 203, 216]. При этом надо учитывать, что для электромагнитной волны волновое число во всех выражениях, кроме показателей экспонент, заменяется величиной, обратное пропорциональное импедансу среды, то есть задается значениями ее магнитной и диэлектрической проницаемостей.

С другой стороны, как показано в работах [192, 193], для определения полей волн в структуре с гиромангнитными свойствами можно использовать тот же пошаговый алгоритм, что и для одномерной волны. При этом поля отраженной и проходящей волн на границах между слоями рассчитываются по методике, описанной в разделе 2.6 настоящей монографии. Пользуясь этими приемами, рассмотрим далее особенности, относящиеся к распространению в многослойной структуре именно электромагнитных волн [192].

### 4.6.1. Слабая и сильная неоднородность

Для вопроса о распространении электромагнитных волн в многослойных магнитных структурах важное значение имеет соотношение параметров слоев, соседствующих друг с другом. Принципиально различаются два вида такого соотношения, которые можно назвать слабой и сильной неоднородностью. Будем различать сильную и слабую степень неоднородности по тому признаку, что в случае слабой неоднородности нормированная амплитуда обратно направленной волны в слое № 1, то есть отраженной от структуры в целом, не достигает единицы ни при какой частоте падающей волны, а в случае сильной — может достигать той же единицы в довольно широких частотных интервалах.

Обратимся к рис. 4.16, где показаны зависимости нормированных амплитуд обратно направленной волны в слое № 1 (*a, z*) и прямо направленных волн в слоях № 15 (*б, d*) и № 16 (*в, e*) от частоты падающей волны при различных соотношениях между проницаемостями слоев. В качестве параметра, определяющего степень неоднородности, выбра-

на диэлектрическая проницаемость как заведомо имеющая скалярный характер.

Из рисунка видно, что в обоих случаях частотные зависимости амплитуды представляют собой чередование ярко выраженных «полос пропускания» и «непропускания», подобных имеющим место в периодической структуре бесконечной протяженности, в аналитическом виде получаемых классическими методами, описанными в разделе 4.1 [69, 208, 210]. Однако здесь, в отличие от классики, правильная периодичность в какой-то степени нарушается, что особенно хорошо видно из рис. 4.16, *z–e*, где две «полосы пропускания» между 25,0 и 35,0 ГГц практически сливаются вместе, оставляя лишь сравнительно узкий неглухой промежуток вблизи 29,8 ГГц. Можно полагать, что такой характер наблюдаемых зависимостей обусловлен довольно небольшим количеством слоев структуры, насчитывающим всего 8 полных периодов изменения свойств.

Наблюдаются также заметные отличия от случая одномерной волны, рассмотренного в работе [233]. Так для одномерной волны при увеличении волнового числа области пропускания сужаются, причем амплитуда проходящих волн в слое № 15 увеличивается, а в слое № 16 уменьшается. В рассматриваемом здесь случае электромагнитной волны при увеличении частоты ширина тех и других полос меняется не более чем на 20%, причем нерегулярным образом. Амплитуда как проходящих, так и отраженных волн также не имеет тенденции к систематическому увеличению или уменьшению, причем меняется в ту и другую сторону также на ~20%. То есть в нулевом приближении можно считать, что здесь как частотный интервал, так и амплитуда тех и других волн в пределах соответствующих полос практически не меняются (с точностью до 20%).

Рассмотрим приведенные на рис. 4.16 зависимости с количественной стороны. Так рис. 4.16, *a, б, в* соответствуют слабой неоднородности:  $\varepsilon_s = 2,0$  при  $\varepsilon_p = 1,0$ , то есть проницаемость барьера превышает проницаемость промежутка всего в два раза. В этом случае максимальная амплитуда отраженной волны в слое № 1 достигает уровня 0,987 на частоте 12,450 ГГц, а амплитуда проходящей волны на той же частоте в слое № 15 падает до уровня 0,164 и в слое № 16 — до уровня 0,136. То есть неоднородность, согласно приведенному критерию, является слабой.

Рис. 4.16, *г, д, e* соответствуют сильной неоднородности:  $\varepsilon_s = 10,0$  при  $\varepsilon_p = 1,0$ , то есть проницаемость барьера превышает проницаемость промежутка в десять раз. В этом случае максимальная амплитуда отраженной волны в слое № 1 превышает критический уровень 0,999 в интервале частот от 5,370 ГГц до 8,290 ГГц, достигая максимума, равного 0,9999898 на частоте 7,290 ГГц. При этом амплитуда проходящей волны в слое № 15 падает до уровня ниже 0,01, на краях интервала минимума составляя  $0,956 \cdot 10^{-2}$  на частоте 5,930 ГГц и  $0,941 \cdot 10^{-2}$  на частоте 7,730 ГГц, достигая абсолютного минимума  $0,210 \cdot 10^{-2}$

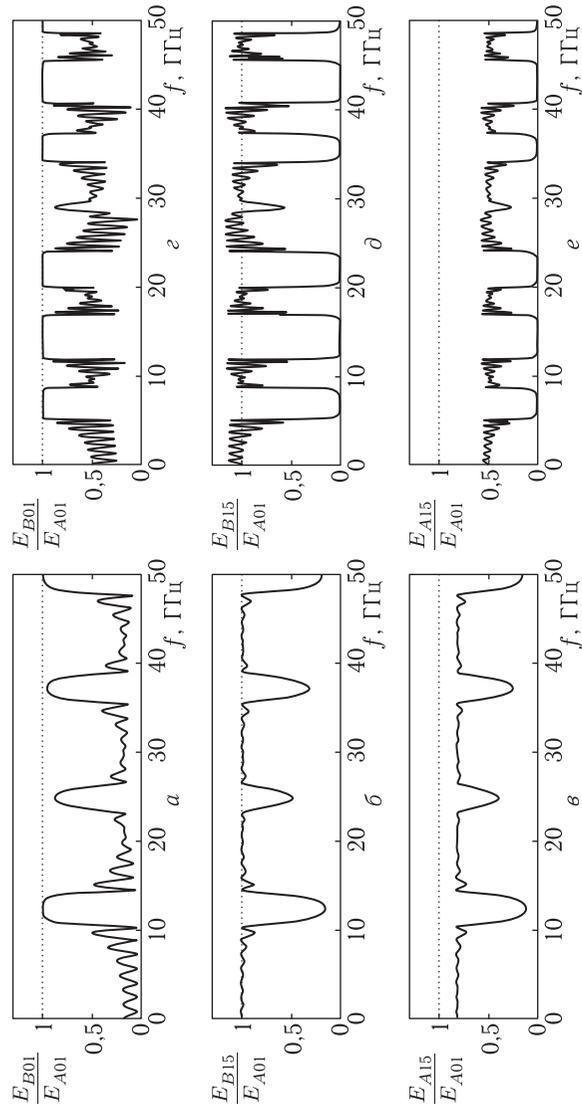


Рис. 4.16. Зависимости нормированных амплитуд обратно направленной волны в слое № 1 (*a, e*) и прямо направленных волн в слоях № 15 (*б, д*) и № 16 (*в, е*) от частоты падающей волны при различных соотношениях между проницаемостями слоев. Проницаемость барьера: *a, б, в* —  $\epsilon_s = 2,0$ ; *г, д, е* —  $\epsilon_s = 10,0$ . Остальные параметры:  $\epsilon_p = 1,0$ ;  $\mu_{p,s} = 1,0$ ;  $\sigma_{p,s} = 0,0$

на частоте 6,850 ГГц. Амплитуда проходящей волны в слое № 16 падает до уровня ниже 0,01, на краях интервала минимума составляя  $0,963 \cdot 10^{-2}$  на частоте 5,610 ГГц и  $0,953 \cdot 10^{-2}$  на частоте 8,050 ГГц, достигая абсолютного минимума  $0,438 \cdot 10^{-2}$  на частоте 6,810 ГГц. Таким образом, неоднородность, согласно приведенному критерию, является сильной.

Основное различие между зависимостями, соответствующими слабой и сильной неоднородностям, состоит в том, что при слабой неоднородности зависимости имеют плавный округлый вид, тогда как при сильной они резко очерчены по верхнему и нижнему уровням, то есть их вид близок к прямоугольному. Количество тех и других полос при сильной неоднородности резко возрастает. Так в рассматриваемом интервале частот (0–50 ГГц) на рис. 4.16, *a* наблюдаются четыре колоколообразных максимума, тогда как на рис. 4.16, *г* — уже шесть широких прямоугольных и один узкий колоколообразный, то есть всего — семь. То же можно видеть и при сравнении рис. 4.16, *б, в* с рис. 4.16, *д, е*.

Согласно показанному в [192], для нахождения центральной частоты первой наиболее низкочастотной «области непропускания» подходит следующая формула:

$$f_s^{(\text{res})} = \frac{c}{\sqrt{2 \cdot (\epsilon_s + \epsilon_p) \mu_s \cdot (L_s + L_p)}}, \quad (4.167)$$

где полагается  $\mu_s = \mu_p$ . Анализ последующих полос показывает, что их центральные частоты находятся в целочисленном кратном отношении к частоте первой полосы. Получаемое по формуле (4.167) значение первой из частот, однако, является несколько заниженным, так что для повышения точности следует ввести поправочный коэффициент. С такой эмпирической поправкой формулы для расчета центральной частоты *n*-й «полосы непропускания», приобретают вид: при слабой неоднородности

$$f_s^{(n)} = \frac{1,0166 \cdot c \cdot n}{\sqrt{2 \cdot (\epsilon_s + \epsilon_p) \mu_s \cdot (L_s + L_p)}}, \quad (4.168)$$

при сильной неоднородности

$$f_s^{(n)} = \frac{1,1398 \cdot c \cdot n}{\sqrt{2 \cdot (\epsilon_s + \epsilon_p) \mu_s \cdot (L_s + L_p)}}. \quad (4.169)$$

При промежуточной неоднородности поправочный коэффициент будет иметь промежуточное значение.

**Замечание.** Приведенное здесь рассмотрение выполнено при неоднородности структуры, обусловленной различием диэлектрических, а не магнитных проницаемостей слоев. Причина такого выбора состоит в том, что настоящее изложение, в основном, следует работе [192], тогда как в работе [193], посвященной исключительно магнитным

средам, подобное рассмотрение места не имеет. Однако выполненная авторами контрольная проверка показывает, что какое-либо принципиальное различие между трактовками слабой и сильной неоднородностей в случае магнитных или диэлектрических сред полностью отсутствует, что позволяет пользоваться полученными результатами и для магнитных сред.

#### 4.6.2. Распределение амплитуд в магнитной структуре

Главной задачей настоящей книги является выявление роли магнитных свойств вещества сред, составляющих многослойную структуру. Будем рассматривать магнитные диэлектрики, важнейшими представителями которых являются ферриты. Во многих таких материалах магнитные свойства, в отличие от диэлектрических, могут проявляться как в скалярном, так и в тензорном виде [175–177]. Поэтому сначала рассмотрим роль скалярной магнитной проницаемости, после чего обратимся к тензорной проницаемости, обусловленной свойством гиротропии.

*Скалярная магнитная проницаемость.* Рассмотрим сначала случай скалярной магнитной проницаемости. При рассмотрении будем следовать тому же порядку, что был принят в работе [192] для диэлектрической проницаемости. Основное внимание уделим частотным характеристикам распределения амплитуд волн в различных слоях структуры.

*Частотные характеристики при малой проницаемости.* Предварительное исследование показало, что для скалярной магнитной проницаемости выполняются те же критерии слабой и сильной неоднородности, что и для одномерной [233] и содержащей диэлектрические барьеры [192] структур.

Основное различие между частотными зависимостями, соответствующими слабой и сильной неоднородностям, состоит в том, что при слабой неоднородности зависимости имеют плавный округлый вид, тогда как при сильной они резко очерчены по верхнему и нижнему уровням, то есть их вид близок к прямоугольному. В случае диэлектрических барьеров переход от слабой неоднородности к сильной происходит при  $2 \leq \varepsilon_s \leq 3$  [192]. В случае магнитных барьеров такой же переход происходит в том же интервале изменения значений магнитной проницаемости, то есть при  $2 \leq \mu_s \leq 3$ .

В соответствии с тем же порядком действий, что был принят в работе [192], прежде всего исследовались частотные зависимости амплитуд волн прямого и обратного направлений в крайних слоях структуры. Было показано, что такие зависимости имеют квазирезонансный характер в виде большого центрального лепестка, с обеих сторон сопровождаемого меньшими лепестками-сателлитами.

Приведенные в работе [192] на рис. 2 зависимости нормированных амплитуд волн в крайних слоях структуры от частоты падающей

волны, соответствующие параметрам диэлектрических барьеров  $\varepsilon_s = 1, 1, 1, 4; 3, 0$  при  $\mu_s = 1, 0$ , полностью повторяются тождественно при магнитных барьерах с параметрами:  $\mu_s = 1, 1, 1, 4; 3, 0$  при  $\varepsilon_s = 1, 0$ .

То же касается трансформации частотных характеристик при изменении числа барьеров, представленной в работе [192] на рис. 3. То есть приведенные там кривые, соответствующие  $\varepsilon_s = 2, 0$ ,  $\mu_s = 1, 0$ , полностью повторяются при  $\varepsilon_s = 1, 0$ ,  $\mu_s = 2, 0$ . Точно так же по мере увеличения числа барьеров количество лепестков увеличивается, причем между основными появляются те же промежуточные. Аналитические формулы, позволяющие рассчитать частоты основных лепестков, положения их максимумов и минимумов между ними, также полностью сохраняются. Можно полагать, что такая тождественность обусловлена решающей ролью соотношения волновых чисел барьеров и промежутков, где значение волнового числа, при скалярных обеих проницаемостях равно

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}, \quad (4.170)$$

зависит от той и другой проницаемостей полностью идентично.

*Распределение амплитуд в слоях при большой вариации параметров.* Рассмотрим теперь распределение амплитуд в слоях при большом изменении параметров материала от слоя к слою. Ограничимся рассмотрением волн прямого направления, так как характер распределения волн обратного направления аналогичен, подобно таковому в работах [192, 233]. Здесь, в отличие от предыдущего случая, между характеристиками, соответствующими вариации диэлектрической и магнитной проницаемостей, наблюдаются определенные различия, на рассмотрении которых и остановимся. Будем в основном следовать материалам работы [193].

Обратимся к рис. 4.17, где показано распределение нормированных амплитуд волн прямого направления в слоях от координаты при различных частотах падающей волны. Левый столбец (*a, б, в, г*) представляет собой распределения, имеющие место при большой диэлектрической проницаемости барьера и приведен здесь для сравнения. Правый столбец (*д, е, ж, з*) иллюстрирует распределения при большой магнитной проницаемости барьера.

Из сравнения столбцов рисунка можно видеть, что те и другие распределения по форме повторяют друг друга, то есть в обоих случаях имеются все четыре вида распределения: синусоидальное (*a, д*), полусинусоидальное (*б, е*), линейное (*в, ж*) и экспоненциальное (*г, з*). Более того, сходные распределения имеют место при одних и тех же частотах. Существенным различием является тот факт, что амплитуды при большой магнитной проницаемости превышают таковые при большой диэлектрической проницаемости примерно в полтора–два раза. Кроме того, абсолютные величины амплитуд в последовательно расположенных слоях как бы находятся в противофазе друг к другу, то есть при увеличении соседствующих амплитуд волн в случае изменения

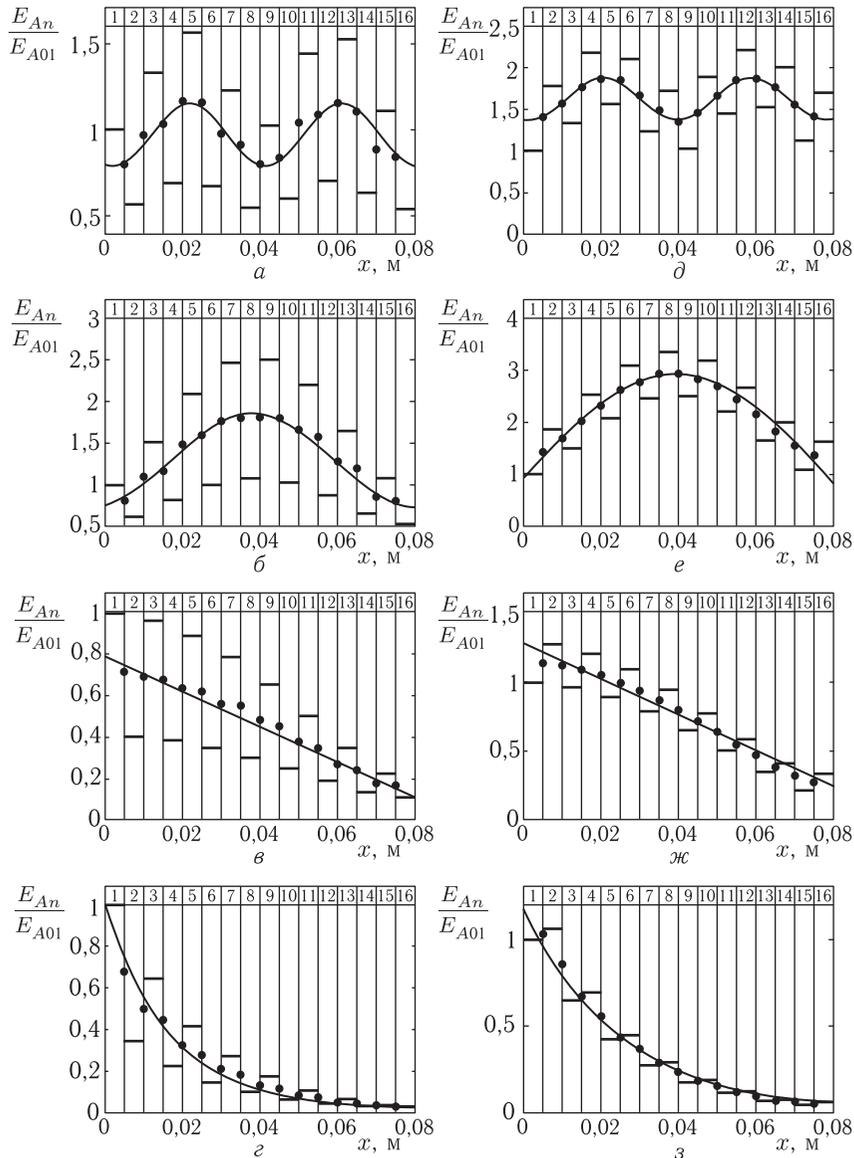


Рис. 4.17. Распределение нормированных амплитуд волн прямого направления в слоях от координаты при различных частотах падающей волны. Цифры в верхнем ряду — номера слоев. Параметры материала слоев общие:  $\epsilon_p = 1$ ;  $\mu_p = 1$ ;  $\sigma_{p,s} = 0$ ; параметры специфические:  $a, б, в, г$  —  $\epsilon_s = 10$ ;  $\mu_s = 1$ ;  $д, е, ж, з$  —  $\epsilon_s = 1$ ;  $\mu_s = 10$ . Частоты:  $a, д$  — 4,40 ГГц;  $б, е$  — 4,95 ГГц;  $в, ж$  — 5,10 ГГц;  $г, з$  — 5,40 ГГц

диэлектрической проницаемости, подобные амплитуды в случае изменения магнитной проницаемости уменьшаются и обратно. Так например, амплитуда в слое №1 на рис. 4.17, *а* составляет 1,0000, в слое №2 — 0,5892, в слое №3 — 1,5009. Тогда как подобные амплитуды на рис. 4.17, *д* равны соответственно 1,0000, 1,7838, 1,3342. То есть, если в слое №1, являющимся промежутком, нормированные амплитуды в обоих случаях равны единице, что задается начальным возбуждением, то в слое №2, являющимся барьером, амплитуда в случае диэлектрического барьера уменьшается, а в случае магнитного — увеличивается. При переходе от барьера №2 к промежутку №3 амплитуда в случае диэлектрического барьера увеличивается, а в случае магнитного — уменьшается.

Такое поведение амплитуд обусловлено последовательным переходом волны из менее плотной среды в более плотную и обратно при условии сохранения потока энергии [235–238]. Так в случае большой диэлектрической проницаемости барьер представляет собой среду более плотную, чем промежуток, а в случае большой магнитной — менее плотную. То есть в первом случае адмиттанс барьера по сравнению с адмиттансом промежутка велик, а во втором — мал. В математическом отношении это обусловлено тем, что в выражении для адмиттанса [193, формула (56)] под корнем диэлектрическая проницаемость находится в числителе, а магнитная — в знаменателе.

Аналогичным образом, амплитуды в правом столбце в среднем выше амплитуд в левом из-за того, что в правом столбце относительно слоя №1, то есть слоя исхода волны, преобладают барьеры с малой плотностью, а в левом — с большой. Другими словами, усредненная по всей структуре плотность в правом столбце меньше плотности первого слоя, а в левом — больше. Таким образом, здесь выполняется то же правило увеличения амплитуды при переходе от менее плотной среды к более плотной и обратно, что и для соседствующих слоев, но уже относительно всей структуры в целом по отношению к плотности первого слоя, где амплитуда задана условиями возбуждения.

**Тензорная магнитная проницаемость.** В большинстве сред магнитная проницаемость имеет гиротропный тензорный характер, поэтому рассмотрим теперь распространение электромагнитной волны в такой многослойной структуре, где магнитная проницаемость тоже является тензором. Будем опираться на общие свойства электромагнитных волн в бигиротропной тензорной среде, рассмотренные в разделах 2.5–2.7. В изложении будем, в основном, придерживаться материалов работы [193].

**Распределение амплитуд.** Рассмотрим распределение амплитуд волн при тензорной магнитной проницаемости барьеров для различных частот. Ограничимся волнами прямого направления, так как проведенное предварительное исследование показало, что волны обратного направления ведут себя подобным же образом, как это имеет место

для диэлектриков [192]. Будем рассматривать сильное различие параметров барьеров и промежутков, чтобы яснее выявить характерные особенности. Ограничимся рассмотрением только случаев слабого и сильного затухания (раздел 2.7.3), так как в них отражены уже наиболее характерные особенности распределения волн, а случай среднего затухания является промежуточным.

Обратимся к рис. 4.18, где показано распределение амплитуд волн прямого направления в слоях структуры при тензорной магнитной проницаемости барьеров для различных частот. Рассматриваются амплитуды  $z$ -составляющей электрического поля гиромангнитной волны, однозначно определяющие магнитные поля по осям  $Ox$  и  $Oy$ , как это подробно показано в разделах 2.5–2.6 (формулы (2.215)–(2.223)). Характерные частоты  $f_a$ ,  $f_b$ ,  $f_c$ , задающие свойства тензора магнитной проницаемости, определяются формулами (2.241)–(2.243) (раздел 2.7.1). При тех же, что и там параметрах ( $H = 10000$  Э,  $4\pi M_0 = 1750$  Гс,  $\gamma = 2,80$  МГц/Э) эти частоты имеют следующие значения:  $f_a = 28,00$  ГГц;  $f_b = 30,45$  ГГц;  $f_c = 32,90$  ГГц.

Рис. 4.18, *а, б, в* (левый столбец) соответствует случаю слабого затухания ( $\alpha = 0,01$ ), рис. 4.18, *г, д, е* — сильного ( $\alpha = 0,10$ ). Частоты возбуждения выбраны следующим образом. Для рис. 4.18, *а* частота  $27,0$  ГГц располагается несколько ниже частоты  $f_a$ , соответствующей началу зоны запрещения, для рис. 4.18, *в, е* частота  $33,9$  ГГц располагается несколько выше значения  $f_c$ , соответствующего окончанию зоны запрещения. То есть эти частоты, находясь в пределах зоны разрешения, охватывают зону запрещения с обеих сторон. Частота  $29,2$  ГГц, соответствующая рис. 4.18, *б*, приходится на середину участка, разрешенного при слабом затухании, то есть между  $f_a$  и  $f_b$ . Напомним, что в этом случае адмиттанс является отрицательным (раздел 2.7.3). Частота  $31,5$  ГГц, соответствующая рис. 4.18, *д*, приходится на середину участка, запрещенного при слабом затухании, но разрешенного при сильном, то есть между  $f_b$  и  $f_c$ . Таким образом, можно полагать, что здесь охвачены все возможные случаи частот, соответствующих различным условиям распространения волн.

Из рисунка видно, что при всех рассмотренных случаях наблюдаются все те же распределения амплитуд, что и в случае диэлектрической среды [192]. Так рис. 4.18, *б, в, г, д* соответствуют синусоидальному распределению, рис. 4.18, *а* — полусинусоидальному, рис. 4.18, *е* — экспоненциальному.

Из сравнения пар рисунков в горизонтальных рядах, то есть 4.18, *а* с 4.18, *г*, 4.18, *б* с 4.18, *д* и 4.18, *в* с 4.18, *е* можно видеть, что при увеличении параметра затухания амплитуды во всех слоях в общем уменьшаются.

Однако из рисунков, соответствующих синусоидальным распределениям (4.18, *б, в, г, д*), можно видеть, что при удалении от начала структуры, то есть при возрастании номеров слоев, общий размах амплитуд в соседствующих или последовательных близко расположенных слоях

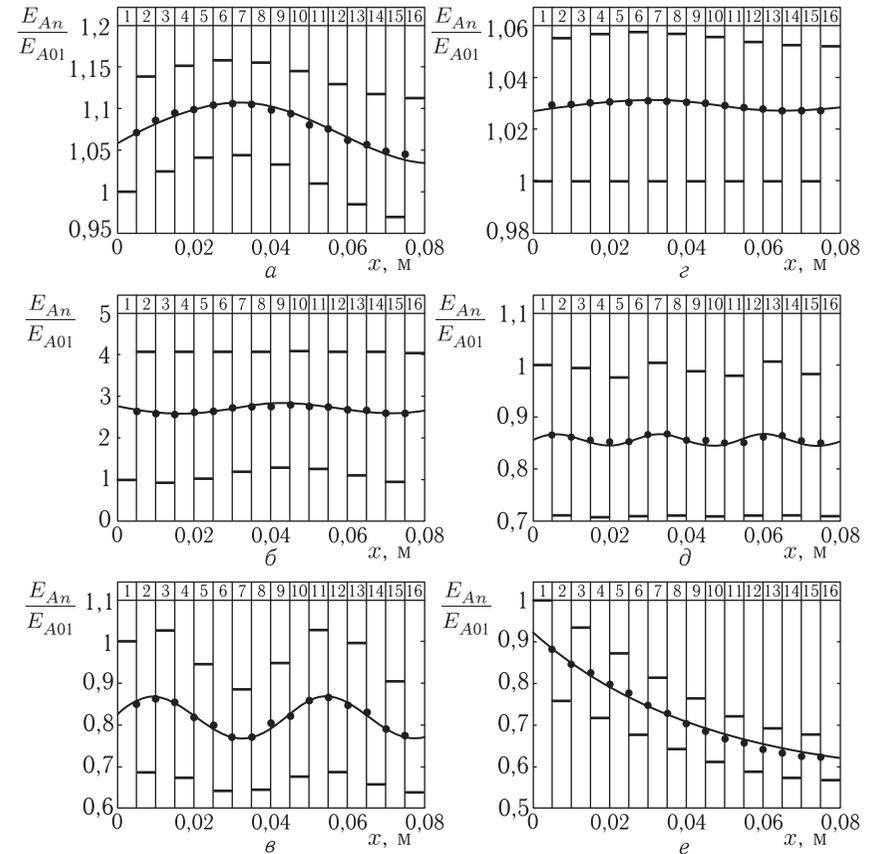


Рис. 4.18. Распределение амплитуд волн прямого направления при тензорной магнитной проницаемости барьеров для различных частот и параметров магнитного затухания.  $\varepsilon_{s,p} = 1,0$ ;  $\sigma_{s,p} = 0,0$ ;  $\mu_p = 1,0$ ;  $\mu_s$  — определяется формулой (2.10) с учетом (2.11)–(2.12). Параметр затухания: *а, б, в* —  $\alpha = 0,01$ ; *г, д, е* —  $\alpha = 0,10$ . Частоты: *а, г* —  $27,0$  ГГц; *б* —  $29,2$  ГГц; *д* —  $31,5$  ГГц; *в, е* —  $33,9$  ГГц. Остальные параметры — те же что на предыдущих рисунках

не уменьшается ни при слабом, ни при сильном затухании. Особенно хорошо это видно из рис. 4.18, *в*, где размах амплитуд между слоями № 3 и № 4 в точности равен размаху амплитуд между слоями № 11 и № 12 или размаху между более удаленными слоями № 3 и № 6 также равняется размаху между слоями № 11 и № 14. Аналогичные закономерности легко прослеживаются также из рис. 4.18, *г*, например при сравнении слоев № 7 с № 8 или № 13 с № 14.

Таким образом, можно сделать вывод, что магнитное затухание не приводит к абсолютному затуханию волны по координате, а действует как реактивный параметр, определяя амплитуду лишь в каждом отдельном слое по всей его длине, не меняя амплитуды в соседних слоях.

То есть затухание определяет лишь размах и максимальную амплитуду колебаний в соответствующих слоях, а поток энергии, входящий в слой и выходящий из него, остается постоянным.

**Замечание.** Отмеченное здесь отсутствие затухания гиромангнитной волны по координате, несмотря на наличие магнитного затухания в каждом слое, на первый взгляд кажется парадоксальным, однако оно обусловлено неучетом уменьшения амплитуды волны при распространении в среде с потерями. Действительно, здесь магнитные колебания в каждом отдельном слое предполагаются однородными, то есть их амплитуда на обеих границах слоя остается одной и той же. Такое рассмотрение правомерно только в случае достаточно тонких слоев, когда падение амплитуды по толщине слоя незначительно. Критерий такой правомерности должен определяться отдельно для каждой конкретной задачи. В более корректном варианте следует учитывать затухание волны при распространении внутри каждого данного слоя подобно тому, как это сделано в работе [235–238].

*Баланс потоков энергии.* Несколько неожиданным выглядит заметное увеличение амплитуды колебаний на рис. 4.18, б, где частота выбрана в интервале, где адмиттанс является отрицательным. Вообще говоря, из аналогии с электротехникой, импеданс представляет собой как бы сопротивление волноведущей среды, тогда как адмиттанс — проводимость. При этом отрицательное сопротивление означает приток энергии в систему в противоположность ее оттоку при сопротивлении положительном. Следуя подобной логике, можно полагать, что отрицательный адмиттанс также соответствует притоку энергии, что нарушает закон ее сохранения.

Амплитуда волн обратного направления в условиях рис. 4.18, б также велика, так для волн прямого направления размах амплитуды в соседствующих слоях составляет от 1 до 4, а для волн обратного направления — от 3 до 0. То есть энергия как бы притекает к волнам как того, так и другого направления.

Для разрешения этого парадокса рассмотрим потоки энергии в структуре по отдельности. Прежде всего отметим, что поток энергии волн прямого направления ориентирован в положительном направлении оси  $Ox$  (то есть по рисунку слева направо), тогда как поток энергии волн обратного направления ориентирован в отрицательном направлении той же оси (по рисунку справа налево).

При этом в структуру в слое № 1 входит один поток — падающий, а выходит два — отраженный в том же слое № 1 и проходящий в слое № 16. То есть в структуре в целом должен выполняться баланс потоков энергии следующего вида:

$$P^{(0)} = P^{(-)} + P^{(+)}, \quad (4.171)$$

где  $P^{(0)}$  — поток энергии падающей волны (прямого направления) в слое № 1,  $P^{(-)}$  — поток энергии отраженной волны (обратного

направления) в слое № 1,  $P^{(+)}$  — поток энергии проходящей волны (прямого направления) в слое № 16.

Следуя приведенным в работе [192] правилам перехода от одномерной волны к электромагнитной, а также учитывая определение потока энергии для одномерной волны [235–238], получаем потоки энергии распространяющихся волн в виде:

поток энергии, входящий в структуру за счет падающей волны равен

$$P^{(0)} = E_{A01}^2 \cdot A_{e01}; \quad (4.172)$$

поток энергии, выходящий из структуры за счет отраженной волны

$$P^{(-)} = -E_{B01}^2 \cdot A_{e01}; \quad (4.173)$$

поток энергии, выходящий из структуры за счет проходящей волны

$$P^{(+)} = E_{A16}^2 \cdot A_{e16}. \quad (4.174)$$

Рассмотрим теперь численные соотношения потоков энергии в случае положительного и отрицательного адмиттанса.

Так на частоте 27,9 ГГц, где адмиттанс положителен, получаем амплитуды полей:  $E_{A01} = 1,00000$ ,  $E_{B01} = 0,17365$ ,  $E_{A16} = 1,13276$ ,  $E_{B16} = 0,00000$ . При этом адмиттансы равны:  $A_{e01} = 0,26522 \times 10^{-2} \text{ Ом}^{-1}$ ;  $A_{e16} = 0,20046 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}^{-1}$ . Подставляя в (4.172)–(4.174) приведенные выше числовые значения амплитуд полей и адмиттансов, получаем:  $P^{(0)} = 0,26522 \cdot 10^{-2}$ ,  $P^{(-)} = 7,99753 \cdot 10^{-5}$ ,  $P^{(+)} = 2,57219 \cdot 10^{-3}$ .

Легко проверить, что при таких численных значениях условие (4.171) выполняется.

На частоте 29,2 ГГц, где адмиттанс отрицателен, амплитуды полей и адмиттансы соответственно равны:  $E_{A01} = 1,00000$ ,  $E_{B01} = 3,12970$ ,  $E_{A16} = 4,04850$ ,  $E_{B16} = 0,00000$ . При этом адмиттансы равны:  $A_{e01} = 0,26522 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}^{-1}$ ;  $A_{e16} = -0,14231 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}^{-1}$ . Потоки энергии при таких численных значениях получаются равными:  $P^{(0)} = 0,266522 \cdot 10^{-2}$ ,  $P^{(-)} = 2,59784 \cdot 10^{-2}$ ,  $P^{(+)} = -2,33251 \cdot 10^{-2}$ .

Можно видеть, что и при этих численных значениях условие (4.171) также выполняется.

Таким образом, можно сделать вывод, что условие баланса энергии на структуре в целом выполняется при любых, как положительных, так и отрицательных значениях адмиттанса.

При этом вопрос о чрезмерном на первый взгляд увеличении амплитуды волн в случае отрицательного импеданса в этом случае математически решается, однако физический смысл отрицательного значения потока энергии  $P^{(+)}$ , проходящего через структуру, по-видимому, состоит в изменении его направления в соответствии с отрицательным знаком. То есть можно полагать, что здесь имеет место аналогия с распространением обратной волны, в которой направления фазовой и груп-

повой скоростей противоположны [91–97]. Увеличение же амплитуды волн во внутренних слоях структуры по сравнению с амплитудой падающей волны можно трактовать как переход волны из среды более плотной в среду менее плотную (аналогично отмеченному в работах [192, 193, 233]).

**Замечание.** Использованное здесь определение потока энергии как произведения квадрата амплитуды электрического поля на адмиттанс среды, полученное из аналогии с одномерной волной, вообще говоря, относится к потоку, распространяющемуся точно вдоль оси структуры, то есть вдоль оси  $Ox$  на рис. 4.2, 4.7. Для изотропного диэлектрика такое определение соответствует классическому определению потока энергии через вектор Пойнтинга [178–184]. При этом предполагается, что магнитное поле волны перпендикулярно электрическому и по абсолютной величине равно произведению электрического поля на адмиттанс среды. Однако для гиромангнитной волны магнитное поле кроме поперечной имеет также и продольную составляющую, в результате чего вектор Пойнтинга за счет входящего в него векторного произведения отклоняется от оси структуры, приобретая составляющую вдоль оси  $Oy$ . В настоящей работе мы полагаем структуру в плоскости  $Oyz$  бесконечно протяженной, поэтому такую составляющую не рассматриваем.

*Отражение и прохождение в широком диапазоне частот.* Рассмотрим теперь частотные зависимости амплитуд волн в слоях в более широком диапазоне частот, когда характеристики отражения и прохождения определяются как магнитным, так и геометрическим факторами структуры.

Как показано в разделе 4.6.1, при слабом и среднем магнитном затухании в диапазоне частот появляются запрещенные полосы, где распространение электромагнитных волн невозможно. Поэтому можно ожидать, что на общем частотном спектре отражения и прохождения, подобном приведенному в работе [192] на рис. 6, появятся какие-то провалы, обусловленные упомянутыми запрещенными полосами. Более подробное исследование показывает, что на обоих краях таких провалов со стороны разрешенных частот отражение волн стремится к единице, а прохождение — к нулю. В остальных частях разрешенных областей отражение и прохождение определяется конкретными значениями компонент магнитной проницаемости, которые для  $\mu$  близки к единице, а для  $\mu_a$  — к нулю. То есть картина распространения волн мало отличается от случая скалярной магнитной проницаемости, причем при сравнительно небольших ее значениях.

С другой стороны, как показано выше, при сильном магнитном затухании запрещенные области отсутствуют, так что волна может распространяться во всем интервале частот от нуля до плюс бесконечности (разумеется, в тех пределах, где работают обычные механизмы прецессии намагниченности в гиротропной среде [175–177]).

Поэтому дальнейшее рассмотрение посвятим именно случаю сильного магнитного затухания и рассмотрим трансформацию амплитуд волн в слоях в широком диапазоне частот.

Обратимся к рис. 4.19, где показаны зависимости нормированных амплитуд обратной направленной волны в слое № 1 (*a*, *b*) и прямо направленных волн в слоях № 15 (*в*) и № 16 (*г*) от частоты падающей волны при двух различных значениях намагниченности. На рисунке вертикальными пунктирными линиями показаны граничные частоты запрещенной области, то есть  $f_a$  и  $f_c$ , определяемые формулами (2.241) и (2.243), равные соответственно 28,0 ГГц и 32,9 ГГц. Вертикальными точечными линиями показаны частоты, определяемые укладыванием нечетного числа четвертей длин волн на длине одного барьера. Для расчета таких частот в работе [192] предложены две формулы:

первая — аналитическая под номером (65):

$$f_s^{(\max)} = \frac{c \cdot (2n^{(\max)} - 1)}{4\sqrt{\varepsilon_s \mu_s} \cdot L_s}, \quad (4.175)$$

где  $n^{(\max)}$  — порядковый номер максимума, при котором на длине барьера укладывается  $2n^{(\max)} - 1$  четвертей длин волн,  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  — скорость электромагнитной волны в свободном пространстве ( $3 \times 10^8$  м/с);

вторая — эмпирическая под номером (66):

$$f_s^{(\text{res})} = \frac{c}{\sqrt{2 \cdot (\varepsilon_s + \varepsilon_p) \mu_s \cdot (L_s + L_p)}}, \quad (4.176)$$

где полагается  $\mu_s = \mu_p$ .

В рассматриваемом случае вертикальные точечные линии построены по формуле (4.175) при  $n = 1$  (частота 15,0 ГГц) и при  $n = 2$  (частота 45,0 ГГц).

В дальнейших расчетах полагаем параметр затухания  $\alpha = 0,10$ , то есть, в соответствии с оценками, приведенными в разделе 2.7.3, затухание является сильным.

Итак переходим к рассмотрению рисунка. Случай рис. 4.19, *a* соответствует крайне малой намагниченности барьеров, равной  $4\pi M_0 = 1750 \cdot 10^{-5}$  Гс, то есть можно считать, что при этом  $\mu \approx 1$ ,  $\mu_a \approx 0$ . Этот случай приведен здесь для сравнения. Показана амплитуда только волны обратного направления в слое № 1, при этом амплитуды волн прямого направления в слоях № 15 и № 16 равны единице с точностью до  $10^{-5}$ . То есть можно считать, что от структуры практически ничего не отражается, а вся энергия возбуждаемых волн проходит насквозь. Однако, тем не менее, на частотной характеристике четко выражены два максимума при частотах 15,0 ГГц и 45,0 ГГц. Таким образом, даже при столь малой намагниченности, весьма далекой от условий магнитного резонанса, геометрические резонансные свойства магнитных барьеров, хотя и крайне слабо, но все же проявляются, давая

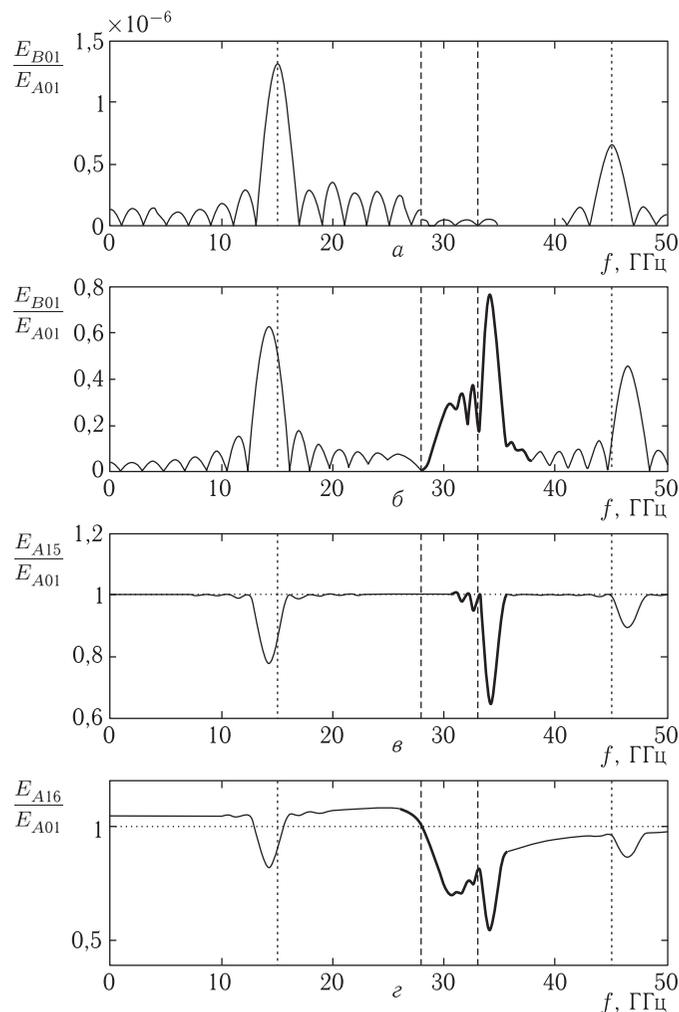


Рис. 4.19. Зависимости нормированных амплитуд обратно направленной волны в слое № 1 (*а, б*) и прямо направленных волн в слоях № 15 (*в*) и № 16 (*г*) от частоты падающей волны при двух различных значениях намагниченности. *а* —  $4\pi M_0 = 1750 \cdot 10^{-5}$  Гс; *б, в, г* —  $4\pi M_0 = 1750$  Гс. Компоненты магнитной проницаемости определяются формулами (2.11)–(2.12). Другие параметры:  $\varepsilon_{p,s} = 1,0$ ,  $\mu_p = 1,0$ ,  $\sigma_{p,s} = 0,0$ . Остальные параметры — те же, что на предыдущих рисунках

четко выраженные максимумы отражения на частотах, практически точно соответствующих нечетному числу четвертей длин волн на длине магнитного барьера (формулы (4.175), (4.176)). В интервале частот, со-

ответствующем полюсе непропускания (между пунктирными линиями) каких-либо особенностей не наблюдается.

Случай выполнения условий магнитного резонанса представлен на рис. 4.19, *б, в, г*. Здесь, во-первых, представлены те же две резонансные линии, которые определяются геометрией барьера. Однако частоты обеих резонансных линий несколько раздвинуты в разные стороны: низкочастотная отодвинута вниз на частоту 14,290 ГГц, а высокочастотная — вверх на частоту 46,370 ГГц.

Таким образом, если можно считать снижение частоты линии первого максимума в какой-то степени соответствующим формуле (4.175), то относительно второго максимума этого сказать нельзя, так как он смещается не вниз, а вверх. Причиной такого смещения вверх второго максимума можно считать влияние магнитных свойств среды.

В то же время, в области магнитного резонанса здесь возникает новая довольно широкая линия (соответствующие этой линии участки кривых выделены утолщенными линиями). Нижний край этой линии приходится на частоту 28,000 ГГц, то есть в точности совпадает с частотой  $f_a$ , а верхний — на частоту 35,650 ГГц, что заметно превышает частоту  $f_c$ . Более того, резко выраженный максимум этой линии приходится на частоту 34,710 ГГц, что также превышает  $f_c$ . Таким образом, хотя основная часть линии, обусловленной резонансными свойствами магнитной среды, совпадает с интервалом между характерными частотами  $f_a$  и  $f_c$ , наиболее резкий максимум этой линии располагается уже за пределами характерного интервала. На частотных зависимостях прохождения (рис. 4.19, *в, г*) обособление максимума на частоте 34,710 ГГц выражено еще сильнее, чем на зависимостях отражения (рис. 4.19, *б*).

Причина появления такого максимума, по-видимому, кроется в том, что, как можно видеть из рис. 2.8, адмиттанс при частотах в ближней окрестности выше  $f_c$  снижается незначительно (в рассмотренном на рис. 2.8 интервале не более чем на 30%), а волновое число в том же интервале увеличивается почти в три раза. Можно полагать, что при этом слагаемые, составляющие детерминанты, которые определяют амплитуды волн в соответствии с пошаговым алгоритмом [192], увеличиваются в такой степени, что в результате имеем не только смещение основного максимума рассматриваемой линии вверх по частоте, но и некоторый выход его за пределы частоты  $f_c$ .

Заметим дополнительно, что из рис. 4.19, *г* видно, что амплитуда прямо направленной волны в слое № 16 превышает единицу, то есть здесь происходит переход волны из более плотной среды в менее плотную. Таким образом, можно считать, что увеличение гиромангнитных свойств среды, то есть увеличение ее магнитной проницаемости приводит к уменьшению ее плотности для электромагнитных волн, что противоположно случаю диэлектрической проницаемости; увеличение диэлектрической проницаемости приводит к увеличению плотности диэлектрической среды. Выше подобное обратное соотношение роли

той и другой проницаемостей уже отмечалось для случая скалярной магнитной проницаемости, здесь же оно дополнительно подтверждено для проницаемости тензорной.

### Выводы по главе 4

Данная глава посвящена распространению волн в решетках, период которых того же порядка, что и длина волны. На примере одномерных волн рассмотрены традиционные методы решения задач для бесконечно протяженных периодических структур. Описан метод пошагового алгоритма, применимый к решеткам с конечной протяженностью, в том числе с нерегулярными параметрами. Рассмотрены особенности распространения электромагнитных волн в средах со скалярной и тензорной магнитными проницаемостями.

Основные результаты настоящей главы сводятся к следующему.

1. Выполнен обзор математического аппарата, традиционно применяемого при аналитическом рассмотрении распространения волн различной природы в периодических структурах бесконечной протяженности. Приведены общий вид уравнений Матье и Хилла, формулировка и доказательство теоремы Флоке, дающие решения в виде произведения периодической функции на экспоненту, показатель которой пропорционален координате, вдоль которой распространяется волна. Показано, что в общем случае решение Флоке для распространяющейся волны представляет собой произведение двух периодических функций типа биений с синусоидально меняющейся амплитудой, а для не распространяющейся волны — однопериодическую функцию с экспоненциально спадающей амплитудой.

Рассмотрено решение Кронига–Пенни для структуры со ступенчатой периодической неоднородностью. Приведены основные уравнения и граничные условия, выполнено решение, основанное на использовании теоремы Флоке. Получен параметр экспоненты и найдено распределение амплитуд волн внутри структуры. Рассмотрены полосы пропускания и непропускания, расположение которых по частоте и волновому числу определяется действительным или мнимым характером показателя экспоненты.

Рассмотрено решение Хилла для периодической структуры, параметры которой в пределах одного периода могут меняться произвольным образом. Приведен бесконечный определитель Хилла, получающийся в результате представления коэффициентов уравнения в виде тригонометрических рядов. Продемонстрировано формирование областей пропускания и непропускания, в том числе на основе упрощенного преобразования Уиттекера–Ватсона.

2. Рассмотрен метод пошагового алгоритма, применимый для многослойной структуры конечной длины с любым видом неоднородности, представимой в виде набора последовательных слоев с постоянными по длине каждого слоя параметрами. Приведена схема аналитической

реализации алгоритма, получены амплитуды волн как в крайних слоях, так и по всей длине структуры в каждом слое по отдельности.

Методом пошагового алгоритма исследованы частотные зависимости амплитуд волн прямого и обратного направлений в крайних слоях структуры. Показано, что такие зависимости имеют квазирезонансный характер в виде большого центрального лепестка, с обеих сторон сопровождаемого меньшими лепестками-сателлитами.

Методом пошагового алгоритма исследовано распределение амплитуд волн во внутренних слоях структуры при большом различии параметров между барьерами и промежутками. Показано, что по зависимости амплитуд от координаты вдоль оси структуры преобладают два главных вида распределения — синусоидальное и экспоненциальное, по частоте поочередно переходящие друг в друга через посредство промежуточных распределений — полусинусоидального и линейного. Выявлено, что частотные интервалы существования главных распределений превышают таковые для промежуточных не менее чем в несколько раз, причем при увеличении различия параметров барьеров и промежутков такое превышение увеличивается.

Методом пошагового алгоритма исследованы особенности частотных зависимостей амплитуды отраженной и проходящей волн в широком диапазоне частот при различных степенях неоднородности структуры. Введены определения сильной и слабой неоднородностей и получен критерий перехода между ними, определяемый величиной различия проницаемостей барьера и промежутка. Показано, что частотные зависимости амплитуды представляют собой чередование ярко выраженных «полос пропускания» и «непропускания», подобных имеющим место в периодической структуре бесконечной протяженности, в аналитическом виде получаемых классическими методами.

Выявлено не отмеченное классикой нарушение правильной периодичности наблюдаемых зависимостей, состоящее в изменении частотной ширины полос вплоть до полного их исчезновения или слияния с соседями. В качестве возможной причины такого нарушения предложена конечность полного числа слоев структуры. Для расчета центральных частот полос непропускания предложена эмпирическая формула, включающая в себя усредненное значение проницаемостей слоев с близким к единице поправочным коэффициентом, увеличивающимся по мере увеличения степени неоднородности.

Выполнено сравнение различных методов — Кронига–Пенни, Хилла и пошагового алгоритма, отмечены их преимущества и недостатки. В качестве наиболее пригодного для дальнейшего рассмотрения распространения волн в магнитных структурах выбран метод алгоритма, применимый при конечных размерах структуры, в том числе с малым числом периодов, достаточно удобный для машинной реализации.

3. Рассмотрено распространение электромагнитных волн прямого и обратного направлений в многослойной структуре ограниченной длины с периодической неоднородностью меандрового типа, барьеры

которой обладают магнитоэлектрическими свойствами. В качестве расчетного аппарата использован метод пошагового алгоритма, обобщенный на случай трехмерных электромагнитных волн, распространяющихся в магнитной среде.

Для случая скалярной магнитной проницаемости получены те же закономерности распространения волн, что и для изотропной диэлектрической среды, с тем отличием, что повышение диэлектрической проницаемости среды приводит к повышению ее электродинамической плотности, тогда как увеличение магнитной проницаемости такую плотность уменьшает.

Рассмотрено распределение амплитуд волн в отдельных слоях структуры при тензорном характере магнитной проницаемости слоев. Отмечено, что в этом случае наблюдаются те же его виды что и для скалярной среды: основные — синусоидальное и экспоненциальное, а также переходные — полусинусоидальное и линейное.

Отмечено аномально большое (в два–три раза) увеличение амплитуды волн прямого и обратного направлений в области частот, где линейномагнитный адмиттанс является отрицательным. Для интерпретации этого случая рассмотрен баланс потоков энергии распространяющихся волн на структуре в целом. Показано, что, несмотря на отрицательность адмиттанса, баланс энергии в этом случае выполняется в той же степени, как и при положительном значении адмиттанса. Наблюдаемое увеличение амплитуды отнесено к ситуации распространения волны из области более плотной в область менее плотную, аналогично таковому для скалярной проницаемости.

В широком диапазоне рассмотрена частотная зависимость амплитуд волн обоих направлений в крайних и некоторых промежуточных слоях структуры. Показано, что даже в случае намагниченности, на четыре–пять порядков ниже соответствующей реальным магнитным средам, амплитуда отраженной волны имеет те же резонансные особенности, соответствующие случаю, когда на длине одного барьера укладывается нечетное число четвертей длин волн, что и для диэлектрика. Однако при реальных значениях намагниченности кроме этих резонансов появляется широкая дополнительная линия, обусловленная именно магнитными свойствами среды. Общее положение этой линии задается характерными частотами, определяющими знак параметра расходимости, однако максимум приходится на частоту, несколько выше наибольшей из характерных частот, что обусловлено медленностью спада адмиттанса и ростом волнового числа в этой области.

## Глава 5

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ МСВ В РЕШЕТКАХ, ПЕРИОД КОТОРЫХ ЗНАЧИТЕЛЬНО БОЛЬШЕ ДЛИНЫ ВОЛНЫ

В предыдущих главах рассмотрено распространение магнитоэлектрических волн в структурах с неоднородностями типа периодической решетки для случаев, когда длина волны значительно превышает период решетки (глава 3) или сравнима по величине с таким периодом (глава 4). При этом прямолинейное распространение ограниченного по ширине волнового пучка или не меняется, или пучок, оставаясь прямолинейным, испытывает на решетке преломление в соответствии с дифракционными эффектами, аналогичными наблюдаемым в оптике [190].

Обратимся теперь к рассмотрению ситуации, когда длина волны значительно меньше как протяженностей штрихов и промежутков решетки, так и ее периода в целом. В этом случае волна каждый штрих решетки воспринимает как отдельную неоднородность или известное препятствие, так что волновой пучок на длине периода искривляет свою траекторию в соответствии со структурой локальных полей в окрестности каждого штриха. При этом траектория распространения волнового пучка приобретает периодический или иной характер, определяемый конкретной конфигурацией штрихов решетки.

В настоящей главе ограничимся рассмотрением решеток, формируемых магнитным полем, причем поле положим меняющимся сначала по одной, а затем и по двум координатам.

#### 5.1. Устойчивое распространение ПМСВ в поле, периодическом по одной координате

В настоящем разделе обратимся к рассмотрению ПМСВ в ферритовой пленке, намагниченной периодическим неоднородным полем, меняющимся по одной координате. Будем считать, что период такой магнитной решетки значительно больше длины ПМСВ, так что для получения траекторий волновых пучков можно будет воспользоваться методами изочастотных кривых и Гамильтона–Аулда [1]. В основном, будем опираться на материалы работ [239, 240].

##### 5.1.1. Геометрия задачи

Общая геометрия задачи представлена на рис. 5.1. Основу волноведущей структуры образует ферритовая пленка толщины  $d$ , намагничен-

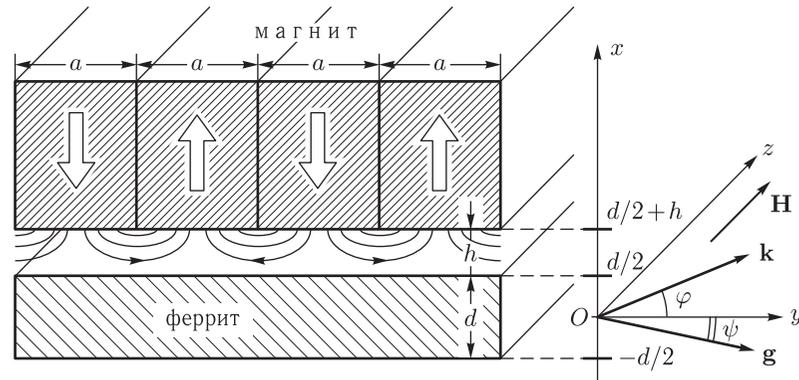


Рис. 5.1. Общая геометрия задачи

ная в плоскости постоянным полем  $\mathbf{H}$ . Декартова система координат  $Oxyz$  выбрана таким образом, что начало ее находится на середине толщины пленки, координатная плоскость  $Oyz$  параллельна плоскости пленки, а ось  $Ox$  ей перпендикулярна. При этом  $x$ -координаты поверхностей пленки соответствуют  $x_{1,2} = \pm d/2$ . Ось  $Oz$  направлена вдоль постоянного поля  $\mathbf{H}$ . По координатам  $y$  и  $z$  пленка предполагается неограниченной.

Вблизи верхней поверхности пленки расположена дополнительная магнитная система, состоящая из одинаковых плоскопараллельных пластин толщины  $a$ , плоскости которых параллельны координатной плоскости  $Oxz$ . По оси  $Ox$  пластины ограничены координатой  $x = d/2 + h$ , образуя плоскость, отстоящую от плоскости пленки на расстояние  $h$ . Выше этой плоскости, а также по координате  $z$  размеры пластин не ограничены. Вдоль оси  $Oy$  набор пластин также предполагается неограниченным. Пластины магнитной системы намагничены вдоль оси  $Ox$  в периодически чередующихся направлениях, показанных стрелками. Магнитная система создает в плоскости пленки периодическое магнитное поле, показанное силовыми линиями. В эксперименте описанная магнитная система может представлять собой, например, набор плоских постоянных магнитов, периодически намагниченную магнитофонную ленту [241] или ферритовую пленку со сквозной доменной структурой [242].

В такой структуре вдоль плоскости ферритовой пленки могут распространяться ПМСВ с волновым вектором  $\mathbf{k}$ , составляющим с осью  $Oy$  угол  $\varphi$ . При этом вектор групповой скорости  $\mathbf{g}$  тех же волн составляет с той же осью угол  $\psi$ .

### 5.1.2. Магнитное поле, создаваемое периодической магнитной системой

Рассмотрим сначала магнитное поле, создаваемое периодической магнитной системой. При расчете будем следовать процедуре, описанной в работе [243].

Для определенности предположим, что координатная плоскость  $Oxz$  совпадает с границей между пластинами магнитной системы, причем при  $0 < y < a$  вектор намагниченности направлен в положительном направлении оси  $Ox$ , а при  $-a < y < 0$  — в отрицательном.

Вне магнитной системы создаваемое ею поле подчиняется уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} = 0. \quad (5.1)$$

Исходя из геометрии системы, получаем граничное условие в виде

$$H_x|_{x=d/2+h} = 2\pi M \cdot S(y), \quad (5.2)$$

где  $S(y)$  — периодическая функция с периодом  $2a$ , равная в области первого периода:

$$S(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < y < a \\ -1 & \text{при } a < y < 2a. \end{cases} \quad (5.3)$$

Решаем уравнение (5.1) методом разделения переменных при двух предположениях: 1) поле  $H_x$  на минус бесконечности (вниз по рис. 5.1) стремится к нулю; 2) в силу симметрии задачи и нечетности распределения намагниченности вдоль оси  $Oy$  относительно начала координат, поле  $H_x$  описывается синусом по  $y$ .

Удовлетворяющее этим условиям решение уравнения (5.1) имеет вид:

$$H_x = A \cdot e^{\mu(x-d/2-h)} \cdot \sin(\mu y), \quad (5.4)$$

где  $A$  — произвольная постоянная, а  $\mu$  — постоянная разделения.

В силу произвольности  $A$  и  $\mu$  решением уравнения (5.1) является также любая сумма выражений вида (5.4) с любыми  $A$  и  $\mu$ , то есть решение можно представить в виде:

$$H_x = \sum_p A_p \cdot e^{\mu_p(x-d/2-h)} \cdot \sin(\mu_p y), \quad (5.5)$$

где  $p$  — порядковые номера слагаемых.

Разлагая  $S(y)$  в ряд Фурье, получаем граничное условие в виде

$$H_x|_{x=d/2+h} = 8M \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left[\frac{(2n-1)\pi y}{a}\right]}{2n-1}. \quad (5.6)$$

Подставляя (5.5) в (5.6) и приравнявая слагаемые с одинаковой зависимостью от  $y$ , получаем поле  $H_x$  в виде:

$$H_x = 8M \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{(2n-1)\pi(x-d/2-h)}{a}}}{2n-1} \cdot \sin\left[\frac{(2n-1)\pi y}{a}\right]. \quad (5.7)$$

Из условия  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  получаем компоненту поля  $H_y$  в виде:

$$H_y = 8M \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{(2n-1)\pi(x-d/2-h)}{a}}}{2n-1} \cdot \cos\left[\frac{(2n-1)\pi y}{a}\right]. \quad (5.8)$$

Некоторые численные примеры расчета компонент полей с использованием формул (5.7) и (5.8) представлены на рис. 5.2 и 5.3. Будем рассчитывать поле в плоскости пленки при  $x = d/2$  и положим  $a = 0,2$  см. Для большей общности рассмотрим нормированные поля  $h_x = H_x/8M$  и  $h_y = H_y/8M$ .

Так как выражения (5.7) и (5.8) для полей  $H_x$  и  $H_y$  получены в виде бесконечных рядов, рассмотрим сначала степень точности расчета, обеспечиваемую конечным числом членов ряда.

На рис. 5.2 показаны зависимости нормированных компонент полей  $h_x$  (а) и  $h_y$  (б) от координаты  $y$  при различном числе членов ряда ( $n_{\max}$ ). Расстояние между магнитной системой и пленкой:  $h = 0,01$  см. Кривые 1 соответствуют максимальному числу членов ряда —  $n_{\max} = 1$ , кривые 2 —  $n_{\max} = 3$ , кривые 3 —  $n_{\max} = 100$ .

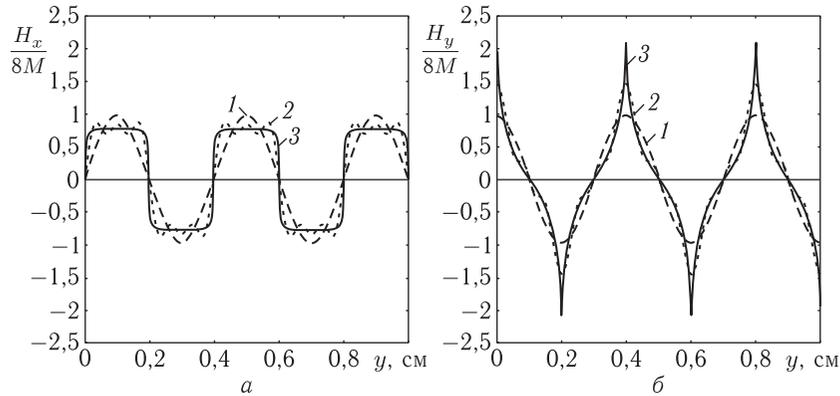


Рис. 5.2. Зависимости нормированных компонент полей в плоскости пленки от координаты  $y$  при различном числе членов ряда: а — поле  $H_x/8M$ , б — поле  $H_y/8M$

Из рисунка видно, что все зависимости являются периодическими с периодом  $2a$ , причем экстремумы зависимостей  $h_x(y)$  соответствуют  $y = a \cdot (p - 1/2)$ , где  $p = 1, 2, 3 \dots$ , а прохождение через нуль —  $y = a \cdot p$ . Экстремумы зависимостей  $h_y(y)$  соответствуют  $y = a \cdot p$ , а нули —  $y = a \cdot (p - 1/2)$ .

При ограничении разложения единственным первым членом ряда обе зависимости  $h_x(y)$  и  $h_y(y)$  близки к синусоидальным, а их амплитуда близка к единице. При увеличении числа членов ряда зависимость  $h_x(y)$  стремится к прямоугольной с амплитудой 0,77, а зависимость  $h_y(y)$  приобретает резкие максимумы, амплитуда которых приближается к 2,08.

Теперь рассмотрим изменение полей при удалении магнитной системы от пленки. Соответствующие зависимости представлены на рис. 5.3.

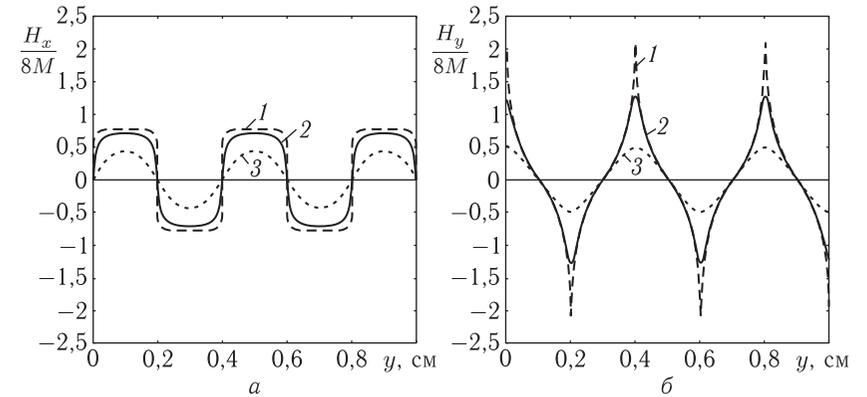


Рис. 5.3. Зависимости нормированных компонент полей в плоскости пленки от координаты  $y$  при различных расстояниях между поверхностями магнитной системы и пленки: а — поле  $H_x/8M$ , б — поле  $H_y/8M$ .

Число членов ряда  $n_{\max} = 100$ . Кривые 1 соответствуют  $h = 0,002$  см, кривые 2 —  $h = 0,01$  см, кривые 3 —  $h = 0,05$  см.

Из рисунка видно, что при малом расстоянии  $h = 0,002$  см зависимость  $h_x(y)$  близка к прямоугольной с периодом  $2a$  и амплитудой около 0,77, а зависимость  $h_y(y)$  имеет резкие максимумы с амплитудой до 2,08. При увеличении расстояния  $h$  обе зависимости  $h_x(y)$  и  $h_y(y)$  приближаются к синусоидальным, а их амплитуды при  $h = 0,05$  см составляют 0,43 и 0,49 соответственно.

### 5.1.3. Траектории ПМСВ в периодическом поле

Рассмотрим теперь траектории волновых пучков ПМСВ, распространяющихся в пленке, намагниченной пространственно-периодическим полем. Так как главную роль играют поля, параллельные плоскости пленки, то ограничимся учетом составляющей поля  $H_y(y)$ , определяемой формулой (5.8).

Дисперсионное соотношение для ПМСВ в пленке со свободной поверхностью, полученное аналогично [143], имеет вид (2.69):

$$\beta - 1 - 2\mu\alpha \operatorname{cth}(kda) = 0, \quad (5.9)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  определяются соотношениями (2.70)–(2.71), (2.39)–(2.40) (разд. 2.2.1).

Для вычисления траекторий воспользуемся методом Гамильтона–Аулда [1, 115, 173, 174, 244–246], состоящим в численном решении системы уравнений (2.142)–(2.144) (разд. 2.4.1).

Основные свойства распространения волновых пучков ПМСВ в условиях периодического подмагничивания иллюстрируется рис. 5.4–5.6. Для всех рисунков общими являются такие параметры магнитной системы как постоянное поле вдоль оси  $Oz$  —  $H_z = 437,5$  Э и намагничен-

ность полос —  $M = 15$  Гс. Параметры ферритовой пленки также везде одинаковы: намагниченность  $4\pi M_0 = 1750$  Гс, толщина  $d = 15$  мкм.

Рис. 5.4 иллюстрирует зависимость параметров траекторий ПМСВ от частоты  $f$  при постоянном расстоянии между торцевыми поверхностями полос магнитной системы и поверхностью пленки  $h = 0,01$  см, а также постоянном угле между волновым вектором ПМСВ и осью  $Oy$  в начальной точке траектории  $\varphi_0 = 0^\circ$ . На рис. 5.4, *а* показаны траектории волновых пучков ПМСВ  $z(y)$ , на рис. 5.4, *б* — волновое число  $k(y)$ , на рис. 5.4, *в* и 5.4, *г* — углы —  $\varphi(y)$  и  $\psi(y)$  соответственно.

Из рисунка видно, что траектории ПМСВ  $z(y)$  (рис. 5.4, *а*) имеют вид осциллирующих относительно оси  $Oy$  периодических кривых, близких к синусоидам, амплитуда которых тем больше, чем выше частота. Период кривых совпадает с периодом чередования полос магнитной системы и равен  $2a$ . Зависимости волнового числа  $k(y)$  (рис. 5.4, *б*) также являются периодическими, однако период их равен  $a$ , то есть

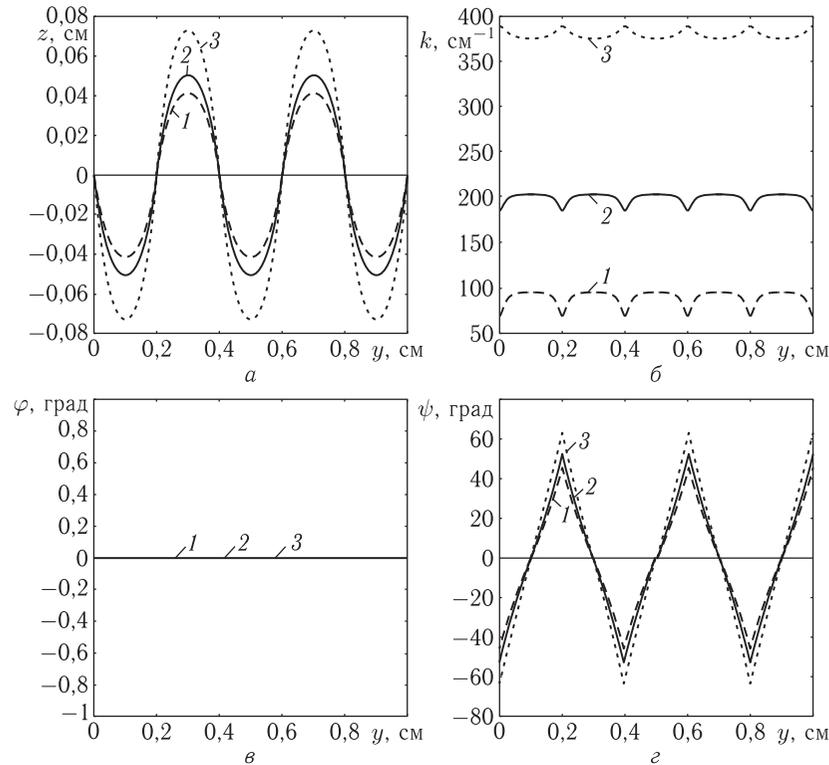


Рис. 5.4. Параметры траекторий волновых пучков ПМСВ, распространяющихся в периодическом поле, для различных частот: *а* —  $z(y)$ , *б* —  $k(y)$ , *в* —  $\varphi(y)$ , *г* —  $\psi(y)$ . 1 — 3000 МГц; 2 — 3200 МГц; 3 — 3400 МГц

вдвое меньше, чем для траекторий. Более высоким частотам соответствуют большие волновые числа, что отражает характер дисперсии ПМСВ. Угол  $\varphi$  между волновым вектором и осью  $Oy$  (рис. 5.4, *в*) от координаты  $y$  никак не зависит, то есть волновой фронт ПМСВ всегда остается параллельным оси  $Oz$ . Угол же  $\psi$  между вектором групповой скорости и осью  $Oy$  (рис. 5.4, *г*) меняется по координате  $y$  весьма сильно. Соответствующие зависимости имеют вид периодических пилообразных кривых с периодом  $2a$ , амплитуда которых с увеличением частоты увеличивается.

Рис. 5.5 иллюстрирует зависимость параметров траекторий ПМСВ от расстояния  $h$  между торцевыми поверхностями полос магнитной системы и поверхностью пленки при постоянной частоте  $f = 3200$  МГц и постоянном угле между волновым вектором ПМСВ и осью  $Oy$  в начальной точке траектории  $\varphi_0 = 0^\circ$ . На рис. 5.5, *а* показаны траектории

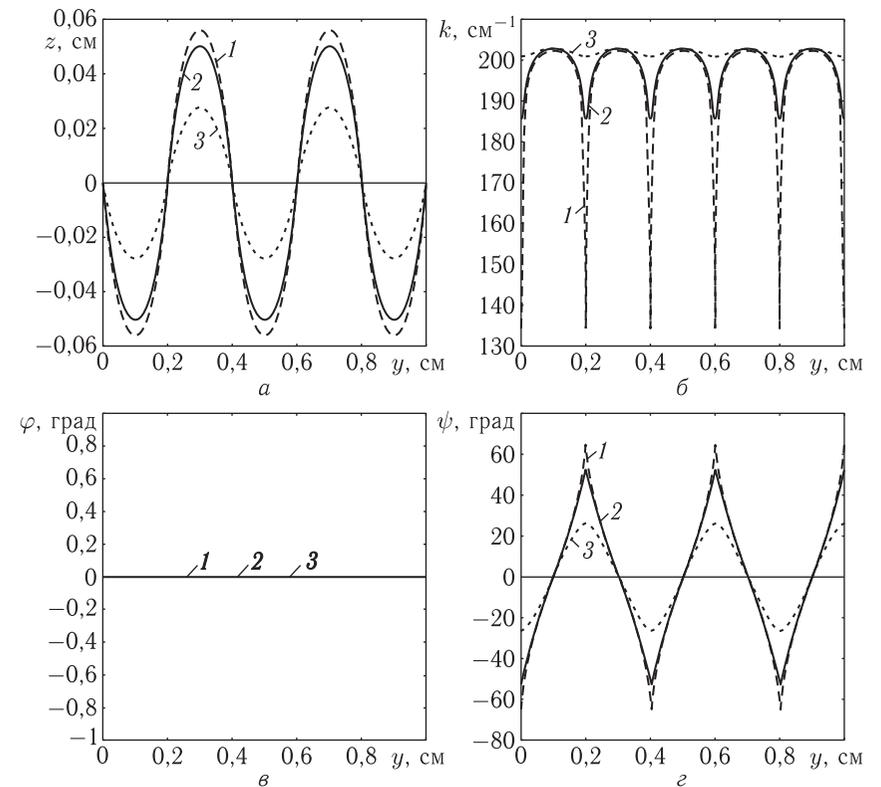


Рис. 5.5. Параметры траекторий волновых пучков ПМСВ, распространяющихся в периодическом поле, при различных расстояниях между плоскостями магнитной системы и пленки: *а* —  $z(y)$ , *б* —  $k(y)$ , *в* —  $\varphi(y)$ , *г* —  $\psi(y)$ . 1 —  $h = 0,002$  см; 2 —  $h = 0,01$  см; 3 —  $h = 0,05$  см

волновых пучков ПМСВ —  $z(y)$ , на рис. 5.5, б — волновое число —  $k(y)$ , на рис. 5.5, в и 5.5, г — углы —  $\varphi(y)$  и  $\psi(y)$  соответственно.

Из этого рисунка видно, что близкий к синусоидальному вид траекторий ПМСВ  $z(y)$  (рис. 5.5, а) при изменении расстояния  $h$  в общем сохраняется, причем амплитуда кривых при удалении магнитной системы от пленки уменьшается. Зависимости волнового числа  $k(y)$  (рис. 5.5, б) являются тем более резкими, чем ближе находится магнитная система к плоскости пленки. Угол  $\varphi$  между волновым вектором и осью  $Oy$  (рис. 5.5, в) от расстояния  $h$  также не зависит, а угол  $\psi$  (рис. 5.5, г) меняется тем резче, чем ближе находится магнитная система к плоскости пленки.

Рис. 5.6 иллюстрирует зависимость параметров траекторий ПМСВ от начального значения  $\varphi_0$  угла между волновым вектором ПМСВ и осью  $Oy$  при постоянном расстоянии между торцевыми поверхностями полос магнитной системы и поверхностью пленки —  $h = 0,01$  см,

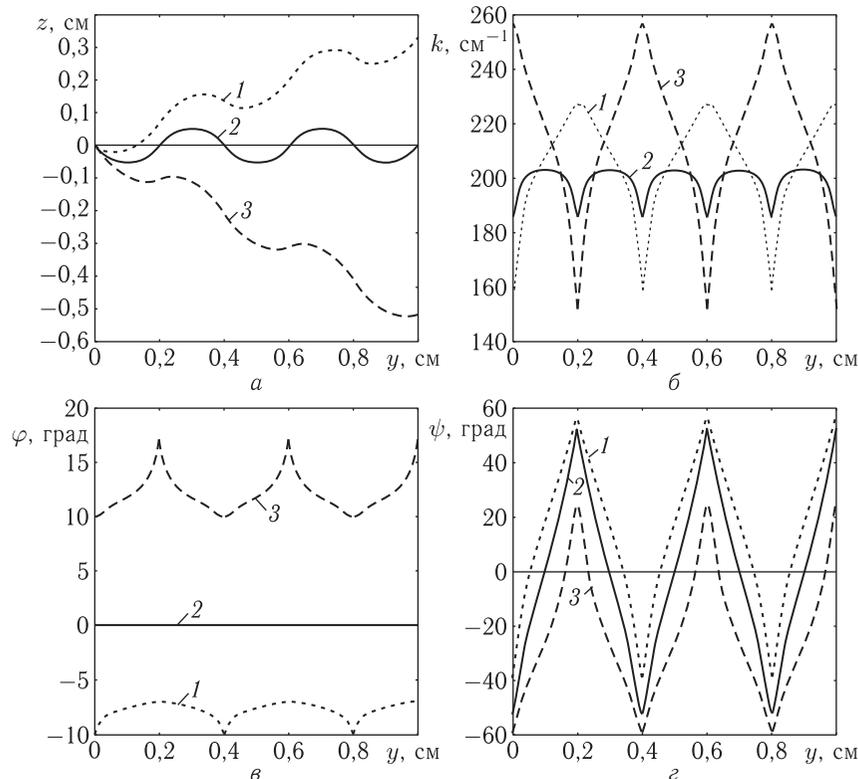


Рис. 5.6. Параметры траекторий волновых пучков ПМСВ, распространяющихся в периодическом поле, при различных начальных углах  $\varphi_0$ : а —  $z(y)$ , б —  $k(y)$ , в —  $\varphi(y)$ , г —  $\psi(y)$ . 1 —  $\varphi_0 = -10^\circ$ ; 2 —  $\varphi_0 = 0^\circ$ ; 3 —  $\varphi_0 = 10^\circ$

а также постоянной частоте  $f = 3200$  МГц. На рис. 5.6, а показаны траектории волновых пучков ПМСВ —  $z(y)$ , на рис. 5.6, б — волновое число —  $k(y)$ , на рис. 5.6, в и 5.6, г — углы —  $\varphi(y)$  и  $\psi(y)$  соответственно.

Из этого рисунка видно, что траектории ПМСВ  $z(y)$  (рис. 5.6, а) при изменении начального угла  $\varphi_0$  в общем сохраняют осциллирующий характер, однако теперь осцилляции происходят относительно оси  $Oy$  только при  $\varphi_0 = 0^\circ$  (кривая 2), тогда как при  $\varphi_0 > 0^\circ$  ось осцилляций поворачивается относительно оси  $Oy$  в сторону отрицательных углов (кривая 3), а при  $\varphi_0 < 0^\circ$  — в сторону положительных (кривая 1). Период осцилляций всегда остается равным  $2a$ . Зависимости волнового числа  $k(y)$  (рис. 5.6, б) являются периодическими, причем период вблизи  $\varphi_0 = 0^\circ$  равен  $a$  (кривая 2), а при достаточном удалении от этого значения угла период становится равным  $2a$  (кривая 3 и частично 1). Угол  $\varphi$  между волновым вектором и осью  $Oy$  (рис. 5.6, в) от координаты  $y$  не зависит только при  $\varphi_0 = 0^\circ$  (кривая 2), а при удалении от этого значения зависимость  $\varphi(y)$  приобретает осциллирующий характер с периодом  $2a$  (кривые 1 и 3). Зависимость  $\varphi(y)$  (рис. 5.6, в) при  $\varphi_0 > 0^\circ$  целиком лежит выше линии  $\varphi_0 = 0^\circ$  (кривая 3), при  $\varphi_0 < 0^\circ$  — ниже (кривая 1). Зависимости  $\psi(y)$  (рис. 5.6, г) при  $\varphi_0 \neq 0^\circ$  в основном сохраняют вид периодических пилообразных кривых, свойственных  $\varphi_0 = 0^\circ$  (кривая 2 на рис. 5.4, г), однако теперь они смещаются при  $\varphi_0 > 0^\circ$  вниз (кривая 3), а при  $\varphi_0 < 0^\circ$  — вверх (кривая 1).

#### 5.1.4. Интерпретация хода траекторий

Все перечисленные особенности зависимостей параметров траекторий от координаты  $y$  можно наглядно пояснить с помощью метода изочастотных кривых, построенных на плоскости  $Ok_y k_z$  [1] (разд. 2.2.2, рис. 2.2, б). Покажем, например, как можно проиллюстрировать ход кривых 3 на рис. 5.6, соответствующих  $\varphi_0 = 10^\circ$ , для чего обратимся к рис. 5.7, где показаны изочастотные кривые 1, 2 и векторы фазовой и групповой скоростей ПМСВ  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{g}$ , построенные при тех же параметрах, что и кривые на рис. 5.6.

Поскольку подмагничивающее поле по координате  $y$  периодически повторяется, достаточно рассмотреть два значения:  $y_1 = 0$  и  $y_2 = a$ . При этом в плоскости пленки  $H_{y1} = 124$  Э,  $H_{y2} = -124$  Э (в соответствии с кривой 2 на рис. 5.3, б), что при  $H_z = 437,5$  Э дает  $H_0 = 455$  Э, то есть суммарное поле отклонено от оси  $Oz$  при  $y = 0$  на  $-15^\circ$ , а при  $y = a$  на  $15^\circ$ . В таком поле изочастотные кривые 1 и 2, соответствующие  $y = 0$  и  $y = a$ , разворачиваются во взаимно противоположных направлениях на те же углы.

Пусть  $\mathbf{k}_1$  — волновой вектор ПМСВ при  $y = 0$ , образующий с горизонтальной осью угол  $\varphi_1$ . Для определения направления вектора групповой скорости надо построить нормаль к касательной к изочастотной кривой 1 в точке окончания вектора  $\mathbf{k}_1$ . Такое построение дает вектор  $\mathbf{g}_1$ , образующий с горизонтальной осью угол  $\psi_1$ .

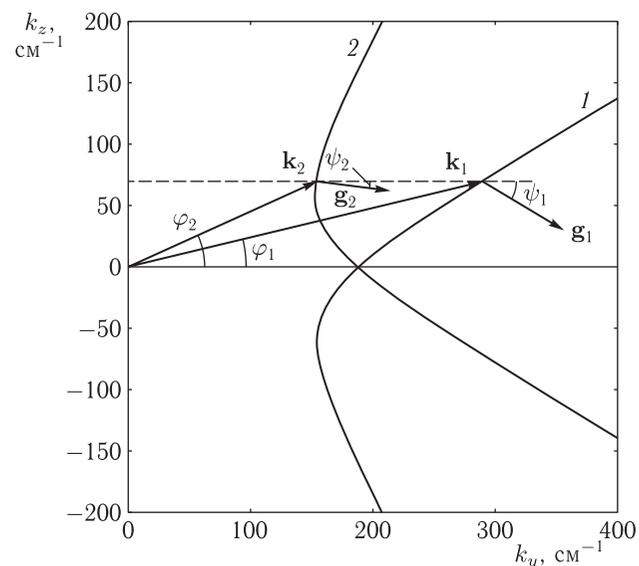


Рис. 5.7. Интерпретация формирования параметров траекторий ПМСВ с помощью метода изочастотных кривых

Так как подмагничивающее поле зависит только от координаты  $y$ , то при распространении ПМСВ в плоскости пленки в соответствии с законами геометрической оптики должна сохраняться проекция волнового вектора  $\mathbf{k}$  на ось  $Oz$ , то есть его компонента  $k_z$ . Проводя из точки конца вектора  $\mathbf{k}_1$  горизонтальную прямую (пунктир) до пересечения с изочастотной кривой 2, получаем точку конца волнового вектора  $\mathbf{k}_2$ , соответствующего  $y = a$ . Этот вектор образует с горизонтальной осью угол  $\varphi_2$ , а соответствующий ему вектор групповой скорости  $\mathbf{g}_2$  — угол  $\psi_2$ .

Из сравнения кривых на рисунке можно видеть выполнение соотношений:  $k_1 > k_2$ ,  $\varphi_1 < \varphi_2$ ,  $\psi_1 < \psi_2$ , что находится в соответствии с кривыми 3 на рис. 5.6. Численные значения соответствующих величин также близки (различия не превышают 20%). Аналогичным образом метод изочастотных кривых можно использовать для объяснения хода кривых на рис. 5.4 и 5.5.

## 5.2. Стохастическая неустойчивость ПМСВ в поле типа «вала» с периодической модуляцией

В настоящем разделе обратимся к рассмотрению ПМСВ в ферритовой пленке, намагниченной полем типа «вала» с пространственной периодической модуляцией. Как и ранее, будем считать, что период такой модуляции значительно больше длины ПМСВ, так что для по-

лучения траекторий волновых пучков можно пользоваться методами изочастотных кривых и Гамильтона–Аулда. В основном будем опираться на материалы работ [117–125, 247–253].

### 5.2.1. Геометрия задачи и основные уравнения

Геометрия задачи, совпадающая с принятой в [253], показана на рис. 5.8.

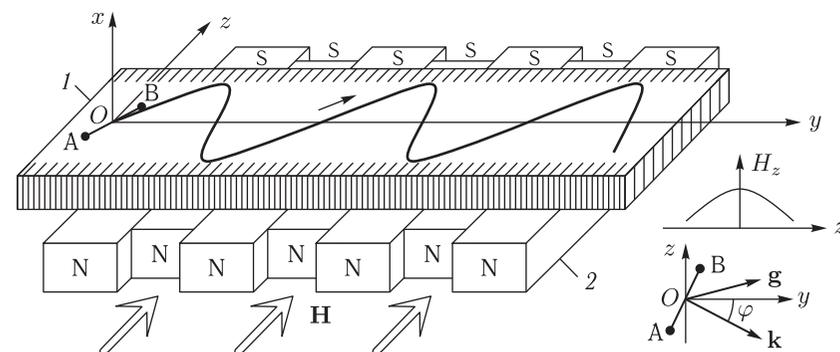


Рис. 5.8. Геометрия задачи

Ферритовая пластина 1 намагничена постоянным полем  $\mathbf{H}$  в ее плоскости. Конфигурация этого поля соответствует профилю типа «вала». Магнитная система 2 формирует дополнительное поле, реализующее пространственную модуляцию исходного поля. Преобразователь АВ возбуждает ПМСВ в плоскости пластины. Декартова система координат  $Oxyz$  ориентирована таким образом, что плоскость  $Oyz$  совпадает с плоскостью магнитной пластины, а ось  $Oy$  ей перпендикулярна. При этом ось  $Oz$  ориентирована вдоль направления постоянного поля. Начало координат  $O$  совпадает с центром преобразователя АВ. На врезках справа внизу показана схема конфигурации поля типа «вала», а также ориентация векторов фазовой  $\mathbf{k}$  и групповой  $\mathbf{g}$  скоростей ПМСВ в полярной системе координат.

В приведенных условиях поле  $\mathbf{H}$  формирует в пластине волноведущий канал, параллельный оси  $Oy$ . В отсутствие модуляции ПМСВ распространяется в этом канале по периодической волнообразной траектории, напоминающей синусоиду, и называемой далее «псевдосинусоидальной» (на рисунке показана утолщенной линией) [1]. Модуляция поля, осуществляемая системой 2, приводит к искажению исходной «синусоиды», в результате чего траектория приобретает стохастический характер.

При распространении ПМСВ в неоднородно намагниченной пластине величина и направление ее волнового вектора  $\mathbf{k}$  изменяется. Для локальной характеристики свойств волны в заданной точке

пространства  $(y, z)$  удобно пользоваться полярной системой координат (рис. 5.8, вставка), где компоненты волнового вектора ПМСВ равны:

$$k_y = k \cdot \cos \varphi; \quad (5.10)$$

$$k_z = k \cdot \sin \varphi. \quad (5.11)$$

В геометрии рис. 5.8 дисперсионное соотношение для ПМСВ имеет вид (2.69) [1, 143]:

$$\beta - 1 - 2\mu\alpha \operatorname{cth}(k d \alpha) = 0, \quad (5.12)$$

где входящие в него величины определяются формулами (2.70)–(2.71).

Для задач о распространении волновых пучков ПМСВ в неоднородных полях удобно пользоваться методом Гамильтона–Аулда, состоящим в решении системы уравнений (2.142)–(2.144) [1, 173, 174]. Получаемая при пошаговом решении этой системы зависимость  $z$  от  $y$  дает траекторию распространения ПМСВ при заданной конфигурации поля.

В настоящей работе система (2.142)–(2.144) решалась численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка [191], результаты чего описаны далее.

### 5.2.2. Модуляция поля типа «вала»

Будем полагать, что поле, в основном, направлено вдоль оси  $Oz$ , то есть его  $z$ -компонента значительно преобладает над другими компонентами ( $x$  и  $y$ ), так что влиянием этих компонент на траектории ПМСВ можно пренебречь. Назовем полем типа «вала» такое поле,  $z$ -компонента которого имеет вид:

$$H = 4\pi M_0 [T - F(z - S)^2], \quad (5.13)$$

где:  $T$ ,  $F$ ,  $S$  — параметры «вала», из которых первый характеризует его высоту, второй — крутизну склонов и третий — сдвиг вершины вдоль оси  $Oz$ , причем предполагается, что  $F(z - S)^2 < T$ . Отсутствие модуляции поля соответствует постоянству всех этих параметров. При этом траектории ПМСВ имеют чисто периодический «псевдосинусоидальный» вид [114, 115, 191].

Положим, что модуляция поля осуществляется путем изменения одного из упомянутых параметров по синусоидальному закону следующего вида:

$$R = R_0 + R_m = R_0 + R_{m0} \sin(2\pi P_r y), \quad (5.14)$$

где  $R = T, F, S$ . При этом:  $R_0$  — постоянная и  $R_m$  — переменная часть параметра,  $R_{m0}$  — амплитуда и  $P_r$  — частота пространственной модуляции поля.

Для характеристики такого поля введем параметр глубины модуляции:

$$m = R_{m0}/R_0. \quad (5.15)$$

Глубина модуляции может меняться от 0 до 1. При  $m = 0$  модуляция отсутствует, при  $m = 1$  величина  $R$  при изменении  $y$  меняется от нуля до  $2R_0$ .

### 5.2.3. Общая картина неустойчивости траекторий ПМСВ

ПМСВ, распространяющиеся в таком модулированном поле, периодически испытывают воздействия, приходящиеся на разные участки траекторий. По мере распространения ПМСВ вдоль канала, образуемого полем типа «вала», такие воздействия накапливаются, а поскольку они приходятся на разные участки траектории, то вид ее резко изменяется — от периодического псевдосинусоидального до близкого к хаотическому. Траектория становится неустойчивой в том отношении, что малое изменение начальных условий приводит к сильному изменению ее формы. Численный расчет показывает, что траектория испытывает достаточно сильные (более 10% от невозмущенной величины) хаотические скачки амплитуды, частоты и фазы при глубине модуляции более 0,2–0,4. Явления стохастизации проявляются тем сильнее, чем больше глубина модуляции. Если в процессе какого-либо из скачков превышает угол отсечки, то траектория обрывается. Далее будем называть такой обрыв «высвечиванием» (более подробно см. разд. 5.2.4, особенно «Замечание» на стр. 206).

*Основные свойства хаотизации траекторий.* Рассмотрим некоторые общие свойства хаотизации траекторий ПМСВ на примере поля типа «вала» с модулированной крутизной склонов [117, 118] вида:

$$F = F_0 + F_{m0} \sin(2\pi P_r y). \quad (5.16)$$

Положим здесь и далее основные параметры задачи следующими: параметры пленки  $4\pi M_0 = 1750$  Гс,  $d = 15$  мкм; частота ПМСВ  $f = 3200$  МГц, начало траектории соответствует  $y = 0$  см,  $z = 0$  см. Начальный угол  $\varphi_0$  между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и осью  $Oy$ , кроме особо оговоренных случаев, будем считать равным  $30^\circ$ .

Результаты иллюстрируются рис. 5.9, где левый столбец (а) соответствует немодулированному полю, а правый (б) — модулированному. Первая пара рисунков соответствует зависимости от координаты  $y$  параметра  $F_m = F_{m0} \sin(2\pi P_r y)$ , характеризующего крутизну склонов «вала». В отсутствие модуляции ( $F_{m0} = 0$ ) он просто равен нулю, при наличии модуляции ( $F_{m0} \neq 0$ ) имеет вид синусоиды. На второй паре рисунков показаны траектории ПМСВ  $z(y)$  для тех же случаев. На третьей паре — производные от траекторий по координате  $y$  —  $dz/dy$ , и на четвертой — фазовые портреты колебаний (зависимости  $dz/dy$  от  $z$ ) в тех же условиях. Из сопоставления рисунков каждой пары видно, что в отсутствие модуляции (а) траектория ПМСВ и ее производная имеют строго периодический, близкий к синусоидальному характер, а фазовая траектория описывает один и тот же цикл. При наличии модуляции (б) амплитуда траектории ПМСВ и ее производной

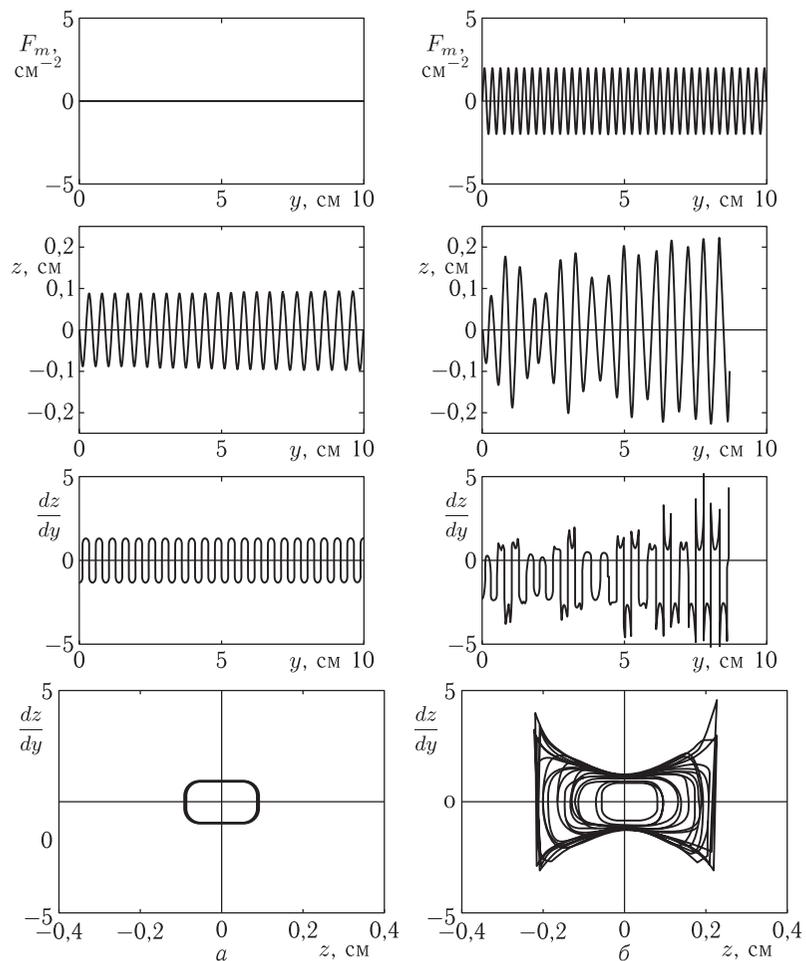


Рис. 5.9. Хаотизация траекторий ПМСВ в поле типа «вала» с модулированной крутизной склонов: *a* — модуляция отсутствует; *б* — модуляция присутствует. Параметры поля:  $T = 0,25$ ,  $S = 0$  см,  $F_0 = 4$  см $^{-2}$ ,  $F_{m0} = 2$  см $^{-2}$ ,  $P_r = 3,57$  см $^{-1}$

испытывают хаотические скачки, а фазовая траектория каждый новый оборот совершает по иному, и фазовый портрет размывается, что соответствует стохастизации процесса.

**Структура траекторий.** Как можно видеть из рис. 5.9, траектории ПМСВ и особенно их производные часто имеют скачкообразный характер, который повторяется и на фазовых портретах. Поскольку распространение ПМСВ по плоскости пленки является непрерывным, представляет интерес рассмотреть, в какой мере эта скачкообразность имеет ме-

сто. Для этого обратимся к рис. 5.10, где показаны траектории ПМСВ, их производные и фазовые портреты. Левый столбец рисунков соответствует масштабу, близкому к принятому на рис. 5.9, правый — те же траектории, снятые в более крупном масштабе (крупнее на два порядка). Буквами А и В обозначены идентичные места обоих видов траекторий.

Из рисунка видно, что во всех случаях скачкообразный характер траекторий на самом деле таковым не является, то есть все кривые

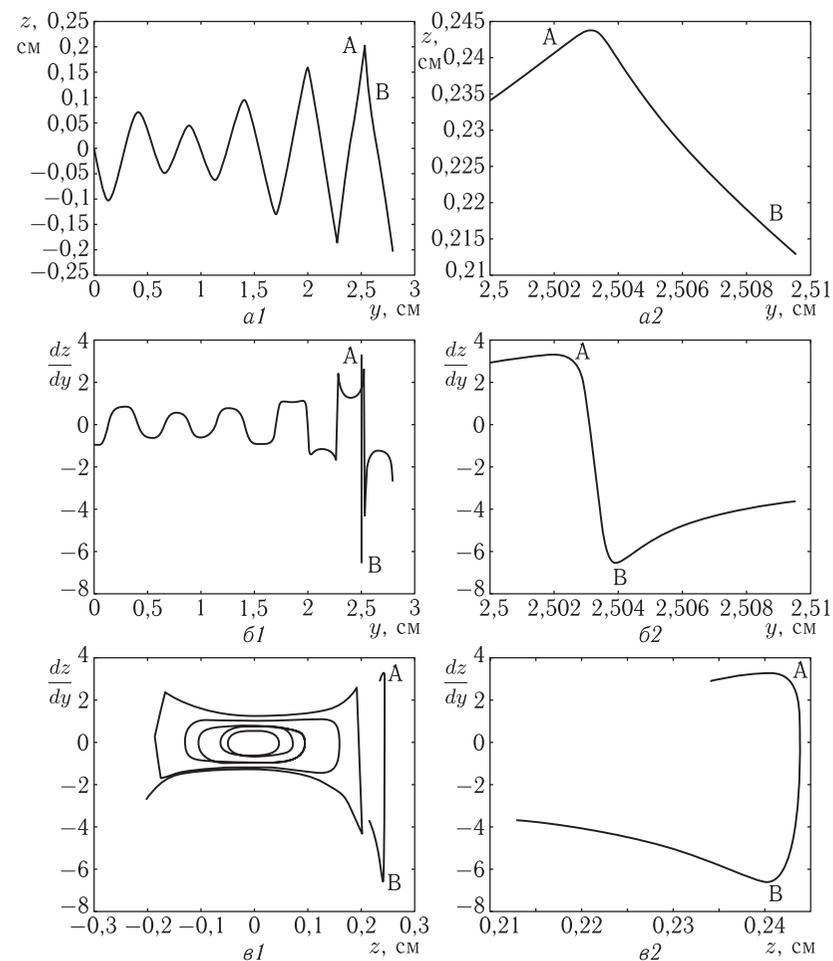


Рис. 5.10. Структура траекторий (1) и фазовых портретов (2) в крупном масштабе: *a* — траектории ПМСВ; *б* — производные от траекторий; *в* — фазовые портреты (показана часть одной фазовой траектории). Параметры поля:  $T = 0,25$ ,  $S = 0$  см,  $F_0 = 2$  см $^{-2}$ ,  $F_{m0} = 0,5$  см $^{-2}$ ,  $S_m = 0$ . Частота модуляции:  $P_r = 3,57$  см $^{-1}$ . Остальные параметры совпадают с принятыми на рис. 5.9

в достаточно крупном масштабе являются совершенно плавными, как этого и следовало ожидать, исходя из физической сущности процесса.

*Изменение начальных условий.* Зависимость формы траектории от малого изменения начальных условий весьма высока. Так, при изменении начального угла  $\varphi_0$  на  $3^\circ$  с  $30^\circ$  до  $33^\circ$  в отсутствие модуляции траектория сдвигается на четверть периода после 22–25 пересечений оси  $Oy$ . При наличии модуляции аналогичное изменение траектории происходит уже при 5–6 пересечениях.

Рассмотрим, как сказывается на характере стохастизации траекторий ПМСВ изменение начальных условий, в качестве примера которых возьмем изменение начального угла вектора фазовой скорости волны. Для этого обратимся к рис. 5.11, где показаны траектории ПМСВ (*a*), их производные (*б*) и фазовые портреты (*в*) при различных значениях начального угла  $\varphi_0$ . Как более наглядный рассмотрен случай модуляции высоты вершины «вала».

При разных углах амплитуды смещения траектории по оси  $Oz$  и ее производной в отсутствие модуляции составляют:

- при  $10^\circ$  смещение: 0,028 см, производная: 0,48;
- при  $20^\circ$  смещение: 0,050 см, производная: 0,75;
- при  $30^\circ$  смещение: 0,087 см, производная: 0,96.

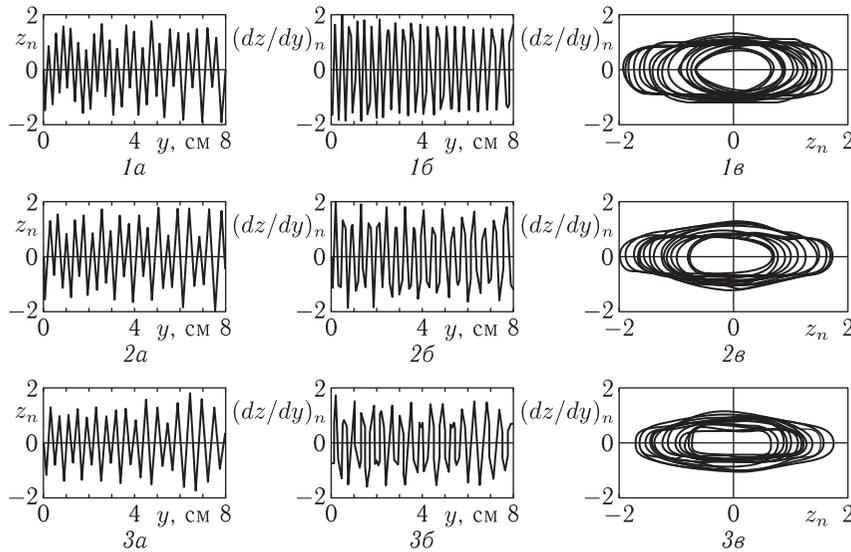


Рис. 5.11. Траектории ПМСВ (*a*), их производные (*б*) и фазовые портреты (*в*) при различных значениях начального угла  $\varphi_0$ : 1 –  $10^\circ$ ; 2 –  $20^\circ$ ; 3 –  $30^\circ$ . Модуляция высоты вершины «вала»:  $T_0 = 0,25$ ;  $T_m = 0,24$ ;  $F_0 = 4 \text{ см}^{-2}$ ;  $F_m = 0$ ;  $S_m = 0$ . Частота модуляции:  $P_r = 3,6 \text{ см}^{-1}$ . Остальные параметры те же, что на рис. 5.9

Для удобства сравнения все кривые нормированы на приведенные здесь значения смещений и производных (отмечены индексом «*n*»).

Из рисунка видно следующее:

- 1) Все отдельные траектории и их производные идут по разному, отдельные фазовые траектории тоже отличаются друг от друга. Это означает, что конкретный вид траекторий и их производных зависит от угла.
- 2) Амплитуды и частоты колебаний нормированных сигналов и их производных при всех углах приблизительно одинаковы и характер стохастизации примерно одинаков, то есть все они от угла не зависят.
- 3) Фазовые портреты нормированных сигналов практически одинаковы: траектории циклов различны, но характер «замазывания» и общая форма огибающих изнутри и снаружи при достаточно большом количестве циклов (здесь циклов около 20) всегда одинаковы (при условии нормирования).
- 4) Индивидуальные свойства траекторий зависят от начального угла, но статистические характеристики — не зависят. Это означает, что система в статистическом отношении «не помнит» начальных условий.
- 5) Все эти утверждения справедливы с точностью  $\pm 10\%$ .

#### 5.2.4. Траектории при высвечивании

Из рис. 5.9 можно видеть, что траектории при прохождении некоторого расстояния вдоль оси  $Oy$  обрываются, то есть «высвечиваются». Так траектории для смещения  $z$  по оси  $Oz$  и его производной  $dz/dy$  обрываются при  $y = 8,687 \text{ см}$ .

Рассмотрим процесс высвечивания более подробно, для чего обратимся к рис. 5.12, где показаны траектории производных от смещения по координате  $dz/dy$  (*1*) и фазовые портреты колебаний  $dz/dy(z)$  (*2*) при разных значениях нормированной частоты модуляции

$$N_f = F_r / P_{m0}, \quad (5.17)$$

где  $F_r$  — пространственная частота модуляции,  $P_{m0} = 2,1 \text{ см}^{-1}$  — пространственная частота траекторий в отсутствие модуляции.

При построении рисунка с целью наглядности были выбраны именно траектории производных, а не смещения, так как они, как видно из рис. 5.9, б, проявляют более сильное отклонение от синусоидального режима. При этом траектории для смещения ведут себя аналогично.

Из рисунка видно, что при различных значениях  $N_f$  длина траектории  $y_{\max}$  сильно меняется. Так при  $N_f = 2$  (рис. 5.12, б) ее длина составляет всего  $y_{\max} = 1,15 \text{ см}$ , тогда как при  $N_f = 3$  (рис. 5.12, в) — уже достигает  $y_{\max} = 19,7 \text{ см}$ .

Можно видеть, что во многих случаях (*в*, *д*) хаотизация траекторий наступает не сразу, а сначала траектория достаточно долго пребывает в «псевдосинусоидальном» режиме (для рис. 5.12, в1 более 30 периодов) и только на конечном участке, составляющем порядка 3–5 периодов, сильно хаотизируется. То есть траектории высвечиваются тогда, когда хаотизация становится достаточно интенсивной.

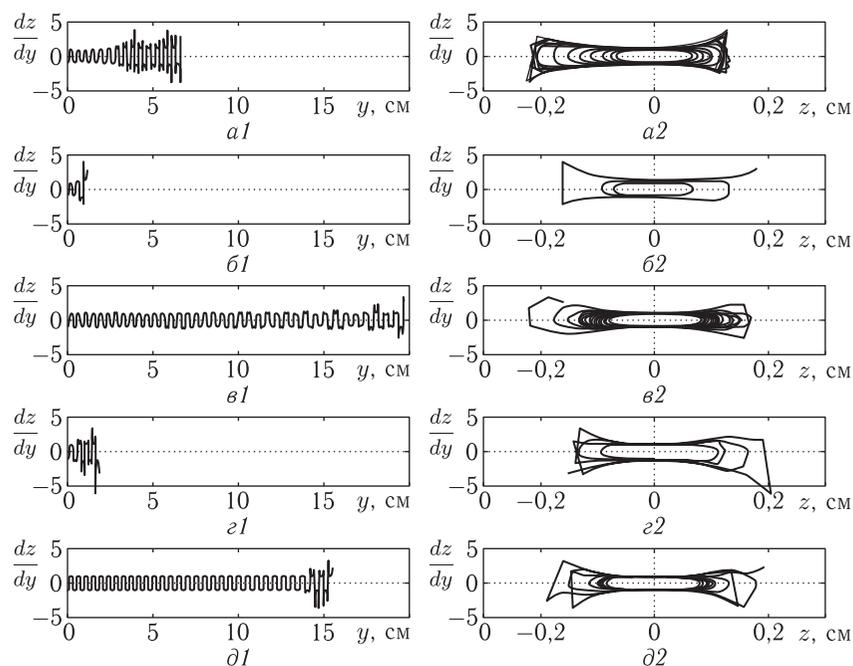


Рис. 5.12. Развертки во времени производных от траекторий по координате  $dz/dy$  (1) и фазовые портреты колебаний  $dz/dy(z)$  (2) при разных значениях нормированной частоты модуляции  $N_f$ . Параметры — те же, что на рис. 5.9.  $a - N_f = 1 - y_{\max} = 1,15$  см;  $б - N_f = 2 - y_{\max} = 1,15$  см;  $в - N_f = 3 - y_{\max} = 19,7$  см;  $г - N_f = 4 - y_{\max} = 1,85$  см;  $д - N_f = 5 - y_{\max} = 15,5$  см

Соответственно фазовые портреты содержат четко выраженную кольцеобразную сердцевину, соответствующую многократному прохождению по циклу квазирегулярных частей траекторий, после чего размах резко увеличивается, отдельные ветви идут вразнос и создают острые углы, после чего обрываются — высвечиваются.

**Длина высвечивания.** Как показано в предыдущем разделе, характер высвечивания траекторий ПМСВ весьма сильно зависит от частоты модуляции.

Причина высвечивания будет рассмотрена далее, а сейчас обратимся к сравнению различных степеней хаотизации траекторий при изменении этой частоты. В качестве критерия стохастичности возьмем максимальную до обрыва длину траектории  $y_{\max}$ , которую назовем «длиной высвечивания». Как видно из рис. 5.12, на протяжении этой длины траектория сначала ведет себя более или менее регулярно, то есть, можно сказать, пребывает в состоянии «псевдосинусоидальности» и только на конце приобретает хаотический размах, после чего высвечивается. Таким образом, будем считать, что стохастичность вы-

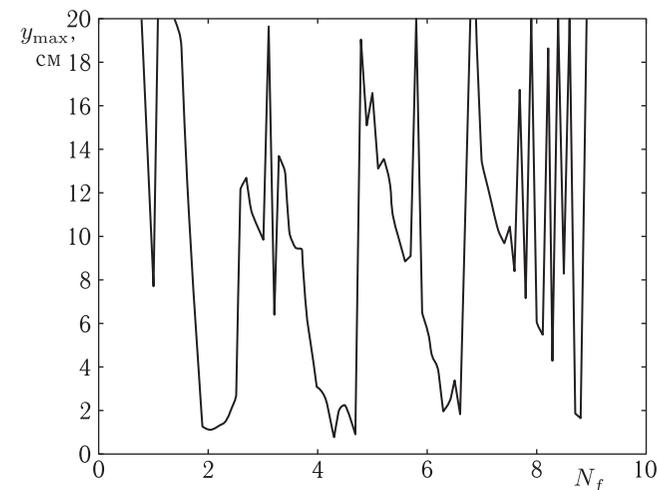


Рис. 5.13. Зависимость длины высвечивания траекторий от относительной частоты модуляции. Параметры — те же, что на рис. 5.12

ражена тем сильнее, чем меньше траектория пребывает в состоянии «псевдосинусоидальности», то есть чем скорее высвечивается или длина высвечивания становится меньше.

На рис. 5.13 показана длина высвечивания траекторий  $y_{\max}$  для разных пространственных частот модуляции  $F_r$ . При этом:  $N_f = F_r/P_{m0}$ , где  $P_{m0} = 2,1$  см<sup>-1</sup> — пространственная частота траекторий в отсутствие модуляции. Наблюдаемая сильная изрезанность зависимости  $y_{\max}$  от  $F_r$  отражает частичный пространственный синхронизм траекторий ПМСВ и поля. Величина  $y_{\max}$  минимальна, когда период ПМСВ близок к целому числу периодов модуляции, причем наиболее глубокие минимумы соответствуют их четному числу (2, 4, 6, 8). Так, при  $N_f = 2$  длина траектории ПМСВ равна 1,5 см, при  $N_f = 4 - 1,2$  см, при  $N_f = 6 - 4,0$  см, тогда как при  $N_f = 1 - 7,5$  см, при  $N_f = 3 - 6,8$  см, при  $N_f = 5 - 12,2$  см, что значительно больше этих величин при четных  $N_f$ . При целых значениях  $N_f$  траектория ПМСВ пересекает вершину «вала» (ось  $Oy$ ) всего четыре–пять раз. В промежутках между целыми значениями  $N_f$  длина траекторий ПМСВ может достигать  $\sim 20$  см. При  $N_f > 10$  вплоть до  $N_f = 15$  минимумы  $y_{\max}$  обнаружены не были.

**Фрактальный характер высвечивания.** Рассмотрим теперь, как ведут себя другие параметры ПМСВ в точке высвечивания, для чего обратимся к рис. 5.14, где показаны зависимости предельных значений этих параметров от нормированной частоты модуляции.

На рис. 5.14 показаны характеристики траекторий ПМСВ в зависимости от нормированной частоты модуляции  $N_f = F_r/P_{m0}$ , где  $F_r -$

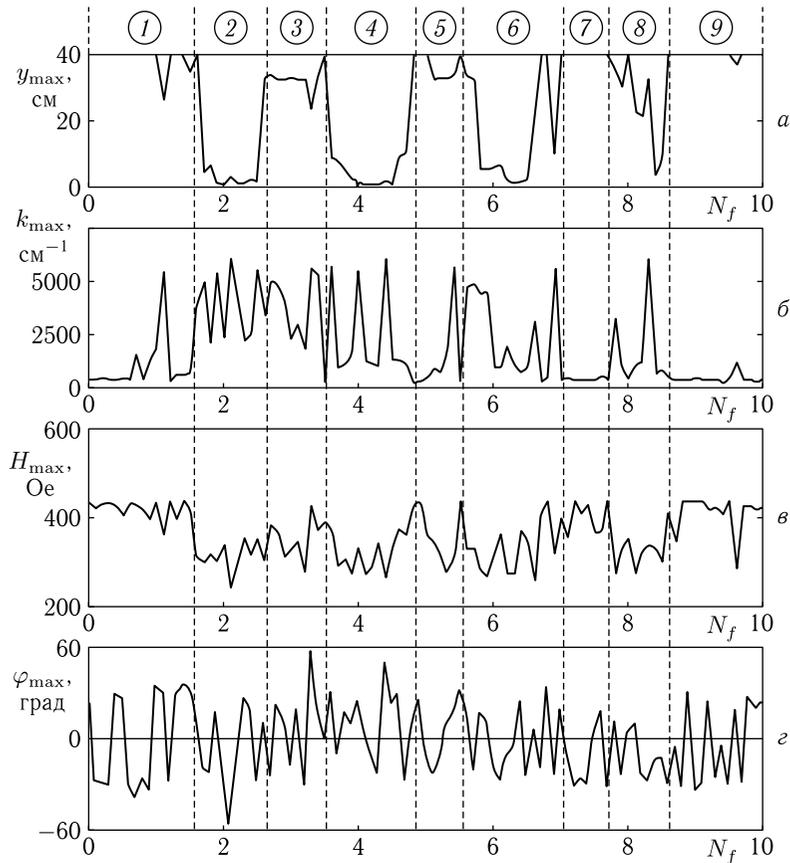


Рис. 5.14. Зависимости различных параметров траекторий от нормированной частоты модуляции. Модуляция крутизны склонов «вала». Параметры — те же, что на рис. 5.9

истинная частота модуляции, а  $P_{m0} = 2,1$  см — пространственная частота траекторий ПМСВ в отсутствие модуляции. Кривая на рис. 5.14, а соответствует максимальной (до высвечивания) длине траекторий ПМСВ  $y_{\max}$ , построенной при условии  $y \leq 40$  см. Кривая на рис. 5.14, б — достигаемому при  $y = y_{\max}$  значению волнового числа  $k_{\max}$ , кривая на рис. 5.14, в — значению поля  $H_{\max}$  и кривая на рис. 5.14, г — значению угла  $\varphi_{\max}$ .

Из рисунка видно, что все кривые сильно изрезаны в соответствии со стохастическим характером траекторий ПМСВ и их высвечивания. По характеру кривых весь интервал изменения  $N_f$  можно разбить на 9 областей, номера которых приведены сверху на рисунке. Из рис. 5.14, а видно, что длина  $y_{\max}$  испытывает близкие к пери-

одическим спады и подъемы, достигая минимумов (в областях 2, 4, 6, 8), когда период ПМСВ близок к целому четному числу периодов модуляции (2, 4, 6, 8), и максимумов (в областях 1, 3, 5, 7, 9), когда период ПМСВ близок к нечетному числу периодов модуляции (1, 3, 5, 7, 9). Эта кривая близка к представленной на рис. 5.13. Так, при  $N_f = 1$  длина траектории ПМСВ превышает 40 см, при  $N_f = 2$  составляет всего 1,5 см, при  $N_f = 3$  достигает 32 см, при  $N_f = 4$  снижается до 1,2 см, при  $N_f = 5$  возрастает до 34 см, при  $N_f = 6$  снова уменьшается до 6 см и так далее. В областях минимумов  $y_{\max}$  (2, 4, 6, 8) волновое число  $k_{\max}$  (рис. 5.14, б), как правило составляет 2000–5000  $\text{см}^{-1}$ , что особенно хорошо заметно для области 2, а в областях максимумов  $y_{\max}$  (1, 3, 5, 7, 9) значительно меньше (200–500  $\text{см}^{-1}$ ). Значения поля  $H_{\max}$  (рис. 5.14, в) в областях минимумов  $y_{\max}$  (2, 4, 6, 8) не превышает 350 Э, тогда как в областях максимумов  $y_{\max}$  (1, 3, 5, 7, 9) — достигает 400 Э и более. Значения углов  $\varphi_{\max}$  (рис. 5.14, г) заметной корреляции с частотой модуляции не проявляют.

Наблюдаемая сильная изрезанность кривых на рис. 5.14 побудила исследовать зависимость характера этой изрезанности от величины шага по частоте модуляции. Полученные результаты иллюстрируются рис. 5.15, где показаны зависимости максимальной (до высвечивания) длины траекторий ПМСВ  $y_{\max}$ , от нормированной частоты модуляции  $N_f$  при различном шаге по  $N_f$ . Рис. 5.15, а соответствует интервалу  $1,7 \leq N_f \leq 2,7$ , проходимому с шагом в 0,1. Рис. 5.15, б соответствует начальному участку того же интервала при  $1,70 \leq N_f \leq 1,80$ , проходимому с шагом в 0,01. Рис. 5.15, в соответствует еще меньшему начальному участку того же интервала при  $1,700 \leq N_f \leq 1,710$ , проходимому с шагом в 0,001.

Из сравнения рисунков видно, что при уменьшении интервала изменения  $N_f$  на два порядка характер изрезанности зависимости  $y_{\max}(N_f)$  (размах по вертикальной оси, крутизна склонов) практически не меняется, то есть эта зависимость проявляет фракталоподобные свойства (аналогичные, например, свойствам береговой линии материков [254]). Ана-

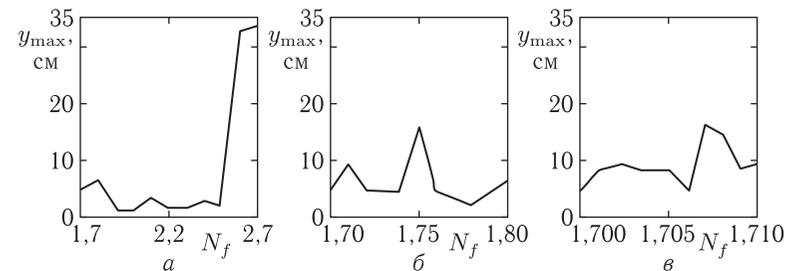


Рис. 5.15. Зависимости длины высвечивания от нормированной частоты модуляции, снятые при различной величине шага по частоте  $\Delta N_f$ : а — 0,1; б — 0,01; в — 0,001

логичное исследование зависимостей  $k_{\max}(N_f)$ ,  $H_{\max}(N_f)$  и  $\varphi_{\max}(N_f)$  также выявляет их фрактальный характер. Причиной таких свойств высвечивания траекторий ПМСВ, распространяющихся в неоднородном поле типа «вала» с периодической модуляцией, очевидно, является их стохастическая неустойчивость.

**Природа высвечивания.** Рассмотрим теперь несколько подробнее физический механизм высвечивания, для чего обратимся к рис. 5.16, где показаны зависимости различных параметров распространяющейся волны от координаты  $y$ .

Для наиболее наглядного выявления картины высвечивания здесь рассмотрен случай минимальной длины траектории по координате  $y$ , соответствующий частоте модуляции поля  $F_r$  в два раза большей пространственной частоты траекторий в отсутствие модуляции  $P_{m0}$ , то есть  $F_r = 2 \cdot P_{m0}$ , где  $P_{m0} = 2,1 \text{ см}^{-1}$ . Из рис. 5.13 можно видеть, что эта частота как раз соответствует первому минимуму зависимости  $y_{\max}$  от  $N_f$ .

На рис. 5.16 *а* и *б* показаны траектория и ее производная вплоть до момента высвечивания, обозначенного укрупненной точкой. Видно, что кроме определенной нерегулярности, в известной степени нарушающей их квазипериодичность, никаких серьезных особенностей эти зависимости не проявляют.

На рис. 5.16, *в* и *г* показаны углы, которые составляют векторы фазовой и групповой скоростей с осью  $Oy$  по мере распространения волны. Обе зависимости также имеют квазипериодический характер с постепенным нарастанием отклонения от периодичности. Зависимость  $\varphi(y)$  заканчивается при  $-9,5^\circ$ , зависимость  $\psi(y)$  — при  $80,5^\circ$ . Таким образом, здесь серьезных особенностей также не наблюдается.

Однако из рис. 5.16, *д* видно, что волновое число, по мере распространения волны, в общем, увеличивается, причем при координате  $y_{\max}$ , соответствующей высвечиванию, составляет  $3391 \text{ см}^{-1}$ , что почти на порядок превышает начальное значение при  $y = 0$  равно  $386 \text{ см}^{-1}$ .

Из рис. 5.16, *е* видно, что значение поля  $H(y, z)$ , соответствующие координате  $y = y_{\max}$ , соответствующей высвечиванию, составляет  $268,5 \text{ Э}$ .

С другой стороны, поле, соответствующее начальной точке волны  $y = 0$ , равно  $437,5 \text{ Э}$ , причем в соответствии с законом модуляции (5.13)–(5.16) это поле на всей площади ферритовой пластины может только уменьшаться («вал» по оси  $Oz$  спадает в обе стороны). Частоте  $3200 \text{ МГц}$ , на которой происходит возбуждение ПМСВ, соответствует минимальное поле  $267,9 \text{ Э}$  [143], то есть в областях пластины, где величина поля ниже этого значения, волна существовать не может. Этому полю соответствует асимптотическое стремление волнового числа к бесконечности.

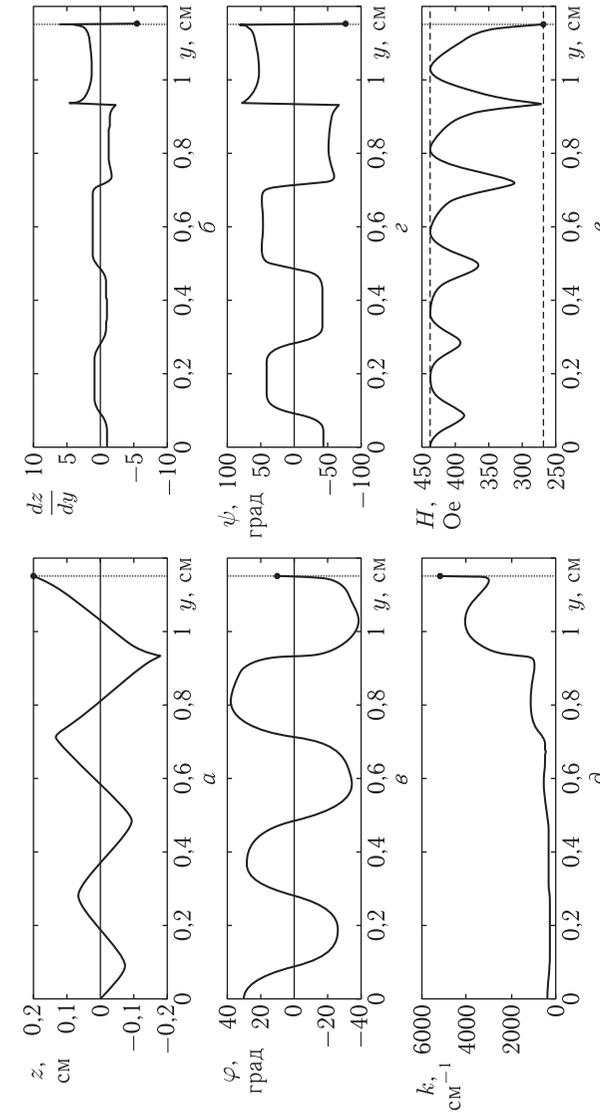


Рис. 5.16. Зависимости от координаты  $y$  различных параметров распространяющейся волны вблизи области высвечивания. Вертикальная точечная линия — координата  $y_{\max}$ , соответствующая высвечиванию. Укрупненные точки — окончания соответствующих зависимостей. *а* — поле; *б* — производная от смещения; *в* — угол фазовой скорости; *г* — угол групповой скорости; *д* — волновое число; *е* — поле

Как видим, поле 268,5 Э, имеющее место в точке  $y = y_{\max}$ , отличается от предельного значения 267,9 Э всего на 0,6 Э, то есть на  $\sim 0,2\%$ . С другой стороны, из рис. 5.16, д видно, что волновое число в этом же поле достигает значения  $3391 \text{ см}^{-1}$ , то есть проявляет тенденцию к бесконечному увеличению.

Таким образом, можно полагать, что высвечивание траектории ПМСВ происходит тогда, когда она попадает в такое место ферритовой пластины, где поле имеет значение, соответствующее границе спектра ПМСВ, причем на этой границе волновое число стремится к бесконечности.

**Замечание.** В работах [117–124], хотя и без достаточного обоснования, но утверждается, что высвечивание обусловлено достижением угла  $\varphi$  значения отсечки, что в свете сказанного нельзя считать полностью верным. Действительно, в рассмотренных здесь условиях угол отсечки на частоте 3200 МГц в поле 437,5 Э составляет  $37,6^\circ$ , а в поле 268,5 Э —  $2,17^\circ$ . Между этими полями угол отсечки принимает промежуточные значения. Как можно видеть из рис. 5.16, в, значение угла  $\varphi$  в точке высвечивания по абсолютной величине составляет  $9,5^\circ$ , что не соответствует ни одному из приведенных крайних значений. Это происходит потому, что действительной причиной высвечивания является не достижение угла отсечки, а выход траектории за допустимую нижнюю полевую границу существования ПМСВ, что сопровождается бесконечным увеличением волнового числа.

Заметим однако, что близость угла  $\varphi$  к углу отсечки сопровождается бесконечным ростом волнового числа, то есть хотя первичной наблюдаемой причиной высвечивания остается увеличение волнового числа, но и приближение к углу отсечки при этом вполне может иметь место, как это и было отмечено в работе [121].

### 5.2.5. Характер траекторий при различных видах модуляции

Описанная в предыдущих разделах стохастическая неустойчивость траекторий ПМСВ наблюдается при модуляции не только крутизны склонов, но также высоты и сдвига вершины «вала». Следуя [119, 120], рассмотрим этот вопрос более подробно.

**Критерий длины высвечивания.** Возьмем все параметры теми же, что при построении рис. 5.9, б, кроме начального угла  $\varphi$  между волновым вектором и осью  $Oy$ , который для удобства наблюдения высвечивания положим близким к углу отсечки:  $\varphi_0 = 37^\circ$ ,

Сравним теперь эффективность различных видов модуляции, пользуясь зависимостями длины высвечивания  $y_{\max}$  от коэффициента глубины модуляции  $m$ , показанными на рис. 5.17.

Из рис. 5.17 видно, что общим свойством всех кривых является резкий (практически скачкообразный) спад длины высвечивания при некоторых значениях глубины модуляции. Для зависимостей  $T$  и  $F$  этот спад наблюдается при  $m \sim 0,05$  и  $0,02$  соответственно, после

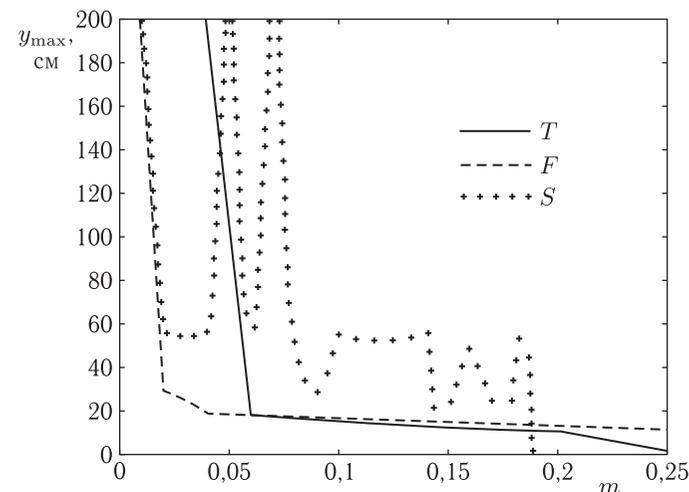


Рис. 5.17. Зависимость длины высвечивания от глубины модуляции при различных ее видах. Сплошная кривая соответствует модуляции высоты вершины «вала»  $T$ , пунктирная — крутизны склонов  $F$ , и точечная — сдвига вершины «вала»  $S$ . Параметры — те же, что на рис. 5.9, кроме  $\varphi_0 = 37^\circ$

чего обе зависимости плавно стремятся к нулю. Зависимость  $S$  не является монотонной и при общей тенденции снижения претерпевает несколько резких спадов (при  $m \sim 0,02, 0,05, 0,08, 0,14, 0,16$ ) и подъемов (при  $m \sim 0,04, 0,07, 0,10, 0,15$  и  $0,17$ ). На этой зависимости выделяются два значения длины высвечивания — 55 см и 22 см, соответствующие нескольким плоским участкам, между которыми длина высвечивания меняется резко. Такой ступенчатый со скачкообразными переходами вид приведенных зависимостей наводит на мысль о пороговом характере явления, что однако требует дополнительной проверки (выходит за рамки данной работы).

Далее из рис. 5.17 можно видеть, что ниже всех проходит кривая, соответствующая модуляции крутизны склонов «вала» ( $F$ ), то есть в этом случае высвечивание наступает при наименьшем значении глубины модуляции. Кривая, соответствующая модуляции высоты вершины ( $T$ ), занимает среднее положение, а кривая, соответствующая сдвигу вершины ( $S$ ), проходит наиболее высоко, что соответствует наибольшему требуемому для высвечивания значению глубины модуляции.

Таким образом, сравнение эффективности различных видов модуляции по критерию минимальности длины высвечивания показывает, что наиболее эффективной является модуляция крутизны склонов «вала», несколько менее эффективной — вершины «вала» и наименее эффективной — сдвига вершины «вала».

**Критерий развития в пространстве.** Рассмотрим теперь особенности стохастизации траекторий ПМСВ при различных видах

модуляции более подробно на основе их развития в пространстве. Оставим все параметры теми же, что при построении рис. 5.17. Чтобы наблюдать траектории на большем отрезке времени, отойдем от угла отсечки и возьмем  $\varphi_0 = 30^\circ$ . Будем рассматривать следующие виды модуляции параметров «вала»: высоты вершины  $T$ ; крутизны склонов  $F$ ; сдвига вершины  $S$ .

Результаты рассмотрения иллюстрируется рис. 5.18, где представлены:  $a$  — траектории ПМСВ  $z(y)$ ;  $b$  — производные от траекторий по координате  $y$  —  $dz/dy$ ;  $в$  — фазовые портреты как зависимости  $dz/dy$  от  $z$ . Цифры соответствуют различным видам модуляции поля: 1 — модуляция отсутствует; 2 — модулируется высота вершины «вала» (параметр  $T$ ); 3 — модулируется крутизна склонов «вала» (параметр  $F$ ); 4 — модулируется сдвиг вершины «вала» (параметр  $S$ ).

При построении приведенных на рис. 5.18 зависимостей, с целью возможности сравнения эффективности различных видов модуляции, величины коэффициентов  $T$ ,  $F$  и  $S$  были подобраны таким образом, чтобы максимальные отклонения значения поля при координате  $z = \pm 1$  см для всех видов модуляции были бы одинаковыми. При этом в отсутствие модуляции поле вершины «вала» составляло 437,5 Э, а поле при  $z = \pm 1$  см равнялось 367,5 Э. В результате каждого из видов модуляции поле при  $z = \pm 1$  см уменьшалось от 402,5 Э до 332,5 Э, то есть на 35,0 Э. Значения параметров модуляции, требуемые для таких изменений поля, следующие:  $T = 0,08$ ,  $F = 0,5$  и  $S = 0,0259$  см.

Из рис. 5.18 видно следующее:

1) В отсутствие модуляции как траектория (1а), так и ее производная (1б) — почти правильные синусоиды с постоянной амплитудой, фазовый портрет (1в) — точно повторяющийся цикл в виде прямоугольника с закругленными углами. Некоторая видимая ширина контуров цикла (менее 5% от его диаметра) обусловлена погрешностью машинного расчета и с уменьшением шага интегрирования уменьшается.

2) При наличии модуляции любого вида наблюдается стохастическая неустойчивость траекторий (2а–4а) и их производных (2б–4б), проявляющаяся в случайном изменении амплитуды, частоты и фазы кривых. При этом фазовый портрет сильно размывается — фазовая траектория в течение каждого цикла описывает новую кривую (2в–4в).

3) Величина скачков амплитуды при модуляции высоты вершины «вала» достигает 20–30%, при модуляции крутизны склонов «вала» — 200–300%, при модуляции сдвига вершины «вала» — 50–60%. Размазанность фазового портрета составляет ту же величину. При этом скачки амплитуды при модуляции высоты и сдвига вершины «вала», как правило, происходят в сторону ее уменьшения, в результате чего фазовый портрет «замазывается» внутрь относительно устойчивого цикла. При модуляции крутизны склонов «вала» скачки амплитуды происходят в сторону ее увеличения, в результате чего фазовый портрет «замазывается» наружу относительно устойчивого цикла. При этом он, во-первых, расширяется в 2–3 раза по координате  $z$  и, во-вторых,

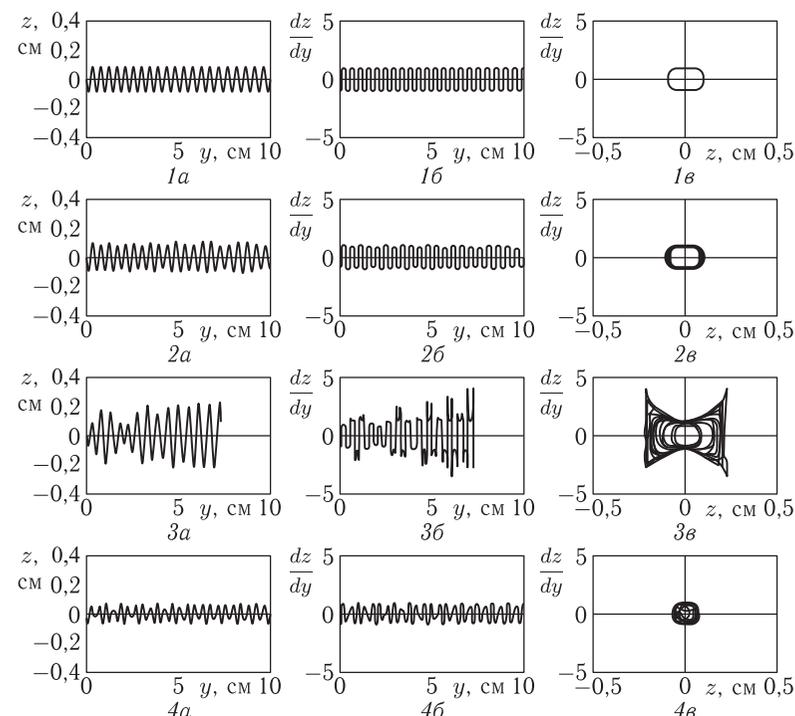


Рис. 5.18. Развитие во времени траектории (а) и ее производной (б), а также фазовые портреты (в) при различных видах модуляции. Основные параметры:  $T_0 = 0,25$ ;  $F_0 = 4 \text{ см}^{-2}$ ;  $P_r = 3,57 \text{ см}^{-1}$ ; параметры модуляции: высоты вершины:  $T = 0,08$ ; крутизны склонов:  $F = 0,5$ ; сдвига вершины:  $S = 0,0259$  см

на его углах появляются сильно выраженные острия, направленные вдоль производной  $dz/dy$ .

4) При модуляции крутизны склонов «вала» (3а–3в) высвечивание траектории происходит при  $y = 7,29$  см. При модуляции высоты (2а–2в) и сдвига вершины «вала» (4а–4в) высвечивание вплоть до  $y = 10$  см отсутствует и происходит не ранее, чем при  $y \sim 40$ –50 см.

*Фазовые портреты в крупном масштабе.* На рис. 5.19 показаны отдельно фазовые портреты при разных видах модуляции в крупном масштабе, позволяющем более подробно разглядеть их детали.

Рис. 5.19, а соответствует отсутствию модуляции и приведен здесь для сравнения. Видно, что в этом случае фазовый портрет представляет собой плавное узкое кольцо, что говорит о полной повторяемости колебаний от периода к периоду.

Рис. 5.19, б соответствует модуляции высоты вершины «вала». В этом случае неустойчивость траекторий уже начинает проявляться, однако еще в сравнительно небольшой степени: фазовый портрет опять

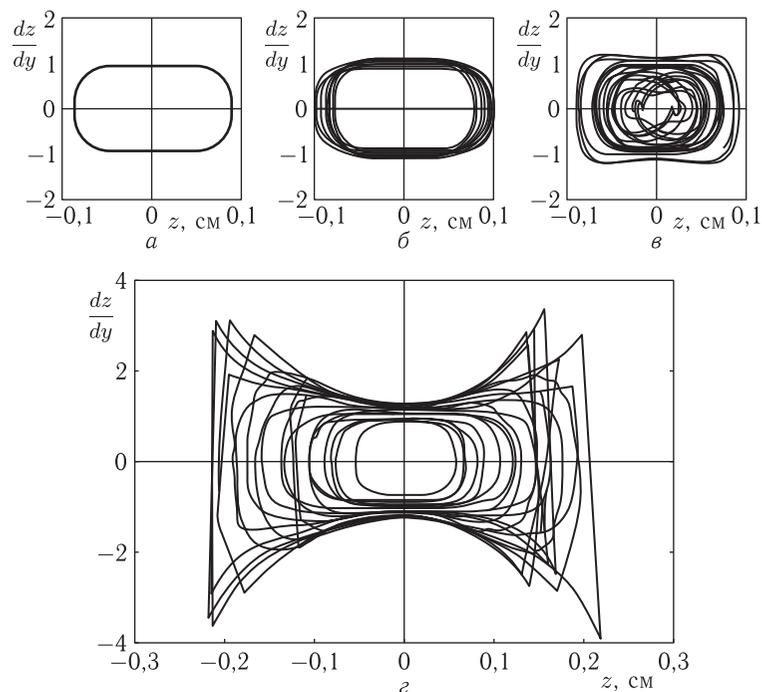


Рис. 5.19. Фазовые портреты при разных видах модуляции: *a* — модуляция отсутствует; *b* — модулируется высота вершины «вала» (параметр  $T$ ); *c* — модулируется сдвиг вершины «вала» (параметр  $S$ ); *d* — модулируется крутизна склонов «вала» (параметр  $F$ ). Параметры — те же, что на рис. 5.18

представляет собой почти правильное кольцо, однако теперь его образующие относительно диаметра расширены на  $\sim 25\%$ . Внутри кольца наблюдается большая свободная от траекторий «сердцевина», размер которой составляет около 70–80% от внешнего диаметра кольца.

Рис. 5.19, *c* соответствует модуляции сдвига вершины «вала». Четко проявляется перемещение значительного числа траекторий с периферии кольца к его внутренней части, однако наружная огибающая остается достаточно плавной. Свободная от траекторий сердцевина значительно сужается и в поперечнике составляет не более 10% от внешнего диаметра.

Рис. 5.19, *d* соответствует модуляции крутизны склонов «вала». В этом случае хаотизация траекторий проявляется наиболее сильно. Наружная огибающая портрета приобретает сильно изрезанный характер с ярко выраженными острыми выбросами на углах портрета, приходящихся на его диагонали. Общие размеры портрета по сравнению с предыдущими случаями увеличиваются более чем в два раза, однако в середине портрета, соответствующей нулевому значению координа-

ты  $z$ , появляется перетяжка, где размер по производной увеличивается не более чем на 20%. Свободная от траекторий сердцевина значительно увеличивается, ее размер по координате достигает 30%, а по производной доходит до 60% от внешнего диаметра.

Таким образом, как следует из рис. 5.18 и рис. 5.19, анализ развития траекторий в пространстве показывает, что их стохастизация наблюдается при модуляции любого вида, однако сильнее всего она проявляется при модуляции крутизны склонов «вала», заметно слабее при модуляции высоты вершины «вала» и еще слабее при модуляции сдвига его вершины. Такое поведение полностью совпадает с характером стохастизации, полученным ранее на основе критерия минимальности высвечивания (рис. 5.17).

### 5.2.6. Изменение частоты возбуждения ПМСВ

Проведенное выше рассмотрение касается возбуждения ПМСВ на единственной частоте 3200 МГц. Однако, как можно видеть из анализа дисперсионного соотношения (2.69) (разд. 2.2.2), как фазовая, так и групповая скорости ПМСВ при изменении частоты сильно меняются, что сказывается на форме траекторий.

Рассмотрим теперь, как меняется характер хаотизации траекторий ПМСВ при изменении частоты возбуждения, для чего обратимся к рис. 5.20, где показаны траектории ПМСВ (*a*), их производные (*b*), зависимости волнового числа от координаты (*в*) и фазовые портреты (*г*) при различных значениях частоты ПМСВ. Вертикальными точечными линиями показаны значения координаты  $y_{\max}$ , при которой происходит высвечивание траекторий. Частоте 3030 МГц (1) соответствует  $y_{\max} = 40,52$  см (точка высвечивания находится далеко за правым краем рисунка), частоте 3200 МГц (2) —  $y_{\max} = 1,15$  см, частоте 3370 МГц (3) —  $y_{\max} = 0,97$  см. При этом верхняя граница спектра ПМСВ здесь равна 3374 МГц.

Из рисунка видно, что высвечивание происходит при тем меньшем значении  $y_{\max}$ , чем ближе частота ПМСВ к своему верхнему пределу.

Все траектории (рис. 5.20, *a*) имеют вид, близкий к пилообразному с симметричными зубцами, однако на низшей из выбранных частот (*a1*) вершины зубцов довольно закругленные, тогда как на средней (*a2*) и тем более высшей (*a3*) частоте вершины становятся тем острее, чем выше частота.

Это свойство особенно сильно проявляется на зависимостях для производных (рис. 5.20, *b*), так на низшей частоте (1) кривые в местах закруглений ведут себя довольно плавно, на средней (2) — уже на третьем периоде проявляются острые выбросы, на высшей частоте (3) резкие выбросы происходят уже с самого начала траектории.

Волновое число (рис. 5.20, *в*) во всех случаях по мере увеличения координаты  $y$  имеет тенденцию к повышению. С повышением частоты как само волновое число, так и его рост по координате увеличиваются. Так на низшей частоте (*в1*) в пределах рисунка волновое число

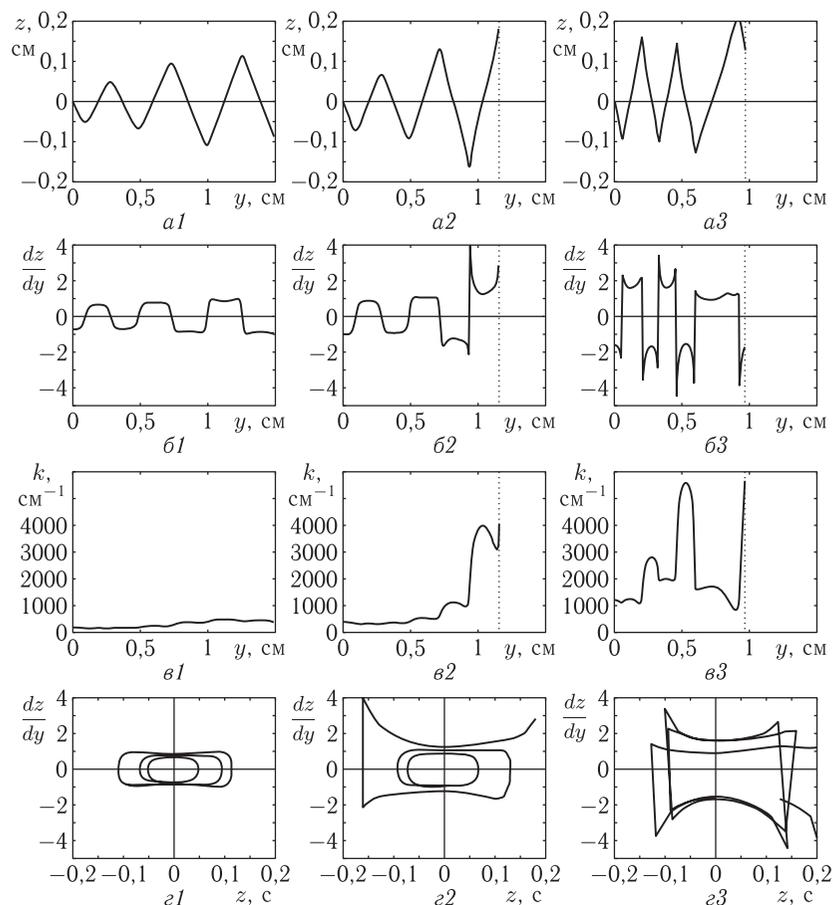


Рис. 5.20. Траектории ПМСВ (а), их производные (б), зависимости волнового числа от координаты (в) и фазовые портреты (г) при различных значениях частоты: 1 — 3030 МГц; 2 — 3200 МГц; 3 — 3370 МГц. Параметры — те же, что на рис. 5.16

меняется от  $177 \text{ см}^{-1}$  до  $376 \text{ см}^{-1}$ . На средней частоте (в2) волновое число меняется от  $386 \text{ см}^{-1}$  до  $3800 \text{ см}^{-1}$ , на верхней (в3) — возрастает с  $1195 \text{ см}^{-1}$  до  $5653 \text{ см}^{-1}$ .

Такой рост волнового числа соответствует приближению угла  $\varphi$  волнового вектора ПМСВ к углу отсечки, при котором волновое число асимптотически стремится к бесконечности.

Фазовый портрет (рис. 5.20, г), имея на низшей частоте (г1) вид довольно округлого кольца, на средней (г2) уже на одной стороне приобретает два острых угла, тогда как на высшей (г3) резко выраженные острые углы появляются на обеих сторонах. Такой вид фазового

портрета с ростом острых углов по мере увеличения частоты отражает увеличение резких выбросов на производных от траекторий (б), отмеченное выше.

### 5.2.7. Некоторые дополнительные особенности неустойчивости траекторий

Отметим еще некоторые достаточно общие особенности неустойчивости траекторий ПМСВ.

1) Неустойчивость проявляется тем сильнее, чем больше глубина модуляции. Так при начальном значении угла  $\varphi_0 = 30^\circ$  и глубине модуляции  $m = 0,2$  на частоте 3200 МГц длина высвечивания равна  $y_{\max} = 22,3 \text{ см}$ , а при  $m = 0,4$  уменьшается до 12,3 см.

2) Неустойчивость проявляется тем сильнее, чем ближе частота ПМСВ к своему верхнему пределу. Так при начальном угле  $\varphi_0 = 30^\circ$  и  $m = 0,5$  такой предел равен 3374 МГц. При этом на частоте 3030 МГц величина  $y_{\max}$  составляет 40,52 см, при частоте 3200 МГц — 1,15 см, а при частоте 3370 МГц — 0,97 см. Однако из такой зависимости иногда наблюдаются исключения. Так при  $m = 0,4$  и частоте 3200 МГц величина  $y_{\max}$  составляет 12,3 см, а при частоте 3000 МГц уменьшается до 2,64 см. Тем не менее, в общем, отмеченное уменьшение  $y_{\max}$  при увеличении частоты ПМСВ, как правило, сохраняется.

3) Неустойчивость усиливается при приближении начального значения  $\varphi_0$  к углу отсечки. Так, на частоте 3200 МГц угол отсечки близок к  $38^\circ$ . При этом, если  $m = 0,4$ , то при начальном значении угла  $\varphi_0 = 20^\circ$  величина  $y_{\max}$  составляет 22,4 см, при  $\varphi_0 = 30^\circ$  — 12,3 см, а при  $\varphi_0 = 37^\circ$  — всего 6,79 см.

Приведенные особенности охарактеризованы здесь лишь схематично, более подробное исследование показывает, что отмеченные зависимости от глубины модуляции, частоты и угла отсечки, хотя и выполняются в общем, но, как правило, не являются монотонными, а заметно изрезаны, причем, возможно, имеют фрактальный характер. Более точное выяснение этого вопроса требует дополнительного исследования и выходит за рамки настоящей работы.

*К вопросу о механизме стохастизации траекторий.* Проведенное рассмотрение, в основном, представляет собой описание явлений, сопровождающих распространение ПМСВ в условиях поля типа «вала» с пространственной модуляцией. При этом показано, что траектории ПМСВ в процессе своего распространения имеют стохастический характер. Теперь рассмотрим возможный механизм такого их поведения.

Вообще говоря, описанная картина стохастизации траекторий ПМСВ в определенной степени напоминает движение частицы в «перемешивающем бильярде», частным случаем которого является двумерный волноводный канал типа «стадиона» [105]. Отличием от классического движения механической частицы здесь является закон дисперсии ПМСВ (5.12), в соответствии с которым направления векторов фазовой

и групповой скорости волны могут существенно различаться (рис. 5.8, врезка), что приводит к определенной специфике законов отражения и преломления для ПМСВ [255–257].

В задаче о бильярдах причиной стохастизации является тот факт, что в процессе отражения частицы (или луча) от выпуклой поверхности при малом изменении угла падения угол отражения меняется на значительно большую величину. Такие многократные отражения приводят в конце концов к потере памяти о начальном условии, что и проявляется как стохастизация траектории.

Таким образом, в задаче о бильярдах ключевым моментом является большое изменение выходного параметра при малом изменении входного.

В рассматриваемой здесь задаче о распространении ПМСВ такое обстоятельство также имеет место.

Так вблизи верхней границы спектра дисперсионная кривая для ПМСВ асимптотически приближается к этому верхнему пределу, в результате чего малые изменения частоты или поля могут приводить к весьма большим изменениям волнового числа.

Сказанное иллюстрируется рис. 5.21, где показана схема формирования значения волнового числа при различных значениях поля.

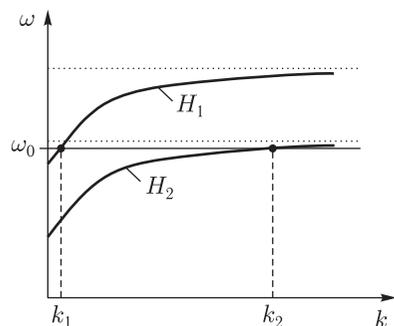


Рис. 5.21. Схема формирования значения волнового числа при различных величинах поля

Утолщенные сплошные линии — дисперсионные кривые ПМСВ при значениях поля  $H_1$  и  $H_2$ , причем  $H_1 > H_2$  [143]. Точечными горизонтальными линиями показаны верхние граничные частоты спектра ПМСВ, соответствующие упомянутым полям. Сплошной горизонтальной линией отмечено заданное значение частоты возбуждения ПМСВ. Вертикальными пунктирными линиями отмечены значения волновых чисел, соответствующие этой частоте при полях  $H_1$  и  $H_2$ . Видно, что меньшему значению поля  $H_2$  соответствует большее значение волнового числа  $k_2$ . Таким образом, поскольку поле меняется только вниз от значения  $437,5 \text{ Э}$ , соответствующего отсутствию модуляции, то и волновое число меняется только вверх от значения  $386 \text{ см}^{-1}$ , что и наблюдается на рис. 5.16, д.

Далее из рисунка видно, что благодаря весьма пологому ходу дисперсионной кривой при достаточно больших волновых числах, малое изменение поля или частоты в этой области может приводить к весьма значительному изменению волнового числа, что и может явиться причиной «забывания» системой начальных условий и как следствие — рассмотренной хаотизации траекторий ПМСВ.

*Замечание о машинном расчете.* С практической стороны следует отметить одно важное обстоятельство, касающееся машинного расчета траекторий ПМСВ. Так вблизи точки высвечивания зависимость волнового числа от поля подходит к своему крайнему значению весьма полого.

Такое обстоятельство иллюстрируется рис. 5.22, где показана схема формирования интервалов волновых чисел при различных интервалах поля. Утолщенная сплошная линия — зависимость волнового числа от поля, соответствующая закону дисперсии ПМСВ [143]. Вертикальными точечными линиями показаны допустимые границы поля при заданной частоте. Пунктирными линиями показаны границы интервалов полей на одном шаге и соответствующие им границы интервалов волновых чисел. Интервалы полей различаются тем, что один из них,  $\delta H_1$  расположен вблизи нижней полевой границы зависимости волнового числа от поля, а другой,  $\delta H_2$  — вблизи верхней.

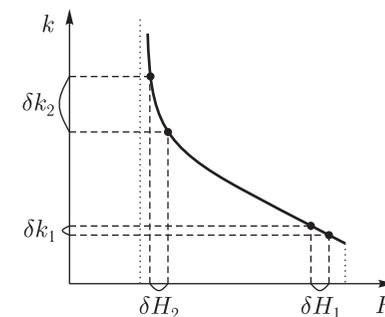


Рис. 5.22. Схема формирования интервалов волновых чисел при различных интервалах поля

Из рисунка видно, что при равных по длине интервалах поля,  $\delta H_1 = \delta H_2$ , интервалы значений волновых чисел, соответствующих тем же интервалам поля, значительно различаются, то есть  $\delta k_2 \gg \delta k_1$ . Таким образом, если шаг по  $y$  при машинном интегрировании системы (2.142)–(2.144) сохраняется неизменным, что в первом приближении можно считать соответствующим неизменности интервала поля  $\delta H$  при каждом шаге, то интервал изменения волнового числа при уменьшении поля на каждом шаге увеличивается.

Поэтому при машинном интегрировании системы (2.142)–(2.144) изменение волнового числа на каждом шаге составляет тем большую величину, чем ближе поле приближается к своему нижнему пределу. Такой рост изменения волнового числа соответствует снижению точности машинного расчета, то есть эта точность вблизи нижней границы поля падает.

Однако поскольку, как установлено выше, высвечивание траектории ПМСВ соответствует приближению поля именно к такому пределу, то точность машинного расчета в области высвечивания также падает. Уменьшение шага расчета, на первых порах приводящее к улучшению результатов, также не дает желаемого эффекта, так как приводит к увеличению общего числа шагов, что порождает накопление ошибки расчета и увеличение его времени.

В настоящей работе при принятых выше параметрах задачи оптимальным значением шага было принято  $\Delta y = 10^{-4} \text{ см}$ , что обеспе-

чивало для наиболее длинных траекторий длиной до 40–50 см время счета не более 1–2 минут. При увеличении длины шага на порядок нарушалась повторяемость траектории уже начиная с 20–30 см. При уменьшении длины шага также на порядок время расчета увеличивалось до 10–20 минут, а накопление ошибки приводило к ухудшению формы траекторий, особенно на расстоянии порядка 1–5 см от их окончания, искажая картину высвечивания. При этом в обоих случаях факт высвечивания сохранялся, однако координата высвечивания  $y_{\max}$  смещалась, как правило, в меньшую сторону на величину до 20 %.

### 5.3. Многоканальная стохастическая неустойчивость траекторий ПМСВ в дважды периодическом поле

В предыдущих разделах рассмотрена стохастическая неустойчивость траекторий ПМСВ в поле типа «вала» с пространственной модуляцией. При этом «вал» был представлен в единственном числе. Рассмотрим теперь поле, представляющее собой совокупность параллельных «валов», так что ПМСВ в процессе своего распространения может переходить с одного «вала» на другой. Как и ранее, будем опираться на материалы работ, перечисленных в разд. 5.2, при этом главное внимание обратим на работы [123, 125, 251], посвященные именно случаю многоканального распространения.

#### 5.3.1. Геометрическая структура дважды периодического поля

Обратимся сначала к рассмотрению геометрической структуры магнитного поля, способного обеспечить многоканальное распространение ПМСВ. Покажем далее, что такое поле можно осуществить с помощью периодического изменения его напряженности по двум координатам.

*Геометрия магнитной системы.* Рассмотрим магнитную систему, представляющую собой набор одиночных систем, подобных показанной на рис. 5.8, расположенных на равных расстояниях друг от друга в одной плоскости, параллельной  $Oyz$ , таким образом, что продольные оси всех систем параллельны. Схема такой наборной системы, состоящей из двух одиночных систем, а также формирование полей, ею создаваемых, иллюстрируются рис. 5.23.

На рис. 5.23, *а* показана в проекции на плоскость  $Oyz$  схема расположения составляющих систему магнитов чередующихся длин. На рис. 5.23, *б* показана схема формирования поля в плоскости пленки одной парой магнитов. На рис. 5.23, *в* показана получающаяся конфигурация поля  $H_z$  в зависимости от координаты  $z$ . Сплошной линией показано поле, создаваемое магнитами большей длины, пунктирной — поле, создаваемое магнитами меньшей длины.

Можно видеть, что здесь сформированы два поля типа «вала», оси которых параллельны друг другу и координатной оси  $Oy$ , а между ними находится «долина», ось которой также параллельна оси  $Oy$ .

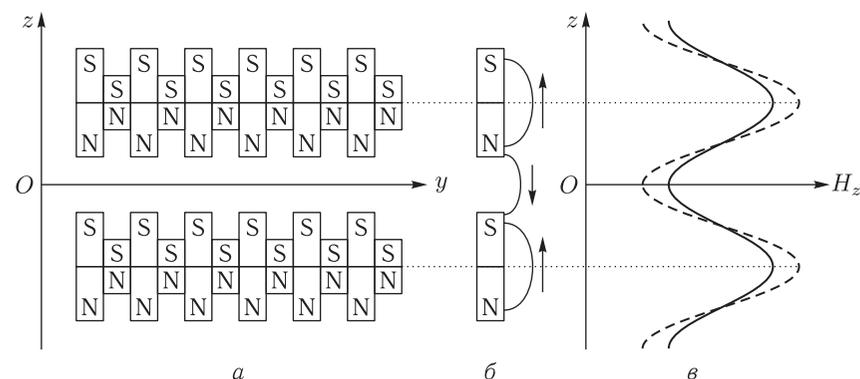


Рис. 5.23. Схема магнитной системы для многоканального распространения ПМСВ: *а* — расположение составляющих систему магнитов; *б* — схема формирования поля одной парой магнитов; *в* — зависимость поля  $H_z$  от координаты  $z$

Каждое из таких полей образует свой собственный канал, так что в более общем случае в плоскости пленки могут быть образованы несколько (произвольное число) волноведущих каналов, параллельных оси  $Oy$ , разделенных равными промежутками.

*Геометрическая структура дважды периодического поля.* Рассмотрим математическую реализацию формирования поля многоканальной системы.

Напомним кратко схему геометрии одного канала. Будем полагать, что поле направлено вдоль оси  $Oz$ , то есть его  $z$ -компонента значительно преобладает над другими компонентами. Эта компонента в конфигурации поля типа «вала» имеет вид (5.13):

$$H = 4\pi M_0 [T - F(z - S)^2], \quad (5.18)$$

где:  $T$ ,  $F$ ,  $S$  — параметры «вала», из которых первый характеризует его высоту, второй — крутизну склонов и третий — сдвиг вершины вдоль оси  $Oz$ , причем предполагается, что  $F(z - S)^2 < T$ . Отсутствие модуляции поля соответствует постоянству всех этих параметров. При этом траектории ПМСВ имеют чисто периодический «псевдосинусоидальный» вид [1, 114–116].

Пусть модуляция поля осуществляется путем изменения одного из упомянутых параметров по синусоидальному закону следующего вида:

$$R = R_0 + R_m = R_0 + R_{m0} \sin(2\pi F_y y), \quad (5.19)$$

где  $R = T, F, S$ . При этом:  $R_0$  — постоянная и  $R_m$  — переменная часть параметра,  $R_{m0}$  — амплитуда и  $F_y$  — частота пространственной модуляции поля.

Для характеристики такого поля введем параметр глубины модуляции:

$$m = R_{m0}/R_0. \quad (5.20)$$

Глубина модуляции может меняться от 0 до 1. При  $m = 0$  модуляция отсутствует, при  $m = 1$  величина  $R$  при изменении  $y$  меняется от нуля до  $2R_0$ .

Для многоканальной системы надо квадратичный член в формуле (5.18) заменить на синусоидальный, в результате чего получаем:

$$H_z = 4\pi M_0 \cdot \{T - P_0 \cdot [1 - \cos(2\pi F_z z)]\}, \quad (5.21)$$

где  $P_0$  и  $F_z$  — амплитуда и частота пространственной модуляции.

При этом каждый максимум выражения в фигурных скобках в квадратичном приближении дает поле, аналогичное описываемому формулой (5.18), то есть каждый такой максимум обеспечивает собственный канал.

Для учета многоканальности добавим периодичность по другой координате —  $y$ . Подобно [125], введем функцию:

$$Q = Q_0 + Q_m = Q_0 + Q_{m0} \sin(2\pi F_y y), \quad (5.22)$$

где  $Q_0$  — постоянная и  $Q_m$  — переменная части параметра,  $Q_{m0}$  и  $F_y$  — амплитуда и частота пространственной модуляции поля по координате  $y$ .

Таким образом, поле с двойной пространственной модуляцией принимает вид [125]:

$$H_z = 4\pi M_0 \cdot \{T - P_0 \cdot [1 - \cos(2\pi F_z z)]\} \cdot [Q_0 + Q_{m0} \sin(2\pi F_y y)], \quad (5.23)$$

На рис. 5.24 приведено поле, построенное по формуле

$$H_z = 4\pi M_0 \cdot \{T_0 - P_0 \cdot [1 - \cos(2\pi F_z z)]\} \cdot [1 + P_m \sin(2\pi F_y y)], \quad (5.24)$$

являющейся, как легко видеть, частным случаем формулы (5.23), соответствующим по координате  $z$  модуляции крутизны склонов «вала», а по координате  $y$  — модуляции его вершины.

На рис. 5.24 показаны зависимости поля  $H_z$  от координаты  $z$  при значениях координаты  $y$ , соответствующих экстремумам функции (5.24). Утолщенная кривая (по середине рисунка) соответствует отсутствию модуляции по  $y$ , то есть  $P_m = 0$ . При наличии модуляции поле описывается этой кривой при

$$\sin(2\pi F_y y) = 0, \quad (5.25)$$

откуда:

$$y = n/(2F_y), \quad (5.26)$$

где  $n$  — целое.

Две другие кривые соответствуют  $P_m = 1$ , верхняя при

$$y = (\pi/2 + 2n)/(2F_y), \quad (5.27)$$

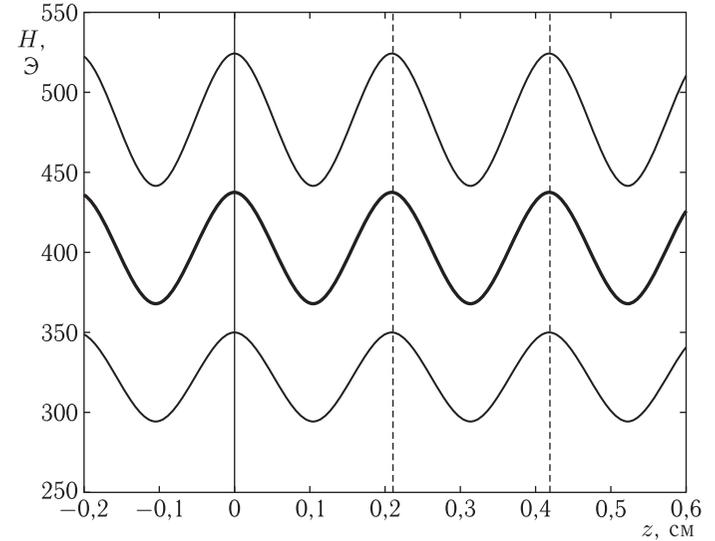


Рис. 5.24. Зависимость поля  $H_z$  от координаты  $z$  при значениях координаты  $y$ , соответствующих экстремумам функции (5.24). Параметры:  $4\pi M_0 = 1750$  Гс;  $T_0 = 0,25$ ;  $P_0 = 0,02$ ;  $F = 4,8$  см<sup>-1</sup>;  $P_m = 0,20$ ;  $F_y = 2,0$  см<sup>-1</sup>

нижняя — при

$$y = (-\pi/2 + 2n)/(2F_y). \quad (5.28)$$

Видно, что при всех значениях  $y$  оси «валов» по оси  $Oy$  приходятся на

$$z = \pm 0,21 \cdot m, \quad (5.29)$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$  — целое число.

*Пространственная схема поля многоканальной структуры.* Схема получающегося поля  $H_z$  в трехмерной проекции относительно плоскости  $Oyz$  показана на рис. 5.25.

Можно видеть, что поле имеет конфигурацию параллельно расположенных «валов», образующие вершин которых вдоль оси  $Oy$  периодически меняются по синусоидальному закону. Один из таких валов обозначен буквами АВС. Рядом расположен другой «вал», удаленная часть которого обозначена буквами ДЕ. За этими валами и впереди них имеются другие валы, удаленные друг от друга по оси  $z$  в соответствии с периодичностью косинуса в формуле (5.24).

Поверхностная магнитостатическая волна, возбуждаемая вблизи точки А, распространяется по псевдосинусоидальной траектории вдоль оси «вала» АВС. Как показано в разд. 5.2, благодаря модуляции вершины «вала» траектория частично хаотизируется, так что в отдельные моменты времени может уходить от оси «вала» на расстояния, превышающие половину длины между соседними «валами», в результате

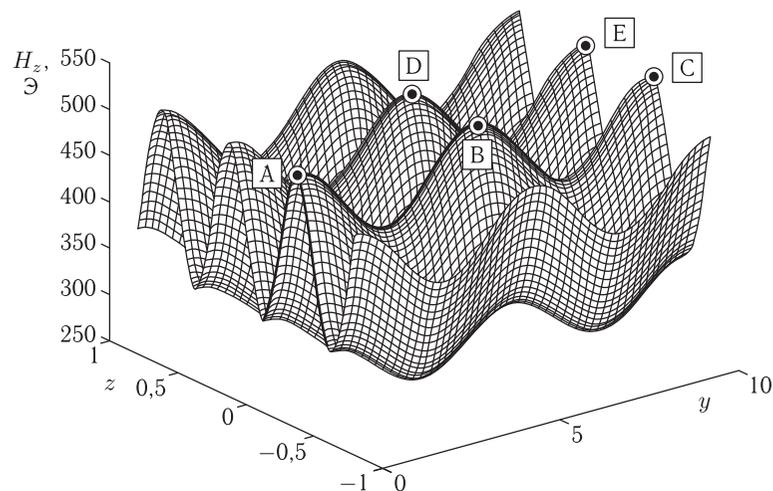


Рис. 5.25. Схема поля, создаваемого многоканальной магнитной системой. Параметры — те же, что на рис. 5.24, масштаб по горизонтальным осям — условный (для наглядности рисунка)

чего она может «перескочить» на соседний «вал», например, обозначенный буквами DE. При дальнейшем распространении траектория может совершать такие прыжки с «вала» на «вал» несколько раз, так что к обычной хаотизации вдоль одного «вала» со скачками в пределах его ширины прибавляется дополнительная хаотизация, скачки которой могут превышать ширину отдельного «вала» в несколько раз.

При рассматриваемой далее частоте 3200 МГц граничные поля области существования ПМСВ равны 125,00 Э и 564,36 Э. Из рис. 5.24 видно, что все три зависимости поля от координаты  $z$  при любых значениях  $y$  лежат внутри этого интервала полей, то есть ПМСВ в пределах углов отсечки могут распространяться по всей площади пленки.

**Методика расчета траекторий ПМСВ в многоканальной структуре.** При распространении ПМСВ в неоднородно намагниченной пластине величина и направление ее волнового вектора  $\mathbf{k}$  изменяются. Для локальной характеристики свойств волны в заданной точке пространства  $(y, z)$ , как и ранее, удобно пользоваться полярной системой координат, где декартовы компоненты волнового вектора ПМСВ  $k_y$  и  $k_z$  определяются полярными координатами  $k$  и  $\varphi$  в соответствии с формулами (5.10)–(5.11).

Будем полагать, что в рассматриваемой структуре ПМСВ подчиняются обычному дисперсионному соотношению Дэймона–Эшбаха (2.69), а входящие в него величины определяются формулами (2.70)–(2.71). Использование метода Гамильтона–Аулда [1] в сочетании с решением получаемых уравнений методом Рунге–Кутты [191]

позволяет определить траектории ПМСВ в поле, имеющем приведенную на рис. 5.25 конфигурацию. Результаты такого рассмотрения описаны далее.

### 5.3.2. Распространение ПМСВ в многоканальной структуре

Рассмотрим теперь распространение ПМСВ в пластине, подмагниченной описанным полем, для чего обратимся к рис. 5.26, где показаны траектории ПМСВ  $z(y)$  (а), их производные  $dz/dy(y)$  (б) и фазовые портреты  $dz/dy(z)$  (в) при многоканальном распространении.

Левый столбец (1) соответствует  $P = 0$ , то есть отсутствию модуляции по оси  $Oy$  и приведен здесь для сравнения. При этом поле имеет

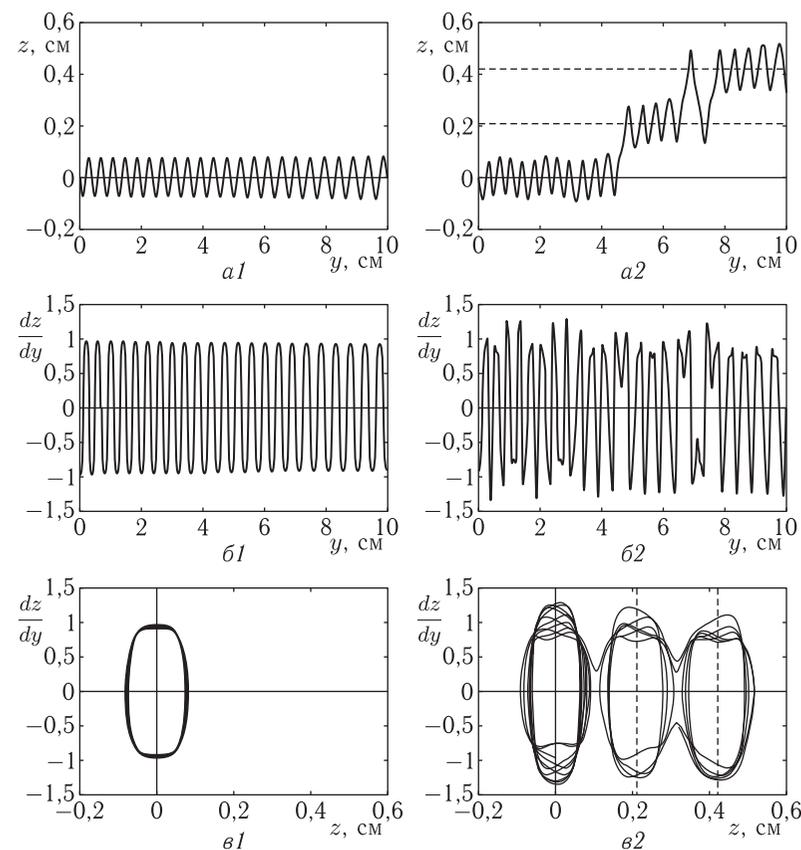


Рис. 5.26. Траектории ПМСВ (а), их производные (б) и фазовые портреты (в) при многоканальном распространении: 1 — один канал; 2 — три канала. Параметры подмагничивающей структуры — то же, что на рис. 5.24, параметры ферритовой пластины:  $4\pi M_0 = 1750$  Гс,  $d = 15$  мкм, частота ПМСВ  $f = 3200$  МГц, начальный угол волнового вектора  $\varphi_0 = 30^\circ$

конфигурацию системы параллельных валов, вытянутых вдоль оси  $Oy$ , отстоящих друг от друга по оси  $Oz$  на 0,21 см. Возбуждение ПМСВ происходит при  $z = 0$  см, в результате чего ПМСВ распространяется вдоль соответствующего этой координате вала по регулярной псевдосинусоидальной траектории с периодом  $T_{wy} = 0,417$  см (рис. 5.26, *a1*).

Производная траектории по координате  $y$  (рис. 5.26, *b1*) также имеет регулярный, близкий к синусоидальному характер с тем же периодом.

Фазовый портрет (рис. 5.26, *в1*) имеет вид правильного овального кольца, ширина образующей которого размыта весьма незначительно (менее 10% от средней величины).

Правый столбец (2) соответствует  $P = 1$ , то есть по оси  $Oy$  имеется модуляция с периодом  $T_y = 1/F_y$ , который при принятой частоте  $F_y = 2,0 \text{ см}^{-1}$  равен  $T_y = 0,5$  см.

*Прыжковая стохастическая неустойчивость.* Начальное возбуждение ПМСВ осуществляется при той же координате  $z = 0$  см, так что траектория ПМСВ начинает свой путь также в виде псевдосинусоиды, подобной таковой, приведенной на рис. 5.26, *a1*. Однако можно видеть, что здесь ноль псевдосинусоиды не остается постоянным, а она совершает сравнительно медленные колебания поперек своего движения вдоль оси  $Oz$ . То есть волна распространяется не просто вдоль канала по его оси, а благодаря модуляции поля по оси  $Oy$  колеблется из стороны в сторону вдоль оси  $Oz$ . Согласно показанному в разд. 5.2, такие колебания носят стохастический характер, так что в определенный момент времени траектория может удалиться от оси основного канала и приблизиться к оси соседнего, после чего перескочить на него и вдоль него далее и распространяться.

Это и происходит при координате  $y = 4,8$  см, в результате чего траектория распространяется далее по каналу, соответствующему  $z = 0,21$  см. Однако такое распространение продолжается лишь до  $y = 6,8$  см, где траектория сначала перескакивает на канал при  $z = 0,42$  см, после чего возвращается обратно на канал при  $z = 0,21$  см, откуда совершает еще один прыжок на канал при  $z = 0,42$  см, где и остается, начиная с  $y = 7,8$  см. Контрольная проверка показывает, что далее траектория при  $y = 12,8$  см испытывает очередной скачок на канал при  $z = 0,21$  см, затем вскоре перескакивает на канал при  $z = 0,00$  см, откуда на канал при  $z = -0,21$  см и так далее, совершая перескоки с канала на канал беспорядочным образом.

Производная такой траектории (рис. 5.26, *b2*), хотя и сохраняет некоторое подобие периодичности, но амплитуда ее колебаний меняется хаотическим образом вокруг среднего значения порядка  $dz/dy \sim 1$ , соответствующего амплитуде при одном канале (рис. 5.26, *b1*). Однако при перескоке с канала на канал характер производной практически не меняется, что обусловлено тем, что между перескоками в пределах каждого канала траектория имеет обычный псевдосинусоидальный

характер, искаженный только за счет хаотизации внутри самого канала.

Фазовый портрет (рис. 5.26, *в2*) имеет вид совокупности трех овальных колец, центры которых приходятся на значения  $z$ , соответствующие трем каналам: при  $z = 0,00$  см,  $z = 0,21$  см и  $z = 0,42$  см. То есть можно сказать, что фазовый портрет по координате  $z$  сильно «размазывается» поскольку траектория совершает прыжки между отдельными каналами.

Ширина образующей колец сильно размазана, особенно вдоль производной (по вертикали на рис. 5.26, *в2* более чем на 40%), что обусловлено стохастичностью траекторий ПМСВ и их производных при распространении вдоль оси  $Oy$ .

Таким образом, можно видеть, что при распространении ПМСВ в поле с двойной периодической модуляцией в многоканальной структуре траектория может случайным образом перескакивать с одного канала на другой, причем величина таких скачков, определяемая расстоянием между каналами, значительно превышает хаотические скачки амплитуды при распространении по одному каналу. Так, как видно из начального участка траектории на рис. 5.26, *a2*, скачки амплитуды по  $z$  внутри одного канала не превышают 0,02 см, тогда как при перескоке на другой канал скачок составляет 0,21 см, что превышает скачок на одном канале в 10 раз. При перескоке на следующий канал в ту же сторону это значение удваивается, и так далее.

Стохастическую неустойчивость такого вида, сопровождаемую «прыжками» с одного канала на другой, будем условно называть «прыжковой стохастической неустойчивостью».

Можно видеть, что при распространении в многоканальной структуре характер траекторий ПМСВ за счет прыжковой неустойчивости приобретает значительно большую хаотичность, чем при распространении по одному каналу.

#### 5.4. Рекомендации для наблюдения стохастической неустойчивости в эксперименте

Основным предметом проведенного рассмотрения является в первую очередь демонстрация возможного решения варианта математической задачи, сходной с задачей о биллиардах [105], на основе конкретного вида закона дисперсии (2.69) и изменения волноведущей среды (5.13)–(5.15), а также (5.24).

Однако, поскольку математическая часть задачи базируется на основе картины распространения магнитостатических волн в неоднородно намагниченной пластине феррита, следует рассмотреть возможности экспериментального наблюдения описанных явлений.

Прежде всего отметим, что распространение ПМСВ в поле типа «вала» в экспериментах на пленках железоиттриевого граната

наблюдалось в ряде работ [114–116]. Был четко выявлен близкий к синусоидальному вид траекторий волновых пучков шириной до 0,5 см, распространявшихся на расстояние до 3–4 см. Четко регистрировались до двух периодов траекторий, после чего затухание волны достигало 40–50 дБ, что находилось на грани чувствительности использованной аппаратуры.

Таким образом, если полагать четко выраженными два периода траекторий, то для наблюдения стохастичности следует выбирать условия эксперимента так, чтобы хаотизация траекторий проявлялась уже на этом расстоянии.

Из приведенного выше рис. 5.20 можно видеть, что наиболее резко скачкообразный характер траекторий проявляется вблизи верхней границы спектра ПМСВ. Таким образом, надо работать именно в этой области частот, ниже верхней границы не более чем на 100–200 МГц. При этом волновое число будет составлять порядка  $1000\text{--}5000\text{ см}^{-1}$ , что соответствует длине волны  $\sim 10\text{--}60\text{ мкм}$ . Если ПМСВ будут возбуждаться проволочной антенной, то ее диаметр должен быть не более чем того же порядка.

В работах [114–116] использовались антенны с диаметром проводника порядка 12 мкм, что позволяло достаточно эффективно возбуждать ПМСВ длиной до 50–70 мкм. Таким образом, наблюдение стохастизации ПМСВ с такими возбудителями можно считать весьма реальным. Однако все же, по-видимому, предпочтительнее использовать микрополосковую технику, где размер центрального проводника полосковой линии при использовании фотолитографии может быть уменьшен до 1 мкм.

Заметим дополнительно, что факт бесконечного увеличения волнового числа вблизи границы существования ПМСВ также не является бесспорным. Так в работах [258–263] показано, что при учете затухания ПМСВ допустимое волновое число по величине сверху ограничивается. Так при принятом в работе [260] значении параметра затухания  $\alpha = 0,01$ , максимальное значение действительной части волнового числа составляет около  $1000\text{ см}^{-1}$ .

Таким образом, отмеченная здесь расходямость (уход на бесконечность) волнового числа в точке высвечивания является идеализацией, обусловленной отсутствием затухания ПМСВ и в реальных условиях должна быть ограничена предельным значением, определяемым диссипативными свойствами среды.

Из этого следует вывод, что в качестве волноведущей среды следует выбирать пленки с как можно меньшим затуханием. Так в случае параметра затухания типичного для монокристалла железиттриевого граната,  $\alpha = 0,001$  (что соответствует ширине линии  $\Delta H \sim 1\text{ Э}$ ), максимальное значение волнового числа увеличивается примерно на порядок, что как раз соответствует величине, требуемой для эксперимента.

Итак, можно сделать вывод, что для экспериментального наблюдения стохастизации траекторий ПМСВ необходимо использовать пленки

железоиттриевого граната с параметром затухания не более 0,001, микрополосковые преобразователи с шириной полоска не более 10 мкм и работать на частотах, ниже верхней границы спектра ПМСВ не более чем на 200 МГц. Все эти требования в реальных условиях вполне достижимы, что позволяет надеяться на успешную реализацию эксперимента.

## Выводы по главе 5

Данная глава посвящена распространению волн в решетках, период которых значительно больше длины волны. Показано, что в этом случае траектория волны следует конфигурации поля, огибая препятствия в соответствии с его изменением.

Основные результаты настоящей главы сводятся к следующим.

1. Рассмотрено распространение ПМСВ в ферритовой пленке, намагниченной периодически неоднородным полем, в качестве источника которого может использоваться набор плоских постоянных магнитов, периодически намагниченная магнитофонная лента или ферритовая пленка со сквозной доменной структурой. Методом Гамильтона–Аулда рассчитаны параметры распространения ПМСВ и показано, что в этих условиях траектории волновых пучков, а также величины волнового числа и направлений векторов фазовой и групповой скоростей ПМСВ имеют периодический характер вдоль направления распространения ПМСВ. Дана качественная интерпретация полученных зависимостей на основе метода изочастотных кривых.

2. Для ферритовой пластины со свободной поверхностью рассмотрен частный случай поля сложной формы — продольно неоднородного типа «вала» с периодической модуляцией высоты, крутизны склонов и сдвига вершины. Показано, что в таком поле траектории ПМСВ становятся неустойчивыми и вместо псевдосинусоидального (типичного в отсутствие модуляции) характера приобретают стохастический вид, проявляющийся в хаотических скачках амплитуды, частоты и фазы, выраженный тем сильнее, чем глубже модуляция. Построен фазовый портрет траекторий ПМСВ. Показано, что в отсутствие модуляции фазовая траектория описывает устойчивый цикл, форма которого близка к эллиптической. При наличии модуляции фазовый портрет размывается, приобретая вид множества разного размера наложенных друг на друга неправильных четырехугольников с вогнутыми сторонами и острыми углами.

3. Выявлен эффект «высвечивания» траекторий, проявляющийся в их обрыве при попадании траектории в область пространства, где поле становится меньше соответствующего нижней границе спектра ПМСВ, что сопровождается значительным ростом волнового числа и в ряде случаев отклонением вектора фазовой скорости от нормали к направлению поля на величину, большую угла отсечки. Исследована зависимость максимальной (до обрыва) длины траекторий ПМСВ от пространственной частоты модуляции поля. Обнаружен сильно изрезанный характер этой

зависимости с четко выраженными минимумами, когда пространственный период псевдосинусоидальной траектории ПМСВ равен целому, особенно четному, числу периодов модуляции. Установлено, что стохастичность траектории выражена тем сильнее, чем меньше длина траектории до высвечивания, на основе чего в качестве меры стохастичности предложено использовать «длину высвечивания», связанную со степенью стохастичности обратной пропорциональностью. Исследована зависимость длины высвечивания траекторий ПМСВ от коэффициента глубины модуляции при различных ее видах. Показано, что длина высвечивания минимальна при модуляции крутизны склонов «вала», принимает среднее значение при модуляции высоты вершины и становится максимальной при модуляции сдвига вершины «вала».

4. На основе анализа пространственной конфигурации траекторий и фазовых портретов ПМСВ в равных по полю условиях показано, что наиболее сильную хаотизацию траекторий вызывает модуляция крутизны склонов «вала», несколько меньшую — модуляция высоты вершины и самую меньшую — модуляция сдвига вершины, что находится в полном соответствии с критерием, полученным на основе длины высвечивания. Исследованы условия стохастизации траекторий ПМСВ на различных частотах. Показано, что наиболее сильная стохастизация происходит при работе на частоте, близкой к верхней границе спектра ПМСВ, где волновое число достигает значительной величины. Отмечена аналогия наблюдаемых явлений с движением частицы в «перемешивающем бильярде», частным случаем которого является двумерный волноводный канал типа «стадиона». В качестве параметра, обеспечивающего упомянутое «перемешивание», указано волновое число ПМСВ, изменение которого при малом изменении поля может быть весьма большим, что приводит к потере памяти системы о начальных условиях.

5. Рассмотрено распространение поверхностных магнитостатических волн в ферритовой пленке, намагниченной в плоскости постоянным полем, периодическим по двум координатам. Показана возможность реализации и приведена схема магнитной системы, создающей поле в виде нескольких параллельных «валов» с амплитудой каждого, меняющейся по периодическому закону. Для поля в виде одноканального, то есть единичного «вала» с продольной модуляцией, конструкция системы представляет собой набор прямоугольных магнитов двух чередующихся длин, соседствующих друг с другом длинными сторонами, причем полюса всех магнитов, расположенные на концах коротких сторон, ориентированы в едином направлении друг относительно друга. Многоканальная система представляет собой набор параллельно ориентированных одинаковых единичных систем, расположенных в одной плоскости на одинаковых расстояниях друг от друга.

6. Показано, что в поле единичной системы траектория ПМСВ имеет псевдосинусоидальный вид, причем амплитуда ее испытывает хаотические скачки, обусловленные продольной модуляцией поля «вала».

В этом случае амплитуда производной от траектории по координате испытывает еще большие хаотические скачки, однако фазовый портрет сохраняет единственность цикла. В поле многоканальной системы ПМСВ могут распространяться в любом из каналов, причем за счет хаотичности траектории возможен ее перескок из одного канала в другой, соседствующий с первым. Неустойчивость такого вида, сопровождаемая хаотическими «прыжками» траектории между каналами, названа «прыжковой стохастической неустойчивостью». Амплитуда производной по координате от траектории при прыжковой неустойчивости испытывает хаотические скачки такого же порядка, как и при единичном канале, однако фазовый портрет расщепляется на столько циклов, сколько каналов проходит траектория при перескоках. Показано, что перескоки траектории между каналами происходят хаотическим образом, так что исходная хаотизация траектории, свойственная единичному каналу, в многоканальной структуре значительно усиливается (на порядок и более).

7. Рассмотрена возможность практической реализации описанных эффектов и даны рекомендации к их наблюдению в эксперименте, состоящие в использовании пленок железиттриевого граната с малым параметром затухания, микрополосковых преобразователей с малой шириной полоска и работе в диапазоне частот вблизи верхней границы спектра ПМСВ.

## Глава 6

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПМСВ В УСЛОВИЯХ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕГОСЯ ПОПЕРЕЧНО НЕОДНОРОДНОГО ПОЛЯ

Данная глава посвящена ситуации, когда протяженность периодической неоднородности структуры в пространстве настолько велика, что в реальном случае волна успевает затухнуть прежде, чем доберется до следующего периода неоднородности. В этом случае неоднородность в сравнении с длиной волны уже не будем рассматривать как периодическую, а положим, что волна распространяется в условиях монотонного изменения параметров среды, в частности поля, только в одну сторону.

### 6.1. Различие между продольной и поперечной неоднородностями поля

Случай поля, монотонно меняющегося вдоль своего направления, то есть продольно неоднородного, являлся предметом подробного изучения в предыдущей монографии [1]. Были рассмотрены поля типа линейного, «долины» и «вала», причем показано, что во всех этих случаях волновое число по мере распространения волны, как правило, возрастает, то есть волна становится короче [1, глава 4].

Для настоящего рассмотрения важен другой случай — когда поле меняется не вдоль, а поперек своего направления, то есть является поперечно неоднородным. Частный случай поперечно неоднородного поля уже рассмотрен выше в главе 5, где такое поле, периодически меняющееся по координате  $y$ , наложено в виде модулирующей добавки на продольно неоднородное поле типа «вала», направленное вдоль оси  $z$ . Было показано, что такое поле может привести к стохастическому характеру траекторий ПМСВ.

Рассмотрим теперь поперечно неоднородное поле в чистом виде без наложения на продольное, то есть будем считать, что оно меняется только по координате  $y$ , сохраняя неизменным направление и величину вдоль оси  $Oz$ . Такое изменение, как и при продольном поле, рассмотренном в [1], сопровождается сложным характером траекторий ПМСВ, чему и будет посвящена данная глава. Будет показано, что в отличие от продольно неоднородного поля, волновое число по мере распространения волны может уменьшаться, то есть длина волны увеличиваться.

В случае, если длина магнитоэлектрической волны по мере увеличения становится сравнимой с длиной электромагнитной волны в свободном пространстве, то происходит излучение из феррита электромагнитных волн, обладающих равными магнитным и электрическим полями. Необходимым условием для такого излучения является изменение величины поля в направлении, поперечном самому себе. Следующая глава будет касаться собственно излучения, в том числе в условиях сложного характера излучающих структур, а здесь ограничимся рассмотрением только траекторий.

В настоящей главе, в основном, будем опираться на материалы работ [137, 264, 265].

### 6.2. Распространение ПМСВ в поперечно неоднородном поле

В монографии [1] подробно рассмотрено распространение волновых пучков ПМСВ в ферритовых пленках, намагниченных «продольно неоднородным» полем, направление которого по плоскости пленки сохраняется постоянным, а напряженность меняется вдоль направления поля. Здесь будет рассмотрен другой частный случай — «поперечно неоднородное» поле, направление которого также неизменно, а напряженность меняется в направлении, перпендикулярном направлению поля. В традиционно выбираемой системе координат  $Oxyz$ , плоскость  $Oyz$  которой совпадает с плоскостью пленки, а ось  $Oz$  направлена вдоль поля (рис. 2.1), изменение поля происходит вдоль оси  $Oy$ . Такое поле с точностью до квадратичных членов по  $y$  описывается формулой [1, раздел 4.1, формула (4.3)]:

$$H_z(y) = H_0(b_0 + b_1y + b_2y^2), \quad (6.1)$$

где  $b_0, b_1, b_2$  — постоянные коэффициенты, определяющие конкретную конфигурацию поля.

Для анализа траекторий ПМСВ здесь можно использовать оба метода: изочастотных кривых и Гамильтона–Аулда (раздел 2.4). В методе изочастотных кривых, в отличие от случая продольно неоднородного поля, надо учитывать сохранение проекции волнового вектора на ось  $Oz$ , а в остальном геометрические построения аналогичны, поэтому далее остановимся более подробно лишь на методе Гамильтона–Аулда. Начнем рассмотрение с линейного поля и будем различать два случая: первый — когда поле вдоль оси  $Oy$  линейно убывает и второй — когда линейно возрастает. Ограничимся случаем ферритовой пленки со свободной поверхностью, имеющей параметры:  $4\pi M_0 = 1750$  Гс,  $d = 15$  мкм.

#### 6.2.1. Линейно меняющееся поперечно неоднородное поле

Наиболее простым случаем поперечно неоднородного поля является поле, меняющееся по линейному закону. Поскольку при этом

изменение поля происходит вдоль оси  $Oy$ , относительно которой распространение ПМСВ не является взаимным, то случаи убывания и возрастания поля значительно различаются. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

*Линейно убывающее поле.* Линейно убывающему полю соответствует рис. 6.1. Это поле описывается формулой (6.1), в которой:  $H_0 = 437,5 \text{ Э}$ ,  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = -1/8 \text{ см}^{-1}$ ,  $b_2 = 0$ . На рисунке приведены зависимости от координаты  $y$  для траекторий ПМСВ  $z(y)$  (а), волнового числа  $k(y)$  (б), углов фазовой  $\varphi(y)$  (в) и групповой  $\psi(y)$  (г) скоростей. Кривые построены для нескольких значений частот. Начальная точка траекторий —  $y = 0 \text{ см}$ ,  $z = 0 \text{ см}$  (поле —  $437,5 \text{ Э}$ ), начальное значение угла  $\varphi_0 = 10^\circ$ .

Из рис. 6.1, а видно, что все траектории ПМСВ сначала плавно и монотонно спадают, тем круче, чем выше частота, а на конечном

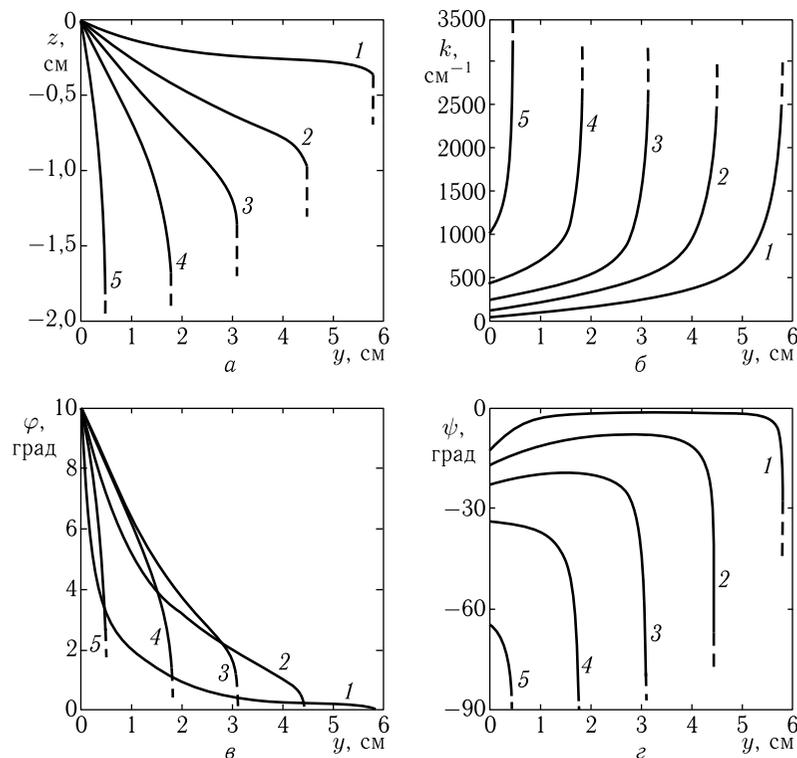


Рис. 6.1. Траектории ПМСВ  $z(y)$  (а) и соответствующие им зависимости  $k(y)$  (б),  $\varphi(y)$  (в) и  $\psi(y)$  (г) в линейно убывающем поперечно неоднородном поле для различных частот: 1 — 2800 МГц, 2 — 3000 МГц, 3 — 3200 МГц, 4 — 3400 МГц, 5 — 3600 МГц

участке спад резко ускоряется, переходя в асимптотическое стремление к вертикальной прямой, вдоль которой траектория уходит на минус-бесконечность. Максимальное при данной частоте значение координаты  $y$ , через которое проходит вертикальная асимптота траектории, соответствует нижней полевой границе спектра ПМСВ для этой частоты. Согласно [1, раздел 4.2], эта граница соответствует верхней частотной границе спектра ПМСВ, в нормированных частотах (2.4)–(2.5) равной

$$\Omega = \Omega_H + 1/2, \quad (6.2)$$

откуда получаем нижнюю границу по полю в виде [1, раздел 4.2, формула (4.7)]:

$$H = 2\pi M_0 \cdot \left( -1 + \frac{f}{2\pi\gamma M_0} \right), \quad (6.3)$$

где для получения поля в Э намагниченность  $M_0$  берется в Гс,  $f$  — в МГц, а  $\gamma = 2,8 \text{ МГц} / \text{Э}$ . Ветви изочастотных кривых при приближении поля к границе, определяемой (6.3), стремятся к горизонтальной оси  $Ok_y$ , то есть (при отличной от нуля сохраняющейся величине  $k_z$ ) угол  $\psi$  стремится к  $90^\circ$ , в результате чего траектория резко загибается вниз и уходит на бесконечность. Большей частоте соответствует большее поле (6.3), поэтому вертикальные асимптоты траекторий с повышением частоты приближаются к оси  $Oz$ . Стремление траекторий к бесконечности сопровождается таким же бесконечно большим увеличением волнового числа, показанным на рис. 6.1, б. При этом угол  $\varphi$  стремится к нулю (рис. 6.1, в), а угол  $\psi$  — к  $-90^\circ$  (рис. 6.1, г). Остальные особенности приведенных зависимостей качественно вполне объясняются характером изочастотных кривых. Заметим лишь, что резкое увеличение волнового числа (рис. 6.1, б), подобно случаю продольно неоднородного поля ([1, разделы 2.7.2, 4.7]), должно дать значительный рост набега фазы и времени задержки.

*Линейно возрастающее поле.* Линейно возрастающему полю соответствует рис. 6.2. Это поле описывается формулой (6.1), где будем считать:  $H_0 = 437,5 \text{ Э}$ ,  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 1/8 \text{ см}^{-1}$ ,  $b_2 = 0$ . На рисунке буквой а обозначены зависимости  $z(y)$ , б —  $k(y)$ , в —  $\varphi(y)$ , г —  $\psi(y)$ . Начальная точка всех траекторий —  $y = 0 \text{ см}$ ,  $z = 0 \text{ см}$ . В этой точке поле равно  $437,5 \text{ Э}$ . Начальное значение угла  $\varphi$  между волновым вектором и осью  $Oy$  принято равным  $10^\circ$ .

Из рис. 6.2, а видно, что все траектории ПМСВ представляют собой плавные, монотонно спадающие, почти прямые линии, наклон которых относительно оси  $Oy$  тем больше, чем выше частота. Эти их свойства следуют из формы изочастотных кривых при условии сохранения величины  $k_z$ . Траектории заканчиваются при таком значении координаты  $y$ , где поле соответствует верхней полевой границе спектра для данной частоты. Согласно [1, раздел 4.2], эта граница соответствует

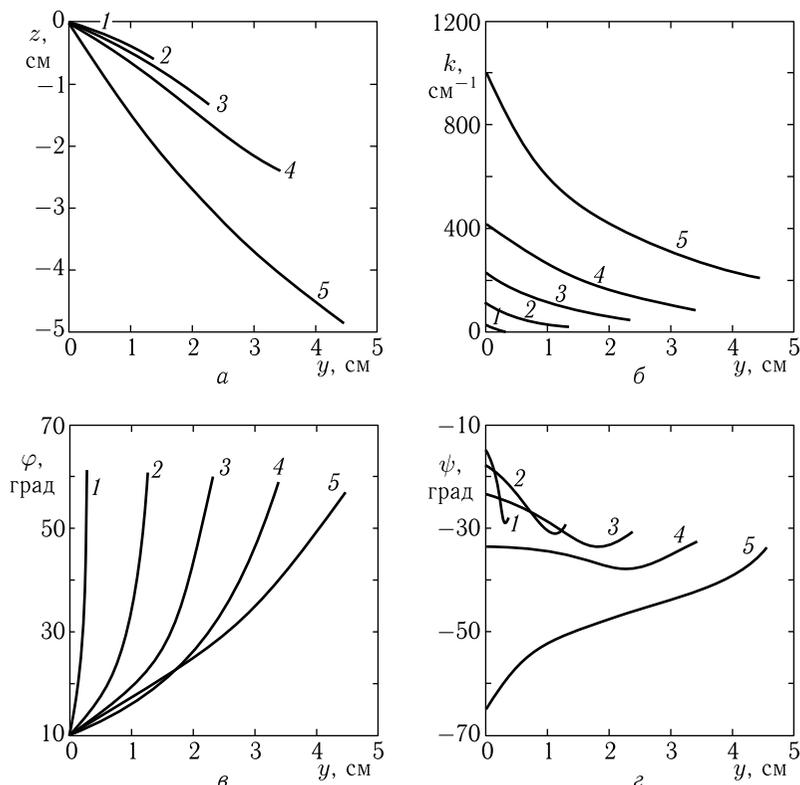


Рис. 6.2. Траектории ПМСВ  $z(y)$  (а) и соответствующие им зависимости  $k(y)$  (б),  $\varphi(y)$  (в) и  $\psi(y)$  (г) в линейно возрастающем поперечно неоднородном поле для различных частот: 1 – 2800 МГц, 2 – 3000 МГц, 3 – 3200 МГц, 4 – 3400 МГц, 5 – 3600 МГц

нижней частотной границе спектра ПМСВ, в нормированных частотах (2.4)–(2.5) равной:

$$\Omega = \sqrt{\Omega_H(\Omega_H + 1)}, \quad (6.4)$$

откуда получаем верхнюю границу по полю в виде [1, раздел 4.2, формула (4.6)]:

$$H = 2\pi M_0 \cdot \left( -1 + \sqrt{1 + 4 \cdot \left( \frac{f}{4\pi\gamma M_0} \right)^2} \right), \quad (6.5)$$

где для получения поля в Э намагниченность  $M_0$  берется в Гс,  $f$  – в МГц, а  $\gamma = 2,8$  МГц/Э.

Так как поле по координате  $y$  линейно нарастает, то из (6.5) можно видеть, что траектории продолжаются по оси  $Oy$  тем дальше, чем выше частота. В силу близкой к линейной конфигурации траектории,

координата  $z$  точки окончания траектории тем больше, чем больше соответствующая координата  $y$ , а также угол  $\psi$  в начальной точке траектории. Обе эти величины с увеличением частоты растут, поэтому максимальное значение координаты  $z$  также тем больше, чем выше частота.

**Замечание.** Для дисперсионного соотношения Дэймона–Эшбаха рост угла  $\psi$  с увеличением частоты при постоянном значении  $\varphi$  в неявном виде следует из формулы (2.95) (раздел 2.2.2), которую можно разрешить численно, задавая значение поля и вычисляя производные в точке начала траектории. Качественно это можно видеть из построения изочастотных кривых типа показанных на рис. 2.2, б (раздел 2.2.2).

Из рис. 6.2, б видно, что все зависимости  $k(y)$  представляют собой монотонно спадающие кривые, для которых начальное значение (при  $y = 0$ ) и крутизна спада тем больше, чем выше частота. Обе эти особенности также следуют из закона дисперсии и изочастотных кривых. В точке окончания кривых волновое число определяется заданным начальными условиями значением  $k_z$ , а также углом отсечки  $\varphi_c(\omega)$  для соответствующей частоты, причем выполняются соотношения:

$$k_y = k \cos \varphi_c, \quad (6.6)$$

$$k_z = k \sin \varphi_c. \quad (6.7)$$

При этом конечное волновое число тем меньше, чем ниже частота, и вблизи нижней границы спектра может быть весьма малым. Так, для частоты 2800 МГц (кривая 1) минимальное волновое число равно  $4,1 \text{ см}^{-1}$ , что соответствует длине ПМСВ –  $1,53 \text{ см}$ . Эта величина по порядку величины приближается к длине электромагнитной волны (ЭМВ) той же частоты в свободном пространстве –  $10,73 \text{ см}$ , в результате чего возможно эффективное взаимодействие обеих волн и преобразование энергии ПМСВ в энергию ЭМВ, которое должно проявиться как излучение ЭМВ из ферритовой пленки. Анализ методом изочастотных кривых показывает, что волновое число получается тем меньшим, чем меньше начальный угол  $\varphi_0$  и минимально при  $\varphi_0 = 0$  (или  $k_z = 0$ ), то есть ПМСВ распространяются точно вдоль оси  $Oy$ . Подробнее эта ситуация применительно к излучению рассмотрена далее в главе 7 (раздел 7.11).

Приведенные на рис. 6.2, в зависимости  $\varphi(y)$  монотонно возрастают тем сильнее, чем ниже частота. Начало всех кривых соответствует  $\varphi_0 = 10^\circ$ . Заканчивается каждая кривая при значении  $\varphi$ , равном углу отсечки  $\varphi_c$  для соответствующей частоты. При этом с увеличением частоты максимальные значения угла  $\varphi$  уменьшаются, что отражает аналогичную частотную зависимость для угла отсечки. Подобные зависимости для угла  $\psi(y)$ , приведенные на рис. 6.2, г, ведут себя более сложно, а именно: для частот вблизи нижней границы спектра ПМСВ (кривая 1) практически на всем протяжении (кроме небольшого

нарастающего участка вблизи конца траектории) монотонно спадают, тогда как для частот вблизи верхней границы спектра (кривая 5) всегда монотонно возрастают. Кривые в средней части спектра ПМСВ имеют переходный характер между этими двумя случаями и в начале могут спадать или нарастать, а в конце всегда нарастают, в результате чего могут иметь один (кривые 2–4) или два (между кривыми 4 и 5) экстремума. В точке окончания любой траектории сумма углов  $\varphi$  и  $\psi$  всегда равна  $90^\circ$ , что соответствует выходу изохастотной кривой на линию отсечки.

### 6.3. Экспериментальное исследование распространения ПМСВ в поперечно неоднородном поле

Развитые выше теоретические положения нашли некоторое отражение в экспериментах [137, 264, 265], а также [75]. Измерения проводились на пленке железиттриевого граната (ЖИГ) с намагниченностью  $4\pi M_0 = 1885$  Гс, толщиной  $d = 13$  мкм и шириной линии ФМР  $2\Delta H = 0,55$  Э, выращенной на круглой (диаметром 76 мм, толщиной 0,5 мм) подложке из гадолиний-галлиевого граната, ориентированной перпендикулярно оси [111]. Возбуждение и прием ПМСВ осуществлялся с помощью подвижных антенн, выполненных из позолоченной вольфрамовой проволоки диаметром 12 мкм. Длина возбуждающей антенны составляла 3,7 мм, приемной — 0,5 мм. Поле создавалось постоянным магнитом с круглыми полюсами диаметром 7 см с расстоянием между ними 10–20 см. Поперечно неоднородное подмагничивание пленки достигалось путем размещения ее в плоскости, проходящей через ось симметрии полюсов на некотором расстоянии (5–10 см) от этой оси. Ось  $Oz$  системы координат  $Oxyz$  устанавливалась параллельно оси симметрии полюсов, а ось  $Oy$  — перпендикулярно этой оси посередине между полюсами. Плоскость пленки совмещалась с координатной плоскостью  $Oyz$ , а начало системы координат выбиралось в месте расположения возбуждающей антенны. Зависимость поля  $H_z$  от координаты  $y$  с точностью до 2% описывалась формулой:

$$H_z(y) = H_0 + \eta y, \quad (6.8)$$

где в случае линейно возрастающего поля было:  $H_0 = 296$  Э,  $\eta = 40$  Э см $^{-1}$ , в случае линейно убывающего —  $H_0 = 504$  Э,  $\eta = -40$  Э см $^{-1}$ . Как и ранее, возбуждающая антенна была неподвижной, приемная — перемещалась по плоскости пленки, а ход траекторий волновых пучков регистрировался по максимуму сигнала на приемной антенне. Максимальная доступная измерению длина траекторий составляла 4–5 см.

Рассмотрим сначала случай, когда волновой вектор параллелен оси  $Oy$ . При этом, согласно теории, траектории ПМСВ должны пред-

ставлять собой прямые линии, совпадающие с осью  $Oy$ . В линейно возрастающем поле траектории заканчиваются при  $y$ , соответствующем полю (6.5), в линейно убывающем — полю (6.3). Измерения показали, что в линейно убывающем поле траектории действительно идут вдоль оси  $Oy$  и заканчиваются в поле, большем (6.3) на 5–7%, то есть траектория слегка не доходит до своего полевого предела. Можно полагать, что такое расхождение связано с конечной толщиной проводника приемной антенны (12 мкм), в результате чего она не может принимать ПМСВ с  $k > 1000$  см $^{-1}$ . В линейно возрастающем поле траектории сначала также идут точно вдоль оси  $Oy$ , но когда волновое число становится меньше или порядка 10–20 см $^{-1}$ , единый до того волновой пучок расщепляется на два, устремляющиеся в противоположные стороны от оси  $Oy$ , которые заканчиваются в поле, меньшем (6.5) на 1–2%.

Распространение ПМСВ для этого случая иллюстрируется рис. 6.3, где показаны траектории (а) и соответствующие им углы  $\varphi$  (б) для разных частот. Вертикальными штриховыми линиями отмечены координаты  $y$ , соответствующие полям (6.5) для тех же частот.

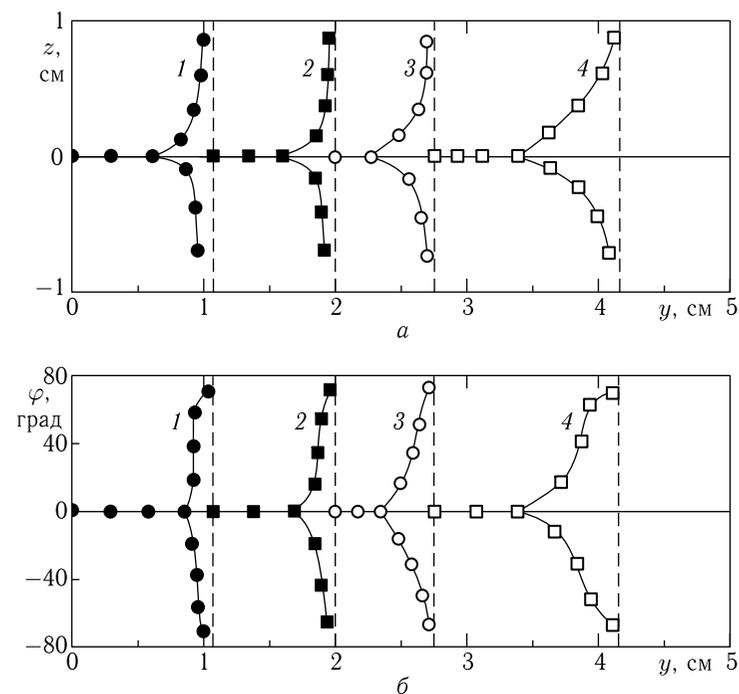


Рис. 6.3. Траектории ПМСВ  $z(y)$  в линейно возрастающем поперечно неоднородном поле (а) и соответствующие им углы  $\varphi(y)$  (б) для разных частот. Точки — эксперимент. Частоты траекторий: 1 — 2430 МГц, 2 — 2580 МГц, 3 — 2700 МГц, 4 — 2920 МГц

Из рисунка видно, что расщепление волнового пучка начинается в поле, меньшем (6.5) на 8–30 Э, что по частоте соответствует приблизительно 20–80 МГц. Именно в этой полосе частот от начала спектра становятся заметными явления «дисперсионной расходимости» ([1, раздел 1.3, Замечание]), которые, как можно полагать, и дают наблюдаемое расщепление. Заметим, что, в каждой части расщепленного пучка волновой вектор стремится повернуться в сторону оси  $Oz$  тем сильнее, чем ближе пучок подходит к предельному полю.

Таким образом, из рис. 6.3, *a* можно видеть, что в окрестности предельной для данной частоты координаты  $y$  на плоскости пленки образуется вытянутая вдоль оси  $Oz$  область интенсивных магнитоэлектрических колебаний с типичными размерами по оси  $Oy$  — 0,2–0,5 см, по оси  $Oz$  1,6–2,0 см, в которой волновое число весьма мало и составляет менее  $10 \text{ см}^{-1}$ , то есть возникают условия для эффективного преобразования ПМСВ в электромагнитные волны (ЭМВ). В эксперименте при этих условиях наблюдается сильное излучение ЭМВ из ферритовой пленки, диаграмма направленности которого в плоскости  $Oxy$  имеет вид двух симметрично расположенных относительно плоскости пленки лепестков, наклоненных вперед по ходу ПМСВ на 45–60°. Рассмотрению механизма излучения и диаграммы его направленности посвящена следующая далее глава 7.

В случае, когда волновой вектор в начальной точке отклонен от оси  $Oy$  на угол более 10–15°, экспериментально измеренные траектории ПМСВ как для линейно возрастающего, так и линейно убывающего полей согласуются с теоретическими в пределах единиц процентов. Дисперсионные явления расщепления пучка при увеличении угла  $\varphi$  резко падают: пучок остается единым уже при  $\varphi \sim 8$ –10°. При этих же углах интенсивность излучения также падает практически до нуля (в пределах чувствительности аппаратуры — на 40–50 дБ). Теоретическая интерпретация подобного падения также рассмотрена в разделе 7.11.

## 6.4. Распространение ПМСВ в полях других конфигураций и в сложных структурах

Рассмотренными случаями далеко не исчерпывается все многообразие описываемых явлений. Однако, как и в случае продольно неоднородного поля, общая картина распространения ПМСВ в линейном поле является основой для рассмотрения полей других конфигураций. Поэтому, не вдаваясь в подробный анализ, перечислим здесь лишь основные особенности некоторых других случаев.

### 6.4.1. Поля типа «долины» и «вала»

Заметим прежде всего, что, благодаря неизменности направления поперечно неоднородного поля (вдоль оси  $Oz$ ), для качественного анализа

по-прежнему весьма удобен метод изочастотных кривых, количественное же исследование лучше проводить методом Гамильтона–Аулда.

Поле типа «долины» является комбинацией убывающего и возрастающего полей, которые разделяет линия дна «долины», соответствующая  $y = y_0$ , параллельная оси  $Oz$ . На этой линии поле имеет минимум. При  $\varphi_0 > 0$  траектории ПМСВ в обоих случаях являются спадающими кривыми, причем по мере распространения ПМСВ в области  $y < y_0$  волновое число  $k$  увеличивается, а в области  $y > y_0$  — уменьшается. Через дно «долины» проходят только те траектории, частоты которых выше определенной критической величины. Эти траектории обрываются при  $y > y_0$  в поле, соответствующем (6.5) (аналогично рис. 6.2, *a*). При меньших начальных углах  $\varphi_0$  ( $< 10^\circ$ ) здесь может наблюдаться излучение ЭМВ. Траектории, частоты которых лежат ниже критической, не дойдя до дна «долины» при  $y < y_0$  вблизи поля (6.3), резко спадают вниз и уходят на минус-бесконечность (аналогично рис. 6.1, *a*). Траектория, частота которой равна критической, доходит до дна «долины» при  $y = y_0$  и, идя точно вдоль него, уходит на минус-бесконечность.

Поле типа «вала» является комбинацией возрастающего и убывающего полей. Их также разделяет линия вершины «вала», соответствующая  $y = y_0$ , параллельная оси  $Oz$ . На этой линии поле имеет максимум. При  $\varphi_0 > 0$  траектории ПМСВ являются спадающими кривыми, причем по мере распространения ПМСВ в области  $y < y_0$  волновое число  $k$  уменьшается, а в области  $y > y_0$  — увеличивается. Здесь также можно выделить критическую частоту, характеризующуюся тем, что траектории, имеющие частоту ниже критической, обрываются, не дойдя до вершины «вала» в поле (6.5), а выше критической — проходят насквозь и в поле (6.3) уходят на минус бесконечность. Траектория, частота которой равна критической, обрывается точно на вершине «вала» при  $y = y_0$  в поле (6.5), причем волновое число здесь достигает минимума и при меньших начальных углах  $\varphi_0$  ( $< 10^\circ$ ) возможно излучение ЭМВ.

### 6.4.2. Поле произвольной конфигурации

В рассмотренных выше, в том числе в [1], случаях продольно и поперечно неоднородного поля направление поля по всей плоскости пленки предполагалось постоянным. Другим важным частным случаем, является «радиально симметричное» поле [1, раздел 4.1, формулы (4.4), (4.5)]. Для анализа траекторий ПМСВ в таком поле метод изочастотных кривых, хотя и пригоден, но менее удобен, чем в поле постоянного направления, так как ось  $Ok_z$  системы координат  $Ok_yk_z$  должна быть направлена вдоль поля, направление которого в разных точках пленки различно. Таким образом, в каждой точке траектории ориентация системы изочастотных кривых меняется, в результате чего геометрические построения затрудняются. Применение метода Гамильтона–Аулда никаких затруднений не встречает, поэтому

его применение здесь наиболее удобно. Не останавливаясь подробно, отметим лишь, что в радиально симметричном поле возможны траектории в виде сходящихся или расходящихся спиралей, а также замкнутых колец, которые в кольцевом линейном поле неустойчивы и становятся устойчивыми в поле кольцевого «вала». Поле любого реального магнита всегда содержит компоненты, направление которых в пространстве меняется. С другой стороны, потенциальный характер постоянного магнитного поля означает взаимную зависимость всех его компонент, то есть, изменение поля, например по оси  $Oz$ , неизбежно влечет за собой изменение его по двум другим осям. Выражения для зависимости поля от координат при этом получаются более сложными, чем приведенные выше, однако метод Гамильтона–Аулда вполне пригоден и в этом случае. При этом поле на отдельных достаточно небольших участках плоскости ферритовой пленки или структуры можно приближенно свести к рассмотренным выше случаям продольно или поперечно неоднородного, а также радиально симметричного, в результате чего траектории ПМСВ будут представлять собой более или менее сложную комбинацию уже разобранных здесь случаев.

#### 6.4.3. Структуры феррит-металл и феррит-диэлектрик-металл

Рассмотрим теперь особенности распространения ПМСВ в других структурах, намагниченных тем же поперечно неоднородным полем.

В структуре феррит-металл (ФМ) распространение ПМСВ происходит в общем аналогично, с учетом большей ширины спектра ПМСВ, а также того, что тем же, что и в свободной пленке, углам  $\varphi$  соответствуют меньшие углы  $\psi$ , в результате чего траектории более прижаты к оси  $Oy$  и растянуты вдоль нее. На участках возрастающего поля при тех же частотах достижимы значительно меньшие значения волнового числа, что создает более благоприятные, чем в свободной пленке, условия для излучения ЭМВ. Здесь однако, благодаря наличию металлического слоя, диаграмма направленности в плоскости  $Oxy$  должна иметь лишь один лепесток, отклоненный в сторону, противоположную металлу.

В структуре феррит-диэлектрик-металл (ФДМ) распространение ПМСВ определяется более сложным законом дисперсии. Как показано в главе 3 монографии [1] и цитированных там работах, наиболее общим случаем является дисперсионная кривая с двумя экстремумами, так что на плоскости изочастотных кривых можно выделить области прямых волн первого и второго типов и обратных волн. При этом все траектории, как в линейно возрастающем, так и в линейно убывающем полях при  $\varphi_0 > 0$  имеют спадающий характер. В линейно возрастающем поле траектории заканчиваются в поле (6.5), где волновое число принимает минимальное значение. При этом траектории прямых волн первого типа всегда идут в положительном направлении оси  $Oy$ , имея монотонно спадающий характер, траектории прямых волн второго типа сначала идут также в положительном направлении оси  $Oy$ , затем поворачивают в отрицательном направлении той же оси,

после чего снова выходят на положительное, то есть имеют S-образный характер, а траектории обратных волн начинаются в отрицательном направлении, после чего поворачивают к положительному, то есть имеют С-образный характер. В линейно убывающем поле траектории, подходя к полю (6.3), уходят на минус-бесконечность, их волновое число неограниченно увеличивается. Траектории прямых волн первого и второго типов всегда идут в положительном направлении оси  $Oy$ , имея монотонно спадающий характер, причем спад для прямых волн второго типа происходит быстрее, чем для первого. Траектории обратных волн начинаются в отрицательном направлении, после чего поворачивают к положительному, то есть имеют С-образный характер.

В поле типа «долины», состоящем из убывающего и возрастающего участков, траектории также состоят из двух частей, первая из которых соответствует убыванию поля, вторая — возрастанию. Имеется критическая частота, соответствующая траектории, идущей по дну «долины», ниже которой траектории проходят через дно «долины», а выше — уходят на бесконечность, не дойдя до него. Отличие от случая свободной пленки состоит в том, что здесь траектории, не доходящие до дна «долины», могут быть не только монотонно спадающими, но и С-образными, а проходящие через дно «долины» могут быть составлены из двух не только монотонно спадающих участков, но также и из двух S-образных или С-образных, симметричных относительно дна «долины».

В поле типа «вала», состоящем из возрастающего и убывающего участков, траектории также состоят из двух частей, первая из которых соответствует возрастанию поля, вторая — убыванию. Имеется критическая частота, соответствующая траектории, обрывающейся на вершине «вала», ниже которой траектории не доходят до вершины «вала», а выше — проходят насквозь и после пологого участка уходят на минус бесконечность. В отличие от случая свободной пленки, здесь траектории, не доходящие до вершины «вала», могут быть не только монотонно спадающими, но и S- и С-образными, а проходящие через нее — составленными из двух не только монотонно спадающих участков, но также и из двух S-образных или С-образных, симметричных относительно вершины «вала». В случае С-образных участков, соответствующих обратным волнам, траектория приобретает вид периодической кривой псевдосинусоидального типа, идущей вдоль вершины «вала» при  $\varphi > 0$  в отрицательном направлении, а при  $\varphi < 0$  — в положительном направлении оси  $Oz$ .

### Выводы по главе 6

Данная глава посвящена исследованию траекторий ПМСВ, распространяющихся в поперечно неоднородных полях различных конфигураций.

Основные результаты настоящей главы сводятся к следующему.

1. Рассмотрено распространение ПМСВ в ферритовых пленках со свободной поверхностью, намагниченных поперечно неоднородным полем неизменного направления. Показано, что в этом случае ПМСВ распространяются в пределах полосы, заключенной между двумя прямыми, параллельными направлению поля линиями, соответствующими верхней и нижней полевым границам спектра ПМСВ. В отличие от случая продольно неоднородного поля, здесь случаи линейно возрастающего и линейно убывающего полей принципиально различны. Так, в случае линейно возрастающего поля траектории, будучи изначально направлены в сторону линии, соответствующей верхней полевой границе спектра ПМСВ для данной частоты, подходят к этой линии под острым углом, после чего обрываются. По ходу траектории волновое число убывает, и в конце траектории значение его остается конечным. В случае линейно убывающего поля траектории, будучи изначально направлены в сторону линии, соответствующей нижней полевой границе спектра ПМСВ для данной частоты, на подходе к этой линии асимптотически приближаются к ней, устремляясь на бесконечность. По ходу траектории волновое число возрастает, и при выходе траектории на асимптоту стремится к бесконечности. Экспериментальное исследование траекторий ПМСВ в линейно возрастающем и линейно убывающем полях подтвердило предсказанное теорией их поведение с точностью в пределах 5–7%.

2. Рассмотрено поведение траекторий ПМСВ в ферритовых пленках со свободной поверхностью, намагниченных поперечно неоднородными полями типа «долины» и «вала». Показано, что поле типа «долины» эквивалентно следующему друг за другом убывающему и возрастающему полям, разделенным линией дна «долины». Выявлено наличие критической частоты, соответствующей траектории, уходящей на бесконечность вдоль дна «долины». Траектории, частоты которых ниже критической, пройдя через дно «долины», обрываются на ее склоне, противоположном начальному. Траектории, частоты которых выше критической, асимптотически стремясь к дну «долины», уходят на бесконечность. Показано, что поле типа «вала» эквивалентно следующим друг за другом возрастающему и убывающему полям, разделенным линией вершины «вала». Выявлено наличие критической частоты, соответствующей траектории, обрывающейся точно на вершине «вала». Траектории, частоты которых ниже критической, обрываются, не дойдя до вершины «вала», выше критической — проходят насквозь, после чего, асимптотически стремясь к линии, соответствующей нижней полевой границе спектра ПМСВ, уходят на бесконечность.

3. Рассмотрены траектории ПМСВ в поперечно неоднородном поле для структуры ФМ. Показано, что здесь траектории аналогичны случаю свободной пленки, с той разницей, что больше (в 2–3 раза) прижаты к нормали к направлению поля и сильнее (в 3–5 раз) растянуты вдоль нее. В структуре ФДМ в случае дисперсионной кривой с двумя экстремумами в линейно возрастающем поле траектории

прямых ПМСВ первого типа подобны случаю свободной пленки, второго типа имеют S-образный характер, а траектории обратных волн, на начальном участке идущие в сторону убывания поля, затем поворачивают в сторону возрастания поля, то есть имеют S-образный характер с поворотом. Волновое число по ходу траекторий убывает, и все траектории в этом случае обрываются. В линейно убывающем поле траектории прямых волн первого и второго типов подобны случаю свободной пленки, а траектории обратных волн имеют S-образный характер с поворотом. Волновое число по ходу траекторий возрастает и траектории уходят на бесконечность. Рассмотрение полей типа «долины» и «вала» для структуры ФДМ, проведенное на основе линейно возрастающего и убывающего полей, показало, что в этих случаях траектории, не доходящие до дна «долины» или вершины «вала», аналогичны случаю линейного поля, а проходящие насквозь составлены из двух или более монотонных S- или S-образных участков. В поле типа «вала» обратные волны могут распространяться по периодическим псевдосинусоидальным траекториям вдоль или против направления поля. Обсуждена возможность обобщения полученных результатов на случай поля произвольной конфигурации. Показано, что в этом случае применение метода изочастотных кривых несколько усложняется, а метод Гамильтона–Аулда не встречает затруднений, поэтому его использование становится предпочтительным.

## Глава 7

## ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ПМСВ В ПОПЕРЕЧНО НЕОДНОРОДНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим теперь излучение электромагнитных волн, сопровождающее распространение ПМСВ в поперечно неоднородном поле. Факт существования такого излучения установлен в разделе 6.3, там же указано, что его пространственное распределение имеет резко анизотропный характер [137–144, 264, 265]. Рассмотрим теперь этот вопрос более подробно. В основе предложенной далее модели лежит концепция ускоренного движения магнитных зарядов, сопровождающих распространение ПМСВ в линейно возрастающем поле.

В теоретической трактовке механизма излучения, основанного на модели ускоренного движения магнитных зарядов, будем следовать основополагающей работе [150], а также развивающим ее положения работам [147–149, 151–172]. Получаемые теоретические выводы сравним с экспериментами, описанными в работах [75, 137–139].

Заметим, что альтернативной теоретической трактовке, предложенной в работах [75, 145], несомненно имеющей право на внимание, но лежащей несколько в стороне от основных интересов авторов настоящей монографии, здесь большого внимания уделять не будем, так как ее идеологическая сторона уже кратко рассмотрена в разделе 1.4. Для более подробного ознакомления читатель может обратиться к оригинальным работам [75, 145], а также к монографии [146].

### 7.1. Общая геометрия задачи

Рассмотрим сначала наиболее простой случай излучения в плоскости, перпендикулярной плоскости ферритовой пленки (пластины) и проходящей через направление распространения ПМСВ. Геометрия задачи, сходная с приведенной в работе [138], показана на рис. 7.1. Здесь  $1$  — ферритовая пленка, толщиной  $d$ ,  $2$  — преобразователь, возбуждающий ПМСВ, длиной  $b$ . Плоскость  $Oyz$  системы координат  $Oxyz$  совпадает с плоскостью пленки, а ось  $Ox$  ей перпендикулярна. Поле  $\mathbf{H}$  направлено вдоль оси  $Oz$ , его компонента  $H_z$  линейно зависит от  $y$  в соответствии с формулой (6.1), а которой  $b_0 = 1$ ,  $b_1 > 0$ ,  $b_2 = 0$ . ПМСВ с частотой  $\omega = 2\pi f$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_m$  распространяется в положительном направлении оси  $Oy$ .

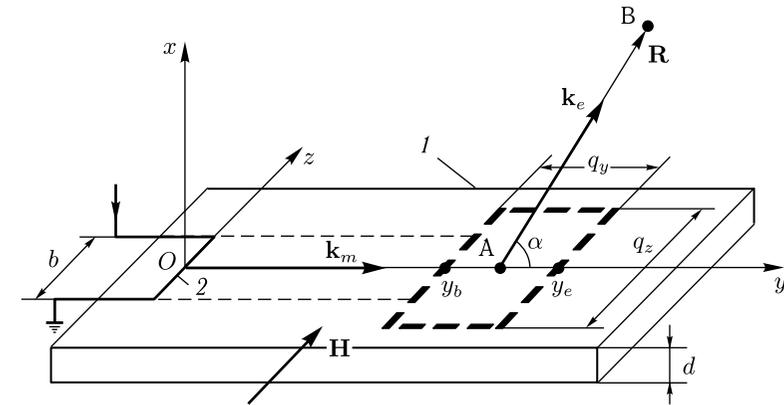


Рис. 7.1. Геометрия задачи об излучении электромагнитных волн при распространении ПМСВ в поперечно неоднородном поле.  $1$  — ферритовая пленка,  $2$  — преобразователь ПМСВ

С возрастанием поля  $H_z$  величина волнового вектора ПМСВ  $\mathbf{k}_m$  уменьшается, стремясь к нулю (раздел 6.2.1). Эта волна преобразуется в электромагнитную волну (ЭМВ) с волновым вектором  $\mathbf{k}_e$  в соответствии с условиями частотного и пространственного синхронизма. ЭМВ излучается из той области ферритовой пленки, где длина ПМСВ близка к длине ЭМВ [138]. Эта область показана на рис. 7.1 утолщенной штриховой линией. Назовем ее «областью излучения». Длина области излучения вдоль оси  $Oy$  равна  $q_y = y_e - y_b$ , где  $y_e$  и  $y_b$  — координаты точек пересечения границ области с осью  $Oy$ , а вдоль оси  $Oz$  — равна  $q_z$ . Пусть  $A$  — произвольная точка области излучения,  $B$  — точка наблюдения,  $\mathbf{R}$  — вектор от  $A$  к  $B$ ,  $\alpha$  — угол между  $\mathbf{R}$  и осью  $Oy$ . Пространство вокруг ферритовой пленки изотропно, поэтому векторы  $\mathbf{k}_e$  и  $\mathbf{R}$  параллельны.

Уточним утверждение, что излучение происходит из области ферритовой пленки, где длина ПМСВ  $\lambda_m$  сравнима с длиной ЭМВ  $\lambda_e$ . Будем считать, что излучение начинается при  $y = y_b$ , когда  $\lambda_m = 0,1\lambda_e$  и заканчивается при  $y = y_e$ , когда  $\lambda_m = \lambda_e$ . Если задана частота ПМСВ  $\omega$ , а также параметры поля  $H_0$  и  $b_1$ , то величину  $y_e$  можно найти, исходя из (6.1) с учетом верхней полевой границы существования ПМСВ (6.5), по формуле:

$$y_e = (b_1 H_0)^{-1} (H_1 - H_0), \quad (7.1)$$

где  $H_1$  определяется по (6.5). Для нахождения  $y_b$  надо использовать закон дисперсии ПМСВ, из которого получается зависимость  $\lambda_m(\omega)$ . Для свободной пленки можно воспользоваться выражением (2.69), разрешенным относительно  $k$  (2.72). Если дисперсионное соотношение относительно  $k$  разрешить нельзя, то остается воспользоваться численным расчетом.

## 7.2. Общие положения задачи об излучении

В общем случае причиной излучения ЭМВ из какой-либо области пространства, занятого средой, является движение зарядов в этой среде, что создает возмущение электромагнитного поля [266, 267]. При этом традиционным источником излучения являются электрические заряды. Однако, электрическое поле ПМСВ, распространяющихся в магнитной среде, крайне мало и не может вызвать заметного излучения. С другой стороны, магнитное поле ПМСВ, напротив, велико, то есть является источником сильных магнитных зарядов, локализующихся в областях неоднородного распределения динамической намагниченности среды. Следует отметить, что хотя магнитные заряды в природе существуют только в виде разноименных полюсов магнитных диполей, однако уравнения электромагнитного поля относительно электрических или магнитных зарядов полностью эквивалентны [178, 268]. Различие магнитных и электрических зарядов состоит в том, что магнитные заряды существуют только парами в виде магнитных диполей. Излучение дипольных систем электрических зарядов хорошо известно и является основой работы радиотехнических антенн (вibratorов), поэтому естественно полагать, что дипольная система магнитных зарядов обладает теми же свойствами. Таким образом, движение магнитных зарядов при определенных условиях может явиться таким же источником излучения ЭМВ, как и движение электрических.

Согласно принципу относительности, равномерное движение заряда эквивалентно рассмотрению в инерциальной системе отсчета, где он покоится, то есть не излучает. Поэтому необходимым условием излучения, исходящего от движущегося заряда, является его перемещение в пространстве с определенным ускорением [266, 267].

При распространении ПМСВ перемещение возмущения намагниченности, соответствующего магнитным зарядам, происходит с фазовой скоростью волны. Поэтому движение магнитных зарядов с ускорением означает распространение ПМСВ с меняющейся в пространстве фазовой скоростью. Именно такой характер имеет распространение ПМСВ в среде, намагниченной неоднородным полем [1]. Однако прежде чем обратиться непосредственно к свойствам излучения ЭМВ, возникающего при распространении ПМСВ в неоднородном поле, рассмотрим математический аппарат, необходимый для описания ускоренного движения магнитных зарядов.

## 7.3. Введение магнитных зарядов

Уравнения электродинамики в обычной форме включают в себя только электрические заряды. Однако при рассмотрении магнитных сред удобно пользоваться понятием магнитных зарядов, являющихся

полюсами магнитных диполей. Покажем, как можно ввести эти заряды в традиционный математический аппарат.

Будем исходить из общих уравнений электродинамики (см. напр. [269]):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (7.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \cdot \mathbf{j}_e; \quad (7.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_e; \quad (7.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (7.5)$$

где введенный здесь индекс «e» у плотности тока  $\mathbf{j}_e$  и плотности заряда  $\rho_e$  означает принадлежность этих величин к электрическому току и зарядам.

Уравнения (7.2)–(7.5) являются несимметричным по отношению к электрическим и магнитным компонентам, полям и зарядам. Для дальнейшего рассмотрения удобен более симметричный вид, к получению которого обратимся далее.

Учтем прежде всего, что электрическая индукция может быть образована двумя видами зарядов — свободными, а также поляризационными (дипольными), возникающими на противоположных границах диэлектрика при помещении его в электрическое поле [269]. При снятии поля свободные заряды остаются, а поляризационные из-за теплового движения разориентируются, так что суммарная их поляризация исчезает.

Согласно общепринятой концепции [269], уравнение (7.4) должно записываться в следующем виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_{es}, \quad (7.6)$$

где  $\rho_{es}$  — плотность именно свободных зарядов. Доказательство этого положения следует из экспериментально установленной интегральной формы уравнений Максвелла, подразумевающей интегрирование по замкнутой поверхности, за пределы которой поляризационные заряды не выходят, то есть интеграл от них исчезает.

При этом в уравнение (7.3) должна входить плотность тока, образованного теми же, зарядами, что входят в (7.6), то есть свободными, так что полная система уравнений должна записываться в виде:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (7.7)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \cdot \mathbf{j}_{es}; \quad (7.8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_{es}; \quad (7.9)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (7.10)$$

Положим далее по аналогии с электричеством, что магнитная индукция также может быть образована двумя видами зарядов —

свободными и поляризационными, роль которых играют здесь спины электронов. Свободные магнитные заряды в настоящее время в эксперименте не обнаружены, однако поляризационные (дипольные) проявляются всегда, когда тело, способное намагничиваться, помещается в магнитное поле. Природа поляризационных зарядов — дипольные магнитные моменты спинов электронов. То есть тело, обладающее такими магнитными моментами, в магнитном поле намагничивается. После выключения поля спины из-за теплового движения, если их ничто не держит, могут разориентироваться, так что тело размагничивается. Если спины взаимодействуют с чем-то, например с осью анизотропии или с дефектами, то полной разориентации не происходит и поляризационные заряды на противоположных концах тела остаются, превращая его в постоянный магнит.

Запишем теперь входящие в уравнения (7.2)–(7.5) векторы индукции  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  через соответствующие поля и векторы поляризации:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}; \quad (7.11)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}, \quad (7.12)$$

где  $\mathbf{P}$  — вектор электрической поляризации,  $\mathbf{M}$  — вектор намагниченности.

Выразим электрическую поляризацию и намагниченность через плотность соответствующих зарядов.

Беря дивергенцию от обеих частей (7.11), получаем:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \mathbf{E} + 4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}, \quad (7.13)$$

откуда находим:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{D} - 4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (7.14)$$

С учетом (7.6), получаем:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi(\rho_{es} - \operatorname{div} \mathbf{P}). \quad (7.15)$$

С другой стороны, с чисто физической позиции можно полагать, что электрическое поле внутри среды определяется полным зарядом, то есть суммой свободных и поляризационных зарядов, то есть можно записать:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi(\rho_{es} + \rho_{ep}), \quad (7.16)$$

где  $\rho_{ep}$  — плотность поляризационных зарядов.

Сравнивая выражения (7.15) и (7.16), можно видеть, что имеет место соотношение:

$$\rho_{ep} = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (7.17)$$

Таким образом, мы определили плотность поляризационных электрических зарядов  $\rho_{ep}$  через поляризацию среды  $\mathbf{P}$ .

Аналогично для магнитной компоненты из (7.12) получаем:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \operatorname{div} \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}. \quad (7.18)$$

Полагая далее, что подобно (7.16) магнитное поле обязано своим существованием сумме свободных и поляризационных зарядов, получаем:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 4\pi(\rho_{ms} + \rho_{mp}). \quad (7.19)$$

Вспомним теперь, что свободных магнитных зарядов не существует, а также учтем (7.5). При этом видим, что первые слагаемые в выражениях (7.18) и (7.19) равны нулю, откуда получаем:

$$\rho_{mp} = -\operatorname{div} \mathbf{M}. \quad (7.20)$$

Таким образом, мы определили плотность поляризационных магнитных зарядов  $\rho_{mp}$  через намагниченность среды  $\mathbf{M}$ .

Обратимся теперь к уравнениям (7.7) и (7.8). В них кроме полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  входят производные по времени от индукций  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$ . Выразим эти производные через поля и заряды. Дифференцируя (7.11), получаем:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (7.21)$$

Также дифференцируя (7.17), находим:

$$\frac{\partial \rho_{ep}}{\partial t} = -\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (7.22)$$

Для преобразования этого выражения воспользуемся уравнением непрерывности для электрических зарядов, в качестве которых будем рассматривать именно поляризационные заряды:

$$\frac{\partial \rho_{ep}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{ep} = 0. \quad (7.23)$$

Заметим, что в классике уравнение непрерывности записывается для полных зарядов без разделения на свободные и поляризационные, однако можно полагать, что оба вида зарядов,  $\rho_{es}$  и  $\rho_{ep}$ , являются независимыми друг от друга и дают независимые токи  $\mathbf{j}_{es}$  и  $\mathbf{j}_{ep}$ , которые в силу аддитивности зарядов:

$$\rho_e = \rho_{es} + \rho_{ep}, \quad (7.24)$$

также аддитивно складываются, давая общий суммарный ток

$$\mathbf{j}_e = \mathbf{j}_{es} + \mathbf{j}_{ep}, \quad (7.25)$$

то есть уравнение непрерывности для полного тока и полного заряда остается тем же самым, что и для каждого вида зарядов и токов.

Подставляя (7.22) в (7.23) и вводя все под знак дивергенции, получаем:

$$\operatorname{div} \left( -\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{j}_{ep} \right) = 0. \quad (7.26)$$

Из этого выражения с точностью до постоянной величины, которая при дифференцировании дает нуль, получаем:

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \mathbf{j}_{ep}. \quad (7.27)$$

Подставляя это выражение в (7.21), получаем

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j}_{ep}. \quad (7.28)$$

Это — как раз та производная, которая входит в (7.8), так что из (7.8) находим:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \cdot \mathbf{j}_{ep} + \frac{4\pi}{c} \cdot \mathbf{j}_{es}. \quad (7.29)$$

Обратимся теперь к вычислению подобной производной от магнитной индукции. Так, дифференцируя (7.12), получаем

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + 4\pi \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}. \quad (7.30)$$

Дифференцируя (7.20), находим

$$\frac{\partial \rho_{mp}}{\partial t} = -\text{div} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}. \quad (7.31)$$

Запишем уравнение непрерывности для магнитных поляризационных зарядов по аналогии с подобным уравнением для электрических зарядов:

$$\frac{\partial \rho_{mp}}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j}_{mp} = 0, \quad (7.32)$$

где  $\mathbf{j}_{mp}$  — плотность тока, образованного поляризационными магнитными зарядами  $\rho_{mp}$ . Это — тот самый ток, который нагревает магнитный диэлектрик, например феррит, при помещении его в переменное магнитное поле.

Подставляя (7.31) в (7.32) и вводя все под знак дивергенции, получаем:

$$\text{div} \left( -\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \mathbf{j}_{mp} \right) = 0. \quad (7.33)$$

Из этого выражения с точностью до постоянной величины, которая при дифференцировании дает нуль, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \mathbf{j}_{mp}. \quad (7.34)$$

Подставляя это выражение в (7.30), получаем

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j}_{mp}. \quad (7.35)$$

Это — как раз та производная, которая входит в (7.7), так что из (7.7) находим

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \cdot \mathbf{j}_{mp}. \quad (7.36)$$

Теперь рассмотрим уравнение (7.9). Подставляя (7.11), учитывая (7.17) и переходя от индукции к полю, получаем

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi(\rho_{es} + \rho_{ep}). \quad (7.37)$$

Аналогично, переходя от магнитной индукции к магнитному полю, из (7.10) с учетом (7.12) и (7.20), получаем

$$\text{div } \mathbf{H} = 4\pi \rho_{mp}. \quad (7.38)$$

Таким образом, преобразованная к виду (7.36), (7.29), (7.37), (7.38) система уравнений (7.7)–(7.10) принимает вид:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \cdot \mathbf{j}_{mp}; \quad (7.39)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \cdot (\mathbf{j}_{es} + \mathbf{j}_{ep}); \quad (7.40)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi(\rho_{es} + \rho_{ep}); \quad (7.41)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 4\pi \rho_{mp}. \quad (7.42)$$

Эта система все еще остается несимметричной из-за того, что при ее выводе заведомо предполагалось отсутствие свободных магнитных зарядов, то есть для магнитной компоненты вместо соотношения типа (7.6) использовалось соотношение (7.5).

Если теперь положить, что в среде свободные электрические заряды отсутствуют, то есть она является диэлектриком (как это имеет место для ферритов), так что  $\rho_{es} = 0$  и  $\mathbf{j}_{es} = 0$ , то уравнения приобретают полностью симметричный вид:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \cdot \mathbf{j}_{mp}; \quad (7.43)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \cdot \mathbf{j}_{ep}; \quad (7.44)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho_{ep}; \quad (7.45)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 4\pi \rho_{mp}. \quad (7.46)$$

### 7.3.1. Поля и потенциалы, создаваемые магнитными зарядами

Учтем теперь, что излучение электромагнитных волн, являющееся основным предметом изучения в настоящей главе, происходит из ферритовой пленки, обладающей слабыми диэлектрическими, но сильными магнитными свойствами. Так диэлектрическая проницаемость, например, железиттриевого граната не превышает 10–15, тогда как магнитная вблизи ферромагнитного резонанса, то есть как раз в тех условиях, когда имеет место распространение ПМСВ, может достигать нескольких тысяч [175–177]. В этом случае можно полагать, что магнитные заряды и токи сильно преобладают над электрическими, так что в уравнениях (7.43)–(7.46) электрические заряды и токи можно положить равными нулю. При этом система (7.43)–(7.46) принимает вид:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \cdot \mathbf{j}_{mp}; \quad (7.47)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad (7.48)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0; \quad (7.49)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 4\pi\rho_{mp}. \quad (7.50)$$

Можно видеть, что эта система совпадает с классической (7.2)–(7.5) или (7.7)–(7.10) с точностью до перемены местами магнитных и электрических величин, а также знаков в первых двух уравнениях, что существа дела не меняет. То есть по отношению к поляризационным магнитным зарядам, создаваемые этими зарядами поля являются: магнитное — потенциальным, а электрическое — соленоидальным. Такое обстоятельство позволяет для этой системы ввести особые магнитные потенциалы, подобные потенциалам в системе с электрическими зарядами. Так из уравнения (7.49) следует, что электрическое поле можно представить как ротор от магнитного векторного потенциала, то есть в виде

$$\mathbf{E} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_m. \quad (7.51)$$

Подстановка этого выражения в (7.48) дает

$$\operatorname{rot} \left( \mathbf{H} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial t} \right) = 0, \quad (7.52)$$

что позволяет приравнять выражение в скобках градиенту от скалярного магнитного потенциала:

$$\mathbf{H} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial t} = \operatorname{grad} \varphi_m, \quad (7.53)$$

так что

$$\mathbf{H} = \operatorname{grad} \varphi_m + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial t}. \quad (7.54)$$

**Замечание.** Здесь в выражении (7.53) в качестве знака перед градиентом выбран плюс, в отличие от традиционно используемого минуса. Физики дела это не меняет, однако сделано для того, чтобы получаемые выражения согласовывались с выбором магнитного потенциала в классической задаче Дэймона–Эшбаха (раздел 2.2.1, формула (2.69)). Знак перед вторым слагаемым в выражении (7.54) отражает знак плюс в уравнении (7.48), в отличие от минуса в подобном уравнении для электрического поля (типа (7.47)).

Подставим (7.54) в (7.47) и учтем известную формулу [191, 209, 267]:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}. \quad (7.55)$$

В результате получаем:

$$\Delta \mathbf{A}_m - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}_m}{\partial t^2} = -\operatorname{grad} \left( \operatorname{div} \mathbf{A}_m + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} \right) + \frac{4\pi}{c} \cdot \mathbf{j}_{mp}. \quad (7.56)$$

Введем условие калибровки Лоренца [267]

$$\operatorname{div} \mathbf{A}_m + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} = 0, \quad (7.57)$$

в результате чего получаем уравнение для векторного магнитного потенциала в виде

$$\Delta \mathbf{A}_m - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}_m}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \cdot \mathbf{j}_{mp}. \quad (7.58)$$

Подставим (7.54) в (7.50):

$$\operatorname{div} \left( \operatorname{grad} \varphi_m + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial t} \right) = 4\pi\rho_m, \quad (7.59)$$

учтем известную формулу [191, 209, 267]

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} a = \Delta a \quad (7.60)$$

и воспользуемся условием калибровки Лоренца, в результате чего получаем уравнение для скалярного магнитного потенциала:

$$\Delta \varphi_m - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial t^2} = 4\pi\rho_{mp}. \quad (7.61)$$

Итак, получены уравнения для потенциалов (7.58), (7.61) и полей (7.51), (7.54), образуемых магнитными зарядами. Сравним их с подобными выражениями для электрических зарядов.

### 7.3.2. Сравнение уравнений для потенциалов и полей, образованных электрическими и магнитными зарядами

Можно видеть, что уравнения для потенциалов и выражения для полей, образованных магнитными зарядами весьма сходны с подобными формулами для электрических зарядов. Для удобства сравнения выпишем здесь их вместе.

#### МАГНИТНЫЕ ЗАРЯДЫ.

Уравнения для потенциалов:

$$\Delta \mathbf{A}_m - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}_m}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \cdot \mathbf{j}_{mp}; \quad (7.62)$$

$$\Delta \varphi_m - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial t^2} = 4\pi\rho_{mp}. \quad (7.63)$$

Поля:

$$\mathbf{E}_m = \operatorname{rot} \mathbf{A}_m; \quad (7.64)$$

$$\mathbf{H}_m = \operatorname{grad} \varphi_m + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial t}. \quad (7.65)$$

Условие калибровки Лоренца:

$$\operatorname{div} \mathbf{A}_m + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} = 0. \quad (7.66)$$

## ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЗАРЯДЫ.

Уравнения для потенциалов:

$$\Delta \mathbf{A}_e - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}_e}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \cdot \mathbf{j}_{ep}; \quad (7.67)$$

$$\Delta \varphi_e - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial t^2} = -4\pi \rho_{ep}. \quad (7.68)$$

Поля:

$$\mathbf{E}_e = -\text{grad } \varphi_e - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t}; \quad (7.69)$$

$$\mathbf{H}_e = \text{rot } \mathbf{A}_e. \quad (7.70)$$

Условие калибровки Лоренца:

$$\text{div } \mathbf{A}_e + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \varphi_e}{\partial t} = 0. \quad (7.71)$$

Из сравнения приведенных выражений можно видеть, что уравнения для потенциалов практически совпадают с точностью до знака правой части, условия калибровки Лоренца совпадают полностью, а выражения для полей изменяются. То есть электрическое поле, образованное магнитным зарядом (7.64) ведет себя так же, как магнитное, образованное электрическим (7.70), а магнитное поле, образованное магнитным зарядом (7.65), с точностью до знака, ведет себя так же, как электрическое, образованное электрическим зарядом (7.69).

## 7.4. Запаздывающие потенциалы

Из характера уравнений для потенциалов (7.62), (7.63), а также (7.67) и (7.68) можно видеть, что все они имеют одинаковую структуру:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(\mathbf{r}, t). \quad (7.72)$$

В математике подобные уравнения называются уравнениями Даламбера. Левая часть представляет собой волновое уравнение, описывающее свободные волны, а правая — силу, возбуждающую эти волны. В левой части выступают потенциалы, а в правой — возбуждающие их заряды или токи от этих зарядов. Уравнения в целом позволяют получить поля в какой-то заданной точке пространства, создаваемые зарядами, находящимися в другой точке, удаленной от первой. Связь между точками, то есть передача полей, осуществляется посредством волн, имеющих конечную скорость распространения. Поскольку точки возбуждения и наблюдения разнесены в пространстве, то волне на преодоление расстояния между ними требуется определенное время. То есть поля в точке наблюдения определяются состоянием зарядов, по времени произошедшем раньше момента наблюдения, так что

происходит запаздывание наблюдаемых полей относительно момента их возбуждения.

Уравнение Даламбера (7.72) имеет решение вида [267]

$$u(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \int_{V'} \frac{f\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \quad (7.73)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус вектор от начала координат до точки наблюдения,  $\mathbf{r}'$  — радиус-вектор точки расположения заряда, причем интегрирование производится по всей области, содержащей заряды.

Такое решение носит название «запаздывающего потенциала». То есть потенциал в точке наблюдения определяется состоянием заряда в момент времени

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}, \quad (7.74)$$

предшествующий наблюдению на время, равное прохождению волны от местоположения заряда до точки наблюдения.

Уравнения для потенциалов (7.62), (7.63), (7.67) и (7.68) содержат заряды и токи не точечные, а распределенные в пространстве с заданной плотностью.

С математической стороны удобнее разрешить эти уравнения для точечных зарядов, что позволяет при интегрировании воспользоваться свойствами дельта-функции. При этом для уравнений (7.67) и (7.68) плотности зарядов и токов берутся в виде [267]:

$$\rho = e \cdot \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0); \quad (7.75)$$

$$\mathbf{j} = e \cdot \mathbf{v}_0 \cdot \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0), \quad (7.76)$$

где  $\mathbf{r}_0$  — радиус-вектор точечного заряда, а  $\mathbf{v}_0$  — его скорость.

Получаемые таким путем из уравнений (7.67), (7.68) потенциалы называются «запаздывающими потенциалами Лиенара–Вихерта» и имеют вид [267]:

$$\mathbf{A}_e = \frac{e \cdot \mathbf{v}_0}{c \cdot \vartheta}; \quad (7.77)$$

$$\varphi_e = \frac{e}{\vartheta}, \quad (7.78)$$

где:

$$\vartheta = R(\tau) - \frac{\mathbf{v}_0(\tau) \cdot \mathbf{R}(\tau)}{c}, \quad (7.79)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \quad (7.80)$$

$$\tau = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{c}. \quad (7.81)$$

**Замечание.** Здесь для параметра запаздывания (7.79) используется обозначение « $\vartheta$ », в отличие от традиционного « $\lambda$ » [267] для того, чтобы избежать путаницы с длиной волны, обычно обозначаемой через « $\lambda$ ».

Далее с помощью выражений (7.69), (7.70) эти потенциалы позволяют получить поля, создаваемые электрическими зарядами и токами. Явный вид этих выражений можно найти в [266, 267], поэтому здесь не приводим, а обратимся далее к вычислению полей, создаваемых магнитными зарядами, которые обозначим через  $e_m$ . Явный вид магнитных зарядов и их выражение через намагниченность ПМСВ определим в следующих разделах, а на данном этапе по аналогии с электрическими будем считать магнитные заряды точечными и перейдем к определению создаваемых ими полей.

### 7.5. Поля, определяемые магнитными зарядами

Потенциалы Лиенара–Вихерта, являющиеся решениями уравнений (7.62), (7.63) для точечных магнитных зарядов типа (7.75), (7.76), принимают вид:

$$\mathbf{A}_m = \frac{e_m \cdot \mathbf{v}_{m0}}{c \cdot \vartheta_m}; \quad (7.82)$$

$$\varphi_m = \frac{e_m}{\vartheta_m}, \quad (7.83)$$

а входящие в эти формулы выражения аналогичны (7.79)–(7.81).

Выполняя преобразования, аналогичные проводимым при получении полей из потенциалов Лиенара–Вихерта [267], с учетом перемены ролей электрического и магнитного поля в выражениях (7.64) и (7.65) относительно (7.69) и (7.70), получаем поля, создаваемые движущимся магнитным зарядом, в виде:

$$\mathbf{E}_m = -e_m \cdot \frac{\left(1 - \frac{v_m^2}{c^2}\right)}{c\vartheta_m^3} \cdot [\mathbf{R}_m \times \mathbf{v}_m] + \frac{e_m}{c^2 \vartheta_m^2} \cdot \left\{ -[\mathbf{R}_m \times \mathbf{w}_m] + \frac{R_m^2}{c\vartheta_m} \cdot [\mathbf{v}_m \times \mathbf{w}_m] \right\}; \quad (7.84)$$

$$\mathbf{H}_m = e_m \cdot \frac{1 - \frac{v_m^2}{c^2}}{\vartheta_m^3} \cdot \left( \mathbf{R}_m - \frac{R_m}{c} \cdot \mathbf{v}_m \right) + \frac{e_m}{c^2 \vartheta_m^3} \cdot \left[ \mathbf{R}_m \times \left[ \left( \mathbf{R}_m - \frac{R_m}{c} \cdot \mathbf{v}_m \right) \times \mathbf{w}_m \right] \right], \quad (7.85)$$

где  $\mathbf{R}_m$  — вектор расстояния от заряда до точки наблюдения, равный

$$\mathbf{R}_m = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{m0}; \quad (7.86)$$

так что  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения, отсчитываемый от начала координат,  $\mathbf{r}_{m0}$  — радиус-вектор заряда, отсчитываемый от начала координат,  $\mathbf{v}_m$  — скорость и  $\mathbf{w}_m$  — ускорение движения магнитного

заряда (нули в индексах для простоты опущены),  $c$  — скорость света, а параметр запаздывания  $\vartheta_m$  равен

$$\vartheta_m = R_m - \frac{\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{R}_m}{c}. \quad (7.87)$$

Выражения (7.84), (7.85) описывают поля в момент времени  $t$ , а величины  $\mathbf{v}_m$ ,  $\mathbf{w}_m$  и  $\mathbf{R}_m$  задаются в момент времени  $t'$ , определяемый тем, что время распространения ЭМВ из точки нахождения заряда в момент  $t'$  до точки наблюдения равно  $t - t'$ , то есть  $t'$  удовлетворяет уравнению [266, 267]:

$$t - t' = \frac{R_m(t')}{c}. \quad (7.88)$$

Это уравнение содержит неизвестную  $t'$  под знаком функции расстояния  $R_m$ , соответствующего моменту  $t'$ . Эта функция определяется конкретной траекторией движения заряда и может быть достаточно сложной. Простейшим случаем является движение заряда вдоль линии, соединяющей начало координат с точкой наблюдения. В этом случае при движении заряда с ускорением величина  $R_m$  линейно зависит от квадрата времени  $t'$ , так что уравнение (7.88) становится квадратным. В других случаях для его решения необходимо более подробное рассмотрение с учетом конкретного закона и траектории движения заряда.

Из рассмотрения выражений (7.84), (7.85) можно видеть, что они связаны соотношениями:

$$\mathbf{E}_m = \frac{\vartheta_m}{R_m^2} \cdot [\mathbf{R}_m \times \mathbf{H}_m]; \quad (7.89)$$

$$\mathbf{H}_m = -\frac{1}{\vartheta_m} \cdot [\mathbf{R}_m \times \mathbf{E}_m]. \quad (7.90)$$

Справедливость формул (7.89), (7.90) можно проверить непосредственной подстановкой друг в друга с использованием формулы [209]:

$$[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]] = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \quad (7.91)$$

Таким образом, далее достаточно ограничиться расчетом лишь электрического поля, после чего магнитное можно получить с помощью (7.90).

### 7.6. Поля излучаемых волн

Учтем теперь, что в реальных экспериментах скорость ПМСВ, как правило, значительно меньше скорости света, так что отношение  $v_m/c$  значительно меньше единицы. Поэтому в выражении (7.87) вторым слагаемым можно пренебречь и считать, что  $\vartheta_m \approx R_m$ . В таком приближении можно видеть, что первые слагаемые в выражениях (7.84) и (7.85) на больших расстояниях от места расположения зарядов (то есть при  $R_m \rightarrow \infty$ ) спадают пропорционально  $1/R_m^2$ , а вторые —

спадают пропорционально  $1/R_m$ . Излучение характеризуется именно сравнительной медленностью спада полей волн на больших расстояниях [178, 267], так что можно считать, что в выражениях (7.84), (7.85) за излучение ЭМВ ответственны именно вторые слагаемые.

Таким образом, создаваемые магнитным зарядом электрическое и магнитное поля, соответствующие излучаемой ЭМВ, имеют вид:

$$\mathbf{E}_m = \frac{e_m}{c^2 \vartheta_m^2} \cdot \left\{ -[\mathbf{R}_m \times \mathbf{w}_m] + \frac{R_m^2}{c \vartheta_m} \cdot [\mathbf{v}_m \times \mathbf{w}_m] \right\}; \quad (7.92)$$

$$\mathbf{H}_m = \frac{e_m}{c^2 \vartheta_m^3} \cdot \left\{ [\mathbf{R}_m \times [\mathbf{R}_m \times \mathbf{w}_m]] - \frac{R_m}{c} \cdot [\mathbf{R}_m \times [\mathbf{v}_m \times \mathbf{w}_m]] \right\}, \quad (7.93)$$

где выражение (7.92) получено из второго слагаемого (7.85) путем раскрытия круглых скобок.

Полученные выражения для полей содержат слагаемые двух видов. Первые, пропорциональные  $[\mathbf{R}_m \times \mathbf{w}_m]$ , равны нулю в случае, когда векторы  $\mathbf{R}_m$  и  $\mathbf{w}_m$  параллельны друг другу и отличны от нуля, если эти векторы не параллельны.

Вторые, пропорциональные  $[\mathbf{v}_m \times \mathbf{w}_m]$ , отличны от нуля только если векторы  $\mathbf{v}_m$  и  $\mathbf{w}_m$  не параллельны, то есть в том случае, когда ускорение движения заряда не параллельно его скорости, так что заряд движется по кривой линии. Однако в экспериментах [75, 137–139] распространение ПМСВ происходит всегда по прямой, перпендикулярной направлению постоянного поля, так что вектор ускорения волны всегда параллелен вектору ее скорости (оба параллельны оси  $Oy$  на рис. 7.1). В такой ситуации вторые слагаемые в выражениях (7.92), (7.93) равны нулю, так что отличными от нуля остаются только первые, и поля излучаемой волны принимают вид:

$$\mathbf{E}_m = -\frac{e_m}{c^2 \vartheta_m^2} \cdot [\mathbf{R}_m \times \mathbf{w}_m]; \quad (7.94)$$

$$\mathbf{H}_m = \frac{e_m}{c^2 \vartheta_m^3} \cdot [\mathbf{R}_m \times [\mathbf{R}_m \times \mathbf{w}_m]]. \quad (7.95)$$

Поскольку эти выражения являются частным случаем (7.84), (7.85), то и для них выполнение соотношений (7.89), (7.90) также имеет место, в чем можно убедиться прямой проверкой с использованием формулы (7.91).

В случае малой скорости движения заряда, то есть при  $v_m \ll c$ , так что  $\vartheta_m \approx R_m$ , соотношения (7.89)–(7.90) переходят в следующие:

$$\mathbf{E}_m = \frac{1}{R_m} \cdot [\mathbf{R}_m \times \mathbf{H}_m]; \quad (7.96)$$

$$\mathbf{H}_m = -\frac{1}{R_m} \cdot [\mathbf{R}_m \times \mathbf{E}_m]. \quad (7.97)$$

Во все выражения (7.94)–(7.97) входит векторное произведение  $[\mathbf{R}_m \times \mathbf{w}_m]$ , равное нулю в случае параллельности векторов  $\mathbf{R}_m$  и  $\mathbf{w}_m$ . Это означает, что излучение вдоль направления движения заряда

(то есть вдоль оси  $Oy$  на рис. 7.1), отсутствует, как это и наблюдается в эксперименте [75, 137–139].

Из выражений (7.96), (7.97), соответствующих достаточно удалению точки наблюдения от излучателя и приближению  $v_m \ll c$ , можно видеть, что электрическое и магнитное поля распространяющейся волны взаимно перпендикулярны и по абсолютной величине равны друг другу, что соответствует обычной плоской волне. Таким образом, следует (в частности, из формулы (7.94) для поля  $E_m$ ), что именно упомянутое произведение  $[\mathbf{R}_m \times \mathbf{w}_m]$  отвечает за формирование диаграммы направленности излучаемых волн, как это будет рассмотрено далее.

### 7.6.1. Поле излучения от точечного заряда

Полученные выражения для полей являются общими. Упростим их для некоторых частных случаев. Ограничимся рассмотрением только электрического поля, так как магнитное может быть получено из электрического в соответствии с соотношением (7.97).

Прежде всего предположим, что для ПМСВ скорость  $\mathbf{v}_m$  и ускорение  $\mathbf{w}_m$  параллельны. При этом в выражении для поля (7.92), как и ранее, остается лишь одно первое слагаемое.

Положим, что векторы  $\mathbf{R}_m$  и  $\mathbf{w}_m$  лежат в одной плоскости  $Oxy$  и введем угол  $\alpha$  между осью  $Oy$  и вектором  $\mathbf{R}$  (рис. 7.1). При этом вектор, соответствующий произведению  $[\mathbf{R}_m \times \mathbf{w}_m]$ , будет направлен вдоль оси  $Oz$ .

Предположим далее, что область локализации зарядов мала по сравнению с расстоянием до точки наблюдения. При этом для различных зарядов в этой области  $R_m$  меняется мало, поэтому можно считать  $R_m$ ,  $\vartheta_m$  и  $\alpha$  постоянными.

При сделанных предположениях поле, создаваемое точечным зарядом  $e_m$ , приобретает вид:

$$\mathbf{E}_m = -\frac{e_m R_m w_m \sin \alpha}{c^2 \vartheta_m^2} \cdot \mathbf{n}_z. \quad (7.98)$$

Из этого выражения видно, что электрическое поле направлено по оси  $Oz$ , то есть излучаемая ЭМВ поляризована именно по этой оси.

Этот вывод объясняет наблюдаемую в эксперименте поляризацию излучаемой ЭМВ [75, 137–139]. При переходе от верхней полуплоскости к нижней (замене  $\alpha$  на  $-\alpha$ ), знак  $E_m$  меняется, то есть ЭМВ, излучаемые в верхнее и нижнее полупространства, находятся в противофазе, что тоже желательно было бы проверить в эксперименте.

Учитывая, что в принятой геометрии векторы  $\mathbf{R}_m$  и  $\mathbf{v}_m$  оба лежат в плоскости  $Oxy$  и составляют между собой угол  $\alpha$ , для параметра запаздывания  $\vartheta_m$ , определяемого формулой (7.87), получаем:

$$\vartheta_m = R_m - \frac{\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{R}_m}{c} = R_m \cdot \left( 1 - \frac{v_m}{c} \cos \alpha \right). \quad (7.99)$$

Подставляя (7.99) в (7.98), получаем абсолютную величину электрического поля в виде

$$E_m = -\frac{e_m w_m}{c^2 R_m} \cdot \frac{\sin \alpha}{\left(1 - \frac{v_m}{c} \cdot \cos \alpha\right)^2}. \quad (7.100)$$

Эта формула состоит из двух сомножителей: первый (амплитудный) не зависит от направления на точку наблюдения и определяет интенсивность излучаемой ЭМВ, второй (ориентационный) зависит от угла  $\alpha$  между направлением распространения ПМСВ и направлением на точку наблюдения, так что определяет диаграмму направленности. При этом оба сомножителя зависят от координат  $x, y, z$  в области локализации точечного заряда.

### 7.6.2. Диаграмма направленности излучения от одного заряда

Диаграмма направленности излучения определяется плотностью энергии излучаемых волн в точке наблюдения. На достаточном расстоянии от излучателя, в области, поперечный размер которой мал по сравнению с этим расстоянием, волны можно считать плоскими, для которых плотность электрической энергии равна плотности магнитной и определяется квадратом электрического или магнитного поля волны, а полная плотность энергии имеет вид [269]:

$$U = \frac{1}{4\pi} E^2 = \frac{1}{4\pi} H^2. \quad (7.101)$$

Для расчета плотности энергии излученной волны воспользуемся выражением для электрического поля (7.100), в результате чего получаем диаграмму направленности излучения от одного заряда в следующем виде:

$$U_{em} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e_m w_m}{c^2 R_m}\right)^2 \cdot \left[\frac{\sin \alpha}{\left(1 - \frac{v_m}{c} \cdot \cos \alpha\right)^2}\right]^2. \quad (7.102)$$

Такую диаграмму обеспечивает единичный магнитный заряд. Однако распространение ПМСВ сопровождается не единичным, а распределенным в пространстве зарядом, то есть при расчете диаграммы направленности необходимо учитывать такое распределение, что и будет сделано в следующих разделах.

## 7.7. Поле излучения от распределенного заряда

В разделе 7.6.1 были получены выражения для электрического поля ЭМВ, излучаемой точечным магнитным зарядом  $e_m$ . Однако при распространении ПМСВ магнитные заряды не являются точечными,

а неоднородно распределены в пространстве магнитной пленки с объемной плотностью, определяемой формулой (7.20)

$$\rho_{mp} = -\operatorname{div} \mathbf{M}. \quad (7.103)$$

Таким образом, плотность поляризационных магнитных зарядов  $\rho_{mp}$  определяется через намагниченность среды  $\mathbf{M}$ , образуемой распространяющейся ПМСВ.

Чтобы определить пространственное распределение излучаемой энергии, надо найти поле, создаваемое всей совокупностью зарядов, движущихся в магнитной пленке. Полное поле в точке наблюдения В (рис. 7.1) получается как интеграл от полей распределенных зарядов по окрестности точки А, границы которой определяются областью существования и движения магнитных зарядов. Квадрат полученного поля определяет плотность излучаемой энергии, что дает диаграмму направленности излучения.

Полная энергия, достигающая приемника, находящегося вблизи точки В, равна интегралу от плотности энергии в точке В по апертуре антенны приемника. Однако в данном рассмотрении касаться приемника не будем, так что ограничимся только вычислением плотности излучаемой энергии в точке наблюдения.

Как и ранее, будем рассматривать только электрическое поле. Переходя в формуле (7.100) от точечного заряда к распределенному и выполняя интегрирование по объему, в котором находятся распределенные заряды, получаем поле излучаемой волны в виде

$$E_m = -\frac{1}{c^2} \cdot \int_{V_m} \frac{\rho_{mp} w_m}{R_m} \cdot \frac{\sin \alpha}{\left(1 - \frac{v_m}{c} \cdot \cos \alpha\right)^2} \cdot dV_m, \quad (7.104)$$

где  $V_m$  — объем, занимаемый распределенными зарядами.

### 7.7.1. Приближения, следующие из эксперимента

Интеграл, входящий в формулу (7.104), достаточно сложен, поэтому сначала рассмотрим допущения, следующие из экспериментов [75, 137–139].

В формуле (7.104) величины  $\rho_{mp}$ ,  $w_m$  и  $v_m$  определяются законом дисперсии ПМСВ. Заметим прежде всего, что в области излучения скорость ПМСВ приближается к скорости ЭМВ, поэтому не выполняются условия магнитостатического приближения и ПМСВ приобретает электрическое поле, меняющее закон дисперсии [1, 75, 175–177]. Однако, в экспериментах [75, 137–139] длина, как ПМСВ, так и области излучения не превышают единиц миллиметров, а длина ЭМВ составляет 10–15 см, что больше на один-два порядка. Поэтому электрическое поле ПМСВ на длине области излучения не успевает достаточно развиться и существенно изменить длину ПМСВ раньше, чем она излучится в виде ЭМВ.

Поскольку пространственное распределение излучаемого поля обусловлено интерференционными эффектами от различных точек области излучения, то, в силу малости изменения в этой области длины ПМСВ, диаграмма направленности излучения также меняется мало. Поэтому далее с целью упрощения вычислений будем использовать закон дисперсии ПМСВ в магнитостатическом приближении [1, 143].

Теперь учтем, что размер области излучения вдоль оси  $Oz$  (рис. 7.1) значительно меньше длины ЭМВ. Это позволяет предположить, что динамическая намагниченность в области излучения не зависит от  $z$ , то есть в формуле (7.104) интегрирование по  $z$  можно заменить умножением на ширину пучка ПМСВ, определяемую длиной возбуждающего преобразователя  $b$  (рис. 7.1).

Учтем далее, что толщина ферритовой пленки  $d$  составляет 10–50 мкм, а глубина проникновения ПМСВ в толщу пленки в области излучения близка к длине ЭМВ, измеряемой сантиметрами. Поэтому динамическую намагниченность по толщине пленки можно считать однородной, а в (7.104) интегрирование по  $x$  заменить умножением на  $d$ .

В экспериментах точка наблюдения удалена от ферритовой пленки на расстояние, более чем на порядок превышающее ее размеры. Поэтому длину  $R_m$ , угол  $\alpha_s$  и время  $t'$  можно считать постоянными.

Таким образом, будем считать, что плотность магнитных зарядов  $\rho_{mp}$  меняется только в направлении распространения ПМСВ, то есть зависит только от  $y$ . При этом по координате  $x$  в пределах толщины магнитной пленки  $d$ , а также по координате  $z$  в пределах ширины пучка ПМСВ, задаваемой длиной преобразователя  $b$  (рис. 7.1), она постоянна, а вне этих размеров — равна нулю. Учитывая, что ПМСВ распространяется вдоль оси  $Oy$  в пределах от 0 до  $y_m$ , где  $y_m$  — максимальная координата, до которой по условию задачи доходит ПМСВ, получаем поле в виде

$$E_m = -\frac{b \cdot d}{c^2} \cdot \int_0^{y_m} \frac{\rho_{mp}(y) \cdot w_m}{R_m} \cdot \frac{\sin \alpha}{\left(1 - \frac{v_m}{c} \cdot \cos \alpha\right)^2} \cdot dy. \quad (7.105)$$

Эта формула является основной для расчета поля излучаемой волны в случае произвольной зависимости плотности заряда  $\rho_{mp}$  от координаты  $y$ .

Диаграмма направленности излучения, в соответствии с (7.101), принимает вид:

$$U = \frac{b^2 \cdot d^2}{4\pi c^4} \cdot \left[ \int_0^{y_m} \frac{\rho_{mp}(y) \cdot w_m}{R_m} \cdot \frac{\sin \alpha}{\left(1 - \frac{v_m}{c} \cdot \cos \alpha\right)^2} \cdot dy \right]^2. \quad (7.106)$$

При этом величина  $y_m$  определяется верхней полевой границей спектра ПМСВ на заданной частоте. Если поле зависит от  $y$  линейно

с коэффициентом  $\eta$ , то есть:

$$H = H_0 \cdot (1 + \eta \cdot y), \quad (7.107)$$

то:

$$y_m = \frac{1}{\alpha H_0} \cdot \left[ - (H_0 + 2\pi M_0) + \sqrt{(2\pi M_0)^2 + \left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2} \right], \quad (7.108)$$

где:  $\eta > 0$ ,  $H_0$  — поле при  $y = 0$ ,  $\omega$  — частота СВЧ,  $\gamma$  — гиромагнитное отношение,  $M_0$  — намагниченность насыщения ферритовой пленки.

Интеграл, входящий в формулы (7.105) и (7.106), довольно сложен, поэтому рассмотрим некоторые упрощения.

### 7.7.2. Усреднение намагниченности

Учтем теперь, что, благодаря периодичности ПМСВ вдоль оси  $Oy$ , распределение магнитных зарядов вдоль этой оси также периодически, в результате чего поля от зарядов разных знаков взаимно компенсируются. Так как длина ПМСВ по мере распространения увеличивается, то нескомпенсированным остается лишь участок на конце области распространения ПМСВ от координаты  $y_b$  до координаты  $y_e$  — «область излучения», показанная утолщенным пунктиром на рис. 7.1.

Можно полагать, что основное излучение ЭМВ происходит именно из этой области, причем, благодаря ее малости, скорость  $v_m$  и ускорение  $w_m$  меняются мало, так что заменим далее скорость и ускорение в области излучения их усредненными значениями  $v_{m0}$  и  $w_{m0}$ . Предположим также, что точка наблюдения удалена от области излучения на значительное расстояние, так что величину  $R_m$  также можно положить равной постоянной величине  $R_{m0}$ . В этом случае и угол  $\alpha$  можно считать постоянным, так что обозначим его через  $\alpha_0$ . Подставляя такие усредненные значения в (7.105), получаем:

$$E_m = -\frac{b \cdot d \cdot w_{m0}}{c^2 R_{m0}} \cdot \frac{\sin \alpha_0}{\left(1 - \frac{v_{m0}}{c} \cdot \cos \alpha_0\right)^2} \cdot \int_{y_b}^{y_e} \rho_{mp}(y) \cdot dy. \quad (7.109)$$

Учитывая, что ПМСВ распространяются вдоль оси  $Oy$ , получаем:

$$\rho_m(y) = -\operatorname{div} \mathbf{M} = -\frac{\partial M_y}{\partial y}. \quad (7.110)$$

Предположим далее, что благодаря компенсации зарядов разных знаков, суммарная намагниченность при  $y < y_b$  равна нулю, а далее ее значение равно постоянной величине  $M_{yp}$ , соответствующей намагниченности ПМСВ в середине области излучения, то есть в точке  $A$  при координате

$$y_p = \frac{y_e - y_b}{2}. \quad (7.111)$$

При этом входящий в формулу (7.109) интеграл принимает вид

$$\int_{y_b}^{y_e} \rho_{mp}(y) \cdot dy = M_{yp}. \quad (7.112)$$

Подставляя найденное значение интеграла в выражение для поля, находим:

$$E_m = -\frac{b \cdot d \cdot w_{m0} \cdot M_{yp}}{c^2 R_{m0}} \cdot \frac{\sin \alpha_0}{\left(1 - \frac{v_{m0}}{c} \cdot \cos \alpha_0\right)^2}. \quad (7.113)$$

Обозначим постоянный множитель в этой формуле через  $B_s$ , так что

$$B_s = -\frac{b \cdot d \cdot w_{m0} \cdot M_{yp}}{c^2 R_{m0}}. \quad (7.114)$$

При этом получаем поле в виде

$$E_m = B_s \cdot \frac{\sin \alpha_0}{\left(1 - \frac{v_{m0}}{c} \cdot \cos \alpha_0\right)^2}. \quad (7.115)$$

Полная диаграмма направленности по энергии, в соответствии с (7.101), принимает вид:

$$U_{ms} = \frac{B_s^2}{4\pi} \cdot \left[ \frac{\sin \alpha_0}{\left(1 - \frac{v_{m0}}{c} \cdot \cos \alpha_0\right)^2} \right]^2. \quad (7.116)$$

Диаграмма направленности имеет два лепестка, симметричные относительно плоскости ферритовой пленки. Лепестки наклонены вперед по ходу распространения ПМСВ тем сильнее, чем больше скорость ПМСВ приближается к скорости света.

Интенсивность излучения пропорциональна квадрату толщины пленки, что, по-видимому, явилось причиной выбора для экспериментов [75, 138, 139] столь большой толщины, как 50 мкм.

Оценочный расчет по полученной формуле показывает, что максимум наклона лепестков диаграммы направленности лежит в пределах от  $30^\circ$  до  $70^\circ$ , что близко к экспериментальному значению около  $62^\circ$  [75, 138, 139].

Таким образом, полученная приближенная формула (7.116) позволяет, по крайней мере качественно, интерпретировать экспериментальные результаты, приведенные в работах [75, 138, 139], касающиеся диаграммы направленности в плоскости  $Oxy$ . При этом постоянная величина  $B_s$  должна быть определена из условий соответствия расчетных данных эксперименту. Входящие в основную формулу (7.105), зависящие от  $y$  величины  $\rho_m$ ,  $w_m$  и  $v_m$ , а также геометрические параметры области излучения в эксперименте не определяются, однако могут быть рассчитаны, исходя из задачи о распространении ПМСВ в неоднородном поле при известных параметрах этого поля, а также известном дисперсионном соотношении, что и будет сделано далее.

### 7.7.3. Переменная намагниченность

Рассмотрим теперь более точное определение электрического поля, основанное на прямом расчете по формуле (7.104), которую перепишем в форме, содержащей в явном виде координатные зависимости входящих в нее составляющих:

$$E_z = -\frac{1}{c^2} \int \frac{\rho_m(x, y, z) \cdot w_m(x, y, z) \cdot \sin \alpha(x, y, z)}{\left(1 - \frac{v_m(x, y, z)}{c} \cdot \cos \alpha(x, y, z)\right)^2} R(x, y, z) dx dy dz. \quad (7.117)$$

В эту формулу входят зависящие от координат скорость  $v_m$ , ускорение  $w_m$ , а также плотность распределенного магнитного заряда  $\rho_m$ , связанная с намагниченностью соотношением (7.20).

Не прибегая к усреднению, эти величины можно определить, исходя из явного вида дисперсионного соотношения, в случае пленки со свободными поверхностями являющегося решением задачи Дэймона–Эшбаха [143] и в обозначениях раздела 2.2.8 имеющего вид (2.69):

$$\beta - 1 - 2\mu\alpha \operatorname{cth}(k d \alpha) = 0, \quad (7.118)$$

где введены вспомогательные параметры:

$$\alpha = \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{\mu}}, \quad (7.119)$$

$$\beta = (\nu^2 - \mu^2 + \mu) \cos^2 \varphi - \mu, \quad (7.120)$$

а входящие в них величины  $\mu$  и  $\nu$  определяются соотношениями (2.39)–(2.40).

Для оценки ограничимся распространением волны вдоль оси  $Oy$ , так что  $\varphi = 0$ , откуда  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \nu^2 - \mu^2$ . При этом для всех величин, входящих в (7.117), остается зависимость только от координаты  $y$ , в том числе  $\rho_m$  приобретает вид:

$$\rho_m(y) = -\frac{\partial M_y}{\partial y}. \quad (7.121)$$

Приведем получающиеся при этом выражения.

*Скорость.* Фазовая скорость волны определяется по формуле:

$$v(y) = \frac{\omega}{k(y)}, \quad (7.122)$$

где частота  $\omega$  — величина постоянная, а волновое число  $k(y)$  определяется из дисперсионного соотношения Дэймона–Эшбаха, разрешенного относительно  $k$  (2.72):

$$k = \frac{1}{2d} \cdot \ln \frac{\nu^2 - \mu^2 + 2\mu - 1}{\nu^2 - \mu^2 - 2\mu - 1}, \quad (7.123)$$

Таким образом, из (7.122) и (7.123) получаем скорость в виде

$$v(y) = 2\omega d \cdot \left( \ln \frac{\nu^2 - \mu^2 - 1 + 2\mu}{\nu^2 - \mu^2 - 1 - 2\mu} \right)^{-1}, \quad (7.124)$$

где  $\mu$  и  $\nu$  определяются выражениями (2.39)–(2.40).

*Ускорение.* Из классического определения ускорения, зависящего от координаты  $y$ , получаем

$$w(y) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}. \quad (7.125)$$

Полагая

$$\frac{dy}{dt} = v, \quad (7.126)$$

получаем

$$w(y) = v \cdot \frac{dv}{dy}. \quad (7.127)$$

Учитывая (7.122), находим

$$w(y) = \frac{\omega}{k} \cdot \frac{d}{dy} \left( \frac{\omega}{k} \right) = -\frac{\omega^2}{k^3} \cdot \frac{dk}{dy}, \quad (7.128)$$

откуда при  $\varphi = 0$  получаем

$$w(y) = -\frac{2\omega^2}{k^3 d} \cdot \frac{(\mu^2 + \nu^2 - 1) \cdot \frac{d\mu}{dy} - 2\mu\nu \frac{d\nu}{dy}}{(\mu^2 - \nu^2 + 1)^2 - 4\mu^2}, \quad (7.129)$$

где  $\frac{d\mu}{dy}$  и  $\frac{d\nu}{dy}$  в соответствии с (2.39) и (2.40) равны:

$$\frac{d\mu}{dy} = -\frac{\Omega_H^2 + \Omega^2}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2} \cdot \frac{d\Omega_H}{dy}, \quad (7.130)$$

$$\frac{d\nu}{dy} = -\frac{2\Omega_H\Omega}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2} \cdot \frac{d\Omega_H}{dy}, \quad (7.131)$$

а  $\Omega_H$  зависит от координаты  $y$  в соответствии с зависимостью от той же координаты постоянного поля  $H$ .

*Намагниченность.* Из дисперсионного соотношения Дэймона-Эшбаха при  $\varphi = 0$  получаем  $x$ -компоненту переменной намагниченности (2.134) в виде

$$m_x = -\frac{k}{4\pi} \cdot [(\mu - \nu - 1) \cdot e^{-kx} - g \cdot (\mu + \nu - 1) \cdot e^{kx} \cdot e^{-kd}] \cdot e^{-iky}, \quad (7.132)$$

где

$$g = \frac{\mu - \nu - 1}{\mu + \nu + 1}. \quad (7.133)$$

Выражение для  $y$ -компоненты аналогично с точностью до умножения на  $i$  и изменения знака перед вторым слагаемым, поэтому его не приводим.

Выражение (7.132) зависит от координаты  $x$ , перпендикулярной плоскости пленки. При вычислении поля излучаемой волны производится интегрирование по этой координате, то есть по толщине пленки.

В области излучения, где длина волны значительно превышает толщину пленки, выполняется соотношение:  $kd \ll 1$  (как это дает численная оценка в пределах изменения волнового числа и толщины пленки, принятых в экспериментах [75, 137–139]) так что с достаточной точностью можно считать, что намагниченность по толщине пленки меняется мало и положить  $x = 0$  с дальнейшей заменой интегрирования умножением на толщину пленки  $d$ . Кроме того величина  $e^{-kd}$  при  $kd \ll 1$  приближается к единице, так что все экспоненты в формуле (7.132) можно опустить. В этом случае получаем:

$$m_x = -\frac{k}{2\pi} \cdot \frac{\mu - \nu - 1}{\mu + \nu + 1} \cdot e^{-iky}. \quad (7.134)$$

Выделяя из (7.134) в качестве комплексной амплитуды действительную часть, получаем:

$$m_x = -\frac{k}{2\pi} \cdot \frac{\mu - \nu - 1}{\mu + \nu + 1} \cdot \cos(ky). \quad (7.135)$$

Представим (7.135) в виде произведения трех сомножителей:

$$m_x = V_1 \cdot V_2 \cdot V_3, \quad (7.136)$$

где:

$$V_1 = -\frac{k}{2\pi}; \quad (7.137)$$

$$V_2 = \frac{\mu - \nu - 1}{\mu + \nu + 1}; \quad (7.138)$$

$$V_3 = \cos(ky). \quad (7.139)$$

Определяющую плотность магнитных зарядов  $\rho_m$  производную от намагниченности (7.121) находим по правилам дифференцирования произведения:

$$\frac{\partial m_x}{\partial y} = V_2 \cdot V_3 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial y} + V_1 \cdot V_3 \cdot \frac{\partial V_2}{\partial y} + V_1 \cdot V_2 \cdot \frac{\partial V_3}{\partial y}, \quad (7.140)$$

где:

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial k}{\partial y}; \quad (7.141)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial y} = \frac{2}{(\mu + \nu + 1)^2} \cdot [(\nu + 1) \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} - 2\mu \cdot \frac{\partial \nu}{\partial y}]; \quad (7.142)$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial y} = -\left(k + y \cdot \frac{\partial k}{\partial y}\right) \cdot \sin(ky). \quad (7.143)$$

В этих выражениях  $k$  определяется формулой (7.123),  $\frac{d\mu}{dy}$  и  $\frac{d\nu}{dy}$  — формулами (7.130) и (7.131), а производная от  $k$  по  $y$  имеет вид:

$$\frac{\partial k}{\partial y} = \frac{2}{d} \cdot \frac{(\mu^2 + \nu^2 - 1) \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} - 2\mu\nu \cdot \frac{\partial \nu}{\partial y}}{(\mu^2 - \nu^2 + 1)^2 - 4\mu^2}. \quad (7.144)$$

Полученные формулы (7.124), (7.129) и (7.140) с учетом выражений для входящих в них параметров позволяют с помощью (7.117) рассчитать диаграмму направленности излучения в наиболее общем случае. Однако использование их в сочетании с интегрированием в (7.117) достаточно сложно, поэтому обратимся к некоторым упрощениям, следующим из эксперимента.

## 7.8. Приближения по данным эксперимента

Проведем оценку входящих в формулу (7.117) величин на конкретном числовом примере, близком к экспериментам, описанным в работах [75, 137–139].

Пусть  $z$ -составляющая поля определяется формулой (7.107), в которой  $H_0 = 328$  Э,  $\eta = 0,1006$  см<sup>-1</sup>. Рассмотрим пленку железиттриевого граната (ЖИГ) с намагниченностью насыщения  $4\pi M_0 = 1916$  Гс и толщиной  $d = 50$  мкм.

Так как диаграмма направленности в довольно широком интервале от частоты не зависит [75, 138, 139], для наглядности последующих графических построений возьмем  $f = 2900$  МГц. При этом длина ЭМВ равна 10,345 см, волновое число — 0,6074 см<sup>-1</sup>, скорость  $c$  соответствует скорости света  $3 \cdot 10^{10}$  см сек<sup>-1</sup>. На этой же частоте длина ПМСВ, определяемая из (7.123) при поле, соответствующем  $y = 0$ , равна 0,1375 см, волновое число  $k_0 = 45,7$  см<sup>-1</sup>, скорость —  $3,987 \times 10^7$  см сек<sup>-1</sup>. Те же параметры ПМСВ при предельной координате  $y = y_m$ , определяемой формулой (7.108), равны аналогичным параметрам ЭМВ (10,345 см, 0,6074 см<sup>-1</sup> и  $3 \cdot 10^{10}$  см сек<sup>-1</sup>). Из (7.108) и (7.107) легко получить:  $y_m = 3,783$  см,  $H_m = 452,84$  Э.

В формулу (7.117) входят скорость и ускорение ПМСВ —  $v_m(y)$  и  $w_m(y)$ . Как и ранее (раздел 7.7.2), можно положить их равными средним значениям по области излучения  $v_{m0}$  и  $w_{m0}$ . Более точную оценку этих величин можно выполнить с помощью формул (7.124) и (7.129), где задать параметры поля, соответствующие середине области излучения. В случае необходимости упомянутые формулы позволяют также проследить зависимость  $v_m$  и  $w_m$  от координаты по всей области излучения. Величина  $\rho_m(y)$ , то есть определяющая ее производная  $\partial M/\partial y$ , а также границы области излучения будут определены в следующих разделах на основе введенной далее функции высвечивания.

### 7.8.1. Функция высвечивания

Отметим теперь, что в процессе распространения ПМСВ динамическая намагниченность  $M_y$  уменьшается по двум причинам.

Во-первых, энергия ПМСВ переходит в тепловую энергию решетки за счет процессов магнитной релаксации [175–177]. В экспериментах [75, 138, 139] поле  $H_0$  имело профиль «вала» где такое затухание мало [1], поэтому далее учитывать его не будем.

Во-вторых, энергия ПМСВ переходит в энергию излучаемых ЭМВ — «высвечивается», что сопровождается уменьшением динамической намагниченности до нуля.

Этот вид затухания в области излучения является преобладающим и существенно меняет пространственное распределение динамической намагниченности, а с ним и диаграмму направленности.

Такое уменьшение амплитуды динамической намагниченности можно описать путем умножения  $M_y^{(0)}$  на зависящую от  $y$  «функцию высвечивания»  $G_v(y)$ , которая близка к единице вне области излучения и монотонно спадает до нуля при приближении  $y$  к  $y_m$ . Чтобы найти  $G_v(y)$  в явном виде, надо решить задачу о зависимости коэффициента преобразования ПМСВ в ЭМВ от длины ПМСВ. Однако численный расчет показывает, что диаграмма направленности мало зависит от конкретного вида  $G_v(y)$ , поэтому его можно задать в любом удобном для дальнейших вычислений виде.

Определим свойства функции высвечивания следующим образом:

- 1) При  $y \rightarrow 0$  высвечивание еще не начиналось,  $G_v(y) = 1$ .
- 2) При  $y \rightarrow \infty$  высвечивание полностью закончилось,  $G_v(\infty) = 0$ .
- 3) Высвечивание начинается тогда, когда длина ПМСВ составляет одну десятую длины ЭМВ; пусть при этом  $y = y_p$ , а  $G_v(y_p) = 0,9$ .
- 4) Высвечивание заканчивается тогда, когда длина ПМСВ становится равной длине ЭМВ; пусть при этом  $y = y_m$ , а  $G_v(y_p) = 0,1$ .
- 5) На середине этого интервала, то есть при  $y = y_s = \frac{y_p + y_m}{2}$  функция высвечивания равна  $G_v(y_s) = 0,5$ .

В обозначениях, принятых на рис. 7.1:  $y_b \rightarrow y_p$ ,  $y_e \rightarrow y_m$ , то есть границы области излучения являются именно эти величины  $y_p$  и  $y_m$ , а середина  $y_s$  соответствует точке А (здесь индексы изменены, чтобы подчеркнуть произвольность выбранных условий 1–5).

Принятым выше условиям удовлетворяет, например, функция:

$$G_v(y) = \frac{1}{2} \cdot \{1 - \text{th}[a_m(y - y_s)]\}, \quad (7.145)$$

где  $a_m$  — параметр спада высвечивания, определяемый зависимостью длины ПМСВ от  $y$ .

Для частоты 2900 МГц в соответствии с условием 3 получаем:  $a_m = 5$  см<sup>-1</sup>. При этом  $y_p = 3,194$  см,  $y_m = 3,783$  см,  $y_s = 3,488$  см.

Численный расчет показывает, что изменение координаты середины интервала высвечивания  $y_s$  от 3,0 до 3,7 см меняет лишь длину лепестков диаграммы направленности, не меняя их наклона. Напротив, изменение крутизны спада функции  $G_v(y)$ , задаваемой  $a_m$ , при неизменном значении  $y_s$  меняет наклон лепестков довольно сильно. Действительно, пусть, например, параметр  $a_m$ , а с ним и крутизна спада функции  $G_v(y)$  увеличивается. При этом интенсивность излучения ЭМВ из области между  $y_s$  и  $y_m$  уменьшается. Однако именно в этой области скорость ПМСВ максимально приближается к скоро-

сти света, то есть она играет основную роль в увеличении наклона лепестков диаграммы вперед по ходу ПМСВ. В результате, наклон лепестков суммарной диаграммы, определяемой излучением из всей области между  $y_p$  и  $y_m$ , уменьшается. Далее на конкретном примере будет показано, что увеличение  $a_m$  в четыре раза может привести к увеличению угла отклонения лепестков диаграммы от плоскости пленки с  $45^\circ$  до  $55^\circ$ .

### 7.8.2. Функция координатной зависимости намагниченности

Рассмотрим теперь длину ПМСВ, определяющую последний сомножитель в (7.135). Можно полагать, что при достаточно малых волновых числах, которые как раз и соответствуют излучению ЭМВ, в случае линейного поля (7.107) зависимость волнового числа  $k$  от  $y$ , близка к линейной:

$$k(y) = k_0 - \varepsilon \cdot y, \quad (7.146)$$

где  $k_0$  — волновое число ПМСВ при  $y = 0$ ,  $\varepsilon$  — определено условием:  $k = 0$  при  $y = y_m$ , то есть:

$$\varepsilon = \frac{k_0}{y_m}. \quad (7.147)$$

При принятых выше параметрах:  $k_0 = 45,7 \text{ см}^{-1}$ ,  $\varepsilon = 12,08 \text{ см}^{-2}$ .

Введем вспомогательную функцию  $Y_m$ , определяющую зависимость динамической намагниченности  $M_y$  от  $y$ . Это — как раз та самая функция, которая с точностью до производной является составным сомножителем потенциала при решении уравнения Уокера методом разделения переменных (раздел 2.2.1). Так как ПМСВ представляет собой волновой процесс, то функция  $Y_m$  должна удовлетворять волновому уравнению, в котором с учетом неоднородности поля полагаем волновое число зависящим от координаты:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + [k(y)]^2 \cdot Y = 0, \quad (7.148)$$

где  $k(y)$  определяется формулой (7.146).

В частном случае неоднородного поля вблизи торца аксиально намагниченного цилиндра решение аналогичного уравнения можно выразить через функцию Бесселя [132, 133, 176, 177]. Случай однородного поля при  $\varepsilon = 0$  дает решение Дэймона–Эшбаха [143]:  $Y_m = \exp(ik_0 y)$ . При произвольном  $\varepsilon \neq 0$  точное решение этого уравнения авторам настоящей монографии не известно. В то же время, расчет по формуле (7.117) требует явного вида  $Y_m$ . Однако, численный расчет показывает, что форма диаграммы направленности к точному виду функции  $Y_m$  не критична, важно лишь монотонное увеличение длины ПМСВ вплоть до длины ЭМВ. Такое требование означает, что в случае периодичности  $Y_m$ , в пределах области излучения должна укладываться только часть периода этой функции, например в случае синусоиды — четверть периода, где синусоида будет возрастать. Поэтому подберем

функцию  $Y_m$  из условия, чтобы при каждом заданном значении  $y$  между нулем и  $y_m$  длина волны  $Y_m$  равнялась длине ПМСВ в однородном поле, соответствующем этому значению  $y$ .

Очевидное выражение  $\exp[i(k_0 - \varepsilon y) \cdot y]$  — не подходит, так как для него длина волны максимальна на середине интервала между  $y = 0$  и  $y_m$ .

Численный расчет показывает, что хорошим приближением (единицы процентов) является функция:

$$Y_m = \sin \left[ \left( k_0 - \frac{\varepsilon}{2} \cdot y \right) \cdot y \right]. \quad (7.149)$$

При  $\varepsilon = 0$  она переходит в решение Дэймона–Эшбаха [143]. При  $y \rightarrow 0$  длина волны  $Y_m$ , за счет малости второго слагаемого в круглых скобках, приближается к длине ПМСВ в однородном поле, соответствующем  $y = 0$ . При  $y \rightarrow y_m$ , в соответствии с выбором  $\varepsilon$  из условия  $k(y_m) \rightarrow 0$  (7.147), длина волны возрастает, приближаясь к длине ЭМВ.

### 7.8.3. Приближенный вид динамической намагниченности

Теперь, по аналогии с (7.135), можно представить динамическую намагниченность в виде:

$$M(y) = A \cdot k(y) \cdot G(y) \cdot Y(y), \quad (7.150)$$

откуда, подставляя (7.145), (7.146), (7.149), получаем:

$$M(y) = A \cdot (k_0 - \varepsilon \cdot y) \cdot \{1 - th[a_m(y - y_s)]\} \cdot \sin \left[ \left( k_0 - \frac{\varepsilon}{2} \cdot y \right) \cdot y \right], \quad (7.151)$$

где  $A$  — постоянная величина, задаваемая условиями возбуждения, а  $\varepsilon$  определяется формулой (7.147).

Полученная зависимость намагниченности от координаты  $y$  позволяет найти производную  $\partial M / \partial y$  путем элементарного, хотя и несколько громоздкого дифференцирования, подобно тому, как это было сделано в разделе 7.7.3. Получаемое значение производной, определяющее плотность зарядов  $\rho_m(y)$ , далее может быть использовано для расчета поля излучаемой ЭМВ в соответствии с формулой (7.117).

### 7.8.4. Составляющие интеграла поля излучаемой волны

Оценим теперь количественную картину формирования поля излучаемой волны, для чего обратимся к анализу составляющих интеграла, входящего в (7.117). Рассмотрим зависимости этих составляющих от координаты  $y$ , представленные на рис. 7.2. Кривые построены для частоты 2900 МГц, обеспечивающей большую наглядность рисунка, чем частота 2553 МГц, на которой проводились измерения в работе [138]. Остальные параметры — те же, что и раньше.

На рис. 7.2, а показана функция  $Y_m(y)$ , построенная по формуле (7.149), определяющая зависимость амплитуды динамической намагниченности от координаты  $y$ . Из рисунка видно, что по мере увеличения поля длина ПМСВ увеличивается.

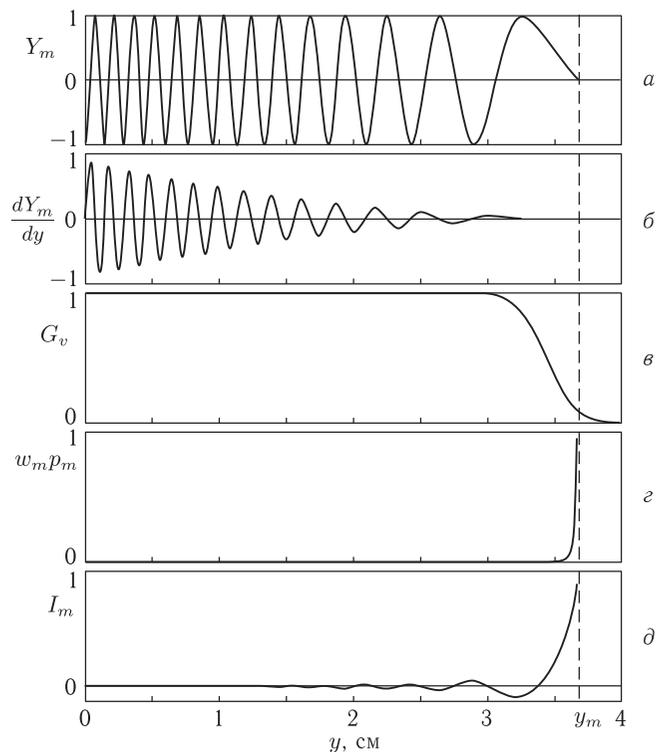


Рис. 7.2. Зависимости характерных составляющих поля излучения от координаты  $y$ . Вертикальная штриховая линия соответствует  $y_m = 3,783$  см.  $a$  – функция амплитуды намагниченности  $Y_m(y)$ ;  $b$  – производная  $dY_m/dy$ ;  $c$  – функция высвечивания  $G_v(y)$ ;  $d$  – произведение ускорения ПМСВ  $w_m$  на сомножитель, зависящий от скорости ПМСВ  $p_m$ ;  $e$  – интеграл  $I_m(y)$ , определяющий поле излучаемой ЭМВ

На рис. 7.2,  $b$  показана производная  $dY_m/dy$ , определяющая плотность магнитных зарядов  $\rho_m$ , сопровождающих распространение ПМСВ. По мере увеличения поля величина магнитных зарядов уменьшается, что обусловлено увеличением длины ПМСВ и соответствующим сглаживанием распределения динамической намагниченности  $M(y)$ .

На рис. 7.2,  $c$  показана функция высвечивания  $G_v(y)$ , определяющая падение амплитуды ПМСВ при приближении к  $y_m$  за счет излучения ЭМВ, построенная по формуле (7.145). Спад функции высвечивания происходит там, где длина ПМСВ приближается к длине ЭМВ.

На рис. 7.2,  $d$  показано произведение ускорения ПМСВ  $w_m(y)$  на функцию  $p_m(y)$ , где

$$p_m(y) = \frac{\sin \alpha}{\left(1 - \frac{v_m(y)}{c} \cdot \cos \alpha\right)^2}, \quad (7.152)$$

построенное при  $\alpha = 45^\circ$ . Видно, что величина  $w_m(y) \cdot p_m(y)$ , определяющая конфигурацию ориентационной зависимости диаграммы направленности, при приближении  $y$  к  $y_m$  резко возрастает. Рост ускорения и скорости магнитных зарядов настолько велик, что, несмотря на уменьшение их плотности в соответствии с кривой рис. 7.2,  $b$ , величина подинтегрального выражения в формуле (7.117) увеличивается, в результате чего интеграл также увеличивается.

На рис. 7.2,  $e$  показан интеграл  $I_m(y)$ , определяющий величину электрического поля излучаемой ПМСВ в формуле (7.117). Видно, что вдали от  $y_m$ , хотя магнитные заряды и велики, но ускорение и скорость ПМСВ малы, а знаки зарядов различны, поэтому излучение практически отсутствует. Вблизи от  $y_m$  магнитные заряды малы, но ускорение и скорость ПМСВ велики, особенно в области последней полуволны динамической намагниченности, знак которой постоянен, поэтому происходит сильное излучение ЭМВ из пленки в открытое пространство.

### 7.9. Формирование диаграммы направленности излучения

Рассмотрим теперь диаграмму направленности излучения ЭМВ, определяемую формулой (7.106). Для намагниченности используем формулу (7.151). Для сравнения с экспериментом, представленным в [138], возьмем частоту 2553 МГц, на которой длина ЭМВ равна 11,7509 см. Поле  $H(y)$  зададим формулой (7.107). Из (7.108) получаем  $y_m = 1,1074$  см.

В то же время, условие ограничения скорости ПМСВ скоростью света при расчете траекторий, подобных приведенным в разделе 6.2.1, дает:  $(y_m)_{TR} = 1,0063$  см. При этом длина ПМСВ  $(\lambda_m)_{TR} = 11,7315$  см близка к длине ЭМВ (11,7509 см). Небольшое различие между  $(y_m)_0$  и  $(y_m)_{TR}$ , по-видимому, обусловлено неучтенным в расчетах при малых волновых числах ( $k \sim 0,5-0,7$  см $^{-1}$ ) переходом закона дисперсии ПМСВ в закон дисперсии ЭМВ.

Так как в основе расчета диаграммы направленности лежит вычисление динамической намагниченности, скорости и ускорения ПМСВ по ее траектории, далее положим  $y_m = (y_m)_{TR} = 1,0063$  см.

Из определения функции высвечивания  $G_v(y)$  по формуле (7.145), получаем:  $y_p = 0,5548$  см,  $y_s = 0,7806$  см,  $a_m = 4,8675$  см $^{-1}$ .

Для рассмотрения характера получаемой диаграммы направленности обратимся к рис. 7.3.

Рассчитанная при этих параметрах нормированная к единице диаграмма направленности показана на рис. 7.3 утолщенной пунктирной линией. Видно, что она имеет два симметричных лепестка, причем максимум верхнего приходится на  $45^\circ$ .

На том же рисунке точками показан верхний лепесток диаграммы направленности, измеренный экспериментально в работах [75, 138, 139].

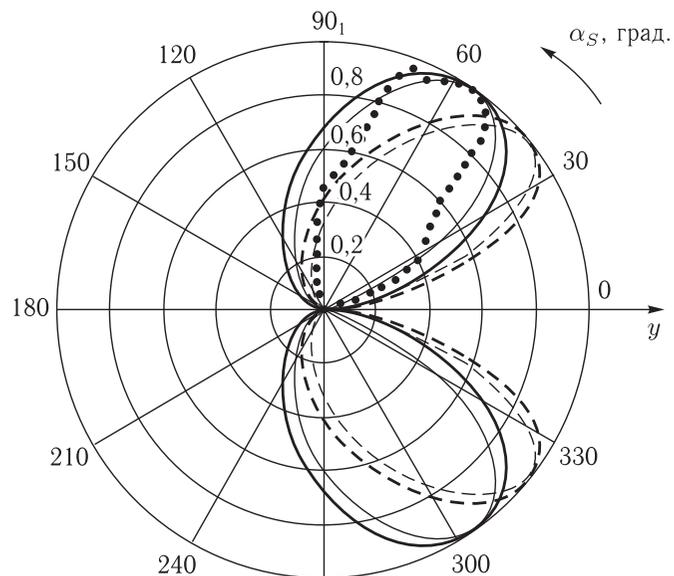


Рис. 7.3. Диаграммы направленности излучения в зависимости от угла  $\alpha$  при разных параметрах задачи. Точки — эксперимент по [75, 138, 139]

Нижний лепесток в этих работах не исследовался. В эксперименте максимум лепестка соответствует  $60^\circ$ , что несколько выше расчетного значения  $45^\circ$ . Расчетная диаграмма шире экспериментальной в 1,5–1,7 раза.

Заметим, что формула (7.106) не имеет каких-либо неопределенных или подгоночных параметров, поэтому, с учетом множественности сделанных при ее выводе предположений, совпадение теории с экспериментом не только качественное, но и количественное, по-видимому, является очень хорошим. Для более точного описания эксперимента надо в формуле (7.151) параметр  $a_m$  умножить на четыре. Рассчитанная при этом диаграмма направленности показана на рис. 7.3 утолщенной сплошной линией и имеет максимум около  $55^\circ$ , а линия, пересекающая ее на две равные части соответствует углу около  $60^\circ$ .

Рассмотрим теперь точность приближенной формулы (7.116). Незвестный заранее параметр  $v_{m0}/c$  был подобран из условия совпадения максимумов лепестков, построенных по обеим формулам. Полученные диаграммы направленности показаны на рис. 7.3 тонкими линиями. При этом пунктир соответствует  $v_{m0}/c = 0,50$ , сплошная линия —  $v_{m0}/c = 0,32$ . Из сравнения утолщенных кривых с тонкими видно, что в обоих случаях диаграммы, построенные по приближенной формуле, несколько уже диаграмм, построенных по точной формуле. Различие не превышает 5%, то есть приближенная формула (7.116), по крайней мере для качественного анализа, вполне пригодна.

### 7.9.1. Частотные свойства диаграммы направленности

Рассмотрим теперь частотные свойства диаграммы направленности, для чего обратимся к рис. 7.4.

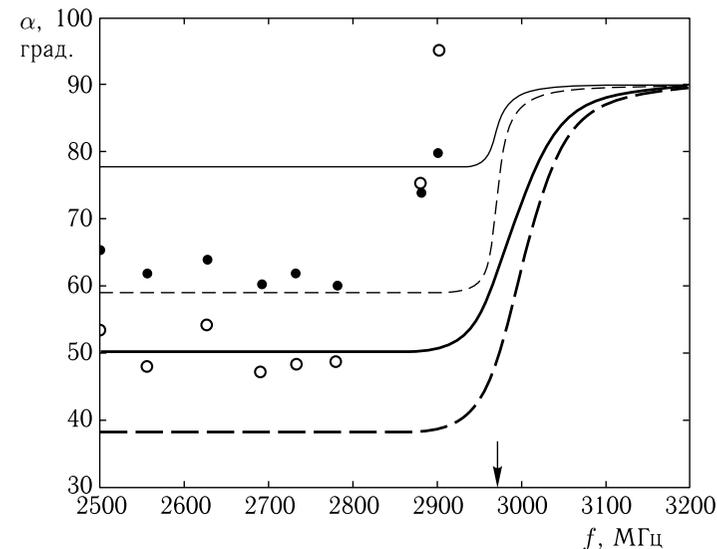


Рис. 7.4. Зависимости угла максимума (утолщенные линии) и ширины (тонкие линии) верхнего лепестка от частоты. Точки и кружки — эксперимент по [75, 138, 139]

На рис. 7.4 показаны зависимости от частоты угла максимума (утолщенные линии) и угловой ширины на половине длины (тонкие линии) для верхнего лепестка. Пунктиры соответствуют  $a_m = 4,8675 \text{ см}^{-1}$ , сплошные линии — тому же  $a_m$ , умноженному на четыре. Точки — эксперимент из работ [75, 138, 139]. Сплошные точки — максимум лепестка, кружки — его ширина.

Длина ферритовой пленки, в соответствии с [75, 138, 139], ограничена на уровне  $y_c = 4,3 \text{ см}$ , что соответствует  $H_c = 469,89 \text{ Э}$ . Частота начала спектра ПМСВ в этом поле  $f_c = 2964,7 \text{ МГц}$  отмечена стрелкой.

На частотах ниже  $f_c$  в пределах пленки всегда имеется поле  $H < H_c$ , где скорость ПМСВ приближается к скорости света, а ее длина — к длине ЭМВ. При этом эффективность излучения высока, наклон лепестков и их ширина от частоты не зависят, кривые на рис. 7.4 горизонтальны.

Для частот выше  $f_c$  поле на краю пленки недостаточно для достижения ПМСВ скорости света, поэтому эффективность излучения падает, наклон лепестков уменьшается, а их ширина увеличивается, кривые резко идут вверх.

При дальнейшем увеличении частоты форма диаграммы приближается к  $U_m \sim (\sin \alpha)^2$ , максимум лепестка и его ширина стремятся к  $90^\circ$ , кривые снова идут горизонтально.

Интенсивность излучаемой ЭМВ с частотой падает чрезвычайно резко. Так, если на частоте 2500 МГц интенсивность равна единице, то на частоте 2900 МГц она составляет 0,3, на частоте 3000 МГц — 0,1, на частоте 3100 МГц —  $10^{-4}$ , а на частоте 3200 МГц —  $10^{-9}$ .

Сравнение с экспериментом показывает, что теория хорошо описывает наличие критической частоты  $f_c$  и ее значение (с точностью 2%), независимость диаграммы направленности от частоты при  $f < f_c$ , а также уменьшение наклона и увеличение ширины лепестков выше  $f_c$ . В то же время, расчетные значения углов отклонения лепестков от плоскости пленки несколько (до 20%) занижены по сравнению с экспериментом, а ширина лепестков — в такой же степени завышена. Возможно, лучшего согласия можно достичь, используя в расчете закон дисперсии ПМСВ с учетом электрического поля.

### 7.10. Диаграмма направленности при произвольной точке наблюдения

Рассмотрим теперь диаграмму направленности при произвольном расположении точки наблюдения относительно ферритовой пленки [161].

Геометрия задачи, аналогичная принятой в работах [75, 138, 139], показана на рис. 7.5. Система координат  $Oxyz$ , связанная с пленкой, тождественна введенной на рис. 7.1. Система координат  $Ox'y'z'$ , связанная с точкой наблюдения, имеет с исходной общую ось  $Oz$ , а плоскость  $Ox'y'$  совпадает с плоскостью  $Oxy$ . Угол между осями  $Oy'$  и  $Oy$  (или  $Ox'$  и  $Ox$ ) равен  $\delta$ .

Из симметрии задачи следует, что полная диаграмма направленности представляет собой цилиндрическую поверхность, описываемую лепестками при вращении вокруг оси  $Oy$ .

Пусть  $C$  — точка наблюдения, в общем случае не принадлежащая плоскости  $Oxy$ . Выберем угол  $\delta$  таким образом, чтобы плоскость  $Oy'z$  проходила через эту точку. Соединим  $O$  с  $C$  и обозначим угол  $\angle BOC$  через  $\beta$ . Построим через  $C$  плоскость, перпендикулярную оси  $Oy$  (в проекции показанную эллипсом), и обозначим точку пересечения этой плоскости с  $Oy$  через  $A$ , с  $Oy'$  через  $B$ . Опустим из  $C$  перпендикуляр на линию пересечения построенной плоскости с плоскостью  $Oyz$  и обозначим полученную точку через  $D$ . Опишем в построенной плоскости радиусом  $AC$  окружность (в проекции — эллипс). Ее точки равноудалены от начала координат, амплитуды полей в них одинаковы, а направления полей определяются формулами типа (7.94) и (7.95) с учетом размазанности зарядов.

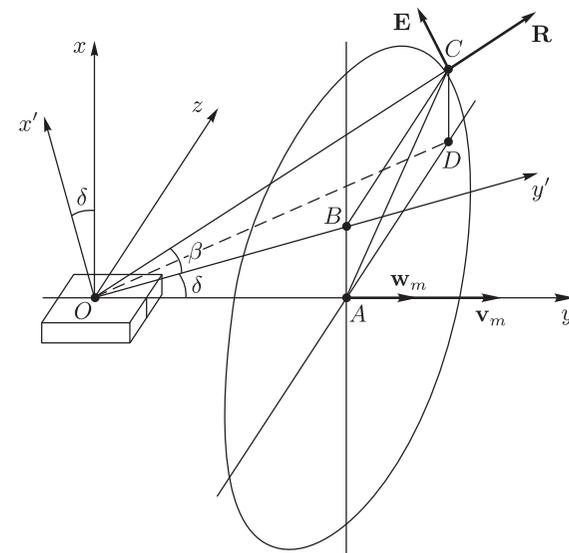


Рис. 7.5. Геометрия задачи для случая произвольного расположения точки наблюдения относительно ферритовой пленки

В такой геометрии вектор, например электрического поля  $\mathbf{E}$ , имеет компоненты по всем трем осям системы  $Oxyz$ .

В работах [75, 138, 139] диаграмма направленности снималась путем поворота макета вокруг оси  $Ox'$ , а регистрировалась только  $z$ -компонента поля  $E_z$ , поэтому далее будем рассматривать лишь эту компоненту.

Точность приближенной формулы (7.116) весьма высока, поэтому не будем заниматься громоздким интегрированием, а ограничимся действиями, аналогичными проделанным при ее выводе.

Выразим компоненты направляющего вектора точки наблюдения через  $\delta$  и  $\beta$ , подставим в (7.116), а также учтем, что размер  $q_z$  области излучения вдоль оси  $Oz$  (рис. 7.1) сравним с длиной ЭМВ (как это можно видеть из расщепления траекторий на рис. 6.3).

В результате получим диаграмму направленности в виде:

$$U_m(\delta, \beta) = U_0 \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi q_z \sin \beta}{\lambda_e}\right)}{\frac{\pi q_z \sin \beta}{\lambda_e}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \delta}{r_n(\delta, \beta) \left(1 - \frac{v_m}{c} \cdot \frac{1}{r_n(\delta, \beta)}\right)^2} \right]^2, \quad (7.153)$$

где

$$r_n(\delta, \beta) = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \delta \cdot \operatorname{tg}^2 \beta}, \quad (7.154)$$

а также:  $U_0 = \text{const}$ ,  $\lambda_e$  — длина ЭМВ. Можно видеть, что при  $\beta = 0$  полученная формула переходит в (7.116).

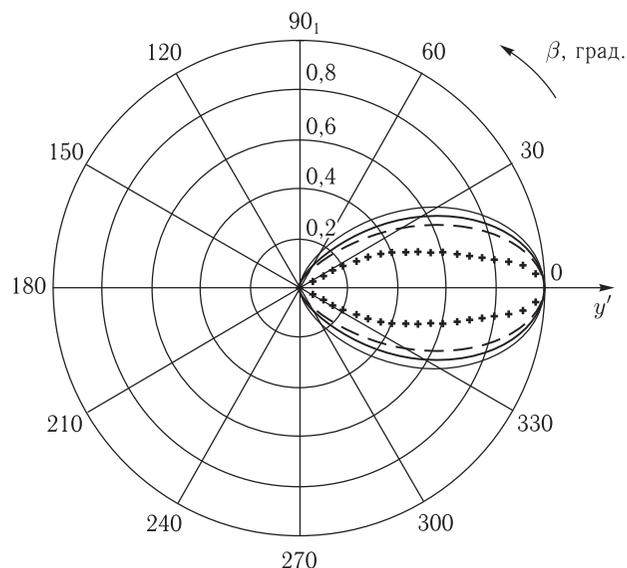


Рис. 7.6. Диаграммы направленности излучения в зависимости от угла  $\beta$  при  $\delta = 46^\circ$  для разных приближений. Точки — эксперимент по [75, 138, 139]

На частоте 2553 МГц изменение поля в пределах области излучения составляет 15–17 Э, что соответствует  $q_z \approx 4$  см.

Рассчитанные диаграммы направленности для угла  $\delta = 46^\circ$ , соответствующего [75, 138, 139], показаны на рис. 7.6. Точки — эксперимент, описанный в [75, 138, 139].

Из рисунка видно, что все расчетные диаграммы имеют один лепесток, симметричный относительно оси  $Oy'$ , что совпадает с [75, 138, 139]. В то же время, экспериментальная диаграмма уже расчетных в полтора–два раза. Сплошные линии соответствуют  $v_{m0}/c = 0,32$ , пунктир —  $v_{m0}/c = 0,5$ . Утолщенная сплошная линия построена по полной формуле (7.153). Тонкая линия построена без учета протяженности области излучения, что привело к небольшому (до 10%) расширению лепестка. Изменение  $v_{m0}/c$  с 0,32 на 0,50 (утолщенный пунктир) слегка (до 10%) сужает лепесток, однако, не следует забывать, что при этом совпадение расчета с экспериментом при  $\beta = 0$  ухудшается (рис. 7.3).

### 7.11. Диаграмма направленности при неколлинеарном характере ПМСВ

До настоящего раздела рассматривалось распространение ПМСВ точно перпендикулярно направлению поля. В этом случае ориентации векторов фазовой и групповой скоростей совпадают, то есть эти векторы

между собой являются коллинеарными. При этом энергия волны идет туда же, куда направлен ее волновой вектор.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда волновой вектор отклонен от нормали к полю. При этом вектор групповой скорости также отклонен от этой нормали, как правило, в сторону, противоположную отклонению волнового вектора, так что коллинеарность этих векторов нарушается. Направление хода энергии волны теперь отклоняется от направления волнового вектора и следует вектору групповой скорости, так что диаграмма направленности существенным образом деформируется. Рассмотрим далее особенности такой деформации, пользуясь моделью ускоренного движения магнитных зарядов. В основном будем следовать работам [160–164].

#### 7.11.1. Общая геометрия задачи

Общая геометрия задачи, являющаяся развитием предложенной в разделах 7.1, 7.10, иллюстрируется рис. 7.7, 7.8.

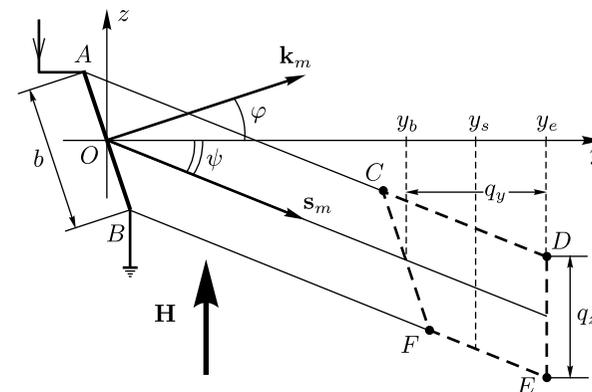


Рис. 7.7. Геометрия расположения преобразователя и области излучения на поверхности ферритовой пленки

На рис. 7.7 показано расположение преобразователя и области излучения на поверхности ферритовой пленки. Начало декартовой системы координат  $Oxyz$ , точка  $O$ , расположена на поверхности ферритовой пленки, плоскость  $Oyz$  совпадает с плоскостью пленки, а ось  $Oz$  параллельна направлению поля  $\mathbf{H}$ . Величина поля возрастает линейно вдоль оси  $Oy$ . Преобразователь  $AB$ , показанный утолщенной линией, представляет собой прямолинейный отрезок тонкого проводника длиной  $b$ , центр которого совпадает с точкой  $O$ . Преобразователь возбуждает в пленке ПМСВ, волновой вектор которой  $\mathbf{k}_m$  составляет угол  $\varphi$  с осью  $Oy$ . Волновой пучок распространяется в направлении лучевого вектора  $\mathbf{s}_m$ , составляющего с осью  $Oy$  угол  $\psi$ . Границы области излучения  $CDEF$  показаны утолщенным пунктиром. Начало области излучения  $CF$  соответствует условию  $\lambda_m = 0,1 \cdot \lambda_e$ , где  $\lambda_m$  —

длина ПМСВ,  $\lambda_e$  — длина ЭМВ в свободном пространстве. Конец области излучения  $DE$  соответствует максимальному значению поля  $\mathbf{H}$ , определяемому верхней полевой границей спектра ПМСВ. Боковые границы области излучения  $CD$  и  $FE$  соответствуют боковым границам волнового пучка.

Из рисунка видно, что область излучения представляет собой неправильный четырехугольник сложной формы. Учитывая, что реальные значения угла  $\varphi$  не превышают 20–30 градусов, с целью удобства дальнейшего интегрирования будем считать область излучения прямоугольником, стороны которого параллельны осям  $Oy$  и  $Oz$ . В такой постановке начало области излучения определяется координатой  $y_b$ , соответствующей пересечению границы  $CF$  со средней линией пучка ПМСВ. Конец области излучения  $DE$  соответствует координате  $y_e$ . Середина между  $y_b$  и  $y_e$ , соответствующая перегибу функции высвечивания, обозначена через  $y_s$ . Длина области излучения вдоль оси  $Oy$ , соответствующая  $y_e - y_b$ , обозначена через  $q_y$ . Ширина области излучения, определяемая как протяженность сечения волнового пучка линией, параллельной  $Oz$ , например  $DE$ , обозначена  $q_z$ .

Геометрия расположения точки наблюдения, где регистрируется излучение ЭМВ, показана на рис. 7.8.

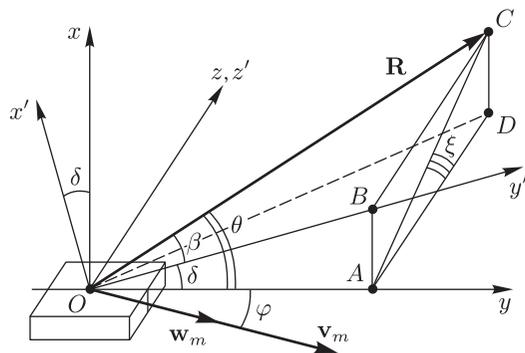


Рис. 7.8. Геометрия расположения точки наблюдения относительно ферритовой пленки

Здесь в левом нижнем углу показана ферритовая пленка, в плоскости которой распространяется магнитостатическая волна, имеющая фазовую скорость  $\mathbf{v}_m$  и ускорение  $\mathbf{w}_m$ , направления которых полагаем совпадающими. Размеры ферритовой пленки предполагаются значительно меньшими, чем расстояние от пленки до точки наблюдения, поэтому можно считать, что излучение электромагнитной волны происходит из точечной области. На рисунке центр этой области обозначен буквой  $O$ , являющейся началом декартовой системы координат  $Oxyz$ , введенной на рис. 7.7. При этом векторы  $\mathbf{v}_m$  и  $\mathbf{w}_m$  лежат в плоскости  $Oyz$  под углом  $\varphi$  к оси  $Oy$ .

Точка наблюдения, в которой регистрируется излучаемая электромагнитная волна, обозначена буквой  $C$ , а вектор, определяющий направление  $OC$ , обозначен через  $\mathbf{R}$ . Из точки  $C$  опущены перпендикуляры:  $CA$  на ось  $Oy$ ,  $CB$  на плоскость  $Oxy$  и  $CD$  на плоскость  $Oyz$ . Легко видеть, что все точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  лежат в одной плоскости, перпендикулярной оси  $Oy$ .

На рисунке введена еще одна декартова система координат  $Ox'y'z'$  такая, что ось  $Oz'$  совпадает с осью  $Oz$ , а ось  $Oy'$  проходит через точку  $B$ . Угол  $\angle AOB$  между осями  $Oy$  и  $Oy'$ , а также равный ему угол между осями  $Ox$  и  $Ox'$ , обозначен через  $\delta$ . Угол  $\angle BOC$  между вектором  $\mathbf{R}$  и осью  $Oy'$  обозначен через  $\beta$ . Близкая к  $Ox'y'z'$  система координат  $Or\delta\beta$  типа «угол места–азимут» с углами  $\delta$  и  $\beta$  использовалась в экспериментальных работах [75, 138, 139] при описании параметров диаграммы направленности излучения.

Заметим, что при теоретической интерпретации полученных результатов, в работах [148, 149] используется та же система, что вызвано удобством сравнения с экспериментом. Однако, исходя из симметрии задачи, по-видимому, более адекватной для решения является сферическая система координат  $Or\theta\xi$ , полярная ось которой совпадает с осью  $Oy$  исходной системы  $Oxyz$ , а азимутальный угол отсчитывается от оси, параллельной направлению поля, то есть  $Oz$ . Полярный угол  $\theta$  такой системы координат соответствует углу между вектором  $\mathbf{R}$  и осью  $Oy$ , то есть между линиями  $OC$  и  $OA$ . Азимутальный угол  $\xi$  соответствует углу между проекцией вектора  $\mathbf{R}$  на плоскость, перпендикулярную оси  $Oy$ , и направлением поля, то есть между линиями  $AC$  и  $AD$ . Итак, далее будем рассматривать три системы координат: декартову  $Oxyz$ , обусловленную геометрией распространения ПМСВ, систему «угол места — азимут»  $Or\delta\beta$ , обусловленную удобством постановки эксперимента, и сферическую  $Or\theta\xi$ , обусловленную симметрией задачи.

### 7.11.2. Расчет диаграммы направленности

Рассмотрим теперь расчет диаграммы направленности излучения с учетом неколлинеарного характера ПМСВ на основе модели ускоренного движения магнитных зарядов. В идеологии будем следовать работам [147, 150], а также предыдущим разделам данной главы.

Вводя плотность магнитных зарядов  $\rho_m$ , локализованных в области ферритовой пленки  $dV = dx dy dz$ , через динамическую намагниченность ПМСВ (7.20):

$$\rho_m(x, y, z) = -\operatorname{div} \mathbf{M}(x, y, z), \quad (7.155)$$

аналогично (7.94) получаем электрическое поле излучаемой волны в виде

$$d\mathbf{E}_m = -\frac{\rho_m}{c^2 v_m^2} \cdot [\mathbf{R}_m \times \mathbf{w}_m], \quad (7.156)$$

где все обозначения совпадают с введенными ранее.

Используя угловые координаты  $\delta$  и  $\beta$  (рис. 7.8), с учетом движения магнитного заряда под углом  $\varphi$  к оси  $Oy$ , получаем:

$$d\mathbf{E}_m = -\frac{\rho_m \cdot dV}{c^2} \cdot \frac{w_m}{R_m} \cdot \left[1 - \frac{v}{c} \cdot (\cos \beta \cos \delta \cos \varphi + \sin \beta \sin \varphi)\right]^{-2} \times \\ \times [\mathbf{i} (\cos \beta \cos \delta \sin \varphi - \sin \beta \cos \varphi) - \mathbf{j} \cos \beta \sin \delta \sin \varphi + \mathbf{k} \cos \beta \sin \delta \cos \varphi], \quad (7.157)$$

где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — направляющие векторы осей  $Ox, Oy, Oz$ .

При угловых координатах  $\theta$  и  $\xi$  (рис. 7.8), вместо (7.157) получаем:

$$d\mathbf{E}_m = -\frac{\rho_m \cdot dV}{c^2} \cdot \frac{w_m}{R_m} \cdot \left[1 - \frac{v}{c} \cdot (\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \cos \xi \sin \varphi)\right]^{-2} \times \\ \times [\mathbf{i} (\cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \cos \xi \cos \varphi) - \mathbf{j} \sin \theta \sin \xi \sin \varphi + \mathbf{k} \sin \theta \sin \xi \cos \varphi]. \quad (7.158)$$

При  $\varphi = 0$  формула (7.157) при  $\beta = 0$ , и (7.158) при  $\xi = 90^\circ$  с точностью до обозначений углов и замены точечного заряда распределенным, совпадают с (7.100), а также с формулой, полученной в работе [150].

Полная диаграмма направленности, подобно [150] и разделу 7.7, получается из интегрирования (7.157) или (7.158) по объему  $V_m$  области излучения пленки:

$$U_m = U_0 \cdot \left( \int_{V_m} G_v(y, z) \cdot d\mathbf{E} \right)^2, \quad (7.159)$$

где  $U_0$  — постоянный множитель, определяемый условиями нормировки, а  $G_v$  — функция высвечивания, задающая уменьшение амплитуды ПМСВ при распространении по области излучения (раздел 7.8.1).

Из структуры формул (7.157) и (7.158) видно, что интенсивность излучения определяется произведением трех сомножителей:  $\rho_m$ ,  $w_m$  и ориентационного множителя, связанного с углами  $\delta$ ,  $\beta$  и  $\varphi$  или  $\theta$ ,  $\xi$  и  $\varphi$ , входящих под знак интеграла, определяемого размерами и формой области излучения. Так как основной задачей настоящей работы является определение зависимости диаграммы направленности от ориентации волнового вектора ПМСВ, то есть от угла  $\varphi$ , то в первом приближении будем считать величины  $\rho_m$ ,  $w_m$  постоянными и рассмотрим только ориентационный множитель и область излучения. Функцию высвечивания положим равной постоянной величине, входящей в нормировочный множитель  $U_0$ .

### 7.11.3. Конфигурация области излучения

Рассмотрим сначала свойства области излучения, определяемые ходом траекторий ПМСВ на поверхности пленки, искривленным за счет неоднородности подмагничивающего поля. Соответствующие свойства иллюстрируются рис. 7.9 и 7.10, где при построении кривых использовалась намагниченность ферритовой пленки:  $4\pi M_0 = 1750$  Гс,

толщина:  $d = 50$  мкм, а также параметры ЭМВ: частота: 2880 МГц,  $\lambda_{em} = 10,417$  см,  $k_{em} = 0,6032$  см<sup>-1</sup>, параметры поля:  $H(y) = H_0(1 + b \cdot y)$ , где  $H_0 = 437,5$  Э,  $b = 0,1$ ,  $y$  — в см.

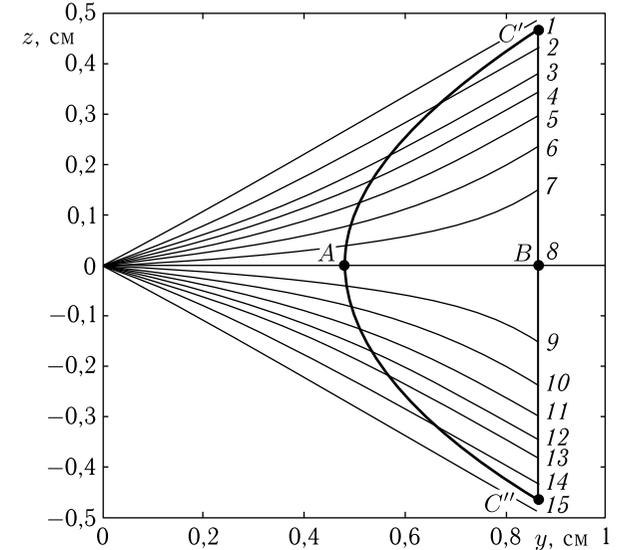


Рис. 7.9. Траектории ПМСВ при различных начальных углах  $\varphi_0$ . Кривая 1 соответствует  $\varphi_0 = -22^\circ$ , кривая 2 —  $\varphi_0 = -20^\circ$  и так далее с шагом в  $2^\circ$  вплоть до кривой 15, соответствующей  $\varphi_0 = 22^\circ$

На рис. 7.9 показаны траектории волновых пучков ПМСВ, выходящих из преобразователя  $AB$  на рис. 7.7, при различных значениях начального угла  $\varphi_0$ . Плоскость рисунка соответствует плоскости ферритовой пленки. Из рисунка видно, что картина траекторий носит веерообразный расходящийся характер, симметричный относительно оси  $Oy$ , причем отклонение каждой отдельной траектории от этой оси тем больше, чем больше начальный угол  $\varphi_0$ . Утолщенной линией показаны границы области излучения  $AC'BC''$ . Начало области излучения  $C'AC''$  определяется условием  $\lambda_m = 0,1 \cdot \lambda_e$ , а конец  $C'BC''$  — максимальным значением поля  $\mathbf{H}$ , заданного верхней полевой границей спектра ПМСВ. Точка  $A$  соответствует  $y_b = 0,4845$  см,  $H_b = 458,7$  Э, в этой точке параметры ПМСВ:  $k_b = 6,032$  см<sup>-1</sup>,  $\lambda_b = 1,0411$  см. Точка  $B$  соответствует  $y_e = 0,8571$  см,  $H_e = 475,0$  Э, в этой точке параметры ПМСВ:  $k_e = 0,0000$  см<sup>-1</sup>,  $\lambda_e \rightarrow \infty$  см. Нижняя граница области излучения  $C'AC''$  имеет вид симметричной дуги, выгнутой в сторону начала координат, а верхняя  $C'BC''$  — прямой линией, перпендикулярной оси  $Oy$  в соответствии с конфигурацией поля. В работе [150],

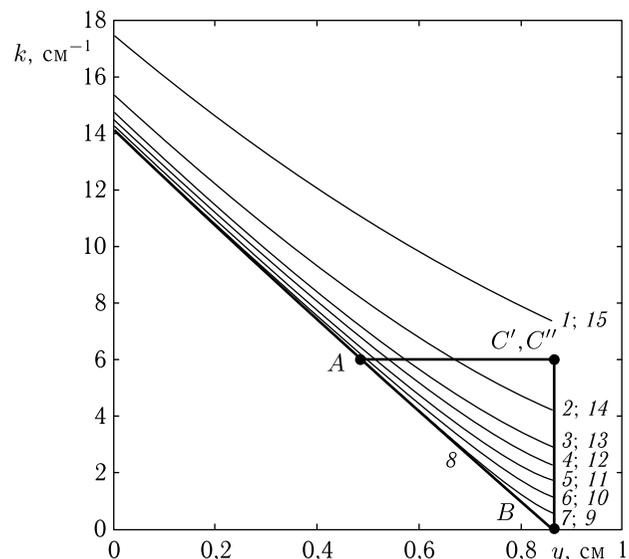


Рис. 7.10. Зависимости волнового числа  $k$  ПМСВ от координаты  $y$  при тех же начальных углах  $\varphi_0$

где  $\varphi_0 = 0^\circ$ , границы области излучения совпадают с точками  $A$  и  $B$  на рис. 7.9.

На рис. 7.10 показаны зависимости волнового числа  $k$  от координаты  $y$  при тех же углах  $\varphi_0$ . Утолщенной линией показаны значения  $k$ , соответствующие границам области излучения. Здесь точки  $C'$  и  $C''$  совпали благодаря симметричному характеру траекторий. Верхняя граница очерченной области представляет собой горизонтальную прямую линию, которая соответствует постоянному значению волнового числа, определяемого условием  $\lambda_m = 0,1 \cdot \lambda_e$ .

В целом из рис. 7.9 и рис. 7.10 видно, что по мере увеличения начального угла  $\varphi_0$  протяженность области излучения вдоль направления распространения ПМСВ уменьшается (рис. 7.9), причем интервал допустимых волновых чисел со стороны меньших значений  $k$  также уменьшается, стремясь к величине  $k_b = 6,032 \text{ см}^{-1}$  (рис. 7.10), что приводит к ухудшению условий излучения, то есть интенсивность излучаемой электромагнитной волны по мере увеличения  $\varphi_0$  должна падать.

#### 7.11.4. Ориентационный множитель

Рассмотрим теперь, как сказывается на конфигурации диаграммы направленности ориентационный множитель, входящий в формулы (7.157) и (7.158). Полагая, что мощность излучаемого сигнала

пропорциональна квадрату электрического поля, для системы  $Or\delta\beta$  из (7.157) получаем:

$$U_{\delta\beta} = \frac{U_{\delta\beta}^{(0)}}{W_{\delta\beta}^2} \cdot [(\cos \beta \cos \delta \sin \varphi - \sin \beta \cos \varphi)^2 + (\cos \beta \sin \delta \sin \varphi)^2 + (\cos \beta \sin \delta \cos \varphi)^2], \quad (7.160)$$

где

$$W_{\delta\beta} = \left[1 - \frac{v}{c} \cdot (\cos \beta \cos \delta \cos \varphi + \sin \beta \sin \varphi)\right]^2, \quad (7.161)$$

а  $U_{\delta\beta}^{(0)} = 0,6609$  — нормировочный множитель, задаваемый условием равенства единице максимума  $U_{\delta\beta}(\delta)$  при  $\varphi = 0$  и  $\beta = 0$ .

Аналогично для системы  $Or\theta\xi$  из (7.158) получаем:

$$U_{\theta\xi} = \frac{U_{\theta\xi}^{(0)}}{W_{\theta\xi}^2} \cdot [(\cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \cos \xi \cos \varphi)^2 + (\sin \theta \sin \xi \sin \varphi)^2 + (\sin \theta \sin \xi \cos \varphi)^2], \quad (7.162)$$

где

$$W_{\theta\xi} = \left[1 - \frac{v}{c} \cdot (\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \cos \xi \sin \varphi)\right]^2. \quad (7.163)$$

Для удобства сравнения будем полагать:  $U_{\theta\xi}^{(0)} = U_{\delta\beta}^{(0)} = 0,6609$ .

#### 7.11.5. Диаграммы с учетом ориентационного множителя

Пространственная конфигурация ориентационного множителя, определяющего форму диаграммы направленности при повороте волнового вектора ПМСВ, иллюстрируется рис. 7.11, 7.12, 7.13, где построены нормированные диаграммы при условии постоянства всех остальных, кроме  $U_{\delta\beta}$  или  $U_{\theta\xi}$ , величин. Везде  $v/c = 0,32$ , что наилучшим образом согласуется с экспериментом [150]. Рис. 7.11 соответствует системе координат  $Or\delta\beta$ , рис. 7.13 — системе  $Or\theta\xi$ .

На рис. 7.11 показаны диаграммы направленности для различных значений угла движения зарядов  $\varphi$  при изменении угла места  $\delta$  и постоянном азимутальном угле  $\beta = 0$ . Из рисунка видно, что при  $\varphi = 0^\circ$  (кривая 1) диаграмма направленности имеет двухлепестковый характер, симметричный относительно горизонтальной плоскости  $Oyz$ , причем максимумы излучения приходятся на  $\delta \approx \pm 55^\circ$ , а вдоль оси  $Oy$  (при  $\delta = 0^\circ$ ) излучение в обе стороны отсутствует. При увеличении угла  $\varphi$  до  $20^\circ$  (кривая 2) диаграмма направленности сохраняет симметричный двухлепестковый характер, но максимумы излучения смещаются к оси  $Oy$  до углов  $\delta \approx \pm 50^\circ$ , а вдоль оси  $Oy$  появляется небольшое излучение: вперед 0,32 и назад 0,02 от максимума. При увеличении  $\varphi$  до  $40^\circ$  (кривая 3) диаграмма направленности остается симметричной относительно  $Oy$ , но ее двухлепестковый характер сильно смазывается. Максимумы теперь приходятся на  $\delta \approx \pm 45^\circ$ , интенсивность излучения вдоль  $Oy$  сильно возрастает, достигая в направлении вперед 0,84

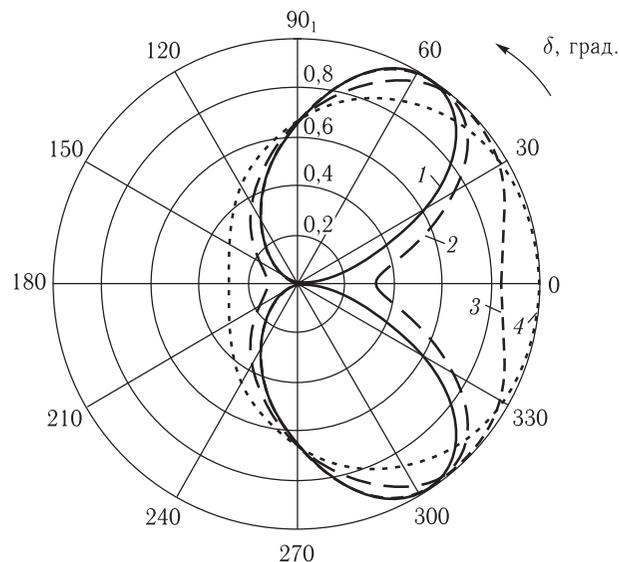


Рис. 7.11. Диаграммы направленности для различных значений угла  $\varphi$  при изменении угла  $\delta$  и постоянном угле  $\beta = 0$ . Кривая 1 соответствует  $\varphi = 0^\circ$ , кривая 2 —  $\varphi = 20^\circ$ , 3 —  $\varphi = 40^\circ$ , 4 —  $\varphi = 60^\circ$

и назад 0,12. При  $\varphi = 60^\circ$  (кривая 4) диаграмма, оставаясь симметричной, сильно округляется, приближаясь к вытянутому по вертикали кругу с центром, смещенным вперед по оси  $Oy$ . Максимумы лепестков сливаются в один на оси  $Oy$ , а излучение назад достигает 0,28.

Из сравнения кривых 1–4 на рис. 7.11 можно видеть, что нормированная интенсивность излучения при  $\delta = \pm 90^\circ$ , то есть вверх и вниз от плоскости  $Oyz$  во всем допустимом интервале изменения угла  $\varphi$  от  $0^\circ$  до  $\pm 60^\circ$  (то есть от нуля до угла отсечки ПМСВ), практически не меняется, оставаясь на уровне 0,68 от максимума. Такое постоянство, однако, является следствием нормировки, и в реальной диаграмме интенсивность сигнала вдоль  $\delta = \pm 90^\circ$  при увеличении угла  $\varphi$  должна убывать по причине сужения области излучения.

На рис. 7.12 показаны диаграммы направленности для различных значений угла движения зарядов  $\varphi$  при постоянном угле места  $\delta = 45^\circ$  и изменении азимутального угла  $\beta$ . Из рисунка видно, что при  $\varphi = 0^\circ$  (кривая 1) диаграмма направленности имеет максимумы при  $\beta = 40^\circ$  и  $320^\circ$ , которые выделяются весьма незначительно, а интенсивность излучения вперед вдоль оси  $Oy$  составляет 0,92. Общий характер диаграммы стремится к единственному лепестку в согласии с работами [138, 150]. При увеличении угла  $\varphi$  двухлепестковый характер диаграммы проявляется тем сильнее, чем больше  $\varphi$ , причем при  $\varphi = 60^\circ$  (кривая 4) максимумы лепестков по-прежнему равняются единице, а минимум между ними падает до 0,34. Характерной особенностью

является поворот оси симметрии диаграммы в том же направлении, что и изменение угла  $\varphi$ . Так, если при  $\varphi = 0^\circ$  ось симметрии совпадает с  $Oy$ , и минимум диаграммы соответствует  $\beta = 0^\circ$ , то при  $\varphi = 20^\circ$  ось симметрии диаграммы приходится на  $\beta = 25^\circ$ , а максимумы соответствуют  $70^\circ$  и  $340^\circ$ . При  $\varphi = 40^\circ$  ось симметрии поворачивается до  $\beta = 50^\circ$ , а максимумы приходятся на  $100^\circ$  и  $0^\circ$ . При  $\varphi = 60^\circ$  ось симметрии доходит до  $70^\circ$ , а углы максимумов до  $125^\circ$  и  $15^\circ$ .

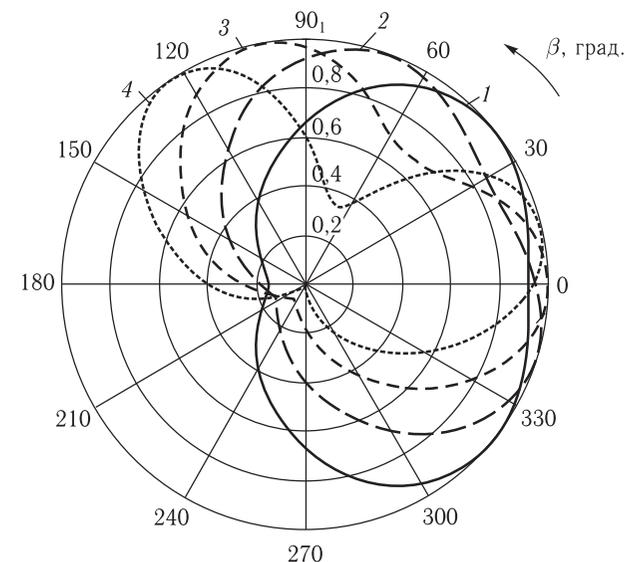


Рис. 7.12. Диаграммы направленности для различных значений угла  $\varphi$  при постоянном угле  $\delta = 45^\circ$  и изменении угла  $\beta$ . Кривая 1 соответствует  $\varphi = 0^\circ$ , кривая 2 —  $\varphi = 20^\circ$ , 3 —  $\varphi = 40^\circ$ , 4 —  $\varphi = 60^\circ$

На рис. 7.13 показаны диаграммы направленности с использованием сферической системы координат  $Or\theta\xi$  для различных значений угла движения зарядов  $\varphi$  при постоянном полярном угле  $\theta = 40^\circ$  и изменении азимутального угла  $\xi$ . Из рисунка видно, что при  $\varphi = 0^\circ$  (кривая 1) диаграмма представляет собой правильный круг с радиусом 0,84 и центром в начале координат, то есть на оси  $Oy$ . При увеличении угла  $\varphi$  до  $20^\circ$  (кривая 2) на диаграмме в области  $\xi = 0^\circ$  (то есть в плоскости  $Oyz$  в положительном направлении оси  $Oz$ ) появляется провал до значения 0,32, при  $\varphi = 40^\circ$  (кривая 3) этот провал достигает нуля, но при дальнейшем увеличении угла  $\varphi$  до  $60^\circ$  (кривая 4) провал уменьшается, приближаясь к значению 0,32. В области  $\xi = 180^\circ$  (то есть в плоскости  $Oyz$  в отрицательном направлении оси  $Oz$ ) по мере увеличения угла  $\varphi$  от  $0^\circ$  до  $60^\circ$  (то есть до отсечки ПМСВ) значение диаграммы сначала увеличивается до единицы при  $\varphi = 20^\circ$  (кривая 2), после чего постепенно уменьшается до 0,51 при  $\varphi = 60^\circ$ . При  $\xi = 90^\circ$

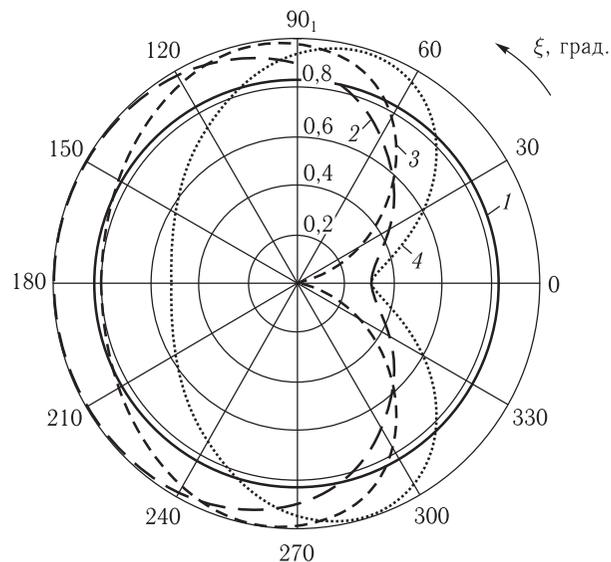


Рис. 7.13. Диаграммы направленности для различных значений угла  $\varphi$  при постоянном угле  $\theta = 40^\circ$  и изменении угла  $\xi$ . Кривая 1 соответствует  $\varphi = 0^\circ$ , кривая 2 —  $\varphi = 20^\circ$ , 3 —  $\varphi = 40^\circ$ , 4 —  $\varphi = 60^\circ$

и  $270^\circ$  (то есть в плоскости  $Oxy$  в положительном и отрицательном направлениях оси  $Ox$ ) по мере увеличения угла  $\varphi$  в том же интервале значение диаграммы сначала растет от 0,84 при  $\varphi = 0^\circ$  (кривая 1) до 0,99 при  $\varphi = 40^\circ$  (кривая 3), после чего падает до 0,92 (кривая 4) при  $\varphi = 60^\circ$ . Дополнительная проверка вида диаграммы в системе  $Or\theta\xi$  при  $\varphi = 0^\circ$  показала, что при любых значениях угла  $\theta$  (а не только  $40^\circ$ , заданного при построении кривой 1 на рис. 7.13), круговой характер диаграммы сохраняется, меняется лишь радиус круга от нуля до единицы. Из сравнения с рис. 7.11 можно видеть, что приведенная там двухлепестковая диаграмма при  $\varphi = 0^\circ$  (кривая 1) соответствует  $\xi = 90^\circ$  при изменении угла  $\theta$  в плоскости  $Oxy$  от оси  $Oy$  в обе стороны в интервале  $\pm 180^\circ$ , то есть при  $\xi = 90^\circ$ , с точностью до начала отсчета, роль угла  $\theta$  эквивалентна роли угла  $\delta$  на рис. 7.11. Поэтому, задавая  $\delta = 40^\circ$  для кривой 1 на рис. 7.11, получаем то же значение 0,84, что и для всей кривой 1 на рис. 7.13.

В целом характер полученных на рис. 7.11–7.13 диаграмм можно интерпретировать следующим образом.

В приближении точечного характера движущегося магнитного заряда (то есть на расстояниях, значительно больших ширины пучка ПМСВ в ферритовой пленке) полная диаграмма в трехмерном пространстве имеет цилиндрическую симметрию вдоль оси движения этого заряда, то есть при  $\varphi = 0^\circ$  образуется путем поворота диаграммы 1 на рис. 7.11 вокруг оси  $Oy$  на  $360^\circ$ , что в системе  $Or\theta\xi$  означает

изменение угла  $\xi$  в этом же интервале. Поэтому любое сечение такой диаграммы конической поверхностью с постоянным углом  $\theta$  дает правильную окружность, подобную представленной на рис. 7.13 кривой 1, соответствующей  $\theta = 40^\circ$ .

При изменении направления движения заряда (то есть при изменении угла  $\varphi$ ) цилиндрическая симметрия диаграммы сохраняется, однако ось симметрии поворачивается, следуя за направлением движения заряда, то есть волнового вектора ПМСВ.

В хорошем приближении можно считать, что диаграмма направленности в трехмерном пространстве представляет собой толстостенную вытянутую вперед воронкообразную фигуру, обладающую цилиндрической симметрией относительно направления волнового вектора ПМСВ, причем при изменении ориентации этого волнового вектора в плоскости ферритовой пленки ось воронки поворачивается в ту же сторону и на те же углы (возможно с незначительным опережением), что и волновой вектор.

Диаграммы, приведенные на рис. 7.11, представляют собой сечение этой поворачивающейся воронкообразной фигуры плоскостью  $Oxy$  на рис. 7.8. Диаграммы на рис. 7.12 представляют собой сечение той же фигуры, плоскостью, проходящей через ось  $Oz$  на рис. 7.8 под углом  $45^\circ$  к плоскости  $Oyz$ . Диаграммы на рис. 7.13 представляют собой сечение воронкообразной фигуры круговой конической поверхностью, вершина которой совпадает с точкой  $O$  на рис. 7.8, а ось симметрии конуса — с осью  $Oy$ .

#### 7.11.6. Полная диаграмма направленности

Полная диаграмма направленности определяется изменением воронкообразной диаграммы в соответствии с амплитудным множителем, величина которого определяется конфигурацией области излучения и условиями излучения внутри нее. Таким образом, по мере увеличения угла  $\varphi$  общий воронкообразный характер диаграммы сохраняется, однако максимальная пространственная протяженность вдоль оси воронки уменьшается. Такой вывод соответствует приведенному в работе [137] экспериментальному утверждению об уменьшении интенсивности излучения при увеличении угла  $\varphi$  между волновым вектором и нормалью к направлению подмагничивающего поля.

### Выводы по главе 7

Данная глава посвящена исследованию излучения электромагнитных волн из феррита, сопровождающего распространение ПМСВ в поперечно неоднородном линейно возрастающем поле. Главное внимание уделено рассмотрению механизма излучения на основе модели ускоренного движения магнитных зарядов. Получены диаграммы направленности излучения в трехмерном пространстве, выполнено сравнение полученных данных с экспериментом.

Основные результаты настоящей главы сводятся к следующему.

1. Рассмотрено излучение электромагнитных волн из феррита, имеющее место при распространении магнитостатической волны в поперечно неоднородном поле. Для интерпретации физической картины излучения предложена модель ускоренного движения поляризационных магнитных зарядов, образованных динамической намагниченностью распространяющейся магнитостатической волны.

Записаны общие уравнения электродинамики в симметричной форме, включающей наличие магнитных зарядов. На основе модели запаздывающих потенциалов получены магнитное и электрическое поля электромагнитной волны, излучаемой при ускоренном движении точечного магнитного заряда. Концепция точечных магнитных зарядов обобщена на случай распределенного заряда, образованного динамической намагниченностью распространяющейся ПМСВ.

2. На основе модели запаздывающих потенциалов получена диаграмма направленности излучения от движущегося с ускорением точечного магнитного заряда. Выполнен переход от точечного заряда к распределенному, включающий в себя интегрирование по объему, занимаемому распределенными зарядами. Показано, что эффективное излучение происходит не на протяжении всей траектории распространения ПМСВ, а только из области, в которой длина ПМСВ приближается к длине электромагнитной волны, названной «областью излучения». При этом главными параметрами волны, подлежащими интегрированию по объему этой области, являются ее скорость, ускорение и производная по координате от динамической намагниченности.

Интерпретация излучения проведена на примере поверхности магнитостатической волны в магнитной пленке со свободными поверхностями, дисперсионное соотношение для которой дается решением классической задачи Дэймона–Эшбаха. На основе такого дисперсионного соотношения найдены скорость, ускорение и динамическая намагниченность ПМСВ, требуемые для расчета диаграммы направленности.

Показано, что диаграмма направленности в плоскости, проходящей через направление распространения ПМСВ перпендикулярно плоскости магнитной пленки, представляет собой два лепестка, наклоненные вперед по ходу распространения ПМСВ, причем величина наклона тем больше, чем ближе скорость ПМСВ к скорости света.

3. Вследствие крайней сложности полученной диаграммы, выполнен ряд приближений, следующих из эксперимента. В первую очередь скорость и ускорение в области излучения заменены их средними значениями в этой области. Рассмотрено приближение усредненной намагниченности, позволяющее выполнить численные оценки конфигурации диаграммы направленности с точностью до 30–40%. Для более точной оценки введена в рассмотрение «функция высвечивания», определяющая падение энергии ПМСВ в процессе распространения за счет ее перехода в энергию излучаемой ЭМВ. Дополнительно введена в рассмотрение функция координатной зависимости ПМСВ, отражаю-

щая монотонный характер изменения амплитуды в пределах области излучения. Для обеих упомянутых функций предложены эмпирические выражения, позволяющие существенным образом упростить интегрирование по области излучения. На основе разработанного приближенного аппарата рассчитаны диаграммы направленности излучения, соответствующие наблюдаемым в эксперименте с точностью до единиц процентов.

4. Полученные результаты обобщены на случай произвольного расположения точки наблюдения. Показано, что в случае распространения ПМСВ перпендикулярно постоянному полю диаграмма направленности обладает осевой симметрией относительно направления распространения ПМСВ, то есть образуется как бы вращением вокруг этого направления двухлепестковой диаграммы, соответствующей плоскости, перпендикулярной плоскости магнитной пленки. Получено сечение диаграммы плоскостью, проходящей через направление поля. Показано, что в этом случае при достаточном отклонении от плоскости пленки сечение диаграммы представляет собой единственный лепесток, ориентированный точно вдоль направления распространения ПМСВ. Выполненное сравнение полученных результатов с экспериментом показало соответствие в пределах единиц процентов.

5. На основе модели ускоренного движения магнитных зарядов рассмотрено излучение электромагнитных волн из феррита в случае неколлинеарного характера ПМСВ при несовпадении направлений фазовой и групповой скоростей. Найдена конфигурация области излучения на плоскости ферритовой пленки и показано, что по мере увеличения угла между волновым вектором ПМСВ и нормалью к направлению поля длина области излучения вдоль направления траектории волнового пучка ПМСВ уменьшается, а среднее волновое число возрастает, что приводит к ухудшению условий излучения.

Рассмотрено влияние ориентационного множителя на форму диаграммы направленности излучения. Показано, что в трехмерном пространстве диаграмма направленности представляет собой толстостенную вытянутую вперед воронкообразную фигуру, обладающую цилиндрической симметрией относительно направления волнового вектора ПМСВ, причем при изменении ориентации этого волнового вектора в плоскости ферритовой пленки ось воронки поворачивается в ту же сторону и приблизительно на те же углы, что и волновой вектор. Полная диаграмма направленности определяется произведением воронкообразной диаграммы на амплитудный множитель, определяемый конфигурацией области излучения и условиями излучения из нее, поэтому по мере увеличения угла между волновым вектором ПМСВ и нормалью к направлению поля общий воронкообразный характер диаграммы сохраняется, однако максимальная пространственная протяженность вдоль оси воронки уменьшается, что согласуется с предварительными результатами эксперимента.

## Глава 8

## ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН, СОПРОВОЖДАЮЩЕГО РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПМСВ В СЛОЖНЫХ СТРУКТУРАХ

В предыдущей главе рассмотрено излучение электромагнитных волн, сопровождающее распространение ПМСВ в поперечно неоднородном поле. В качестве волноведущей среды использовалась плоскопараллельная магнитная пластина (пленка), намагниченная по ее плоскости. Рассмотрим теперь излучение, возникающее при распространении ПМСВ в более сложных структурах, в том числе обладающих пространственной периодичностью и содержащих несколько излучающих слоев. Основное внимание будет уделено формированию диаграммы направленности, образуемой множественными пространственно распределенными источниками. В качестве основного механизма излучения будем опираться на модель ускоренного движения магнитных зарядов.

При изложении, как и в предыдущей главе, будем следовать работам [147–172]. Остальные недостающие ссылки будут указаны в тексте.

### 8.1. Общая схема формирования диаграммы направленности

Во всех ситуациях, рассмотренных в предыдущей главе, ферритовая пленка (пластина) намагничивалась поперечным линейно нарастающим полем, при котором условия, необходимые для излучения, выполнялись только в одной пространственно ограниченной области. Рассмотрим теперь намагничивание таким полем, которое создает условия, необходимые для излучения электромагнитной волны в нескольких пространственно разнесенных областях пленки. В качестве простейшего примера рассмотрим поле, периодически меняющееся вдоль оси распространения ПМСВ.

#### 8.1.1. Геометрия задачи

Будем рассматривать ферритовую пленку, намагниченную пространственно периодическим полем. Общая геометрия задачи показана на рис. 8.1.

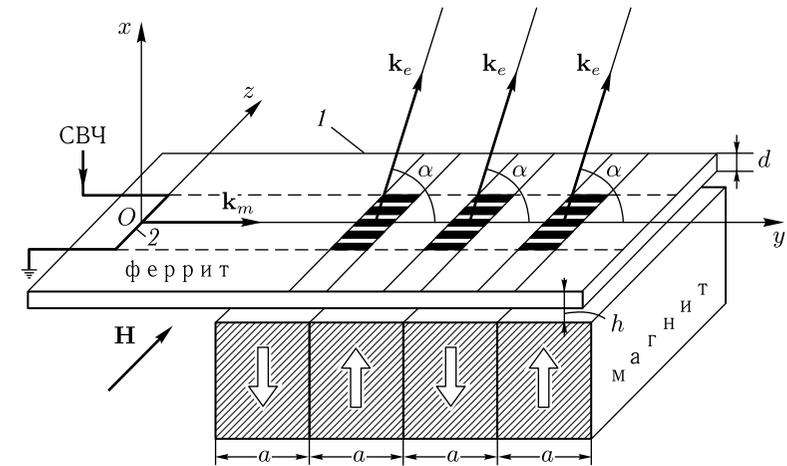


Рис. 8.1. Общая геометрия задачи

Ферритовая пленка  $l$  толщиной  $d$  намагничена постоянным однородным полем  $\mathbf{H}$ , приложенным в ее плоскости. Декартова система координат  $Oxyz$  выбрана таким образом, что плоскость  $Oyz$  совпадает с плоскостью ферритовой пленки, ось  $Ox$  к этой плоскости перпендикулярна, ось  $Oz$  параллельна направлению постоянного поля  $\mathbf{H}$ , а ось  $Oy$  ему перпендикулярна. Пленка дополнительно подмагничена магнитной системой, состоящей из периодически расположенных одинаковых плоских постоянных магнитов толщиной  $a$ . Широкие грани магнитов параллельны координатной плоскости  $Oxz$ , а их узкие торцевые грани образуют плоскую поверхность, параллельную плоскости  $Oyz$ , отстоящую от поверхности ферритовой пленки на расстояние  $h$  (где  $h \gg d$ ). Полюса плоских магнитов расположены в чередующемся порядке, в результате чего в плоскости пленки образуется периодическое поле, параллельное оси  $Oy$ , имеющее период  $a$ . Предполагается, что это поле значительно меньше основного поля  $\mathbf{H}$ , приложенного вдоль оси  $Oz$ . Таким образом, в области расположения дополнительной магнитной системы суммарное постоянное поле испытывает вдоль оси  $Oy$  периодические отклонения от оси  $Oz$  на небольшие углы.

На поверхности пленки расположена прямолинейная антенна 2, питаемая током СВЧ. При этом в пленке возбуждаются поверхностные магнитостатические волны (ПМСВ) с волновым вектором  $\mathbf{k}_m$ , распространяющиеся в положительном направлении оси  $Oy$ . В области расположения дополнительных магнитов длина ПМСВ меняется в соответствии с периодом магнитной системы, увеличиваясь в областях, соответствующих максимальному значению суммарного поля. При этом, если длина волны ПМСВ приближается к длине волны в свободном пространстве, из ферритовой пленки происходит излучение электромагнитных волн (ЭМВ) в направлении волнового вектора  $\mathbf{k}_e$ , составляющего угол  $\alpha$

с плоскостью пленки. Благодаря периодичности магнитной системы излучение ЭМВ происходит из нескольких периодически расположенных областей излучения (на рисунке отмеченных широкими горизонтальными полосами). Суммарная диаграмма направленности излучения в пространстве формируется за счет интерференционного сложения диаграмм, образуемых каждой областью излучения в отдельности.

**Замечание.** Из сравнения рис. 8.1 с рис. 5.1 из главы 5 можно видеть, что в обоих случаях геометрия формирования поля фактически одна и та же. Различие состоит в том, что в главе 5 исследуется распространение ПМСВ в сравнительно небольших полях, соответствующих довольно большим волновым числам (несколько сотен обратных сантиметров), так что преобразование ПМСВ в ЭМВ отсутствует. Здесь же будет рассмотрено распространение ПМСВ в полях, значительно больших, чем в главе 5, так что в максимумах поля волновые числа становятся столь малыми (единицы обратных сантиметров), что длина ПМСВ приближается к длине ЭМВ, чем и обусловлено излучение.

### 8.1.2. Характер распространения ПМСВ

Общий характер распространения ПМСВ в поле, создаваемом рассмотренной магнитной системой, иллюстрируется рис. 8.2.

На рис. 8.2, *a* показана общая схема образования периодического поля в ферритовой пленке. Для нахождения поля  $H_y$  использована процедура, описанная в работах [239, 243] и подробно рассмотренная в разделе 5.1.2. Полученная в результате  $y$ -компонента поля имеет вид:

$$H_y = 8M \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(2n-1)\pi(x+h)}{a}}}{2n-1} \cdot \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi y}{a} \right], \quad (8.1)$$

где  $M$  — намагниченность материала магнитной системы.

На рис. 8.2, *б* показана зависимость этой компоненты от координаты  $y$  при  $x = 0$ , построенная при следующих параметрах:  $M = 30$  Гс,  $a = 1$  см,  $h = 0,01$  см. Видно, что зависимость  $H_y(y)$  является периодической с периодом  $2a$ . При этом минимальное и максимальное значения поля  $H_y$  по модулю равны:  $|H_{0y}|_{\min} = 0$  Э,  $|H_{0y}|_{\max} = 498,41$  Э.

На рис. 8.2, *в* показана аналогичная координатная зависимость для суммарного подмагничивающего поля  $H_s(y)$ , определяемого по формуле:

$$H_s(y) = \sqrt{H_{0z}^2 + H_{0y}^2(y)}. \quad (8.2)$$

Эта зависимость имеет период  $a$ , причем минимальное значение суммарного поля равно  $H_{s \min} = 3500,0$  Э, а максимальное  $H_{s \max} = 3535,3$  Э. Допустимый интервал частот, в пределах которого в пленке с намагниченностью  $4\pi M_0 = 1750$  Гс возможно распространение ПМСВ, получаемый из условия перекрытия спектров частот, соответствующих минимальному и максимальному значениям поля  $H_s$ , определяется границами:  $F_{\min} = 12\,103$  МГц и  $F_{\max} = 12\,349$  МГц.

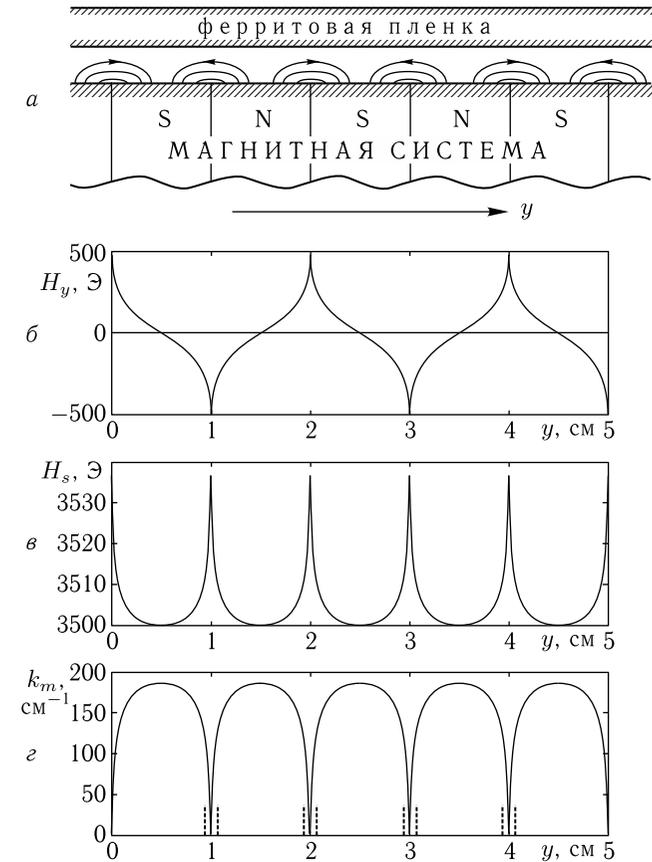


Рис. 8.2. Параметры распространения ПМСВ в периодической структуре

На рис. 8.2, *г* показана рассчитанная по методу Гамильтона–Аулда (раздел 2.4.1) [1, 173, 174] зависимость волнового числа ПМСВ  $k_m$  от той же координаты  $y$  при частоте  $F = 12\,110$  МГц, близкой к нижней границе спектра ПМСВ. Параметры ферритовой пленки: намагниченность  $4\pi M_0 = 1750$  Гс, толщина  $d = 15$  мкм. Эта зависимость также является периодической с периодом  $a$ , причем ее экстремальные значения равны:  $k_{m \min} = 9,6000$  см<sup>-1</sup>,  $k_{m \max} = 185,6267$  см<sup>-1</sup>, что соответствует длинам ПМСВ  $\lambda_{m \max} = 0,6545$  см,  $\lambda_{m \min} = 0,0338$  см. Для той же частоты волновое число и длина волны в свободном пространстве равны:  $k_e = 2,5363$  см<sup>-1</sup>,  $\lambda_e = 2,4773$  см. Из рисунка видно, что вблизи  $y = 1, 2, \dots$  см имеются области, где волновое число в феррите ( $9,6000$  см<sup>-1</sup>) довольно близко подходит к волновому числу в свободном пространстве ( $2,5363$  см<sup>-1</sup>), так что создаются условия для эффективного преобразования энергии ПМСВ в энергию ЭМВ,

то есть излучения ЭМВ из феррита. На рисунке границы таких областей, называемых далее областями излучения, показаны вертикальными утолщенными пунктирными линиями. Можно видеть, что протяженность областей излучения по оси  $Oy$ , в сравнении с периодом изменения поля  $a$ , довольно невелика. Так при различии между волновыми числами в феррите и свободном пространстве в 20 раз, когда интенсивность излучения падает более чем на порядок [150], протяженность областей излучения составляет около 0,04 см, то есть не более 4% от периода изменения поля.

Таким образом, можно видеть, что периодическое подмагничивающее поле формирует в ферритовой пленке периодически расположенные области излучения, размер которых значительно меньше периода поля.

### 8.1.3. Суперпозиция полей отдельных источников

Рассмотрим теперь, как формируется диаграмма направленности излучения из совокупности периодически расположенных областей излучения.

Для одной области в главе 7 показано, что диаграмма направленности по амплитуде излучаемого сигнала в плоскости, проходящей через направление распространения волны и перпендикулярной плоскости пластины, имеет вид (см. напр. (7.100)):

$$A = A_0 \cdot \frac{\sin \alpha}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha\right)^2}, \quad (8.3)$$

где  $A_0$  — постоянная начальная амплитуда, определяемая параметрами МСВ,  $\alpha$  — угол между волновым вектором волны и направлением на точку наблюдения,  $v$  — фазовая скорость волны,  $c$  — скорость света, причем  $v < c$ . Соответствующая диаграмма направленности по энергии имеет вид (см. напр. (7.102), (7.116)):

$$U(\alpha) = U_0 \left\{ \frac{\sin \alpha}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha\right)^2} \right\}^2, \quad (8.4)$$

где  $U_0$  — также постоянная величина.

Так как в периодически подмагниченной пленке протяженность областей излучения значительно меньше расстояния между ними, то будем считать далее области излучения точечными источниками, периодически расположенными на поверхности ферритовой пленки, причем диаграмма направленности каждого из источников описывается формулами (8.3), (8.4). Волны, излучаемые из таких периодически расположенных источников, интерферируют между собой, давая в результате сложную диаграмму направленности.

Рассмотрим диаграмму направленности при излучении из такой периодической структуры. Для простоты ограничимся рассмотрим

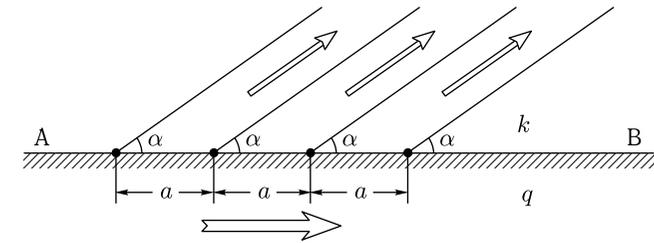


Рис. 8.3. Общая геометрия задачи

диаграммы по амплитуде, описываемой формулой (8.3). Общая геометрия задачи показана на рис. 8.3.

Здесь  $AB$  — верхняя поверхность пластины. Предполагается, что толщина пластины значительно меньше длины волны. При этом распределение полей волны на нижней поверхности пластины симметрично распределению на верхней поверхности, причем плоскость симметрии проходит через центр толщины пластины. Волновое число в материале пластины —  $k_m$ , в свободном пространстве —  $k_e$ . Точечные источники расположены в виде решетки с периодом  $a$ . Волна в материале пластины распространяется в направлении слева направо, как показано стрелкой внизу рисунка. Волны, излученные в свободное пространство, распространяются под углом  $\alpha$  к плоскости пластины в направлениях, показанных наклонными стрелками.

*Два источника.* Рассмотрим сначала два источника. Соответствующая геометрия задачи показана на рис. 8.4. Здесь  $MN$  — плоскость пленки. Источники 1 и 2 расположены в точках  $A$  и  $B$ . Рассмотрим интерференцию двух волн, распространяющихся из этих точек под углами  $\alpha$  к плоскости пленки. В силу параллельности волновых фронтов достаточно рассмотреть разность хода волн на линии  $BD$ .

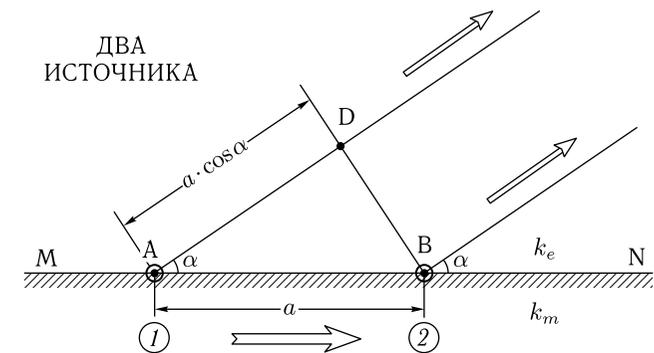


Рис. 8.4. Геометрия задачи для двух источников

Предположим, что внутри пленки распространяется волна, которая, проходя мимо точек А и В, в этих точках излучается из источников 1 и 2. Волна, исходящая из источника 1, в точке D описывается выражением:

$$A_1 = A_{10} \cdot \cos(\omega t - ak_e \cos \alpha), \quad (8.5)$$

где  $k_e$  — волновое число в свободном пространстве.

Прежде чем излучиться из источника 2, волна в толще пленки проходит участок АВ, в результате чего приобретает набег фазы  $ak_m$ , где  $k_m$  — волновое число в материале пленки. При этом волна, исходящая из источника 2, в точке В принимает вид:

$$A_2 = A_{20} \cdot \cos(\omega t - ak_m). \quad (8.6)$$

Полное волновое возмущение на линии BD равно сумме (8.5) и (8.6):

$$A = A_1 + A_2. \quad (8.7)$$

Выделяя из (8.7) зависимость от времени, получаем:

$$A = [A_{10} \cos(ak_e \cos \alpha) + A_{20} \cos(ak_m)] \cdot \cos \omega t + [A_{10} \sin(ak_e \cos \alpha) + A_{20} \sin(ak_m)] \cdot \sin \omega t. \quad (8.8)$$

Преобразуем это выражение к виду, содержащему только одну функцию от времени, а именно,  $\sin \omega t$ , для чего воспользуемся известным соотношением [270]:

$$p \cdot \cos \beta + q \cdot \sin \beta = r \cdot \sin(\beta + \theta), \quad (8.9)$$

где  $\beta$  — произвольный угол, а входящие в правую часть выражения имеют вид:

$$r = \sqrt{p^2 + q^2}; \quad (8.10)$$

$$\theta = \text{arctg}(p/q). \quad (8.11)$$

При этом, суммарная волна, исходящая из источников 1 и 2, принимает вид

$$A = \sqrt{A_{10}^2 + A_{20}^2 + 2A_{10}A_{20} \cos[a(k_e \cos \alpha - k_m)]} \cdot \sin(\omega t + \theta), \quad (8.12)$$

где

$$\theta = \text{arctg} \left[ \frac{A_{10} \cos(ak_e \cos \alpha) + A_{20} \cos(ak_m)}{A_{10} \sin(ak_e \cos \alpha) + A_{20} \sin(ak_m)} \right]. \quad (8.13)$$

*Произвольное число источников.* Перейдем теперь к рассмотрению суммарного излучения от произвольного числа  $N$  источников. В качестве первого этапа перехода от двух источников к произвольному их числу, рассмотрим три источника, для чего обратимся к рис. 8.5, где показана общая геометрия задачи для трех источников.

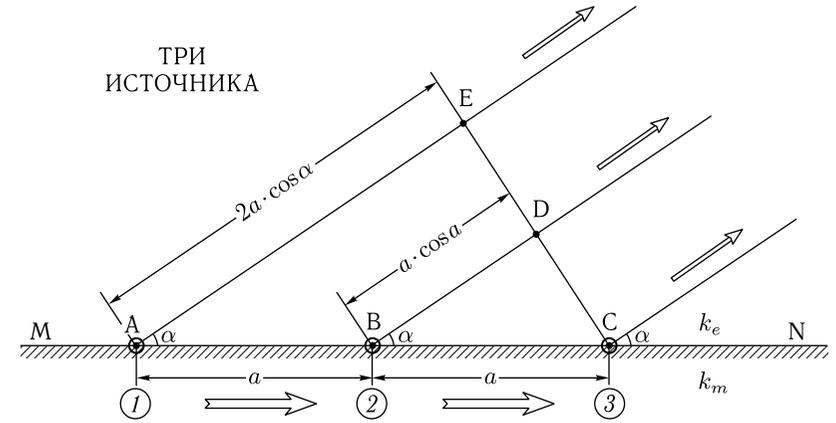


Рис. 8.5. Геометрия задачи для трех источников

Рассмотрим волны, излучаемые источниками 1–3, на линии CE. Волна, излучаемая источником 1, проходит путь AE. Волна, излучаемая источником 2, проходит относительно точки А путь АВ + BD, причем участок АВ — внутри пластины, а участок BD — вне пластины. Волна, излучаемая источником 3, проходит относительно точки А путь AC весь внутри пластины. В результате получаем волновые возмущения на линии CE в виде:

$$A_1 = A_{10} \cdot \cos(\omega t - 2ak_e \cos \alpha); \quad (8.14)$$

$$A_2 = A_{20} \cdot \cos(\omega t - ak_m - ak_e \cos \alpha); \quad (8.15)$$

$$A_3 = A_{30} \cdot \cos(\omega t - 2ak_m). \quad (8.16)$$

Аналогично для четырех источников получаем:

$$A_1 = A_{10} \cdot \cos(\omega t - 3ak_e \cos \alpha); \quad (8.17)$$

$$A_2 = A_{20} \cdot \cos(\omega t - ak_m - 2ak_e \cos \alpha); \quad (8.18)$$

$$A_3 = A_{30} \cdot \cos(\omega t - 2ak_m - ak_e \cos \alpha); \quad (8.19)$$

$$A_4 = A_{40} \cdot \cos(\omega t - 3ak_m). \quad (8.20)$$

Следуя аналогии, запишем возмущения для  $N$  источников:

$$A_1 = A_{10} \cdot \cos[\omega t - (N - 1)ak_e \cos \alpha]; \quad (8.21)$$

$$\dots \dots \dots A_n = A_{n0} \cdot \cos[\omega t - (n - 1)ak_m - (N - n)ak_e \cos \alpha]; \quad (8.22)$$

$$\dots \dots \dots A_N = A_{N0} \cdot \cos[\omega t - (N - 1)ak_m]. \quad (8.23)$$



можно вынести за знак корня, входящего в выражение (8.37). При этом амплитуды волн, исходящих от отдельных источников, будут определяться одной и той же формулой (8.3), а полная угловая зависимость диаграммы направленности будет содержать интерференционный коэффициент типа (8.37). Однако столь простая ситуация предполагает сохранение амплитуды волны при ее распространении в магнитной пластине, что, вообще говоря, не имеет места, так как волна постепенно затухает за счет потерь в феррите в сочетании с излучением части своей энергии в открытое пространство. Следующий раздел будет посвящен учету такого затухания.

**8.1.4. Возбуждение источников ЭМВ затухающей ПМСВ волной**

В предыдущем разделе рассмотрено формирование диаграммы направленности излучения из периодически распределенных источников. Амплитуды колебаний источников считались заданными заранее и известными. Однако в реальном случае при распространении волны в пластине источники формируются за счет прохождения волной периодически распределенных неоднородных областей с меняющимися параметрами. При этом амплитуда колебаний источников определяется амплитудой волны, проходящей через место расположения данного источника. По ходу распространения амплитуда волны спадает за счет двух механизмов: естественного затухания и излучения части энергии в пространство.

Потери волны на излучение иллюстрируются рис. 8.6, где представлена схема изменения амплитуды волны при прохождении одного источника, который представлен здесь как «область излучения». Предполагается, что амплитуда волны, входящей в область излучения, равна  $B_1$ , а выходящей из этой области —  $B_2$ . Разность амплитуд  $\Delta B = B_1 - B_2$  соответствует амплитуде волны, излучаемой в пространство. Величина  $\Delta B$  соответствует амплитуде  $A_n$  предыдущего раздела, то есть:

$$A_n = \Delta B = B_{n1} - B_{n2}. \tag{8.39}$$

Введем «коэффициент излучения»  $\eta$  такой, что

$$A_n = \Delta B = B_{n1} \cdot \eta. \tag{8.40}$$

При этом

$$B_{n2} = B_{n1} - \Delta B = B_{n1} \cdot (1 - \eta). \tag{8.41}$$

Предположим также, что в процессе распространения между источниками амплитуда волны спадает по экспоненте с показателем  $\beta > 0$ , то есть:

$$B(y) = B_0 \cdot e^{-\beta y}. \tag{8.42}$$

Рассмотрим теперь изменение амплитуды волны в процессе распространения и излучения.

На рис. 8.7 показана схема изменения амплитуды волны в процессе излучения из трех источников. Волна внутри пластины исходит из точ-

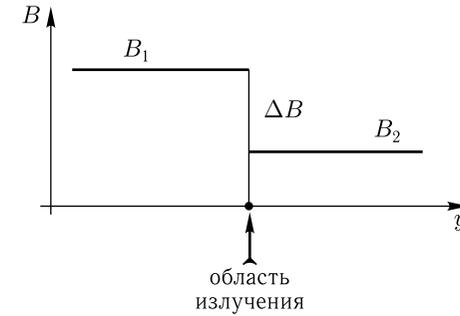


Рис. 8.6. Схема изменения амплитуды волны за счет излучения из одного источника

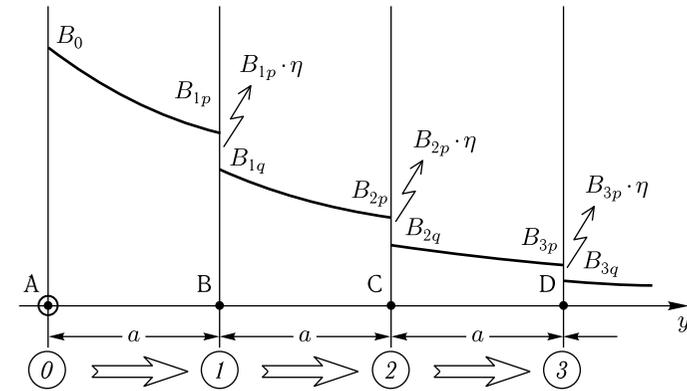


Рис. 8.7. Схема изменения амплитуды волны в процессе излучения из трех источников

ки А и последовательно проходит точки источников В, С, D, откуда происходит излучение.

В процессе распространения между источниками амплитуда волны спадает по экспоненте за счет естественного затухания, а в области каждого источника уменьшается скачком на величину, соответствующую потерям энергии на излучение.

Пусть начальная амплитуда волны в точке А равна  $B_0$ . При подходе к первому источнику она уменьшается до величины  $B_{1p}$ , после чего на источнике падает до значения  $B_{1q}$  в соответствии с формулой (8.41). При этом излучается волна с амплитудой  $B_{1p} \cdot \eta$ .

На пути между первым и вторым источниками амплитуда волны спадает до величины  $B_{2p}$ , после чего на источнике 2 спадает до  $B_{2q}$ , давая амплитуду излучаемой волны  $B_{2p} \cdot \eta$ . Далее на подходе к источнику 3 амплитуда принимает значение  $B_{3p}$ , а на самом источнике спадает до  $B_{3q}$ , давая волну  $B_{3p} \cdot \eta$ .

Запишем последовательные значения амплитуд волны при прохождении трех источников:

$$B_{1p} = B_0 \cdot e^{-\beta a}; \quad (8.43)$$

$$B_{1q} = B_{1p} \cdot (1 - \eta) = B_0 \cdot (1 - \eta) \cdot e^{-\beta a}; \quad (8.44)$$

$$B_{2p} = B_{1q} \cdot e^{-\beta a} = B_0 \cdot (1 - \eta) \cdot e^{-2\beta a}; \quad (8.45)$$

$$B_{2q} = B_{2p} \cdot (1 - \eta) = B_0 \cdot (1 - \eta)^2 \cdot e^{-2\beta a}; \quad (8.46)$$

$$B_{3p} = B_{2q} \cdot e^{-\beta a} = B_0 \cdot (1 - \eta)^2 \cdot e^{-3\beta a}; \quad (8.47)$$

$$B_{3q} = B_{3p} \cdot (1 - \eta) = B_0 \cdot (1 - \eta)^3 \cdot e^{-3\beta a}. \quad (8.48)$$

При этом получаем амплитуды излучаемых волн:

$$A_{10} = B_{1p} \cdot \eta = B_0 \cdot \eta \cdot e^{-\beta a}; \quad (8.49)$$

$$A_{20} = B_{2p} \cdot \eta = B_0 \cdot \eta(1 - \eta) \cdot e^{-2\beta a}; \quad (8.50)$$

$$A_{30} = B_{3p} \cdot \eta = B_0 \cdot \eta(1 - \eta)^2 \cdot e^{-3\beta a}. \quad (8.51)$$

Для источников с номерами  $n$  и  $p$  аналогично получаем:

$$A_{n0} = B_0 \cdot \eta(1 - \eta)^{n-1} \cdot e^{-n\beta a}; \quad (8.52)$$

$$A_{p0} = B_0 \cdot \eta(1 - \eta)^{p-1} \cdot e^{-p\beta a}; \quad (8.53)$$

При этом коэффициент при косинусе в формуле (8.37) принимает вид:

$$A_{n0}A_{p0} = B_0^2 \eta^2 (1 - \eta)^{n+p-2} \cdot e^{-(n+p)\beta a}. \quad (8.54)$$

Подставляя (8.54) в (8.37), получаем суммарную амплитуду излучаемой волны в виде:

$$A = B_0 \eta \sqrt{\sum_{n,p=1}^N (1 - \eta)^{n+p-2} \cdot e^{-(n+p)\beta a} \cos[a(n-p) \cdot (k_m - k_e \cos \alpha)]}. \quad (8.55)$$

Здесь  $B_0$  — амплитуда излучения одного источника, определяемая формулой (8.3). Подставляя (8.3) в (8.55), получаем диаграмму направленности излучения из периодической структуры с учетом затухания волны в виде:

$$A = A_0 \cdot \frac{\eta \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{\sum_{n,p=1}^N (1 - \eta)^{n+p-2} \cdot e^{-(n+p)\beta a} \cos[a(n-p) \cdot (k_m - k_e \cos \alpha)]}}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha\right)^2}. \quad (8.56)$$

Полученная формула является общей и пригодна для любого числа источников. Рассмотрим некоторые частные случаи.

Для одного источника  $N = 1$ , то есть  $n = p = 1$ . При этом получаем

$$A = A_0 \cdot \frac{\sin \alpha}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha\right)^2} \cdot e^{-\beta a}. \quad (8.57)$$

Здесь экспонента отражает тот факт, что начальная амплитуда волны задается при  $y = 0$ , а излучение происходит из точки  $y = a$ , то есть волна, доходя до этой точки, несколько затухает.

Для двух источников  $N = 2$ , то есть возможные пары значений  $n$  и  $p$  следующие: 1-1, 1-2, 2-1, 2-2. Выполняя суммирование, получаем

$$A = A_0 \cdot \frac{\eta \sin \alpha \cdot e^{-\beta a} \sqrt{1 + (1 - \eta)^2 e^{-2\beta a} + 2(1 - \eta) e^{-\beta a} \cos[a(k_m - k_e \cos \alpha)]}}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha\right)^2}. \quad (8.58)$$

Подобным же образом, с помощью перебора всех возможных пар значений  $n$  и  $p$ , можно найти диаграмму направленности при любом заданном числе источников, что для некоторых частных случаев и будет сделано в следующих разделах.

Напомним, что полученные здесь диаграммы (8.56), (8.57), (8.58) отражают амплитуды полей, так что диаграммы по энергиям пропорциональны квадратам приведенных выражений подобно (8.4).

## 8.2. Диаграмма направленности для двух источников

Поскольку диаграмма в виде (8.56) имеет довольно сложный характер, в том числе содержит суммирование по двум индексам, обратимся сначала к рассмотрению наиболее простого случая двух источников, чтобы выявить некоторые наиболее общие закономерности, характерные для излучения из сложной структуры.

### 8.2.1. Изменение расстояния между источниками

Остановимся для начала на случае двух источников и рассмотрим, как меняется диаграмма направленности при изменении расстояния между ними. При построении диаграммы воспользуемся формулой (8.58). Полученные диаграммы при различных расстояниях между источниками, нормированные по максимуму на единицу, показаны на рис. 8.8.

На этом рисунке кривая 1 соответствует нулевому расстоянию, то есть одному источнику, кривые 2 и 3 двум источникам при расстоянии между ними 1 см и 5 см. Кривые построены по формуле (8.58) при следующих параметрах: отношение скорости волны в феррите к скорости света —  $v/c = 0,3$ ; частота —  $F = 12110$  МГц; поле по оси  $Oz$  —  $H_{0z} = 3500,0$  Э; волновое число в свободном пространстве —  $k_e = 2,5363$  см $^{-1}$ ; волновое число в ферритовой пленке —  $k_m = 9,6000$  см $^{-1}$ ; затухание  $\beta = 0$ ; коэффициент излучения:

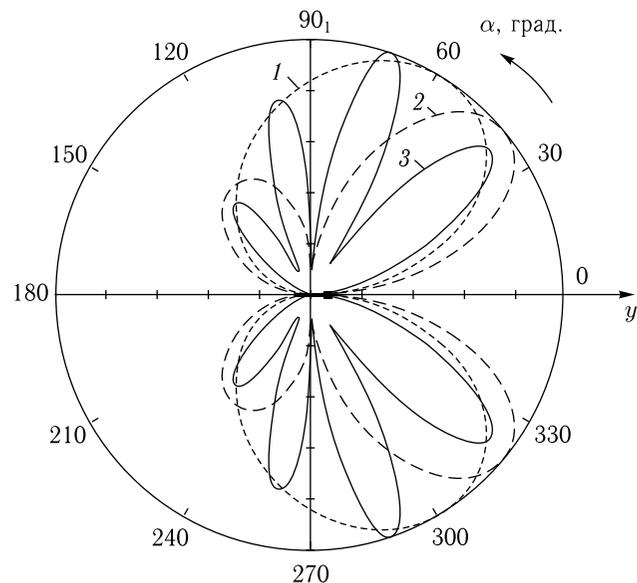


Рис. 8.8. Диаграммы направленности по амплитуде от двух источников при различных расстояниях  $a$  между источниками. 1 — 0 см; 2 — 1 см; 3 — 5 см

для кривой 1 —  $\eta = 1,0$ , для кривых 2 и 3 —  $\eta = 0,2$ ; параметры ферритовой пленки —  $4\pi M_0 = 1750$  Гс,  $d = 15$  мкм. Для приведения максимального значения амплитуды к единице введены следующие нормировочные коэффициенты: для кривой 1 — 0,8333, для кривой 2 — 3,3003, для кривой 3 — 0,4160.

Из рисунка видно, что все диаграммы симметричны относительно оси  $Oy$ . Часть диаграммы направленности в верхней полуплоскости в случае одного источника (кривая 1) представляет собой один лепесток, ширина которого по уровню 0,5 составляет около  $90^\circ$ . Максимум этого лепестка наклонен вперед по ходу волны на  $58^\circ$ . В случае двух источников при малом расстоянии между ними (кривая 2) этот лепесток расщепляется на два шириной  $28^\circ$  и  $15^\circ$ , из которых первый лепесток наклонен вперед по ходу волны на  $43^\circ$ , а второй назад под углом  $120^\circ$  к оси  $Oy$ , причем амплитуда его составляет 0,48 от амплитуды первого. При большом расстоянии между двумя источниками (кривая 3) верхняя часть диаграммы расщепляется на четыре лепестка, имеющие ширину  $12^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $8^\circ$  и  $6^\circ$ , составляющие с осью  $Oy$  углы  $37^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $100^\circ$ ,  $129^\circ$  и имеющие амплитуды 0,83, 1,00, 0,76 и 0,40 соответственно.

Таким образом, увеличение расстояния между двумя источниками приводит к расщеплению широкой однолепестковой диаграммы на несколько более узких лепестков, количество которых по мере увеличения расстояния возрастает. В то же время, при любой степени

расщепления, эти лепестки, будучи нормированными по амплитуде максимума диаграммы на единицу, как по ориентации, так и по амплитуде остаются в пределах единого широкого первичного лепестка от одного источника (кривая 1).

### 8.2.2. Изменение волнового числа ПМСВ

Рассмотрим теперь, как меняется диаграмма направленности излучения от тех же двух источников при изменении волнового числа магнитостатической волны в области излучения. Волновое число меняется при изменении поля или частоты в соответствии с дисперсионным соотношением, так что его изменение можно считать эквивалентом изменения частоты или поля. Однако в формулу (8.58) входит именно волновое число, поэтому здесь и останавливаем на нем свой выбор. Некоторые частные случаи получающихся при этом нормированных диаграмм иллюстрируются рис. 8.9.

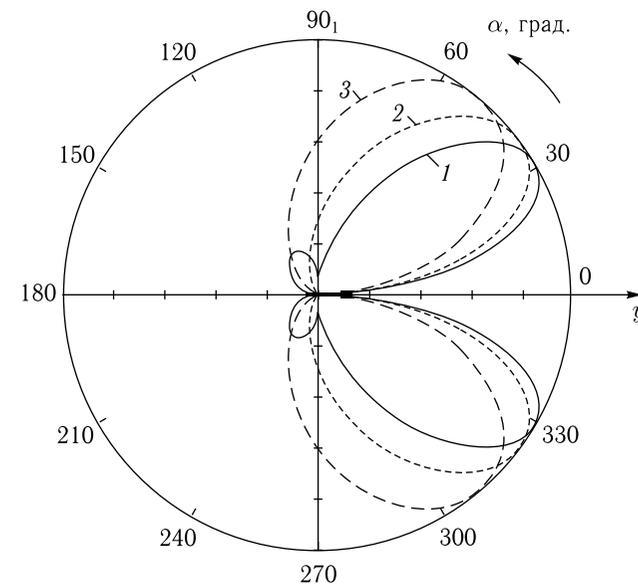


Рис. 8.9. Диаграммы направленности по амплитуде от двух источников при различных волновых числах  $k_m$  в феррите. 1 —  $9,6 \text{ см}^{-1}$ ; 2 —  $14,4 \text{ см}^{-1}$ ; 3 —  $19,2 \text{ см}^{-1}$

На этом рисунке кривая 1 соответствует волновому числу в ферритовой пленке  $k_m = 9,6 \text{ см}^{-1}$ , при этом частота  $F = 12\,110,0$  МГц, волновое число в свободном пространстве  $k_e = 2,5363 \text{ см}^{-1}$ , поле по оси  $Oz$   $H_{0z} = 3500,0$  Э. Кривая 2 соответствует  $k_m = 14,4 \text{ см}^{-1}$ ,  $F = 12\,113,5$  МГц,  $k_e = 2,5370 \text{ см}^{-1}$ ,  $H_{0z} = 3502,2$  Э. Кривая 3 соответствует  $k_m = 19,2 \text{ см}^{-1}$ ,  $F = 12\,117,0$  МГц,  $k_e = 2,5378 \text{ см}^{-1}$ ,

$H_{0z} = 3504,4$  Э. Общие для всех кривых параметры: два источника с расстоянием между ними  $a = 1$  см; отношение скорости волны в феррите к скорости света  $v/c = 0,6$ ; затухание  $\beta = 0$ ; коэффициент излучения  $\eta = 0,2$ . Параметры ферритовой пленки —  $4\pi M_0 = 1750$  Гс,  $d = 15$  мкм. Нормировочные коэффициенты: для кривой 1 — 1,5060, для кривой 2 — 1,2579, для кривой 3 — 1,7007.

Из рисунка видно, что все диаграммы симметричны относительно оси  $Oy$ . Часть диаграммы направленности в верхней полуплоскости имеет один большой лепесток, ширина которого по уровню 0,5 для кривой 1 составляет около  $22^\circ$ , для кривой 2 —  $31^\circ$ , для кривой 3 —  $46^\circ$ . Максимумы лепестков наклонены вперед по ходу волны на  $32^\circ$ ,  $38^\circ$  и  $50^\circ$  соответственно. Кривая 1 имеет незначительный дополнительный лепесток с амплитудой 0,16 от амплитуды основного, наклоненный к оси  $Oy$  под углом  $120^\circ$ .

Таким образом, увеличение волнового числа в феррите примерно в два раза (с  $9,6 \text{ см}^{-1}$  до  $19,2 \text{ см}^{-1}$ ) приводит к расширению диаграммы направленности также приблизительно в два раза — с  $22^\circ$  до  $46^\circ$ . Отметим, что для такого изменения волнового числа с соответствующим изменением ширины диаграммы направленности достаточно изменить поле с  $3500,0$  Э до  $3504,4$  Э, то есть всего на  $4,4$  Э, что составляет 0,13% от основной величины. К такому же изменению диаграммы приводит изменение частоты с  $12\,110$  МГц до  $12\,117$  МГц, то есть всего на  $7$  МГц, что составляет 0,058%.

То есть, для рассматриваемой структуры из двух источников довольно малое (на сотые доли процента) изменение поля или частоты позволяет менять ширину диаграммы направленности в значительных пределах (до двух раз).

### 8.3. Диаграмма направленности при большом числе источников

Обратимся теперь к структурам, содержащим более двух источников, и рассмотрим особенности, вносимые при этом в характер диаграммы. При значительном числе источников прямой расчет по формуле (8.56) становится довольно громоздким из-за необходимости суммирования по двум индексам. Однако свойства симметрии структуры, обеспечиваемые ее периодичностью, позволяют заметно упростить расчет, сведя его к суммированию лишь по одному индексу. Такое упрощение формулы (8.56) будет произведено в следующем разделе.

#### 8.3.1. Суммирование по одному индексу

Чтобы обеспечить рассмотрение более сложных структур, вернемся к формуле (8.56) и произведем некоторое усовершенствование входящей в нее процедуры суммирования, более удобное при значительном числе источников.

Из структуры выражения (8.56) можно видеть, что главная специфика диаграммы, вносимая рассмотрением совокупности источников, определяется подкоренным выражением

$$S_N = \sum_{n,p=1}^N (1-\eta)^{n+p-2} \cdot e^{-(n+p)\beta a} \cos[a(n-p) \cdot (k_m - k_e \cos \alpha)]. \quad (8.59)$$

Вводя обозначение

$$k_s = k_m - k_e \cos \alpha, \quad (8.60)$$

можно записать (8.59) в более компактном виде:

$$S_N = \sum_{n,p=1}^N (1-\eta)^{n+p-2} \cdot e^{-(n+p)\beta a} \cos[a(n-p) \cdot k_s]. \quad (8.61)$$

Двойная сумма в этом выражении означает, что по каждому из индексов суммирования осуществляется полный перебор значений от 1 до  $N$ , то есть, каждому значению  $n$  от 1 до  $N$  соответствует  $N$  значений  $p$  также от 1 до  $N$ . Таким образом, например, для одного источника ( $N = 1$ ) возможно лишь одно сочетание  $n$  и  $p$ : 1-1, для двух источников ( $N = 2$ ) — 4 сочетания: 1-1, 1-2, 2-1, 2-2, для трех ( $N = 3$ ) — девять: 1-1, 1-2, 1-3, 2-1, 2-2, 2-3, 3-1, 3-2, 3-3 и так далее. Полное число сочетаний для  $N$  источников равно  $N^2$ . Легко видеть, что каждая последующая совокупность индексов включает в себя предыдущую, как составную часть, например, совокупность для  $N = 3$  включает в себя совокупность для  $N = 2$ , которая в свою очередь включает в себя совокупность для  $N = 1$ . Каждая совокупность индексов для  $N$  источников, кроме предыдущей для  $N - 1$  источников, содержит также  $n - 1$  (где  $n \leq N - 1$ ) пар сочетаний вида:  $N-1$  и  $1-N$ ,  $N-2$  и  $2-N$ ,  $N-3$  и  $3-N$ , ...,  $N-n$  и  $n-N$ , ...,  $N-(N-1)$  и  $(N-1)-N$ , а также одно не имеющее пары сочетание  $N-N$  (здесь везде короткая горизонтальная черта между номерами источников означает не минус, а их сочетание, тогда как длинная — именно минус).

Благодаря симметрии индексов  $n$  и  $p$  в выражении (8.47), а также четности входящего в него косинуса, слагаемые, соответствующие упомянутым парам сочетаний индексов, будут одинаковыми, то есть при суммировании их достаточно будет учесть лишь один раз с коэффициентом 2.

С учетом сказанного выражение для  $S_N$  принимает вид:

$$S_N = S_{N-1} + 2 \sum_{n=N-1}^{2N-3} (1-\eta)^n e^{-(n+2)\beta a} \cos[(2N-2-n)ak_s] + (1-\eta)^{2N-2} e^{-2N\beta a}. \quad (8.62)$$

Можно видеть, что в этой формуле, в отличие от (8.56), суммирование производится только по одному индексу  $n$ , что позволяет значительно упростить необходимые вычисления.

Запишем важные для последующего изложения выражения  $S_N$  для  $N$  от 1 до 5:

$$S_1 = e^{-2\beta a}; \quad (8.63)$$

$$S_2 = S_1 + 2(1 - \eta)^1 e^{-3\beta a} \cos(ak_s) + (1 - \eta)^2 e^{-4\beta a}; \quad (8.64)$$

$$S_3 = S_2 + 2(1 - \eta)^2 e^{-4\beta a} \cos(2ak_s) + 2(1 - \eta)^3 e^{-5\beta a} \cos(ak_s) + (1 - \eta)^4 e^{-6\beta a}; \quad (8.65)$$

$$S_4 = S_3 + 2(1 - \eta)^3 e^{-5\beta a} \cos(3ak_s) + 2(1 - \eta)^4 e^{-6\beta a} \cos(2ak_s) + 2(1 - \eta)^5 e^{-7\beta a} \cos(ak_s) + (1 - \eta)^6 e^{-8\beta a}; \quad (8.66)$$

$$S_5 = S_4 + 2(1 - \eta)^4 e^{-6\beta a} \cos(4ak_s) + 2(1 - \eta)^5 e^{-7\beta a} \cos(3ak_s) + 2(1 - \eta)^6 e^{-8\beta a} \cos(2ak_s) + 2(1 - \eta)^7 e^{-9\beta a} \cos(ak_s) + (1 - \eta)^8 e^{-10\beta a}, \quad (8.67)$$

где  $k_s$  определяется формулой (8.60).

При этом диаграмма направленности (8.56) принимает вид

$$A_N = A_0 \cdot \frac{\eta \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{S_N}}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha\right)^2}, \quad (8.68)$$

где  $N$  — количество источников.

### 8.3.2. Изменение количества источников

Рассмотрим теперь деформацию диаграммы направленности при изменении количества формирующих ее источников.

Диаграммы для  $N$  от 2 до 5 представлены на рис. 8.10. Все диаграммы нормированы путем умножения на нормирующий множитель  $m$ , определяемый таким образом, чтобы максимум амплитуды диаграммы равнялся единице. Параметры расчета:  $a = 5$  см;  $\beta = 0$ ;  $\eta = 0,2$ ;  $v/c = 0,3$ ;  $k_m = 9,6000$  см $^{-1}$ ;  $k_e = 2,5363$  см $^{-1}$ . Частота —  $F = 12\,110$  МГц; поле по оси  $Oz$  —  $H_{0z} = 3500$  Э; параметры ферритовой пленки —  $4\pi M_0 = 1750$  Гс,  $d = 15$  мкм.

Из рисунка видно, что при любом числе источников полная диаграмма направленности, будучи многолепестковой, по-прежнему вписывается в единичный лепесток диаграммы от одного источника (все сплошные кривые вписываются в пунктирную), максимум которого приходится на  $58^\circ$ , а угловая ширина по половине от максимума составляет  $106^\circ$  (от  $17^\circ$  до  $123^\circ$ ). При этом количество, относительная амплитуда и угловое расположение главных лепестков сохраняется, однако их ширина уменьшается: при увеличении числа источников от двух до пяти главные лепестки сужаются в 4–5 и более раз.

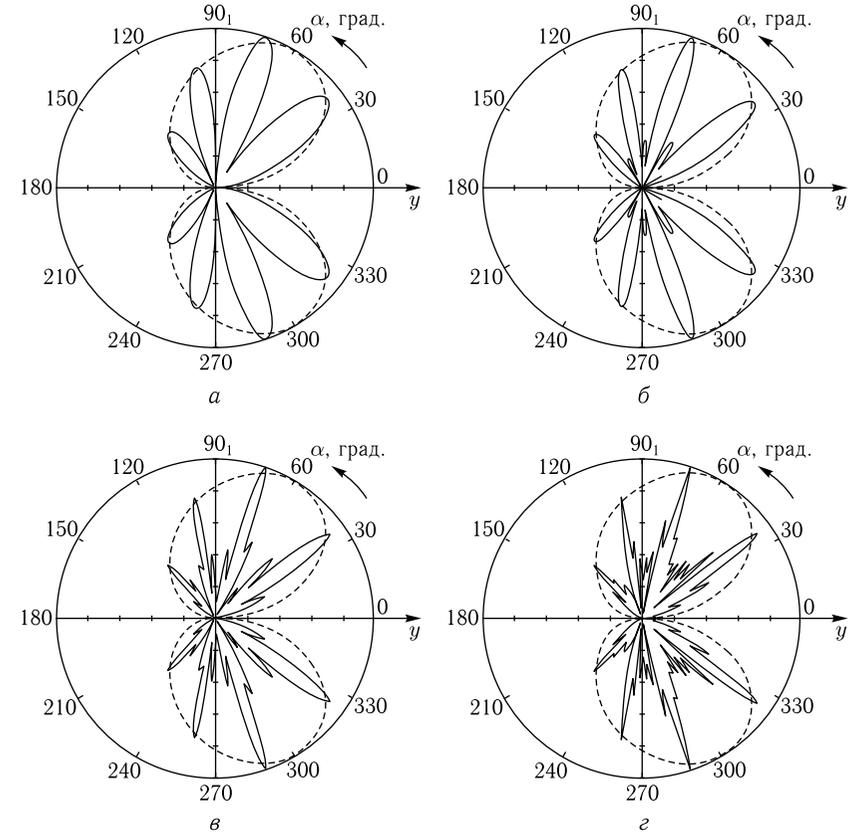


Рис. 8.10. Диаграмма направленности по амплитуде при разном количестве источников: а —  $N = 2$ ,  $m = 2,4072$ ; б —  $N = 3$ ,  $m = 1,7793$ ; в —  $N = 4$ ,  $m = 1,8657$ ; г —  $N = 5$ ,  $m = 2,7471$ . Пунктирная кривая соответствует одному источнику:  $N = 1$ ,  $m = 4,1703$

При этом в промежутках между главными лепестками появляется много вторичных лепестков, амплитуда которых составляет 0,1–0,5 от амплитуды главных, ширина меньше ширины главных в 2–5 раз, а число с увеличением количества источников увеличивается. Так при двух источниках вторичные лепестки отсутствуют, при трех источниках между каждыми двумя соседними главными лепестками появляется один вторичный, при четырех источниках количество вторичных лепестков в промежутках между главными равно двум, а при пяти источниках возрастает до 5–6.

### 8.3.3. Изменение расстояния между источниками

Рассмотрим теперь деформацию диаграммы направленности при изменении расстояния между источниками. Положим общее количе-

ство источников равным пяти ( $N = 5$ ), а расстояние  $a$  будем менять от 0,5 см до 2,5 см. Параметры расчета, кроме  $a$ , возьмем теми же самыми, при этом длина ПМСВ в пленке будет равна  $\lambda_m = 2,4773$  см.

Диаграммы направленности при различных значениях расстояния  $a$ , нормированные на единицу, представлены на рис. 8.11.

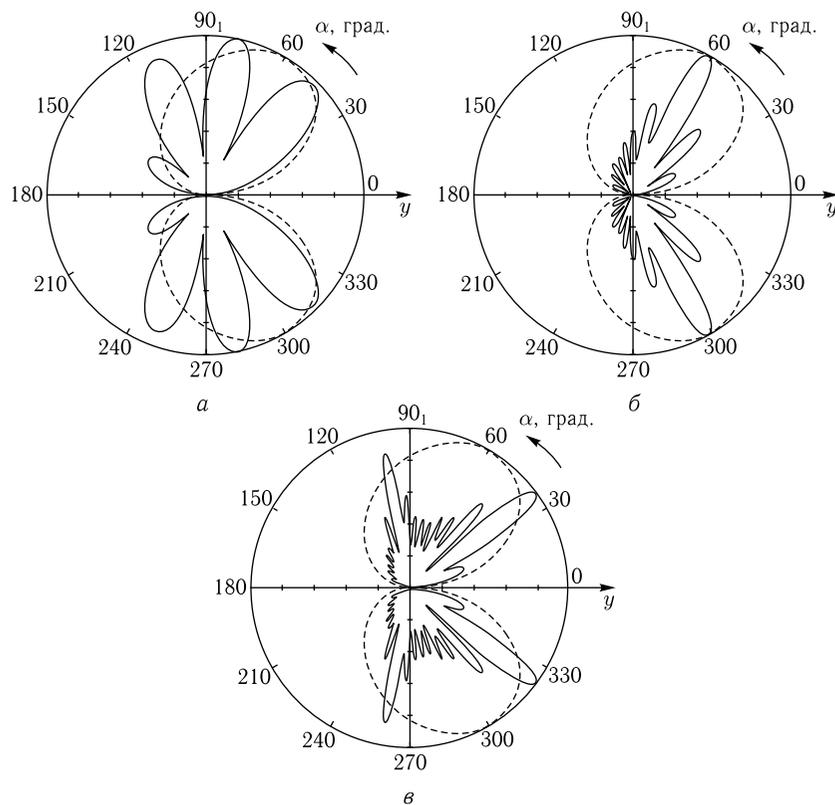


Рис. 8.11. Диаграмма направленности по амплитуде для пяти источников при разных расстояниях между источниками:  $a$  —  $a = 0,5$  см,  $m = 6,0226$ ;  $б$  —  $a = 1,5$  см,  $m = 2,6116$ ;  $в$  —  $a = 2,5$  см,  $m = 3,0362$ . Пунктирная кривая соответствует одному источнику:  $a = 0$ ,  $m = 4,1703$

Из рисунка видно, что при малом расстоянии между источниками равном  $a = 0,5$  см (рис. 8.11,  $a$ ), диаграмма направленности состоит из нескольких широких лепестков, распределенных по углам почти равномерно: максимумы лепестков (в верхней полуплоскости рисунка) приходятся на  $46^\circ$ ,  $78^\circ$ ,  $110^\circ$  и  $148^\circ$ , а их угловая ширина на половине высоты составляет  $37^\circ$ ,  $28^\circ$ ,  $32^\circ$  и  $31^\circ$  соответственно. При этом вторичные лепестки полностью отсутствуют.

При увеличении расстояния до значения  $a = 1,5$  см (рис. 8.11,  $б$ ) диаграмма направленности сужается до одного узкого лепестка, максимум которого приходится на  $62^\circ$ , а угловая ширина составляет  $16^\circ$ . Этот лепесток с обеих сторон окружен боковыми вторичными лепестками, амплитуда которых составляет от 0,1 до 0,5 от амплитуды основного и быстро спадает по мере удаления от основного лепестка, а угловая ширина составляет не более нескольких градусов. Эти лепестки распределены по углам более или менее равномерно в интервале от  $35^\circ$  до  $140^\circ$ , причем со стороны меньших углов от основного лепестка находятся два вторичных, а со стороны больших — семь вторичных лепестков.

При еще большем увеличении расстояния между источниками до значения  $a = 2,5$  см (рис. 8.11,  $в$ ) диаграмма направленности распадается на два основных довольно узких лепестка при углах  $36^\circ$  и  $100^\circ$  с шириной  $15^\circ$  и  $10^\circ$  соответственно, причем амплитуда второго составляет 0,87 от амплитуды первого. Между и по обе стороны от этих двух основных лепестков располагается множество (до 14) вторичных лепестков, амплитуды которых составляют от 0,05 до 0,60 от амплитуды основных и по мере удаления от основных лепестков резко спадают.

Из рисунка также видно, что полная диаграмма направленности полностью вписывается в первичный лепесток диаграммы от одного источника (показанный пунктиром) только при  $a = 1,5$  см (рис. 8.11,  $б$ ), когда главный лепесток является единственным. При других расстояниях между источниками ( $a = 0,5$  см, рис. 8.11,  $a$  и  $a = 2,5$  см, рис. 8.11,  $в$ ), некоторые из основных лепестков могут несколько (до 20%) выходить за пределы первичного, что, по-видимому, связано с различием в нормировке из-за несовпадения угловых положений максимумов наибольших лепестков ( $78^\circ$  для рис. 8.11,  $a$  и  $36^\circ$  для рис. 8.11,  $в$ ) с угловым положением максимума первичного лепестка ( $58^\circ$ ).

Из сравнения рис. 8.11,  $a$  и рис. 8.11,  $в$  можно видеть, что общий характер диаграммы для этих случаев различен: в первом диаграмма имеет несколько (4) широких главных лепестков без каких-либо следов вторичных, во втором диаграмма имеет несколько (2) узких главных лепестков, окруженных с обеих сторон множеством вторичных. При этом на рис. 8.11,  $б$  из нескольких главных лепестков выделяется только один, по краям которого появляются несколько вторичных. Таким образом, переход расстояния между источниками через величину, близкую к 1,5 см, приводящий к изменению общего характера диаграммы, является в каком-то отношении критическим.

Отметим, что именно в этом случае диаграмма направленности получается наиболее узкой, причем расстояние  $a = 1,5$  см, примерно соответствует половине длины волны ПМСВ в пленке ( $\lambda_m/2 = 1,24$  см), то есть антифазным колебаниям соседних источников. При этом сужение диаграммы направленности по сравнению с диаграммой от одного источника превышает 6 раз.

### 8.3.4. Изменение параметра затухания

Рассмотрим теперь деформацию диаграммы направленности при изменении затухания ПМСВ при распространении между источниками. Положим общее количество источников равным пяти ( $N = 5$ ), а расстояние между ними возьмем соответствующим наибольшему сужению диаграммы  $a = 1,5$  см. Все остальные параметры расчета, кроме затухания  $\beta$ , возьмем прежними. Для полноты картины сравним три случая: отсутствие затухания  $\beta = 0$ , затухание положительное  $\beta = 0,4$  и затухание отрицательное  $\beta = -0,4$ . Нормированные на единицу диаграммы направленности для этих случаев представлены на рис. 8.12.

Из рисунка видно, что как при положительном (рис. 8.12, б), так и при отрицательном (рис. 8.12, в) затухании диаграмма направленности, в основном, сохраняет характер одного главного лепестка, окру-

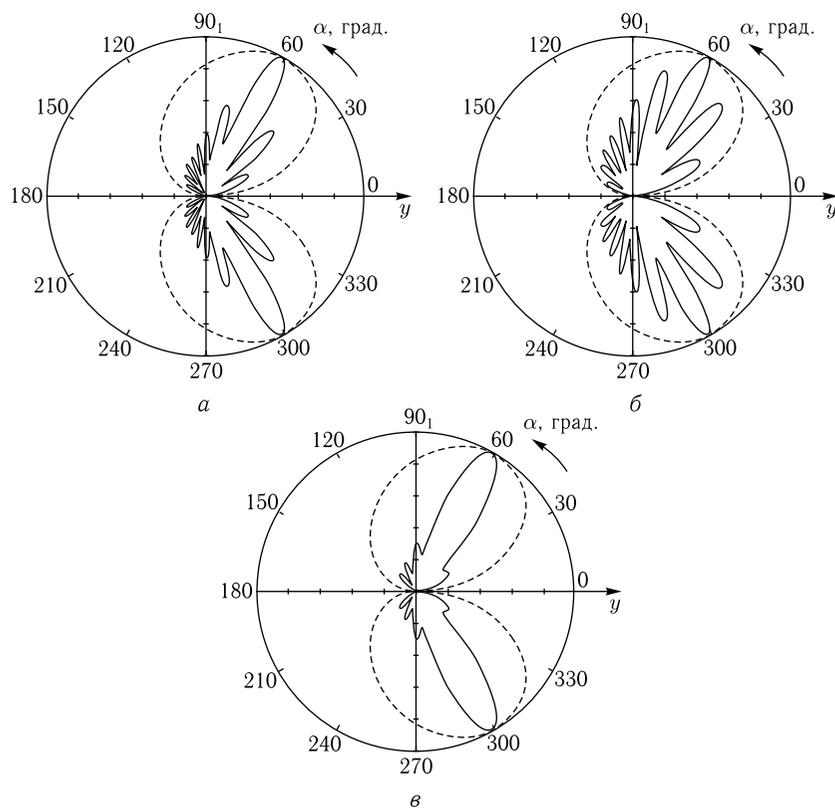


Рис. 8.12. Диаграмма направленности по амплитуде для пяти источников при разных параметрах затухания: а —  $\beta = 0$ ,  $m = 2,6116$ ; б —  $\beta = 0,4$ ,  $m = 21,356$ ; в —  $\beta = -0,4$ ,  $m = 0,2427$ . Пунктирная кривая соответствует одному источнику без затухания:  $N = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $m = 4,1703$

женного несколькими вторичными лепестками меньшей амплитуды. При этом максимум основного лепестка при любом затухании приходится на  $62^\circ$ , а угловая ширина в отсутствие затухания составляет  $16^\circ$ , при положительном затухании сужается до  $12^\circ$ , а при отрицательном расширяется до  $26^\circ$ .

Из условий нормировки можно видеть, что в сравнении со случаем без затухания (рис. 8.12, а) при положительном затухании (рис. 8.12, б) амплитуда главного лепестка уменьшается (при  $\beta = 0,4$  в 8,177 раз), а при отрицательном увеличивается (при  $\beta = -0,4$  в 10,76 раз).

Общий характер распределения вторичных лепестков по сторонам от основного при изменении затухания сохраняется. При этом полная диаграмма направленности при любом затухании целиком вписывается в первичный лепесток диаграммы от одного источника в отсутствие затухания (показанный пунктиром).

В сравнении со случаем без затухания (рис. 8.12, а) при положительном затухании (рис. 8.12, б,  $\beta = 0,4$ ) количество вторичных лепестков (9) остается тем же самым, но амплитуда их увеличивается в 1,5–2,0 раза, достигая 70–80% от амплитуды основного. При отрицательном затухании (рис. 8.12, в,  $\beta = -0,4$ ) количество вторичных лепестков уменьшается (вместо 9 остается 4), причем их амплитуда уменьшается в 4–5 раз, составляя от амплитуды основного не более 10–15%.

Таким образом, можно видеть, что уменьшение затухания приводит к уменьшению количества и относительной амплитуды вторичных лепестков, наиболее эффективному при отрицательном затухании. При этом, несмотря на небольшое расширение, диаграмма сохраняет характер одного главного достаточно узкого лепестка, почти полностью свободного от вторичных. При этом сужение диаграммы направленности по сравнению с диаграммой от одного источника превышает 4 раза.

## 8.4. Нерегулярное распределение источников

Рассмотрим теперь более сложный случай, когда источники расположены по-прежнему на одной прямой, но расстояния между ними меняются не периодически, а произвольным наперед заданным образом. В этом случае можно ожидать дополнительных возможностей формирования диаграммы направленности.

### 8.4.1. Формирование областей излучения

Будем рассматривать ферритовую пленку (пластину), намагниченную в ее плоскости. Общая геометрия задачи показана на рис. 8.13.

Ферритовая пленка 1 толщиной  $d$  намагничена постоянным однородным полем  $\mathbf{H}$ , приложенным в ее плоскости. Декартова система координат  $Oxyz$  выбрана таким образом, что плоскость  $Oyz$  совпадает с плоскостью ферритовой пленки, причем ось  $Oz$  параллельна направлению постоянного поля  $\mathbf{H}$ , ось  $Oy$  ему перпендикулярна, а ось  $Ox$

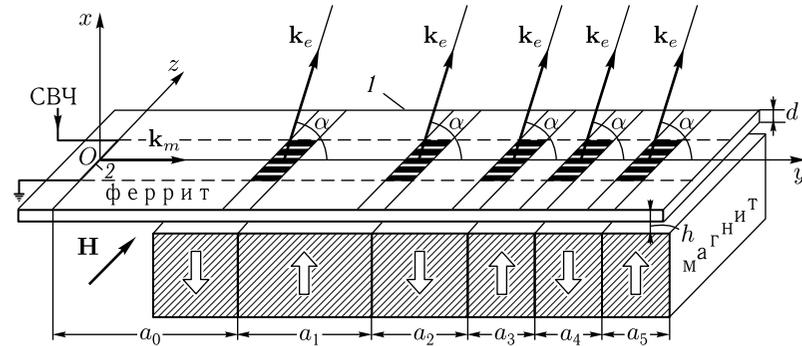


Рис. 8.13. Общая геометрия задачи

перпендикулярна плоскости пленки. Пленка дополнительно подмагничена магнитной системой, состоящей из параллельно расположенных плоских постоянных магнитов, широкие грани которых параллельны координатной плоскости  $Oxz$ , а узкие торцевые грани образуют плоскую поверхность, параллельную плоскости  $Oyz$ , отстоящую от поверхности ферритовой пленки на расстояние  $h$  (где  $h \gg d$ ). Толщины магнитов равны  $a_1, a_2, \dots$  и в общем случае — различны. Именно в этом состоит главное отличие от случая, рассмотренного в разделе 8.1.1 (рис. 8.1), где все толщины магнитов одинаковы. Толщины первого и последнего магнитов не критичны и могут равняться толщине соседних с ними второго и предпоследнего. Полюса магнитов расположены в чередующемся порядке, в результате чего на уровне стыков соседствующих магнитов в плоскости пленки образуется дополнительное поле, параллельное оси  $Oy$ . Расстояния между максимумами такого поля равны толщине магнитов. Будем называть такое расположение максимумов дополнительного поля «квазипериодическим». Предполагается, что это поле значительно меньше основного поля  $\mathbf{H}$ , приложенного вдоль оси  $Oz$ . Таким образом, в области расположения дополнительной магнитной системы суммарное постоянное поле испытывает вдоль оси  $Oy$  нерегулярные отклонения от оси  $Oz$  на небольшие углы.

На поверхности пленки расположена прямолинейная антенна 2, питаемая током СВЧ. При этом в пленке возбуждаются поверхностные магнитостатические волны (ПМСВ) с волновым вектором  $\mathbf{k}_m$ , распространяющиеся в положительном направлении оси  $Oy$ . Когда длина ПМСВ приближается к длине волны в свободном пространстве, из ферритовой пленки происходит излучение электромагнитных волн (ЭМВ) в направлении волнового вектора  $\mathbf{k}_e$ , составляющего угол  $\alpha$  с плоскостью пленки. Благодаря неоднородности магнитной системы, излучение ЭМВ происходит из нескольких нерегулярно квазипериодически расположенных областей излучения (на рисунке отмеченных широкими горизонтальными полосами). Суммарная диаграмма направленности излучения в пространстве формируется за счет интерферен-

ционного сложения диаграмм, образуемых каждой областью излучения в отдельности.

Для расчета магнитного поля используем процедуру, описанную в разделе 5.1.2 и примененную для расчета поля в разделе 8.1.2. Полученная в результате  $y$ -компонента поля имеет вид:

$$H_y = 8M \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(2n-1)\pi(x+h)}{a_n}}}{2n-1} \cdot \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi y}{a_n} \right], \quad (8.69)$$

где  $M$  — намагниченность материала магнитной системы. Отличие от формулы (8.1) состоит в учете меняющихся расстояний между источниками  $a_n$ .

Приведем небольшой численный пример параметров такой структуры. Пусть  $M = 30$  Гс,  $h = 0,01$  см, так что минимальное и максимальное значения поля  $H_y$  по модулю равны:  $|H_{0y}|_{\min} = 0$  Э,  $|H_{0y}|_{\max} = 498,4091$  Э. Суммарное подмагничивающее поле  $H_s(y)$ , определяется по формуле:

$$H_s(y) = \sqrt{H_{0z}^2 + H_{0y}^2(y)}. \quad (8.70)$$

При этом при  $H_{0z} = 3500,0$  Э минимальное значение суммарного поля равно  $H_{s \min} = 3500,0$  Э, а максимальное —  $H_{s \max} = 3535,3$  Э. Допустимый интервал частот, в пределах которого в пленке возможно распространение ПМСВ, определяется границами:  $F_{\min} = 12\,103$  МГц и  $F_{\max} = 12\,349$  МГц. Соответствующие этим границам волновые числа ПМСВ равны:  $k_{m \min} = 9,6000$  см $^{-1}$ ,  $k_{m \max} = 185,6267$  см $^{-1}$ , что соответствует длинам волн  $\lambda_{m \max} = 0,6545$  см,  $\lambda_{m \min} = 0,0338$  см. Для низшей из этих частот волновое число и длина волны в свободном пространстве равны:  $k_e = 2,5363$  см $^{-1}$ ,  $\lambda_e = 2,4773$  см. Таким образом, при принятых параметрах на частоте порядка 12 ГГц в ферритовой пленке имеются области, где волновое число в феррите ( $9,6000$  см $^{-1}$ ) довольно близко подходит к волновому числу в свободном пространстве ( $2,5363$  см $^{-1}$ ) (отличается всего в четыре раза), то есть создаются условия для эффективного излучения ЭМВ.

На рисунке границы таких областей, называемых далее областями излучения или источниками, показаны широкими горизонтальными линиями. Если полагать средние толщины магнитов дополнительной системы порядка 1 см, то можно видеть, что протяженность областей излучения по оси  $Oy$ , в сравнении с расстоянием между ними, довольно невелика. Так при различии между волновыми числами в феррите и в свободном пространстве в 20 раз, когда интенсивность излучения падает более чем на порядок (раздел 7.9), протяженность областей излучения составляет около 0,04 см, то есть не более 4% от средних толщин магнитов.

Таким образом, можно видеть, что квазипериодическое подмагничивающее поле формирует в ферритовой пленке квазипериодически расположенные области излучения (источники ЭМВ), размер которых значительно меньше расстояния между ними.

#### 8.4.2. Формирование диаграммы направленности

Рассмотрим теперь, как формируется диаграмма направленности излучения из совокупности квазипериодически расположенных областей излучения. Как и ранее (раздел 8.1) будем считать, что полная диаграмма складывается из диаграмм отдельных источников, описываемых формулой (8.4).

Для расчета полной диаграммы направленности последуем процедуре, описанной в разделе 8.1, с той разницей, что теперь будем считать  $a_n$  меняющейся величиной. Учтем затухание ПМСВ в процессе ее распространения экспонентой с коэффициентом  $\beta$ , а также обозначим коэффициент излучения источника с номером  $n$  через  $\eta_n$ .

При этом для произвольного числа источников, равного  $N$ , получаем суммарную диаграмму направленности в виде

$$A_S = G \cdot \left[ \sum_{n=1}^N A_n^2 + 2 \cdot \sum_{\substack{n=1 \\ m=n}}^N A_n A_m \cos(g_n - g_m) \right]^{1/2}, \quad (8.71)$$

где

$$G = B \cdot e^{-\beta a_0}, \quad (8.72)$$

причем  $B$  определяется формулой (8.3), а остальные входящие в (8.71) параметры — следующими формулами:

$$A_n = \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \eta_i) \cdot \eta_n \cdot \exp \left( -\beta \cdot \sum_{j=1}^{n-1} a_j \right); \quad (8.73)$$

$$g_n = k_m \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i + k_e \cdot \sum_{j=n}^{N+1} a_j \cdot \cos \alpha. \quad (8.74)$$

Так например, для пяти источников, получаем:

$$\begin{aligned} A_S = G \cdot [ & A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + A_5^2 + \\ & + 2A_1 A_2 \cos(g_1 - g_2) + 2A_1 A_3 \cos(g_1 - g_3) + \\ & + 2A_1 A_4 \cos(g_1 - g_4) + 2A_1 A_5 \cos(g_1 - g_5) + \\ & + 2A_2 A_3 \cos(g_2 - g_3) + 2A_2 A_4 \cos(g_2 - g_4) + \\ & + 2A_2 A_5 \cos(g_2 - g_5) + 2A_3 A_4 \cos(g_3 - g_4) + \\ & + 2A_3 A_5 \cos(g_3 - g_5) + 2A_4 A_5 \cos(g_4 - g_5) ]^{1/2}, \quad (8.75) \end{aligned}$$

где:

$$G = B \cdot e^{-\beta a_0}; \quad (8.76)$$

$$A_1 = \eta_1; \quad (8.77)$$

$$A_2 = (1 - \eta_1) \cdot \eta_2 \cdot e^{-\beta a_1}; \quad (8.78)$$

$$A_3 = (1 - \eta_1)(1 - \eta_2) \cdot \eta_3 \cdot e^{-\beta(a_1+a_2)}; \quad (8.79)$$

$$A_4 = (1 - \eta_1)(1 - \eta_2)(1 - \eta_3) \cdot \eta_4 \cdot e^{-\beta(a_1+a_2+a_3)}; \quad (8.80)$$

$$A_5 = (1 - \eta_1)(1 - \eta_2)(1 - \eta_3)(1 - \eta_4) \cdot \eta_5 \cdot e^{-\beta(a_1+a_2+a_3+a_4)}; \quad (8.81)$$

$$g_1 = k_e(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \cdot \cos \alpha; \quad (8.82)$$

$$g_2 = k_m a_1 + k_e(a_2 + a_3 + a_4) \cdot \cos \alpha; \quad (8.83)$$

$$g_3 = k_m(a_1 + a_2) + k_e(a_3 + a_4) \cdot \cos \alpha; \quad (8.84)$$

$$g_4 = k_m(a_1 + a_2 + a_3) + k_e a_4 \cdot \cos \alpha; \quad (8.85)$$

$$g_5 = k_m(a_1 + a_2 + a_3 + a_4). \quad (8.86)$$

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи диаграмм, получаемых при квазипериодическом расположении источников.

*Два источника.* Рассмотрим сначала формирование диаграммы от двух источников при различном расстоянии между ними. Диаграмма, создаваемая одним источником, имеет один широкий лепесток, при принятых в разделе 7.9 параметрах имеющий ширину около  $60^\circ$ , максимум которого составляет угол  $\alpha$  с осью  $Oy$  также около  $60^\circ$ . При увеличении расстояния между источниками от нулевого значения первоначальная диаграмма расщепляется на отдельные лепестки, отщепляющиеся от основного со стороны  $\alpha = 0$ . Амплитуда первого отщепляющегося лепестка довольно мала и составляет не более 10% от основного, затем она увеличивается до 50–70%, и этот лепесток становится преобладающим. При дальнейшем увеличении расстояния вблизи  $\alpha = 0$  зарождается новый лепесток, а преобладающий смещается в сторону больших значений  $\alpha$ . Таким образом, в определенном интервале изменения расстояния  $a_1$  (в пределах 25–30%) преобладающий лепесток поворачивается на значительные углы (десятки градусов). Такой поворот иллюстрируется рис. 8.14, где показаны нормированные на единицу диаграммы направленности при различном расстоянии между двумя источниками.

Из рисунка видно, что при одном источнике (кривая 1) диаграмма имеет единственный лепесток, угловая ширина которого составляет около  $50^\circ$ , а максимум приходится на  $60^\circ$ . Добавление второго источника на расстоянии  $a_1 = 0,3$  см (кривая 2) смещает максимум основного лепестка с  $60^\circ$  на  $45^\circ$  и сужает этот лепесток диаграммы почти в два раза (по половине высоты — до  $30^\circ$ ). Добавление второго источника на расстоянии  $a_1 = 0,4$  см (кривая 3) смещает максимум основного лепестка с  $60^\circ$  на  $105^\circ$  и сужает этот лепесток диаграммы в полтора раза (по половине высоты — до  $40^\circ$ ). При этом абсолютная длина

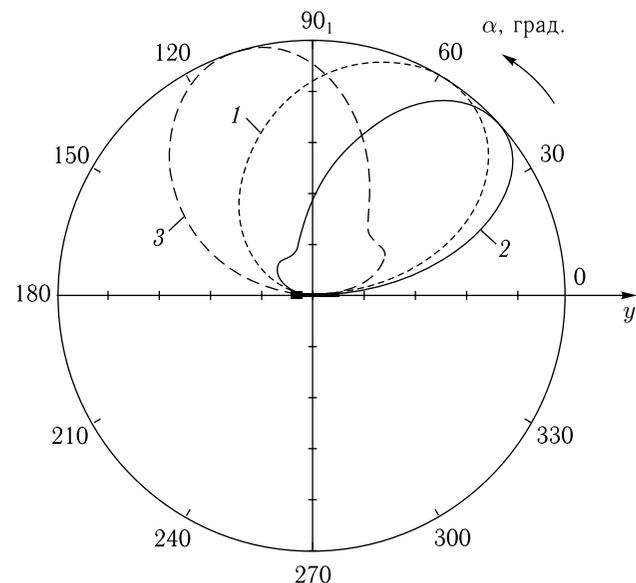


Рис. 8.14. Диаграммы направленности при различном расстоянии между двумя источниками. 1 —  $a_1 = 0$  см (один источник); 2 —  $a_1 = 0,3$  см (два источника); 3 —  $a_1 = 0,4$  см (два источника). Параметры построения:  $a_0 = 0,00$  см,  $\eta_1 = 0,20$ ;  $\eta_2 = 0,20$ ;  $\beta = 0$ ;  $v/c = 0,30$ ;  $k_e = 2,5363$  см<sup>-1</sup>;  $k_m = 9,6000$  см<sup>-1</sup>. Нормировочные коэффициенты: 1 — 4,17 (1/0,240); 2 — 7,04 (1/0,142); 3 — 6,02 (1/0,166)

лепестка по отношению к длине лепестка от одного источника в первом случае составляет 0,69 и во втором — 0,59, то есть относительное изменение длины лепестка составляет не более  $\pm 8\%$ .

Таким образом, при изменении расстояния между двумя источниками от 0,3 см до 0,4 см (то есть на 25%) угол наклона лепестка меняется от 45° до 105°, то есть на 60° или в 2,5 раза при изменении длины лепестка не более чем на  $\pm 8\%$ .

Заметим, что здесь, в отличие от случая, показанного на рис. 8.8, расщепления лепестка не происходит из-за того, что здесь расстояние между источниками меняется значительно меньше, чем на рис. 8.8, так что для расщепления является недостаточным.

**Пять источников.** Рассмотрим теперь формирование диаграммы направленности при пяти источниках. В этом случае при периодическом поле типичная диаграмма носит многолепестковый характер (рис. 8.11), причем один преобладающий лепесток сопровождается одним или несколькими дополнительными, длина которых составляет значительную часть (до 90%) от длины основного, а направления максимумов отличаются от направления основного лепестка на десятки градусов (разделы 8.3.2, 8.3.3).

Поставим задачу подбора расстояния между источниками так, чтобы увеличить максимальную длину и уменьшить ширину основного лепестка, а также уменьшить величину дополнительных лепестков. Будем последовательно добавлять к исходному источнику по одному дополнительному, располагая их на оптимальных для решения поставленной задачи расстояниях. Наибольшее изменение исходной диаграммы дает добавление одного источника, довольно заметное — добавление двух, добавление дальнейших источников сужает диаграмму и уменьшает величину дополнительных лепестков, причем эти изменения с увеличением числа источников постепенно ослабевают.

Формирование получающейся диаграммы иллюстрируется рис. 8.15, где на рис. 8.15, а показаны диаграммы для одного (кривая 1), двух (кривая 2) и трех (кривая 3) источников. На рис. 8.15, б показано дальнейшее формирование диаграммы, для трех (кривая 4), четырех (кривая 5) и пяти (кривая 6) источников. Разделение рисунка на две части обусловлено необходимостью избежать наложения кривых друг на друга, то есть кривая 3 на рис. 8.15, а в точности повторяет кривую 4 на рис. 8.15, б.

Из рисунка видно следующее. При одном источнике (кривая 1) диаграмма имеет единственный лепесток, угловая ширина которого составляет около 50°, а максимум приходится на 60°. Добавление первого источника расщепляет диаграмму на два лепестка: основной

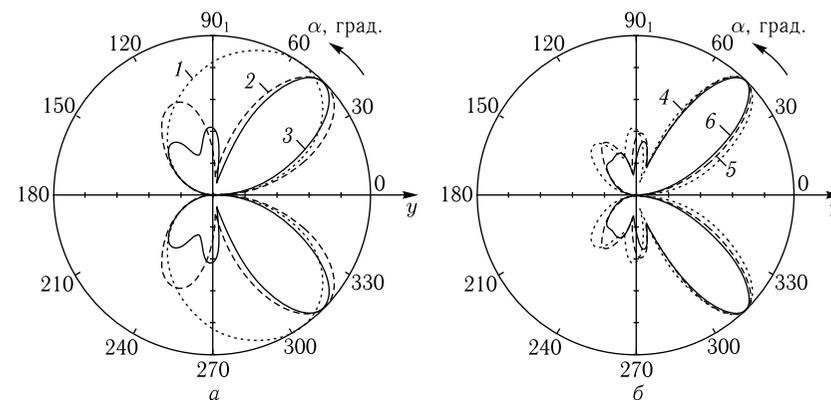


Рис. 8.15. Диаграмма направленности при различном количестве источников. 1 — один источник; 2 — два источника; 3, 4 — три источника; 5 — четыре источника; 6 — пять источников. Параметры построения:  $a_0 = 0,00$  см;  $a_1 = 1,70$  см;  $a_2 = 1,55$  см;  $a_3 = 0,80$  см;  $a_4 = 0,80$  см;  $\eta_1 = 0,20$ ;  $\eta_2 = 0,20$ ;  $\eta_3 = 0,20$ ;  $\eta_4 = 0,20$ ;  $\eta_5 = 0,20$ ;  $\beta = 0$ ;  $v/c = 0,30$ ;  $k_e = 2,5363$  см<sup>-1</sup>;  $k_m = 9,6000$  см<sup>-1</sup>. Нормировочные коэффициенты: 1 — 4,17 (1/0,240); 2 — 2,59 (1/0,386); 3 — 1,88 (1/0,532); 4 — 1,88 (1/0,532); 5 — 1,54 (1/0,650); 6 — 1,34 (1/0,745)

и дополнительный (кривая 2). Добавление этого источника смещает максимум основного лепестка с  $60^\circ$  на  $45^\circ$  и сужает этот лепесток диаграммы более чем в два раза (по половине высоты — до  $22^\circ$ ), однако при этом появляется значительный дополнительный лепесток в направлении  $125^\circ$ , длина которого составляет около 0,6 от длины основного, а угловая ширина —  $15^\circ$ . Добавление второго дополнительного источника (кривая 3) еще более сужает основной лепесток — приблизительно на 20%, а также расщепляет надвое и уменьшает длину дополнительного лепестка в два раза. Абсолютная длина основного лепестка при добавлении одного источника увеличивается в 1,61 раз, а при добавлении двух источников — в 2,22 раза. Добавление четвертого и пятого источников уменьшает ширину основного лепестка на 20% (до  $16^\circ$ ) и увеличивает его длину по отношению к трем источникам дополнительно в 1,40 раз, что дает по отношению к случаю одного источника увеличение длины в 3,11 раз. При этом угловая ширина дополнительных лепестков не меняется, а их максимальная величина уменьшается в полтора–два раза и составляет менее 20% от основного.

Таким образом, пять источников в сравнении со случаем одного источника позволяют уменьшить ширину основного лепестка в 4 раза (с  $50^\circ$  до  $16^\circ$ ), увеличить его длину более чем в 3 раза (в 3,11 раз) и подавить боковые лепестки до уровня не более 20% от основного.

## 8.5. Многослойное распределение источников

Рассмотрим теперь еще один вариант формирования диаграммы направленности — расположение нескольких излучающих пленок в виде многослойной структуры. При этом сигналы, подводимые к каждой из пленок, будем считать идентичными друг другу, а диаграмма направленности будет формироваться за счет интерференционного сложения электромагнитных волн, возбуждаемых всей совокупностью магнитных пленок.

### 8.5.1. Геометрия структуры и областей излучения

Будем рассматривать плоскопараллельную многослойную структуру, состоящую из набора ферритовых пленок, расположенных компланарно в виде стопы с промежутками. Общая геометрия задачи показана на рис. 8.16.

Основу структуры составляет набор параллельно расположенных ферритовых пленок, разделенных промежутками. В настоящей работе ограничимся рассмотрением случая, когда магнитные параметры всех пленок одинаковы, их толщины равны одной и той же величине  $d$ , а все промежутки между пленками равны  $g$ . Структура намагничена постоянным полем  $\mathbf{H}$ , параллельным плоскостям пленок, причем пространственная конфигурация поля для всех пленок также одинакова. Декартова система координат  $Oxyz$  выбрана таким образом, что плоскость  $Oyz$  параллельна плоскостям пленок, причем ось  $Oz$  параллель-

на направлению постоянного поля  $\mathbf{H}$ , ось  $Oy$  ему перпендикулярна, а ось  $Ox$  перпендикулярна плоскостям пленок.

Для простоты положим, что структура содержит нечетное число пленок  $2N + 1$ , где  $N$  — произвольное число. При этом начало координат  $O$  выберем в центре средней пленки, которой присвоим номер 0, причем пленки в положительном направлении оси  $Ox$  будем нумеровать цифрами от 1 до  $N$ , а в отрицательном — цифрами от  $-1$  до  $-N$ .

**Замечание.** При желании обобщить такую геометрию на четное число пленок, начало координат можно расположить в центре одной из двух пленок, ближайших к середине структуры, а остальные пленки нумеровать в том же порядке. Так как при этом число пленок по одну сторону от центральной будет отличаться на единицу от числа пленок по другую ее сторону, то для сохранения симметрии задачи можно добавить один из источников на недостающей стороне, положив его амплитуду равной нулю.

На поверхности каждой пленки расположена прямолинейная антенна, питаемая током СВЧ. При этом в пленке возбуждаются поверхностные магнитоэлектрические волны (ПМСВ) с волновым вектором  $\mathbf{k}_m$ , распространяющиеся в положительном направлении оси  $Oy$ . Поле  $\mathbf{H}$  по оси  $Oy$  является неоднородным: в положительном направлении этой оси его напряженность плавно увеличивается. Когда длина волны ПМСВ приближается к длине волны в свободном пространстве, из ферритовой пленки происходит излучение электромагнитных волн (ЭМВ) в направлении волнового вектора  $\mathbf{k}_e$ , составляющего угол  $\alpha$  с плоскостью пленки.

Благодаря многослойности структуры, излучение ЭМВ происходит из нескольких периодически расположенных вдоль оси  $Ox$  областей излучения, соответствующих каждой пленке в отдельности (на рисунке

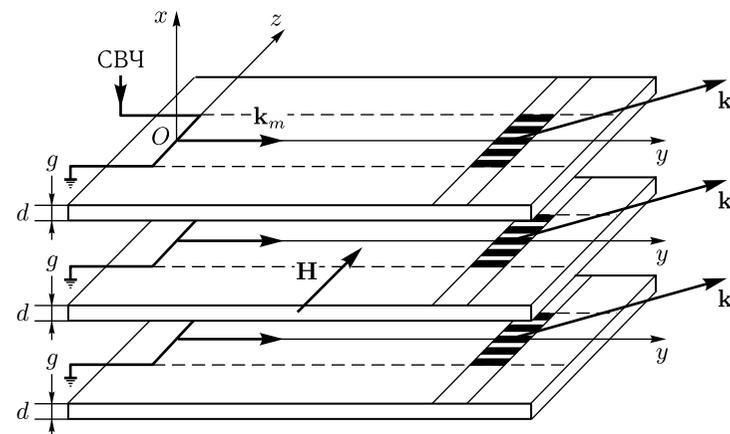


Рис. 8.16. Общая геометрия многослойной структуры

отмеченных широкими горизонтальными полосами). Суммарная диаграмма направленности излучения в пространстве формируется за счет интерференционного сложения диаграмм, образуемых каждой областью излучения в отдельности.

### 8.5.2. Формирование диаграммы направленности

Рассмотрим теперь, как формируется диаграмма направленности излучения из совокупности периодически расположенных областей излучения. Будем полагать, что размер областей излучения значительно меньше расстояния между ними, так что совокупность этих областей для структуры в целом можно рассматривать как систему периодически расположенных на оси  $Ox$  точечных источников.

Положим далее, что результирующая диаграмма направленности в плоскости  $Oxy$  складывается за счет интерференции волн, исходящих из отдельных источников в соответствии с обычной диаграммой по амплитуде, рассмотренной в разделе 7.9 и описываемой формулой (8.3).

*Схема формирования интерференционной картины.* Для нескольких областей схема формирования суммарной интерференционной картины показана на рис. 8.17. Здесь на рис. 8.17, *a* приведена схема общей геометрии многослойной структуры в виде с ее торца, то есть со стороны оси  $Oz$ . Цифры в кругах — номера пленок. Векторы  $\mathbf{k}_m$  и  $\mathbf{k}_e$  — соответственно волновые векторы ПМСВ и ЭМВ. Благодаря периодически повторяющейся геометрии структуры все векторы  $\mathbf{k}_e$  параллельны друг другу.

На рис. 8.17, *б* показана схема образования разности хода между волнами, излучаемыми из каждой пленки в отдельности. Предполагается, что фазы всех ЭМВ на оси  $Ox$ , то есть на линии, проходящей через точки  $A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2$ , равны друг другу. Сложение фаз волн, распространяющихся под углом  $\alpha$  к оси  $Oy$ , происходит на линии, проходящей через точки  $B_{-2}, B_{-1}, A_0, B_1, B_2$ . При этом для волн, исходящих из точек  $A_{-n}$  и проходящих путь до точек  $B_{-n}$  (где  $n > 0$ ), дополнительный набег является положительным, а для волн, исходящих из точек  $A_n$  и проходящих до точек  $B_n$  (где также  $n > 0$ ), такой набег является отрицательным.

Полная волна под углом  $\alpha$  к оси  $Oy$  является суммой волн от отдельных источников:

$$A_{-N} = A_{-N0} \cos(\omega t + N g k_e \sin \alpha + \varphi_{-N}); \quad (8.87)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_{-n} = A_{-n0} \cos(\omega t + n g k_e \sin \alpha + \varphi_{-n}); \quad (8.88)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_{-1} = A_{-10} \cos(\omega t + g k_e \sin \alpha + \varphi_{-1}); \quad (8.89)$$

$\dots \dots \dots$

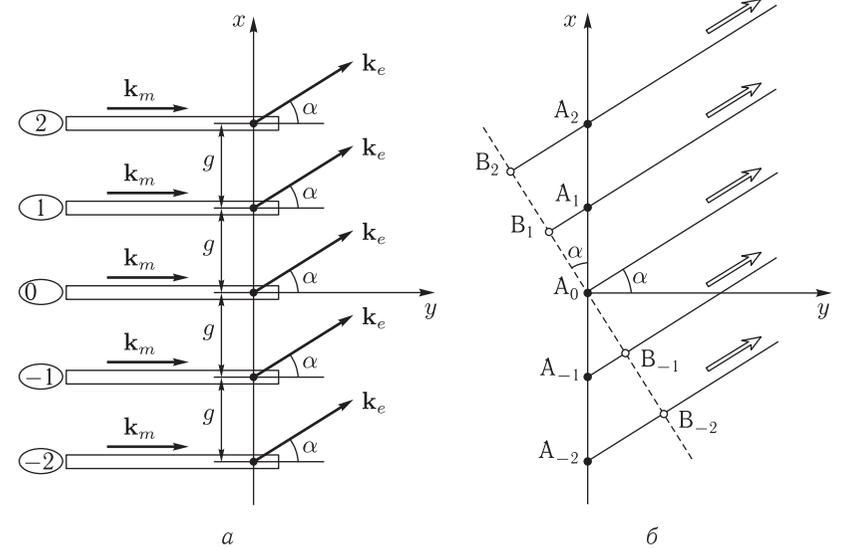


Рис. 8.17. Схема формирования интерференционной картины от совокупности нескольких (здесь — пяти) источников. *a* — схема геометрии структуры; *б* — схема образования разности хода между излучаемыми ЭМВ

$$A_0 = \cos(\omega t); \quad (8.90)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_1 = A_{10} \cos(\omega t - g k_e \sin \alpha + \varphi_1); \quad (8.91)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_n = A_{n0} \cos(\omega t - n g k_e \sin \alpha + \varphi_n); \quad (8.92)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_N = A_{N0} \cos(\omega t - N g k_e \sin \alpha + \varphi_N), \quad (8.93)$$

где  $A_{\pm n0}$  — амплитуды, а  $\varphi_{\pm n}$  — фазы частичных волн, исходящих от источников с номерами от  $-N$  до  $N$ , задаваемые фазой подводимых СВЧ сигналов. При синфазности возбуждения всех источников все  $\varphi_{\pm n}$  одинаковы или равны нулю.

Суммарная волна от совокупности всех источников имеет вид:

$$A_S = \sum_{n=-N}^N A_n = \cos(\omega t) \sum_{n=-N}^N A_{n0} \cdot \cos(|n| g k_e \sin \alpha + \varphi_n) + \sin(\omega t) \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \frac{n}{|n|} A_{n0} \cdot \sin(|n| g k_e \sin \alpha + \varphi_n). \quad (8.94)$$

Амплитуда суммарной волны равна

$$A_{S0} = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad (8.95)$$

где:

$$p = \sum_{n=-N}^N A_{n0} \cdot \cos(|n|gk_e \sin \alpha + \varphi_n); \quad (8.96)$$

$$q = \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \frac{n}{|n|} A_{n0} \cdot \sin(|n|gk_e \sin \alpha + \varphi_n). \quad (8.97)$$

В этих выражениях амплитуды  $A_{n0}$ , задаются диаграммой от одного источника, то есть определяются в соответствии с (8.3).

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи диаграмм, получаемых при периодическом расположении источников.

### 8.5.3. Диаграмма направленности от двух источников

Рассмотрим диаграмму направленности, получаемую от двухслойной структуры, в зависимости от расстояния между слоями, то есть в ситуации, соответствующей двум источникам. Последовательная трансформация диаграммы при увеличении расстояния  $g$  между источниками показана на рис. 8.18. Все диаграммы нормированы на максимум длины наибольшего лепестка, в результате чего все они укладываются в окружность единичного радиуса. Номера диаграмм соответствуют расстоянию  $g$  между источниками в сантиметрах.

Из рисунка видно, что по мере увеличения расстояния между источниками единый начальный лепесток диаграммы расщепляется на отдельные более узкие лепестки, причем отщепление новых лепестков происходит со стороны больших углов  $\alpha$ . Расщепление впервые становится заметным, начиная с  $g = 3$  см, то есть тогда, когда расстояние между источниками приближается к половине длины волны. Однако при приближении расстояния между источниками к полной длине волны, то есть к  $g = 6$  см снова один из лепестков начинает значительно преобладать над остальными, в результате чего расщепление почти исчезает. Новое расщепление происходит при  $g = 9$  см, что соответствует трем половинам длины волны. Диаграмма снова стремится к единству при  $g = 12-13$  см, что соответствует двум полным или четырем половинам длины волны и отщепляет очередной лепесток при  $g = 15$  см, то есть при пяти половинах длины волны. В этих двух случаях однако воссоединение и расщепление диаграммы выражено несколько слабее, чем в первых двух случаях из-за мешающего действия отщепившихся ранее лепестков.

Подобная тенденция чередования объединения и расщепления диаграммы при увеличении расстояния между источниками повторяется и дальше (проверено вплоть до  $g = 100$  см), хотя чем далее, тем она

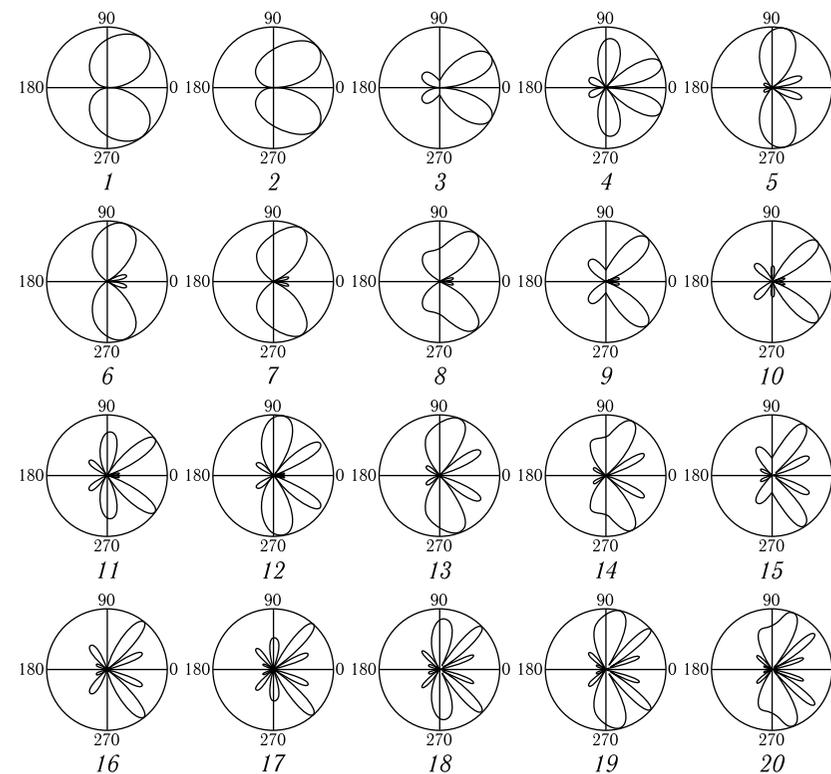


Рис. 8.18. Трансформация диаграммы направленности для двухслойной структуры при изменении расстояния между слоями. Угол  $\alpha$  отсчитывается от горизонтальной оси в направлении против часовой стрелки. Построение выполнено при  $k_e = 1 \text{ см}^{-1}$ , что соответствует длине волны  $\lambda_e = 6,28$  см. Все  $A_{n0} = 0$ ,  $\varphi_{\pm n} = 0$

сильнее смазывается. Тем не менее, можно утверждать, что диаграмма отщепляет очередной лепесток тогда, когда расстояние между источниками равняется нечетному числу полуволн и стремится к единству тогда, когда это расстояние становится кратным четному числу полуволн или целому числу длин волн.

**Положение и ширина главного лепестка.** Рассмотрим теперь структуру диаграммы направленности излучения от двух источников более подробно, для чего проследим изменение наиболее длинного, то есть главного лепестка, при изменении расстояния между ними.

Полученные зависимости иллюстрируются рис. 8.19, где показаны угловое положение максимума и краев по уровню половины высоты ( $a$ ), а также ширина ( $b$ ) главного лепестка в зависимости от расстояния между источниками.

На рис. 8.19, *а* можно выделить несколько характерных областей (в пределах рисунка — четыре), на границах которых происходит замена предыдущего главного лепестка на последующий. В области, где данный лепесток является главным, то есть преобладает по амплитуде над остальными, по мере увеличения расстояния  $g$ , он зарождается на левой границе области при угле  $\alpha$  в пределах  $60^\circ$ – $80^\circ$  и далее

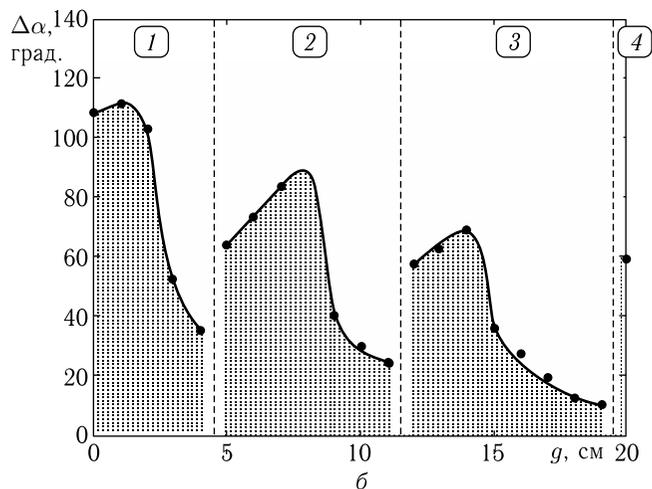
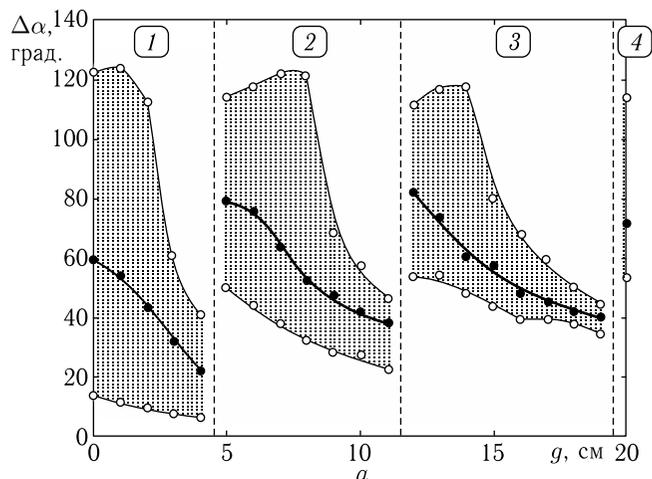


Рис. 8.19. Положение максимума (утолщенные линии) и краев (тонкие линии) (*а*), а также ширина (*б*) главного лепестка в зависимости от расстояния между двумя источниками. Цифрами в кругах обозначены характерные области изменения главного максимума, вертикальные пунктирные линии — границы между ними. Параметры построения — те же, что на предыдущем рисунке. Точки — результат машинного эксперимента

смещается до угла  $\alpha$  порядка  $20^\circ$ – $40^\circ$  на правой границе области. После этого в пределах следующей области, расположенной справа от предыдущей, зарождается новый главный лепесток, угловое положение максимума которого, также начинаясь с  $60^\circ$ – $80^\circ$ , спускается до  $20^\circ$ – $40^\circ$ , после чего он в свою очередь уступает место следующему лепестку и так далее.

Такая периодическая смена главенства лепестков происходит при любых сколь угодно больших расстояниях между источниками (проверено до  $g = 100$  см).

Из рис. 8.19, *б* видно, что в пределах каждой области ширина главного лепестка сначала несколько увеличивается, приблизительно на 10–20 % относительно ширины в момент зарождения, после чего вплотную до границы области спадает в три–пять раз по сравнению с начальной. При этом по мере увеличения номера области как максимальная, так и минимальная ширина лепестка уменьшаются, то есть лепесток сужается при переходе от предыдущей области к последующей приблизительно на 20–30 %.

Границы областей приходятся на 5,5 см, 12,0 см, 19,5 см, что довольно близко соответствует последовательности целых длин волн:  $\lambda = 6,28$  см,  $2\lambda = 12,56$  см,  $3\lambda = 18,84$  см. Слева от этих границ лепесток максимально сужается. Максимумы ширины лепестка приходятся на 2,0 см (область 1), 8,0 см (область 2), 14,0 см (область 3), что довольно близко соответствует последовательности нечетных чисел, кратных половине длины волны:  $\lambda/2 = 3,14$  см,  $3\lambda/2 = 9,42$  см,  $5\lambda/2 = 15,70$  см. Таким образом, можно считать, что минимумы ширины главного лепестка приходятся на расстояния между источниками, кратные четному числу полуволн, а максимумы — нечетному.

*Амплитуды основных лепестков.* Рассмотрим теперь, как меняются амплитуды следующих друг за другом главных лепестков при изменении расстояния между двумя источниками. Соответствующие зависимости показаны на рис. 8.20.

Здесь четко прослеживаются те же области, что и на рис. 8.19. При этом видно, что каждый, кроме первого, главный лепесток (утолщенные линии) зарождается от нуля еще в предшествующей ему области, затем, перейдя в свою область и быстро увеличиваясь, достигает максимума примерно на трети ее ширины, после чего на границе с последующей областью спадает до уровня на 10–20 % ниже максимума и далее, уступая свое место последующему главному лепестку и, переходя в следующие друг за другом области, постепенно спадает до нуля. Лепесток в первой области сразу стартует с максимальной своей величины, после чего спадает примерно так же, как и последующие.

От каждого главного лепестка вблизи его максимума отщепляется дополнительный лепесток (тонкие линии), амплитуда которого сразу же после отщепления резко спадает (от полутора до трех раз), после чего по мере увеличения расстояния  $g$  стремится к нулю, оставаясь

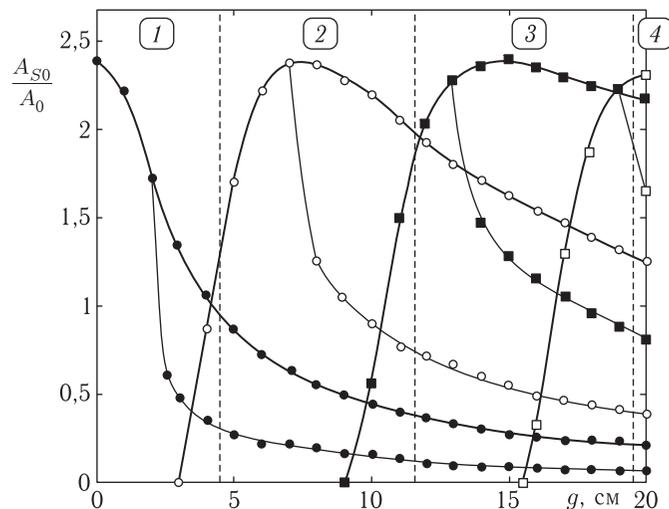


Рис. 8.20. Амплитуды сменяющих друг друга лепестков в зависимости от расстояния между двумя источниками (нормированы на амплитуду возбуждения). Утолщенные линии — главные лепестки, тонкие линии — дополнительные. Цифры в кругах — области изменения главного максимума (те же, что на рис. 8.19), вертикальные пунктирные линии — границы между ними. Параметры — те же. Точки — результат машинного эксперимента

примерно в два раза меньше амплитуды того главного лепестка, от которого этот дополнительный лепесток отщепился.

Из рис. 8.20 можно видеть, что максимальная амплитуда главных сменяющих друг друга лепестков всегда достигает величины 2,4, причем провалы между амплитудами при переходе через границы областей по мере увеличения  $g$  уменьшаются, составляя уже для области 3 менее 10% от максимума. Таким образом, можно полагать, что максимальная амплитуда излучаемой волны от расстояния между источниками практически не зависит (проверено до  $g = 100$  см).

*Сужение главного лепестка за счет изменения расстояния между источниками.* Одной из важнейших прикладных задач является получение от антенны как можно более узкой диаграммы направленности. Рассмотрим с этих позиций возможности уменьшения ширины главного лепестка за счет изменения расстояния между двумя источниками. Получаемые диаграммы направленности, нормированные на максимум длины главного лепестка, иллюстрируются рис. 8.21. Расстояния между источниками подобраны таким образом, чтобы главный лепесток, оставаясь максимально узким, наиболее преобладал по амплитуде над остальными. Исходя из симметричности диаграммы относительно горизонтальной оси, можно следить далее только за верхней ее половиной.

Рис. 8.21, а соответствует слиянию двух источников в один и приведен здесь для сравнения. Ширина лепестка на уровне половины длины в этом случае составляет  $110^\circ$ , а максимум приходится на  $59^\circ$ .

Рис. 8.21, б соответствует расстоянию  $g = 3$  см ( $0,48\lambda$ ), то есть первой зоне. В этом случае ширина главного лепестка составляет  $52^\circ$ , однако появляется дополнительный лепесток при  $\alpha = 140^\circ$ , ширина которого составляет около  $35^\circ$ , а амплитуда достигает  $15^\circ$  от максимума главного лепестка.

Рис. 8.21, в соответствует расстоянию  $g = 10$  см ( $1,59\lambda$ ), то есть уже второй зоне. В этом случае ширина главного лепестка составляет  $30^\circ$ , однако имеются уже несколько дополнительных лепестков, наиболь-

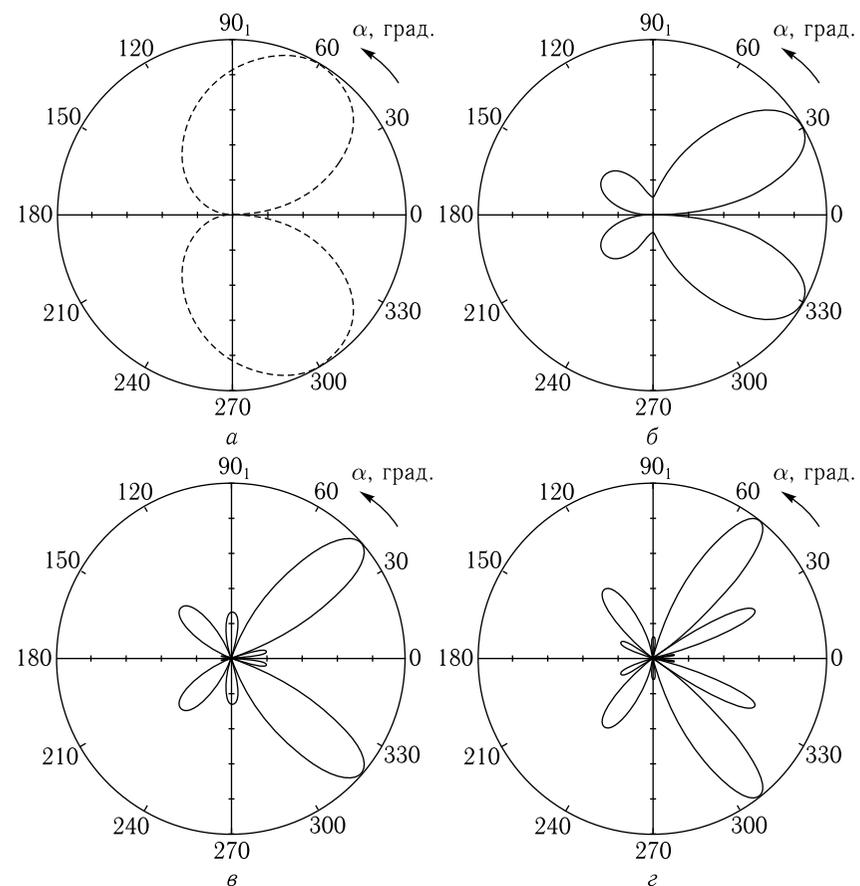


Рис. 8.21. Диаграммы направленности излучения от двух источников при различном расстоянии  $g$  между ними. а — 0 см; б — 3 см; в — 10 см; г — 16 см. Остальные параметры — те же

ший из которых соответствует  $138^\circ$  и имеет ширину около  $15^\circ$  при амплитуде 17% от максимума главного лепестка.

Рис. 8.21, *г* соответствует расстоянию  $g = 16 \text{ см}$  ( $2,55\lambda$ ), то есть третьей зоне. В этом случае ширина главного лепестка составляет  $27^\circ$ , а наибольший из дополнительных лепестков соответствует  $\alpha = 22^\circ$  и имеет ширину около  $10^\circ$  при амплитуде 60% от максимума главного лепестка.

Итак, в первой зоне главный лепесток сужается относительно лепестка от одного источника в 2,12 раза, во второй зоне — в 3,67 раз и в третьей — в 4,07 раз. При этом амплитуда максимального дополнительного лепестка в первой зоне составляет 15% от максимума главного лепестка, во второй увеличивается до 17% и в третьей достигает 60%.

Таким образом, для получения максимально узкой диаграммы направленности при минимуме мешающих боковых лепестков предпочтительной является работа во второй зоне при расстоянии между источниками  $g = 1,59\lambda$ .

#### 8.5.4. Расщепление диаграммы за счет множественности источников

Проведенное до сих пор рассмотрение касается случая только двух источников. Теперь рассмотрим, как меняется диаграмма направленности при увеличении числа источников, иллюстрацией чему является рис. 8.22, где приведены диаграммы, нормированные на максимум длины главного лепестка. Рассмотрение проведено на основе различных комбинаций структуры из пяти источников, причем при всех вариантах расстояние между соседними источниками остается постоянным равным 4 см.

Рис. 8.22, *а* соответствует расположению одного единственного источника в центре структуры, то есть  $A_0 = 1$ , при всех остальных  $A_n = 0$ . Эта диаграмма приведена здесь для сравнения. Она имеет единственный лепесток шириной  $110^\circ$ , максимум которого приходится на  $59^\circ$ .

Рис. 8.22, *б* соответствует двум источникам, расположенным симметрично относительно оси  $Oy$ , то есть при  $A_{\pm 1} = 1$ . Здесь лепесток также всего один, его максимум приходится на  $52^\circ$ , а ширина составляет  $55^\circ$ . Вблизи основного начинает проявляться дополнительный лепесток при  $130^\circ$ , однако его отщепление от основного еще не происходит.

Рис. 8.22, *в* соответствует трем источникам, расположенным симметрично относительно оси  $Oy$ , то есть при  $A_{\pm 1} = 1$ , а также  $A_0 = 1$ . Здесь, по сравнению с предыдущим случаем, добавление одного источника между двумя симметричными проводит уже к сильному расщеплению диаграммы сразу на четыре лепестка (в верхней полуплоскости и столько же — в нижней). Максимум главного лепестка здесь приходится на  $50^\circ$ , его ширина составляет  $28^\circ$ , то есть сужается по сравнению с предыдущим случаем в два раза. Дополнительные лепестки приходятся на  $17^\circ$ ,  $125^\circ$ ,  $174^\circ$ , их амплитуды равны соответственно 0,84, 0,43 и 0,14, а ширина не превышает  $20^\circ$ .

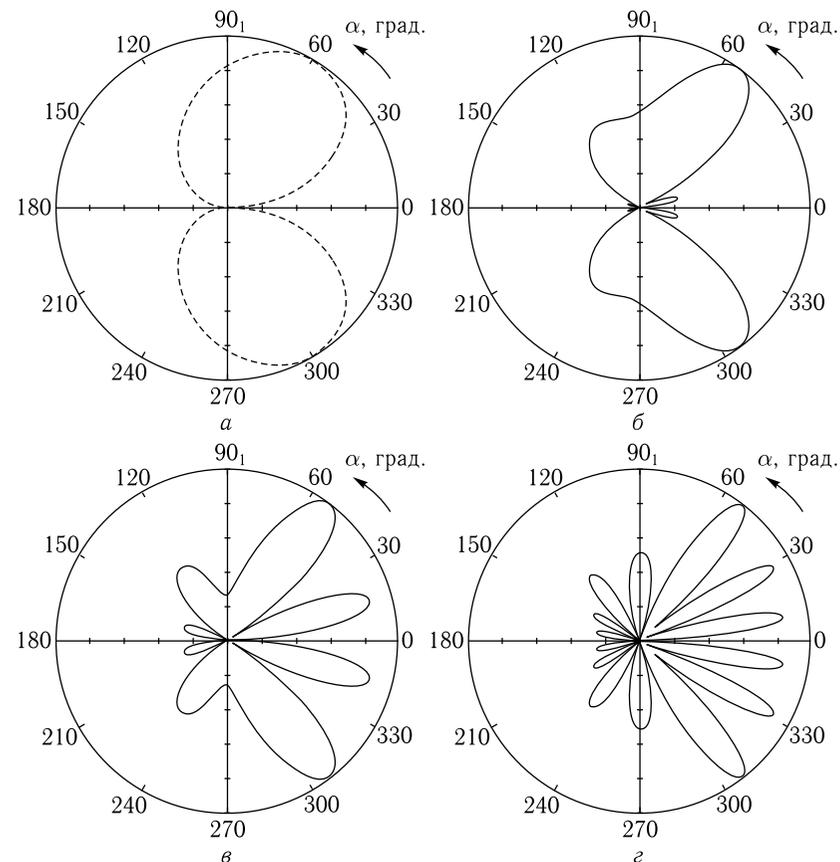


Рис. 8.22. Диаграммы направленности излучения при различном количестве источников: *а* —  $A_{-2} = 0, A_{-1} = 0, A_0 = 1, A_1 = 0, A_2 = 0$ ; *б* —  $A_{-2} = 0, A_{-1} = 1, A_0 = 0, A_1 = 1, A_2 = 0$ ; *в* —  $A_{-2} = 0, A_{-1} = 1, A_0 = 1, A_1 = 1, A_2 = 0$ ; *г* —  $A_{-2} = 1, A_{-1} = 1, A_0 = 1, A_1 = 1, A_2 = 1$

Рис. 8.22, *г* соответствует пяти источникам, расположенным симметрично относительно оси  $Oy$ , то есть при  $A_{\pm 1} = 1, A_{\pm 2} = 1$ , а также  $A_0 = 1$ . Здесь наблюдается еще большее расщепление, чем в предыдущем случае, диаграмма распадается уже на семь лепестков, два из которых приходятся на меньшие углы, чем главный, а еще четыре — на большие. Максимум главного лепестка приходится на  $53^\circ$ , его ширина составляет  $17^\circ$ . Максимумы дополнительных лепестков приходятся на  $8^\circ, 27^\circ, 88^\circ, 127^\circ, 153^\circ$  и  $172^\circ$ , ширина не превышает  $15^\circ$ , а амплитуда максимальных из них при  $8^\circ$  и  $27^\circ$  составляет 0,84 и 0,92 соответственно.

Таким образом, увеличение числа источников от одного до пяти приводит к сужению главного лепестка в 6,47 раз с одновременным

появлением до шести дополнительных лепестков, ширина которых меньше ширины главного лепестка в 1,13 раз, а амплитуда достигает 0,92 от амплитуды главного лепестка.

### 8.6. Некоторые заключительные замечания, касающиеся излучения

В последних двух главах настоящей монографии (7 и 8) рассмотрены физические основы явления излучения ЭМВ на основе модели ускоренного движения магнитных зарядов. Получено вполне удовлетворительное согласие с экспериментом, однако в идеологической трактовке можно отметить ряд моментов, которые можно было бы улучшить.

Прежде всего заметим, что аналитические решения для скорости, ускорения и намагниченности (7.124), (7.129), (7.140) на основе дисперсионного соотношения Дэймона–Эшбаха (7.118) получены, однако расчет диаграммы направленности (7.117) на основе этих выражений не представлен. Здесь, по-видимому, надо сначала определить распределение магнитного заряда (7.121) на основе производной от намагниченности в виде (7.140), которую в случае чрезмерной громоздкости аналитических выражений можно взять численно. Затем следует определить скорость и ускорение в заданной точке пространства, после чего можно приступить к интегрированию.

Получение такого решения даст возможность ответить на вопрос, в какой степени правомерно вычисление функции координатной зависимости намагниченности в виде (7.149), а также получение на ее основе динамической намагниченности (7.151).

Функция высвечивания в виде (7.145) должна быть определена на основе модели перехода энергии магнитостатической волны в энергию электромагнитной. По-видимому, здесь следует определить амплитуду излучаемой волны в условиях распространения ПМСВ до определенной точки по оси  $Oy$ , то есть интегрирование выполнять только до этой точки. После того как такая зависимость будет определена, найти из нее энергию излучаемой волны и вычесть ее из энергии магнитостатической волны, откуда и будет определен реальный вид функции высвечивания.

Все эти вычисления можно проделать на основе дисперсионного соотношения, полученного в магнитостатическом приближении. Однако здесь как раз имеет место ситуация, разобранный в разделе 2.8, то есть длина магнитостатической волны становится настолько большой, что они приближается к длине электромагнитной, и магнитостатическое приближение становится недостаточно корректным.

В этом случае для волны в феррите надо использовать полное электродинамическое решение, приведенное в разделе 2.5. При этом гиротропные свойства диэлектрической проницаемости можно не учитывать и положить ее равной скалярному значению. Для получающейся волны

надо задать граничные условия на поверхности пластины примерно так, как это сделано в работах [75, 194, 195], после чего выделить отдельно составляющие волны внутри и вне пластины и для внешней составляющей использовать аппарат запаздывающих потенциалов.

Следует заметить, что такое решение потребует крайне громоздких аналитических вычислений, а интегрирование вообще, по-видимому, можно будет сделать лишь численно. Трудности особенно возрастут в случае произвольной точки наблюдения и тем более усложнятся при неколлинеарном характере распространения волны в магнитной среде. Дополнительную сложность составит попытка учесть поперечный профиль поля типа «вала», а также конечную ширину потока волн в магнитной среде, задаваемой ограниченной длиной возбуждающего преобразователя. Тем не менее, на численное решение подобной задачи можно выразить определенную надежду.

С другой стороны, с позиции практического применения эффекта излучения ЭМВ для создания малогабаритных узконаправленных антенн, в том числе имеющих сложную структуру, должен быть разработан приближенный математический аппарат, позволяющий выполнять инженерные расчеты с достаточной точностью. В качестве предварительных шагов для создания такого аппарата можно считать введенные здесь эмпирические выражения для функции высвечивания и координатной зависимости намагниченности, а также предложенные в последней главе способы формирования диаграммы направленности за счет совокупного набора из нескольких одиночных источников.

Следует заметить, что развитая здесь трактовка оставляет совершенно не затронутой другую альтернативную модель излучения, основанную на аналогии с диэлектрическим волноводом переменного сечения [75, 145, 146]. Однако для полного решения о возможности применимости данной модели к реальной ситуации, имеющей место в экспериментах [75, 137–139], по-видимому, требуется ее более подробная теоретическая разработка. Такая разработка в первую очередь должна коснуться последовательного рассмотрения эффекта излучения при переходе от плоского фронта волны к цилиндрическому с учетом гиротропного тензорного характера проницаемости магнитной среды, а также более корректного анализа эффективности преобразования в случае соизмеримости размера неоднородности с длиной распространяющейся волны.

Важнейшим вопросом, относящимся в первую очередь к эксперименту, является оценка эффективности преобразования магнитостатической волны в электромагнитную. Так в описанных в работах [75, 137–139] экспериментах излучение принималось рупорной антенной на расстоянии не более нескольких метров от источника. При этом интенсивность принимаемого сигнала ослаблялась на десятки децибел по сравнению с уровнем сигнала, подводимого от генератора. То есть потери преобразования были достаточно велики. В работах [75, 145] на основе модели диэлектрического волновода [146] был

сделан теоретический вывод о полном преобразовании энергии, однако многие детали, связанные с затуханием волны, не учитывались. То есть окончательное решение этого вопроса, по-видимому, должно оставаться за экспериментом.

Еще одним важным вопросом, требующим экспериментального изучения, является предельная эффективно реализуемая мощность излучаемого сигнала. Такой предел мощности определяется допустимым уровнем возбуждения ПМСВ, ограничиваемым нелинейными потерями за счет параметрического возбуждения обменных спиновых волн [4, 175–177].

Интересным вопросом была бы также возможность обращения эффекта излучения, то есть преобразования падающих на пленку извне электромагнитных волн в распространяющиеся в ней магнитоэлектрические. Осуществление такого преобразования могло бы дать начало созданию антенн не только передающего, но и принимающего назначения.

### Выводы по главе 8

Данная глава посвящена вопросу формирования диаграмм направленности излучения электромагнитных волн, создаваемого распространением ПМСВ в сложных структурах, таких, как периодические, квазирегулярные и многослойные. Рассмотрение проведено на основе модели интерференционного сложения диаграмм от распределенных в пространстве точечных источников.

Основные результаты настоящей главы сводятся к следующему.

1. Рассмотрено распространение ПМСВ в ферритовой пленке, намагниченной в плоскости периодически неоднородным полем. Предложена конструкция и рассчитаны параметры магнитной системы, позволяющей создать такое поле. Показано, что периодическое подмагничивающее поле формирует в ферритовой пленке периодически расположенные области, в которых волновое число принимает значения, близкие к значению волнового числа в свободном пространстве, что создает условия для эффективного преобразования ПМСВ в ЭМВ, проявляющегося как излучение ЭМВ из феррита. На основе модели ускоренного движения магнитных зарядов в сочетании с моделью периодически расположенных точечных источников рассчитана диаграмма направленности излучения. Показано, что увеличение затухания ПМСВ приводит к уменьшению амплитуды излучаемого сигнала, причем зависимость амплитуды излучаемой ЭМВ от коэффициента излучения одного источника имеет максимум, расположенный между нулем и единицей. При увеличении числа источников диаграмма направленности расщепляется на отдельные лепестки.

На примере области излучения, содержащей два источника, показано, что количество лепестков диаграммы направленности тем больше и ширина их тем меньше, чем больше расстояние между источниками. На том же примере продемонстрирована возможность изменения ши-

рины однолепестковой диаграммы направленности от двух источников более чем в два раза путем изменения подмагничивающего поля или частоты на сотые доли процента от основной величины.

2. Получено аналитическое выражение, описывающее диаграмму направленности для произвольного числа источников. Представлены его частные случаи для двух, трех, четырех и пяти источников. Рассмотрена деформация диаграммы направленности при изменении количества формирующих ее источников. Показано, что при изменении числа источников количество, относительная амплитуда и угловое расположение главных лепестков сохраняется, а их ширина меняется в 4–5 и более раз. Рассмотрена деформация диаграммы направленности при изменении расстояния между источниками. Выявлено критическое значение расстояния, близкое к половине длины ПМСВ в пленке, при переходе через которое общая структура диаграммы изменяется, а главный лепесток сужается более чем в 6 раз по сравнению с лепестком от одного источника. Рассмотрена деформация диаграммы направленности при изменении затухания ПМСВ. Показано, что уменьшение затухания приводит к уменьшению количества и относительной амплитуды вторичных лепестков, наиболее эффективному при отрицательном затухании, причем в этом случае сужение диаграммы направленности по сравнению с диаграммой от одного источника превышает 4 раза.

3. Получено аналитическое выражение для диаграммы направленности, создаваемой совокупностью произвольного числа источников, расположенных на произвольных друг от друга расстояниях. Исследовано формирование диаграммы направленности от двух источников при различном расстоянии между ними. На примере типичных значений параметров феррита, поля и СВЧ сигнала показано, что при изменении расстояния между двумя источниками на 25% угол наклона лепестка меняется в 2,5 раза при изменении его длины не более чем на  $\pm 8\%$ .

Исследовано формирование диаграммы направленности от пяти источников при подборе расстояния между ними, исходя из оптимизации ее формы. Показано, что пять источников в сравнении со случаем одного источника позволяют уменьшить ширину основного лепестка в 4 раза, увеличить его длину более чем в 3 раза и подавить боковые лепестки до уровня менее 20% от основного.

4. Рассмотрено формирование диаграммы направленности излучения электромагнитных волн из многослойной структуры, представляющей собой пакет неоднородно намагниченных в плоскости ферритовых пленок, в которых распространяются поверхностные магнитоэлектрические волны. Рассмотрение проведено на основе модели пространственно распределенных источников. Для случая произвольного числа источников получено аналитическое выражение для диаграммы направленности излучения, формируемой за счет интерференционного взаимодействия волн, излучаемых отдельными источниками.

Рассмотрен частный случай двух источников. Показано, что по мере увеличения расстояния между ними диаграмма направленности расщепляется на несколько лепестков, причем тенденция диаграммы к расщеплению периодически сменяется противоположной тенденцией к объединению. При этом отщепление нового лепестка от имеющегося происходит тогда, когда расстояние между источниками равняется нечетному числу полуволн, и диаграмма стремится к единству тогда, когда это расстояние становится кратным четному числу полуволн или целому числу длин волн.

Для тех же двух источников исследовано положение и ширина главного лепестка диаграммы в зависимости от расстояния между источниками. По величине этого расстояния выделяются характерные области, на границах которых происходит замена предыдущего главного лепестка на последующий. В пределах каждой области ширина главного лепестка меняется от максимума к минимуму, причем минимумы ширины главного лепестка приходятся на расстояния между источниками, кратные четному числу полуволн, а максимумы — нечетному.

Показана возможность сужения ширины главного лепестка при увеличении расстояния между источниками. Показано, что с точки зрения получения максимально узкой диаграммы направленности при минимуме мешающих боковых лепестков предпочтительной является работа во второй зоне при расстоянии между источниками около полутора длин волн. При этом сужение лепестка достигает четырех раз, а амплитуда дополнительных лепестков составляет менее 20 % от максимума главного лепестка.

Рассмотрена трансформация диаграммы направленности за счет увеличения числа источников. Показано, что увеличение числа источников от одного до пяти приводит к сужению главного лепестка более чем в шесть раз, с одновременным появлением до шести дополнительных лепестков, ширина которых меньше ширины главного лепестка на 10 %, а амплитуда составляет до 90 % от амплитуды главного лепестка.

5. Приведены некоторые заключительные замечания, представляющие собой рекомендации для дальнейших исследований эффекта излучения. Отмечена необходимость выполнения полного аналитического или численного решения задачи об излучении на основе дисперсионного соотношения Дэймона–Эшбаха. На основе такого решения важным вопросом становится выявление условий применимости введенных эмпирически функций высвечивания и координатной зависимости намагнитченности.

В качестве дальнейшего развития задачи рекомендовано обратиться к решению с использованием полных уравнений электродинамики, включающих в себя как магнитное, так и электрическое поля распространяющихся волн. Такое решение позволит выявить условия применимости магнитостатического приближения, особенно в случае, когда длины волн в магнитной среде и в свободном пространстве одного порядка. Высокая трудоемкость полной задачи, особенно в условиях,

близких к эксперименту, требует более подробной разработки приближенных методов прикладного характера.

Отмечены возможные пути совершенствования альтернативной модели излучения, основанной на аналогии с диэлектрическим волноводом, в первую очередь необходимость учета магнитной гиротропии, а также развитие модели для случая соизмеримости размера неоднородности с длиной распространяющейся волны.

В качестве важных вопросов, относящегося к эксперименту, отмечена оценка эффективности преобразования, определение допустимой интенсивности излучения, а также выяснение возможности обращения эффекта, то есть обратного преобразования с целью приема электромагнитных волн и преобразования их в магнитостатические.

## Литература

1. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Магнитостатические волны в неоднородных полях. — М.: Физматлит, 2016.
2. *Кирюхин Н. Н., Лисовский Ф. В.* Спиновые волны в среде с пространственно-временной периодичностью // ФТТ. — 1968. — Т. 10, № 3. — С. 709.
3. *Зубков В. И., Моносов Я. А., Щеглов В. И.* Спиновый эффект Мандельштама–Бриллюэна // ПЖЭТФ. — 1971. — Т. 13, № 5. — С. 229.
4. *Моносов Я. А.* Нелинейный ферромагнитный резонанс. — М.: Наука, 1971.
5. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М.: Наука, 1970.
6. Мандельштама–Бриллюэна рассеяние. Физическая энциклопедия. Т. 3. — М.: Большая Российская Энциклопедия, 1992. — С. 45.
7. Дифракция света на ультразвуке. Физическая энциклопедия. Т. 1. — М.: Советская Энциклопедия, 1988. — С. 677.
8. *Медников А. М., Попков А. Ф., Анисимкин В. И., Нам Б. П., Петров А. А., Спиваков Д. Д., Хе А. С.* Неупругое рассеяние поверхностной спиновой волны в тонкой пленке ЖИГ на поверхностной акустической волне // ПЖЭТФ. — 1981. — Т. 33, № 12. — С. 646.
9. *Попков А. Ф.* Коллинеарное рассеяние спиновых волн в пластине при акустической накачке // РЭ. — 1982. — Т. 27, № 7. — С. 1366.
10. *Крышталь Р. Г., Медведь А. В.* Устройства обработки СВЧ-сигналов, основанные на явлении рассеяния магнитостатических волн на поверхностных акустических волнах // РЭ. — 1991. — Т. 36, № 8. — С. 1571.
11. *Крышталь Р. Г., Медведь А. В., Попков А. Ф.* Влияние затухания поверхностных магнитостатических волн на параметры их рассеяния на поверхностной акустической волне в пленках железиттриевого граната // РЭ. — 1994. — Т. 39, № 4. — С. 647.
12. *Крышталь Р. Г., Медведь А. В., Осипенко В. А., Попков А. Ф.* Трансформация мод магнитостатических волн при рассеянии их на поверхностной акустической волне в пленках ЖИГ // ЖТФ. — 1988. — Т. 58, № 12. — С. 2315.
13. *Крышталь Р. Г., Медведь А. В.* Рассеяние поверхностных магнитостатических волн на поверхностной акустической волне в невзаимной структуре пленка ЖИГ-металл // ЖТФ. — 1989. — Т. 59, № 6. — С. 82.
14. *Крышталь Р. Г., Медведь А. В.* Влияние электропроводности металлической пленки на рассеяние поверхностных магнитостатических волн на поверхностной акустической волне в структуре ГГГ-ЖИГ-пленка металла // ЖТФ. — 1991. — Т. 61, № 4. — С. 105.
15. *Крышталь Р. Г., Медведь А. В.* Экспериментальное исследование рассеяния нелинейных поверхностных магнитостатических волн на поверхностной акустической волне // ФТТ. — 1992. — Т. 34, № 1. — С. 333.
16. *Parekh J. P., Tuan H. S.* Reflection of magnetostatic surface wave at a shallow groove on a YIG film // Appl. Phys. Lett. — 1977. — V. 30, № 10. — P. 709.
17. *Калиникос Б. А.* Дипольно-обменные спиновые волны в ферромагнитных пленках. — Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. — СПб. ЛЭТИ, 1985.
18. *Григорьева Н. Ю., Калиникос Б. А.* Теория спиновых волн в пленочных ферромагнитных многослойных структурах. — СПб.: Технолит, 2008.
19. *Гуляев Ю. В., Никитов С. А., Плесский В. П.* Распространение магнитостатических волн в нормально намагниченной пластине феррита с периодически неровными поверхностями // ФТТ. — 1980. — Т. 22, № 9. — С. 2831.
20. *Seshadry S. R.* Magnetic wave interactions in a periodically corrugated YIG film // IEEE Tr. on Microwave Theory and Tech. — 1979. — V. 27, № 2. — P. 199.
21. *Tsutsumi M., Sakaguchi Y., Kumagai N.* Behavior of the magnetostatic wave in a periodically corrugated YIG slab // IEEE Tr. on Microwave Theory and Tech. — 1977. — V. 25, № 2. — P. 224.
22. *Owens J. M., Smith C. V., Lee S. N. et al.* Magnetostatic wave propagation through periodic metallic gratings // IEEE Tr. on Magn. — 1978. — V. 14, № 5. — P. 820.
23. *Chang N. S., Matsuo Y.* Magnetostatic surface wave propagation on a periodic YIG film layer // Appl. Phys. Lett. — 1979. — V. 33, № 4. — P. 352.
24. *Григорьева Н. Ю., Калиникос Б. А.* Дисперсионные характеристики спиновых волн в планарных периодических структурах на основе ферромагнитных пленок // ЖТФ. — 2009. — Т. 79, № 8. — С. 110.
25. *Калиникос Б. А.* Спектр и линейное возбуждение спиновых волн в ферромагнитных пленках // Изв. ВУЗов, Физика. — 1981. — Т. 24, № 8. — С. 42.
26. *Чарторижский Д. Н.* Нормальные колебания и нормальные волны в тонких ферромагнитных пленках на СВЧ. — Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. — Л.: ЛЭТИ, 1973.
27. *Григорьева Н. Ю.* Дипольно-обменные спиновые волны в периодических структурах на основе тонких ферромагнитных пленок. — Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. — СПб.: ЛЭТИ, 2009.
28. *Demokritov S. O., Serga A. A., Andre A., Demidov V. E., Kostilev M. P., Hillebrands B., Slavin A. N.* Tunneling of dipolar spin waves through a region of inhomogeneous magnetic field // Phys. Rev. Lett. — 2004. — V. 93. — P. 047201.

29. *Высоцкий С.Л., Никитов С.А., Филимонов Ю.А.* Магнитостатические спиновые волны в двумерных периодических структурах — магнитофотонных кристаллах // *ЖЭТФ*. — 2005. — Т. 128, № 3(9). — С. 636.
30. *Reed K.W., Owens J.M., Carter R.L.* Current status of magnetostatic reflective array filters // *Circuits, systems and signal processing*. — 1985. — V. 4, № 1–2. — P. 157.
31. *Вороненко А.В., Герус С.В., Харитонов В.Д.* Дифракция поверхностных магнитостатических волн на магнитных решетках в режиме Брэгга // *Изв. ВУЗов. Физика*. — 1988. — Т. 31, № 11. — С. 76.
32. *Вороненко А.В., Герус С.В.* Взаимодействие поверхностных магнитостатических волн с пространственно-периодическим магнитным полем // *ПЖТФ*. — 1984. — Т. 10, № 12. — С. 746.
33. *Анненков А.Ю., Герус С.В., Сотников И.В.* Распространение магнитостатических волн в стационарном пространственно-периодическом магнитном поле // *РЭ*. — 1992. — Т. 37, № 8. — С. 1371.
34. *Анненков А.Ю., Виноградов А.П., Герус С.В., Рыжиков И.А., Шишков С.А., Иноуэ М.* Исследование магнитостатических волн в фотонных кристаллах // *Известия РАН. Серия Физическая*. — 2007. — Т. 71, № 11. — С. 1612.
35. *Анненков А.Ю., Герус С.В.* 2-D распределение магнитостатических волн в окрестности зоны непропускания магнетонного кристалла // *Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. — М.: НИУ МЭИ, 2013. — С. 113.
36. *Герус С.В.* Магнитостатические волны в пространственно-периодических и двумерно-неоднородных магнитных полях. — Диссертация на соискание ученой степени д.ф.-м.н. — М.: ИРЭ РАН, 2012.
37. *Вороненко А.В., Герус С.В., Красножен Л.А.* Метод измерения параметров гиромангнитных пленок // *Микроэлектроника*. — 1989. — Т. 18, № 1. — С. 61.
38. *Анненков А.Ю., Васильев И.А., Герус С.В., Ковалев С.И.* Моды поверхностных магнитостатических волн в канале, создаваемом неоднородным магнитным полем // *ЖТФ*. — 1995. — Т. 65, № 1. — С. 71.
39. *Анненков А.Ю., Герус С.В.* Распространение магнитостатических волн в двух связанных каналах, образованных магнитным полем // *РЭ*. — 1996. — Т. 41, № 2. — С. 216.
40. *Анненков А.Ю., Герус С.В., Ковалев С.И.* Численное моделирование квази-поверхностных магнитостатических волн в ферритовой пленке с двумя магнитными каналами // *ЖТФ*. — 1998. — Т. 68, № 2. — С. 91.
41. *Анненков А.Ю., Герус С.В., Ковалев С.И.* Трансформация поверхностных магнитостатических волн, канализируемых ступенчатым полем подмагничивания // *ЖТФ*. — 2002. — Т. 72, № 6. — С. 85.
42. *Анненков А.Ю., Герус С.В., Ковалев С.И.* Объемные и поверхностно-объемные магнитостатические волны в волноводах, создаваемых ступенчатым полем подмагничивания // *ЖТФ*. — 2004. — Т. 74, № 2. — С. 98.
43. *Анненков А.Ю., Герус С.В.* Взаимодействие объемных и поверхностных магнитостатических волн в канале, созданном неоднородным магнитным

- полем // *Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. — М.: НИУ МЭИ, 2011. — С. 90.
44. *Анненков А.Ю., Герус С.В.* Исследование распределения поверхностных магнитостатических волн путем сканирования поверхности ферритовой пластины // *РЭ*. — 2012. — Т. 57, № 5. — С. 572.
  45. *Анненков А.Ю., Герус С.В.* Формирование пучка поверхностных магнитостатических волн в структуре феррит-диэлектрик-феррит // *Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. — М.: НИУ МЭИ, 2012. — С. 289.
  46. *Анненков А.Ю., Герус С.В.* Дисперсионные свойства магнетонного кристалла с невзаимностью // *Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. — М.: ИНФРА-М, 2015. — С. 242.
  47. *Помялов А.В., Андреев А.С.* Волны связанных колебаний в периодической системе тонкопленочных ферритовых резонаторов // *РЭ*. — 1986. — Т. 31, № 9. — С. 1739.
  48. *Анфиногенов В.Б., Афанасьев А.И., Зильберман П.Е., Мальцев В.А., Рудый Ю.Б., Финкельштейн Ю.Х.* Резонансное ослабление электромагнитных волн в структуре пленка железонитридевого граната — замедляющая система типа «меандр» при слабом замедлении // *РЭ*. — 1990. — Т. 35, № 12. — С. 2481.
  49. *Смелов М.В.* Экспериментальное исследование возбуждения магнитостатических волн замедляющей системой типа меандра // *РЭ*. — 1988. — Т. 33, № 2. — С. 440.
  50. *Бланк А.Я., Шаршанов А.Я.* Резонансное возбуждение поверхностных магнитостатических волн электромагнитным излучением в периодических магнитных структурах // *РЭ*. — 1991. — Т. 36, № 8. — С. 1468.
  51. *Ignatov Yu.A., Scheglov V.I., Klimov A.A., Nikitov S.A.* Propagation of magnetostatic waves in ferromagnetic films with variable thickness // *International conference «Functional Materials» (ICFM-2009)*. Partenit. Crimea. Ukraine. Book of Abstracts. TNU: Simferopol. — 2009. — P. 294.
  52. *Игнатов Ю.А., Климов А.А., Никитов С.А., Щеглов В.И.* Распространение поверхностных магнитостатических волн в одномерном магнетонном кристалле переменной толщины // *ФТТ*. — 2010. — Т. 52, № 10. — С. 1950.
  53. *Sethares J.C., Floyd R.* MSW applications for phased array antennas // *Circuits, systems and signal processing*. — 1985. — V. 4, № 1–2. — P. 335.
  54. *Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Плесский В.П.* Брэгговское отражение поверхностных магнитостатических волн от периодической системы тонких проводящих полосок // *ЖТФ*. — 1982. — Т. 52, № 4. — С. 799.
  55. *Brinlee W.R., Owens J.M., Smith C.V., Carter R.L.* «Two-port» magnetostatic wave resonators utilizing periodic metal reflective arrays // *JAP*. — 1981. — V. 52, № 3. — P. 2276.
  56. *Беспярых Ю.И., Василевский В., Гайдек М., Симонов А.Д., Харитонов В.Д.* Дисперсия и затухание поверхностных магнитостатических волн в структуре ферромагнетик-сверхпроводник второго рода // *ФТТ*. — 1993. — Т. 35, № 11. — С. 2983.

57. *Беспятых Ю.И., Василевский В., Харитонов В.Д.* Влияние пиннинга абрикосовских вихрей на распространение поверхностных магнитостатических волн в структуре ферромагнетик-сверхпроводник // ФТТ. — 1998. — Т. 40, № 1. — С. 32.
58. *Гуляев Ю.В., Огрин Ю.Ф., Ползикова Н.И., Раевский А.О.* Наблюдение поглощения объемных спиновых волн в структуре магнетик-сверхпроводник // ФТТ. — 1997. — Т. 39, № 9. — С. 1628.
59. *Вашковский А.В., Зубков В.И., Локк Э.Г.* Распространение магнитостатических волн в структуре феррит-высокотемпературный сверхпроводник при наличии транспортного тока в сверхпроводнике // ФТТ. — 1997. — Т. 39, № 12. — С. 2195.
60. *Беспятых Ю.И., Василевский В., Гайдек М., Харитонов В.Д.* Влияние упругого взаимодействия абрикосовских вихрей на дисперсию и затухание поверхностных магнитостатических волн в структуре ферромагнетик-сверхпроводник второго рода // ФТТ. — 1995. — Т. 37, № 10. — С. 3049.
61. *Буздин А.И., Вуйичич Б., Курприянов М.Ю.* Структуры сверхпроводник-ферромагнетик // ЖЭТФ. — 1992. — Т. 101, № 1. — С. 231.
62. *Ползикова Н.И., Раевский А.О.* Особенности законов дисперсии поверхностных спиновых волн в структурах, содержащих сверхпроводник // ФТТ. — 1996. — Т. 38, № 10. — С. 2937.
63. *Беспятых Ю.И., Василевский В., Гайдек М., Симонов А.Д., Харитонов В.Д.* Возбуждение поверхностных спиновых волн в касательно намагниченной структуре ферромагнетик-сверхпроводник второго рода // ФТТ. — 1991. — Т. 33, № 5. — С. 1545.
64. *Генкин Г.М., Скузоваткин В.В., Токман И.Д.* Намагниченность структур ферромагнетик-сверхпроводник // ФТТ. — 1993. — Т. 35, № 3. — С. 736.
65. *Лебедь Б.М., Никифоров А.В., Яковлев С.В., Яковлев И.А.* Рассеяние спиновых волн на решетке магнитных вихрей в пленочной структуре высокотемпературный сверхпроводник-феррит // ФТТ. — 1992. — Т. 34, № 2. — С. 656.
66. *Ползикова Н.И.* Резонансное взаимодействие магнитостатических волн с решеткой вихрей магнитного потока сверхпроводника // ПЖТФ. — 1993. — Т. 19, № 22. — С. 28.
67. *Krebs J.J., Lind D.M., Berry S.D.* Ferromagnetic resonance and spin anisotropy in iron oxide thin films and iron oxide/nickel oxide superlattices // JAP. — 1993. — V. 73, № 10. — P. 6457.
68. *Ерухимов М.Ш., Ерухимов Г.М., Беренштейн Б.Э.* Спектр спиновых волн и намагниченность ферромагнитных сверхрешеток // ФТТ. — 1994. — Т. 36, № 6. — С. 1621.
69. *Бриллюэн Л., Пароди М.* Распространение волн в периодических структурах. — М.: ИЛ, 1959.
70. *Вашковский А.В., Локк Э.Г.* Поверхностная электромагнитная волна в структуре феррит-диэлектрик с отрицательной диэлектрической проницаемостью // Сборник трудов XVIII международной школы-семинара

- «Новые магнитные материалы микроэлектроники». — М.: МГУ, 2002. — С. 781.
71. *Вашковский А.В., Локк Э.Г.* Обратные поверхностные электромагнитные волны в композитных структурах, использующих ферриты // РЭ. — 2003. — Т. 48, № 2. — С. 169.
72. *Вашковский А.В., Локк Э.Г.* Поверхностная магнитостатическая волна в структуре феррит-решетка металлических полосок // XIX Международная школа-семинар «Новые магнитные материалы микроэлектроники». Сб. тр. — Москва: МГУ, 2004. — С. 237.
73. *Локк Э.Г.* Дисперсия магнитостатических волн в композитной структуре феррит-решетка металлических полосок // РЭ. — 2003. — Т. 48, № 12. — С. 1484.
74. *Локк Э.Г.* Распространение поверхностных магнитостатических волн в композитной структуре феррит-решетка металлических полосок // РЭ. — 2005. — Т. 50, № 1. — С. 74.
75. *Локк Э.Г.* Магнитостатические волны в ферритовых пленках и структурах на их основе. — Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. — М.: ИРЭ РАН, 2007.
76. *Вашковский А.В., Локк Э.Г.* Поверхностные магнитостатические волны в структуре феррит-диэлектрик, окруженной полупространствами с отрицательной диэлектрической проницаемостью // РЭ. — 2002. — Т. 47, № 1. — С. 97.
77. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Обратные магнитостатические волны в структуре феррит-диэлектрик-решетка из металлических полосок // Сборник трудов XIX Международной школы-семинара «Новые магнитные материалы микроэлектроники». Москва, 2004. — М.: Изд-во Физ. фак. МГУ. — С. 243.
78. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Поверхностные магнитостатические волны в структуре феррит-диэлектрик-решетка из металлических полосок // РЭ. — 2006. — Т. 51, № 3. — С. 328.
79. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Дисперсия обратных поверхностных магнитостатических волн в структуре феррит-диэлектрик-решетка из металлических полосок // Proc. XII Intern. Conference on Spin-Electronics and Gyrovector Electrodynamics. Moscow (Firsanovka). 2003. Publ.UNC-1 MPEI (TU). P. 166.
80. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Магнитостатические волны в неоднородно намагниченной структуре феррит-диэлектрик-решетка из металлических полосок // Proc. XIII Intern. Conference on Spin-Electronics and Gyrovector Electrodynamics. Moscow (Firsanovka). 2004. Publ.UNC-1 MPEI (TU). P. 167.
81. *Shcheglov V.I., Zubkov V.I.* The Backward Magnetostatic Surface Waves in Nonuniform Magnetized Structure Ferrite-Dielectric-Metal Stripe Grating // Book of Abstracts of Moscow International Symposium on Magnetism (MISM). Moscow. 2005. «Изд-во Физ. фак. МГУ». Moscow. P.410.
82. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Магнитостатические волны в структуре феррит-диэлектрик-решетка, намагниченной полем типа «долины» //

- Сборник трудов XX Международной школы-семинара «Новые магнитные материалы микроэлектроники». — Москва: Изд-во МГУ, 2006. — С. 710.
83. *Shcheglov V.I., Zubkov V.I.* The backward magnetostatic surface waves in composite medium ferrite-dielectric-metal stripe grating // International conference «Functional Materials — ICFM-2007». Ukraine. Crimea. Partenit. Book of Abstracts. 2007. P. 328.
  84. *Shcheglov V.I., Zubkov V.I.* Propagation of magnetostatic waves in nonuniform magnetized structure ferrite-dielectric-metal grating // International conference «Functional Materials — ICFM-2007». Ukraine. Crimea. Partenit. Book of Abstracts. 2007. P. 330.
  85. *Shcheglov V.I., Zubkov V.I.* The magnetostatic surface waves in composite structure ferrite-dielectric-metal stripe grating // Euro-Asian Symposium EASTMAG-2007 «Magnetism on a Nanoscale». Russia. Kazan. Abstract Book. 2007. P.94.
  86. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Траектории магнитостатических волн в структуре феррит-диэлектрик-решетка из металлических полосок, намагниченной полем типа «долины» // Труды XV Международной конференции «Радиолокация и радиосвязь». — Москва-Фирсановка: Издание МЭИ, 2007. — С. 283.
  87. *Shcheglov V.I., Zubkov V.I.* The magnetostatic waves in structure ferrite-dielectric-metal grating biased by nonuniform magnetic field // Book of Abstracts of Moscow International Symposium on Magnetism (MISM). — Moscow: Изд-во Физ. фак. МГУ, 2008. — P. 148.
  88. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Магнитостатические волны в структуре феррит-диэлектрик-решетка из металлических полосок, намагниченной полем с профилем типа «вала» // Сборник трудов XVI Международной конференции «Радиолокация и радиосвязь». — Москва-Фирсановка: Издание МЭИ, 2008. — С. 317.
  89. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Магнитостатические волны в структуре феррит-диэлектрик-решетка, намагниченной полем типа «вала» // Сборник трудов XXI Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ)». — Москва: Изд-во МГУ, 2009. — С. 954.
  90. *Shcheglov V.I., Zubkov V.I.* Propagation of magnetostatic waves in structure ferrite-dielectric-metal grating biased by nonuniform magnetic field // International conference «Functional Materials (ICFM-2009)». Partenit. Crimea. Ukraine. Book of Abstracts. TNU. Simferopol. 2009. P. 298.
  91. *Шустер А.* Введение в теоретическую оптику. — М., Л.: ОНТИ, 1935.
  92. *Мандельштам Л.И.* Полное собрание трудов. Т. 5. Лекции от 26.02.1949, 05.05.1944. — М.: Изд.АН СССР, 1950.
  93. *Мандельштам Л.И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. — М.: Наука, 1972.
  94. *Веселаго В.Г.* Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями  $\epsilon$  и  $\mu$  // УФН. — 1967. — Т. 92, № 3. — С. 517.
  95. *Lindell I.V., Tretyakov S.A., Nikoskinen K.I., Ilvonen S.* BW media — media with negative parameters, capable of supporting backward waves // Microwave and Optical Technology Letters. — 2001. — V. 31, № 2. — P. 129.

96. *Агранович В.М., Гарнштейн Ю.Н.* Пространственная дисперсия и отрицательное преломление света // УФН. — 2006. — Т. 176, № 10. — С. 1052.
97. *Smith D.R., Padilla W.J., Vier D.C., Nemat-Nasser S.C., Schultz S.* Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity // Phys. Rev. Lett. — 2000. — V. 84, № 18. — P. 4184.
98. *Pendry J.B.* Negative refraction makes a perfect lens // Phys. Rev. Lett. — 2000. — V. 85, № 18. — P. 3966.
99. *Pendry J.B., Holden A.J., Stewart W.J., Youngs I.* Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures // Phys. Rev. Lett. — 1996. — V. 76, № 25. — P. 4773.
100. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Обратные поверхностные магнитостатические волны в структуре феррит-диэлектрик-металл // РЭ. — 1997. — Т. 42, № 9. — С. 1114.
101. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Условия существования обратных поверхностных магнитостатических волн в структуре феррит-диэлектрик-металл // ПЖТФ. — 1998. — Т. 24, № 13. — С. 1.
102. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Распространение обратных поверхностных магнитостатических волн в структуре феррит-диэлектрик-металл, намагниченной линейно неоднородным магнитным полем // ЖТФ. — 1999. — Т. 69, № 2. — С. 70.
103. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Траектории обратных поверхностных магнитостатических волн в структуре феррит-диэлектрик-металл, намагниченной неоднородным полем типа «вала» // ПЖТФ. — 1999. — Т. 25, № 23. — С. 61.
104. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Обратные поверхностные магнитостатические волны в структуре феррит-диэлектрик-металл, намагниченной неоднородным полем типа «долины» // РЭ. — 2000. — Т. 45, № 1. — С. 116.
105. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. — М.: Наука, 1988.
106. *Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л.* Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения порядка // УФН. — 1999. — Т. 169, № 1. — С. 7.
107. *Львов В.С.* Нелинейные спиновые волны. — М.: Наука, 1987.
108. *Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С.* Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения // УФН. — 1974. — Т. 114, № 4. — С. 609.
109. *Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Темиряев А.Г., Тихомирова М.П.* Нелинейные собственные колебания спинов в плоскопараллельном ферромагнитном резонаторе // РЭ. — 1999. — Т. 44, № 10. — С. 1262.
110. *Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Темиряев А.Г., Тихомирова М.П.* Основная мода нелинейного спин-волнового резонанса в нормально намагниченных ферритовых пленках // ФТТ. — 2000. — Т. 42, № 6. — С. 1062.

111. *Alvarez L.F., Pla O., Chubykalo O.* Quasiperiodicity, bistability, and chaos in the Landau–Lifshitz equation // *Phys. Rev. B.* — 2000. — V. 61, № 17. — P. 11613.
112. *Gerrits Th., Schneider M.L., Kos A.B., Silva T.J.* Large-angle magnetization dynamics measured by time-resolved ferromagnetic resonance // *Phys. Rev. B.* — 2006. — V. 73, № 9. — P. 094454(7).
113. *Семенов Д.И., Шутый А.М.* Нелинейная регулярная и стохастическая динамика намагниченности в тонкопленочных структурах // *УФН.* — 2007. — Т. 177, № 8. — С. 831.
114. *Vashkovsky A.V., Lock E.H., Shcheglov V.I., Zubkov V.I.* Passage of surface magnetostatic waves through magnetic «valley» and «ridge» // *IEEE Trans. on Magn.* — 1990. — V. 26, № 5. — P. 1480.
115. *Вашковский А.В., Зубков В.И., Локк Э.Г., Щеглов В.И.* Поверхностные магнитостатические волны в неоднородном подмагничивающем поле типа «вала» // *РЭ.* — 1995. — Т. 40, № 2. — С. 313.
116. *Вашковский А.В., Зубков В.И., Щеглов В.И.* Прямые поверхностные магнитостатические волны в структуре феррит-диэлектрик-металл, намагниченной неоднородным полем типа «вала» // *РЭ.* — 1996. — Т. 41, № 12. — С. 1413.
117. *Щеглов В.И.* Стохастическая неустойчивость траекторий поверхностных магнитостатических волн в периодически неоднородном поле типа «вала» // *Сб. тр. XVII межд. шк.-сем. «Новые магнитные материалы микроэлектроники».* — М.: УРСС, 2000. — С. 331.
118. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Стохастическая неустойчивость траекторий поверхностных магнитостатических волн в ферритовой пленке, намагниченной модулированным полем с профилем «вала» // *Письма в ЖТФ.* — 2001. — Т. 27, № 8. — С. 90.
119. *Щеглов В.И.* Траектории магнитостатических волн в модулированном поле типа «вала» при различных видах модуляции // *Сб. тр. XVIII Межд. шк.-сем. «Новые магнитные материалы микроэлектроники».* — М.: Изд. МГУ, 2002. — С. 810.
120. *Щеглов В.И.* Стохастическая неустойчивость траекторий прямых магнитостатических волн, распространяющихся в модулированном поле типа «вала» при различных видах модуляции // *Сб. тр. VII Межд. сем. «Магнитные фазовые переходы».* — Махачкала: Изд. Института физики Дагестанского научного центра РАН, 2005. — С. 62.
121. *Щеглов В.И.* Фрактальный характер высвечивания траекторий магнитостатических волн в неоднородном поле типа «вала» с периодической модуляцией // *Сб. тр. VIII Межд. сем. «Магнитные фазовые переходы».* — Махачкала: Изд. Института физики Дагестанского научного центра РАН, 2007. — С. 67.
122. *Щеглов В.И.* Стохастическая неустойчивость траекторий обратных поверхностных магнитостатических волн в периодически неоднородном поле типа «вала» // *Сб. тр. VII Межд. сем. «Магнитные фазовые переходы».* — Махачкала: Изд. Института физики Дагестанского научного центра РАН, 2004. — С. 76.

123. *Щеглов В.И.* Многоканальное распространение поверхностных магнитостатических волн в периодически неоднородном поле // *Сб. тр. VII Межд. сем. «Магнитные фазовые переходы».* — Махачкала: Изд. Института физики Дагестанского научного центра РАН, 2005. — С. 66.
124. *Щеглов В.И.* Стохастическая неустойчивость траекторий поверхностных магнитостатических волн в поле типа «вала» с пространственной модуляцией // *Электронный «Журнал радиоэлектроники».* — 2014. — № 10 (43). <http://jre.cplire.ru/jre/oct14/1/text.html>,
125. *Щеглов В.И.* Многоканальная стохастическая неустойчивость поверхностных магнитостатических волн в периодическом поле с пространственной модуляцией // *Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы».* — М.: ИНФРА-М, 2015. — С. 229.
126. *Adam J.D.* Analog signal processing with microwave magnetics // *Proc. IEEE.* — 1988. — V. 76, № 2. — P. 159. — Перевод: *Адам Дж.Д.* Аналоговая обработка сигналов с помощью СВЧ-ферритов // *ТИИЭР.* — 1988. — Т. 76, № 2. — С. 73.
127. *Ishak W.S.* Magnetostatic wave technology: a review // *Proc. IEEE.* — 1988. — V. 76, № 2. — P. 171.. — Перевод: *Исхак В.С.* Применение магнитостатических волн: обзор // *ТИИЭР.* — 1988. — Т. 76, № 2. — С. 86.
128. *Schlömann E.F.* Circulators for microwave millimeter wave integrated circuits // *Proc. IEEE.* — 1988. — V. 76, № 2. — P. 188. — Перевод: *Шлеман Э.Ф.* Циркуляторы для интегральных СВЧ-схем // *ТИИЭР.* — 1988. — Т. 76, № 2. — С. 105.
129. *Вашковский А.В., Стальмахов В.С., Шараевский Ю.П.* Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. — Саратов: Изд.Саратовского университета, 1993.
130. *Eshbach J.R.* Spin-wave propagation and the magnetoelastic interaction in yttrium iron garnet // *JAP.* — 1963. — V. 34, № 4. — P. 1298.
131. *Eggers F.G., Strauss W.* A UHF delay line using single-crystal yttrium iron garnet // *JAP.* — 1963. — V. 34, № 4. — P. 1180.
132. *Schlömann E.* Generation of spin waves in nonuniform magnetic fields. I. Conversion of electromagnetic power into spin-wave power and vice versa // *JAP.* — 1964. — V. 35, № 1. — P. 159.
133. *Schlömann E., Joseph R.I.* Generation of spin waves in nonuniform dc magnetic fields. II. Calculation of the coupling length // *JAP.* — 1964. — V. 35, № 1. — P. 167.
134. *Schlömann E., Joseph R.I.* Generation of spin waves in nonuniform magnetic fields. III. Magneto-elastic interaction // *JAP.* — 1964. — V. 35, № 8. — P. 2382.
135. *Rodrigue G.P.* Microwave solid-state delay lines // *Proc. IEEE.* — 1965. — V. 53, № 10. — P. 1428. — Перевод: *Подруг.* Твердотельные СВЧ линии задержки // *ТИИЭР.* — 1965. — Т. 53, № 10. — С. 1613.
136. *Schlömann E., Joseph R.I., Kohane T.* Generation of spin waves in nonuniform magnetic fields, with application to magnetic delay line // *Proc. IEEE.* — 1965. — V. 53, № 10. — P. 1495. — Перевод: *Шлеман, Джозеф,*

- Кохейн. Возбуждение спиновых волн в неоднородных магнитных полях и их применение в магнитных линиях задержки // ТИИЭР. — 1965. — Т. 53, № 10. — С. 1685.
137. *Вашковский А. В., Зубков В. И., Локк Э. Г., Щеглов В. И.* Распространение поверхностных магнитостатических волн в поперечно неоднородных полях подмагничивания // РЭ. — 1993. — Т. 38, № 5. — С. 818.
138. *Вашковский А. В., Локк Э. Г.* Диаграммы направленности излучения, возникающего в результате преобразования поверхностных магнитостатических волн в электромагнитные // РЭ. — 1995. — Т. 40, № 7. — С. 1030.
139. *Вашковский А. В., Локк Э. Г.* О параметрах диаграмм излучения, возникающего при преобразовании поверхностной магнитостатической волны в электромагнитную // РЭ. — 2004. — Т. 49, № 8. — С. 966.
140. *Вашковский А. В., Локк Э. Г.* Влияние неоднородности магнитного поля на параметры излучения, возникающего при преобразовании магнитостатической волны в электромагнитную // Сборник трудов XII Международной конференции по спиновой электронике и гировекторной электродинамике. Москва-Фирсановка. — М.: Изд. уч.-научн. центра № 1 МЭИ (ТУ), 2003. — С. 155.
141. *Вашковский А. В., Локк Э. Г.* О диаграммах излучения, возникающих при преобразовании магнитостатических волн в электромагнитные волны // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — Москва: НИУ МЭИ, 2012. — С. 181.
142. *Вашковский А. В., Локк Э. Г.* Влияние диэлектрической подложки и магнитных потерь на дисперсию и свойства поверхностной магнитостатической волны // РЭ. — 2001. — Т. 46, № 6. — С. 729.
143. *Damon R. W., Eshbach J. R.* Magnetostatic modes of a ferromagnet slab // J. Phys. Chem. Solids. — 1961. — V. 19, № 3/4. — P. 308.
144. *Вашковский А. В., Локк Э. Г.* Характеристики поверхностной магнитостатической волны в структуре феррит-диэлектрик, помещенной в медленно меняющееся неоднородное магнитное поле // РЭ. — 2001. — Т. 46, № 10. — С. 1257.
145. *Вашковский А. В., Локк Э. Г.* О механизме преобразования поверхностной магнитостатической волны в электромагнитную // РЭ. — 2009. — Т. 54, № 4. — С. 476.
146. *Шевченко В. В.* Плавные переходы в открытых волноводах. — М.: Наука, 1969.
147. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Направленность излучения электромагнитных волн, сопровождающего распространение магнитостатической волны в неоднородно намагниченной ферритовой пленке // XVII международная школа-семинар «Новые магнитные материалы микроэлектроники». Сборник трудов. — М.: Изд. МГУ, 2000. — С. 379.
148. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Пространственное распределение излучения электромагнитных волн, сопровождающего распространение поверхностных магнитостатических волн в ферритовой пленке, намагниченной поперечно неоднородным полем // ПЖТФ. — 2000. — Т. 26, № 13. — С. 106.

149. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Излучение электромагнитных волн, возникающее при распространении магнитостатических волн в ферритовой пленке, намагниченной поперечно неоднородным полем // IX Международная конференция по спинволновой электронике. Сборник трудов. — Москва, 2000. — С. 177.
150. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Излучение электромагнитных волн, обусловленное ускорением магнитостатических волн в неоднородно намагниченной ферритовой пленке // РЭ. — 2001. — Т. 46, № 4. — С. 433.
151. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Пространственное распределение излучения электромагнитных волн при распространении магнитостатических волн в неоднородно намагниченной ферритовой пластине // Вторая объединенная конференция по магнитоэлектронике. Тезисы докладов. Екатеринбург. Россия, 2000. — С. 30.
152. *Shcheglov V. I., Zubkov V. I.* The spatial diagram of electromagnetic waves radiation from nonuniform magnetized ferrite film having magnetostatic waves // IX Международная конференция по спинволновой электронике. Сборник трудов. Приложение. — Москва, 2000. — С. 464.
153. *Zubkov V. I., Shcheglov V. I.* The spatial diagram of electromagnetic waves radiation from nonuniform magnetized ferrite film having magnetostatic waves // XV International Conference on Microwave Ferrites (Gyro-magnetic Electronics and Electrodynamics). Conference Proceedings. — Poland, Rokosovo, 2000. — P. 22.
154. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Пространственные характеристики диаграммы направленности излучения электромагнитных волн из ферритовой пленки, намагниченной неоднородным полем // Байкальская международная научно-практическая конференция «Магнитные материалы». Тезисы докладов. — Иркутск, 2001. — С. 50.
155. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Диаграмма направленности излучения электромагнитных волн из неоднородно намагниченной ферритовой пленки с магнитостатическими волнами // Международная конференция «Физика и технические применения волновых процессов», Тезисы докладов. Том 2. Самара. 2001. — С. 16.
156. *Shcheglov V. I., Zubkov V. I.* The electromagnetic waves radiation by the accelerated motion of magnetostatic waves propagating in nonuniform magnetized ferrite film // International Symposium EASTMAG-2001. Abstract Book. Ekaterinburg. Russia. 2001. — P. 386.
157. *Shcheglov V. I., Zubkov V. I.* The Electromagnetic Waves Radiation by the Propagation of Electromagnetic Waves in Nonuniform Magnetized Ferrite Film by Arbitrary Location Point of Observation // Book of Abstracts of «Moscow International Symposium on Magnetism (MISM)». — Moscow: «Editorial URSS», 2002. — P. 202.
158. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Характеристики излучения, возникающего при преобразовании обратных объемных магнитостатических волн в электромагнитные // ПЖТФ. — 2008. — Т. 34, № 22. — С. 44.
159. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Диаграмма направленности излучения электромагнитных волн, сопровождающего распространение магнитостатических волн в неоднородно намагниченной ферритовой пластине //

- 18-я Международная Крымская конференция «СВЧ техника и телекоммуникационные технологии (КрыМиКо-2008)». Тезисы докладов. Севастополь. Украина. 2008. — С. 453.
160. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Диаграмма направленности электромагнитного излучения, обусловленная преобразованием неколлинеарных магнитостатических волн в неоднородно намагниченном феррите // Сборник трудов XVI Международной конференции «Радиолокация и радиосвязь». — Москва–Фирсановка: МЭИ, 2008. — С. 331.
161. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Характеристики электромагнитного излучения, возникающего при произвольном направлении распространения поверхностных магнитостатических волн в поперечном возрастающем магнитном поле // РЭ. — 2009. — Т. 54, №9. — С. 1064.
162. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Диаграмма направленности СВЧ излучения, возникающего при распространении неколлинеарных магнитостатических волн в неоднородно намагниченных ферритовых пленках // Сборник материалов XIV Международной зимней школы-семинара по электронике сверхвысоких частот и радиофизике. — Саратов: ПАТА, 2009. — С. 46.
163. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Диаграмма направленности излучения, возникающего при распространении неколлинеарных магнитостатических волн в неоднородном поле // Сборник трудов XXI Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ)». — М.: Изд. МГУ. 2009. — С. 951.
164. *Shcheglov V. I., Zubkov V. I.* Spatial diagram of microwave radiation arising from noncollinear magnetostatic waves propagation along the nonuniform magnetized ferrite films // International conference «Progress In Electromagnetics Research Symposium (PIERS)». Book of Abstracts. — Moscow, 2009. — P. 895.
165. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Электромагнитное излучение, возникающее при распространении поверхностных магнитостатических волн в ферритовой пленке, намагниченной пространственно-периодическим полем // Сборник трудов XVIII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — Москва–Фирсановка: МЭИ-ПЛАНТИ, 2010. — С. 110.
166. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Излучение электромагнитных волн при распространении магнитостатической волны в пространственно-периодическом поле // XIII Всероссийская школа-семинар «Волновые явления в неоднородных средах (Волны-2011)». Тезисы докладов (электронный сборник на CD). — М.: Изд. Физ. фак. МГУ, 2011. Секция 2 (Электродинамика). — С. 12.
167. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Диаграмма направленности излучения электромагнитных волн, сопровождающего распространение магнитостатических волн в поле с периодической неоднородностью // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ, 2011. — С. 231.
168. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Диаграмма направленности СВЧ излучения, возникающего при распространении магнитостатической волны в периодически неоднородном поле // Сборник материалов XV Международной

- зимней школы-семинара по электронике сверхвысоких частот и радиофизике. — Саратов: Изд. СГУ, 2012. — С. 42.
169. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Формирование диаграммы направленности излучения электромагнитных волн из феррита при распространении магнитостатической волны в условиях нерегулярной квазипериодической неоднородности подмагничивающего поля // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — М.: НИУ МЭИ, 2012. — С. 274.
170. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Преобразование магнитостатических волн в электромагнитные в среде с периодической неоднородностью // Сборник трудов XXII Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ)». — Астрахань: Изд. дом «Астраханский университет», 2012. — С. 274.
171. *Shcheglov V. I., Zubkov V. I.* Spatial diagram of microwave radiation by magnetostatic surface waves propagation in nonuniform magnetized ferrite film // Book of Abstracts of Moscow International Symposium on Spin Waves 2013 (SW-2013). Saint Petersburg, Russia. Published by «Изд. ФТИ им. Иоффе». — P. 130.
172. *Щеглов В. И.* Диаграмма направленности излучения электромагнитных волн из феррита при распространении магнитостатических волн в неоднородно намагниченной многослойной структуре // Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — М.: НИУ МЭИ, 2013. — С. 216.
173. *Auld B. A.* Geometrical optics of magnetoelastic wave propagation in a nonuniform magnetic field // Bell Syst. Tech. J. — 1965. — V. 44, №3. — P. 495.
174. *Беспярых Ю. И., Зубков В. И., Тарасенко В. В.* Распространение поверхностных магнитостатических волн в ферромагнитной пластине // ЖТФ. — 1980. — Т. 50, №1. — С. 140.
175. *Гуревич А. Г.* Ферриты на сверхвысоких частотах. — М.: Гос. Изд. физ.-мат. лит., 1960.
176. *Гуревич А. Г.* Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. — М.: Наука, 1973.
177. *Гуревич А. Г., Мелков Г. А.* Магнитные колебания и волны. — М.: Физматлит, 1994.
178. *Семенов А. А.* Теория электромагнитных волн. — М.: Изд. МГУ., 1968.
179. *Никольский В. В., Никольская Т. И.* Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Наука, 1989.
180. *Красюк Н. П., Дымович Н. Д.* Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Высшая школа, 1974.
181. *Ионкин П. А., Мельников Н. А., Даревский А. И., Кухаркин Е. С.* Теоретические основы электротехники. Часть 1. Основы теории цепей. — М.: Высшая школа, 1965.
182. *Даревский А. И., Кухаркин Е. С.* Теоретические основы электротехники. Часть 2. Основы теории электромагнитного поля. — М.: Высшая школа, 1965.

183. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. — М.: Сов. радио, 1957.
184. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. — М.: Радио и связь, 1988.
185. *Чертов А. Г.* Единицы физических величин. — М.: Высшая школа, 1977.
186. *Сена Л. А.* Единицы физических величин и их размерности. — М.: Наука, 1977.
187. *Уокер Л.* Магнитостатические типы прецессии при ферромагнитном резонансе // В кн.: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. — М.: ИЛ, 1961. — С. 470.
188. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972.
189. *Локк Э. Г.* Свойства изочастотных зависимостей и законы геометрической оптики // УФН. — 2008. — Т. 178, № 4. — С. 397.
190. *Ландсберг Г. С.* Оптика. — М.: Наука, 1976.
191. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1973.
192. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Пространственное распределение амплитуд внешних и внутренних волн в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью. Часть 2. Электромагнитная волна // Электронный «Журнал радиоэлектроники». — 2015. — № 2. (40). <http://jre.cplire.ru/jre/feb15/2/text.html>.
193. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Пространственное распределение амплитуд внешних и внутренних волн в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью. Часть 3. Электромагнитная волна в магнитной среде // Электронный «Журнал радиоэлектроники». — 2015. — № 3. (51). <http://jre.cplire.ru/jre/mar15/13/text.html>.
194. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Электромагнитные волны в бигиротропной пластине, распространяющиеся в направлении, перпендикулярном полю подмагничивания // РЭ. — 2002. — Т. 47, № 9. — С. 1101.
195. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Электромагнитные волны, распространяющиеся в произвольном направлении в безграничной бигиротропной среде, обладающей круговой цилиндрической симметрией // РЭ. — 2003. — Т. 48, № 10. — С. 1186.
196. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Отражение электромагнитных волн от композиционной среды, содержащей ферритовые элементы в условиях ориентационного перехода // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — Москва: НИУ МЭИ, 2011. — С. 245.
197. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Отражение и прохождение электромагнитных волн при падении на трехслойную композиционную структуру, содержащую гиромангнитные элементы // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — Москва: НИУ МЭИ, 2012. — С. 260.
198. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Алгоритм определения амплитуд отраженных и проходящих волн при симметричном

- падении двух встречных волн на многослойную неоднородную структуру // РЭ. — 2012. — Т. 57, № 1. — С. 67.
199. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Алгоритм определения амплитуд внешних и внутренних волн при падении встречных волн на многослойную структуру со ступенчатой неоднородностью // РЭ. — 2013. — Т. 58, № 1. — С. 16.
200. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Два простых алгоритма определения амплитуд внешних и внутренних колебаний при распространении встречных волн в многослойной неоднородной структуре // Электронный «Журнал радиоэлектроники». — 2013. — № 1. (26). <http://jre.cplire.ru/jre/jan 13/11/text.html>.
201. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть пятая. Алгоритмические методы. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2014.
202. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Эквивалентность скалярного одномерного и векторного электродинамического подходов к задаче о падении волны на пластину, решаемой методами прямым и усреднения // РЭ. — 2010. — Т. 55, № 2. — С. 133.
203. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Распространение волн через тонкие слои и пленки. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2010.
204. *Вашковский А. В., Локк Э. Г.* О взаимосвязи энергетических и дисперсионных характеристик магнитостатических волн в ферритовых структурах // УФН. — 2011. — Т. 181, № 3. — С. 293.
205. *Вашковский А. В., Зубков В. И., Локк Э. Г., Щеглов В. И.* Влияние неоднородности постоянного магнитного поля на траектории поверхностных магнитостатических волн // ПЖТФ. — 1989. — Т. 15, № 4. — С. 1.
206. *Вашковский А. В., Зубков В. И., Локк Э. Г., Щеглов В. И.* Траектории поверхностных магнитостатических волн в неоднородно намагниченных ферритовых пленках // ПЖТФ. — 1989. — Т. 15, № 4. — С. 5.
207. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Обратные поверхностные магнитостатические волны в структуре феррит-диэлектрик-металл, намагниченной неоднородным полем типа «вала» // РЭ. — 2001. — Т. 46, № 12. — С. 1471.
208. *Мак-Лаклан Н. В.* Теория и приложения функций Матье. — М.: ИЛ, 1953.
209. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. — М.: Наука, 1964.
210. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. — М.: ИЛ, 1963.
211. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. — М.: Наука, 1965.
212. *Флюгге З.* Задачи по квантовой механике. Т. 1. — М.: МИР, 1974.
213. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973.
214. *Бреховских Л. М., Годин О. А.* Акустика слоистых сред. — М.: Наука, 1989.

215. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть первая. Прямой метод. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2011.
216. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть вторая. Метод матрицы. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2012.
217. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть третья. Метод импеданса. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2012.
218. *Розенберг Г. В.* Оптика тонкослойных покрытий. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958.
219. *Кизель В. А.* Отражение света. — М.: Наука, 1973.
220. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть седьмая. Баланс энергий. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2015.
221. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Метод исключения для расчета распространения волн через среды со ступенчатыми неоднородностями // Электронный «Журнал радиоэлектроники». — 2013. — № 4. (38). <http://jre.cplire.ru/jre/apr13/6/text.html>.
222. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Применение метода исключения для анализа распространения волн в многослойных средах со случайным распределением параметров слоев // РЭ. — 2013. — Т. 58, № 12. — С. 1149.
223. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Применение метода исключения для расчета распространения волн через среды со ступенчатыми неоднородностями специального вида // Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — Москва, МЭИ: «НИУ МЭИ», 2013. — С. 130.
224. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Исследование методом исключения отражения и прохождения волн при распространении через многослойные среды с барьерными и периодическими неоднородностями // Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва, МЭИ: «НИУ МЭИ», 2013. — С. 145.
225. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть четвертая. Специфические методы. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2013.
226. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть шестая. Метод исключения. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2015.
227. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Исследование методом исключения распространения волн через многослойную среду с барьерными неоднородностями // Электронный «Журнал радиоэлектроники». — 2015. — № 1. (38). <http://jre.cplire.ru/jre/jan15/22/text.html>.
228. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Алгоритм определения амплитуд внешних и внутренних волн при встречном падении двух одномерных волн на многослойную структуру // Сборник трудов

- XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — М.: НИУ МЭИ, 2011. — С. 154.
229. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Алгоритм определения амплитуд отраженных и проходящих волн при симметричном падении двух встречных волн на многослойную неоднородную структуру // РЭ. — 2012. — Т. 57, № 1. — С. 67.
230. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Алгоритмы определения амплитуд отраженных и проходящих волн при распространении встречных волн в многослойных неоднородных структурах. Часть первая. Укороченный алгоритм. Учебное пособие (электронное). — Сыктывкар: ИПО ФГБОУ ВПО СыктГУ, 2013.
231. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Алгоритмы определения амплитуд отраженных и проходящих волн при распространении встречных волн в многослойных неоднородных структурах. Часть вторая. Полный алгоритм. Учебное пособие (электронное). — Сыктывкар: ИПО ФГБОУ ВПО СыктГУ, 2013.
232. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Внешние и внутренние волны при распространении через ограниченную многослойную структуру с периодической неоднородностью // Сборник трудов XXII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва, МЭИ: «НИУ МЭИ», 2014. — С. 124.
233. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Пространственное распределение амплитуд внешних и внутренних волн в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью. Часть 1. Одномерная волна // Электронный «Журнал радиоэлектроники». — 2015. — № 2. (46). <http://jre.cplire.ru/jre/feb15/1/text.html>.
234. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Пространственное распределение амплитуд внешних и внутренних волн в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью. Часть 4. Волна в диссипативной среде // Электронный «Журнал радиоэлектроники». — 2015. — № 3. (56). <http://jre.cplire.ru/jre/mar15/14/text.html>.
235. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Энергетические характеристики распространения волны через границы раздела сред с комплексными параметрами // РЭ. — 2009. — Т. 54, № 10. — С. 1171.
236. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Энергетические параметры распространения электромагнитной волны при падении на проводящую пластину, окруженную проводящей средой // Сборник трудов XVI Международной конференции «Радиолокация и радиосвязь». — Москва: НИУ МЭИ, 2008. — С. 18.
237. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Энергетические характеристики распространения встречных волн через многослойную структуру // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — Москва: НИУ МЭИ, 2011. — С. 166.
238. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Энергетические коэффициенты выхода при падении встречных волн на многослойную структуру // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — Москва: «НИУ МЭИ». 2012. — С. 215.

239. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Поверхностные магнитостатические волны в ферритовой пленке, намагниченной пространственно-периодическим полем // Сборник трудов XII Международной конференции «Магнетизм, дальнее и ближнее спин-спиновое взаимодействие». — Москва-Фирсановка: Изд. МЭИ, 2009. — С. 73.
240. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Распространение поверхностных магнитостатических волн в ферритовой пластине, намагниченной поперечным пространственно-периодическим полем // РЭ. — 2011. — Т. 56, № 7. — С. 839.
241. *Вороненко А.В., Герус С.В., Харитонов В.Д.* Дифракция поверхностных магнитостатических волн на магнитных решетках в режиме Брэгга // Изв. ВУЗов, Физика. — 1988. — Т. 31, № 11. — С. 76.
242. *Малоземов А., Слонзуски Дж.* Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами. — М.: Мир, 1982.
243. *Kittel C.* Theory of the structure of ferromagnetic domains in films and small particles // Phys. Rev. — 1946. — V. 70, № 11–12. — P. 965.
244. *Вашковский А.В., Зубков В.И., Локк Э.Г., Щеглов В.И.* Поверхностные магнитостатические волны в линейно неоднородных магнитных полях // РЭ. — 1991. — Т. 36, № 1. — С. 18.
245. *Вашковский А.В., Зубков В.И., Локк Э.Г., Щеглов В.И.* Поверхностные магнитостатические волны в неоднородном подмагничивающем поле типа «долины» // РЭ. — 1994. — Т. 39, № 2. — С. 217.
246. *Вашковский А.В., Зубков В.И., Локк Э.Г., Щеглов В.И.* Траектории лучей поверхностной магнитостатической волны в монотонных неоднородных магнитных полях // РЭ. — 1995. — Т. 40, № 6. — С. 950.
247. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Стохастические пространственные колебания траекторий поверхностных магнитостатических волн в периодически неоднородном поле // Международная конференция «Фазовые переходы и нелинейные явления в конденсированных средах», IV Международный семинар «Физика магнитных фазовых переходов». Сборник «Материалы конференции». Махачкала. 2000. — С. 222.
248. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Неустойчивость траекторий поверхностных магнитостатических волн, распространяющихся в периодически неоднородном поле с профилем в виде «вала» // IX Международная конференция по спинволновой электронике. Сборник трудов. — Москва, 2000. — С. 229.
249. *Shcheglov V.I., Zubkov V.I.* The stochastic instability of magnetostatic waves paths propagating in periodically nonuniform magnetic field // International Symposium EASTMAG-2001. Abstract Book. Ekaterinburg, Russia. 2001. — P. 390.
250. *Щеглов В.И.* Стохастическая неустойчивость траекторий магнитостатических волн в модулированном подмагничивающем поле при различных видах модуляции и начальных условий // Сборник трудов XX Международной школы-семинара «Новые магнитные материалы микроэлектроники». — М.: Изд. МГУ, 2006. — С. 716.

251. *Щеглов В.И.* Распространение поверхностных магнитостатических волн в дважды периодическом неоднородном поле // Сборник трудов XX Международной школы-семинара «Новые магнитные материалы микроэлектроники». — М.: Изд. МГУ, 2006. — С. 748.
252. *Щеглов В.И.* Стохастическая неустойчивость траекторий поверхностных магнитостатических волн в неоднородном поле типа «вала» с периодической модуляцией // Сборник материалов X Международной зимней школы-семинара «Хаотические автоколебания и образование структур» (ХАОС-2013). — Саратов: Изд. центр «Наука», 2013. — С. 104.
253. *Щеглов В.И.* Стохастическая неустойчивость траекторий поверхностных магнитостатических волн в модулированном поле типа «вала» // Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — М.: НИУ МЭИ, 2013. — С. 231.
254. *Mandelbrot B.B.* The fractal geometry of nature. — S.F., 1982.
255. *Зубков В.И., Локк Э.Г., Щеглов В.И.* Прохождение поверхностных магнитостатических волн под металлической полоской, расположенной над поверхностью ферритовой пленки // РЭ. — 1989. — Т. 34, № 7. — С. 1381.
256. *Вашковский А.В., Зубков В.И., Локк Э.Г., Щеглов В.И.* Преломление поверхностных магнитостатических волн на границе раздела сред феррит и феррит-диэлектрик-металл // РЭ. — 1991. — Т. 36, № 10. — С. 1959.
257. *Вашковский А.В., Зубков В.И., Локк Э.Г., Щеглов В.И.* Преломление поверхностных магнитостатических волн металлической полоской, расположенной на поверхности ферритовой пленки // РЭ. — 1991. — Т. 36, № 12. — С. 2345.
258. *Вызулин С.А., Розенсон А.Э., Шех С.А.* О спектре поверхностных магнитостатических волн в ферритовой пленке с потерями // РЭ. — 1991. — Т. 36, № 1. — С. 164.
259. *Вызулин С.А.* Обобщенные плоские волны в задачах электродинамики магнитогириротропных сред. — Диссертация на соискание уч. ст. д. ф.-м. н. — Краснодар, 2000.
260. *Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Влияние диссипации на свойства поверхностных магнитостатических волн в касательно намагниченной пластине феррита // Электронный «Журнал радиоэлектроники». — 2014. — № 7. (31). <http://jre.cplire.ru/jre/jul14/8/text.html>.
261. *Келлер Ю.И., Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Поверхностные магнитостатические волны в пластине феррита с диссипацией. Часть 1. Дисперсионные соотношения // Электронный «Журнал радиоэлектроники». — 2016. — № 2. (32). <http://jre.cplire.ru/jre/feb16/2/text.html>.
262. *Келлер Ю.И., Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Поверхностные магнитостатические волны в пластине феррита с диссипацией. Часть 2. Распространение волны перпендикулярно направлению поля // Электронный «Журнал радиоэлектроники». — 2016. — № 3. (40). <http://jre.cplire.ru/jre/mar16/1/text.html>.
263. *Келлер Ю.И., Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Поверхностные магнитостатические волны в пластине феррита с диссипацией. Часть 3. Распространение волны в произвольном направлении

- относительно поля // Электронный «Журнал радиоэлектроники». — 2016. — № 3. (33). <http://jre.cplire.ru/jre/mar16/2/text.html>.
264. *Вашковский А. В., Зубков В. И., Локк Э. Г., Щеглов В. И.* Поверхностные магнитостатические волны в ферритовых пленках, намагниченных поперечно неоднородным полем // Труды XI Международной конференции по гиромангнитной электронике и электродинамике. — Украина. Алушта: Изд. МЭИ, 1992. — Т. 1. — С. 104.
265. *Вашковский А. В., Зубков В. И., Локк Э. Г., Щеглов В. И.* Распространение поверхностных магнитостатических волн в поперечно неоднородных полях подмагничивания // Сборник тезисов «V Всесоюзной школы-семинара по спинволновой электронике СВЧ». — Звенигород, 1991. — С. 13.
266. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля (Теоретическая физика, т. II). — М.: Наука, 1967.
267. *Левич В. Г.* Курс теоретической физики. Т. 1. — М.: Наука, 1969.
268. *Вонсовский С. В., Шур Я. С.* Ферромагнетизм. — М.: ОГИЗ Гостехиздат, 1948.
269. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Т. 3. Электричество. — М.: Наука, 1977.
270. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1973.