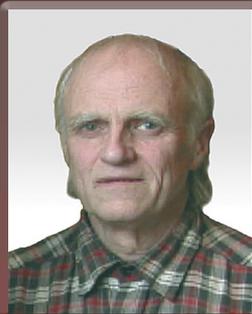


В.Г. Шавров
В.И. Щеглов

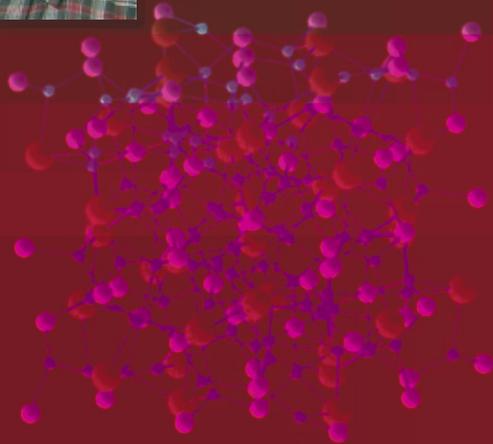
ДИНАМИКА НАМАГНИЧЕННОСТИ В УСЛОВИЯХ ИЗМЕНЕНИЯ ЕЁ ОРИЕНТАЦИИ



Шавров Владимир Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией магнитных явлений в микроэлектронике Института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН

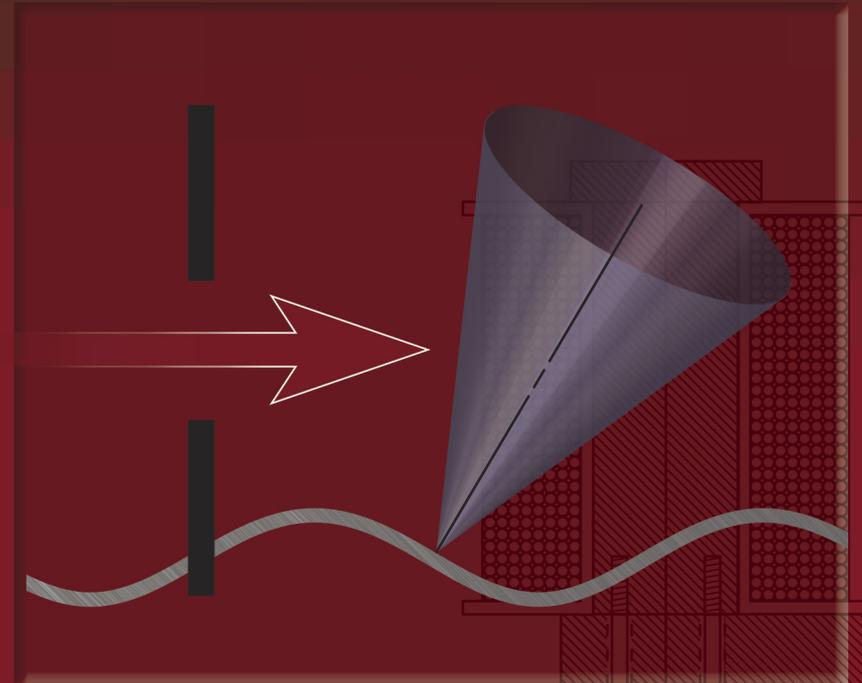


Щеглов Владимир Игнатьевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН



**ДИНАМИКА НАМАГНИЧЕННОСТИ
В УСЛОВИЯХ ИЗМЕНЕНИЯ ЕЁ ОРИЕНТАЦИИ**

В.Г. Шавров
В.И. Щеглов





**В.Г. Шавров
В.И. Щеглов**

**ДИНАМИКА НАМАГНИЧЕННОСТИ
В УСЛОВИЯХ ИЗМЕНЕНИЯ
ЕЁ ОРИЕНТАЦИИ**



**МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2019**

УДК 537.874; 537.624

ББК 22.33

Ш 14

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект 14-22-00279

Шавров В.Г., Щеглов В.И. **Динамика намагниченности в условиях изменения её ориентации.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2019. — 472 с. — ISBN 978-5-9221-1837-8.

Монография посвящена рассмотрению динамических явлений в среде с магнитным упорядочением, имеющих место при изменении ориентации равновесного состояния вектора намагниченности. Рассмотрено пространственно однородное изменение намагниченности в условиях ориентационного перехода, а также пространственно неоднородное в пределах доменной границы и структуры в целом. Построены модели ферромагнитного резонанса, распространения магнитостатических волн и локальных возмущений намагниченности типа солитонов. Приведены результаты экспериментального исследования магнитостатических волн в пленке феррита-граната в ненасыщенном состоянии. Рассмотрено распространение электромагнитных волн в многослойной композиционной среде, отдельные элементы которой находятся в условиях ориентационного перехода.

Монография предназначена специалистам, работающим в области физики магнитных явлений, инженерам и конструкторам СВЧ-аппаратуры, а также студентам и аспирантам соответствующих специальностей.

ISBN 978-5-9221-1837-8

© ФИЗМАТЛИТ, 2019

© В. Г. Шавров, В. И. Щеглов, 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	13
Список наиболее часто используемых сокращений	22
Глава 1. Общие свойства волновых процессов и ориентационных переходов в магнитной среде (обзор литературы)	23
1.1. Волновые процессы и общая динамика намагниченности	24
1.1.1. Общая характеристика волновых процессов	24
1.1.2. Основное уравнение динамики намагниченности	25
1.1.3. Динамическая магнитная восприимчивость	26
1.1.4. Замечание о нелинейной динамической восприимчивости	26
1.1.5. Некоторые особенности ферромагнитного резонанса в нелинейном режиме	28
1.2. Волны в магнитных средах	29
1.2.1. Магнитостатические волны в ферритах	30
1.2.2. Волны в магнетиках в рамках общей электродинамики	31
1.2.3. Магнитостатические волны в неоднородных полях	31
1.2.4. Излучение электромагнитных волн из феррита	31
1.2.5. Магнитостатические волны в диссипативных средах	32
1.3. Ориентационные переходы	33
1.3.1. Общие свойства ориентационных переходов	33
1.3.2. Доменная структура при ориентационных переходах	33
1.3.3. Ферромагнитный резонанс в анизотропной среде	34
1.3.4. Частотная щель в спектре ферромагнитного резонанса	35
Выводы по главе 1	36
Глава 2. Общие свойства доменных границ и доменной структуры в магнетиках (обзор литературы)	38
2.1. Общая картина образования доменной структуры	38
2.1.1. Соотношение доменной структуры с ориентационным переходом	40
2.1.2. Историческое развитие науки о доменах	40
2.1.3. Цилиндрические магнитные домены	42
2.2. Динамические свойства доменных границ и отдельных доменов	42
2.2.1. Влияние структуры доменных границ на их динамические свойства	43
2.2.2. Предельные скорости движения доменных границ	43
2.2.3. Эффект баллистического последействия	44

2.2.4. Динамика доменных границ при большой одноосной анизотропии	44
2.2.5. Эффект «кусочного» перемагничивания	45
2.3. Динамика коллективов доменов	46
2.3.1. Динамическая самоорганизация доменных решеток	46
2.3.2. Динамические доменные структуры	47
2.4. Колебательные и волновые процессы в магнетике с доменами	47
2.4.1. Низкочастотные колебания	48
2.4.2. Резонанс доменных границ	48
2.4.3. Ферромагнитный резонанс в доменной структуре	49
2.4.4. Магнитостатические волны в доменной структуре	49
Выводы по главе 2	50
Глава 3. Общие свойства волновых возмущений солитонного типа (обзор литературы)	52
3.1. Доменная граница как область локализованного ориентационного перехода	52
3.1.1. Аналогия между доменной границей и солитоном	53
3.2. Уравнения, имеющие точные солитонные решения.	53
3.2.1. Уравнение Кортевега–де Фриза	54
3.2.2. Нелинейное уравнение Шредингера	55
3.2.3. Уравнение синус-Гордона	55
3.2.4. Уравнение Клейна–Гордона	56
3.2.5. Графическое представление решений основных солитонных уравнений	57
3.3. Некоторые общие замечания, касающиеся решения солитонных уравнений.	59
3.3.1. Многообразие возможных видов солитонных уравнений	59
3.3.2. Метод обратной задачи рассеяния	60
3.3.3. Особенности решения уравнения синус-Гордона	60
Выводы по главе 3	61
Глава 4. Общий математический аппарат, используемый при расчете волновых процессов	64
4.1. Решение дифференциальных уравнений волнового типа	64
4.1.1. Основные виды уравнений волнового типа	64
4.1.2. Классическое волновое уравнение без затухания	65
4.1.3. Волновое уравнение с затуханием по времени	67
4.1.4. Волновое уравнение с затуханием по координате	69
4.1.5. Сравнительные особенности затухания по времени и по координате	71
4.1.6. Волновое уравнение без затухания со смешанной производной	73

4.1.7. Классическое решение уравнения со смешанной производной	75
4.1.8. Некоторые дополнительные замечания о смешанной производной	83
4.2. Волновые уравнения электродинамики для проводящей среды	84
4.2.1. Введение электрической и магнитной проводимости	84
4.2.2. Общая схема получения волновых уравнений для среды с проводимостью	85
4.2.3. Волновые уравнения при гармонической зависимости от времени	86
4.3. Некоторые полезные приемы математических вычислений.	88
4.3.1. Комплексная амплитуда	88
4.3.2. Представление комплексного числа в виде произведения действительного числа на экспоненту с мнимым показателем	89
4.3.3. Сведение волнового уравнения второго порядка к двум уравнениям первого порядка	92
4.3.4. Представление уравнения гармонических колебаний второго порядка в виде уравнения первого порядка	92
4.3.5. Гиперболический арктангенс комплексного числа	94
Выводы по главе 4	98
Глава 5. Математический аппарат, используемый при расчете динамики намагниченности	100
5.1. Уравнение движения для намагниченности.	100
5.1.1. Тензор магнитной восприимчивости	102
5.1.2. Тензор магнитной проницаемости	103
5.2. Плотности энергии различных видов в декартовых и сферических координатах.	104
5.2.1. Плотность энергии взаимодействия намагниченности с внешним полем	104
5.2.2. Плотность энергии поля размагничивания	105
5.2.3. Плотность энергии одноосной анизотропии второго и четвертого порядков	106
5.2.4. Плотность энергии неоднородного обменного взаимодействия	108
5.3. Общая характеристика магнитостатических волн	111
5.3.1. Дипольные и обменные магнитостатические волны	111
Выводы по главе 5	112
Глава 6. Математический аппарат, используемый при расчете свойств дипольных магнитостатических волн.	113
6.1. Решение задачи Дэймона–Эшбаха через потенциал.	113
6.1.1. Общая геометрия задачи	113
6.1.2. Приближение магнитостатики	115
6.1.3. Граничные условия для поля и индукции	115

6.1.4. Введение потенциала	115
6.1.5. Полная задача для потенциала во всех трех средах	116
6.1.6. Решение уравнений без граничных условий	117
6.1.7. Дисперсионное соотношение в декартовой системе координат	118
6.2. Решение задачи Дэймона–Эшбаха через поля.	119
6.2.1. Уравнение Уокера для переменного поля	120
6.2.2. Решение уравнения Уокера для поля	122
6.2.3. Полный вид решения в трех областях	124
6.2.4. Соотношения между компонентами полей	127
6.2.5. Компоненты полей в заданной геометрии	129
6.2.6. Граничные условия	131
6.2.7. Дисперсионное соотношение в декартовой системе координат	132
6.2.8. Переход к полярной системе координат	134
6.3. Основные свойства дисперсии поверхностных магнитостатических волн	134
6.3.1. Угол отсечки для ПМСВ	135
6.3.2. Графическая иллюстрация дисперсии ПМСВ	135
6.3.3. Вектор групповой скорости	139
Выводы по главе 6	142
Глава 7. Математический аппарат, используемый при расчете свойств обменных магнитостатических волн	144
7.1. Дисперсионные свойства обменных магнитостатических волн	144
7.1.1. Дипольное поле обменной магнитостатической волны	145
7.1.2. Обменное поле обменной магнитостатической волны	147
7.1.3. Решение уравнения движения вектора намагниченности для обменной магнитостатической волны	151
7.1.4. Частные случаи закона дисперсии	154
7.1.5. Графическая иллюстрация дисперсии обменных волн	155
7.2. Вынужденная обменная магнитостатическая волна	155
7.2.1. Уравнение движения и эффективные поля	156
7.2.2. Эффективная динамическая восприимчивость	159
7.3. Замечания о возможности возбуждения обменных волн в эксперименте	160
7.3.1. Обменные волны, распространяющиеся по толщине пленки	161
7.3.2. Обменные волны, распространяющиеся в плоскости пленки	161
7.3.3. Общая задача о возбуждении волны волной	163
Выводы по главе 7	165
Глава 8. Некоторые вопросы распространения волн в неоднородной среде.	167
8.1. Метод Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ)	167
8.1.1. Метод ВКБ. Первое приближение	168
8.1.2. Метод ВКБ. Второе приближение	169

8.1.3. Оценка точности метода ВКБ на реальном примере уравнения второго порядка	172
8.1.4. Получение коэффициентов a и b по двум точкам	173
8.1.5. Решение при различных входных параметрах	174
8.2. Уравнение Рэлея для волны в неоднородной среде	177
8.2.1. Аналитическое решение уравнения Рэлея	177
8.2.2. Графическая иллюстрация решения уравнения Рэлея	179
8.3. Магнитостатические волны в неоднородном поле	182
8.3.1. Метод Гамильтона–Аулда для двух измерений	183
8.3.2. Метод Гамильтона–Аулда для трех измерений	184
Выводы по главе 8	185
Глава 9. Некоторые вопросы, касающиеся расчета ориентационных переходов	187
9.1. Общая идеология ориентационного перехода	187
9.1.1. Общее понятие ориентационного перехода	187
9.1.2. Пример простого ориентационного перехода	189
9.2. Условия ориентационного перехода	194
9.2.1. Требование минимизации энергии при ориентационном переходе	194
9.2.2. Аналитическое определение равновесного положения вектора намагниченности	195
9.3. Численные методы нахождения равновесного положения вектора намагниченности	196
9.3.1. Метод поиска нуля	198
9.3.2. Метод установления	199
9.3.3. Метод динамического установления	201
9.4. Аппарат матриц перехода	202
9.4.1. Общая схема преобразования	203
9.4.2. Преобразование вектора	204
9.4.3. Преобразование тензора	204
9.4.4. Преобразование тензоров первого вида	205
9.4.5. Преобразование тензоров второго вида	206
9.4.6. Структура матриц перехода	208
Выводы по главе 9	210
Глава 10. Динамическая магнитная восприимчивость при ориентационном переходе	213
10.1. Некоторые виды магнитной анизотропии	213
10.1.1. Магнитная кристаллографическая анизотропия	214
10.1.2. Анизотропия формы (размагничивания)	216
10.1.3. Анизотропия внешнего поля	217

10.2. Преобразование вектора намагниченности при повороте координат	218
10.2.1. Преобразование компонент вектора в декартовой системе координат	218
10.3. Свободный ферромагнитный резонанс при ориентационном переходе	219
10.3.1. Приложенное поле меньше поля анизотропии	219
10.3.2. Приложенное поле больше поля анизотропии	223
10.3.3. Произвольное значение приложенного поля	224
10.4. Вынужденный ферромагнитный резонанс при ориентационном переходе	226
10.4.1. Приложенное поле меньше поля анизотропии	227
10.4.2. Приложенное поле больше поля анизотропии	235
Выводы по главе 10	236
Глава 11. Математический аппарат, используемый при работе со статикой и динамикой доменных границ	239
11.1. Стационарное распределение намагниченности в доменной границе	239
11.1.1. Общая геометрия распределения намагниченности в доменной границе	240
11.1.2. Плотность энергии и уравнения стационарного состояния	241
11.1.3. Блоховская доменная граница	245
11.1.4. Неелевская доменная граница	247
11.1.5. Краткая сводка формул для обоих видов границ	248
11.1.6. Приведение уравнений для блоховской и неелевской границ к одинаковому виду	248
11.2. Уравнение движения вектора намагниченности в сферических координатах	249
11.2.1. Соотношение между декартовой и сферической системами координат	250
11.2.2. Полные уравнения движения в декартовой системе координат	250
11.2.3. Переход к сферической системе координат	251
11.2.4. Полные уравнения движения для полярной и азимутальной компонент вектора намагниченности	253
11.3. Приведение уравнения движения для намагниченности к солитонному виду	254
11.3.1. Плотность энергии в сферической системе координат	254
11.3.2. Уравнение движения доменной границы в предположении постоянства азимутального угла вектора намагниченности	255
11.3.3. Солитонный вид уравнения движения доменной границы	256
11.3.4. Геометрическая интерпретация профиля движущейся доменной границы	257
11.3.5. Приведение уравнения для движущейся границы к уравнению для стационарной границы	259

11.3.6. Математическая эквивалентность двух видов решения солитонного уравнения	261
11.3.7. Преобразование уравнения для движущейся границы в классическое уравнение синус-Гордона	262
11.4. Решение Уокера для скорости плоской доменной границы.	264
11.4.1. Общая геометрия задачи и влияние продвигающего поля	264
11.4.2. Плотность энергии движущейся границы	267
11.4.3. Уравнения движения вектора намагниченности с учетом его переориентации	267
11.4.4. Приведение уравнения движения границы к зависимости от переменной Даламбера	268
11.4.5. Критическое поле Уокера	270
11.4.6. Предельная скорость Уокера	271
11.5. Замечание об энергии доменной границы.	273
Выводы по главе 11	274
Глава 12. Экспериментальное исследование распространения магнитостатических волн в пленках с доменной структурой.	280
12.1. Техника эксперимента и методика измерений	281
12.1.1. Основная техника эксперимента	281
12.1.2. Методика измерений	289
12.2. Основные свойства пленок ЖИГ и доменных структур в них	290
12.2.1. Разделение пленок на два типа по характеру доменной структуры	290
12.2.2. Роль нормальной анизотропии	291
12.2.3. Экспериментальное исследование анизотропных свойств пленок	292
12.2.4. Доменная структура пленок	294
12.3. Распространение МСВ в пленках ЖИГ с доменами.	296
12.3.1. Распространение МСВ в пленках первого типа	296
12.3.2. Распространение МСВ в пленках второго типа	300
12.3.3. Основные факторы, определяющие природу наблюдаемых явлений	302
Выводы по главе 12	303
Глава 13. Ферромагнитный резонанс в пластине с доменами	305
13.1. Модель локальных эффективных полей	305
13.1.1. Общая геометрия задачи	306
13.1.2. Внутренние поля доменов в полной структуре	308
13.1.3. Поля размагничивания собственных граней	308
13.1.4. Поля воздействия соседних доменов друг на друга	309
13.1.5. Полная плотность энергии	312
13.2. Ориентация намагниченности в доменах	314
13.2.1. Ориентационные переходы в доменах	316
13.2.2. Плотность энергии в системе, связанной с намагниченностью	316
13.2.3. Эффективные поля	320

13.3. Уравнения движения и резонансные частоты	320
13.3.1. Уравнения движения для векторов намагниченности в доменах двух знаков	320
13.3.2. Резонансные частоты собственных колебаний	323
13.3.3. Условия дискретности и вырождения резонансных частот	326
13.4. Зависимости резонансных частот от параметров модели	327
13.4.1. Изменение внешнего поля	328
13.4.2. Влияние поля размагничивания торцов доменов	328
13.4.3. Влияние поля размагничивания боковых граней доменов	330
13.4.4. Влияние полей воздействия доменов друг на друга	331
13.4.5. Обсуждение полевых зависимостей и вырождения ветвей спектра	333
13.5. Сравнение с экспериментом	335
13.5.1. Поле анизотропии больше намагниченности	335
13.5.2. Поле анизотропии меньше намагниченности	336
13.5.3. Интерпретация полученных результатов на основе гипотезы об энергетической щели	337
13.5.4. Возможные механизмы формирования щели	338
Выводы по главе 13	340
Глава 14. Магнитостатические волны в условиях ориентационного перехода	345
14.1. Общая постановка задачи	345
14.1.1. Общая геометрия задачи	346
14.1.2. Геометрия задачи, соответствующая ориентационному переходу	347
14.1.3. Общее приближение магнитостатики	348
14.1.4. Уравнение Уокера с произвольным тензором восприимчивости	350
14.1.5. Уравнения движения и граничные условия	351
14.2. Задача для структуры из трех сред	353
14.2.1. Решение уравнений без граничных условий	354
14.2.2. Соотношение между волновыми числами	360
14.2.3. Потенциалы во всех областях	360
14.3. Дисперсионное соотношение	361
14.3.1. Дисперсионное соотношение в декартовой системе координат	361
14.3.2. Переход к полярной системе координат	363
14.4. Потенциалы, поля, намагниченность	367
14.4.1. Потенциалы	367
14.4.2. Поля	371
14.4.3. Намагниченность	372
14.5. Типы МСВ и структура их полей	372
14.5.1. Квазиобъемные и квазиповерхностные волны	372
14.5.2. Особенности решения в другой полуплоскости	375
14.5.3. Замечание о невзаимном характере волн	376

14.6. Частотные диапазоны и интервалы полей существования различных типов МСВ	377
14.6.1. Частотно-полевые области существования МСВ различных типов	377
14.6.2. Частотные границы между областями квазиповерхностных и квазиобъемных волн	380
14.6.3. Предельные частоты дисперсионного соотношения	385
14.6.4. Деформация областей существования квазиобъемных и квазиповерхностных волн при изменении поля анизотропии	385
14.6.5. Границы областей существования квазиобъемных и квазиповерхностных волн при различных ориентациях волнового вектора	388
14.7. Дисперсионные свойства различных МСВ	390
14.7.1. Распространение волн перпендикулярно направлению поля	390
14.7.2. Распространение волн параллельно направлению поля	392
14.8. Сравнение с экспериментом	393
14.8.1. Основные свойства спектров МСВ	393
14.8.2. Соотношение теории с экспериментальными результатами	394
Выводы по главе 14	395
Глава 15. Электромагнитные волны в многослойной структуре с ориентационным переходом	399
15.1. Общий случай электромагнитной волны в среде с тензорными параметрами	399
15.1.1. Общий случай среды тензорного характера	400
15.2. Электромагнитные волны, распространяющиеся в бигиротропной среде	401
15.2.1. Гиромагнитная и giroэлектрическая волны	402
15.2.2. Поля гиромагнитной волны	403
15.2.3. Линейномагнитный и гиромагнитный импедансы	404
15.3. Тензор магнитной проницаемости композиционной среды	405
15.3.1. Схема получения тензора динамической восприимчивости для композиционной среды	405
15.3.2. Явный вид компонент тензора магнитной восприимчивости	407
15.3.3. Явный вид компонент тензора магнитной проницаемости	408
15.4. Дисперсионные свойства гиромагнитной волны в композиционной среде	409
15.4.1. Дисперсионные кривые при различных значениях анизотропии	409
15.5. Падение электромагнитной волны на композиционную структуру, содержащую гиромагнитные элементы в условиях ориентационного перехода	410
15.5.1. Ориентация полей и волновых векторов гиромагнитных волн противоположных направлений	410

15.6. Отражение и прохождение электромагнитных волн при падении на одну границу между двумя композиционными средами	412
15.6.1. Общая геометрия задачи	412
15.6.2. Поля гиромагнитной волны и граничные условия	413
15.6.3. Амплитуды волн в обеих средах	414
15.6.4. Коэффициенты отражения и прохождения по полям . . .	415
15.6.5. Частотные зависимости коэффициентов отражения и прохождения	415
15.7. Отражение и прохождение электромагнитных волн при падении на трехслойную композиционную структуру.	419
15.7.1. Нормальное падение гиромагнитной волны на структуру, состоящую из трех сред	419
15.7.2. Поля распространяющихся волн	420
15.7.3. Коэффициенты отражения и прохождения по полям . . .	423
15.7.4. Частотные зависимости коэффициентов отражения и прохождения	423
Выводы по главе 15	425
Литература	429

Введение

Динамические явления в диэлектрических магнитных средах демонстрируют значительное разнообразие. Вектор намагниченности в своем стремлении занять положение, соответствующее минимуму энергии, претерпевает многочисленные коллизии, задаваемые как внешними факторами, например полем или формой образца, так и внутренними, из которых можно отметить анизотропию, обменное и магнитоупругое взаимодействия.

Особое место занимают явления, имеющие место при малой диссипации в магнетике, такие как ферромагнитный резонанс (ФМР) и различные виды магнитостатических волн (МСВ). В условиях изменения ориентации намагниченности ФМР и МСВ приобретают значительную специфику.

Кроме значительного физического интереса, эти явления находят широкое применение для создания высокоэффективных устройств аналоговой обработки информации в диапазоне СВЧ. К числу таких устройств относятся фильтры, линии задержки, фазовращатели, взаимные и нелинейные устройства и другие. В качестве магнитодиэлектрической среды используются пленки и пластины ферритов, в первую очередь — железоиттриевого граната (ЖИГ), имеющего рекордно малые магнитные потери.

Другим важнейшим явлением, обусловленным стремлением намагниченности к минимуму энергии, является доменная структура магнетиков, имеющая место в ограниченных образцах в ненасыщенном состоянии.

Физика доменных структур и доменных границ, будучи чрезвычайно разнообразной сама по себе, имеет огромное прикладное значение, в первую очередь для создания устройств обработки и хранения цифровой информации. Ярким примером здесь можно считать устройства памяти на цилиндрических магнитных доменах (ЦМД), потребности технической разработки которых в огромной степени обеспечили сегодняшний уровень развития науки о магнетизме в целом.

Максимальное быстродействие упомянутых устройств определяется динамическими свойствами вектора намагниченности в доменной границе, где его ориентация существенным образом изменяется.

Перечисленные выше обстоятельства явились стимулом для исследования таких динамических явлений, как ФМР, МСВ и движение доменных границ в условиях изменения ориентации вектора намагниченности. Описанию некоторых результатов подобных исследований и посвящена настоящая монография.

Приведенные в монографии сведения, ни в коей мере не претендуя на исчерпывающую полноту, не более чем отражают круг научных интересов авторов. Основной объем монографии представляет собой краткое изложение и обобщение главных научных и прикладных результатов, полученных авторами в период с 1990 по 2018 годы. Этим обстоятельством объясняется определенная неполнота и некоторая непоследовательность изложения материала. То есть авторы описывают здесь те вопросы, которые в отмеченный период времени встречались в их практике и в наибольшей степени привлекали их внимание. Разумеется, значительное число близких и сходных вопросов остались за пределами поля зрения авторов. В какой-то степени восполнить эти пробелы призван предпоследний основному тексту обзор известной авторам литературы. Более же подробное и последовательное рассмотрение затронутых и пропущенных здесь вопросов авторы предоставляют любознательному читателю.

Приведем в нескольких словах основные характеристики описываемых далее материалов и логическую связь между ними. Прежде всего отметим, что в монографии речь пойдет только о ферромагнетиках (точнее — ферродиелектриках), то есть о средах, где ориентацию намагниченности в макроскопических масштабах можно считать однородной, так как отдельные спины связаны обменным взаимодействием.

В общем случае ориентация намагниченности в ферромагнетике может меняться двояким образом — в пространстве и во времени.

Пусть распределение намагниченности в пространстве полностью однородно, но под действием внешнего поля (или других причин) ее ориентация в пространстве изменяется. Такая ситуация имеет место, например, в случае переориентации вектора намагниченности от одного равновесного положения до другого, каждое из которых, как правило, задается свойствами магнитной анизотропии. При этом принято говорить, что намагниченность претерпевает ориентационный переход.

В большинстве случаев скорость изменения внешних факторов (например, поля) является столь малой, что перемагничивание происходит квазистатическим образом. То есть намагниченность можно считать ориентированной статически, после чего рассматривать динамику отклонения намагниченности от такого статического состояния. Здесь возможна прецессия намагниченности, то есть явления типа ферромагнитного резонанса или магнитостатических волн. При малых отклонениях намагниченности от равновесного положения динамические явления могут протекать линейным образом, а при больших — нелинейным. Важно отметить, что равновесное положение намагниченности при этом не меняется.

Другим видом распределения намагниченности в пространстве может быть неоднородное. При этом, поскольку спины по-прежнему связаны обменным взаимодействием, неоднородность намагниченности локализуется в сравнительно небольших пространственных областях. Такая ситуация имеет место в доменной структуре, где ориентация

намагниченности внутри доменов остается постоянной, а в пределах доменных границ изменяется весьма резким образом.

Доменная граница в пространстве может покоиться. При этом также могут возбуждаться колебания типа ферромагнитного резонанса, магнитостатические и электромагнитные волны в условиях доменной структуры.

Кроме состояния покоя, доменная граница, сохраняя свою форму, в пространстве может перемещаться. Возможны малые линейные колебания типа резонанса доменных границ, а также спиновые волны, локализованные на доменных границах. Кроме колебательного, вариантом движения границы может быть ее ступенчатое перемещение на значительные расстояния. В этом случае можно говорить, что движущаяся граница представляет собой сильно нелинейное волновое возмущение солитонного типа, пространственно-временной характер которого отвечает волне Даламбера. Решение волнового уравнения синус-Гордона дает релятивистский предел скорости распространения волны, связанный с процессами диссипации.

Монография является четвертой из цикла, посвященного магнитостатическим волнам, ферромагнитному резонансу и сопутствующим им явлениям. Дополнительное внимание уделено также доменной структуре в плане ее связи с волновыми процессами.

Первая монография [1] носит название «Магнитостатические волны в неоднородных полях» и охватывает круг вопросов, касающихся распространения магнитостатических волн в ферритовых пленках со свободными поверхностями, а также в некоторых структурах, однородных в плоскости пленки, в первую очередь — феррит-диэлектрик-металл и феррит-металл, намагниченных неоднородным полем.

Вторая монография [2] носит название «Магнитостатические и электромагнитные волны в сложных структурах» и охватывает круг вопросов, касающихся распространению МСВ и частично электромагнитных волн (ЭМВ) в сложных структурах, основой которых являются магнитные среды с малым затуханием, в первую очередь — пленки железиттриевого граната. Рассмотрено распространение магнитостатических волн в периодических структурах с различным соотношением между периодом структуры и длиной волны. Отдельное внимание уделено эффекту преобразования магнитостатических волн в электромагнитные на неоднородности поля, проявляющемуся как излучение электромагнитных волн из феррита. Обсуждены некоторые возможности практического применения и дальнейшего исследования описываемых явлений.

Третья монография [3] носит название «Ферромагнитный резонанс в условиях ориентационного перехода» и касается свойств ферромагнитного резонанса (ФМР) в специфических условиях ориентационных переходов, имеющих место в анизотропных средах. Получен тензор магнитной восприимчивости в средах с одноосной и кубической анизотропией при различных ориентациях оси анизотропии и кристаллической ячейки.

Рассмотрены свойства композиционной среды, представляющей собой совокупность магнитных частиц с произвольной ориентацией осей анизотропии. Приведены результаты исследования прецессии положения равновесия намагниченности, имеющей место в условиях ориентационного перехода. Рассмотрены возможности дальнейших экспериментальных исследований и технических приложений описанных явлений.

Настоящая монография, четвертая в упомянутой серии, нацелена на рассмотрение волновых процессов в условиях ориентационных переходов. Материал базируется на физике ориентационных переходов, рассмотренной в предыдущей монографии [3], с тем отличием, что здесь основное внимание уделено именно распространяющимся волнам, как магнитостатическим, так и электромагнитным. Некоторые вопросы касаются доменной структуры и динамики доменных границ, так как даже в покоящейся доменной границе вектор намагниченности испытывает изменение своей ориентации, родственное классическому ориентационному переходу, а движущаяся доменная граница являет собой волновое возмущение солитоноподобного характера.

Кроме перечисленных, в монографии слегка затронуты некоторые дополнительные вопросы. Так, определенное внимание уделено обменным спиновым волнам, само существование которых связано с неоднородностью ориентации намагниченности. Здесь открывается широкое поле деятельности для будущих исследователей. Слегка отмечены некоторые вопросы, касающиеся распространения волн в неоднородных средах, не нашедшие должного отражения в монографии [1]. По этим вопросам также можно говорить об их высокой перспективности.

Монография носит, в основном, теоретический характер. Экспериментальные результаты приведены в той мере, в какой они являются исходным материалом для постановки рассматриваемых теоретических задач. Более тонкие подробности экспериментов приведены с целью расширения картины наблюдаемых явлений, еще не нашедших, исчерпывающей теоретической трактовки. Конкретные рекомендации, приводимые в таких случаях, ориентированы на продолжение работ будущими исследователями.

Определенный опыт работы авторов со студентами и начинающими исследователями показывает, что при первоначальном ознакомлении с предметом заметные трудности вызывает освоение математического аппарата, значительная часть которого рассеяна в статьях, не всегда легко стыкующихся друг с другом. С целью преодоления подобного положения начальные главы монографии посвящены подробному описанию математического аппарата, используемого при расчетах волновых процессов в магнитных средах. К сожалению, авторы не имели возможности уделить достаточное внимание ряду вопросов аппарата, которые были подробно рассмотрены в предыдущих монографиях, ибо такое желание привело бы к недопустимому увеличению объема настоящей монографии. В этих случаях авторы лишь кратко характеризуют схему

расчета, после чего дают соответствующую ссылку. Тем не менее, другие более специфические методы расчета, характерные для вопросов, касающихся только данной монографии, авторы постарались изложить в соответствующих главах с достаточной подробностью.

Основная структура монографии следующая. Первые три главы представляют собой краткий обзор литературы, призванный ввести читателя в круг вопросов, рассматриваемых в основных главах. Обзор ни в коей мере не охватывает всю тематику ФМР, МСВ, доменов и ориентационных переходов, а лишь обращается к некоторым работам, важным для последующего изложения. Какое-либо перекрытие с обзорами, приведенными в предыдущих монографиях настоящей серии [1–3], также отсутствует, приведены лишь ссылки на действительно необходимые здесь работы. Главы с четвертой по одиннадцатую посвящены описанию математического аппарата, используемого для расчета волновых процессов в условиях ориентационных переходов. Глава двенадцатая, составляющая основное ядро монографии, посвящена описанию экспериментального исследования распространения магнитостатических волн в пленках с доменной структурой. Главы тринадцатая и четырнадцатая посвящены интерпретации описанных в двенадцатой главе экспериментальных результатов. В главе пятнадцатой рассмотрению распространение электромагнитных волн в многослойной композиционной структуре, составляющие элементы которой находятся в условиях ориентационного перехода.

Приведем краткую сводку материала по главам несколько более подробно.

ПЕРВАЯ ГЛАВА посвящена рассмотрению общих свойств волновых процессов и ориентационных переходов в магнитных средах. Приведено основное уравнение динамики намагниченности (уравнение Ландау–Лифшица), получена динамическая магнитная восприимчивость. Рассмотрены магнитостатические волны в ферритах, в том числе в неоднородных средах, а также сопровождающее их распространение преобразование магнитостатических волн в электромагнитные, проявляющееся в виде излучения электромагнитных волн из феррита.

ВТОРАЯ ГЛАВА посвящена описанию общих свойств доменных границ и доменной структуры в целом. Рассмотрено соотношение доменной структуры с ориентационным переходом. Приведен краткий обзор исторического развития науки о доменах. Рассмотрены основные явления динамики доменных границ — предельные скорости движения, эффект баллистического последействия, кусочное перемагничивание. Упомянуты некоторые особенности динамики коллективов доменов, в том числе самоорганизация доменных решеток и динамические доменные структуры. Рассмотрены колебательные и волновые процессы в магнетике с доменами — низкочастотные колебания, резонанс доменных границ, ферромагнитный резонанс и магнитостатические волны в доменной структуре.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА посвящена общим свойствам волновых возмущений солитонного типа. Рассмотрена аналогия между движущейся доменной границей и классическим солитоном. Приведены основные типы уравнений солитонного типа — уравнение Кортевега–де Фриза, нелинейное уравнение Шредингера и уравнение синус-Гордона. Представлены графические решения основных солитонных уравнений, упомянут метод обратной задачи рассеяния.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА посвящена описанию общего математического аппарата, используемого при расчете волновых процессов. Рассмотрены основные виды уравнений волнового типа, в том числе с затуханием по времени и по координате. Особое внимание уделено решению волнового уравнения со смешанной по двум координатам производной, получающегося при распространении волны в анизотропной среде. Описаны некоторые приемы математических вычислений, полезные при аналитическом расчете волновых процессов.

ПЯТАЯ ГЛАВА посвящена описанию математического аппарата, используемого при расчете динамики намагниченности. На основании уравнения движения для намагниченности (уравнения Ландау–Лифшица) получены тензоры магнитной восприимчивости и проницаемости. Приведены плотности энергии различных видов в магнитной среде, выраженные в декартовых и сферических координатах. Рассмотрена общая характеристика магнитостатических волн, отмечены волны дипольного и обменного характера. Получены волновые уравнения электродинамики для проводящей среды.

ШЕСТАЯ ГЛАВА посвящена описанию математического аппарата, используемого при расчете свойств дипольных магнитостатических волн. Описано решение классической задачи Дэймона–Эшбаха о распространении магнитостатической волны в касательно намагниченной ферритовой пластине. Приведены два варианта решения задачи Дэймона–Эшбаха — с использованием магнитостатического потенциала и непосредственно через поля распространяющихся волн. Получено дисперсионное соотношение и приведены основные свойства дисперсии поверхностных магнитостатических волн.

СЕДЬМАЯ ГЛАВА посвящена описанию математического аппарата, используемого при расчете свойств обменных магнитостатических волн. Получены дипольное и обменное поля обменной волны. Приведено решение уравнения движения вектора намагниченности в условиях неоднородного обмена. Рассмотрена вынужденная обменная магнитостатическая волна. Обсуждены возможности возбуждения обменных волн в эксперименте. Приведены соображения о постановке задачи, касающейся возбуждения волны волной.

ВОСЬМАЯ ГЛАВА посвящена описанию математического аппарата, используемого при расчете распространения волн в неоднородной среде. Приведена схема метода Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ), описано аналитическое решение уравнения Рэлея для волны в неоднородной среде. Рассмотрен метод Гамильтона–Аулда для распростране-

ния волновых пучков магнитостатических волн в неоднородно намагниченном феррите, в том числе для двумерной и трехмерной сред.

ДЕВЯТАЯ ГЛАВА посвящена описанию методов расчета основных свойств ориентационных переходов в анизотропной среде. Рассмотрено общее понятие ориентационного перехода, приведен пример простого ориентационного перехода в среде с одноосной анизотропией. Рассмотрены численные методы нахождения равновесного положения вектора намагниченности, такие, как метод поиска нуля, а также методы итерационного и динамического установления. Рассмотрен аппарат матриц перехода, применяемый для преобразования векторов и тензоров различных видов.

ДЕСЯТАЯ ГЛАВА посвящена описанию математического аппарата, используемого при расчете динамической магнитной восприимчивости при ориентационном переходе. Рассмотрены основные виды магнитной анизотропии — одноосная и кубическая, а также анизотропия формы и внешнего поля. Приведены приемы преобразования вектора намагниченности при повороте системы координат. Рассмотрен свободный и вынужденный ферромагнитный резонанс при ориентационном переходе, получен тензор восприимчивости и найдены резонансные частоты.

ОДИННАДЦАТАЯ ГЛАВА посвящена описанию математического аппарата, используемого при расчете статики и динамики доменных границ. Найдено стационарное распределение намагниченности в блоховской и неелевской доменных границах. Показана возможность приведения уравнений для статики и динамики блоховской и неелевской границ к одинаковому виду, сводящемуся к классическому виду солитонного решения уравнения синус-Гордона. Приведено решение Уокера для предельной скорости движущейся доменной границы.

ДВЕНАДЦАТАЯ ГЛАВА посвящена описанию экспериментально-го исследования распространения магнитостатических волн в пленках с доменной структурой. Описана техника эксперимента и методика измерений. Приведены основные свойства пленок железиттриевого граната двух типов, различающихся по величине поля анизотропии и характеру доменной структуры. Рассмотрено распространение магнитостатических волн в пленках обоих типов в направлениях параллельном и перпендикулярном магнитному полю. Получены дисперсионные соотношения и эквивалентные кривые. Обсуждается природа наблюдаемых явлений.

ТРИНАДЦАТАЯ ГЛАВА посвящена описанию расчета ферромагнитного резонанса в пластине с доменами. Предложена модель локальных эффективных полей и найдена соответствующая плотность энергии. Рассмотрены ориентационные переходы в доменах, получены уравнения движения и найдены резонансные частоты, зависящие от параметров модели. Выполнено сравнение полученных результатов с данными экспериментов, описанных в двенадцатой главе. Отмечено наличие значительной энергетической щели в спектре возбуждений,

проявляющейся в сдвиге резонансной частоты вверх на величину, определяемую параметрами модели.

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ГЛАВА посвящена описанию расчета характеристик магнитостатических волн в условиях ориентационного перехода. Рассмотрена задача для структуры из трех сред — магнитной пластины и окружающих ее двух свободных полупространств. Для потенциала получены уравнения волнового типа во всех трех средах, на основе граничных условий получено общее дисперсионное соотношение. Выявлена структура распространяющихся поверхностных и объемных волн, представляющая собой сочетание периодической и экспоненциальной зависимостей по толщине пластины. Рассмотрены частотные диапазоны и интервалы полей существования различных типов волн и исследованы их дисперсионные свойства. Выполнено сравнение полученных результатов с данными экспериментов, описанных в двенадцатой главе. Отмечено соответствие по ряду параметров, а также приведены рекомендации для дальнейших исследований.

ПЯТНАДЦАТАЯ ГЛАВА посвящена рассмотрению распространения электромагнитных волн в многослойной структуре, состоящей из набора композиционных сред, содержащих анизотропные ферритовые сферы, находящиеся в условиях ориентационного перехода. Рассмотрен общий случай распространения электромагнитной волны в среде с бигиротропными параметрами. Найден тензор магнитной проницаемости композиционной среды. Рассмотрено падение электромагнитной волны на границу между двумя композиционными средами, найдены коэффициенты отражения и прохождения по амплитудам полей и определены их частотные зависимости. Случай одной границы обобщен на структуру, состоящую из трех слоев композиционных структур. Определены поля распространяющихся волн, найдены коэффициенты отражения и прохождения, а также соответствующие частотные зависимости.

Как и в предыдущих монографиях данной серии, в описанных здесь работах принимали участие многочисленные соавторы. Так, в теоретических работах, касающихся резонанса в анизотропной и композиционной средах, важная роль принадлежит В. И. Зубкову. Эксперименты по исследованию распространения магнитостатических волн в ненасыщенных пленках выполнены совместно с Э. Г. Локком при активном участии А. В. Вашковского. В основании исследований, касающихся распространения волн в многослойных средах, лежат работы по многослойным структурам, выполненные ранее совместно с И. В. Антонцом. Работы, посвященные исследованию влияния диссипации, выполнены совместно с П. А. Макаровым, Ю. И. Келлер и Л. А. Мальцевой, при активном участии В. С. Власова и Л. Н. Котова. Более подробно участие соавторов работ, положенных в основу монографии, отражено в списке литературы.

Выполнению работы в значительной степени способствовало стимулирующее внимание и неоднократные полезные замечания С. В. Яковлева. Ряд вопросов, касающихся техники СВЧ, обсуждался с Л. В. Лу-

цевым и Р. К. Бабичевым. Многочисленные дискуссии с плодотворным обсуждением физики явлений, в том числе доменной структуры, проходили с участием П. Е. Зильбермана. В неоднократных полезных обсуждениях, касающихся физики фазовых переходов, участвовали А. Ф. Кабыченков и В. В. Коледов. Ряд полезных замечаний, в том числе касающихся методического характера изложения материала, был сделан С. В. Тарасенко. В обсуждении ряда вопросов по технологии пленок смешанных ферритов-гранатов принимал участие В. А. Котов. Вопросы, касающиеся влияния диссипации и возможности экспериментального наблюдения ряда явлений обсуждались с П. М. Ветошко. В детальном обсуждении работ по диссипации участвовали Н. И. Ползиков и А. О. Раевский.

В многочисленных обсуждениях оригинальных работ авторов, лежащих в основе данной монографии, принимали участие: А. В. Вашковский, Э. Г. Локк, С. В. Герус, Ю. И. Беспятых, И. Е. Дикштейн, В. В. Тарасенко, В. Д. Харитонов, Е. И. Нефедов, Г. С. Макеева, Ф. В. Лисовский, Е. Г. Мансветова, Г. В. Арзамасцева, Н. Н. Кирюхин, А. В. Вороненко, Д. Г. Шахназарян, В. В. Кильдишев, Л. А. Красножен.

Важнейшая роль в создании благоприятных условий для работы, постоянное к ней внимание и неоднократное оказание административной и научной помощи принадлежит академику РАН Ю. В. Гуляеву.

Непосредственное выполнение работы, в том числе написание настоящей монографии, оказалось возможным благодаря помощи члена-корреспондента РАН С. А. Никитова.

Практически все работы были выполнены с деятельным участием многочисленного технического персонала, без помощи которого выполнение приведенного труда было бы совершенно невозможным.

Всем перечисленным участникам и соавторам работ авторы выражают огромную признательность, отдают низкий поклон и приносят глубочайшую благодарность. Величайшее спасибо Вам, дорогие соратники, друзья и помощники!

Список наиболее часто используемых сокращений

ФМР	— ферромагнитный резонанс
МСВ	— магнитостатическая волна
ПМСВ	— поверхностная магнитостатическая волна
ОМСВ	— объемная магнитостатическая волна
ЭМВ	— электромагнитная волна
СВЧ	— сверхвысокая частота
ЖИГ	— железиттриевый гранат
ТбФГ	— тербиевый феррит-гранат
СФГ	— смешанный феррит-гранат
ОЛН	— ось легкого намагничивания
ЦМД	— цилиндрический магнитный домен

Глава 1

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ И ОРИЕНТАЦИОННЫХ ПЕРЕХОДОВ В МАГНИТНОЙ СРЕДЕ (ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ)

Предметом рассмотрения настоящей монографии являются некоторые особенности волновых процессов, имеющие место в анизотропных магнитных средах. При этом главный упор делается на динамику намагнитченности в условиях ориентационных переходов, свойственную именно волновым процессам, в пространстве имеющим определенную периодичность. Особенности однородного в пространстве ферромагнитного резонанса в условиях ориентационных переходов с посылкой авторам подробно были рассмотрены в предыдущей монографии настоящей серии [3]. Приведенный там обзор литературы также, по мнению авторов, отражает состояние вопроса с приемлемой для данного рассмотрения полнотой. Поэтому здесь лишь кратко перечислим некоторые основополагающие моменты, важные для рассмотрения именно волновых процессов.

Таким образом, настоящая глава представляет собой краткий обзор основных сведений по волновым процессам и ориентационным переходам в магнитных средах, необходимых для того, чтобы ввести читателя в курс дела и обеспечить понимание материала последующих глав.

Приведенные данные, ни в коей мере не претендуя на полноту, опираются на основные известные авторам литературные источники и за редкими исключениями не включают в себя результаты работ, выполненных самими авторами, изложению которых будут посвящены последующие главы монографии.

Перекрытие с обзорами, приведенными в предыдущих монографиях настоящей серии [1–3], в основном, отсутствует, однако некоторые приведенные там сведения здесь повторяются в меру необходимости для последующего рассмотрения вопросов данной монографии.

В обзоре по ходу изложения приведены ссылки на оригинальные разделы монографии, развивающие рассматриваемые положения.

Настоящая глава состоит из двух частей: первая посвящена ферромагнитному резонансу и волновым процессам в магнитной среде в отсутствие ориентационного перехода, вторая — ориентационному переходу как таковому и особенностям ферромагнитного резонанса и волновых процессов в условиях такого перехода. Рассмотрим эти части последовательно.

1.1. Волновые процессы и общая динамика намагниченности

Начнем рассмотрение с общей характеристики волновых процессов. Далее кратко отметим резонансные явления, лежащие в основе распространения волн в магнитных средах, обладающих гиротропией, после чего обратимся к некоторым специфическим вопросам динамики намагниченности, важным для дальнейшего рассмотрения.

1.1.1. Общая характеристика волновых процессов

Волновые процессы являются одним из основных фундаментальных понятий физики, подробное рассмотрение которых можно найти в многочисленных обзорах, монографиях и энциклопедиях [4, 5]. Среди фундаментальных источников, достаточно простых с учебной точки зрения, можно указать [6–8]. Весьма подробным и вполне доступным изложением отличается посвященная упругим волнам монография [9].

Здесь отметим лишь некоторые моменты, важные для дальнейшего рассмотрения в рамках настоящей монографии.

Математическое рассмотрение гармонических волновых процессов основывается на решении классического волнового уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

решение которого имеет вид

$$\psi(x, t) = A(\sin, \cos)(\omega t - kx), \quad (1.2)$$

или в комплексном виде

$$\psi(x, t) = A e^{i(\omega t - kx)}, \quad (1.3)$$

где v — скорость волны, A — ее амплитуда, ω — частота, k — волновое число, связанное с длиной волны λ соотношением

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (1.4)$$

В среде с дисперсией скорость волны зависит от ее частоты или длины. В среде с диссипацией к волновому уравнению (1.1) добавляется первая производная по времени или по координате. В анизотропной среде появляется смешанная производная по обоим переменным. Подробное решение волнового уравнения, в том числе с рассмотрением различных граничных задач, можно найти в фундаментальном учебном руководстве [10]. Для любителей математической строгости можно указать весьма фундаментальное сочинение [11, стр. 196–197 и др.].

Для задач, составляющих предмет настоящей монографии, подробное рассмотрение решения волновых уравнений различных видов приводится в главе 4.

1.1.2. Основное уравнение динамики намагниченности

Основным предметом рассмотрения в настоящей монографии являются волновые процессы в магнитных средах, в основе которых лежит явление ферромагнитного резонанса (ФМР). Поэтому сначала кратко опишем основные свойства этого явления.

Ферромагнитный резонанс как физическое явление имеет немалую историю. Первые попытки изучения динамических свойств магнетиков, главным образом частотной зависимости магнитной проницаемости, относятся к началу XX века. Краткий обзор первых работ можно найти, например, в [12, стр.772–773]. Определенным обобщением ранних исследований динамики магнетиков можно считать монографию [13].

Среди основополагающих теоретических работ следует в первую очередь отметить статью [14], написанную еще до открытия ФМР в эксперименте и посвященную интерпретации структуры и динамических свойств доменных границ. Именно в этой работе было впервые предложено уравнение движения намагниченности, лежащее в основе всей феноменологической теории динамических явлений в магнетиках, в том числе ферромагнитного резонанса и магнитостатических волн, в настоящее время именуемое как «уравнение Ландау–Лифшица».

Ввиду его огромной важности приведем здесь уравнение Ландау–Лифшица с диссипативным членом в форме Гильберта [15–18]:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}_e] + \frac{\alpha}{M_0} \left[\mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right]. \quad (1.5)$$

Здесь \mathbf{M} — вектор намагниченности, M_0 — намагниченность насыщения, γ — гиромагнитная постоянная, α — параметр затухания Гильберта, \mathbf{H}_e — эффективное поле, равное

$$\mathbf{H}_e = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{M}}, \quad (1.6)$$

где U — плотность энергии магнетика.

Это уравнение описывает прецессию вектора намагниченности по конусу вокруг направления постоянного поля (или, в анизотропной среде — вокруг равновесного положения намагниченности), причем при $\gamma > 0$ свободная прецессия является правой.

Вопросы ФМР достаточно подробно рассмотрены в ряде обзорных монографий, из которых в первую очередь следует отметить [15–17]. Подробный разбор вывода уравнения (1.5) и его решения содержится также в [1,2]. Некоторые варианты решения для случаев анизотропных сред, в том числе в условиях ориентационных переходов, со ссылками на многочисленные литературные источники приведены в предыдущей монографии настоящей серии [3]. В дальнейших главах настоящей монографии это уравнение является базовым при рассмотрении всех процессов, связанных с динамикой намагниченности.

1.1.3. Динамическая магнитная восприимчивость

Решение уравнения (1.5) представляет собой прецессию вектора намагниченности вокруг направления постоянного поля, что отражает гиротропный характер магнитной среды. При этом в линейном приближении зависимость вектора динамической намагниченности \mathbf{m} от вектора переменного поля \mathbf{h} , описывается тензором динамической магнитной восприимчивости $\overleftrightarrow{\chi}$

$$\mathbf{m} = \overleftrightarrow{\chi} \mathbf{h}, \quad (1.7)$$

матрица которого в изотропной среде имеет вид [1, 2, 15–17]

$$\overleftrightarrow{\chi} = \begin{pmatrix} \chi & i\chi_a & 0 \\ -i\chi_a & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

где

$$\chi = -\frac{\gamma M_0 (\gamma H_0 + i\omega\alpha)}{\omega^2 - (\gamma H_0 + i\omega\alpha)^2}, \quad (1.9)$$

$$\chi_a = -\frac{i\omega\gamma M_0}{\omega^2 - (\gamma H_0 + i\omega\alpha)^2}, \quad (1.10)$$

где H_0 — постоянное поле, ω — частота прецессии намагниченности.

Из характера компонент тензора восприимчивости можно видеть, что в отсутствие затухания (при $\alpha = 0$) резонансная частота зависит от поля линейным образом в соответствии с формулой

$$\omega_{\text{res}} = \gamma H_0. \quad (1.11)$$

В анизотропной среде характер тензора восприимчивости усложняется: в числителях и знаменателях компонент χ и χ_a появляются слагаемые, отражающие влияние анизотропии. В условиях ориентационного перехода все девять компонент тензора становятся отличными от нуля, причем ближайшие к главной диагонали сохраняют антисимметричный характер, а более удаленные становятся симметричными [3]. Более подробно характер тензора восприимчивости рассматривается далее в главе 5.

1.1.4. Замечание о нелинейной динамической восприимчивости

Следует отметить, что представление тензора восприимчивости в виде (1.8)–(1.10) включает в себя процедуру линеаризации уравнения (1.5), то есть предполагает колебания намагниченности в чисто линейном режиме с весьма малой амплитудой. Однако, что в процессе ориентационного перехода (например, при движении доменной границы) вектор намагниченности может испытывать значительные отклонения от своей первоначальной ориентации, что ставит вопрос о нелинейном его поведении.

Распространение понятия динамической восприимчивости на нелинейные колебания намагниченности с помощью коэффициента между векторами намагниченности и поля в соотношении типа (1.7) с математической стороны встречает определенные трудности. Реализация такого решения в известной авторам настоящей монографии литературе в общем виде отсутствует. Однако позволим себе высказать некоторые наводящие соображения.

Так, запись по компонентам полного уравнения (1.5), по крайней мере в декартовой системе координат, приводит к нелинейной системе из трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными. Учет условия сохранения длины вектора намагниченности позволяет исключить одну из переменных, однако входящие в исходные уравнения произведения отдельных компонент намагниченности заменяются на произведения компонент намагниченности на квадратичные радикалы, что упрощением решения считать никак нельзя. Некоторые варианты решения подобных уравнений, в том числе в магнитоупругой среде, с помощью квадратичного приближения приведены в работах [19–30].

С другой стороны, очевидно, что вектор намагниченности даже при большой амплитуде переменного поля круговой поляризации должен прецессировать также по кругу. Так что какое-то соотношение между компонентами векторов намагниченности и поля типа (1.7) должно существовать. Можно предположить, что в данной ситуации определенные преимущества может дать переход к сферическим координатам. Заметим однако, что даже известный метод Смита–Сула [16, 17, 31–36], а также [3], реализуемый именно в сферической системе, все же включает в себя в качестве необходимого этапа линеаризацию и предположение о сохранении длины вектора намагниченности.

Следует однако указать на возможность получения приближенно, но довольно близкого к эксперименту, аналитического решения в случае, когда конус прецессии намагниченности развернут полностью на 90 градусов, то есть прецессия происходит уже не по конусу, а по плоскому диску.

Такое решение реализовано в работах [37–47], посвященных анализу ротационного магнетометра, предназначенного для измерения сверхслабых магнитных полей. В работах [48–55] для подобной ситуации выполнен анализ механизмов релаксации прецессии, в том числе их формирования за счет релаксации упругих колебаний подложки. Однако справедливости ради стоит указать, что, несмотря на ряд интересных полученных результатов, в последнем случае анализ выполнялся уже численными методами на основе решения задачи о возбуждении гиперзвука в нормально намагниченной ферритовой пластине (или в пленке на подложке) [56–65].

Таким образом, по мнению авторов настоящей монографии, задача о представлении нелинейной динамической восприимчивости в виде (1.7), будучи достаточно интересной, все же еще ожидает определенных усилий новых исследователей.

1.1.5. Некоторые особенности ферромагнитного резонанса в нелинейном режиме

Настоящая монография посвящена рассмотрению волновых процессов в магнитных средах в чисто линейном режиме, то есть при достаточно малых амплитудах колебаний намагниченности. При этом предполагается, что угол раскрытия конуса прецессии вектора намагниченности не превышает единиц градусов.

Однако в анизотропной среде и тем более в условиях ориентационного перехода вектор намагниченности может поворачиваться на значительные углы вплоть до 90 градусов и более, а внутри доменной границы испытывает поворот на 180 градусов. В условиях ориентационного перехода ферромагнитный резонанс может приобретать существенно нелинейный характер, проявляющийся в прецессии уже не самого вектора намагниченности, а его равновесного положения. Именно такой нелинейной прецессии посвящены две последние главы монографии [3]. В этом свете авторы настоящей монографии, с целью полноты картины, сочли целесообразным включить в настоящую главу краткий обзор основных работ, касающихся нелинейного ферромагнитного резонанса и сопутствующих ему волновых процессов.

Исследованию СВЧ нелинейных явлений в ферритах посвящено значительное количество работ, частично обобщенных в [15–17, 66–69]. Подробно изучены как стабильные нелинейные процессы — умножение и преобразование частоты, детектирование, генерирование и усиление электромагнитных сигналов [15, 16], так и разнообразные нестабильности, связанные в первую очередь с параметрическим возбуждением обменных спиновых волн [17, 66–69].

С введением в практику материалов с рекордно низкими потерями, в первую очередь железиттриевого граната (ЖИГ) [15–17], было установлено, что нестабильные нелинейные явления возникают уже при крайне малых амплитудах прецессии намагниченности, когда угол отклонения вектора намагниченности от равновесного положения не превышает одного-двух градусов [66]. В этом случае развитие спин-волновых неустойчивостей затрудняет проявление других нелинейных процессов, реализуемых при отклонении намагниченности на большие углы. По-видимому, единственной возможностью для реализации больших углов прецессии является использование ферритовой пленки (пластины), намагниченной перпендикулярно ее плоскости, когда частота однородной моды ферромагнитного резонанса (ФМР) приходится на нижнюю границу (дно) спектра обменных спиновых волн, вследствие чего их параметрическое возбуждение становится невозможным. В эксперименте такие условия были реализованы в работах [70–73], из которых косвенно можно судить о возможности достижения углов прецессии до 20–25 градусов и более без какого-либо возбуждения обменных спиновых волн.

Возможность реализации высокоамплитудной прецессии в эксперименте породило значительное количество теоретических работ [74–80], рассматривающих различные нелинейные режимы прецессии намагниченности. Были выявлены как стохастические, так и сложные регулярные, в том числе автоколебательные режимы прецессии, рассмотрены статические и динамические бистабильности, приводящие к динамическому перемагничиванию пленки, построены бифуркационные диаграммы, демонстрирующие широкие возможности управления нелинейной динамикой намагниченности в тонкопленочных структурах посредством изменения внешних магнитных полей.

В работах [19–30] в такой же геометрии рассмотрены различные режимы нелинейных колебаний в ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. В работах [56–60], относящихся к той же геометрии, показана возможность возбуждения колебаний мощного гиперзвука.

В работах [81–87], в монографии [88] и развивающих ее работах [89–106], в наиболее полной степени (за исключением эффектов, связанных с магнитоупругостью), обобщенных в последних двух главах монографии [3], выбор той же геометрии позволил предсказать возможность реализации такого существенно нелинейного явления как прецессия положения равновесия намагниченности, отличающегося большим разнообразием режимов, в том числе в анизотропной среде.

1.2. Волны в магнитных средах

Гиротропный характер явления ферромагнитного резонанса сразу после его открытия (уже в пятидесятых годах XX века) породил разработку и создание многочисленных видов узкополосных и невзаимных устройств СВЧ диапазона, использующих электромагнитные волны (ЭМВ). Высокий интерес к таким применениям был обусловлен в те годы бурным развитием волноводной техники связи, радиолокации, радионавигации, телевидения, где использование таких устройств обеспечивало успешную развязку соседствующих каналов, в том числе приемных и передающих, а также успешную экранировку и выделение слабых сигналов из шума. На основе ферритов были разработаны многочисленные конструкции перестраиваемых фильтров, вентилях, мостов, фазовращателей, циркуляторов, в том числе с использованием эффекта Фарадея, смещения поля в прямоугольном волноводе, многоплечевого разветвления и других эффектов, в основе которых лежало явление ФМР. Подробный обзор подобных применений, в том числе с определенными физическими сведениями, начиная с кристаллической структуры ферритов и до их резонансных свойств, можно найти в монографии [107]. Многочисленные аспекты физики распространения электромагнитных волн в волноводах, содержащих ферриты, рассматриваются в [108]. Технология выращивания монокристаллов ферритов, в том числе в техническом аспекте, освещена

в монографии [109]. Энергетические соотношения, касающиеся распространения волн в волноводах, полностью или частично заполненных ферритом, можно найти в последовательно развивающих друг друга монографиях [15–17]. Довольно удобное с методической стороны при первоначальном изучении вопроса описание распространения электромагнитных волн в гиромагнитных средах содержится в монографии [110].

Перечисленные выше источники, в том числе содержащаяся в них обширная библиография, относятся в первую очередь к объемным образцам ферритов. С другой стороны, в те же пятидесятые годы началось активное исследование СВЧ резонансных свойств магнитных, сначала металлических, а затем и ферритовых тонких пленок. Физические основы не только СВЧ резонансных, но и общих динамических свойств металлических магнитных пленок, в том числе в условиях ориентационных переходов, содержатся в обобщающей монографии [111]. Ближе к этим вопросам примыкает также монография [112].

Особенный всплеск изучения волновых процессов в ферритах произошел после открытия железоиттриевого граната (ЖИГ), обладающего в диапазоне СВЧ рекордно низкими магнитными потерями. Так, если до того распространенные лучшие ферритовые материалы (например, ферриты-шпинели и другие [107]) имели ширину линии ФМР по полю не менее 20, а то и 50–100 Э, то железоиттриевый гранат обеспечивал ширину линии менее 1 Э [112, 113]. Столь малая ширина линии позволила выявить дискретный характер частотных свойств ФМР в ограниченных образцах, обусловленный возбуждением неоднородных магнитостатических типов прецессии [114].

1.2.1. Магнитостатические волны в ферритах

Вслед за исследованиями собственно ферромагнитного резонанса, последовало открытие в ЖИГ возможности возбуждения достаточно коротких по сравнению с ЭМВ магнитостатических волн (МСВ), что обусловило создание малогабаритных линий задержки СВЧ диапазона [115, 116]. Это обстоятельство стимулировало множество работ по изучению свойств магнитостатических волн, некоторое обобщение которых можно найти, например, в обзорах [117, 118].

Теоретическая интерпретация существования магнитостатических волн в ферритах, в первую очередь объяснения их дисперсионных свойств, была дана в классической работе [119]. Интерпретация возбуждения таких волн путем преобразования из ЭМВ на неоднородности поля была дана в работах [118–122].

Эти открытия, а также использование пленок позволили реализовать множество малогабаритных ферритовых устройств уже на основе не волноводной, а полосковой и микрополосковой техники. Широкое разнообразие таких устройств, начиная с фильтров и кончая линиями задержки и микрополосковыми циркуляторами, нашло свое отражение в многочисленных обзорах, среди которых можно указать [123–129].

Подробное описание свойств и применения магнитостатических волн в электронике сверхвысоких частот, в том числе с учетом неколлинеарности фазовой и групповой скоростей МСВ при планарном распространении в плоскости пленки ЖИГ, содержится в учебно-обзорной монографии [130].

1.2.2. Волны в магнетиках в рамках общей электродинамики

Наряду с изучением магнитостатических волн на основе работы [119], развивалась теоретическая интерпретация распространения тех же волн в рамках не магнитостатического приближения, а уже с точки зрения общей электродинамики, позволяющей учесть электрическую составляющую поля волны. Среди таких работ следует отметить [131–143]. Была выявлена важность учета электрической составляющей, особенно при рассмотрении потоков энергии прямой и обратной волн. Рассчитано влияние подложки, полупространств с отрицательной диэлектрической проницаемостью, магнитной стенки. Эти работы в значительной степени были обобщены в диссертации [144].

Некоторые вопросы дисперсии как магнитостатических, так и электромагнитных волн в магнитной среде, в том числе в условиях ориентационного перехода, рассмотрены далее в главах 5–7, а также 12–15 настоящей монографии.

1.2.3. Магнитостатические волны в неоднородных полях

Еще в 1965 году появилась первая работа, указывающая на неколлинеарность фазовой и групповой скоростей МСВ, а также установившая искривление траекторий МСВ в неоднородном поле [145]. Развитие этой работы [146] позволило рассчитать траектории МСВ в неоднородном поле, создаваемом размагничивающими факторами образца.

Экспериментальное наблюдение распространения поверхностных МСВ (ПМСВ) в создаваемых искусственно неоднородных полях различных типов описано в работах [147–151]. Теоретическое рассмотрение траекторий волновых пучков ПМСВ в неоднородных полях различных конфигураций выполнено в работах [152–156].

Для дальнейшего более подробного ознакомления с вопросами, касающимися распространения МСВ в неоднородных полях, авторы данной монографии рекомендуют обратиться к первой монографии настоящей серии [1].

1.2.4. Излучение электромагнитных волн из феррита

Отдельно следует отметить вопрос об излучении электромагнитных волн, имеющем место при распространении поверхностных магнитостатических волн в линейно возрастающем поперечном магнитном поле. При таком распространении длина МСВ постепенно увеличивается, приближаясь к длине ЭМВ в свободном пространстве, в результате чего энергия МСВ преобразуется в энергию ЭМВ, что и проявляет

себя как излучение электромагнитных волн из феррита в свободное пространство.

О первом наблюдении такого излучения в эксперименте сообщалось в работе [153]. Дальнейшее экспериментальное исследование позволило выявить пространственное распределение энергии ЭМВ, в том числе определить диаграмму направленности [157–160].

Первая теоретическая интерпретация подобного явления, в том числе расчет диаграммы направленности, основанная на модели ускоренного движения магнитных зарядов, была представлена в работах [161–164]. Дальнейшее развитие эта интерпретация получила в работах [165–184]. Наиболее полная интерпретация явления излучения на основе модели ускоренного движения магнитных зарядов, в том числе подробный расчет диаграмм направленности различных видов, обобщены во второй монографии настоящей серии [2].

В работе [185] была предложена другая интерпретация, основанная на модели распространения волны в волноводе с плавно меняющимися по длине параметрами [186]. Некоторые вопросы интерпретации излучения на основе этой второй модели отражены в работе [144].

1.2.5. Магнитоэлектронные волны в диссипативных средах

Во всех перечисленных выше работах потери энергии при распространении волн, как правило, не рассматриваются. В экспериментальных работах условия эксперимента выбираются так, чтобы затухание волны не мешало исследованию ее основных свойств. Теоретические работы основываются на решении уравнения Ландау–Лифшица (1.5) без диссипативного члена, то есть в предположении $\alpha = 0$.

Уменьшение амплитуды волны в процессе распространения учитывается только в задачах об излучении [161–164], обобщенных в [2], где такое уменьшение предполагается происходящим за счет преобразования энергии магнитоэлектронных волн в энергию электромагнитных. Более или менее последовательное рассмотрение распространения поверхностных МСВ (ПМСВ) в диссипативной среде выполнено в работах [187, 188]. Показано, что спектр ПМСВ имеет ограничение сверху по волновому числу, тем более ярко выраженное, чем параметр затухания α больше. Некоторые дисперсионные свойства МСВ в таких условиях рассмотрены в работах [189–191]. В работе [192] построена трехмерная дисперсионная поверхность для различных направлений распространения ПМСВ по плоскости пленки. В работе [193] рассмотрены особенности законов дисперсии ПМСВ в диссипативных структурах, содержащих сверхпроводник. Наиболее подробное рассмотрение этого вопроса (исключая влияние сверхпроводника), в том числе проведение аналогии между ограничением спектра ПМСВ с явлением аномальной дисперсии в оптике, выполнено в работах [194–197]. Более подробному рассмотрению этого вопроса авторы предполагают посвятить отдельную монографию.

1.3. Ориентационные переходы

В классическом понимании ориентационный переход представляет собой изменение ориентации вектора намагниченности в процессе перехода от одного устойчивого положения к другому. Каждое устойчивое положение соответствует минимуму энергии магнетика. В отсутствие внешнего поля минимум энергии определяется свойствами магнетика как такового, в первую очередь магнитной анизотропией, магнитоупругим взаимодействием и размагничиванием формы. Приложение внешнего поля деформирует минимум энергии, что приводит к изменению равновесной ориентации намагниченности. В таком изменении ориентации и состоит ориентационный переход. Поскольку в процессе перехода суммарная плотность энергии принимает новое значение, то и условия динамических процессов, представляющих собой колебания вокруг равновесного положения, также изменяются. Так, частота ферромагнитного резонанса принимает новое значение, и законы дисперсии распространяющихся волн также деформируются. Рассмотрим кратко основные факторы перечисленных явлений.

1.3.1. Общие свойства ориентационных переходов

Исследованию общих свойств ориентационных переходов посвящено значительное количество работ, часть из которых цитируется и кратко обсуждается в третьей монографии настоящей серии [3]. Среди других более или менее подробных, хотя и несколько специфических обзоров следует отметить [198–200]. Основные положения теоретической интерпретации, как ориентационных переходов, так и сопровождающих их фазовых переходов второго рода, можно найти в обзорных монографиях [201–205].

1.3.2. Доменная структура при ориентационных переходах

Доменная структура при ориентационных переходах изучались главным образом с целью измерения параметров магнитной анизотропии, как одноосной, так и кубической в пленках смешанных ферритов-гранатов, применявшихся для создания устройств памяти на цилиндрических магнитных доменах (ЦМД) [206–211]. Особенности поведения периода доменной структуры вблизи фазового перехода второго рода рассматривались в работах [212, 213]. Некоторые вопросы подобного поведения частично обобщены в работе [36]. Доменная структура одноосных ферромагнетиков с точкой компенсации исследовалась в работе [214]. Была продемонстрирована возможность существования доменов в сильных магнитных полях вплоть до десятков килоэрстед. В работе [215] рассматривались некоторые вопросы поведения доменов при ориентационных переходах в интерметаллидах.

Некоторые вопросы динамического перемагничивания в сложных структурах, в том числе многослойных и скрещенных дипольных решетках, рассматривались в работах [216, 217].

Нелинейная динамика намагниченности в условиях переориентации, в том числе с учетом магнитоупругих свойств среды, рассматривалась в работах [58, 65, 89, 218].

Нелинейная прецессия равновесного положения вектора намагниченности, то есть как бы «прецессия второго порядка» в условиях ориентационного перехода, рассматривалась в третьей монографии настоящей серии [3], а также в опубликованной ранее монографии [88]. Некоторым вопросам такой прецессии в магнитоупругой среде посвящены работы [87, 98, 106]. Более подробному рассмотрению магнитоупругих эффектов в условиях ориентационных переходов авторы предполагают посвятить одну из дальнейших монографий настоящей серии.

1.3.3. Ферромагнитный резонанс в анизотропной среде

Анизотропный характер большинства магнитных сред обусловил многочисленные исследования динамических явлений в таких средах, в первую очередь ферромагнитного резонанса.

Особенно подробно резонансные явления исследовались в монокристаллах железоиттриевого граната (ЖИГ), обладающих кубической симметрией [15–17], в первую очередь благодаря его крайне низким потерям.

Линейный ФМР широко исследовался в анизотропных пленках с кубической симметрией, в первую очередь ферритов-гранатов ($R_3Fe_5O_{12}$, где R — иттрий или редкоземельный металл) [33–36, 219–227] и ферритов-шпинелей (RFe_2O_4 , где R — немагнитный металл) [228]. В работах [33–36] приведены результаты исследования ФМР в пленках смешанных ферритов-гранатов, обладающих одновременно кубической и достаточно сильной одноосной анизотропией, в том числе в условиях значительного отклонения оси анизотропии от нормали к плоскости пленки [229].

К числу важнейших пионерских работ следует отнести статью Смита и Бельерса [31], экспериментально исследовавших ФМР в условиях ориентационного перехода в сильно анизотропном гексаферрите бария ($BaFe_{12}O_{19}$). Измерения были выполнены на частоте 23,9 ГГц в поле до 25 кЭ. Поле одноосной анизотропии в исследованном материале составляло 17 кЭ, что соответствует частоте естественного резонанса около 50 ГГц. Намагничивание осуществлялось по нормали к оси анизотропии, причем в эксперименте было отмечено значительное снижение резонансной частоты при приближении ориентации вектора намагниченности к направлению поля (условия «мягкой моды» [198]). Расчет резонансной частоты был выполнен с использованием уравнения Ландау–Лифшица, записанного в сферической системе координат (метод Смита–Сула) [16, 17]. Подробный вывод формулы Смита–Сула приведен в третьей монографии настоящей серии [3].

В связи с работами по использованию цилиндрических магнитных доменов (ЦМД) для устройств памяти [230–238] предпринимались исследования резонансных свойств материалов с сильной одноосной

анизотропией, в том числе ортоферритов и смешанных ферритов-гранатов [33–36].

В монографии [235] приведены три основные задачи, решавшиеся применительно к таким устройствам через посредство ФМР: детектирование ЦМД, зарождение ЦМД, давление на стенку ЦМД.

Общие фундаментальные свойства ФМР в анизотропных магнетиках и антиферромагнетиках рассматривались в многочисленных обзорах, и монографиях, из которых следует упомянуть [16, 17, 239–241]. Последние два обзора в значительной степени затрагивают не только однородный ФМР, но и волновые процессы как дипольного, так и обменного характера, в том числе в средах, обладающих магнитоупругостью.

Некоторые вопросы ферромагнитного резонанса в анизотропной среде, обладающей доменной структурой, в том числе в условиях ориентационного перехода, рассмотрены далее в главе 13 настоящей монографии

1.3.4. Частотная щель в спектре ферромагнитного резонанса

К числу особенностей динамических явлений, связанных с анизотропией, следует отнести наличие значительной энергетической щели в резонансном спектре антиферромагнетиков со слабым ферромагнетизмом [242, 243]. Согласно общепринятой трактовке [242, 243] причиной такой щели являются спонтанные деформации среды за счет магнитоупругого взаимодействия. Величина щели, например, в гематите ($\alpha - \text{Fe}_2\text{O}_3$) составляет около 10 ГГц, так что для наблюдения ФМР нужны довольно значительные магнитные поля.

Существование такой щели приводит к весьма сильной зависимости скорости упругой волны от магнитного поля, даже в слабых полях от 0,5 до 2000 Э, составляющей 20 % от исходной величины [36, 244–247].

Согласно исторически первой теоретической модели [36, 244, 245] (построенной независимо несколько позже в [246]), в отсутствие щели скорость упругой волны по мере роста поля плавно увеличивается, однако в обычных ферромагнетиках в поле до десятков килоэрстед такое увеличение незначительно и не превышает долей процента. В слабых ферромагнетиках, в присутствии энергетической щели магнитоупругого характера, внешнее поле умножается на коэффициент, равный отношению поля Дзялошинского к полю обмена, который составляет порядка 10^{-3} , так что начальный участок резкого роста скорости упругой волны по полю сильно растягивается. Такое растяжение приходится как раз на реально наблюдаемые в эксперименте поля порядка нескольких тысяч эрстед, что и выглядит как сильная зависимость скорости упругой волны от поля.

В последовавшей позднее другой теоретической модели [248] было показано, что в малом поле намагниченность слабого ферромагнетика претерпевает фазовый переход второго рода, сопровождаемый

«размягчением» системы, вследствие чего скорость упругой волны стремится к нулю. Заметим однако, что в эксперименте подобное приближение скорости упругой волны к нулю не наблюдалось, по-видимому, из-за мешающего действия доменной структуры.

Дальнейшее развитие эти исследования получили в многочисленных работах, в том числе посвященных ортоферритам [249], поверхностным волнам Рэлея [250], параметрическому возбуждению упругих волн в окрестности точек фазовых переходов [251], часть из которых была обобщена в обзоре [240].

В настоящей монографии вопрос о щели в спектре ФМР будет затронут в главе 13.

Выводы по главе 1

Данная глава посвящена обзору литературы, касающейся основного математического аппарата и некоторых экспериментальных результатов, отражающих свойства ферромагнитного резонанса и магнитостатических волн в магнитных средах.

Основные результаты, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. На основе решения основного уравнения динамики намагниченности — уравнения Ландау–Лифшица с диссипативным членом в форме Гильберта, получен тензор динамической магнитной восприимчивости, отражающий основные свойства ферромагнитного резонанса в гиромагнитной среде в рамках линейного приближения.

2. Рассмотрена постановка задачи о нелинейной динамической восприимчивости, отмечена недостаточность ее решения в аналитическом виде, приведены ссылки на использование численных методов.

3. Выполнен краткий обзор основных работ, касающихся нелинейного ферромагнитного резонанса и сопутствующих ему волновых процессов. Отмечено, что условием исключения параметрического возбуждения обменных спиновых волн, нарушающих стационарную прецессию намагниченности, является выбор геометрии волноведущей структуры в виде тонкой пластины, намагниченной по нормали к ее плоскости. Приведены условия реализации такого существенно нелинейного явления, как прецессия положения равновесия намагниченности, отличающейся большим разнообразием как стационарных, так и нестационарных режимов, в том числе в анизотропной среде.

4. Отмечена важность применения волновых процессов в магнитной среде для разработки и создания многочисленных видов узкополосных и невзаимных устройств СВЧ диапазона, в том числе малогабаритных линий задержки, использующих короткие магнитостатические волны. Важным применением можно считать использование магнитостатических волн, распространяющихся в условиях неоднородного намагничивания, что существенно расширяет функциональные возможности традиционных устройств, использующих однородное поле.

5. Рассмотрен вопрос об излучении электромагнитных волн, имеющем место при распространении поверхностных магнитостатических волн в линейно возрастающем поперечном магнитном поле. Приведены данные о теоретической интерпретации такого явления, основанной на модели ускоренного движения магнитных зарядов. Отмечена высокая эффективность применения этой модели для расчета диаграммы направленности излучения.

6. Приведены результаты основных работ, касающихся влияния диссипации на дисперсионные свойства магнитостатических волн. Отмечено ограничение спектра магнитостатических волн сверху по волновому числу, а также аналогия наблюдаемых явлений с аномальной дисперсией света, известной в оптике.

7. Кратко отмечены некоторые свойства ориентационных переходов при изменении намагниченности. Рассмотрен ферромагнитный резонанс в анизотропной среде, находящейся в условиях ориентационного перехода.

8. В качестве важнейшей особенности динамических явлений в магнетике, связанных с анизотропией, отмечено наличие значительной энергетической щели в резонансном спектре некоторых материалов. Упомянута магнитоупругая природа щели и ее значительное влияние на скорость распространения упругих волн в условиях ориентационного перехода.

Глава 2

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ДОМЕННЫХ ГРАНИЦ И ДОМЕННОЙ СТРУКТУРЫ В МАГНЕТИКАХ (ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ)

Традиционное рассмотрение ориентационного перехода в магнетике обычно касается не только случая безграничной среды, но и участия в переходе доменной структуры [198]. При этом по обе стороны от доменной границы равновесная ориентация векторов намагниченности различна, причем внутри самих доменов того и другого знака распределение намагниченности можно считать однородным. В пределах же доменной границы на сравнительно небольшом расстоянии ориентация намагниченности меняется значительным образом. Таким образом можно считать, что внутри границы локальная намагниченность пребывает в условиях ориентационного перехода. То есть рассмотрение ферромагнитного резонанса и волновых процессов в условиях ориентационного перехода без учета доменной структуры было бы в определенной степени неполным. Поэтому здесь остановимся кратко на основных положениях, касающихся физики доменной структуры.

Перекрытие с обзорами, приведенными в предыдущих монографиях настоящей серии [1–3], в основном, отсутствует, однако некоторые приведенные там сведения здесь повторяются в меру необходимости для последующего рассмотрения вопросов данной монографии.

В обзоре по ходу изложения приведены ссылки на оригинальные разделы монографии, развивающие рассматриваемые положения.

2.1. Общая картина образования доменной структуры

В размагниченом состоянии любой состоящий из магнитного материала ограниченный образец достаточного размера разбивается на домены. Образование доменов обусловлено стремлением к минимуму полной магнитной энергии образца, в простейшем случае состоящей из энергии поля, создаваемого распределением намагниченности образца, а также энергии доменных границ. В образце с одноосной магнитной анизотропией вектор намагниченности стремится ориентироваться вдоль оси анизотропии в одном из двух допустимых направлениях (в положительном или отрицательном направлении этой оси). Если границы образца пересекают направление оси анизотропии, то при

выходе намагниченности на поверхность образца возникает «вылезавшее» из образца магнитное поле. В отсутствие доменов энергия этого поля может быть достаточно велика. Требование минимизации энергии (общий закон достижения равновесия) вызывает стремление вектора намагниченности изменить свое направление, чтобы создаваемое им поле уменьшилось. То есть пространственное распределение вектора намагниченности стремится стать неоднородным. Однако произвольному нарушению однородности распределения намагниченности мешает обменное взаимодействие, требующее единства ориентации намагниченности в возможно большем объеме. То есть при нарушении однородности распределения намагниченности магнитная энергия увеличивается. Компромисс из создавшегося противоречия является разбиение образца на достаточно крупные области (домены) с однородным намагничиванием, разделенные тонкими прослойками (доменными границами), в пределах которых ориентация намагниченности меняется достаточно резко. При этом внутри доменов намагниченность ориентируется вдоль оси анизотропии в двух допустимых направлениях, а внутри доменных границ свое направление довольно резко изменяет. Благодаря противоположным ориентациям намагниченности в соседствующих доменах, поле, обусловленное выходом намагниченности на поверхность образца («вылезавшее»), разбивается на мелкие участки, соответствующие размерам доменов. При этом суммарная энергия поля по сравнению с однородным намагничиванием значительно уменьшается. Однако резкое изменение ориентации намагниченности внутри доменных границ создает дополнительную энергию, обусловленную отклонением намагниченности от оси анизотропии и ростом обменной энергии из-за нарушения однородности распределения той же намагниченности. Компромисс между уменьшением энергии выходящего за поверхность образца поля и ее увеличением за счет образования доменных границ разрешается установлением определенного равновесного размера доменов.

Такова в простейшем виде схема образования доменной структуры внутри ограниченного образца. Под действием внешнего поля размер и форма доменов изменяются, что также обусловлено стремлением к минимуму полной энергии, только теперь к энергии «вылезавшего» из образца поля и энергии доменных границ добавляется еще энергия взаимодействия намагниченности с внешним полем. В магнитоупругой среде добавляется еще энергия магнитоупругого взаимодействия, а также и упругая энергия. При наличии в образце нескольких осей магнитной анизотропии, распределение намагниченности становится более сложным, причем теперь намагниченность может не выходить на поверхность образца, то есть не создавать «вылезавшего» поля, а замыкаться внутри через посредство «замыкающих» доменов. Внутри таких доменов намагниченность может ориентироваться как вдоль, так и под какими-то углами к осям анизотропии. Более подробно

с вопросами образования доменной структуры, в том числе о конфигурации замыкающих доменов и роли магнитоупругого взаимодействия можно познакомиться по фундаментальной монографии [12].

2.1.1. Соотношение доменной структуры с ориентационным переходом

Внутри доменной границы вектор намагниченности резко поворачивается от одного устойчивого положения до другого. При движении границы место локализации такого поворота также перемещается. То есть теперь уже происходит динамический поворот вектора намагниченности от одного устойчивого положения до другого. Можно считать, что явления соответствуют ориентационному переходу, статическому или динамическому, локализуемому в пределах доменной границы. При этом по обе стороны от доменной границы пространственное распределение намагниченности остается однородным, то есть в обоих случаях имеет место одна и та же коллинеарная фаза, различающаяся однако противоположным направлением намагниченности. То есть формально можно считать, что при перемещении доменной границы по образцу изменения фазы не происходит, так что фазовый переход как таковой места не имеет. Однако, такой формализм, по-видимому, можно считать правомерным лишь в приближении бесконечно тонких доменных границ. В самом деле, при приложении достаточно большого внешнего поля или при увеличении температуры выше точки Кюри, доменная структура исчезает, и образец становится намагниченным (или размагниченным) однородно. То есть сосуществование областей с двумя противоположными, хотя и однородными направлениями намагниченности заменяется на полностью однородное состояние образца. Такая замена происходит путем фазового перехода первого (при приложении поля вдоль равновесной ориентации намагниченности в доменах) или второго (при приложении поля поперек ориентации намагниченности или при повышении температуры) рода. Таким образом, в традиционном представлении фазовый переход при наличии или перемещении доменной границы не происходит, но ориентация вектора намагниченности внутри границы меняется, так что такое изменение ориентации намагниченности можно рассматривать как локализованный в пределах границы ориентационный переход.

Отличие от традиционного ориентационного перехода состоит в том, что в традиционном случае распределение намагниченности предполагается однородным во всем пространстве, тогда как здесь изменение ориентации намагниченности происходит локально, то есть является пространственно неоднородным.

2.1.2. Историческое развитие науки о доменах

Исследование доменов и различных видов доменных структур имеет почти вековую историю. Довольно подробное описание основных событий раннего этапа доменной эпопеи с многочисленными ссылками

можно найти, например, в [12, стр. 210–229]. Кратко перечислим основные вехи такого развития.

Исторически первым экспериментальным указанием на существование доменов традиционно считается обнаружение Баркгаузеном электрического шума, возникающего в надетой на железный стержень катушке при плавном перемагничивании этого стержня («скачки Баркгаузена» — 1919). Явно слышимый звуковой шум при перемагничивании железной проволоки, расположенной на тонкой медной мембране в устье звукоусиливающего рупора, отмечал Аркадьев (1927). Дальнейшее развитие исследования доменов пошло по пути анализа электрических импульсов, наблюдаемых при перемагничивании магнитных тел (Бозорт — 1929). Существенный рывок в исследовании доменных структур различных видов произошел при открытии метода порошковых фигур, позволившего наблюдать геометрическую конфигурацию доменов, выходящих на поверхность образца (Гамос, Тиссен — 1932, Битер — 1931, Акулов — 1932, 1934). Ссылки на упомянутые работы, как уже отмечалось, можно найти в [12].

Первой работой, позволившей теоретически интерпретировать структуру как доменов, так и доменных границ, по-видимому, является статья Ландау и Лифшица [14]. В этой статье было предложено распределение намагниченности внутри доменной границы в виде гиперболического тангенса по поперечной координате (так называемая «блочовская доменная граница»), а также рассмотрена конфигурация доменной структуры, содержащая замыкающие домены, наблюдавшиеся в эксперименте на образцах железа методом порошковых фигур. В этой же работе впервые было предложено динамическое уравнение движения вектора намагниченности (1.5), носящее название «уравнения Ландау–Лифшица».

Весьма удобным методом экспериментального исследования доменных структур явился магнитооптический, основанный на регистрации состояния намагниченности образца по эффектам Фарадея или Керра. Довольно подробное описание метода с привлечением многочисленных примеров и литературных ссылок можно найти, например, в монографии [252], в том числе с подробностями технологии материалов в [253, 254].

Применение метода к тонким пластинам из гексаферрита бария [231] позволило не только подробно исследовать конфигурацию линейных полосовых доменов, но и выявить их поведение, в том числе зависимость периода структуры от магнитного поля различных ориентаций. Дальнейшее развитие подобные исследования, в том числе с учетом одноосной и кубической анизотропии, получили в работах [255–257].

Огромное разнообразие наблюдавшихся в экспериментах на протяжении почти полувека статических доменных структур описано в книге [258].

2.1.3. Цилиндрические магнитные домены

Резкий рывок в исследовании доменных структур произошел в связи с открытием цилиндрических магнитных доменов (ЦМД), рассматриваемых как весьма перспективный материал для создания систем памяти вычислительной техники [259].

Вслед за первой работой, где была впервые наглядно продемонстрирована возможность использования ЦМД для создания цифровых индикаторов [230] последовала огромная лавина публикаций по статике и динамике ЦМД, частично обобщенная в многочисленных монографиях, из которых можно указать, например, [233–236], в том числе посвященные устройствам обработки информации [260–267].

Материалом для ЦМД явились сначала ортоферриты [230], а затем эпитаксиальные пленки смешанных ферритов-гранатов, обладающие сильной одноосной анизотропией, перпендикулярной плоскости пленки [206–212, 227–229, 233, 235, 268].

Теоретическое обоснование существования и устойчивости изолированных ЦМД было предложено в работах [232, 269, 270]. Были получены аналитические зависимости полей и характерных диаметров эллиптической неустойчивости и коллапса ЦМД от толщины пленки, нормированной на «характеристическую длину материала», определяемую отношением плотности энергии доменной границы к квадрату намагниченности насыщения. Краткий разбор этих работ можно найти, например, в [233, стр. 61–69]. Использование упомянутых зависимостей [233, стр. 67, рис. 2.3] для измерения параметров пленок приведено в [36, стр. 154–156].

Кроме изолированных доменов исследовались также регулярные, как правило, гексагональные решетки из ЦМД [271–276]. Наряду со статической устойчивостью решеток исследовались также коллективные динамические эффекты, в первую очередь распространение волн сдвига ЦМД [277, 278].

В ЦМД материалах, обладающих одноосной анизотропией, динамика доменов исследовалась также в железиттриевом гранате, имеющем четыре оси магнитной анизотропии типа [111]. Была выявлена решающая роль в подвижности доменных границ вертикальных блоховских линий, которые в этом материале возможно было наблюдать обычными магнитооптическими методами [279–281].

2.2. Динамические свойства доменных границ и отдельных доменов

Важнейшим вопросом, требовавшим разрешения для устройств памяти на ЦМД, являлось их быстродействие. С целью выявления динамических свойств как одиночных доменных границ, так и ЦМД в целом, были предприняты многочисленные исследования, частично обобщенные в цитированных выше монографиях [233–236].

2.2.1. Влияние структуры доменных границ на их динамические свойства

В результате подробного исследования схем продвижения (регистров сдвига) на ЦМД выяснилось, что часть ЦМД при приложении импульсного градиентного поля движется не в направлении градиента поля, а под значительным углом к нему (до 40–50 и более градусов). Такие ЦМД были названы «жесткими» (или «тяжелыми»), а их поведение было объяснено наличием внутри доменных границ «вертикальных блоховских линий», перпендикулярных плоскости пленки [282–287]. Для подавления таких линий, нарушавших работу устройств, было предложено применение касательного поля [23, 288–290, 36, стр. 90; 291, 292], ионная имплантация поверхности пленок [293, 294] и покрытие их тонким слоем пермаллоя [295], а также использование многослойных структур [296, 297].

Другим важным обстоятельством было открытие тонкой структуры блоховской доменной границы, в частности резкий разворот намагниченности вблизи поверхности пленки вдоль направления поля от одного домена до другого. Это явление было названо «скручиванием» доменной границы [298, 299], и оно оказало заметное влияние на ее динамические свойства.

2.2.2. Предельные скорости движения доменных границ

Наряду с исследованием динамики ЦМД как целого, значительное внимание было уделено динамическим свойствам уединенных доменных границ.

В первых теоретических работах [300, 301], а также в последовавшей позднее работе [302] было показано, что в процессе движения намагниченность внутри границы наклоняется к направлению движения, а когда наклон достигает 45 градусов, дальнейший рост скорости прекращается, то есть происходит насыщение или ограничение скорости. Уровень насыщения был довольно высоким: предельная скорость, так называемая «скорость Уокера» (который, согласно распространенной легенде, получил аналогичные выражения несколько ранее 1963 года, но не опубликовал их), составляла сотни и тысячи метров в секунду.

Однако в реальных экспериментах скорость насыщалась на значительно более низком уровне — порядка нескольких метров в секунду. Такое насыщение нашло свое объяснение в модели «горизонтальных блоховских линий» [298, 299], в процессе движения скрученной границы зарождавшихся на одной поверхности пленки и проходящих до другой, на что расходовалась значительная энергия. В работах [303–308] было показано, что такая затрата энергии приводит к ограничению скорости доменной границы на сравнительно невысоком уровне (метры в секунду), вследствие чего предельная скорость была названа по имени автора модели ограничения «скоростью Слончевского».

2.2.3. Эффект баллистического последействия

В экспериментах по продвижению ЦМД под действием импульсного поля было обнаружено, что домен продолжает двигаться еще некоторое время после окончания действия импульса, проходя расстояние, значительно превышающее его диаметр. Этот эффект, напоминающий движение домена по инерции, был назван «баллистическим последействием». Особенно эффективно такое движение оказалось возможным наблюдать лишь с помощью методов стробирования или высокоскоростной фотографии [235, стр. 58-62; 309–315]. В качестве возможной интерпретации последействия была предложена модель, согласно которой генерируемые в процессе движения ЦМД горизонтальные блоховские линии, после прохождения от одной поверхности пленки до другой, не исчезают, а вблизи этой другой поверхности накапливаются, создавая определенный запас энергии. После окончания действия импульса скопившиеся блоховские линии высвобождаются и движутся обратно к исходной поверхности, чем и вызывают инерционное движение цилиндрического домена [312]. Более подробно с эффектом «баллистического последействия», в том числе с многочисленными на него ссылками, можно познакомиться по монографии [235, стр. 294–303].

2.2.4. Динамика доменных границ при большой одноосной анизотропии

Следует заметить, что эффекты, связанные с генерацией горизонтальных блоховских линий, имеют в своей основе «скрученный» характер блоховской доменной границы. Такой характер имеет место только в условиях не очень большой одноосной анизотропии, так как большая анизотропия препятствует ориентации намагниченности вдоль плоскости пленки вблизи ее поверхности.

В пленках смешанных ферритов-гранатов, использовавшихся при исследовании ЦМД, одноосная анизотропия не является естественным свойством симметрии кристаллической структуры, а является «ростовой», то есть как бы «наведенной» в процессе роста пленок [235]. Некоторые характерные свойства такой анизотропии отражены в работах [33–36, 206–211, 227–229, 237]. Поле такой анизотропии обычно составляет не более нескольких сотен эрстед, редко достигая одной–двух тысяч. Поэтому величина такой искусственной анизотропии, как правило, недостаточна для устранения «скручивания» доменных границ.

Не так, однако, обстоит дело в материалах с большой одноосной магнитной анизотропией, обусловленной естественной симметрией кристаллической решетки. Характерными примерами таких материалов являются ортоферриты, где поле анизотропии при примерно такой же намагниченности, что и у ферритов-гранатов, измеряется многими десятками тысяч эрстед [235, стр. 25–26]. При столь большой анизотропии скручивание доменных границ отсутствует (или проявляется крайне слабо), так что механизм ограничения скорости за счет генерации горизонтальных блоховских линий не реализуется. В этом

случае ограничение скорости происходит не на уровне «скорости Слончевского», а на уровне «скорости Уокера», так что может достигать нескольких километров в секунду и более. В магнитоупругой среде определенное тормозящее действие на движущуюся доменную границу может оказывать возбуждение упругих или спиновых волн [316, 317]. В работе [318] рассмотрена динамика доменных стенок в орторомбических антиферромагнетиках вблизи предельной скорости, в том числе превышающей максимальную фазовую скорость спиновых волн на линейном участке их закона дисперсии.

Реализация таких скоростей позволяет наблюдать в эксперименте возбуждение упругих волн при достижении скорости доменной границы скорости звука в материале. То же касается возбуждения обменных спиновых волн, скорость которых может превышать скорость упругих волн до нескольких раз. Описание таких экспериментов, где отмечена скорость порядка 20 км/с и их интерпретация содержится в работах [319–327]. Следует заметить, что даже при малой анизотропии скручивание доменной границы может быть устранено путем приложения поля в плоскости пленки, что позволяет достичь довольно высоких скоростей движения границы. Такая возможность реализована в работе [328], выполненной на пленке смешанного феррита-граната, где достигнутая скорость более чем на два порядка превышает предел Слончевского (порядка 10 м/с) и составляет около 3 км/с.

В экспериментальных работах [329, 330] наблюдались динамические вихревые образования, сопровождающие квазирелятивистское движение доменной границы.

2.2.5. Эффект «кусочного» перемагничивания

Основным техническим приемом, позволяющим достичь высоких скоростей движения доменной границы, является приложение высокого импульсного поля. В этом случае фронт нарастания импульсов должен составлять единицы наносекунд, а величина поля — десятки и сотни эрстед. Такое поле создается маловитковой катушкой или короткозамкнутой полосковой линией, в которую подается сильный импульс тока [110, 235]. Пока импульсное поле имеет умеренную величину, доменная граница смещается как целое. Однако, когда поле превышает определенный предел, перемагничивание происходит уже не простым поступательным смещением границы, а резким переворотом намагниченности по площади довольно крупных областей, размер которых превышает ширину доменной границы на порядок и более. Такое «кусочное» перемагничивание впервые наблюдалось на металлических пленках [110], но впоследствии было обнаружено также на пленках ферритов-гранатов. Здесь следует отметить прежде всего формирование «кляксообразных» доменов, формирующихся из ЦМД за счет различия скоростей участков границы, содержащих то или иное количество вертикальных блоховских линий. Некоторые из таких явлений освещаются в работах [331]. Если граница в процессе движения

все же сохраняет более или менее прямолинейную форму (что говорит в пользу отсутствия в ней вертикальных блоховских линий), то при достижении определенного уровня возбуждения впереди границы происходит зарождение быстро растущих ограниченных образований обратной намагниченности. При приближении границы эти области вливаются в нее, в то время как впереди образуются новые подобные области, ожидающие прибытия границы. При наблюдении методом высокоскоростной фотографии впереди границы наблюдается картина как бы «кипения» мелких «пузырьков», которые расширяясь «вклиниваются» в границу, обеспечивая таким образом ее поступательное передвижение [332–337].

2.3. Динамика коллективов доменов

Кроме динамических явлений, сопровождающих движение одиночной доменной границы, значительное разнообразие имеет динамика коллективов доменов, прежде всего доменных решеток. Существовании волновых процессов в таких образованиях отмечено выше [277, 278]. Простая гексагональная решетка из круглых ЦМД может быть образована путем намагничивания пленки полем в ее плоскости. Если поле превышает поле анизотропии, то пленка намагничена однородно и доменная структура отсутствует. При уменьшении такого поля до величины, равной полю анизотропии, происходит фазовый переход: зарождение доменов двух противоположных знаков. В простейшем случае образуется линейная полосовая доменная структура [212, 213]. В случае некоторого отклонения оси анизотропии от нормали к плоскости пленки [206–211, 227–229, 237] вместо линейной полосовой структуры может образовываться правильная гексагональная решетка из ЦМД. Другим способом образования гексагональной решетки может явиться нагревание пленки выше температуры Кюри с последующим охлаждением.

2.3.1. Динамическая самоорганизация доменных решеток

В динамическом режиме кроме гексагональной решетки возможно формирование правильных решеток из гантелевидных, трехлепестковых и других доменов [338–341]. Такие решетки образуются под воздействием импульсного поля с различным наклоном фронтов импульсов. При этом сначала путем приложения постоянного поля, перпендикулярного плоскости пленки, на значительной площади пленки уничтожается какая-либо доменная структура, кроме небольших островков, содержащих зародыши противоположного знака, местоположение которых определяется микроскопическими флуктуациями параметров пленки. Далее постоянное поле снижается и включается импульсное специальной формы, в результате чего из островков формируются отдельные домены сложной формы (гантелевидные, многолепестковые и другие), постепенно заполняющие всю плоскость пленки. Процесс

носит статистический характер и требует для своего завершения десятков и сотен тысяч периодов импульсного поля. Имеет место как бы «самоорганизация» формирования решетки из доменов специальной формы. В работах [338–341] приведено значительное (около десятка) число вариантов симметрии сформированных подобным образом решеток. В работе [342, 343] показана возможность формирования самоорганизующейся решетки также и при гармоническом возбуждении, причем приведены еще несколько вариантов симметрии получающихся решеток.

2.3.2. Динамические доменные структуры

Кроме решеток и других структур, сохраняющих свою конфигурацию в статическом поле, в том числе при полном его отсутствии, в экспериментах наблюдаются структуры, существующие или формирующиеся только в продолжении динамического воздействия переменного или импульсного полей на магнитную пленку. Многочисленные виды таких динамических структур (спиральные и кольцевые домены, мигающие «звезды», радиальные структуры и другие), составляющие так называемое «ангерное состояние», описаны в обобщающей работе [344]. Процесс формирования, как правило, носит асинхронный статистический характер, причем по амплитуде, частоте и виду воздействия (синусоида, импульсы, меандр и другие), а также по времени самоорганизации и продолжительности жизни структур наблюдается значительное разнообразие [345–349]. Некоторые виды асинхронных структур и их динамического поведения были описаны также ранее в работе [36, стр. 94–99].

Следует заметить, что, несмотря на обилие экспериментальных работ, какая-либо более или менее серьезная теоретическая интерпретация как условий существования динамических доменных структур, так и возможных сценариев их формирования (кроме некоторых качественных соображений) на данный момент отсутствует, то есть требует усилий будущих исследователей (надо полагать, весьма немалых).

2.4. Колебательные и волновые процессы в магнетике с доменами

Наряду с исследованием статических и динамических свойств доменных границ и структур в целом широко исследовались также их резонансные свойства в широком диапазоне частот. Так, пионерская работа [14] была как раз предпринята для объяснения высокочастотной восприимчивости доменной структуры, для чего и было написано «уравнение Ландау–Лифшица» (1.5). В ходе экспериментальных исследований было выявлено, что по частотным свойствам динамические явления в доменных структурах можно разделить на три группы: низкочастотные колебания, резонанс доменных границ и ферромагнитный резонанс в доменах. Рассмотрим эти группы последовательно.

2.4.1. Низкочастотные колебания

Первая группа включает в себя сравнительно низкочастотные (до 10 МГц) синхронные колебания доменных границ, эквивалентные колебаниям осциллятора без массы (то есть без инерции) с сильным затуханием. Амплитудно-частотные характеристики таких колебаний имеют вид начального плоского участка, при повышении частоты переходящего в крутой спад без каких-либо следов резонанса. Частота середины спадающего участка, например, для пленок ферритов-гранатов составляет 0,5–2,0 МГц [36, стр. 83–91; 289, 294, 350–355]. Амплитуда колебаний, то есть величина смещений доменных границ в случае полосовой структуры может составлять более половины ширины доменов того и другого знаков. Такие колебания описываются дифференциальным уравнением первого порядка релаксационного типа [36, стр. 91]. Крутизна спада позволяет определить подвижность доменных границ, являющуюся коэффициентом при линейной зависимости скорости движения границы от величины продвигающего поля [235, 352].

2.4.2. Резонанс доменных границ

Вторая группа включает более высокочастотные свойства доменных границ, когда инерционность границы проявляет себя уже в заметной мере. Это — так называемый «резонанс доменных границ» (РДГ). При этом граница испытывает движение взад-вперед относительно своего равновесного положения, так что совершает как бы «трансляционные» колебания. Для интерпретации такого резонанса была предложена модель «массы» границы [15, стр. 130–132; 16, стр. 137–138; 17, стр. 244–246; 235, стр. 166–171; 356, 357, 358], так что здесь для описания колебаний уже можно использовать полное дифференциальное уравнение колебаний второго порядка. Амплитуда колебаний значительно меньше периода доменной структуры и в линейном режиме составляет не более десятой его части. Частота резонанса доменных границ для пленок смешанных ферритов-гранатов составляет 20–150 МГц. При увеличении амплитуды возбуждения колебания становятся сильно нелинейными и в некоторых случаях, например в железиттриевом гранате, могут приобретать ярко выраженный асинхронный скачкообразный характер [359], так что частота чередования скачков не превышает десятков килогерц при частоте возбуждения вплоть до единиц гигагерц.

Отдельное место занимают процессы возбуждения неоднородных трансляционных колебаний намагниченности внутри самих доменных границ, когда среднее положение границы не меняется. То есть граница испытывает как бы изгибные колебания трансляционного характера. Теоретическая интерпретация таких колебаний, представленная как возбуждение спиновых волн с учетом неоднородного обмена и поля размагничивания по длине границы (подобно вертикальным блоховским линиям [233, стр. 23]), содержится в работах [360; 361, стр. 166–174]. Большое значение имеют такие колебания при исследо-

вании ядерного магнитного резонанса в магнетиках, где они за счет намагниченности среды обеспечивают усиление сигнала резонансных колебаний собственно ядерных спинов на несколько порядков [361, стр. 14–16].

2.4.3. Ферромагнитный резонанс в доменной структуре

Третья группа включает в себя еще более высокочастотные колебания намагниченности, причем доменные границы здесь остаются в относительном покое, а намагниченность колеблется внутри самих доменов между границами [15–17]. Это — «ферромагнитный резонанс в доменной структуре», представляющий собой, как и обычный ферромагнитный резонанс, прецессию намагниченности в гиротропной среде вокруг равновесного положения, определяемого минимумом энергии. Поскольку прецессия намагниченности должна быть правой, то она происходит только в тех доменах, равновесное направление намагниченности в которых соответствует ее правому характеру. В простейшем случае структуры, содержащей домены двух знаков с противоположными направлениями намагниченности, возбуждение прецессии происходит в тех доменах, которые чередуются через один в соответствии с требованием правого характера прецессии. Резонансная частота такой прецессии определяется внутренними полями в доменах и связана с величинами намагниченности, поля анизотропии и внешнего поля, если таковое приложено. В более сложных случаях, например в магнитоупругой среде, частота также определяется внутренними упругими напряжениями структуры. В ряде случаев в спектре резонанса может иметь место щель, связанная со спонтанными деформациями [242, 243] или другими причинами. В пленках ферритов-гранатов частота такого резонанса, как правило, составляет единицы и десятки гигагерц.

Ферромагнитному резонансу в доменной структуре подобных материалов посвящено значительное число работ, частично обобщенных в [15–17]. В материалах с высокой анизотропией, в первую очередь в ортоферритах, частота резонанса может достигать десятков гигагерц [362]. Исследование резонансных свойств в ограниченных образцах позволяет сделать определенные выводы о конфигурации внутренней доменной структуры [363–370]. В пленках смешанных ферритов-гранатов возбуждение такого резонанса с достаточной амплитудой может явиться инструментом для генерации ЦМД [235, стр. 351–353; 371].

2.4.4. Магнитостатические волны в доменной структуре

Кроме ферромагнитного резонанса в образцах с доменами исследовались также волновые процессы, в первую очередь магнитостатические волны (МСВ).

Так, МСВ в пленках и пластинах ЖИГ с доменами исследовались в работах [372–377]. Работа [378] посвящена исследованию магнитоупругих волн в присутствии доменной структуры, работа [379] — МСВ в пленках субмикронной толщины с доменами, работа [380] — МСВ

при слабом подмагничивании. В работе [362] описан естественный связанный с доменными стенками резонанс в ортоферритах на субмиллиметровых волнах. В работе [381] предсказана возможность существования МСВ в пластинах ортоферритов с доменами. Нелинейные эффекты, сопровождающие распространение МСВ в пленке ЖИГ с доменами, рассмотрены в работе [382].

Некоторые особенности ферромагнитного резонанса и магнитостатических волн в доменах, в первую очередь в условиях ориентационного перехода, будут рассмотрены в главе 13.

Выводы по главе 2

Данная глава посвящена обзору литературы, касающейся общих свойств доменных границ и доменной структуры в магнитных средах.

Основные результаты, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрено общее условие существования доменной структуры, состоящее в стремлении к минимуму суммарной магнитной энергии образца, включающей в себя энергию внутреннего поля и энергию доменных границ. В качестве причины формирования достаточно узкой доменной границы использован компромисс между энергией неоднородного обмена и энергией магнитной анизотропии. При этом внутри доменов намагниченность ориентируется вдоль оси анизотропии в двух допустимых направлениях, а внутри доменных границ свое направление довольно резко изменяет.

2. Рассмотрено соотношение между доменной структурой и ориентационным переходом. Показано, что изменение ориентации намагниченности внутри границы можно рассматривать как локализованный в пределах границы ориентационный переход.

3. Приведен краткий исторический обзор развития науки о доменах. Отмечены его основные вехи, такие как наблюдение доменов по скачкам Баркгаузена и порошковым фигурам, визуализация пространственного распределения намагниченности по эффектам Фарадея и Керра, открытие цилиндрических магнитных доменов и построение на их основе устройств памяти, реализация сверхбыстрого движения доменных границ и наблюдение разнообразных динамических доменных структур.

4. Подробно рассмотрены свойства цилиндрических магнитных доменов. Отмечено теоретическое обоснование существования и устойчивости изолированного домена, в том числе связи полей эллиптической неустойчивости и коллапса с параметрами материала. Упомянута связь между условиями устойчивости домена и структурой его границы, в том числе с наличием в границе вертикальных блоховских линий. Приведены данные, касающиеся формирования периодических решеток из цилиндрических доменов.

5. Отмечено влияние структуры доменных границ на их динамические свойства. Рассмотрены результаты исследования предельной скорости движения изолированной доменной границы. В качестве механизма, ограничивающего эту скорость, представлена динамическая генерация горизонтальных блоховских линий. Упомянут эффект баллистического последействия, состоящий в инерционном движении домена после выключения продвигающего импульса.

6. Отмечена роль большой одноосной анизотропии в препятствии формированию горизонтальных блоховских линий, в результате чего скорость движения доменных границ увеличивается на несколько порядков, приближаясь к пределу релятивистского характера с последующей потерей устойчивости.

7. Упомянут эффект кусочного перемагничивания, состоящий в нестационарном формировании впереди движущейся доменной границы областей с противоположным направлением намагниченности. Отмечено разнообразие конфигураций формируемых структур, выявляемое методом высокоскоростной фотографии.

8. Рассмотрена динамика коллективов доменов, в первую очередь — формирование самоорганизующихся доменных решеток с различной степенью симметрии. Отмечено существование многочисленных видов динамических структур (спиральные и кольцевые домены, мигающие «звезды», радиальные структуры и другие), составляющие так называемое «ангерное состояние».

9. Рассмотрены колебательные и волновые процессы в магнетике с доменами. Описаны главные физические явления, такие как резонанс доменных границ, а также ферромагнитный резонанс и магнито-статические волны в образце с доменами. Отмечен особый характер ферромагнитного резонанса и магнитостатических волн в условиях ориентационного перехода.

Глава 3

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ СОЛИТОННОГО ТИПА (ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ)

Традиционное рассмотрение ориентационных переходов в магнетиках, как правило, ограничивается статическим или квазистатическим случаем, с распределением намагниченности, однородным по пространству [198]. С другой стороны, в пределах доменной границы ориентация намагниченности резко изменяется в весьма малой локальной области. При движении границы такая область изменения ориентации также перемещается, в основном сохраняя свою конфигурацию. В общей теории колебаний есть аналогичное динамическое изменение состояния волноведущей среды, представляющее собой движение локализованных в пространстве солитонов. Движущаяся доменная граница проявляет много общего с солитонами, поэтому рассмотрим вкратце основные положения физики солитонов.

Будем следовать [383–385]. Остальные необходимые ссылки указаны в тексте.

3.1. Доменная граница как область локализованного ориентационного перехода

Главным свойством, отличающим доменную границу от основного тела домена, является резкое изменение ориентации вектора намагниченности, происходящее в сравнительно небольшой по протяженности области пространства. При этом расстояние, на котором происходит изменение ориентации намагниченности, как правило, составляет доли микрона, тогда как ширина самих доменов может измеряться десятками, сотнями и даже тысячами микрон [12]. В стовосьмидесятиградусной границе ориентация вектора намагниченности меняется на противоположную, в девяностоградусной вектор намагниченности поворачивается соответственно на девяносто градусов. В других границах изменение ориентации может быть другим, однако во всех случаях факт локализации такого поворота намагниченности сохраняется. То есть можно полагать, что внутри границы вектор намагниченности находится в условиях ориентационного перехода, однако область перехода, в отличие от случая однородного намагничивания, здесь пространственно локализована, так что распределение намагниченности становится существенно неоднородным. Тем не менее, в неподвиж-

ной границе в каждой ее точке вектор намагниченности находится в равновесном состоянии, определяемом балансом между энергией анизотропии и неоднородного обмена, а в некоторых случаях также с учетом размагничивания и магнитоупругого взаимодействия. В движущейся границе, до тех пор пока ее профиль сохраняется, то есть при сравнительно умеренных скоростях, распределение намагниченности поступательно перемещается как целое, то есть вектор намагниченности в той точке пространства, куда граница дошла, претерпевает ориентационный переход, теперь уже динамический, то есть динамическим образом переходит от ориентации в одном домене к ориентации в другом.

3.1.1. Аналогия между доменной границей и солитоном

В простейшем случае статической блоховской границы распределение намагниченности описывается функцией типа гиперболического тангенса [12]. При движении границы такое распределение движется вместе с ней поступательным образом. То есть внешне картина полностью соответствует распространению одиночной волны типа солитона, описанного во множестве учебников [383, 384, 386].

С другой стороны, применение уравнения Ландау–Лифшица (1.5) для рассмотрения динамики намагниченности в движущейся границе позволяет получить решение волнового типа наподобие волны Даламбера в переменных типа $x \pm vt$ [10], предельное значение которого дает «скорость Уокера» [235, 300–302]. Волновое возмущение при этом также приближается к виду, описываемому гиперболическим тангенсом, которое теперь представляет собой спиновую волну одиночного характера, то есть солитонного типа.

Таким образом, можно полагать, что три таких различных явления как неподвижная доменная граница, движущаяся доменная граница и одиночная спиновая волна имеют сходную природу, так что могут быть описаны одинаковым или, по крайней мере, близким математическим аппаратом.

На сходство такого аппарата неоднократно указывалось в литературе, посвященной солитонам (см. напр. [383, стр. 144]). Более подробно на вопросе единства описания перечисленных явлений остановимся далее в главе 11, здесь же вкратце приведем некоторые сведения из теории солитонов, полезные для дальнейшего рассмотрения.

3.2. Уравнения, имеющие точные солитонные решения

Прежде чем перейти к описанию основных уравнений, имеющих точные солитонные решения, отметим, что первое наблюдение солитона, как уединенной волны, сохраняющей при распространении свою форму, принадлежит Джону Скотту Расселу, заметившему распространение «большой уединенной волны» при движении корабля в протяженном канале. Рассел подробно исследовал это явление, воспроизвел

его в многочисленных экспериментах и привел некоторые характеристики его физических свойств. Подробное описание открытия Рассела, в том числе со ссылками на его оригинальные работы с 1834 по 1886 год и кратким описанием биографии, можно найти в [387; 388, стр. 11, стр. 400–405].

С математической стороны, следуя [389], можно дать следующее определение солитона: «Солитон — решение нелинейного эволюционного уравнения, которое в каждый момент времени локализовано в некоторой области пространства, причем размеры области с течением времени остаются ограниченными, а движение центра области можно интерпретировать как движение частицы».

В настоящее время имеются три основных уравнения, позволяющие описать солитон как уединенную волну: уравнение Кортевега–де Фриза, нелинейное уравнение Шредингера и уравнение синус-Гордона [383, 385, 389]. Перечислим их, следуя порядку, принятому в [385, 389].

3.2.1. Уравнение Кортевега–де Фриза

Это уравнение имеет вид [389]

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (3.1)$$

Решение такого уравнения имеет вид

$$u(x, t) = 3v/\operatorname{ch}^2 [v^{1/2}(x - vt - x_0)/2] \quad (3.2)$$

и однозначно определяется двумя параметрами: скоростью $v > 0$ и положением максимума в фиксированный момент времени $t = 0$, $x = x_0$.

В любой заданный момент времени t_c решение этого уравнения $u(x, t_c)$ имеет колоколообразный вид. С течением времени такой «колокол», сохраняя свою форму, перемещается в пространстве со скоростью v в соответствии с волновой функцией Даламбера $u(x - vt)$. Именно такой солитон наблюдал Рассел [387; 388, стр. 14].

Вариант солитона Кортевега–де Фриза для цепочки дискретных элементов («цепочки Тоды») можно найти в [390, стр. 166].

Замечание. Приведенное здесь написание фамилии второго автора соответствует [385, 387, 388] однако в другой русскоязычной литературе иногда пишется «Вриза» [383], или «Фриса» [389], что, разумеется, одно и то же. В англоязычном варианте написание фамилий авторов уравнения (3.1) имеет вид: Korteweg D. J. de Vries G. [387, стр. 69, ссылка 1.7]. Полные фамилии с указанием страны происхождения также приведены в [387] на сноске внизу страницы 232. Можно полагать, что в англоязычной транскрипции буква «V» должна произноситься как «В» (то есть как в [383]), однако написание «Ф» является более распространенным [385, 387, 388], поэтому будем далее следовать написанию «Кортевега–де Фриза».

3.2.2. Нелинейное уравнение Шредингера

Это уравнение имеет вид [389]

$$i\psi_t = -\psi_{xx} - |\psi|^2\psi. \quad (3.3)$$

Решение этого уравнения однозначно определяется четырьмя параметрами (по два для действительной и мнимой составляющих). Решение имеет вид гиперболического косеканса (или обратной величины от гиперболического косинуса) [383, стр. 208]:

$$a = a_m \operatorname{sech}(\xi/\Delta), \quad (3.4)$$

где a и a_m — нормированные значения волновой функции и ее амплитуды, ξ — нормированная координата, а Δ — постоянная, пропорциональная резонансной частоте и обратно пропорциональная скорости распространения возмущения, т. е., подобно предыдущему случаю, представляет собой колоколообразную фигуру, перемещающуюся в соответствии с волновой переменной Даламбера.

Уравнение отличается от классического уравнения Шредингера [391, стр. 36, форм. (6.3)] вторым слагаемым в правой части, которое, собственно обуславливает его нелинейный характер. В отличие от линейного, это уравнение описывает также распространение волнового пакета в среде с дисперсией, нелинейные гравитационные волны на поверхности воды, лэнгмюровские волны в плазме, электромагнитные волны в нелинейном диэлектрике и многое другое [383, стр. 29].

3.2.3. Уравнение синус-Гордона

Это уравнение имеет вид [389]

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin \varphi = 0. \quad (3.5)$$

Приведенное в [389] решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = 4 \arctg \left[\exp(\pm(x - vt - x_0)) / \sqrt{1 - v^2} \right], \quad (3.6)$$

то есть определяется двумя параметрами v и x_0 :

Более подробное определение уравнения синус-Гордона, в сочетании с соответствующей задачей Коши, приведенное в [392], гласит: «Релятивистски инвариантное уравнение, в пространственно-временных переменных имеющее вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m^2 \sin u = 0. \quad (3.7)$$

Задача Коши для этого уравнения формулируется следующим образом [392]:

$$u|_{t=0} = u_1; \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_2; \quad (3.9)$$

при этом должны выполняться условия:

$$\frac{du_1}{dx} \in S(R^1); \quad (3.10)$$

$$u_2 \in S(R^1); \quad (3.11)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_1 = 0, \quad (3.12)$$

где $S(R^1)$ — пространство Шварца быстроубывающих функций [393].

В характеристических (светоподобных) переменных исходное уравнение (3.5) принимает вид [392]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma \partial \tau} + m^2 \sin u = 0. \quad (3.13)$$

В этой формулировке «светоподобными» названы переменные Даламбера типа $x \pm vt$.

Решение вида (3.6) описывает движение одного солитона, вид которого напоминает гиперболический тангенс, перемещающийся в соответствии с переменной Даламбера. Такое решение носит название «кинк», а подобное решение противоположного знака — «антикинк» [383, стр. 140]. Кроме такого «односолитонного» решения уравнение (3.5) имеет «многосолитонные» решения, описывающие распространение и взаимодействие нескольких кинков и антикинков. Удобный способ получения таких решений, если известно первое, дают преобразования Бэклунда [383, стр. 195–198].

Уравнению синус-Гордона посвящена обширная литература, среди которой, кроме [383], можно указать [387, 388, 394–397].

Перечисленными тремя уравнениями исчерпывается круг наиболее употребительных точно решаемых солитонных уравнений. Кроме этой классической тройки, имеется немало уравнений подобного типа, некоторые из которых являются «модификациями» приведенных. С некоторыми из таких уравнений можно кратко познакомиться по учебной монографии [383]. С целью некоторой полноты картины отметим здесь еще одно близкое к рассмотренным уравнение, носящее имя Клейна–Гордона.

3.2.4. Уравнение Клейна–Гордона

Иногда проводят параллель между принципиально одномерным уравнением синус-Гордона и трехмерным, но близким по структуре уравнением Клейна–Гордона, где синус заменяется на саму волновую функцию [398]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \mu^2 \right) \varphi = 0, \quad (3.14)$$

где c — скорость света, μ — постоянный параметр.

Согласно определению [398], уравнение Клейна–Гордона — релятивистски инвариантное квантовое уравнение, описывающее спиновые скалярные или псевдоскалярные частицы, например π -, K -мезоны.

Это уравнение может быть получено с помощью соотношения между энергией E и импульсом \mathbf{p} частицы в специальной теории относительности:

$$\frac{1}{2}E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2c^2 \quad (3.15)$$

путем замены величин операторами:

$$E \rightarrow -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}; \quad (3.16)$$

$$\mathbf{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}. \quad (3.17)$$

Уравнение Клейна–Гордона (3.14) описывает движение одной частицы, характеризуемой волновой функцией вероятностного характера. То есть такую функцию можно рассматривать как волновую функцию одиночного солитона. В некоторых случаях к такому решению также можно применить преобразование Бэклунда [387, стр. 25]. Более того, можно рассматривать «обобщенное уравнение Клейна–Гордона», где синус в уравнении синус-Гордона заменен на произвольную функцию от φ [385, стр. 467]. Тем не менее, уравнение синус-Гордона (3.7) является единственным в своем роде уравнением из семейства уравнений волнового типа, где под знаком синуса стоит произвольная функция от u , которое имеет решение в виде неизменного профиля с конечной энергией [387, стр. 33].

Более подробно с уравнением Клейна–Гордона (3.14), а также с классическим способом его решения для описания движения элементарной частицы можно ознакомиться, например, по учебной монографии [399, стр. 216–226], а также [400, 401].

Замечание. Следует заметить, что уравнение Клейна–Гордона обычно не включают в классическую тройку основных солитонных уравнений (3.1), (3.3) и (3.5), рассмотренных выше. Авторы настоящей монографии полагают (возможно, ошибочно), что причина такого обстоятельства состоит в том, что это уравнение описывает элементарную частицу, которая при встрече с другой подобной частицей как-то взаимодействует с ней, меняя свою конфигурацию или траекторию, тогда как солитоны, описываемые классическими уравнениями (3.1), (3.3) и (3.5), при встрече друг с другом свою конфигурацию и траекторию полностью сохраняют. За более подробным разъяснением этого вопроса, по-видимому, целесообразно обратиться к цитированным выше монографиям [385, 399–401].

3.2.5. Графическое представление решений основных солитонных уравнений

Рассмотрим в качестве иллюстрации графическое представление решений основных солитонных уравнений. Согласно общим положениям теории уравнений волнового типа [10, 11], переменные Даламбера вида $x \pm vt$ обеспечивают неизменность формы волновой функции при ее перемещении в пространстве. Поэтому, чтобы выявить эту форму

в наглядном виде достаточно рассмотреть зависимость решение от координаты x при $t = 0$.

Запишем решения уравнений (3.1), (3.3) и (3.5) в схематичном виде, выделяя только зависимость от координаты x . Так, решение уравнения Кортевега–де Фриза (3.2) принимает вид

$$u \propto \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (3.18)$$

из решения уравнения Шредингера (3.4) получаем

$$a \propto \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \quad (3.19)$$

решение уравнения синус-Гордона (3.6) дает

$$\varphi \propto \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}[\exp(x)], \quad (3.20)$$

где коэффициент $2/\pi$ введен для нормировки.

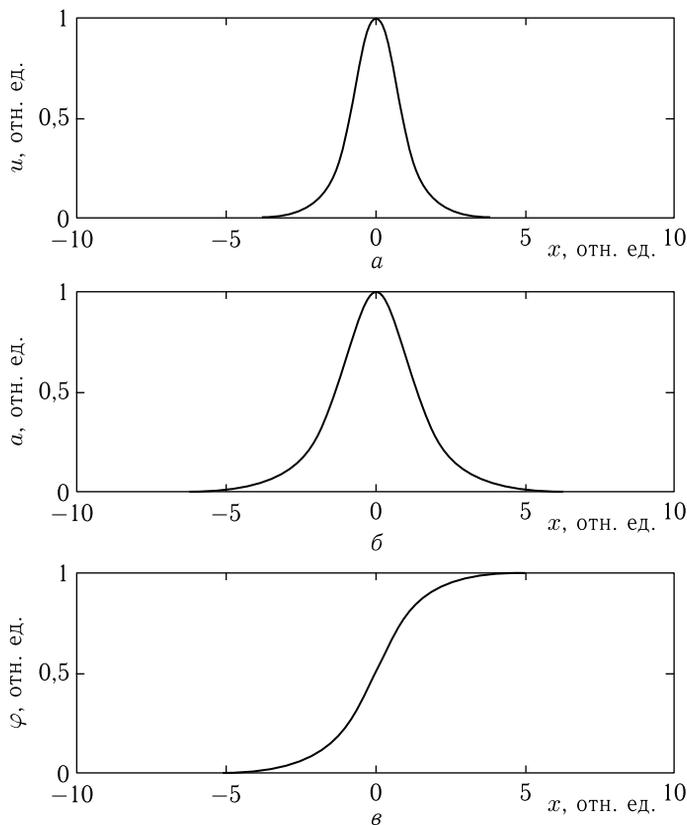


Рис. 3.1. Схематичное представление решений основных солитонных уравнений

Сравнительный вид этих функций показан на рис. 3.1. Здесь верхняя эпюра (*a*) соответствует функции (3.18), средняя (*b*) — функции (3.19) и нижняя (*в*) — функции (3.20).

Из рисунка видно, что солитоны, описываемые уравнениями Кортвега–де Фриза и Шредингера имеют колоколообразный вид.

Солитон Кортвега–де Фриза (*a*) несколько уже солитона Шредингера (*b*), что обусловлено квадратичностью косинуса в знаменателе формулы (3.18), тогда как в формуле (3.19) тот же косинус присутствует в первой степени.

Солитон синус-Гордона имеет вид, подобный гиперболическому тангенсу, что как раз и соответствует доменной границе (точнее — относительно не φ , а $\cos \varphi$ [12, стр. 301, форм. (43.15)]).

Можно видеть, что с определенным приближением солитоны Кортвега–де Фриза и Шредингера являют собой производные от солитона синус-Гордона, солитон синус-Гордона с минусом подобен производным первых двух солитонов. Еще более родство конфигураций всех трех видов солитонов можно наблюдать из следующих легко проверяемых соотношений [402]:

$$\frac{d}{dx} \{2 \operatorname{arctg}[\exp(x)]\} = \frac{1}{\operatorname{ch} x}; \quad (3.21)$$

$$\frac{d(\operatorname{th} x)}{dx} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}. \quad (3.22)$$

Для настоящей монографии наибольший интерес представляет уравнение синус-Гордона, так как именно оно связано со структурой и динамикой доменных границ. Более подробно это уравнение, его частные виды и некоторые решения рассматриваются в главе 11.

3.3. Некоторые общие замечания, касающиеся решения солитонных уравнений

Приведенные в предыдущих разделах солитонные уравнения являются довольно общими, то есть сводится решение многих задач, касающихся нелинейных волновых процессов. Общая схема такого сведения на основе эвристического подхода подробно рассмотрено в главе 1 учебной монографии [383]. Здесь же скажем несколько слов о возможных методах решения солитонных уравнений.

3.3.1. Многообразие возможных видов солитонных уравнений

Приведенными тремя видами никак не ограничивается разнообразие уравнений, возникающих при решении нелинейных задач, касающихся распространения уединенных волн. Преобладающая важность приведенных уравнений состоит в том, что на сегодняшний день только для них найдены их точные решения. Поэтому при решении конкретных задач часто возникает стремление путем определенных

приближений свести получающиеся уравнения к этим трем видам. В противном случае приходится обращаться к численным методам решения, с некоторыми из которых можно познакомиться по фундаментальной монографии [385]. Важнейшим достоинством этой монографии является доходчивость изложения в сочетании с возможностью довольно подробного воспроизведения значительной части приведенных математических выкладок. Так, в главах 7–16 приведены решения множества задач о распространении волн различной природы, в основном, получаемые приближенными вариационными методами и с использованием тригонометрических рядов. С другой стороны, глава 17 упомянутой монографии целиком посвящена точным аналитическим решениям перечисленных выше трех уравнений.

3.3.2. Метод обратной задачи рассеяния

Достаточно универсальным средством получения точных решений является обратная задача рассеяния, более точно называемая «Штурма–Лиувилля обратная задача» [403, 404], ключевым моментом которой является решение интегрального уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко [403, стр. 914, форм. (5), (8); 404, стр. 388, форм. (7)], близкого по структуре к интегральному уравнению Фредгольма второго рода [405]. Для уравнения Кортевега–де Фриза это же уравнение получено в [385, стр. 563, форм. (17.36)], однако далее приведены лишь некоторые решения частного вида [385, стр. 566]. Довольно подробный вывод уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко приведен в монографии методического характера [384, стр. 437–442], однако общий способ решения также отсутствует. Популярный вывод того же уравнения, однако без промежуточных выкладок, содержится в учебной монографии [383, стр. 176–179]. Однако далее там же говорится, что «по счастью в квантовой механике решение было найдено еще в конце 50-х годов», после чего сразу приводится такое решение [383, стр. 180, форм. (10.16)] с блок-схемой его получения [383, стр. 180, рис. 10.1]. По-видимому, более или менее подробный вывод решения уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко, использующий аппарат функций комплексного переменного, можно найти в монографии [406, стр. 119 и далее]. Полезную дополнительную информацию можно получить из работ [407–413].

3.3.3. Особенности решения уравнения синус-Гордона

Большая часть приведенных выше ссылок по методу обратной задачи рассеяния касаются решения уравнения Кортевега–де Фриза.

Для уравнения синус-Гордона, как наиболее интересного в рамках настоящей монографии, некоторые наводящие соображения об использовании метода обратной задачи содержатся в [395, стр. 584]. Там же приведены ссылки на работы [394, 412, 413]. Полностью подробное и последовательное описание решения этого уравнения авторам

настоящей монографии не известно, за что они приносят соответствующие извинения.

Однако следует заметить, что в силу простоты уравнения синус-Гордона, его точное односолитонное решение может быть получено классическим методом, подобным нахождению профиля доменной границы [12, стр. 299–301]. Более подробно этот вопрос рассматривается далее в главе 11. В общем случае для получения из односолитонного решения уравнения синус-Гордона многосолитонных решений того же уравнения можно использовать преобразования Бэклунда, например в таком виде, как это приведено в [383, стр. 195–197]. Можно полагать, что такие решения будут совпадать с получаемыми методом обратной задачи. Подробную проверку этого утверждения авторы предоставляют любознательному читателю.

Выводы по главе 3

Данная глава посвящена обзору литературы, касающейся общих свойств нелинейных уравнений второго порядка, имеющих решения солитонного типа.

Основные результаты, рассмотренные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрена аналогия между доменной границей и солитоном, а также специфика проявления ориентационного перехода в доменной границе. Отмечено, что внутри границы вектор намагниченности находится в условиях ориентационного перехода, однако область перехода, в отличие от случая однородного намагничивания, здесь пространственно локализована, так что распределение намагниченности является существенно неоднородным. При движении доменной границы вектор намагниченности испытывает динамический ориентационный переход, состоящий в переориентации намагниченности от направления, соответствующего одному домену, до направления, соответствующего другому. Отмечено, что такие явления как неподвижная и движущаяся доменные границы, а также одиночная спиновая волна имеют сходную природу, так что могут быть описаны одним и тем же математическим аппаратом, учитывающим распространение волны в переменных Даламбера.

2. Рассмотрены нелинейные волновые уравнения, имеющие точные солитонные решения, такие как уравнение Кортевега–де Фриза, Шредингера и синус-Гордона. Кратко упомянута история открытия солитона Расселом. Приведено классическое определение солитона через решение нелинейного эволюционного уравнения, которое в каждый момент времени локализовано в некоторой области пространства, причем размеры области с течением времени остаются ограниченными, а движение центра области можно интерпретировать как движение частицы.

3. Рассмотрено нелинейное уравнение Кортевега–де Фриза. Приведено его решение, обратно пропорциональное квадрату гиперболического косинуса от переменной Даламбера. Отмечен вид описываемого им солитона, представляющего собой колоколообразную фигуру, перемещающуюся в пространстве с постоянной скоростью в соответствии с волновой функцией Даламбера.

4. Рассмотрено нелинейное уравнение Шредингера. Приведено его решение, обратно пропорциональное первой степени гиперболического косинуса от переменной Даламбера. Отмечен вид описываемого им солитона, представляющего собой колоколообразную фигуру, перемещающуюся в пространстве с постоянной скоростью в соответствии с волновой функцией Даламбера.

5. Рассмотрено нелинейное уравнение синус-Гордона. Приведено его решение, пропорциональное арктангенсу от экспоненты, показатель которой пропорционален переменной Даламбера. Отмечено сходство описываемого им солитона перемещающегося в пространстве с постоянной скоростью с функцией гиперболического тангенса, в соответствии с волновой функцией Даламбера.

6. В качестве дополнительного примера приведено уравнение Клейна–Гордона, получающегося из уравнения синус-Гордона при замене синуса самой волновой функцией. Отмечено, что такое уравнение описывает движение одной частицы, характеризуемой волновой функцией вероятностного характера, которую можно рассматривать как одиночный солитон. Отмечена недостаточность уравнения Клейна–Гордона для представления решения в виде волны неизменного профиля с конечной энергией.

7. Дано графическое представление решений основных солитонных уравнений. Для выявления формы волновой функции при ее перемещении в пространстве рассмотрено решение, соответствующее постоянному (в частном случае нулевому) значению координаты в переменной Даламбера. На основе анализа сравнительного вида волновых функций, нормированных на свой максимум, показано, что решения уравнений Кортевега–де Фриза и Шредингера имеют сходный колоколообразный вид. Однако при этом решение Шредингера несколько шире решения Кортевега–де Фриза, что отражает различие в показателях степени гиперболического косинуса в знаменателях соответствующих решений. Решение синус-Гордона имеет вид, подобный гиперболическому тангенсу, что как раз соответствует доменной границе с точностью до косинуса азимутального угла вектора намагниченности. Отмечено сходство формы солитонов Кортевега–де Фриза и Шредингера с производной от солитона синус-Гордона, а солитон синус-Гордона с обратным знаком подобен производным от первых двух солитонов.

8. Отмечено разнообразие уравнений волнового типа, возникающих при решении нелинейных задач. В качестве преимущества приведенных основных уравнений перед другими представлена возможность получения точного решения в аналитическом виде. Отмечена целесо-

образность сведения реальных задач к основным уравнениям путем рациональных приближений, а также даны рекомендации для перехода к численным методам решения.

9. В качестве более или менее универсального способа аналитического получения точных решений приведенных уравнений отмечен метод обратной задачи рассеяния. Отмечено, что ключевым моментом такого метода является интегральное уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко. Приведены библиографические рекомендации по решению этого уравнения и использованию метода в целом, в первую очередь для уравнения Кортевега–де Фриза. Отмечены особенности применения метода обратной задачи к уравнению синус-Гордона. Ввиду крайней сложности метода отмечена целесообразность для уравнения синус-Гордона использования значительно более простого аппарата, аналогичного применяемому при расчете конфигурации доменных границ. Для получения многосолитонных решений в этом случае имеется возможность использования аппарата преобразований Бэклунда.

Глава 4

ОБЩИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ ПРИ РАСЧЕТЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

В настоящей главе приведем краткие сведения, касающиеся общего математического аппарата, используемого в дальнейшем изложении при расчете волновых процессов в магнитных средах. Поскольку в предыдущих монографиях настоящей серии [1–3] основное внимание уделялось частным вопросам математического аппарата, касающимся магнитных сред и динамики намагничённости, в настоящей главе рассмотрим некоторые более общие вопросы распространения волн и решения общих уравнений волнового типа, необходимые для дальнейшего изложения.

Материал главы в преобладающей степени основан на литературных источниках, среди главных из которых можно отметить [1–3, 10, 11, 402, 414–417]. Остальные ссылки, ввиду их разнообразия и многочисленности, приведены в тексте.

4.1. Решение дифференциальных уравнений волнового типа

Значительное число задач, касающихся распространения волн в различных средах, сводятся к решению линейных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. Приведем здесь основные виды таких уравнений и элементарные способы их решения. Ограничимся случаем двух переменных, в качестве одной из которых может выступать время, а в качестве второй — координата. Возможен также случай, когда обе переменные — координаты.

4.1.1. Основные виды уравнений волнового типа

Рассмотрим основные виды линейных дифференциальных уравнений второго порядка с двумя переменными в частных производных, встречающиеся при решении задач о волновых процессах в одномерной среде.

Будем рассматривать уравнения, общий вид которых следующий [10]:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \beta \frac{\partial U}{\partial x} + \delta \frac{\partial U}{\partial y} = 0. \quad (4.1)$$

Наиболее часто встречаются следующие частные случаи (названия условные, соответствующие частному виду задач):

- 1) классическое волновое уравнение без затухания

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0; \quad (4.2)$$

- 2) волновое уравнение с затуханием по времени

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial U}{\partial x} = 0; \quad (4.3)$$

- 3) волновое уравнение с затуханием по координате

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \delta \frac{\partial U}{\partial y} = 0. \quad (4.4)$$

- 4) волновое уравнение без затухания со смешанной производной

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0. \quad (4.5)$$

Рассмотрим эти случаи последовательно.

4.1.2. Классическое волновое уравнение без затухания

Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \quad (4.6)$$

Решаем методом разделения переменных [10]:

$$U = X(x)Y(y). \quad (4.7)$$

Найдя производные, подставив их в уравнение и разделив на XY , после чего группируя по переменным, получаем

$$\frac{X''}{X} = -\alpha \frac{Y''}{Y} = \mu, \quad (4.8)$$

где μ — постоянная разделения.

Это — два уравнения, каждое из которых содержит только один вид неизвестных, т. е. уравнения не зависят друг от друга. Решим эти уравнения последовательно.

- 1) Первое уравнение

$$\frac{X''}{X} = \mu. \quad (4.9)$$

Ищем решение в виде

$$X = e^{\lambda x}, \quad (4.10)$$

где λ — вспомогательный параметр, требующий определения в рамках данного уравнения.

Подставляя в исходное уравнение, получаем уравнение для λ :

$$\lambda^2 - \mu = 0, \quad (4.11)$$

откуда находим:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\mu}. \quad (4.12)$$

Полное решение уравнения (4.9) имеет вид:

$$X = Ae^{\sqrt{\mu}x} + Be^{-\sqrt{\mu}x}, \quad (4.13)$$

где A, B — произвольные постоянные.

2) Второе уравнение

$$-\alpha \cdot \frac{Y''}{Y} = \mu. \quad (4.14)$$

Ищем решение в виде

$$Y = e^{\lambda y}, \quad (4.15)$$

где λ — вспомогательный параметр, требующий определения в рамках данного уравнения (с параметром λ уравнения (4.11) не связанный).

Подставляя в исходное уравнение, получаем уравнение для λ :

$$\lambda^2 + \frac{\mu}{\alpha} = 0, \quad (4.16)$$

откуда находим:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{\mu}{\alpha}}. \quad (4.17)$$

Полное решение уравнения (4.14) имеет вид:

$$Y = Ce^{\sqrt{-\frac{\mu}{\alpha}}y} + De^{-\sqrt{-\frac{\mu}{\alpha}}y}, \quad (4.18)$$

где C, D — произвольные постоянные.

Итак, получены решения обоих уравнений (4.13) и (4.18). Полное решение исходного уравнения (4.6) имеет вид (4.7), т.е. является произведением этих решений:

$$U = ACE^{(\sqrt{\mu}x + \sqrt{-\frac{\mu}{\alpha}}y)} + ADE^{(\sqrt{\mu}x - \sqrt{-\frac{\mu}{\alpha}}y)} + \\ + BCE^{(-\sqrt{\mu}x + \sqrt{-\frac{\mu}{\alpha}}y)} + BDE^{(-\sqrt{\mu}x - \sqrt{-\frac{\mu}{\alpha}}y)}, \quad (4.19)$$

где A, B, C, D и их комбинации — произвольные постоянные, требующие определения из граничных или начальных условий.

Переход к традиционному виду волнового уравнения

Как отмечено в начале данного раздела, уравнение (4.6) представляет собой обобщенный вид классического волнового уравнения. Действительно, при замене переменных x на t и y на x , а также параметра α на $-v^2$, из (4.6) получаем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad (4.20)$$

т. е. волновое уравнение, записанное в традиционных обозначениях [10], где t — время, x — координата, v — скорость распространяющейся волны.

В решении (4.19), выполняя замену $\sqrt{\mu}$ на $i\omega$, а также учитывая, что волновое число волны k связано с ее скоростью v и частотой ω соотношением $k = \omega/v$, так что $\sqrt{-\mu/\alpha}$ переходит в ik , получаем

$$U = ACe^{i(\omega t+kx)} + AD e^{i(\omega t-kx)} + BCe^{i(-\omega t+kx)} + BD e^{i(-\omega t-kx)}, \quad (4.21)$$

что представляет собой классическую запись координатной зависимости двух встречно распространяющихся волн $\pm ikx$ при двух вариантах записи зависимости от времени $\pm i\omega t$. При этом A, B, C, D и их комбинации — произвольные постоянные, требующие определения из граничных или начальных условий.

4.1.3. Волновое уравнение с затуханием по времени

Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (4.22)$$

Решаем методом разделения переменных [10]:

$$U = X(x)Y(y). \quad (4.23)$$

Найдя производные, подставив их уравнение и разделив на XY , после чего группируя по переменным, получаем

$$\frac{X''}{X} + \beta \frac{X'}{X} = -\alpha \frac{Y''}{Y} = \mu, \quad (4.24)$$

где μ — постоянная разделения.

Это — два уравнения, каждое из которых содержит только один вид неизвестных, т. е. уравнения не зависят друг от друга. Решим эти уравнения последовательно.

1) Первое уравнение

$$\frac{X''}{X} + \beta \frac{X'}{X} = \mu. \quad (4.25)$$

Ищем решение в виде

$$X = e^{\lambda x}, \quad (4.26)$$

где λ — вспомогательный параметр, требующий определения в рамках данного уравнения.

Подставляя в исходное уравнение, получаем уравнение для λ :

$$\lambda^2 + \beta\lambda - \mu = 0, \quad (4.27)$$

откуда находим

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \mu}. \quad (4.28)$$

Полное решение уравнения (4.25) имеет вид

$$X = Ae^{\left(-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \mu}\right)x} + Be^{\left(-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \mu}\right)x}, \quad (4.29)$$

где A, B — произвольные постоянные.

2) Второе уравнение

$$-\alpha \frac{Y''}{Y} = \mu. \quad (4.30)$$

Это уравнение полностью совпадает с (4.14), поэтому сразу приведем окончательное решение (4.18):

$$Y = Ce^{\sqrt{-\frac{\mu}{\alpha}}y} + De^{-\sqrt{-\frac{\mu}{\alpha}}y}, \quad (4.31)$$

где C, D — произвольные постоянные.

Итак, получены решения обоих уравнений (4.25) и (4.30). Полное решение исходного уравнения (4.22) имеет вид (4.23), т. е. является произведением этих решений:

$$\begin{aligned} U = & ACe^{\left(-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \mu}\right)x + \sqrt{-\frac{\mu}{\alpha}}y} + \\ & + ADe^{\left(-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \mu}\right)x - \sqrt{-\frac{\mu}{\alpha}}y} + BCe^{\left(-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \mu}\right)x + \sqrt{-\frac{\mu}{\alpha}}y} + \\ & + BDe^{\left(-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \mu}\right)x - \sqrt{-\frac{\mu}{\alpha}}y}, \quad (4.32) \end{aligned}$$

где A, B, C, D и их комбинации — произвольные постоянные, требующие определения из граничных или начальных условий.

Переход к традиционному виду волнового уравнения

Подобно предыдущему случаю, уравнение (4.22) представляет собой обобщенный вид классического волнового уравнения с затуханием по времени. Действительно, при замене переменных x на t и y на x , параметра α на $-v^2$, а также рассматривая β (в предположении $\beta > 0$) как параметр затухания по времени, из (4.22) получаем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial U}{\partial t} - v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad (4.33)$$

т. е. волновое уравнение в традиционных обозначениях [10].

В решении (4.32), выполняя замены, аналогичные использованным при выводе соотношения (4.21), получаем

$$\begin{aligned} U = & ACe^{-\frac{\beta}{2}t + i(\omega t + kx)} + ADe^{-\frac{\beta}{2}t + i(\omega t - kx)} + \\ & + BCe^{-\frac{\beta}{2}t + i(-\omega t + kx)} + BDe^{-\frac{\beta}{2}t + i(-\omega t - kx)}. \quad (4.34) \end{aligned}$$

Подобно (4.21), полученное решение представляет собой классическую запись координатной зависимости двух встречно распространяющихся

волн $\pm ikx$ при двух вариантах записи зависимости от времени $\pm i\omega t$, однако теперь к амплитуде каждой волны в качестве коэффициента добавляется экспоненциально спадающий множитель $e^{-\frac{\beta}{2}t}$, отражающий затухание во времени амплитуды любой из этих волн в одинаковой степени.

В уравнении (4.33), содержащем первую производную от волновой функции по времени, в качестве механизма затухания предполагается противодействующая смещению сила, пропорциональная скорости. Например, в механике в качестве такого противодействия выступает сила трения, где β — коэффициент трения [418]. В задаче о колебаниях струны [10] эта сила противодействует смещению точек струны из положения равновесия, так что направлена перпендикулярно оси струны, т. е. перпендикулярно направлению распространения волны. В силу такой перпендикулярности, эта сила не может изменить длину волны, так что волновое число k , по сравнению со случаем среды без затухания (4.21), не меняется.

4.1.4. Волновое уравнение с затуханием по координате

Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \delta \frac{\partial U}{\partial y} = 0. \quad (4.35)$$

Отличие от уравнения (4.22) состоит в том, что здесь присутствует первая производная по той координате, которая входит в основную часть волнового уравнения с коэффициентом α , в общем случае отличным от единицы. Можно полагать, что решение в этом случае сводится к перенормировке решения уравнения (4.22), однако при переходе к традиционному виду волнового уравнения имеется определенное принципиальное отличие, поэтому остановимся на решении уравнения (4.35) несколько подробнее.

Решаем уравнение (4.35) методом разделения переменных:

$$U = X(x)Y(y). \quad (4.36)$$

Найдя производные, подставив их в уравнение и разделив на XY , после чего группируя по переменным, получаем

$$\frac{X''}{X} = -\alpha \frac{Y''}{Y} - \delta \frac{Y'}{Y} = \mu, \quad (4.37)$$

где μ — постоянная разделения.

Это — два уравнения, каждое из которых содержит только один вид неизвестных, т. е. уравнения не зависят друг от друга. Решим эти уравнения последовательно.

1) Первое уравнение:

$$\frac{X''}{X} = \mu. \quad (4.38)$$

Это уравнение совпадает с (4.9), поэтому сразу приведем его решение (4.13):

$$X = Ae^{\sqrt{\mu}x} + Be^{-\sqrt{\mu}x}, \quad (4.39)$$

где A, B — произвольные постоянные.

2) Второе уравнение

$$-\alpha \frac{Y''}{Y} - \delta \frac{Y'}{Y} = \mu. \quad (4.40)$$

Умножив обе части на -1 и разделив на α , получаем

$$\frac{Y''}{Y} + \frac{\delta}{\alpha} \frac{Y'}{Y} = -\frac{\mu}{\alpha}. \quad (4.41)$$

Ищем решение в виде

$$Y = e^{\lambda y}, \quad (4.42)$$

где λ — вспомогательный параметр, требующий определения в рамках данного уравнения.

Подставляя в исходное уравнение, получаем уравнение для λ :

$$\lambda^2 + \frac{\delta}{\alpha} \lambda + \frac{\mu}{\alpha} = 0, \quad (4.43)$$

откуда находим:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\delta}{2\alpha} \pm \sqrt{-\frac{\mu}{\alpha} + \frac{\delta^2}{4\alpha^2}}. \quad (4.44)$$

Полное решение уравнения (4.40) имеет вид

$$Y = Ce^{\left(-\frac{\delta}{2\alpha} + \sqrt{-\frac{\mu}{\alpha} + \frac{\delta^2}{4\alpha^2}}\right)y} + De^{\left(-\frac{\delta}{2\alpha} - \sqrt{-\frac{\mu}{\alpha} + \frac{\delta^2}{4\alpha^2}}\right)y}, \quad (4.45)$$

где C, D — произвольные постоянные.

Итак получены решения обоих уравнений (4.38) и (4.40). Полное решение исходного уравнения (4.35) имеет вид (4.36), т. е. является произведением этих решений:

$$\begin{aligned} U = & ACE^{\sqrt{\mu}x} + \left(-\frac{\delta}{2\alpha} + \sqrt{-\frac{\mu}{\alpha} + \frac{\delta^2}{4\alpha^2}}\right)y + \\ & + ADe^{\sqrt{\mu}x} + \left(-\frac{\delta}{2\alpha} - \sqrt{-\frac{\mu}{\alpha} + \frac{\delta^2}{4\alpha^2}}\right)y + BCe^{-\sqrt{\mu}x} + \left(-\frac{\delta}{2\alpha} + \sqrt{-\frac{\mu}{\alpha} + \frac{\delta^2}{4\alpha^2}}\right)y + \\ & + BDe^{-\sqrt{\mu}x} + \left(-\frac{\delta}{2\alpha} - \sqrt{-\frac{\mu}{\alpha} + \frac{\delta^2}{4\alpha^2}}\right)y, \quad (4.46) \end{aligned}$$

где A, B, C, D и их комбинации — произвольные постоянные, требующие определения из граничных или начальных условий.

Переход к традиционному виду волнового уравнения

Подобно предыдущим случаям, уравнение (4.35) представляет собой обобщенный вид классического волнового уравнения с затуханием

по координате. Действительно, при замене переменных x на t и y на x , параметра α на $-v^2$, а также рассматривая δ как параметр изменения амплитуды волны по координате, из (4.35) получаем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (4.47)$$

т. е. волновое уравнение в традиционных обозначениях [10], где в качестве механизма затухания предполагается противодействующая сила, пропорциональная производной от волновой функции по координате.

В решении (4.46), выполняя замены, аналогичные использованным при выводе соотношения (4.21), получаем

$$U = ACe^{\frac{\delta}{2v^2}x+i(\omega t+k_e x)} + ADe^{\frac{\delta}{2v^2}x+i(\omega t-k_e x)} + BCe^{\frac{\delta}{2v^2}x+i(-\omega t+k_e x)} + BDe^{\frac{\delta}{2v^2}x+i(-\omega t-k_e x)}, \quad (4.48)$$

где через k_e обозначена величина:

$$k_e = \sqrt{k^2 - \frac{\delta^2}{4v^2}}, \quad (4.49)$$

которую можно назвать «эффективным волновым числом».

4.1.5. Сравнительные особенности затухания по времени и по координате

Прежде всего отметим, что в отличие от предыдущего случая параметр δ всегда, независимо от знака, приводит к уменьшению эффективного волнового числа, т. е. длина волны в такой среде увеличивается. Далее заметим, что решение (4.48), как и все предыдущие, представляет собой совокупность двух встречно распространяющихся волн $\pm ik_e x$ при двух вариантах записи зависимости от времени $\pm i\omega t$, однако теперь к амплитуде каждой волны в качестве коэффициента до-

бавляется экспоненциальный множитель $e^{\frac{\delta}{2v^2}x}$, отражающей изменение по координате амплитуды любой из этих волн в одинаковой степени.

Однако очевидно, что в обычной среде диссипативного типа (т. е. в такой, где свободные колебания со временем затухают), амплитуда любой волны, распространяющейся как в положительном, так и в отрицательном направлении оси Ox , по координате должна уменьшаться.

То есть при различных направлениях распространения знак параметра δ должен быть различен. Так, для волны, распространяющейся в положительном направлении оси Ox , то есть в выражении (4.48) соответствующей амплитудам AD или BC , параметр δ должен быть отрицательным, что обеспечивает спад соответствующей экспоненты. Для волны, распространяющейся в отрицательном направлении той же оси, параметр δ должен быть положительным, что также обеспечивает уменьшение амплитуды волны по мере распространения.

Причина такой неоднозначности параметра δ , в отличие от безусловного требования положительности параметра β в уравнении (4.33), состоит в том, что время в процессе распространения волны всегда имеет только одно направление развития (всегда только возрастает), т. е. может только увеличиваться.

Однако координата распространяющейся волны может быть как отрицательной, так и положительной, т. е. может как возрастать, так и убывать в зависимости от направления распространения волны. Такая двойственность координатной зависимости волны и порождает двойственность знака параметра δ .

Отметим несколько другую, отличную от рассмотренной в предыдущем разделе, физическую природу затухания волны в этом случае. Так, согласно уравнению (4.47), в качестве механизма затухания выступает сила, пропорциональная производной от волновой функции по координате. В задаче о колебаниях струны в качестве такой силы может выступать сопротивление струны ее изгибу. То есть, чем сильнее волна по мере распространения изгибает струну, тем сильнее струна сопротивляется такому изгибу, оказывая противодействие распространению волны. Благодаря такому противодействию волне становится труднее «проталкиваться» по струне, струна на периоде волны стремится распрямиться, в результате чего длина волны увеличивается (т. е. величина k_e в соответствии с (4.49) уменьшается). В классической задаче о струне обычно полагают, что «струна не сопротивляется изгибу» [10, стр. 23], так что этот случай из поля зрения выпадает. Тем не менее, можно предположить, что в других задачах, например касающихся распространения волн в упругой среде, влияние первой производной от волновой функции по координате на распространение волны может иметь определенное значение.

Замечание. Следует учитывать, что спад амплитуды распространяющейся волны по времени или координате соответствует пассивному характеру среды, каковыми являются большинство из существующих сред. Однако в ряде случаев может иметь место активный характер среды, при котором распространяющаяся волна по мере продвижения усиливается [419]. Такое усиление происходит за счет передачи распространяющейся волне заранее запасенной в среде энергии и означает первоначально возбужденное состояние элементов среды, которое предварительно должно быть создано какими-то внешними воздействиями. В квантовой трактовке такие среды считаются обладающими инверсией населенностей (т. е. таким состоянием, когда на высоком энергетическом уровне находится больше частиц, чем на низком) [420]). Подобные среды находят широкое применение в квантовой электронике [421], составляя основу для создания лазеров. Первоначальное возбуждение среды при этом осуществляется за счет источника накачки, в качестве которого может выступать электромагнитная

волна, свет более высокой частоты, электрический ток, газовый разряд и другие [422].

4.1.6. Волновое уравнение без затухания со смешанной производной

Рассмотрим теперь решение волнового уравнения со смешанной производной. Это решение имеет наиболее сложный вид, поэтому ограничимся здесь рассмотрением случая без затухания. Учет затухания принципиальных трудностей не имеет, однако приводит к определенному повышению громоздкости конечных выражений, физический смысл которых в любом случае сводится к экспоненциальному затуханию решения по времени или по координате, совпадающей с направлением распространения волны.

Итак, рассматриваемое здесь уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0. \quad (4.50)$$

Характерной особенностью данного уравнения является наличие смешанной производной от исходной функции по обоим переменным.

Решаем методом разделения переменных [10]:

$$U = X(x)Y(y). \quad (4.51)$$

Находя производные, подставляя в уравнение и разделяя на $X \cdot Y$, получаем:

$$\frac{X''}{X} + \alpha \frac{Y''}{Y} + \gamma \frac{X'Y'}{XY} = 0. \quad (4.52)$$

Можно видеть, что разделение уравнения на две части, каждая из которых зависит только от одной переменной, здесь не получается. То есть применение классического метода разделения переменных результата не дает.

Заметим однако, что к подобному уравнению приводят задачи, касающиеся распространения волн по определенным прямолинейным направлениям. В этом случае, если ось одной из координат выбрана вдоль такого направления, то можно полагать, что решение вдоль этой оси будет иметь экспоненциальный характер, в случае распространяющейся волны — периодический. Предположим далее, что зависимость полного решения от такой выделенной координаты, упомянутой экспонентой полностью исчерпывается, т. е. полное решение имеет вид произведения этой экспоненты на функцию, зависящую только от другой координаты.

Так, сначала положим, что выделенным направлением является ось Oy , т. е. решение имеет вид:

$$U = X(x)e^{\vartheta y}, \quad (4.53)$$

где ϑ — волновое число волны, распространяющейся вдоль Oy .

Подставляя (4.53) в (4.50) и сокращая на $e^{\vartheta y}$, получаем уравнение для X :

$$X'' + \gamma\vartheta X' + \alpha\vartheta^2 X = 0. \quad (4.54)$$

Ищем решение в виде

$$X = e^{\lambda x}, \quad (4.55)$$

откуда получаем уравнение для λ :

$$\lambda^2 + \gamma\vartheta\lambda + \alpha\vartheta^2 = 0. \quad (4.56)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\lambda_{1,2} = \vartheta \left(-\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha} \right), \quad (4.57)$$

откуда в соответствии с (4.53) получаем решение в виде

$$U = e^{\vartheta \left(-\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha} \right) x} e^{\vartheta y}, \quad (4.58)$$

или:

$$U = e^{-\frac{\gamma\vartheta}{2} \cdot x} e^{\pm\vartheta \left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha} \right) x} e^{\vartheta y}. \quad (4.59)$$

Из этого выражения видно, что в зависимости от соотношения величин α и γ , а также от действительного или мнимого значения параметра ϑ , вид решения по координате x может иметь характер спадающей или возрастающей экспоненты, в том числе промодулированной по той же координате периодической синусоидой.

Полное решение, с учетом двух возможных знаков показателя экспоненты для y , имеет вид:

$$U = e^{-\frac{\gamma\vartheta}{2} x} \left[A e^{\vartheta \left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha} \right) x} + B e^{-\vartheta \left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha} \right) x} \right] e^{\vartheta y} + e^{-\frac{\gamma\vartheta}{2} \cdot x} \left[C e^{\vartheta \left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha} \right) x} + D e^{-\vartheta \left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha} \right) x} \right] e^{-\vartheta y}, \quad (4.60)$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные, требующие определения из граничных или начальных условий.

Положим теперь, что выделенным направлением является ось Ox , т. е. решение имеет вид:

$$U = Y(y)e^{\zeta x}, \quad (4.61)$$

где ζ — волновое число вдоль оси Ox .

Подставляя в (4.50) и сокращая на $e^{\zeta x}$, получаем уравнение для Y :

$$\alpha Y'' + \gamma\zeta Y' + \zeta^2 Y = 0. \quad (4.62)$$

Ищем решение в виде

$$Y = e^{\lambda y}, \quad (4.63)$$

откуда получаем уравнение для λ :

$$\alpha\lambda^2 + \gamma\zeta\lambda + \zeta^2 = 0. \quad (4.64)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\zeta}{\alpha} \left(-\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha} \right), \quad (4.65)$$

откуда в соответствии с (4.61) получаем решение в виде

$$U = e^{\zeta x} e^{\frac{\zeta}{\alpha} \left(-\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha} \right) y}, \quad (4.66)$$

или:

$$U = e^{\zeta x} e^{-\frac{\gamma\zeta}{2\alpha} y} e^{\pm \frac{\zeta}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha} \right) y}. \quad (4.67)$$

Видно, что в этом случае решение обладает по координате y теми же свойствами, что и решение (4.59) по координате x , т.е. роли переменных как бы меняются местами.

Подобно (4.60), полное решение с учетом двух возможных знаков показателя экспоненты для x , имеет вид:

$$U = e^{\zeta x} e^{-\frac{\gamma\zeta}{2\alpha} y} \left[A e^{\frac{\zeta}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha} \right) y} + B e^{-\frac{\zeta}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha} \right) y} \right] + e^{-\zeta x} e^{-\frac{\gamma\zeta}{2\alpha} y} \left[C e^{\frac{\zeta}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha} \right) y} + D e^{-\frac{\zeta}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha} \right) y} \right], \quad (4.68)$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные, требующие определения из граничных или начальных условий.

4.1.7. Классическое решение уравнения со смешанной производной

В предыдущем разделе изложен способ нахождения решения уравнения второго порядка, содержащего смешанную производную. Такой способ не является универсальным в том отношении, что содержит заведомо принятое предположение о том, что уравнение (4.50) имеет решение в виде волны, распространяющейся вдоль одной из осей координат Ox или Oy . Рассмотрим теперь наиболее универсальный классический способ решения уравнения со смешанными производными, в основном следуя идеологии [10].

Итак, пусть исходное уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0. \quad (4.69)$$

Введем новые переменные:

$$\xi = \xi(x, y); \quad (4.70)$$

$$\eta = \eta(x, y). \quad (4.71)$$

Находим производные:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \\ + \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}; \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}; \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \\ + \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}; \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \alpha \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right\} + \\ + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \gamma \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right\} + \\ + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \left\{ \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \alpha \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \gamma \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right\} + \\ + \frac{\partial U}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \right) + \\ + \frac{\partial U}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Введем вспомогательные обозначения:

$$V_\xi = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \alpha \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y}; \quad (4.78)$$

$$W_{\xi\eta} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \gamma \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y}\right); \quad (4.79)$$

$$V_\eta = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \alpha \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \gamma \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y}; \quad (4.80)$$

$$\Phi_\xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}; \quad (4.81)$$

$$\Phi_\eta = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}. \quad (4.82)$$

С этими обозначениями исходное уравнение принимает вид

$$V_\xi \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + W_{\xi\eta} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + V_\eta \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \Phi_\xi \frac{\partial U}{\partial \xi} + \Phi_\eta \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0. \quad (4.83)$$

Можно видеть, что структура выражений V_ξ и V_η одинакова с точностью до замены ξ на η . Рассмотрим вспомогательную функцию $z(x, y)$, являющуюся решением уравнения

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \alpha \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \gamma \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (4.84)$$

Поскольку это уравнение второго порядка, то согласно общей теории дифференциальных уравнений оно должно иметь два независимых друг от друга решения. Тогда, положив ξ равным одному из этих решений, а η — другому, можно одновременно обратить в нуль оба выражения V_ξ и V_η , что приведет к заметному упрощению уравнения (4.83).

Итак, рассмотрим решение уравнения (4.84). Прежде всего разделим все слагаемые на $(\partial z / \partial y)^2$. В результате получаем:

$$\left(\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}\right)^2 + \gamma \left(\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}\right) + \alpha = 0. \quad (4.85)$$

Это — квадратное уравнение относительно выражения в скобках. Решая его, получаем

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha}. \quad (4.86)$$

Введем вспомогательное обозначение

$$w_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha}. \quad (4.87)$$

С этим обозначением получаем уравнение для z вида

$$\frac{\partial z}{\partial x} - w_{1,2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (4.88)$$

Согласно общей теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка [415, стр.243] или [416, стр.312], это уравнение является частным видом классического уравнения

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z), \quad (4.89)$$

которое эквивалентно системе уравнений [415, стр.246] или [416, стр.300–301]

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \quad (4.90)$$

Учитывая, что в уравнении (4.88) $P(x, y, z) = 1$, $Q(x, y, z) = -w_{1,2}$, а также $R(x, y, z) = 0$, получаем эквивалентную систему в виде

$$\frac{dx}{1} = -\frac{dy}{w_{1,2}} = \frac{dz}{0}. \quad (4.91)$$

Заметим, что деление на нуль в третьем члене здесь не должно вызывать неопределенности, так как умножение на нуль этого члена, в сочетании с таким же умножением любого другого, эту неопределенность снимает.

Из равенства первых двух составляющих системы (4.91) получаем

$$w_{1,2} dx + dy = 0. \quad (4.92)$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$w_{1,2}x + y = C_1, \quad (4.93)$$

где C_1 — произвольная в рамках уравнения (4.92) постоянная.

Аналогично из равенства первого и третьего составляющих системы (4.91), получаем

$$dz = 0, \quad (4.94)$$

откуда находим

$$z = C_2, \quad (4.95)$$

где C_2 — также в рамках уравнения (4.94) — произвольная постоянная.

Поскольку x , y и z связаны функциональной зависимостью вида (4.88) или (4.89), то и постоянные C_1 и C_2 тоже должны быть как-то связаны. Не вдаваясь в подробности строгого математического доказательства (которое можно найти в упомянутых выше ссылках), приведем практический прием получения связанного функционального решения из двух полученных интегралов. Итак, задача состоит в том, чтобы с помощью уравнения (4.92) исключить C_1 и C_2 из совокупности выражений (4.93) и (4.95).

Зададим одну из переменных равной произвольной постоянной величине, например пусть будет $x = x_0$. Это позволяет из (4.93) выразить y через C_1 в виде

$$y = C_1 - w_{1,2}x_0. \quad (4.96)$$

Предположим далее, что при постоянной величине переменной x функция $z(x, y)$ зависит только от y , т. е.

$$z(x_0, y) = f(y), \quad (4.97)$$

где функцию $f(y)$ также зададим произвольно.

Подставляя это выражение в (4.95), а также учитывая (4.96), получаем

$$f(C_1 - w_{1,2}x_0) = C_2. \quad (4.98)$$

Это соотношение дает функциональную связь между C_1 и C_2 , использование которой позволяет исключить C_1 и C_2 из совокупности полученных интегралов (4.93) и (4.95).

Таким образом, вместо задания двух произвольных постоянных C_1 и C_2 , здесь мы задаем произвольное значение одной из переменных и произвольную функциональную зависимость решения от другой переменной, т. е. на место первоначальных двух актов произвольности ставятся два других акта опять-таки произвольности. Корректное обоснование подобной замены также можно найти в цитированных выше источниках.

В рассматриваемой здесь задаче удобно выбрать $x = 0$ и $z = y$. Подставляя эти значения в (4.93) и (4.95), получаем:

$$w_{1,2} \cdot 0 + y = C_1; \quad (4.99)$$

$$y = C_2,$$

откуда можно видеть, что при произвольном y выполняется равенство

$$C_1 = C_2. \quad (4.100)$$

Это соотношение задает семейство решений полной задачи, частным случаем которой является выбор $x = 0$ и $z = y$. Полное решение получаем, приравнявая (4.93) и (4.95) в соответствии с (4.100):

$$z = w_{1,2}x + y. \quad (4.101)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что полученное выражение является решением исходного уравнения (4.88).

Очевидно, в силу произвольности выбора, полученное решение не является единственным. Здесь действует то же правило, что и в операции интегрирования, когда неопределенный интеграл определяется с точностью до произвольной постоянной. Соответственно решение дифференциального уравнения первого порядка в обыкновенных производных содержит одну произвольную постоянную, второго — две и так далее. Значения этих постоянных могут быть определены из начальных

или граничных условий. В дифференциальных уравнениях в частных производных место произвольных постоянных занимают произвольные функции, которые также определяются начальными или граничными условиями. Более подробно с этим вопросом также можно ознакомиться в соответствующих руководствах, например [10, 415, 416].

Применительно к рассматриваемой здесь задаче можно, например, положить: $x = 0$, $z = y^2$, что дает $C_2 = C_1^2$, откуда получаем

$$z = (w_{1,2}x + y)^2, \quad (4.102)$$

или $x = 2$, $z = 2y$, что дает $C_2 = 2C_1 - 4w_{1,2}$, откуда получаем

$$z = 2w_{1,2}x + 2y - 4w_{1,2} \quad (4.103)$$

и так далее. Можно видеть, что (4.102) и (4.103) также являются решениями уравнения (4.88), что получается и при любом другом подобном выборе.

Итак, возвращаясь к уравнению (4.84), два решения которого получены в виде (4.101), можно положить:

$$\xi = w_1x + y; \quad (4.104)$$

$$\eta = w_2x + y, \quad (4.105)$$

где w_1 и w_2 — постоянные параметры, определяемые выражением (4.87).

Поскольку ξ и η являются решениями уравнения (4.84), являющего собой правую часть выражений (4.78) и (4.80), то $V_\xi = 0$ и $V_\eta = 0$. Подставляя (4.104) и (4.105) в (4.81) и (4.82), убеждаемся также, что $\Phi_\xi = 0$ и $\Phi_\eta = 0$.

Аналогично, подставляя (4.104) и (4.105) в (4.79), получаем

$$W_{\xi\eta} = w_1w_2 + \alpha + \gamma(w_1 + w_2). \quad (4.106)$$

Подставляя w_1 и w_2 в соответствии с (4.87), находим

$$W_{\xi\eta} = 2\alpha - \gamma^2. \quad (4.107)$$

С учетом полученных выражений уравнение (4.83) принимает вид:

$$(2\alpha - \gamma^2) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad (4.108)$$

откуда, учитывая в общем случае отличие первого сомножителя от нуля, получаем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (4.109)$$

Это — классическое волновое уравнение в его первой канонической форме [10, стр. 15, 51]. Его решение имеет вид [10, стр. 51]:

$$U(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \tag{4.110}$$

где каждая из функций f_1 и f_2 зависит только от своей переменной ξ или η . Это решение удобно для описания волн, распространяющихся вдоль оси, неограниченно продолжающейся в обе стороны. В этом случае две функции f_1 и f_2 определяются двумя начальными условиями в какой-то одной точке оси.

Для рассматриваемых далее задач удобно привести это уравнение к виду, содержащему вторые производные по каждой из переменных. Для этого, подобно [10, стр. 16], выполним еще одну замену переменных:

$$\xi = r + v; \tag{4.111}$$

$$\eta = r - v, \tag{4.112}$$

так что:

$$r = \frac{\xi + \eta}{2}; \tag{4.113}$$

$$v = \frac{\xi - \eta}{2}. \tag{4.114}$$

Находим производные:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial v} \right); \tag{4.115}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial v} \right); \tag{4.116}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right), \tag{4.117}$$

Подставляя (4.117) в (4.109), получаем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} = 0. \tag{4.118}$$

Это — классическое волновое уравнение в его второй канонической форме [10, стр. 15–16, стр. 83].

Такая форма удобна для описания волн, распространяющихся в ограниченном с обеих сторон отрезке оси конечной длины. При этом на концах отрезка задаются граничные условия, а во времени получается совокупность стоячих волн, частоты которых имеют дискретный характер.

Решим это уравнение методом разделения переменных, полагая

$$U = R(r)V(v). \tag{4.119}$$

Подставляя в исходное уравнение (4.118) и следуя действиям, аналогичным выполнявшимся при решении уравнения (4.6), получаем решение настоящего уравнения в виде

$$U = ACe^{(\mu r + \nu v)} + ADe^{(\mu r - \nu v)} + BCe^{(-\mu r + \nu v)} + BDe^{(-\mu r - \nu v)}, \quad (4.120)$$

где μ и ν — постоянные разделения. Благодаря симметрии уравнения (4.118), эти постоянные получаются равными друг другу: $\mu = \nu$, так что решение (4.120) принимает вид

$$U = A \cdot Ce^{(\mu r + \mu v)} + A \cdot De^{(\mu r - \mu v)} + B \cdot Ce^{(-\mu r + \mu v)} + B \cdot De^{(-\mu r - \mu v)}. \quad (4.121)$$

Здесь r и v определяются формулами (4.113) и (4.114), откуда с учетом (4.104), (4.105) и (4.87), получаем:

$$r = \frac{1}{2}(-\lambda x + 2y); \quad (4.122)$$

$$v = \left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha} \right) x. \quad (4.123)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что решение (4.121) совпадает с полученным ранее (4.60). Рассмотрим, например, показатель первой экспоненты в (4.121):

$$\mu r + \mu v = \left(-\frac{\mu\gamma}{2} + \mu\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha} \right) x + \mu y. \quad (4.124)$$

Можно видеть, что этот показатель, с точностью до замены обозначения постоянной разделения μ на ϑ , совпадает с таковым в первом слагаемом выражения (4.60). Остальные слагаемые могут быть проверены аналогичным образом.

Здесь выполнено сравнение полученного решения с (4.60), где в качестве основной полагалась ось Oy . Решение (4.68), соответствующее распространению волны вдоль оси Ox , также может быть получено классическим методом. Для этого уравнение (4.84) надо делить не на $(\partial z / \partial y)^2$, а на $(\partial z / \partial x)^2$, после чего разделить полученное уравнение на α . Остальные выкладки, с надлежащей заменой x на y и обратно, остаются без изменений.

Таким образом, полученное ранее решение (4.60), основанное на предварительном предположении о распространении волны вдоль одной из координатных осей, полностью согласуется с решением (4.121), полученным классическим методом. В обоих случаях приходится решать одинаковые по структуре квадратные уравнения (4.56) и (4.85), корни которых (4.57) и (4.86) отличаются друг от друга лишь на множитель, представляющий собой постоянную разделения.

Следует отметить однако, что решение, основанное на предположении о распространении волны вдоль координатной оси, приводит к конечному результату значительно скорее и проще, чем классическое. В самом деле, классическое решение требует вычисления промежуточных производных, нескольких замен переменных и сведения получаемого уравнения второго порядка к системе двух уравнений первого порядка, т. е. в совокупности является довольно громоздким. Укороченное же решение, кроме простоты вычислений, позволяет более наглядно проследить физическое содержание задачи, что также дает ему несомненное преимущество.

4.1.8. Некоторые дополнительные замечания о смешанной производной

Вообще говоря, смешанную производную в уравнении (4.50) или (4.69) можно убрать путем введения новых переменных вида [10, стр. 12–16]:

$$\eta = x + y; \quad (4.125)$$

$$\xi = x - y. \quad (4.126)$$

При такой замене смешанная производная пропадает [10, стр.16], но появляются первые производные по новым переменным. С другой стороны, если исходные переменные имеют различную физическую природу, например это координата и время, то введение их суммы и разности может затемнить качественное физическое содержание исходной задачи. Поэтому здесь указан другой путь, приводящий к результатам, несколько более естественным с качественной физической стороны. В силу единственности решения исходной задачи, можно полагать, что излагаемый здесь способ решения приводит к тем же результатам, что и классический, основной на приведенной выше замене переменных. Проверку правомерности такого положения предоставляем любознательным читателям.

Рассмотренное здесь уравнение со смешанной производной (4.50) носит обобщенный характер, без конкретизации принадлежности переменных ко времени или координате. Вообще говоря, замена переменных x и y на время и координату без труда может быть произведена аналогично тому, как это делалось для других видов уравнений. Однако в практике авторов настоящей монографии задачи, требующие подобной замены, не встречались, поэтому такая замена здесь не рассматривается. С другой стороны, в задаче о распространении магнитостатических волн в анизотропной среде в условиях ориентационного перехода возникает смешанная производная как раз по двум координатам, так что вид уравнения (4.50) и его решений (4.60) и (4.68) сохраняется, поэтому замена переменных не требуется. Применение полученного здесь решения к такой задаче рассматривается далее в главе 14.

4.2. Волновые уравнения электродинамики для проводящей среды

В связи с тем, что ряд вопросов, освещаемых далее в настоящей монографии, относится не только к магнитостатическим, но и к полным электромагнитным волнам (имеющим как магнитное, так и электрическое поля, в том числе с учетом диссипации), авторы сочли уместным привести здесь общую схему работы с волновыми уравнениями электродинамики для проводящей среды (так как на практике проводимость является одной из важнейших причин диссипации).

4.2.1. Введение электрической и магнитной проводимости

В качестве простейшего примера уравнений волнового типа рассмотрим вывод подобных уравнений для электромагнитных волн в проводящей среде. Будем исходить из классических уравнений электродинамики, в системе СИ имеющих вид [109, 423, 424]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \sigma_m \mathbf{H}; \quad (4.127)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma_e \mathbf{E}; \quad (4.128)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (4.129)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0; \quad (4.130)$$

где: \mathbf{E} и \mathbf{H} — электрическое и магнитное поля, ε и μ — действительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, σ_e — действительная электрическая проводимость среды, σ_m — действительная магнитная проводимость среды, ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные.

Здесь «магнитная проводимость» σ_m введена для симметрии уравнений, по аналогии с электрической проводимостью σ_e . Правомерность такого введения оправдывается удобством для решения ряда электродинамических задач, которые, будучи решенными для электрического поля, при введении σ_m легко обобщаются на решение для магнитного поля. К таким задачам относятся расчет магнитных антенн, распространения волн в магнитных средах и ряд других. При этом магнитная проводимость является коэффициентом пропорциональности между «магнитным током проводимости» и магнитным полем.

То есть электрический ток проводимости имеет вид

$$\mathbf{I}_e = \sigma_e \mathbf{E}, \quad (4.131)$$

а соответствующий магнитный ток проводимости определяется формулой:

$$\mathbf{I}_m = \sigma_m \mathbf{H}. \quad (4.132)$$

Более подробно физический смысл введения величин \mathbf{I}_m и σ_m , их комплексный характер и их влияние на энергетические характеристики распространяющихся волн обсуждаются в [109, стр. 6–18].

4.2.2. Общая схема получения волновых уравнений для среды с проводимостью

Для того чтобы получить из (4.127) и (4.128) волновые уравнения, следует взять ротор от каждой из этих формул и воспользоваться соотношением, известным из векторного анализа [414, 425]:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}, \quad (4.133)$$

где

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2}, \quad (4.134)$$

а остальные обозначения являются стандартными.

Таким образом, беря ротор от (4.127), получаем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial(\operatorname{rot} \mathbf{H})}{\partial t} - \sigma_m \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad (4.135)$$

откуда с помощью (4.133), учитывая (4.129), получаем

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\mu_0 \frac{\partial(\operatorname{rot} \mathbf{H})}{\partial t} - \sigma_m \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0. \quad (4.136)$$

Подставляя $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ в соответствии с (4.128) и приводя подобные члены, получаем

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - (\mu\mu_0 \sigma_e + \varepsilon \varepsilon_0 \sigma_m) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \sigma_m \sigma_e \mathbf{E} = 0. \quad (4.137)$$

Разделив на $-\mu\mu_0 \varepsilon \varepsilon_0$ и меняя порядок слагаемых, получаем

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \left(\frac{\sigma_e}{\varepsilon \varepsilon_0} + \frac{\sigma_m}{\mu \mu_0} \right) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0} \Delta \mathbf{E} = -\frac{\sigma_e}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{\sigma_m}{\mu \mu_0} \mathbf{E}. \quad (4.138)$$

Введем обозначения:

$$\beta = \frac{\sigma_e}{\varepsilon \varepsilon_0} + \frac{\sigma_m}{\mu \mu_0}; \quad (4.139)$$

$$v^2 = \frac{1}{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0}; \quad (4.140)$$

$$\gamma = -\frac{\sigma_e}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{\sigma_m}{\mu \mu_0}. \quad (4.141)$$

С этими обозначениями (4.138) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \gamma \mathbf{E}, \quad (4.142)$$

где в (4.134) для упрощения (в значительной степени достаточно общего) оставлена производная только по одной координате x . В такой записи левая часть полученного уравнения совпадает с классическим видом волнового уравнения с затуханием по времени (4.33). Замена функции U на \mathbf{E} здесь означает, что полученное уравнение выполняется для каждой из координатных компонент электрического поля $E_{x,y,z}$.

Следует заметить, что правая часть уравнения (4.142) пропорциональна величине самой переменной, т. е. уравнение является неоднородным. В случае граничной задачи решение такого уравнения может быть получено в виде разложения в ряд по собственным функциям однородного уравнения (с нулевой правой частью), полученным при соответствующих граничных условиях [10, стр. 96–98].

В частном случае $\sigma_m = 0$ или $\sigma_e = 0$ уравнение становится однородным, и его решение может быть получено в виде (4.34).

Уравнение (4.142) получено для электрического поля на основе уравнения (4.127). Аналогичным образом на основе уравнения (4.128) можно получить волновое уравнение для магнитного поля. Выполнение такого полезного математического упражнения авторы предоставляют любознательному читателю.

4.2.3. Волновые уравнения при гармонической зависимости от времени

Другим частным случаем является предположение гармонической зависимости от времени в виде $\exp(i\omega t)$. При этом производные по времени заменяются на следующие коэффициенты:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega; \quad (4.143)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2, \quad (4.144)$$

так что уравнение (4.142), после некоторых преобразований, принимает вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad (4.145)$$

где введено обозначение

$$k = \omega \sqrt{\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \left[1 - \frac{1}{\omega^2} \frac{\sigma_e}{\varepsilon\varepsilon_0} \frac{\sigma_m}{\mu\mu_0} - \frac{i}{\omega} \left(\frac{\sigma_e}{\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{\sigma_m}{\mu\mu_0} \right) \right]}, \quad (4.146)$$

играющее роль волнового числа в среде, где одновременно имеют место как магнитная, так и электрическая проводимость.

Полностью выполняя приведенные преобразования с уравнением (4.128), можно получить уравнение, подобное (4.145) для магнитного поля:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + k^2 \mathbf{H} = 0, \quad (4.147)$$

в котором волновое число k определяется тем же выражением (4.146).

Уравнения (4.145) и (4.147) имеют классический вид волнового уравнения, в котором k — волновое число. Из (4.146) видно, что, благодаря проводимостям σ_e и σ_m , волновое число является комплексным, т. е. волна при распространении в проводящей среде затухает.

Полагая магнитную проводимость равной нулю, $\sigma_m = 0$, получаем волновое число для среды, в которой присутствует только электрическая проводимость:

$$k = \omega \sqrt{\mu\mu_0 \left(\varepsilon\varepsilon_0 - i \frac{\sigma_e}{\omega} \right)}. \quad (4.148)$$

В отсутствие проводимости ($\sigma_e = 0$) из (4.148) получаем

$$k = \omega \sqrt{\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0}, \quad (4.149)$$

что дает волновое число для непроводящей среды.

При $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$ получаем

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}, \quad (4.150)$$

т. е. волновое число для электромагнитной волны, распространяющейся в свободном пространстве. При этом фазовая скорость такой волны равна

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c, \quad (4.151)$$

где c — скорость света.

Вынесем теперь под корнем в выражении (4.148) величину ε_0 за скобку:

$$k = \omega \sqrt{\mu\mu_0 \varepsilon_0 \left(\varepsilon - i \frac{\sigma_e}{\varepsilon_0 \omega} \right)}. \quad (4.152)$$

Из сравнения (4.152) с (4.149) видно, что в (4.152) выражение в скобках под корнем играет такую же роль, как величина ε в (4.149). Поэтому это выражение можно рассматривать как комплексную диэлектрическую проницаемость в проводящей среде:

$$\varepsilon_c = \varepsilon - i \frac{\sigma_e}{\varepsilon_0 \omega}, \quad (4.153)$$

которая при $\sigma_e = 0$ переходит в обычную действительную диэлектрическую проницаемость для непроводящей среды.

Таким образом, с введением комплексной диэлектрической проницаемости ε_c волновое число в проводящей среде принимает вид:

$$k = \omega \sqrt{\mu\mu_0 \varepsilon_c \varepsilon_0}. \quad (4.154)$$

Система уравнений электродинамики (4.127)–(4.130) при введении комплексной диэлектрической проницаемости (4.153) и временной зависимости вида $\exp(i\omega t)$ принимает вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega\mu\mu_0 \mathbf{H}; \quad (4.155)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = i\omega\varepsilon_c \varepsilon_0 \mathbf{E}; \quad (4.156)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0; \quad (4.157)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (4.158)$$

Волновые уравнения (4.145) и (4.147) сохраняют свой вид, причем k определяется формулой (4.154), где ε_c определяется (4.153).

4.3. Некоторые полезные приемы математических вычислений

В заключение главы о математическом аппарате, используемом при описании волновых процессов, приведем еще некоторые чисто математические моменты, полезные для дальнейшего рассмотрения.

4.3.1. Комплексная амплитуда

Традиционно полагается, что при анализе колебательных процессов с помощью комплексных переменных следует выразить действительные тригонометрические величины (синус или косинус) в комплексной форме, а после проведения соответствующих вычислений взять из полученного решения действительную или мнимую часть. При этом предпочтение в знаке гармонической зависимости от времени обычно определяется традицией или вкусами авторов. Рассмотрим этот момент несколько подробнее.

Комплексные амплитуды вводятся для действительных величин, имеющих гармоническую зависимость от времени вида $\cos \omega t$ или $\sin \omega t$, в общем случае определяемых выражением

$$E(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (4.159)$$

где амплитуды A и B — действительные.

Возможны два вида комплексной зависимости гармонической величины от времени: $e^{-i\omega t}$ и $e^{i\omega t}$.

При этом:

$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t; \quad (4.160)$$

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t. \quad (4.161)$$

Согласно классическому определению [426, стр. 13, форм. (2.01)], комплексная амплитуда $E(\omega)$ — величина, определяемая соотношением:

$$E(t) = \operatorname{Re}[E(\omega)e^{\pm i\omega t}]. \quad (4.162)$$

Рассмотрим сначала зависимость от времени в виде $e^{-i\omega t}$, т. е.

$$E(t) = \operatorname{Re}[E(\omega)e^{-i\omega t}]. \quad (4.163)$$

Предположим, что

$$E(\omega) = x + iy, \quad (4.164)$$

где величины x и y — действительные.

Подставляя (4.159), (4.163) и (4.160) в (4.162), получаем

$$\begin{aligned} A \cos \omega t + B \sin \omega t &= \operatorname{Re}[(x + iy)(\cos \omega t - i \sin \omega t)] = \\ &= \operatorname{Re}[x \cos \omega t + y \sin \omega t + i(-x \sin \omega t + y \cos \omega t)] = \\ &= x \cos \omega t + y \sin \omega t. \end{aligned} \quad (4.165)$$

Отсюда получаем

$$x = A, \quad y = B, \quad (4.166)$$

т. е.:

$$E(\omega) = A + iB. \quad (4.167)$$

Это — комплексная амплитуда величины $E(t)$ при зависимости от времени в виде $e^{-i\omega t}$.

Рассмотрим теперь зависимость от времени в виде $e^{i\omega t}$, т. е.

$$E(t) = \operatorname{Re} [E(\omega)e^{i\omega t}]. \quad (4.168)$$

При этом вместо (4.165) получаем

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t = x \cos \omega t - y \sin \omega t, \quad (4.169)$$

откуда:

$$x = A, \quad y = -B, \quad (4.170)$$

т. е.:

$$E(\omega) = A - iB. \quad (4.171)$$

Это — комплексная амплитуда величины $E(t)$ при зависимости от времени в виде $e^{i\omega t}$.

Из сравнения (4.167) с (4.171) видно, что с точки зрения удобства работы с суммой, а не с разностью предпочтительнее выбор зависимости от времени в виде $e^{-i\omega t}$. Однако, согласно традиции, чаще выбирается зависимость вида $e^{i\omega t}$, приводящая к формуле (4.171).

Резюмируя сказанное, приведем общий вывод из полученных выражений.

Итак, если имеется действительная величина

$$E(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (4.172)$$

которую требуется представить в виде:

$$E(t) = \operatorname{Re} [E(\omega)e^{\pm i\omega t}], \quad (4.173)$$

где $E(\omega)$ — комплексная амплитуда, то при зависимости от времени вида $e^{-i\omega t}$ ее комплексная амплитуда имеет вид:

$$E(\omega) = A + iB, \quad (4.174)$$

а при зависимости от времени вида $e^{i\omega t}$ комплексная амплитуда имеет вид:

$$E(\omega) = A - iB. \quad (4.175)$$

4.3.2. Представление комплексного числа в виде произведения действительного числа на экспоненту с мнимым показателем

В гармоническом колебательном процессе сдвиг фазы — мнимая добавка в показателе экспоненты: $e^{i(\omega t + \varphi)}$, $e^{i(kx + \varphi)}$ или $e^{i(\omega t - kx + \varphi)}$, причем амплитуда колебаний предполагается действительной.

Однако, при решении алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами амплитуда обычно получается в виде комплексного числа. Поэтому, чтобы найти сдвиг фазы, надо представить это комплексное число в виде произведения действительного числа на экспоненту с мнимым показателем.

Стандартная формула [402, стр. 71, форм. 401.2]:

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i \arctg \frac{b}{a}}. \quad (4.176)$$

Это — развернутый вариант формулы

$$a + ib = r e^{i\varphi}, \quad (4.177)$$

где:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{b}{a}. \quad (4.178)$$

Эта формула хорошо работает только при $a > 0$ из-за того, что функция арктангенса определена только в правой полуплоскости плоскости единичной окружности, а положительные значения a также соответствуют правой полуплоскости комплексной плоскости.

При $a < 0$ справедлива формула

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i \left(\arctg \frac{b}{a} + \pi \right)}. \quad (4.179)$$

Здесь как угол, соответствующий показателю экспоненты, так и значения a соответствуют левой комплексной полуплоскости и плоскости единичной окружности.

Универсальная формула, справедливая при всех действительных значениях величины a , имеет вид

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i \left[\arctg \frac{b}{a} + \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2}} \right) \right]}. \quad (4.180)$$

В виде (4.180) можно представить любое комплексное число — при любых действительных a и b .

При $b = 0$ формула (4.180) принимает вид

$$a = \sqrt{a^2} e^{i \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2}} \right)}. \quad (4.181)$$

В виде (4.181) можно представить любое действительное число.

При $a = 0$ формула (4.180) принимает вид:

$$ib = \sqrt{b^2} e^{i \frac{\pi}{2}}. \quad (4.182)$$

В виде (4.182) можно представить любое мнимое число.

Знак Z действительного числа a (где $a = Z|a|$) можно представить в виде коэффициента, равного $+1$, когда $a > 0$ и -1 , когда $a < 0$, для чего воспользоваться формулой, получаемой из (4.181):

$$Z = \frac{a}{\sqrt{a^2}} = e^{i \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2}} \right)}. \quad (4.183)$$

С помощью этой формулы можно перевести изменение знака числа a в показатель мнимой экспоненты, т. е. представить число a в виде:

$$a = |a|e^{i\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{a}{|a|}\right)}. \quad (4.184)$$

Так, например, в задаче об отражении одномерной волны от одной границы раздела сред [427, 428] получены амплитуды отраженной и проходящей волн в виде:

$$B = A\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad (4.185)$$

$$C = A\frac{2k_1}{k_1 + k_2}. \quad (4.186)$$

Здесь по физическому смыслу $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Для удобства также можно положить, что $A > 0$.

При этом знак C всегда совпадает со знаком A , т. е. в нашем случае $C > 0$ при любых значениях k_1 и k_2 .

Знак B совпадает со знаком A только при $k_1 > k_2$ (отражение от менее плотной среды), а при $k_1 < k_2$ (отражение от более плотной среды) ему противоположен.

Такое поведение знака B по отношению к знаку A можно интерпретировать как изменение фазы отраженной волны по отношению к фазе падающей: совпадение знаков означает неизменность фазы, противоположность знаков — изменение фазы на π .

Чтобы выделить изменение фазы в явном виде, надо перевести изменение знака в показатель мнимой экспоненты, т. е. представить B в виде

$$B = A|B|e^{i\alpha}, \quad (4.187)$$

где α — действительное число.

Для этого можно воспользоваться представлением знака Z действительного числа a (где $a = Z|a|$) в виде коэффициента, равного $+1$, когда $a > 0$ и -1 , когда $a < 0$, в виде

$$Z = \frac{a}{|a|} = e^{i\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{a}{|a|}\right)}. \quad (4.188)$$

При этом получаем

$$B = A\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = A\frac{|k_1 - k_2|}{k_1 + k_2}e^{i\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{k_1 - k_2}{|k_1 - k_2|}\right)}. \quad (4.189)$$

Отсюда видно, что при $k_1 > k_2$ (отражение от менее плотной среды) показатель экспоненты равен нулю, т. е. фаза отраженной волны не меняется, а при $k_1 < k_2$ (отражение от более плотной среды) показатель экспоненты равен $i\pi$, т. е. фаза отраженной волны меняется на π .

4.3.3. Сведение волнового уравнения второго порядка к двум уравнениям первого порядка

Волновое уравнение в среде с затуханием по времени ((4.33) или (4.142)) имеет вид

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial G}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0, \quad (4.190)$$

где $\beta \geq 0$.

Разделим на a^2 :

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \frac{\beta}{a^2} \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0. \quad (4.191)$$

Введем новые переменные:

$$u = \frac{1}{a} \frac{\partial G}{\partial t}; \quad (4.192)$$

$$v = \frac{\partial G}{\partial x}. \quad (4.193)$$

Подставляя (4.192) и (4.193) в уравнение (4.191), получаем

$$\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\beta}{a} u - \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (4.194)$$

Дифференцируя (4.192) по x и (4.193) по t , после чего, исключая из полученных двух выражений смешанную производную, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \quad (4.195)$$

Записываем (4.194) и (4.195) в виде единой системы уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\beta}{a} u; \quad (4.196)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \quad (4.197)$$

В таком виде эта система аналогична классической системе уравнений электродинамики [423, 424]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}; \quad (4.198)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0. \quad (4.199)$$

4.3.4. Представление уравнения гармонических колебаний второго порядка в виде уравнения первого порядка

В общем случае уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (4.200)$$

т. е. имеет второй порядок по времени. Его простейшее решение имеет вид

$$x = e^{i\omega t}. \quad (4.201)$$

Однако в ряде случаев при рассмотрении гармонических колебаний бывает удобно заменить уравнение второго порядка уравнением первого порядка в предположении гармонической зависимости от времени.

Покажем, как это можно сделать. Итак полагаем, что решение заведомо имеет вид (4.201). Дифференцируя по времени, получаем

$$\frac{dx}{dt} = i\omega e^{i\omega t}, \quad (4.202)$$

т. е.

$$\frac{dx}{dt} = i\omega x, \quad (4.203)$$

откуда получаем

$$\frac{dx}{dt} - i\omega x = 0. \quad (4.204)$$

Решим это уравнение. Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dx}{x} = i\omega dt, \quad (4.205)$$

откуда интегрирование дает

$$\ln x = i\omega t, \quad (4.206)$$

т. е.

$$x = e^{i\omega t}. \quad (4.207)$$

Это и есть решение уравнения (4.200) (постоянными интегрирования для простоты пренебрегаем).

С другой стороны, дифференцируя (4.204) по времени и подставляя (4.203), получаем:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (4.208)$$

т. е. уравнение (4.200).

Таким образом, если заведомо предполагается гармоническая зависимость от времени, то уравнение первого порядка (4.204) является эквивалентом уравнения второго порядка (4.200).

Такая замена в ряде случаев приводит к упрощению математических выкладок. Это имеет место, например, при рассмотрении связанных колебаний, особенно нелинейных параметрических процессов.

Такое представление используется, например, в работе [429, стр. 117] при записи системы уравнений для связанных колебаний осцилляторов a_1 и a_2 , имеющей вид:

$$\dot{a}_1 = i(\omega_1 a_1 + \text{const} \cdot a_0 a_2^*); \quad (4.209)$$

$$\dot{a}_2^* = -i(\omega_2 a_2^* + \text{const} \cdot a_0^* a_1). \quad (4.210)$$

Здесь a_1 и a_2 представляют собой неоднородные типы прецессии намагниченности, а связь между ними предполагается пропорциональной

однородной прецессии a_0 . При этом зависимость от времени в виде $\exp(i\omega t)$ с учетом комплексного сопряжения (отмеченного звездочкой) является единой для каждого из осцилляторов только в случае, если зависимость от времени однородной прецессии имеет вид $\exp(2i\omega t)$ (любопытный читатель может проверить путем прямой подстановки). Такая зависимость от времени однородной прецессии может быть обеспечена внешним возбуждением путем приложения переменного поля с частотой 2ω , т. е. возможно параметрическое возбуждение рассматриваемых осцилляторов. Учет затухания каждого из осцилляторов для возбуждения параметрических колебаний приводит к необходимости преодоления определенного порога по амплитуде переменного поля. Что касается «параметра» осциллятора, который должен меняться для осуществления параметрического возбуждения [430–432], то можно полагать, что таковым является намагниченность материала, величина которой, как известно, уменьшается при увеличении количества возбуждаемых спиновых волн (магнонов) [12, стр.121, форм. (20.16)], а также [391, стр. 851, форм. (54.11)]. В более развернутом виде этот механизм параметрического возбуждения представлен в работе [433], а также в монографии [66, стр. 18, стр. 66].

4.3.5. Гиперболический арктангенс комплексного числа

В задаче о распространении дипольных магнитостатических волн типа Дэймона–Эшбаха, в том числе для сложных структур [1,2], часто встречается дисперсионное соотношение, содержащее гиперболический тангенс (или котангенс). В среде с диссипацией, т. е. когда волновое число становится комплексным, возникает необходимость нахождения обратных гиперболических функций, аргументом которых является комплексное число. Некоторые результаты такого вычисления в виде готовых формул можно найти, например, в [402, стр. 143]. Ввиду определенной сложности подобных формул, для разумного их применения представляет интерес подробный механизм их получения. В качестве примера приведем здесь вывод одной из таких формул, а именно гиперболического арктангенса от комплексного числа.

Итак, пусть требуемое соотношение имеет вид

$$\operatorname{Arth}(a + ib) = \eta + i\xi. \quad (4.211)$$

Перед нами стоит задача: выразить η и ξ через a и b .

Выполним решение этой задачи последовательно.

Возьмем гиперболический тангенс от обеих частей (4.211):

$$a + ib = \operatorname{th}(\eta + i\xi). \quad (4.212)$$

Запишем гиперболический тангенс через экспоненты и умножим числитель и знаменатель дроби на e^η :

$$\operatorname{th}(\eta + i\xi) = \frac{e^{2\eta} e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{e^{2\eta} e^{i\xi} + e^{-i\xi}}. \quad (4.213)$$

Запишем экспоненты с мнимыми показателями через формулы Эйлера, после чего выделим в числителе и знаменателе действительную и мнимую части:

$$\operatorname{th}(\eta + i\xi) = \frac{(e^{2\eta} - 1) \cos \xi + i(e^{2\eta} + 1) \sin \xi}{(e^{2\eta} + 1) \cos \xi + i(e^{2\eta} - 1) \sin \xi}. \quad (4.214)$$

Освободимся от мнимости в знаменателе, для чего умножим числитель и знаменатель на выражение, комплексно сопряженное с выражением в знаменателе:

$$\begin{aligned} \operatorname{th}(\eta + i\xi) &= \\ &= \frac{[(e^{2\eta} - 1) \cos \xi + i(e^{2\eta} + 1) \sin \xi] [(e^{2\eta} + 1) \cos \xi + i(e^{2\eta} - 1) \sin \xi]}{(e^{2\eta} + 1)^2 \cos^2 \xi + (e^{2\eta} - 1)^2 \sin^2 \xi}. \end{aligned} \quad (4.215)$$

Выполняя умножение, раскрывая скобки и выделяя действительную и мнимую части, получаем

$$\operatorname{th}(\eta + i\xi) = \frac{e^{4\eta} - 1}{e^{4\eta} + 2e^{2\eta} \cos 2\xi + 1} + i \frac{2e^{2\eta} \sin 2\xi}{e^{4\eta} + 2e^{2\eta} \cos 2\xi + 1}. \quad (4.216)$$

Сравнивая с (4.212), находим:

$$a = \frac{e^{4\eta} - 1}{e^{4\eta} + 2e^{2\eta} \cos 2\xi + 1}; \quad (4.217)$$

$$b = \frac{2e^{2\eta} \sin 2\xi}{e^{4\eta} + 2e^{2\eta} \cos 2\xi + 1}. \quad (4.218)$$

Разделим (4.218) на (4.217):

$$\frac{b}{a} = \frac{2e^{2\eta} \sin 2\xi}{e^{4\eta} - 1}. \quad (4.219)$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на $e^{-2\eta}$ и воспользуемся определением гиперболического синуса через экспоненты, в результате чего получим

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin 2\xi}{\operatorname{sh} 2\eta}. \quad (4.220)$$

Из этого выражения находим

$$\sin 2\xi = \frac{b}{a} \operatorname{sh} 2\eta, \quad (4.221)$$

откуда получаем также

$$\cos 2\xi = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a} \operatorname{sh} 2\eta\right)^2}. \quad (4.222)$$

Из (4.217) получаем

$$a(e^{4\eta} + 2e^{2\eta} \cos 2\xi + 1) = e^{4\eta} - 1, \quad (4.223)$$

откуда находим

$$2ae^{2\eta} \cos 2\xi = (e^{4\eta} - 1) - a(e^{4\eta} + 1). \quad (4.224)$$

Подставляя (4.222) и возводя в квадрат, получаем

$$4a^2 e^{4\eta} \left[1 - \left(\frac{b}{a} \operatorname{sh} 2\eta \right)^2 \right] = [(e^{4\eta} - 1) - a(e^{4\eta} + 1)]^2. \quad (4.225)$$

Раскрывая скобки, перенося все в левую часть и записывая по степеням $e^{4\eta}$, получаем

$$[b^2 + (a - 1)^2] e^{8\eta} - 2(a^2 + b^2 + 1)e^{4\eta} + [b^2 + (a + 1)^2] = 0. \quad (4.226)$$

Это — квадратное уравнение относительно $e^{4\eta}$. Решая его, получаем

$$e^{4\eta} = \frac{(a^2 + b^2 + 1) \pm \sqrt{A}}{b^2 + (a - 1)^2}, \quad (4.227)$$

где

$$A = (a^2 + b^2 + 1)^2 - [b^2 + (a - 1)^2][b^2 + (a + 1)^2]. \quad (4.228)$$

Выполняя умножение, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем

$$A = 4a^2. \quad (4.229)$$

Подставляя в (4.227) и извлекая корень, получаем

$$e^{4\eta} = \frac{(a^2 + b^2 + 1) \pm 2a}{b^2 + (a - 1)^2}. \quad (4.230)$$

При знаке «минус» получается $e^{4\eta} = 1$, откуда $\eta = 0$. В соответствии с (4.221) получаем также $\xi = 0$, т. е. выражение (4.212) не удовлетворяется. Поэтому оставим знак «плюс», раскроем скобки в числителе, воспользуемся формулой для квадрата суммы и изменим порядок суммирования:

$$e^{4\eta} = \frac{(a + 1)^2 + b^2}{(a - 1)^2 + b^2}. \quad (4.231)$$

Из этого выражения с помощью определения натурального логарифма находим η :

$$\eta = \frac{1}{4} \ln \frac{(a + 1)^2 + b^2}{(a - 1)^2 + b^2}. \quad (4.232)$$

Итак, действительная часть требуемого решения (4.211) найдена.

Найдем теперь мнимую часть ξ , для чего воспользуемся выражениями (4.221) и (4.222), разделив первое из которых на второе, возводя в квадрат и освобождаясь от дроби в знаменателе, получаем

$$\operatorname{tg}^2 2\xi = \frac{b^2 \operatorname{sh}^2 2\eta}{a^2 - b^2 \operatorname{sh}^2 2\eta}. \quad (4.233)$$

Пользуясь выражением гиперболического синуса через экспоненты, получаем

$$\operatorname{sh}^2 2\eta = \frac{1}{4}(e^{4\eta} + e^{-4\eta} - 2). \quad (4.234)$$

Введем вспомогательные обозначения:

$$u = (a + 1)^2 + b^2; \quad (4.235)$$

$$v = (a - 1)^2 + b^2. \quad (4.236)$$

В этих обозначениях из (4.231) получаем:

$$e^{4\eta} = \frac{u}{v}; \quad (4.237)$$

$$e^{-4\eta} = \frac{v}{u}. \quad (4.238)$$

Подставляя эти выражения в скобки правой части (4.234) и выполняя суммирование, получаем

$$e^{4\eta} + e^{-4\eta} - 2 = \frac{(u - v)^2}{uv}. \quad (4.239)$$

Подставляя это выражение в (4.234), а найденный квадрат гиперболического синуса — в (4.233), получаем

$$\operatorname{tg}^2 2\xi = \frac{b^2(u - v)^2}{4a^2uv - b^2(u - v)^2}. \quad (4.240)$$

С помощью (4.235) и (4.236) находим:

$$(u - v)^2 = 16a^2; \quad (4.241)$$

$$uv = a^4 + b^4 + 1 - 2a^2 + 2b^2 + 2a^2b^2. \quad (4.242)$$

Подставляя (4.241) в числитель дроби (4.240), а (4.241) и (4.242) в ее знаменатель, приводя подобные члены и сокращая на $4a^2$, получаем

$$\operatorname{tg}^2 2\xi = \frac{4b^2}{(a^2 + b^2 - 1)^2}. \quad (4.243)$$

Извлекая квадратный корень, получаем

$$\operatorname{tg} 2\xi = \pm \frac{2b}{a^2 + b^2 - 1}. \quad (4.244)$$

Из этого выражения находим

$$\xi = \pm \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2b}{a^2 + b^2 - 1} + \frac{\pi}{2}n. \quad (4.245)$$

Итак, и мнимая часть требуемого решения (4.211) найдена.

Таким образом, с учетом (4.232) и (4.245), в соответствии с (4.211), получаем искомое представление гиперболического арктангенса от комплексного числа в виде

$$\operatorname{Arth}(a + ib) = \frac{1}{4} \ln \frac{(a+1)^2 + b^2}{(a-1)^2 + b^2} + i \left(\pm \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2b}{a^2 + b^2 - 1} + \frac{\pi}{2} n \right). \quad (4.246)$$

Можно видеть, что это выражение с точностью до обозначений, а также при учете знаков, совпадает с приведенным в [402, стр. 143, форм. 722.2].

Замечание. При использовании формулы (4.246) следует учитывать, что цикличность аргумента комплексного числа, хотя и получается из тангенса, но равна не πn , а $2\pi n$, так как при изменении угла на π тангенс остается тем же самым, но вектор комплексного числа перескакивает в квадрант комплексной плоскости, диаметрально противоположный исходному (т. е. знаки обеих частей меняются). Вообще говоря, чтобы проверить знаки и цикличность формулы (4.246) (с учетом (4.244)) полностью корректно, следует взять гиперболический тангенс от правой части (4.246), выражая его через экспоненты. Такое математическое упражнение предоставляем любознательному читателю.

Выводы по главе 4

Данная глава посвящена описанию способов решений волновых уравнений второго порядка, а также некоторых приемов математических вычислений, важных для дальнейшего рассмотрения.

Основные результаты, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрены основные виды линейных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. Для случая двух переменных выполнена классификация и приведен общий вид таких уравнений, содержащий производные первого и второго порядка по каждой из переменных, а также смешанную производную второго порядка по обоим переменным.

2. Рассмотрены частные случаи уравнений, содержащих только первые и вторые производные по каждой из переменных. Приведены способы решения, соответствующие задачам о затухании распространяющейся волны по координате и по времени. Отмечено, что физический смысл полученных решений сводится к экспоненциальному затуханию решения по времени или по координате, совпадающей с направлением распространения волны.

3. Рассмотрено уравнение, содержащее смешанную производную по обоим переменным. Для простоты рассмотрен случай без затухания. Приведены два способа решения: первый — в предположении распространения волны вдоль одной из координат и второй без тако-

го предположения. Показано, что в обоих случаях решение сводится к рассмотрению квадратного уравнения относительно постоянной распространения (типа волнового числа) вдоль одной из координат. При этом полное решение вдоль одной из координат имеет характер периодической незатухающей распространяющейся волны типа волны Даламбера, а вдоль второй координаты имеет характер произведения периодической синусоиды на спадающую или нарастающую экспоненту.

4. Рассмотрен вывод волновых уравнений электродинамики для среды, обладающей электрической и магнитной проводимостями. Отмечено, что в случае наличия обеих проводимостей волновое уравнение является неоднородным. Приведена схема получения комплексного волнового числа, мнимая часть которого соответствует затуханию волны в условиях диссипации. Отмечена возможность введения электрической проводимости в качестве мнимой добавки к диэлектрической проницаемости среды.

5. Приведены некоторые приемы математических вычислений, полезные для дальнейшего рассмотрения, однако несколько недостаточно освещенные в известной авторам настоящей монографии литературе. К таковым относится определение комплексной амплитуды для случаев положительного и отрицательного мнимых показателей экспоненциальной зависимости от времени, представление комплексного числа в виде произведения действительного числа на экспоненту с мнимым показателем, сведение волнового уравнения второго порядка к двум уравнениям первого порядка, представление уравнения гармонических колебаний второго порядка в виде уравнения первого порядка, а также вычисление гиперболического арктангенса от комплексного аргумента.

Глава 5

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ ПРИ РАСЧЕТЕ ДИНАМИКИ НАМАГНИЧЕННОСТИ

В настоящей главе приведены некоторые сведения, касающиеся основного математического аппарата, используемого при расчете динамики намагниченности. Сначала кратко рассмотрен тензор магнитной проницаемости, затем приведены выражения для основных видов плотности энергии магнетика в декартовой и сферической системах координат, дан некий экскурс в понятие о магнитостатических волнах и в заключение рассмотрен вывод волнового уравнения из общих уравнений электродинамики, включающих проводимость. Материал главы никак не претендует на исчерпывающую полноту, но лишь слегка касается вопросов, необходимых для дальнейшего рассмотрения. Основная цель данной главы — избавить читателя от необходимости искать соответствующий материал в разрозненной литературе. В качестве источников использованы [1–3, 12, 15–17, 109, 235, 426, 434]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

5.1. Уравнение движения для намагниченности

Динамические свойства вектора намагниченности описываются уравнением Ландау–Лифшица с диссипативным членом в форме Гильберта (1.5) [15–18]:

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma[\mathbf{m} \times \mathbf{H}_e] + \alpha \left[\mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \right], \quad (5.1)$$

где $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_0$ — нормированный вектор намагниченности, M_0 — намагниченность насыщения, γ — гиромангнитная постоянная, \mathbf{H}_e — эффективное поле внутри магнетика, α — параметр затухания Гильберта.

Эффективное поле определяется функциональной производной от плотности энергии U магнетика [16, стр. 68–69; 17, стр. 41–42]:

$$\mathbf{H}_e = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{M}} + \sum_{p=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_p} \left[\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_p} \right)} \right]. \quad (5.2)$$

Достаточно корректный вывод выражения (5.2) авторам настоящей монографии не известен. В упомянутых ссылках приводятся лишь некоторые качественные соображения с оговоркой о невозможности строгого вывода как уравнения (5.1), так и выражения (5.2). Однако следует заметить, что уравнение (5.1) может быть получено как обобщение на вектор намагниченности уравнения для механического волчка [1, стр.37–41], так что и относительно (5.2), по-видимому, возможна определенная аналогия.

В общем случае плотность энергии зависит не только от намагниченности, но и от производных от намагниченности по координатам, что в первую очередь связано с обменным взаимодействием, рассмотренным далее в разделе 5.2.4.

Если, подобно [16, 17], исходить из условия равновесия, определяемого минимумом энергии, то следуя правилам вариационного исчисления [415, стр. 292], надо минимизировать функционал

$$W = \int_V U \left(\mathbf{H}_e, \mathbf{M}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_p} \right) dx_p, \quad (5.3)$$

где значение p пробегает по всем координатам x, y, z .

Условием минимума такого функционала является решение уравнения Эйлера [415, стр. 297]

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{M}} - \sum_{p=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_p} \left[\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_p} \right)} \right] = 0. \quad (5.4)$$

С другой стороны, минимум энергии соответствует состоянию покоя намагниченности, при котором левая часть уравнения (5.1) равняется нулю, т. е. (в пренебрежении затуханием) выполняется соотношение

$$[\mathbf{M} \times \mathbf{H}_e] = 0. \quad (5.5)$$

Очевидно, подстановка в эту формулу на место \mathbf{H}_e выражения (5.4) приводит к удовлетворению равенства (5.5).

То есть, если положить

$$\mathbf{H}_e^{(0)} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{M}} - \sum_{p=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_p} \left[\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_p} \right)} \right], \quad (5.6)$$

то соотношение (5.5) заведомо будет выполнено.

Однако традиционное выражение для плотности энергии взаимодействия намагниченности с внешним полем имеет вид [12, стр. 291, форм. (41.7)]

$$U_h = -\mathbf{M}\mathbf{H}, \quad (5.7)$$

откуда:

$$\mathbf{H} = -\frac{\partial U_h}{\partial \mathbf{M}}. \quad (5.8)$$

В соответствии с этим в формуле (5.6) следует изменить знак, так что эффективное поле принимает вид:

$$\mathbf{H}_e = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{M}} + \sum_{p=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_p} \left[\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_p} \right)} \right], \quad (5.9)$$

что и дает как раз выражение (5.2).

Заметим, что приведенный здесь вывод выражения (5.9) также полностью корректным не является, так как в формулу (5.5), чтобы обратить левую часть в нуль, вместо (5.6) можно подставить, вообще говоря, любое другое равное нулю выражение. Оправдывающим моментом здесь является соответствие первого слагаемого формулы (5.9) достаточно корректному выражению (5.8). При этом, поскольку выражение (5.6) является единым, получаемым как уравнение Эйлера (5.4), минимизирующее функционал (5.3), то, по-видимому, и второму слагаемому можно доверять в значительной степени.

Дополнительно следует отметить, что в справедливости второго слагаемого убеждает совпадение с экспериментом выполненных на его основе многочисленных расчетов динамики намагниченности с учетом обменного взаимодействия. С некоторыми из таких расчетов, а также с результатами проверки их в эксперименте, можно ознакомиться по обзорным монографиям [16, гл. 8, 9; 17, гл. 7–11].

5.1.1. Тензор магнитной восприимчивости

Основой рассмотрения волн в магнитной среде являются ее динамические свойства, определяемые тензором магнитной восприимчивости. Прежде чем перейти к изучению волновых процессов, приведем вкратце основные математические формулы, описывающие этот тензор. Будем следовать [1, стр. 41–46; 2, стр. 27–29], куда читатель может обратиться за более подробным выводом приведенных далее выражений.

Решение уравнения (5.1) представляет собой прецессию вектора намагниченности вокруг направления постоянного поля, что отражает гиротропный характер магнитной среды. В линейном приближении зависимость вектора динамической намагниченности \mathbf{m} от вектора переменного поля \mathbf{h} , описывается тензором динамической магнитной восприимчивости $\vec{\chi}$:

$$\mathbf{m} = \vec{\chi} \mathbf{h}, \quad (5.10)$$

матрица которого в изотропной среде имеет вид [1, 2, 15–17]

$$\vec{\chi} = \begin{pmatrix} \chi & i\chi_a & 0 \\ -i\chi_a & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Решая уравнение (5.1) в линейном приближении, получаем компоненты тензора магнитной восприимчивости [1, 2, 15–17]:

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega_H + i\alpha\Omega}{\Omega_H^2 - (1 + \alpha^2)\Omega^2 + i2\alpha\Omega\Omega_H}; \quad (5.12)$$

$$\chi_a = \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega}{\Omega_H^2 - (1 + \alpha^2)\Omega^2 + i2\alpha\Omega\Omega_H}, \quad (5.13)$$

где

$$\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}; \quad (5.14)$$

$$\Omega_H = \frac{H_0}{4\pi M_0}, \quad (5.15)$$

где H_0 — постоянное поле, ω — частота прецессии намагниченности.

Полагая магнитные потери достаточно малыми ($\alpha \ll 1$) и освобождаясь от мнимости в знаменателе, получаем:

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \frac{(\Omega_H + i\alpha\Omega)(\Omega_H^2 - \Omega^2 - i2\alpha\Omega\Omega_H)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}; \quad (5.16)$$

$$\chi_a = \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega(\Omega_H^2 - \Omega^2 - i2\alpha\Omega\Omega_H)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}. \quad (5.17)$$

Для дальнейшего упрощения можно положить мнимые части в числителях обоих этих выражений равными нулю (при этом теряется фаза и частично потери, но для первого рассмотрения можно положить это несущественным):

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega_H(\Omega_H^2 - \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}; \quad (5.18)$$

$$\chi_a = \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega(\Omega_H^2 - \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}. \quad (5.19)$$

5.1.2. Тензор магнитной проницаемости

Рассмотрим теперь родственный магнитной восприимчивости тензор магнитной проницаемости. Учитывая, что магнитная проницаемость связана с восприимчивостью соотношением:

$$\vec{\mu} = \vec{1} + 4\pi\vec{\chi}, \quad (5.20)$$

где $\vec{1}$ — единичный тензор, получаем компоненты тензора магнитной проницаемости в виде:

$$\mu = 1 + \frac{\Omega_H(\Omega_H^2 - \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}; \quad (5.21)$$

$$\mu_a = \frac{\Omega(\Omega_H^2 - \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}. \quad (5.22)$$

Заметим, что динамическая магнитная восприимчивость вещества, обусловленная прецессией вектора намагниченности, традиционно рассчитывается в системе СГС [15–17]. Однако распространение электромагнитных волн часто рассчитывается в системе СИ [109, 426, 434–438]. Правила перехода от одной системы к другой можно найти, например, в учебных монографиях [439, 440]. При переходе к системе СИ восприимчивость (5.18)–(5.19) приобретает вид:

$$\chi^{(C)} = \frac{\Omega_H(\Omega_H^2 - \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}; \quad (5.23)$$

$$\chi_a^{(C)} = \frac{\Omega(\Omega_H^2 - \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}. \quad (5.24)$$

При этом проницаемость вместо (5.20) вычисляется по формуле

$$\overset{\leftarrow}{\mu}^{(C)} = 1 + \overset{\leftarrow}{\chi}^{(C)}, \quad (5.25)$$

что дает те же выражения (5.21), (5.22). То есть, несмотря на различие выражений для компонент восприимчивости в системах СГС и СИ, выражения для компонент проницаемости в обеих системах совпадают.

Более специфические выражения для компонент тензоров восприимчивости и проницаемости, свойственные конкретным задачам, приведены далее в главах 7, 10, 13–15.

5.2. Плотности энергии различных видов в декартовых и сферических координатах

В дальнейшем рассмотрении будут использоваться выражения для плотности энергии магнетика различных видов, записанные в декартовой и сферической системах координат. Поэтому, не вдаваясь в излишние подробности, приведем здесь краткую сводку таких выражений, необходимых далее.

5.2.1. Плотность энергии взаимодействия намагниченности с внешним полем

Плотность энергии взаимодействия намагниченности с внешним полем в общем случае имеет вид [12]

$$U_h = -\mathbf{M}\mathbf{H}. \quad (5.26)$$

В декартовой систем координат это выражение имеет вид:

$$U_h = -(M_x H_x + M_y H_y + M_z H_z). \quad (5.27)$$

Вектор намагниченности в декартовой и сферической системах координат показан на рис. 5.1.

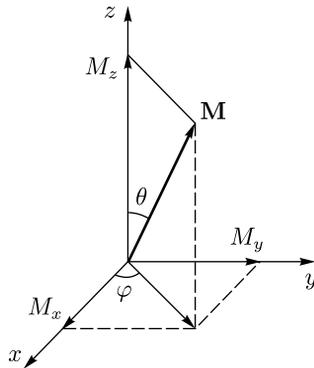


Рис. 5.1. Вектор намагниченности в декартовой и сферической системах координат

Запишем компоненты намагниченности в сферических координатах:

$$M_x = M_0 \sin \theta \cos \varphi; \quad (5.28)$$

$$M_y = M_0 \sin \theta \sin \varphi; \quad (5.29)$$

$$M_z = M_0 \cos \theta. \quad (5.30)$$

Аналогичные компоненты поля имеют вид:

$$H_x = H_0 \sin \theta_H \cos \varphi_H; \quad (5.31)$$

$$H_y = H_0 \sin \theta_H \sin \varphi_H; \quad (5.32)$$

$$H_z = H_0 \cos \theta_H. \quad (5.33)$$

Подставляя (5.28)–(5.30) и (5.31)–(5.33) в (5.27), получаем плотность энергии взаимодействия намагниченности с внешним полем, выраженную в сферических координатах:

$$U_h = -M_0 H_0 (\sin \theta_H \cos \varphi_H \sin \theta \cos \varphi + \sin \theta_H \sin \varphi_H \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta_H \cos \theta). \quad (5.34)$$

5.2.2. Плотность энергии поля размагничивания

Плотность энергии поля размагничивания в общем случае имеет вид [12]

$$U_p = -\frac{1}{2} \mathbf{M} \mathbf{H}. \quad (5.35)$$

Для дальнейшего рассмотрения важно будет поле размагничивания тонкой пластины, параллельной координатной плоскости Oxz (рис. 5.1). В этом случае поле направлено перпендикулярно плоскости пластины, т. е. имеет лишь одну компоненту — вдоль оси Oy , которая имеет вид:

$$H_y = -4\pi M_y. \quad (5.36)$$

В сферической системе координат, т. е. при

$$M_y = M_0 \sin \theta \sin \varphi, \quad (5.37)$$

поле размагничивания приобретает вид

$$H_y = -4\pi M_0 \sin \theta \sin \varphi. \quad (5.38)$$

Записывая скалярное произведение в формуле (5.35) по компонентам и подставляя (5.37) и (5.38), получаем плотность энергии поля размагничивания в виде:

$$U_p(Oxz) = -\frac{1}{2}M_y H_y = 2\pi M_0^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi. \quad (5.39)$$

Для справки приведем плотность энергии поля размагничивания для ориентации тонкой пластины вдоль других координатных плоскостей. Так, для плоскости Oxy , соответствующей ориентации поля размагничивания вдоль оси Oz , получаем

$$U_p(Oxy) = -\frac{1}{2}M_z H_z = 2\pi M_0^2 \cos^2 \theta. \quad (5.40)$$

Для плоскости Oyz , соответствующей ориентации поля размагничивания вдоль оси Ox , получаем:

$$U_p(Oyz) = -\frac{1}{2}M_x H_x = 2\pi M_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi. \quad (5.41)$$

5.2.3. Плотность энергии одноосной анизотропии второго и четвертого порядков

Плотность энергии одноосной анизотропии второго порядка с осью, ориентированной вдоль оси Oz , в декартовых координатах может быть записана в двух видах [3, гл. 4, форм. (4.46)]:

$$U_a^{(1)} = \frac{K}{M_0^2} M_z^2; \quad (5.42)$$

$$U_a^{(2)} = -\frac{K}{M_0^2} (M_x^2 + M_y^2), \quad (5.43)$$

где в случае анизотропии типа «легкая ось» константа K отрицательна, т. е. $K < 0$.

В эквивалентности этих выражений, отличающихся лишь на постоянную величину, можно убедиться, если учесть условие постоянства длины вектора намагниченности:

$$M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = M_0^2. \quad (5.44)$$

В сферической системе координат компоненты намагниченности имеют вид (5.28)–(5.30):

$$M_x = M_0 \sin \theta \cos \varphi; \quad (5.45)$$

$$M_y = M_0 \sin \theta \sin \varphi; \quad (5.46)$$

$$M_z = M_0 \cos \theta. \quad (5.47)$$

Подставляя (5.45)–(5.47) в (5.42)–(5.43), получаем:

$$U_a^{(1)} = K \cos^2 \theta; \quad (5.48)$$

$$U_a^{(2)} = -K \sin^2 \theta. \quad (5.49)$$

С точностью до знака константы плотность энергии одноосной анизотропии в виде второго из этих равенств используется в технике ЦМД [235, стр.23, форм. (1.14)] (здесь в (5.49) эта константа отрицательна, там — положительна).

В качестве примера также полезно рассмотреть одноосную анизотропию более высокого — четвертого порядка. В случае ориентации оси вдоль Oz выражения, подобные (5.42) и (5.43), с учетом (5.44) переходящие друг в друга с точностью до постоянного слагаемого, имеют вид:

$$U_{ag}^{(1)} = \frac{K}{M_0^4} M_z^4, \quad (5.50)$$

$$U_{ag}^{(2)} = \frac{K}{M_0^4} (M_x^4 + M_y^4 - 2M_0^2 M_x^2 - 2M_0^2 M_y^2 + 2M_x^2 M_y^2). \quad (5.51)$$

Подставляя в эти выражения (5.45)–(5.47), получаем:

$$U_{ag}^{(1)} = K \cos^4 \theta; \quad (5.52)$$

$$U_{ag}^{(2)} = K \sin^2 \theta (\sin^2 \theta - 2), \quad (5.53)$$

где приведенные выражения эквивалентны с точностью до постоянного слагаемого.

В случае ориентации оси вдоль Ox выражения, подобные (5.50) и (5.51), имеют вид:

$$U_{ag}^{(1)} = \frac{K}{M_0^4} M_x^4, \quad (5.54)$$

$$U_{ag}^{(2)} = \frac{K}{M_0^4} (M_0^2 + M_y^4 + M_z^4 - 2M_0^2 M_y^2 - 2M_0^2 M_z^2 + 2M_y^2 M_z^2). \quad (5.55)$$

Подставляя в эти выражения (5.45)–(5.47), получаем:

$$U_{ag}^{(1)} = K \sin^4 \theta \cos^4 \varphi; \quad (5.56)$$

$$U_{ag}^{(2)} = K \{ \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - 2) + \sin^4 \theta \sin^2 \varphi (\sin^2 \varphi - 2) \}. \quad (5.57)$$

Эти выражения также эквивалентны с точностью до постоянного слагаемого.

Следует заметить, что, в отличие от (5.52) и (5.53), куда входит только угол θ , выражения (5.56) и (5.57) зависят также от угла φ . Подобная зависимость от азимутальной координаты обусловлена тем, что при ориентации оси анизотропии вдоль координатной оси Oz , ось анизотропии совпадает с полярной осью сферической системы координат, поэтому энергия анизотропии относительно этой полярной оси обладает цилиндрической симметрией. При ориентации же оси анизотропии вдоль координатной оси Ox , т. е. вдоль азимутальной оси сферической системы координат, энергия анизотропии имеет осевую симметрию относительно именно этой оси, что и вызывает появление в выражениях (5.56) и (5.57) содержащих φ составляющих, отражающих цилиндрическую симметрию энергии относительно оси Ox . Можно видеть, что эти составляющие по структуре подобны зависимостям (5.52), (5.53), отражающим цилиндрическую симметрию по углу θ .

5.2.4. Плотность энергии неоднородного обменного взаимодействия

Плотность энергии неоднородного обменного взаимодействия в декартовой системе координат имеет три эквивалентных вида записи:

$$U_{\text{ex}}^{(1)} = \frac{A}{M_0^2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial M_i}{\partial x_j} \right)^2; \quad (5.58)$$

$$U_{\text{ex}}^{(2)} = \frac{A_0}{2aM_0^2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial M_i}{\partial x_j} \right)^2; \quad (5.59)$$

$$U_{\text{ex}}^{(3)} = \frac{q}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial M_i}{\partial x_j} \right)^2, \quad (5.60)$$

где A , A_0 , q — различные виды констант неоднородного обменного взаимодействия, M_0 — намагниченность насыщения, a — постоянная решетки кристалла.

Вид $U_{\text{ex}}^{(1)}$ с константой A наиболее употребителен при расчете доменных структур, особенно ЦМД. Это вид используется в книге [235, стр. 21].

Вид $U_{\text{ex}}^{(2)}$ с константой A_0 употреблялся в 40–50-х годах XX века при исследовании магнетизма в металлах. Этот вид используется в книге [12, стр. 261, стр. 298] (в этой книге константа записывается без индекса «0», здесь он введен для различения с предыдущей константой A).

Вид $U_{\text{ex}}^{(3)}$ с константой q употребляется при описании обменных спиновых волн. Этот вид используется в книге [16, стр. 374], а также в [17, стр. 198–199] (там же приведены некоторые другие выражения для подобных констант).

Полагая равенство между собой всех трех выражений (5.58)–(5.60), получаем соотношения между константами:

$$A = \frac{1}{2a} A_0 = \frac{M_0^2}{2} q; \quad (5.61)$$

$$A_0 = 2aA = aM_0^2 q; \quad (5.62)$$

$$q = \frac{1}{aM_0^2} A_0 = \frac{2}{M_0^2} A. \quad (5.63)$$

Для дальнейшего рассмотрения будем использовать вид записи плотности энергии $U_{\text{ex}}^{(3)}$ с константой q . Раскроем в выражении (5.60) знак суммирования:

$$U_{\text{ex}} = \frac{q}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial M_i}{\partial x_j} \right)^2 = \frac{q}{2} \left\{ \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_y}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial M_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_z}{\partial z} \right)^2 \right\}, \quad (5.64)$$

где $i, j = x, y, z$.

Группируя слагаемые относительно производных по x, y, z , приведем (5.64) к виду

$$U_{\text{ex}} = \frac{q}{2} \sum_i \left\{ \left(\frac{\partial M_x}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_y}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_z}{\partial x_i} \right)^2 \right\}. \quad (5.65)$$

Декартовы компоненты вектора намагниченности, записанные в сферической системе координат (рис. 5.1), имеют вид (5.28)–(5.30):

$$M_x = M_0 \sin \theta \cos \varphi; \quad (5.66)$$

$$M_y = M_0 \sin \theta \sin \varphi; \quad (5.67)$$

$$M_z = M_0 \cos \theta. \quad (5.68)$$

Находим производные:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x_i} = M_0 \left(\cos \theta \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right); \quad (5.69)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial x_i} = M_0 \left(\cos \theta \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right); \quad (5.70)$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial x_i} = -M_0 \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x_i}. \quad (5.71)$$

Подставляя (5.69)–(5.71) в фигурную скобку выражения (5.65), получаем

$$\left(\frac{\partial M_x}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_y}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_z}{\partial x_i} \right)^2 = M_0^2 \left\{ \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 \right\}. \quad (5.72)$$

С помощью этого выражения приводим (5.64) к виду:

$$U_{ex} = \frac{qM_0^2}{2} \left\{ \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial z} \right)^2 + \sin^2\theta \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}. \quad (5.73)$$

В технике ЦМД для описания обменного взаимодействия часто вместо q используется константа A , связанная с q соотношением (5.63)

$$q = \frac{2}{M_0^2} A. \quad (5.74)$$

При этом выражение (5.73) принимает вид:

$$U_{ex} = A \left\{ \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial z} \right)^2 + \sin^2\theta \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}. \quad (5.75)$$

Ввиду значительной сложности, задачи, касающиеся динамики плоской доменной границы, часто решаются в наиболее простом одномерном случае, т.е. в предположении, что граница движется как целое вдоль одного направления. При этом обычно полагают, что граница, будучи параллельной плоскости Oxz , движется вдоль оси Oy . Так как при таком движении граница остается параллельной сама себе, то угол φ не меняется. В этом случае выражение (5.75) принимает особенно простой вид:

$$U_{ex} = A \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2. \quad (5.76)$$

Такой вид плотности энергии неоднородного обменного взаимодействия будет использован далее при вычислении предельной скорости доменной границы — так называемой «скорости Уокера» (раздел 11.4), а также при сведении уравнения движения границы к солитонному уравнению типа синус-Гордона (раздел 11.3.7).

В некоторых случаях, например при расчете распределения намагниченности в стационарной доменной границе, требуется также учет изменения угла φ по координате y . При этом (5.75) принимает вид

$$U_{ex} = A \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (5.77)$$

Такой вид будет использован далее при расчете структуры «блоховской» и «неелевской» доменных границ (раздел 11.1).

5.3. Общая характеристика магнитоэлектростатических волн

Рассмотрим теперь особый вид электромагнитных волн, имеющих место в магнитной среде, а именно — магнитоэлектростатические волны. В соответствии с названием, физическое описание таких волн выполняется в приближении магнитоэлектростатики, т.е. когда электрическое поле предполагается отсутствующим. При этом зависимость от времени реализуется путем учета динамически намагниченности в среде, обладающей гиротропными свойствами, а для магнитного поля остаются производные только по координатам.

Необходимым условием распространения в среде любого волнового процесса является динамическое воздействие локализованного в пространстве возмущения среды на другой участок той же среды, удаленный от первого. Такое воздействие происходит с задержкой во времени, что и определяет скорость распространения волны.

5.3.1. Дипольные и обменные магнитоэлектростатические волны

В случае магнитной среды возможны два подхода к рассмотрению магнитоэлектростатических волн.

В первом случае предполагается, что взаимодействие между удаленными друг от друга участками среды происходит за счет магнитного поля. То есть первый участок, рассматриваемый как локализованный магнитный диполь, создает в месте локализации второго участка магнитное поле, которое действует на намагниченность второго участка, осуществляя таким образом между ними взаимодействие. То есть волна реализуется путем дипольного магнитного взаимодействия между локализованными удаленными друг от друга участками среды.

Это — **дипольные магнитоэлектростатические волны**.

Во втором случае предполагается, что взаимодействие между удаленными друг от друга участками среды происходит за счет обменного взаимодействия между спинами, обеспечивающими намагниченность среды. То есть отклонение спинов на первом участке вызывает во втором участке силу, заставляющую спины отклоняться в том же направлении, что и в первом. Можно сказать, что принудительное отклонение спинов на одном участке «тянет за собой» подобное же отклонение спинов на соседствующем с ним другом участке. Такая «тянущая» сила обусловлена обменным взаимодействием, стремящимся выстроить все спины в одном направлении.

Это — **обменные магнитоэлектростатические волны**.

Характерное расстояние дипольного взаимодействия определяется спадом поля точечного заряда, обратно пропорциональным квадрату расстояния от этого заряда. Характерная длина дипольных магнитоэлектростатических волн в диапазоне СВЧ составляет от нескольких миллиметров до долей микрона.

Характерное расстояние обменного взаимодействия определяется спадом, значительно более быстрым, чем поле заряда, по крайней мере

на несколько порядков. Поэтому обменные волны значительно короче дипольных, их длина в том же диапазоне составляет от нескольких микрон до нескольких нанометров (в приближении непрерывной среды). Таким образом, дипольные волны всегда заведомо значительно длиннее обменных.

Замечание. Следует отметить, что в наименовании двух упомянутых типов волн иногда наблюдается некоторое разночтение. Так, дипольные магнитостатические волны часто называют просто «магнитостатическими волнами», а обменные магнитостатические волны — «спиновыми волнами». На практике подобная неточность терминологии, как правило, не вызывает особенных затруднений, ибо легко разрешается при непосредственном обращении к физическому смыслу рассматриваемой задачи. В рамках настоящей монографии авторы предполагают для обозначения дипольных магнитостатических волн использовать термин «магнитостатические волны» (без конкретизации «дипольные»), а для обозначения обменных магнитостатических волн — термин «обменные спиновые волны» или просто «обменные волны».

Выводы по главе 5

Данная глава посвящена описанию некоторых необходимых для дальнейшего рассмотрения вопросов, касающихся математического аппарата, используемого при расчете динамики намагниченности.

Основные результаты, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Кратко рассмотрен тензор магнитной проницаемости магнетика, обладающего гиромангнитными свойствами. Приведены выражения для тензора восприимчивости, получаемые из решения уравнения Ландау–Лифшица с диссипативным членом в форме Гильберта. Отмечено соотношение между компонентами тензоров восприимчивости и проницаемости в системах СГС и СИ.

2. Приведены выражения для основных видов плотности энергии магнетика, представленные в декартовых и сферических координатах. Рассмотрена плотность энергии взаимодействия намагниченности с внешним полем, плотность энергии поля размагничивания тонкой пластины при различных ее ориентациях относительно системы координат, плотность энергии одноосной анизотропии второго и четвертого порядков, а также плотность энергии неоднородного обменного взаимодействия в различных видах записи. Приведена плотность энергии обменного взаимодействия в одномерном случае, наиболее употребительном при расчете динамики доменных границ.

3. Приведены основные положения физики электромагнитных волн, рассматриваемых в магнитостатическом приближении. Кратко охарактеризованы два вида магнитостатических волн — дипольные и обменные. Отмечены особенности терминологии, используемой при описании того и другого вида магнитостатических волн.

Глава 6

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ ПРИ РАСЧЕТЕ СВОЙСТВ ДИПОЛЬНЫХ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН

В качестве примера, важного для дальнейшего изложения, в настоящей главе рассмотрим дипольные магнитостатические волны в магнитной среде, обладающей гиротропными свойствами. Сначала рассмотрим классическое решение для волн в пластине, использующее введение магнитостатического потенциала, после чего рассмотрим более общее решение непосредственно через магнитное поле распространяющейся волны. Дополнительно рассмотрим некоторые полезные для дальнейшего изложения свойства дипольных волн — дисперсионные кривые и вектор групповой скорости.

Обратимся сначала к наиболее важному случаю, лежащему в основе многих задач о распространении дипольных магнитостатических волн — к задаче Дэймона–Эшбаха для ферритовой пластины со свободными поверхностями. Приведем вывод дисперсионного соотношения, следуя [2, стр. 29–44]. Более подробный вывод приведенных далее выражений содержится в [1, стр. 50–76]. За дополнительными подробностями читатель может обратиться к оригинальной работе Дэймона–Эшбаха [119]. Остальные необходимые ссылки будут указаны в тексте.

6.1. Решение задачи Дэймона–Эшбаха через потенциал

В этом разделе рассмотрим классический вариант решения задачи Дэймона–Эшбаха, реализованный еще самими авторами задачи в 1961 году [119]. Решение основано на представлении переменного поля в виде градиента потенциала, связанного с намагниченностью условием равенства нулю дивергенции от магнитной индукции.

6.1.1. Общая геометрия задачи

Рассмотрим общую геометрию задачи, иллюстрируемую рис. 6.1.

Структура представляет собой безграничную ферритовую пластину 2 толщиной d , по обе стороны от которой находятся свободные полупространства 1 и 3.

На рис. 6.1, *a* показана общая трехмерная геометрия структуры. Система координат $Oxyz$ выбрана таким образом, что ее плоскость Oyz

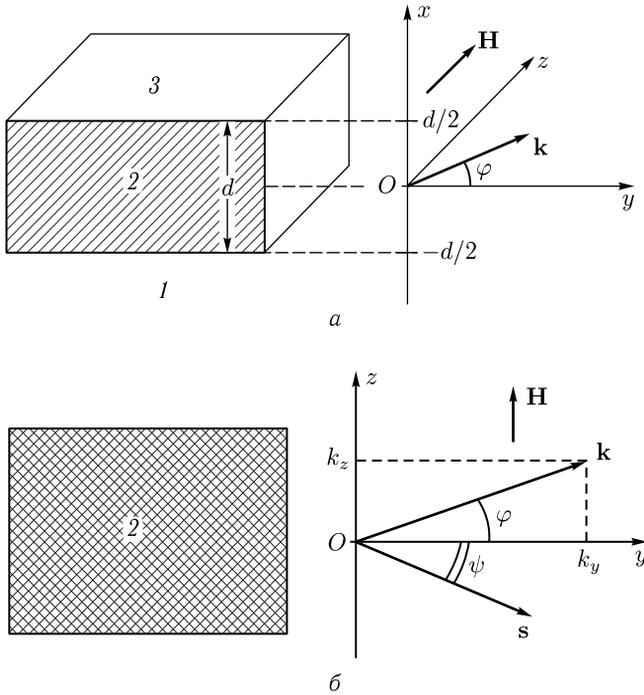


Рис. 6.1. Общая геометрия задачи [2А]: а — трехмерная геометрия, декартова система координат $Oxyz$; б — плоскость пластины, система Oyz , полярные координаты

параллельна плоскостям ферритовой пластины, а ось Ox им перпендикулярна. При этом ось Oz ориентирована вдоль направления внешнего поля. Начало координат O находится посередине между поверхностными плоскостями пластины, координаты которых равны $\pm d/2$.

На рис. 6.1, б показана геометрия в плоскости магнитной пластины, а также переход к полярной системе в плоскости Oyz .

Вектор \mathbf{k} — волновой вектор, соответствующий фазовой скорости волны. Он лежит в плоскости Oyz и составляет с осью Oy угол φ .

Компоненты этого вектора соответственно равны:

$$k_y = k \cos \varphi, \quad (6.1)$$

$$k_z = k \sin \varphi. \quad (6.2)$$

Вектор \mathbf{s} — лучевой вектор, соответствующий групповой скорости волны. Он лежит в той же плоскости Oyz и составляет с осью Oy угол ψ . Его компоненты равны:

$$s_y = s \cos \psi, \quad (6.3)$$

$$s_z = s \sin \psi. \quad (6.4)$$

6.1.2. Приближение магнитостатики

Задача решается в магнитостатическом приближении. Уравнения магнитостатики имеют вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0; \quad (6.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (6.6)$$

Здесь:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}. \quad (6.7)$$

Предположим, что поле и намагниченность имеют вид:

$$\mathbf{H} = H_i \mathbf{n}_z + \mathbf{h} e^{i\omega t}; \quad (6.8)$$

$$\mathbf{M} = M_0 \mathbf{n}_z + \mathbf{m} e^{i\omega t}. \quad (6.9)$$

Здесь: H_i — внутреннее постоянное поле; $h \sim m \ll H_i \sim M_0$.

Подставляя (6.8), (6.9) в (6.5), (6.6), и учитывая, что $\operatorname{rot}(H_i \mathbf{n}_z) = 0$, а также $\operatorname{div}(M_0 \mathbf{n}_z) = 0$ (так как $H_i = \text{const}$, $M_0 = \text{const}$), получаем:

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = 0; \quad (6.10)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{h} + 4\pi\mathbf{m}) = 0. \quad (6.11)$$

6.1.3. Граничные условия для поля и индукции

Граничные условия на поверхностях пластины состоят в непрерывности нормальной компоненты индукции \mathbf{B} и тангенциальной компоненты поля \mathbf{H} :

$$B_x^i \Big|_{x=\pm d/2} = B_x^e \Big|_{x=\pm d/2}, \quad (6.12)$$

$$H_{y,z}^i \Big|_{x=\pm d/2} = H_{y,z}^e \Big|_{x=\pm d/2}. \quad (6.13)$$

6.1.4. Введение потенциала

Из уравнения (6.10) следует возможность введения потенциала переменного поля ψ такого, что

$$\mathbf{h} = \operatorname{grad} \psi = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x}; \frac{\partial \psi}{\partial y}; \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\}. \quad (6.14)$$

При этом уравнение (6.11) принимает вид

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \psi + 4\pi\mathbf{m}) = 0, \quad (6.15)$$

или

$$\Delta \psi + 4\pi \operatorname{div} \mathbf{m} = 0. \quad (6.16)$$

Это уравнение является основным уравнением для потенциала в среде с намагниченностью. В него входит переменная намагниченность \mathbf{m} , которая определяется из уравнения движения вектора намагниченности (Ландау–Лифшица (1.5)) через переменное поле \mathbf{h} с помощью тензора восприимчивости $\bar{\chi}$. Компоненты переменного поля выражаются через потенциал ψ в соответствии с (6.14). Таким

образом, компоненты переменной намагниченности \mathbf{m} можно выразить через потенциал ψ , после чего подставить полученные выражения в (6.15). При этом получается уравнение для потенциала ψ в чистом виде. Это — уравнение Уокера [1, 114, 119], вид которого определяется явным видом тензора восприимчивости $\overleftrightarrow{\chi}$. Вне магнитной среды, то есть при намагниченности равной нулю, уравнение Уокера переходит в традиционное уравнение Лапласа [10].

6.1.5. Полная задача для потенциала во всех трех средах

Таким образом, получаем полную задачу для потенциала во всех трех средах:

Среда 1 (вне феррита) — уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = 0. \quad (6.17)$$

Среда 2 (внутри феррита) — уравнение Уокера

$$\mu \cdot \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} = 0. \quad (6.18)$$

Среда 3 (вне феррита) — уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} = 0. \quad (6.19)$$

Граничные условия на нижней ($x = -d/2$) и верхней ($x = d/2$) поверхностях:

$$\mu \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + i\nu \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \Big|_{x=-d/2} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_{x=-d/2}; \quad (6.20)$$

$$\mu \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + i\nu \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \Big|_{x=d/2} = \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \Big|_{x=d/2}; \quad (6.21)$$

$$\psi_2 \Big|_{x=-d/2} = \psi_1 \Big|_{x=-d/2}; \quad (6.22)$$

$$\psi_2 \Big|_{x=d/2} = \psi_3 \Big|_{x=d/2}. \quad (6.23)$$

В этих выражениях приняты следующие обозначения:

$$\mu = 1 + \frac{\Omega_H}{\Omega_H^2 - \Omega^2}, \quad (6.24)$$

$$\nu = \frac{\Omega}{\Omega_H^2 - \Omega^2}. \quad (6.25)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}; \quad (6.26)$$

$$\Omega_H = \frac{H_i}{4\pi M_0}. \quad (6.27)$$

6.1.6. Решение уравнений без граничных условий

Уравнения (6.17)–(6.19) решаются методом разделения переменных [10], то есть предполагается, что решение имеет вид:

$$\psi_1 = X_1 Y_1 Z_1, \quad (6.28)$$

$$\psi_2 = X_2 Y_2 Z_2, \quad (6.29)$$

$$\psi_3 = X_3 Y_3 Z_3, \quad (6.30)$$

где $X_{1,2,3}$ зависят только от x , $Y_{1,2,3}$ зависят только от y , а $Z_{1,2,3}$ зависят только от z .

В результате решения получаются выражения для сомножителей потенциалов в виде экспонент с двумя знаками в показателях.

Предположим теперь, что волна распространяется в плоскости Oyz . В этом случае зависимости всех трех решений от y и z должны совпадать.

Далее будем полагать, что волна распространяется в положительном направлении относительно оси Oy . Из этого следует, что при зависимости от времени вида $\exp(i\omega t)$ и положительном значении волнового числа знак показателя экспоненты в зависимости потенциала от y должен быть отрицательным. Аналогично, полагая, что волна распространяется в положительном направлении относительно оси Oz , получаем, что знак показателя экспоненты в зависимости потенциала от z также должен быть отрицательным.

При сделанных предположениях полное решение принимает вид:

часть решения, зависящая только от x :

$$X_1 = A e^{k_x^e x}; \quad (6.31)$$

$$X_2 = A_2 e^{ik_x^i x} + B_2 e^{-ik_x^i x}; \quad (6.32)$$

$$X_3 = B e^{-k_x^e x}, \quad (6.33)$$

где k_x^i и k_x^e — x -компоненты волнового числа внутри и вне ферритовой пластины соответственно;

части решения, зависящие от y и z :

$$Y = e^{-ik_y y}; \quad (6.34)$$

$$Z = e^{-ik_z z}. \quad (6.35)$$

Исключение постоянных разделения приводит к следующим выражениям для k_x^i и k_x^e :

$$k_x^e = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}; \quad (6.36)$$

$$k_x^i = \sqrt{-\left(k_y^2 + \frac{k_z^2}{\mu}\right)}. \quad (6.37)$$

Здесь k_y и k_z — пока произвольные действительные величины (их действительность обусловлена отсутствием затухания). При этом из (6.36)

следует, что k_x^e тоже всегда действительное, то есть X_1 и X_3 вне пластины экспоненциально спадают во всех случаях. В то же время, из (6.37) следует, что k_x^i может быть как действительным так и мнимым, в зависимости от знака подкоренного выражения, которое определяется соотношением между величинами k_y и k_z , а также величиной и знаком μ в зависимости от Ω .

Условие действительности k_x^i , определяемое соотношением

$$k_y^2 + \frac{k_z^2}{\mu} < 0, \quad (6.38)$$

то есть

$$\frac{k_z}{k_y} > \sqrt{-\mu}, \quad (6.39)$$

позволяет выделить по частоте область, соответствующую $\mu < 0$, откуда следует

$$\Omega_H < \Omega < \sqrt{\Omega_H(\Omega_H + 1)}. \quad (6.40)$$

Это — область ОБЪЕМНЫХ магнитостатических волн (ОМСВ), для которых зависимость потенциала ψ_2 от координаты x в соответствии с (6.32) где экспоненты с мнимыми показателями переходят в тригонометрические функции, периодически осциллирует. Условие (6.40) с учетом (6.26)–(6.27) по углу φ дает сектор, определяющий возможные пределы распространения объемных волн, границы которого соответствуют углам отсечки.

Условие мнимости k_x^i , соответствующее соотношению

$$k_y^2 + \frac{k_z^2}{\mu} > 0, \quad (6.41)$$

то есть

$$\frac{k_z}{k_y} > \sqrt{\mu}, \quad (6.42)$$

дает область по частоте, определяемую неравенством

$$\sqrt{\Omega_H(\Omega_H + 1)} < \Omega < +\infty. \quad (6.43)$$

Это область ПОВЕРХНОСТНЫХ магнитостатических волн (ПМСВ), для которых зависимость потенциала ψ_2 от координаты x в соответствии с (6.32), где показатели экспонент становятся действительными, спадает по экспоненте от той или иной поверхности пластины. Условие (6.43) с учетом (6.26)–(6.27) по углу φ также дает сектор, ограничиваемый углами отсечки.

6.1.7. Дисперсионное соотношение в декартовой системе координат

Возвращаясь к полному решению (6.31)–(6.33), можно видеть, что в нем имеются 4 коэффициента A , A_2 , B_2 , B , для определения которых имеются 4 граничных условия (6.20)–(6.23).

Подстановка решения (6.31)–(6.33) в граничные условия (6.20)–(6.23) приводит к системе уравнений относительно неизвестных A , A_2 , B_2 , B следующего вида:

$$A_2 \varepsilon_1 e^{-i\rho} + B_2 \varepsilon_2 e^{i\rho} - A k_x^e e^{-\delta} = 0; \quad (6.44)$$

$$A_2 \varepsilon_1 e^{i\rho} + B_2 \varepsilon_2 e^{-i\rho} + B k_x^e e^{-\delta} = 0; \quad (6.45)$$

$$A_2 e^{-i\rho} + B_2 e^{i\rho} - A e^{-\delta} = 0; \quad (6.46)$$

$$A_2 e^{i\rho} + B_2 e^{-i\rho} - B e^{-\delta} = 0, \quad (6.47)$$

где введены обозначения:

$$\rho = \frac{k_x^i d}{2}; \quad (6.48)$$

$$\delta = \frac{k_x^e d}{2}. \quad (6.49)$$

$$\varepsilon_1 = i\mu k_x^i + \nu k_y; \quad (6.50)$$

$$\varepsilon_2 = -i\mu k_x^i + \nu k_y, \quad (6.51)$$

в которых k_x^e и k_x^i определяются соотношениями (6.36)–(6.37).

Условием существования ненулевого решения системы (6.44)–(6.47) является равенство нулю ее определителя: $D_0 = 0$, что и дает дисперсионное соотношение:

$$\frac{e^{2i\rho} - e^{-2i\rho}}{e^{2i\rho} + e^{-2i\rho}} = \frac{k_x^e (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(k_x^e)^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}. \quad (6.52)$$

6.2. Решение задачи Дэймона–Эшбаха через поля

Рассмотренное в предыдущих разделах решение задачи Дэймона–Эшбаха на основе потенциала является ограниченным в том отношении, что введение потенциала допустимо только при условии равенства нулю ротора от магнитного поля, что собственно и составляет условие магнитостатики. При этом электрическое поле из рассмотрения заведомо выпадает. Такое решение достаточно корректно только для таких волн намагнитченности, длина которых значительно меньше длины электромагнитной волны той же частоты в свободном пространстве [2, стр. 63–68]. Для более длинных волн следует учитывать электрическое поле, так что возможность введения потенциала исключается (так как ротор от поля здесь уже не будет равен нулю). Альтернативой для решения через потенциал следует считать решение непосредственно через поле, что, в общем случае, является более сложным. Вариант такого решения для бигиротропной среды рассматривается далее в разделе 15.2. Здесь же в качестве предварительного шага обратимся к решению задачи Дэймона–Эшбаха в том же магнитостатическом приближении, где однако вместо потенциала будет напрямую рассматриваться магнитное поле.

6.2.1. Уравнение Уокера для переменного поля

Постановка граничной задачи, каковой является задача Дэймона–Эшбаха для безграничной пластины конечной толщины, предполагает наличие уравнения второго порядка, характеризующего пространственное распределение намагничённости и поля. Такое уравнение получается из условия равенства нулю дивергенции от магнитной индукции. В свободном пространстве при этом получается уравнение Лапласа (6.17), (6.19), а в магнитной среде — уравнение Уокера (6.18). В решаемой ранее задаче оба эти уравнения были получены для потенциала. Здесь же требуется записать подобные выражения для полей. Уравнение Лапласа сохраняет свой вид и для компонент поля, как это имеет место, например, в волноводной технике [426, 434]. Уравнение Уокера требует несколько более подробного рассмотрения, к чему и обратимся далее.

Как и ранее, будем исходить из общих уравнений магнитостатики, имеющих вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0; \quad (6.53)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (6.54)$$

Здесь:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right); \quad (6.55)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (6.56)$$

Магнитная индукция определяется выражением:

$$\mathbf{B} = \overset{\leftrightarrow}{\mu} \mathbf{H}, \quad (6.57)$$

где тензор магнитной проницаемости в декартовой системе координат $Oxyz$, ось Oz которой ориентирована вдоль постоянного поля, в линейном приближении имеет вид [15–17]

$$\overset{\leftrightarrow}{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix}. \quad (6.58)$$

Компоненты этого тензора μ и μ_a , в соответствии с (5.21)–(5.22) при $\alpha = 0$, подобно (6.24)–(6.27), имеют вид:

$$\mu = 1 + \frac{\Omega_H}{\Omega_H^2 - \Omega^2}, \quad (6.59)$$

$$\mu_a = \frac{\Omega}{\Omega_H^2 - \Omega^2}. \quad (6.60)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}; \quad (6.61)$$

$$\Omega_H = \frac{H_i}{4\pi M_0}. \quad (6.62)$$

Компонента μ_{\parallel} являет собой изотропную (скалярную) часть проницаемости и в диапазоне СВЧ в случае малых потерь близка к единице [16, стр.37, 44]. Здесь сохраняем этот параметр отличным от единицы для общности, необходимой при описании бигиротропных сред [15, стр.146–148, стр.230–232], рассматриваемых далее в разделе 15.2. В рамках настоящего раздела для сравнения с классическим решением задачи Дэймона–Эшбаха можно заведомо положить $\mu_{\parallel} = 1$.

Замечание. Из сравнения (6.60) с (6.25) видно, что принятое здесь обозначение μ_a тождественно принятому в (6.25) обозначению ν . То есть $\nu \equiv \mu_a$, а наблюдаемое внешнее различие вызвано не более чем исторически сложившейся практикой.

Запишем \mathbf{B} в виде (6.57) через \mathbf{H} и тензор $\overleftrightarrow{\mu}$:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \overleftrightarrow{\mu} \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu H_x + i\mu_a H_y \\ -i\mu_a H_x + \mu H_y \\ \mu_{\parallel} H_z \end{pmatrix}. \quad (6.63)$$

При этом:

$$B_x = \mu H_x + i\mu_a H_y; \quad (6.64)$$

$$B_y = -i\mu_a H_x + \mu H_y; \quad (6.65)$$

$$B_z = \mu_{\parallel} H_z. \quad (6.66)$$

Подставляя (6.64)–(6.66) в (6.55) и (6.56), с учетом (6.53), (6.54), получаем:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0; \quad (6.67)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0; \quad (6.68)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0; \quad (6.69)$$

$$\mu \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) + i\mu_a \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + \mu_{\parallel} \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0; \quad (6.70)$$

Из (6.67), дифференцируя по y , получаем

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial y \partial z} = 0. \quad (6.71)$$

Из (6.68), дифференцируя по x , получаем

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = 0. \quad (6.72)$$

Вычитая (6.72) из (6.71), получаем

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) = 0. \quad (6.73)$$

Из (6.70) с учетом (6.69), получаем

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = -\frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial z}. \quad (6.74)$$

Подставляя это выражение в (6.73), получаем

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} = 0. \quad (6.75)$$

Это уравнение является эквивалентом уравнения Уокера для компоненты поля H_z .

Замечание. Приведенное здесь уравнение Уокера (6.75) получено именно для компоненты поля H_z , а не для других компонент, из-за того, что тензор проницаемости $\vec{\mu}$ (6.58), соответствует ориентации постоянного поля вдоль оси Oz . При произвольной ориентации поля следует брать тензор в полном виде, содержащем все девять компонент отличных от нуля. Заметим, что тензор $\vec{\mu}$ в виде (6.58) получен в линейном приближении, так что фигурирующее в (6.75) поле H_z следует рассматривать как постоянную составляющую с малой переменной добавкой. Однако при дифференцировании постоянная составляющая пропадает, так что здесь поле H_z можно рассматривать как величину, чисто переменную.

6.2.2. Решение уравнения Уокера для поля

Рассмотрим сначала уравнение Уокера (6.75) в общем виде, не привязывая его к компоненте поля H_z .

В общем случае уравнение (6.75) для произвольной функции U имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (6.76)$$

Введем вспомогательное обозначение

$$a = \frac{\mu_{\parallel}}{\mu}. \quad (6.77)$$

При этом уравнение (6.76) принимает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + a \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (6.78)$$

Решим это уравнение методом разделения переменных [10].
Предположим, что

$$U = X(x)Y(y)Z(z). \quad (6.79)$$

Подставив (6.79) в (6.78) и разделив на XYZ , получаем

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + a \frac{Z''}{Z} = 0. \quad (6.80)$$

Выделяем Z :

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -a \frac{Z''}{Z} = \lambda^2, \quad (6.81)$$

где λ — постоянная разделения.

Получаем уравнение для Z :

$$Z'' + \frac{\lambda^2}{a} Z = 0. \quad (6.82)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$Z = Ge^{\sqrt{-\frac{\lambda^2}{a}}z} + He^{-\sqrt{-\frac{\lambda^2}{a}}z}, \quad (6.83)$$

где G и H — произвольные постоянные, которые далее будут определены из граничных условий.

Уравнение для других оставшихся неизвестных X и Y , получаемое из (6.81), имеет вид

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \lambda^2. \quad (6.84)$$

Выделяем Y :

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + \lambda^2 = \eta^2. \quad (6.85)$$

Здесь η — другая постоянная разделения.

Из (6.85) выделяем уравнение для X :

$$X'' - \eta^2 X = 0. \quad (6.86)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$X = Ae^{\eta x} + Be^{-\eta x}, \quad (6.87)$$

где A и B — произвольные постоянные, которые далее будут определены из граничных условий.

Из (6.85) выделяем уравнение для Y :

$$Y'' + (\eta^2 - \lambda^2)Y = 0. \quad (6.88)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$Y = Ce^{\sqrt{-(\eta^2-\lambda^2)}y} + De^{-\sqrt{-(\eta^2-\lambda^2)}y}, \quad (6.89)$$

где C и D — произвольные постоянные, которые далее будут определены из граничных условий.

Выделяя мнимость в показателях экспонент, входящих в Y и Z , запишем полное решение в виде:

$$X = Ae^{\eta x} + Be^{-\eta x}; \quad (6.90)$$

$$Y = Ce^{i\sqrt{\eta^2-\lambda^2}y} + De^{-i\sqrt{\eta^2-\lambda^2}y}; \quad (6.91)$$

$$Z = Ge^{i\frac{\lambda}{\sqrt{a}}z} + He^{-i\frac{\lambda}{\sqrt{a}}z}. \quad (6.92)$$

Это решение件годно для любой среды. В немагнитной среде $\mu = \mu_{\parallel} = 1$, то есть, в соответствии с (6.77), $a = 1$. В магнитной среде, обладающей гиротропными свойствами $\mu \neq \mu_{\parallel} \neq 1$, то есть $a \neq 1$.

6.2.3. Полный вид решения в трех областях

Рассмотрим полный вид решения в геометрии задачи Дэймона–Эшбаха. Схема геометрии, совпадающая с приведенной на рис. 6.1, показана на рис. 6.2.

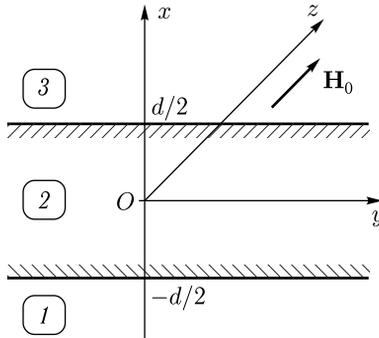


Рис. 6.2. Схема геометрии задачи Дэймона–Эшбаха

На рисунке показано поперечное сечение плоскопараллельной ферритовой пластины 2, к обеим поверхностям которой примыкают полубесконечные свободные пространства 1 и 3. Толщина пластины равна d . Декартова система координат $Oxyz$ выбрана таким образом, что плоскость Oyz параллельна плоскости пластины, а ось Ox ей перпендикулярна. Начало системы координат, точка O , находится на середине толщины пластины, так что ось Ox пересекает поверхности пластины при координатах $\pm d/2$. Постоянное магнитное поле \mathbf{H}_0 приложено в плоскости пластины, причем система координат ориентирована таким образом, что ось Oz совпадает с направлением поля.

В каждой из областей 1, 2 и 3 имеются три компоненты магнитного поля H_x , H_y и H_z , каждая из которых является произведением трех сомножителей XYZ вида (6.90)–(6.92).

Найдем сначала решение в общем виде, не конкретизируя принадлежность X , Y , Z к компонентам полей.

Полное решение во всех трех областях имеет вид:

в области 1 (свободное пространство, $a = 1$):

$$X_1 = A_1 e^{\eta_1 x} + B_1 e^{-\eta_1 x}; \quad (6.93)$$

$$Y_1 = C_1 e^{i\sqrt{\eta_1^2 - \lambda_1^2} y} + D_1 e^{-i\sqrt{\eta_1^2 - \lambda_1^2} y}; \quad (6.94)$$

$$Z_1 = G_1 e^{i\lambda_1 z} + H_1 e^{-i\lambda_1 z}; \quad (6.95)$$

в области 2 (магнитная среда, $a \neq 1$, определяется формулой (6.77)):

$$X_2 = A_2 e^{\eta_2 x} + B_2 e^{-\eta_2 x}; \quad (6.96)$$

$$Y_2 = C_2 e^{i\sqrt{\eta_2^2 - \lambda_2^2} y} + D_2 e^{-i\sqrt{\eta_2^2 - \lambda_2^2} y}; \quad (6.97)$$

$$Z_2 = G_2 e^{i\frac{\lambda_2}{\sqrt{a}} z} + H_2 e^{-i\frac{\lambda_2}{\sqrt{a}} z}; \quad (6.98)$$

в области 3 (свободное пространство, $a = 1$):

$$X_3 = A_3 e^{\eta_3 x} + B_3 e^{-\eta_3 x}; \quad (6.99)$$

$$Y_3 = C_3 e^{i\sqrt{\eta_3^2 - \lambda_3^2} y} + D_3 e^{-i\sqrt{\eta_3^2 - \lambda_3^2} y}; \quad (6.100)$$

$$Z_3 = G_3 e^{i\lambda_3 z} + H_3 e^{-i\lambda_3 z}. \quad (6.101)$$

Предполагаем, что волна распространяется в плоскости пластины, то есть в плоскости Oyz . При этом зависимости в формулах (6.93)–(6.101) вдоль осей Oy и Oz должны быть одинаковыми.

Приравнивая показатели соответствующих экспонент, получаем:

$$\sqrt{\eta_1^2 - \lambda_1^2} = \sqrt{\eta_2^2 - \lambda_2^2} = \sqrt{\eta_3^2 - \lambda_3^2}; \quad (6.102)$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_2}{\sqrt{a}} = \lambda_3. \quad (6.103)$$

Введем обозначения:

$$\eta = \eta_1; \quad (6.104)$$

$$\lambda = \lambda_1. \quad (6.105)$$

При этих обозначениях из (6.102)–(6.103) получаем:

$$\eta_1 = \eta; \quad (6.106)$$

$$\eta_2 = \sqrt{\eta^2 + (a-1)\lambda^2}; \quad (6.107)$$

$$\eta_3 = \eta; \quad (6.108)$$

$$\lambda_1 = \lambda; \quad (6.109)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{a}\lambda; \quad (6.110)$$

$$\lambda_3 = \lambda. \quad (6.111)$$

Коэффициенты при зависимостях от y и z также должны совпадать. Из этого условия, вводя обозначения C, D, G, H , получаем:

$$C_1 = C_2 = C_3 = C; \quad (6.112)$$

$$D_1 = D_2 = D_3 = D; \quad (6.113)$$

$$G_1 = G_2 = G_3 = G; \quad (6.114)$$

$$H_1 = H_2 = H_3 = H. \quad (6.115)$$

Решения (6.93)–(6.101) принимают вид:

по координате X для каждой из областей различающиеся:

$$X_1 = A_1 e^{\eta x} + B_1 e^{-\eta x}; \quad (6.116)$$

$$X_2 = A_2 e^{\sqrt{\eta^2 + (a-1)\lambda^2} x} + B_2 e^{-\sqrt{\eta^2 + (a-1)\lambda^2} x}; \quad (6.117)$$

$$X_3 = A_3 e^{\eta x} + B_3 e^{-\eta x}; \quad (6.118)$$

по координатам y и z во всех областях совпадающие:

$$Y = C e^{i\sqrt{\eta^2 - \lambda^2} y} + D e^{-i\sqrt{\eta^2 - \lambda^2} y}; \quad (6.119)$$

$$Z = G e^{i\lambda z} + H e^{-i\lambda z}. \quad (6.120)$$

Будем полагать, что волна распространяется только в одном направлении относительно осей Oy и Oz , а также предположим, что $\eta > 0$. При этом решения, содержащие экспоненциальную зависимость от x вида $e^{\pm\eta x}$, возрастающие на бесконечности, следует отбросить.

Вводя обозначения $A = A_1$ и $B = B_3$, а также полагая $C = 1$ и $G = 1$, приводим решение (6.116)–(6.120) к виду:

$$X_1 = A e^{\eta x}; \quad (6.121)$$

$$X_2 = A_2 e^{\sqrt{\eta^2 + (a-1)\lambda^2} x} + B_2 e^{-\sqrt{\eta^2 + (a-1)\lambda^2} x}; \quad (6.122)$$

$$X_3 = B e^{-\eta x}; \quad (6.123)$$

$$Y = e^{i\sqrt{\eta^2 - \lambda^2} y}; \quad (6.124)$$

$$Z = e^{i\lambda z}. \quad (6.125)$$

Введем в показатели экспонент обозначения k_x^i, k_x^e, k_y, k_z , аналогичные классической задаче Дэймона–Эшбаха:

$$k_x^e = \eta; \quad (6.126)$$

$$k_x^i = -i\sqrt{\eta^2 + (a-1)\lambda^2}; \quad (6.127)$$

$$k_y = -\sqrt{\eta^2 - \lambda^2}; \quad (6.128)$$

$$k_z = -\lambda. \quad (6.129)$$

Подставляя (6.126) и (6.129) в (6.127) и (6.128), получаем:

$$k_x^i = -i\sqrt{(k_x^e)^2 + (a-1)k_z^2}; \quad (6.130)$$

$$k_y = -\sqrt{(k_x^e)^2 - k_z^2}. \quad (6.131)$$

Поскольку в плоскости Oyz никаких ограничений для распространения волн нет (геометрически пластина ограничена только по оси Ox), то k_y и k_z будем считать заданными и выразим k_x^e и k_x^i через них, а также подставим a в соответствии с (6.77). В результате несложных преобразований получаем:

$$k_x^e = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}; \quad (6.132)$$

$$k_x^i = i\sqrt{k_y^2 + \frac{\mu_{\parallel}}{\mu}k_z^2}. \quad (6.133)$$

Полученные так значения волновых чисел по координате x вне и внутри пластины (с точностью до $\mu_{\parallel} = 1$) совпадают с подобными выражениями в классической задаче Дэймона–Эшбаха (6.36), (6.37).

При этом решение (6.121)–(6.125) принимает вид:

часть решения, зависящая только от x :

$$X_1 = Ae^{k_x^e x}; \quad (6.134)$$

$$X_2 = A_2 e^{ik_x^i x} + B_2 e^{-ik_x^i x}; \quad (6.135)$$

$$X_3 = Be^{-k_x^e x}; \quad (6.136)$$

часть решения, зависящая только от y и z :

$$Y = e^{-ik_y y}; \quad (6.137)$$

$$Z = e^{-ik_z z}. \quad (6.138)$$

6.2.4. Соотношения между компонентами полей

Решение вида (6.134)–(6.138) получено из уравнения Уокера (6.78) для произвольной функции U . В разделе 6.2.1 показано, что уравнение (6.75) типа Уокера (6.78) можно получить только для одной компоненты поля H_z . Однако рассматриваемые далее граничные условия требуют подстановки других компонент полей: H_x и H_y . Покажем теперь как получить другие компоненты поля H_x и H_y при условии, что компонента поля H_z известна. Сначала приведем выкладки, не конкретизируя номер и свойства области.

Опираясь на решение (6.134)–(6.138), положим, что компонента поля H_z имеет вид

$$H_z = (P_z e^{i\alpha x} + Q_z e^{-i\alpha x}) e^{i\beta y} e^{i\gamma z}, \quad (6.139)$$

где введены вспомогательные обозначения P_z , Q_z , α , β , γ , конкретизируемые далее.

Производные этой компоненты имеют вид:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = i\alpha(P_z e^{i\alpha x} - Q_z e^{-i\alpha x}) e^{i\beta y} e^{i\gamma z}; \quad (6.140)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = i\beta(P_z e^{i\alpha x} + Q_z e^{-i\alpha x}) e^{i\beta y} e^{i\gamma z}; \quad (6.141)$$

Из уравнения (6.53) следует, что каждая декартова компонента ротора (6.55) равна нулю. При этом из равенства нулю второго слагаемого выражения (6.55) получаем

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial x}; \quad (6.142)$$

Интегрируя обе части этого выражения по z , с точностью до постоянного слагаемого и неопределенной функции от x и y , получаем

$$H_x = \int \frac{\partial H_z}{\partial x} dz, \quad (6.143)$$

откуда с учетом (6.140) получаем

$$H_x = \frac{\alpha}{\gamma}(P_z e^{i\alpha x} - Q_z e^{-i\alpha x}) e^{i\beta y} e^{i\gamma z}. \quad (6.144)$$

Аналогично из равенства нулю первого слагаемого выражения (6.55) получаем

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial y}. \quad (6.145)$$

Интегрируя обе части этого выражения по z , с точностью до постоянного слагаемого и неопределенной функции от x и y , получаем

$$H_y = \int \frac{\partial H_z}{\partial y} dz, \quad (6.146)$$

откуда с учетом (6.14), получаем

$$H_y = \frac{\beta}{\gamma}(P_z e^{i\alpha x} + Q_z e^{-i\alpha x}) e^{i\beta y} e^{i\gamma z}. \quad (6.147)$$

Введем вспомогательные обозначения:

$$P_0 = \frac{P_z}{\gamma}; \quad (6.148)$$

$$Q_0 = -\frac{Q_z}{\gamma}. \quad (6.149)$$

С этими обозначениями приведем (6.144), (6.147), (6.139) к виду:

$$H_x = \alpha(P_0 e^{i\alpha x} + Q_0 e^{-i\alpha x}) e^{i\beta y} e^{i\gamma z}; \quad (6.150)$$

$$H_y = \beta(P_0 e^{i\alpha x} - Q_0 e^{-i\alpha x}) e^{i\beta y} e^{i\gamma z}; \quad (6.151)$$

$$H_z = \gamma(P_0 e^{i\alpha x} - Q_0 e^{-i\alpha x}) e^{i\beta y} e^{i\gamma z}. \quad (6.152)$$

Это — общие выражения, выполняющиеся во всех трех областях. Однако, из сравнения с (6.134)–(6.138) можно видеть, что значение α

во второй области будет отличаться от значений α в первой и третьей, где они будут одинаковыми, а значения β и γ будут совпадать во всех трех областях.

Замечание. Интегралы (6.143) и (6.146) получены с точностью до произвольных функций от x и y . То есть при произвольном виде этих функций соотношения (6.142) и (6.145) при подстановке в них (6.144) и (6.147), а также (6.140) и (6.141), выполняются. Однако, для самих полей остается некоторая неопределенность. Авторы настоящей монографии не рассматривали возможность раскрытия этой неопределенности, которая может содержать какие-то новые, не известные до сих пор решения, реализующиеся, например, в вынужденном, импульсном или каком-то нелинейном режимах. На данном этапе в пользу пренебрежения этими функциями может служить отмеченная далее полная тождественность получаемых здесь выражений для полей (6.150)–(6.152) с подобными выражениями, полученными при классическом решении задачи Дэймона–Эшбаха через потенциал, которое многократно проверено в эксперименте.

6.2.5. Компоненты полей в заданной геометрии

Теперь, когда общее решение для всех компонент полей (6.150)–(6.152) получено, запишем эти компоненты применительно к геометрии рассматриваемой задачи. Как отмечено выше, на данном этапе ограничимся рассмотрением волны, распространяющейся в плоскости Oyz в положительном направлении осей Oy и Oz . При этом, в случае зависимости от времени вида $e^{i\omega t}$, координатные составляющие такой волны должны описываться экспонентами вида $e^{-ik_y y}$ и $e^{-ik_z z}$, где k_y и k_z полагаются положительными. Из сравнения этих экспонент с подобными экспонентами, входящими в выражения (6.150)–(6.152), получаем:

$$\beta = -k_y; \quad (6.153)$$

$$\gamma = -k_z. \quad (6.154)$$

Эти соотношения являются единичными для всех трех областей. Однако соотношения по координате x в разных областях будут различными. Так, сравнивая показатели экспонент в выражениях (6.134)–(6.136) с подобными показателями в выражении (6.150), получаем:

$$\alpha_1 = -ik_x^e; \quad (6.155)$$

$$\alpha_2 = k_x^i; \quad (6.156)$$

$$\alpha_3 = -ik_x^e. \quad (6.157)$$

Подставим эти обозначения в (6.150)–(6.152), а также учтем, что поля по координате x должны спадать в обе стороны от поверхности пластины. Переходя от обозначений $\alpha_{1,2,3}$, β , γ к k_x^i , k_x^e , k_y , k_z , а также полагая, что все волновые числа являются положительными

и выбирая коэффициенты P_0 и Q_0 , исходя из условия спада полей по мере удаления от поверхностей пластины, получаем компоненты полей во всех трех областях. Запишем их по отдельности.

Область 1: $P_0^{(1)} \neq 0$; $Q_0^{(1)} = 0$; $\alpha = -ik_x^e$; $\beta = -k_y$; $\gamma = -k_z$.

$$H_x^{(1)} = -ik_x^e P_0^{(1)} e^{k_x^e x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}; \quad (6.158)$$

$$H_y^{(1)} = -k_y P_0^{(1)} e^{k_x^e x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}; \quad (6.159)$$

$$H_z^{(1)} = -k_z P_0^{(1)} e^{k_x^e x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}. \quad (6.160)$$

Область 2: $P_0^{(2)} \neq 0$; $Q_0^{(2)} \neq 0$; $\alpha = k_x^i$; $\beta = -k_y$; $\gamma = -k_z$.

$$H_x^{(2)} = k_x^i (P_0^{(2)} e^{ik_x^i x} + Q_0^{(2)} e^{-ik_x^i x}) e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}; \quad (6.161)$$

$$H_y^{(2)} = k_y (P_0^{(2)} e^{ik_x^i x} - Q_0^{(2)} e^{-ik_x^i x}) e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}; \quad (6.162)$$

$$H_z^{(2)} = k_z (P_0^{(2)} e^{ik_x^i x} - Q_0^{(2)} e^{-ik_x^i x}) e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}. \quad (6.163)$$

Область 3: $P_0^{(3)} = 0$; $Q_0^{(3)} \neq 0$; $\alpha = -ik_x^e$; $\beta = -k_y$; $\gamma = -k_z$.

$$H_x^{(3)} = -ik_x^e Q_0^{(3)} e^{-k_x^e x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}; \quad (6.164)$$

$$H_y^{(3)} = k_y Q_0^{(3)} e^{-k_x^e x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}; \quad (6.165)$$

$$H_z^{(3)} = k_z Q_0^{(3)} e^{-k_x^e x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}. \quad (6.166)$$

Введем новые обозначения:

$$A = -iP_0^{(1)}; \quad (6.167)$$

$$A_2 = -iP_0^{(2)}; \quad (6.168)$$

$$B_2 = iQ_0^{(2)}; \quad (6.169)$$

$$B = iQ_0^{(3)}. \quad (6.170)$$

При этом получаем:

$$P_0^{(1)} = iA; \quad (6.171)$$

$$P_0^{(2)} = iA_2; \quad (6.172)$$

$$Q_0^{(2)} = -iB_2; \quad (6.173)$$

$$Q_0^{(3)} = -iB. \quad (6.174)$$

В этих обозначениях поля принимают вид:

Область 1:

$$H_x^{(1)} = k_x^e A e^{k_x^e x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}; \quad (6.175)$$

$$H_y^{(1)} = ik_y A e^{k_x^e x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}; \quad (6.176)$$

$$H_z^{(1)} = ik_z A e^{k_x^e x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}. \quad (6.177)$$

Область 2:

$$H_x^{(2)} = ik_x^i (A_2 e^{ik_x^i x} - B_2 e^{-ik_x^i x}) e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}; \quad (6.178)$$

$$H_y^{(2)} = ik_y (A_2 e^{ik_x^i x} + B_2 e^{-ik_x^i x}) e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}; \quad (6.179)$$

$$H_z^{(2)} = ik_z (A_2 e^{ik_x^i x} + B_2 e^{-ik_x^i x}) e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}. \quad (6.180)$$

Область 3:

$$H_x^{(3)} = -k_x^e B e^{-k_x^e x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}; \quad (6.181)$$

$$H_y^{(3)} = ik_y B e^{-k_x^e x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}; \quad (6.182)$$

$$H_z^{(3)} = ik_z B e^{-k_x^e x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}. \quad (6.183)$$

Замечание. Контрольная проверка показывает, что эти поля с точностью до обозначений совпадают с полями, получаемыми при решении классической задачи Дэймона–Эшбаха через потенциал [1, стр. 70–71]. Подробное выполнение такой проверки, вообще говоря, несколько громоздкой, авторы предоставляют любознательному читателю.

6.2.6. Граничные условия

Граничные условия состоят в непрерывности на границе раздела сред касательных компонент поля и нормальных компонент индукции, то есть, в соответствии с геометрией задачи (рис. 6.2), в непрерывности компонент H_y , H_z и B_x . При этом компоненты индукции в соответствии с (6.57)–(6.63) определяются соотношениями:

$$B_x^{(1)} = H_x^{(1)}; \quad (6.184)$$

$$B_x^{(2)} = \mu H_x^{(2)} + i\mu_a H_y^{(2)}; \quad (6.185)$$

$$B_x^{(3)} = H_x^{(3)}. \quad (6.186)$$

Таким образом, граничные условия на обеих границах имеют вид:

при $x = -d/2$:

$$H_x^{(1)}|_{x=-d/2} = \mu H_x^{(2)}|_{x=-d/2} + i\mu_a H_y^{(2)}|_{x=-d/2}; \quad (6.187)$$

$$H_y^{(1)}|_{x=-d/2} = H_y^{(2)}|_{x=-d/2}; \quad (6.188)$$

$$H_z^{(1)}|_{x=-d/2} = H_z^{(2)}|_{x=-d/2}; \quad (6.189)$$

при $x = d/2$:

$$\mu H_x^{(2)}|_{x=d/2} + i\mu_a H_y^{(2)}|_{x=d/2} = H_x^{(3)}|_{x=d/2}; \quad (6.190)$$

$$H_y^{(2)}|_{x=d/2} = H_y^{(3)}|_{x=d/2}; \quad (6.191)$$

$$H_z^{(2)}|_{x=d/2} = H_z^{(3)}|_{x=d/2}. \quad (6.192)$$

6.2.7. Дисперсионное соотношение в декартовой системе координат

Подставляя решения (6.175)–(6.183) в граничные условия (6.187)–(6.192) получаем систему уравнений для A , A_2 , B_2 , B . При этом получается шесть уравнений для четырех неизвестных. Однако подстановка полей (6.176) и (6.179) в условие (6.188) приводит к тому же уравнению, что и подстановка полей (6.177) и (6.180) в условие (6.189). Аналогично подстановка полей (6.179) и (6.182) в условие (6.191) приводит к тому же уравнению, что и подстановка полей (6.180) и (6.183) в условие (6.192). Поэтому достаточно рассмотреть из шести только четыре граничных условия, например (6.187), (6.188) и (6.190), (6.191). То есть число уравнений получается равным числу неизвестных.

Подобно формулам (6.48)–(6.51) в классической задаче Дэймона–Эшбаха, введем вспомогательные обозначения:

$$\rho = \frac{k_x^i d}{2}; \quad (6.193)$$

$$\delta = \frac{k_x^e d}{2}; \quad (6.194)$$

$$\varepsilon_1 = i\mu k_x^i + \mu_a k_y; \quad (6.195)$$

$$\varepsilon_2 = -i\mu k_x^i + \mu_a k_y. \quad (6.196)$$

Выполним подстановку решений в граничные условия последовательно.

Рассмотрим граничное условие (6.187). Подставив поля (6.175), (6.178), (6.179) и разделив на $e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}$, получаем

$$Ak_x^e e^{-\frac{k_x^e d}{2}} = \mu \left(iA_2 k_x^i e^{-i\frac{k_x^i d}{2}} - iB_2 k_x^i e^{i\frac{k_x^i d}{2}} \right) - \\ - i\mu_a \left(iA_2 k_y e^{-i\frac{k_x^i d}{2}} + iB_2 k_y e^{i\frac{k_x^i d}{2}} \right). \quad (6.197)$$

Подставляя обозначения (6.193), (6.194) и раскрывая скобки, получаем:

$$Ak_x^e e^{-\delta} = i\mu A_2 k_x^i e^{-i\rho} - i\mu B_2 k_x^i e^{i\rho} + \mu_a A_2 k_y e^{-i\rho} + \mu_a B_2 k_y e^{i\rho}. \quad (6.198)$$

Группируя слагаемые, содержащие $e^{i\rho}$ и $e^{-i\rho}$, получаем

$$Ak_x^e e^{-\delta} = A_2 (i\mu k_x^i + \mu_a k_y) e^{-i\rho} + B_2 (-i\mu k_x^i + \mu_a k_y) e^{i\rho}. \quad (6.199)$$

Подставляя обозначения (6.195), (6.196), получаем

$$A_2 \varepsilon_1 e^{-i\rho} + B_2 \varepsilon_2 e^{i\rho} - Ak_x^e e^{-\delta} = 0. \quad (6.200)$$

Рассмотрим теперь граничное условие (6.188). Подставив поля (6.176), (6.179) и разделив на $e^{-ik_y y} \cdot e^{-ik_z z}$, получаем

$$iAk_y e^{-\frac{k_x^e d}{2}} = iA_2 k_y e^{-i\frac{k_x^i d}{2}} + iB_2 k_y e^{i\frac{k_x^i d}{2}}. \quad (6.201)$$

Разделив на ik_y , перенося все слагаемые в левую часть и учитывая обозначения (6.193) и (6.194), получаем

$$A_2 e^{-i\rho} + B_2 e^{i\rho} - A e^{-\delta} = 0. \quad (6.202)$$

Аналогичным образом преобразуем граничные условия (6.189) и (6.190), так что получаем еще два уравнения, подобные (6.200) и (6.202). В результате получаем систему из четырех уравнений для четырех неизвестных A_2 , B_2 , A и B , имеющую вид:

$$A_2 \varepsilon_1 e^{-i\rho} + B_2 \varepsilon_2 e^{i\rho} - A k_x^e e^{-\delta} = 0; \quad (6.203)$$

$$B_2 \varepsilon_1 e^{i\rho} + A_2 \varepsilon_2 e^{-i\rho} + B k_x^e e^{-\delta} = 0; \quad (6.204)$$

$$A_2 e^{-i\rho} + B_2 e^{i\rho} - A e^{-\delta} = 0; \quad (6.205)$$

$$B_2 e^{i\rho} + A_2 e^{-i\rho} - B e^{-\delta} = 0. \quad (6.206)$$

Эта система уравнений, полученная на основе рассмотрения полей без привлечения потенциала, полностью совпадает с аналогичной системой уравнений в классической задаче Дэймона–Эшбаха, решаемой через потенциал (6.44)–(6.47). Равенство нулю ее определителя дает дисперсионное соотношение классической задачи Дэймона–Эшбаха (6.52).

Условием существования ненулевого решения системы (6.203)–(6.206), как и системы (6.44)–(6.47), является равенство нулю ее определителя: $D_0 = 0$, что и дает дисперсионное соотношение, совпадающее с (6.52):

$$\frac{e^{2i\rho} - e^{-2i\rho}}{e^{2i\rho} + e^{-2i\rho}} = \frac{k_x^e (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(k_x^e)^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}. \quad (6.207)$$

Итак, можно видеть, что решение задачи типа Дэймона–Эшбаха через поля приводит к тому же дисперсионному соотношению, что и решение через потенциал.

Замечание. То же самое дисперсионное соотношение получилось из-за того, что в основу данного решения положены те же уравнения магнитостатики (6.53), (6.54) или (6.55), (6.56), что и при решении через потенциал (6.5), (6.6). Преимуществом проведенного здесь решения является отсутствие необходимости использования свойственного магнитостатике условия равенства нулю ротора от поля волны, что важно в том случае, когда это равенство не выполняется, в первую очередь при учете электрического поля волны в рамках полной электродинамики. Такой учет необходим, например, для бигиротропной среды (раздел 15.2) или для случая распространения электромагнитных волн в позиционной среде (глава 15).

Подстановка k_x^e и k_x^i в соответствии с (6.36)–(6.37) (или (6.132)–(6.133) с учетом $\mu_{\parallel} = 1$), после некоторых упрощений приводит

к соотношению вида

$$\frac{2\sqrt{(\mu k_y^2 + k_z^2)(k_y^2 + k_z^2)}}{(\nu^2 - \mu^2 - 1)k_y^2 - (1 + \mu)k_z^2} - \operatorname{th} \left\{ d\sqrt{\frac{\mu k_y^2 + k_z^2}{\mu}} \right\} = 0, \quad (6.208)$$

где μ и ν определяются формулами (6.24)–(6.25).

Соотношение (6.208) получено в декартовой системе координат. Однако для ряда задач, в том числе касающихся распространения магнитостатических волн в неоднородно намагниченных структурах, более удобным является использование полярной системы координат, переход к которой будет рассмотрен в следующем разделе.

6.2.8. Переход к полярной системе координат

В дисперсионное соотношение (6.208) входят декартовы компоненты волнового числа k_y , k_z . Определение их через полярные координаты k и φ в соответствии с (6.1)–(6.2) приводит к соотношению вида

$$\beta - 1 - 2\mu\alpha \operatorname{cth}(k d \alpha) = 0, \quad (6.209)$$

где введены вспомогательные параметры:

$$\alpha = \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{\mu}}. \quad (6.210)$$

$$\beta = (\nu^2 - \mu^2 + \mu) \cos^2 \varphi - \mu, \quad (6.211)$$

а входящие в них величины μ и ν определяются соотношениями (6.24)–(6.25).

Это — основное дисперсионное соотношение задачи Дэймона–Эшбаха для магнитной пластины со свободными поверхностями.

Замечание. В оригинальной статье Дэймона–Эшбаха [119] дисперсионное соотношение для той же структуры получено в несколько отличном от (6.209) виде, что связано с применяемой там системой обозначений. Нетрудно видеть, что оба вида полностью эквивалентны. В литературе, например в [130], имеются и другие также эквивалентные виды того же соотношения. В данной монографии, как и в [1, 2] и цитируемых там статьях, используется именно вид (6.209), который, по мнению авторов, является наиболее удобным для анализа распространения поверхностных магнитостатических волн в структурах с неоднородным намагничиванием.

6.3. Основные свойства дисперсии поверхностных магнитостатических волн

Теперь, когда основное дисперсионное соотношение для поверхностных магнитостатических волн (ПМСВ) в свободной ферритовой пленке получено, обратимся к рассмотрению полезных для дальнейшего некоторых свойств ПМСВ, следующих из этого соотношения.

6.3.1. Угол отсечки для ПМСВ

Как отмечено в разделе 6.1.6, распространение поверхностных магнитостатических волн возможно только в определенном интервале углов между направлениями волнового вектора и приложенного постоянного поля. Крайние значения такого интервала углов называются «углами отсечки». Ввиду симметрии дисперсионного соотношения относительно нормали к направлению поля, положительное и отрицательное значения угла отсечки по абсолютной величине равны между собой, поэтому достаточно определить только одно из этих значений, а именно положительное.

Угол отсечки найдем из дисперсионного соотношения в полярной системе координат (6.209). Будем считать, что отсечка соответствует стремлению волнового числа к бесконечности, то есть $k \rightarrow \infty$. При этом $\text{cth}(k d \alpha) \rightarrow 1$, так что (6.209) принимает вид

$$\beta - 1 - 2\mu\alpha = 0. \quad (6.212)$$

Разрешая это уравнение относительно угла φ с учетом входящих в него выражений, получаем угол отсечки в виде

$$\varphi_c = \pm \arccos \left(\sqrt{\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}} \right), \quad (6.213)$$

где введены вспомогательные обозначения:

$$A = (\nu^2 - \mu^2 + \mu)^2; \quad (6.214)$$

$$B = -2[(\mu + 1)(\nu^2 - \mu^2 + \mu) + 2\mu(\mu - 1)]; \quad (6.215)$$

$$C = (\mu - 1)^2. \quad (6.216)$$

6.3.2. Графическая иллюстрация дисперсии ПМСВ

Приведем некоторые графические иллюстрации дисперсионного соотношения (6.209), позволяющие качественно судить о физических свойствах дипольных магнитостатических волн.

Дисперсионные кривые

На рис. 6.3 в качестве иллюстрации приведены дисперсионные кривые для поверхностных волн, построенные в соответствии с соотношением (6.209) при различных значениях толщины магнитной пластины.

Из рисунка видно, что все дисперсионные кривые заключены в интервале по частоте от 2739 до 3675 МГц.

Нижняя граница этого интервала определяется соотношением:

$$f_b = \gamma \sqrt{H(H + 4\pi M_0)}, \quad (6.217)$$

следующим из первого неравенства (6.43).

Верхняя граница определяется соотношением:

$$f_t = \gamma(H + 2\pi M_0), \quad (6.218)$$

следующим из (6.209) при $k \rightarrow \infty$ (где надо положить $\varphi = 0^\circ$).

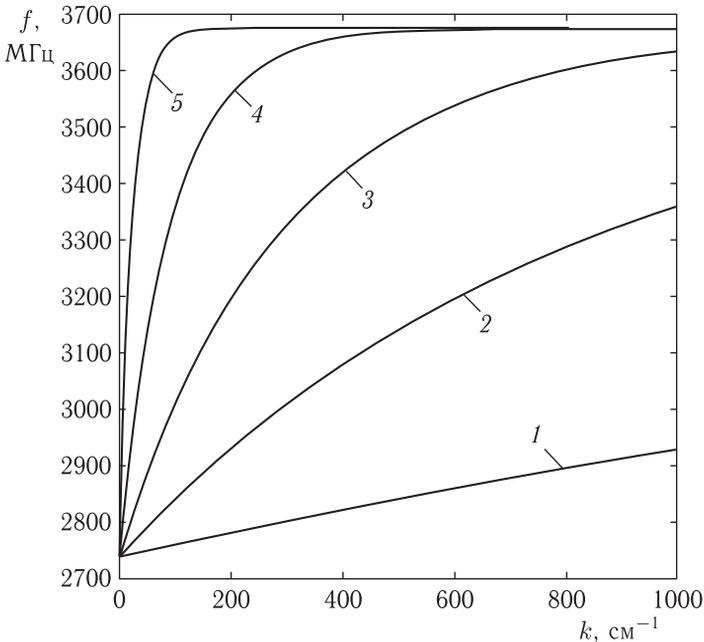


Рис. 6.3. Дисперсионные кривые для ПМСВ при различных значениях толщины магнитной пластины: 1 — 1 мкм; 2 — 5 мкм; 3 — 15 мкм; 4 — 50 мкм; 5 — 200 мкм. Параметры построения: $4\pi M_0 = 1750$ Гс; $H = 435,5$ Э, $\varphi = 0^\circ$

Все кривые выгнуты вверх, причем этот выгиб выражен тем сильнее, чем толщина пластины больше.

Рассмотрим теперь свойства таких волн несколько более подробно, для чего обратимся к рис. 6.4, где приведена отдельная дисперсионная зависимость для ПМСВ в ферритовой пластине со свободными поверхностями.

На этом рисунке показана дисперсионная кривая, как зависимость частоты f от волнового числа k , соответствующая поверхностной магнитостатической волне, распространяющейся перпендикулярно направлению поля (то есть при $\varphi = 0$) в пленке типа ЖИГ ($4\pi M_0 = 1750$ Гс, $d = 15$ мкм) при поле $437,5$ Э. Интервал существования ПМСВ в этих условиях заключен между 2739 и 3675 МГц (его границы показаны на рисунке горизонтальными пунктирными линиями).

Дисперсионная кривая на всем своем протяжении имеет выпуклость вверх, причем по мере увеличения волнового числа она стремится к горизонтальной асимптоте, соответствующей 3675 МГц. Укрупненными точками отмечены интервалы по частоте через каждые 200 МГц. Горизонтальные и вертикальные точечные линии соответствуют частоте и волновому числу в заданной точке.

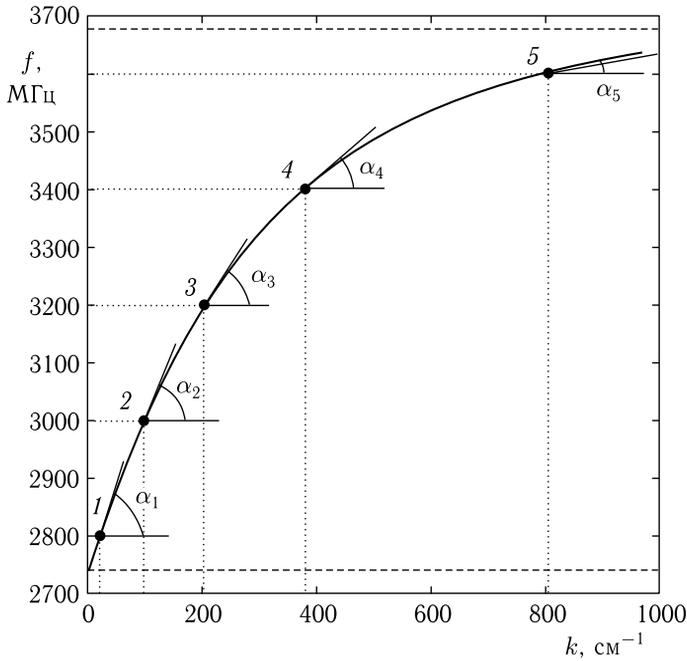


Рис. 6.4. Дисперсионная кривая для ПМСВ в ферритовой пластине со свободными поверхностями [2]. Точки соответствуют частотам: 1 — 2800 МГц; 2 — 3000 МГц; 3 — 3200 МГц; 4 — 3400 МГц; 5 — 3600 МГц. Параметры пластины: $4\pi M_0 = 1750$ Гс, $d = 15$ мкм. Поле: $H = 437,5$ Э.

Можно видеть, что фазовая скорость волны, равная отношению частоты к соответствующему волновому числу, по мере увеличения частоты уменьшается. Так, на частоте 2800 МГц она равна $140,0 \cdot 10^6$ см/с, на частоте 3000 МГц — уменьшается до $31,2 \cdot 10^6$ см/с, а на частоте 3600 МГц падает до $4,5 \cdot 10^6$ см/с. При приближении дисперсионной кривой к горизонтальной асимптоте (при 3675 МГц) фазовая скорость стремится к нулю.

Групповая скорость, определяемая как производная от частоты по волновому числу, соответствует тангенсу угла α_{1-5} между касательной к дисперсионной кривой и горизонтальной осью. Можно видеть, что имеет место соотношение: $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > \alpha_5$, то есть групповая скорость волны по мере увеличения частоты уменьшается, а при приближении дисперсионной кривой к горизонтальной асимптоте, соответствующей 3675 МГц, групповая скорость стремится к нулю.

Изочастотные кривые

На рис. 6.5 показаны изочастотные кривые, соответствующие зависимости z -компоненты волнового числа от его y -компоненты при фиксированной частоте. Приведены только верхние ветви изочастотных

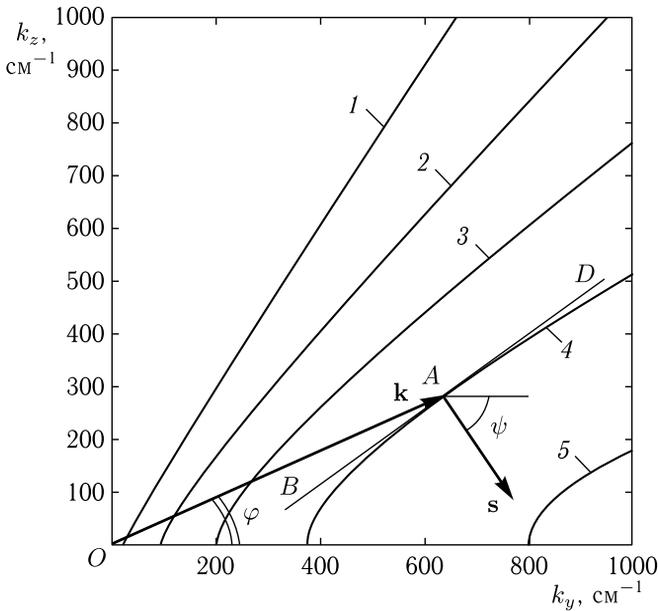


Рис. 6.5. Изочастотные кривые для ПМСВ в ферритовой пластине со свободными поверхностями [2]. Кривые соответствуют частотам: 1 — 2800 МГц; 2 — 3000 МГц; 3 — 3200 МГц; 4 — 3400 МГц; 5 — 3600 МГц. Параметры пластины: $4\pi M_0 = 1750$ Гс, $d = 15$ мкм. Поле: $H = 437,5$ Э

кривых, нижние — полностью симметричны относительно горизонтальной оси, поэтому для упрощения рисунка не приводятся. Номера кривых соответствуют тем же частотам, что отмечены точками на рис. 6.4. Выход изочастотных кривых на горизонтальную ось имеет место при тех же значениях волнового числа, что и проекции точек 1–5 на горизонтальную кривую на рис. 6.4.

Можно видеть, что все кривые по форме представляют собой зависимости, подобные гиперболам, причем с повышением частоты кривые сдвигаются к большим значениям k_y , а их ветви идут более полого. При бесконечном увеличении волнового числа кривые стремятся к наклонным проходящим через точку O асимптотам (на рисунке не показаны), определяемым углами отсечки.

На примере кривой 4 показана схема расположения векторов фазовой \mathbf{k} и групповой \mathbf{s} скоростей. Углы φ и ψ , характеризующие отклонение этих векторов от горизонтальной оси, соответствуют углам с теми же обозначениями на рис. 6.1.

Вектор фазовой скорости \mathbf{k} исходит из начала координат O под углом φ к горизонтальной оси и заканчивается в точке A , соответствующей пересечению с изочастотной кривой.

Вектор групповой скорости \mathbf{s} перпендикулярен касательной BD к изочастотной кривой в точке A и составляет с горизонтальной осью угол ψ .

Можно видеть, что при $\varphi = 0$ угол ψ также равен нулю, а по мере увеличения φ вплоть до угла отсечки, угол ψ также увеличивается. На линии отсечки выполняется соотношение: $\varphi + \psi = 90^\circ$.

Замечание. Из рис. 6.5 можно видеть, что взаимная ориентация волнового и лучевого векторов определяется наклоном изочастотной кривой в точке, соответствующей концу волнового вектора. При этом критерием прямого или обратного характера волны можно считать знак проекции лучевого вектора на направление волнового вектора. Так, если проекция вектора групповой скорости на вектор фазовой скорости положительна, то волна является прямой, если отрицательна — обратной. На языке векторной алгебры можно сказать, что волна является прямой, если знак скалярного произведения волнового и лучевого векторов положителен, и обратной, если этот знак отрицателен. В рамках настоящей работы такое определение характера волны является вполне достаточным, однако для более подробного ознакомления с данным вопросом можно обратиться к работам [144, 442].

6.3.3. Вектор групповой скорости

Для ряда задач представляет интерес определить как ориентацию, так и величину вектора групповой скорости. Рассмотрим как это можно сделать на основе полученного дисперсионного соотношения.

Прежде всего отметим, что обозначение вектора групповой скорости \mathbf{s} , традиционно принятое в оптике [443], для задач о магнитоэлектрических волнах является не вполне удобным, поэтому заменим его на эквивалентное обозначение \mathbf{v}_g , так что $\mathbf{v}_g \equiv \mathbf{s}$. При этом, согласно определению групповой скорости [443]

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \mathbf{n}_y + \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \mathbf{n}_z, \quad (6.219)$$

то есть, учитывая, что дисперсионное соотношение имеет вид $\omega = \omega(k, \varphi)$, получаем:

$$v_{gy} = \frac{\partial \omega}{\partial k_y} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial k_y} + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial k_y}; \quad (6.220)$$

$$v_{gz} = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial k_z} + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial k_z}. \quad (6.221)$$

Выразим эти производные по k_y и k_z через входящие в дисперсионное соотношение переменные k и φ , учитывая, что:

$$k = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}; \quad (6.222)$$

$$\varphi = \arctg \frac{k_z}{k_y}, \quad (6.223)$$

а также согласно (6.1), (6.2):

$$k_y = k \cos \varphi; \quad (6.224)$$

$$k_z = k \sin \varphi. \quad (6.225)$$

При этом получаем:

$$\frac{\partial k}{\partial k_y} = \frac{k_y}{\sqrt{k_y^2 + k_z^2}} = \cos \varphi; \quad (6.226)$$

$$\frac{\partial k}{\partial k_z} = \frac{k_z}{\sqrt{k_y^2 + k_z^2}} = \sin \varphi; \quad (6.227)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial k_y} = -\frac{k_z}{k_y^2 + k_z^2} = -\frac{1}{k} \sin \varphi; \quad (6.228)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial k_z} = \frac{k_y}{k_y^2 + k_z^2} = \frac{1}{k} \cos \varphi. \quad (6.229)$$

Подставляя (6.226)–(6.229) в (6.220)–(6.221), получаем:

$$v_{gy} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \cos \varphi - \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \frac{1}{k} \sin \varphi; \quad (6.230)$$

$$v_{gz} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \sin \varphi + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \frac{1}{k} \cos \varphi. \quad (6.231)$$

Здесь, согласно (6.26), частота ω связана с нормированной частотой Ω соотношением

$$\omega = 4\pi\gamma M_0 \Omega, \quad (6.232)$$

так что (6.230)–(6.231) можно записать в виде:

$$v_{gy} = 4\pi\gamma M_0 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial k} \cos \varphi - \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{k} \right); \quad (6.233)$$

$$v_{gz} = 4\pi\gamma M_0 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial k} \sin \varphi + \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{k} \right). \quad (6.234)$$

Полная длина вектора групповой скорости равна

$$v_g = \sqrt{v_{gy}^2 + v_{gz}^2} = 4\pi\gamma M_0 \sqrt{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial k} \right)^2 + \frac{1}{k^2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \right)^2}. \quad (6.235)$$

Полученные компоненты вектора групповой скорости (6.233)–(6.234) позволяют определить угол ψ между этим вектором и горизонтальной осью исходя из следующего соотношения:

$$\psi = \arctg \frac{v_{gz}}{v_{gy}} = \arctg \frac{k \frac{\partial \Omega}{\partial k} \sin \varphi + \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \cos \varphi}{k \frac{\partial \Omega}{\partial k} \cos \varphi - \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \sin \varphi}. \quad (6.236)$$

Входящие в выражения (6.233)–(6.236) производные $\partial\Omega/\partial k$ и $\partial\Omega/\partial\varphi$ определяются конкретным видом дисперсионного соотношения. Приведем их здесь для ферритовой пленки со свободными поверхностями, дисперсионное соотношение в которой имеет вид (6.209):

$$F(\Omega, k, \varphi) = \beta - 1 - 2\mu\alpha \operatorname{cth}(kd\alpha) = 0. \quad (6.237)$$

Дифференцируя (6.237) как неявную функцию, получаем:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial k} = -\frac{\partial F/\partial k}{\partial F/\partial\Omega}; \quad (6.238)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi} = -\frac{\partial F/\partial\varphi}{\partial F/\partial\Omega}. \quad (6.239)$$

В эти формулы входят производные $\partial F/\partial k$, $\partial F/\partial\varphi$, $\partial F/\partial\Omega$. С учетом (6.237) они приобретают вид:

$$\frac{\partial F}{\partial k} = 2 \left[\frac{\mu d\alpha^2}{\operatorname{sh}^2(kd\alpha)} \right]; \quad (6.240)$$

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi} = 2\mu \left[\frac{kd\alpha}{\operatorname{sh}^2(kd\alpha)} - \operatorname{cth}(kd\alpha) \right] \frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} + \frac{\partial\beta}{\partial\varphi}; \quad (6.241)$$

$$\frac{\partial F}{\partial\Omega} = 2\mu \left[\frac{kd\alpha}{\operatorname{sh}^2(kd\alpha)} - \operatorname{cth}(kd\alpha) \right] \frac{\partial\alpha}{\partial\Omega} + \frac{\partial\beta}{\partial\Omega} - 2\alpha \operatorname{cth}(kd\alpha) \frac{\partial\mu}{\partial\Omega}, \quad (6.242)$$

а входящие в (6.240)–(6.242) производные имеют вид:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} = \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) \sin 2\varphi; \quad (6.243)$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\Omega} = -\frac{\sin^2\varphi}{2\alpha\mu^2} \frac{\partial\mu}{\partial\Omega}; \quad (6.244)$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\varphi} = (\mu^2 - \nu^2 - \mu) \sin 2\varphi; \quad (6.245)$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\Omega} = 2\nu \cos^2\varphi \frac{\partial\nu}{\partial\Omega} - (\sin^2\varphi + 2\mu \cos^2\varphi) \frac{\partial\mu}{\partial\Omega}; \quad (6.246)$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial\Omega} = \frac{2\Omega_H\Omega}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)}. \quad (6.247)$$

При этом, как и ранее, используются обозначения (6.210), (6.211), а также (6.24)–(6.27):

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{\mu} + \cos^2\varphi}; \quad (6.248)$$

$$\beta = (\nu^2 - \mu^2 + \mu) \cos^2\varphi - \mu; \quad (6.249)$$

$$\mu = 1 + \frac{\Omega_H}{\Omega_H^2 - \Omega^2}; \quad (6.250)$$

$$\nu = \frac{\Omega}{\Omega_H^2 - \Omega^2}; \quad (6.251)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}; \quad (6.252)$$

$$\Omega_H = \frac{H}{4\pi M_0}. \quad (6.253)$$

Выражения для длины вектора групповой скорости (6.235) и его угла ψ (6.236) для других структур вычисляются аналогичным образом с использованием соответствующих дисперсионных соотношений.

Выводы по главе 6

Данная глава посвящена рассмотрению решения основных классических задач о распространении дипольных магнитостатических волн в касательно намагниченной пластине. Приведены два способа решения — через введение магнитостатического потенциала и непосредственно через магнитные поля распространяющейся волны. Дополнительно рассмотрены некоторые свойства полученных волн — дисперсионные кривые и вектор групповой скорости.

Основные результаты, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Для общей геометрии задачи, в основе которой лежит магнитная (ферритовая) пластина, намагниченная в ее плоскости, записаны уравнения магнитостатики и граничные условия для поля и индукции. На основе равенства нулю динамической составляющей магнитного поля введен магнитостатический потенциал, производные от которого по координатам соответствуют компонентам поля. Из условия равенства нулю дивергенции от магнитной индукции получено уравнение Уокера, являющееся аналогом уравнения Лапласа для гиротропной среды. Для заданной геометрии получены уравнения, определяющие распределение потенциала в магнитной пластине и примыкающих к ее поверхностям свободных полупространствах. Показано, что подстановка решений этих уравнений в граничные условия приводит к системе из четырех линейных алгебраических уравнений для амплитуд распространяющейся волны. Равенство нулю детерминанта этой системы позволяет получить дисперсионное соотношение, связывающее частоту распространяющейся волны с ее волновым числом.

2. Для той же геометрии на основе полных уравнений магнитостатики получено представление динамических параметров волны через ее магнитные поля. Путем подстановки полей в уравнения магнитостатики получен аналог уравнения Уокера для динамических компонент поля без введения потенциала. Записаны граничные условия для поля и индукции на поверхностях пластины. Для динамических компонент

поля волны получена система уравнений типа Уокера внутри пластины и Лапласа в окружающих пластину полупространствах. Решение полученных уравнений с последующей подстановкой решений в граничные условия позволило получить дисперсионное соотношение, аналогичное таковому, полученному посредством введения потенциала. Отмечено преимущество решения через поля по сравнению с решением через потенциал, состоящее в отсутствии необходимости использования условия равенства нулю ротора от поля волны, нарушающегося в рамках полной электродинамики.

3. Отмечено различие случаев объемных и поверхностных волн. Дисперсионное соотношение получено в декартовой и полярной системах координат, найден угол отсечки и приведена графическая иллюстрация дисперсии поверхностных магнитостатических волн. Приведены примеры дисперсионных и изочастотных кривых, а также соотношение между ориентациями векторов фазовой и групповой скоростей волны. В качестве иллюстрации применения полученного дисперсионного соотношения для решения практических задач выполнен расчет компонент вектора групповой скорости распространяющейся поверхностной магнитостатической волны.

Глава 7

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ ПРИ РАСЧЕТЕ СВОЙСТВ ОБМЕННЫХ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН

В этой главе рассмотрим обменные магнитостатические волны в магнитной среде, обладающей гиротропными свойствами. Приведем вывод выражений для дипольного и обменного полей, которые используем для решения уравнения движения вектора намагниченности, в результате чего будет получено дисперсионное соотношение для распространяющейся обменной волны. Рассмотрим частные случаи дисперсии при распространении волны вдоль и поперек постоянного поля. Приведем аналог магнитной восприимчивости для распространяющейся волны. Рассмотрим вопрос о возможности возбуждения обменных волн, а также отметим общую задачу о возбуждении волны волной.

7.1. Дисперсионные свойства обменных магнитостатических волн

В разделе 5.3.1 отмечено, что волны, рассматриваемые в магнитостатическом приближении, могут иметь не только дипольную, но и обменную природу. Обменные волны, в силу короткодействия обменных сил, являются значительно более короткими, чем дипольные. Длина таких волн составляет единицы микрометров и менее, их физические свойства заметно отличаются от свойств волн дипольных. Магнитное взаимодействие между диполями остается, однако теперь к нему добавляется обменное взаимодействие, на коротких расстояниях превышающее дипольное.

Причина обменного взаимодействия — в нарушении однородности распределения намагниченности. В случае распространяющейся магнитной волны неоднородность проявляется на длине такой волны, так что чем волна короче, тем неоднородность сильнее и обменное взаимодействие проявляется ярче. То есть с уменьшением длины волны система становится как бы более жесткой, так что частота ее собственных колебаний увеличивается.

Такое увеличение является причиной того, что кривая дисперсии обменных волн, как зависимость частоты от волнового числа, возрастает тем сильнее, чем волновое число больше.

Таковы в общих чертах дисперсионные свойства обменных магнитостатических волн. Рассмотрим теперь их более подробно, для чего начнем с дипольного взаимодействия, затем перейдем к обменному, после чего объединим их вместе с учетом гиротропного характера намагниченности, что и даст искомое дисперсионное соотношение. В идеологическом плане будем, в основном, следовать [16, 17]. Остальные необходимые ссылки будут приведены в тексте.

7.1.1. Дипольное поле обменной магнитостатической волны

Найдем дипольное поле, создаваемое намагниченностью обменной магнитостатической волны при ее распространении в магнитной среде.

Уравнения магнитостатики имеют вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0; \quad (7.1)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}) = 0. \quad (7.2)$$

Запишем их в виде:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0; \quad (7.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{M}. \quad (7.4)$$

Эту систему можно рассматривать как описание того факта, что намагниченность \mathbf{M} создает поле \mathbf{H} .

Первым этапом является нахождение этого поля при произвольной конфигурации намагниченности. Для решения этой задачи возьмем ротор от обеих частей первого уравнения

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H}. \quad (7.5)$$

Учитывая (7.3) и (7.4), получаем уравнение для определения \mathbf{H} через \mathbf{M} в виде

$$\Delta \mathbf{H} = -4\pi \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{M}. \quad (7.6)$$

Записывая векторные функции через производные, получаем:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = -4\pi \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial x \partial z} \right); \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = -4\pi \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y \partial z} \right); \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} = -4\pi \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} \right). \quad (7.9)$$

Это — совокупность трех независимых уравнений Пуассона с заданной правой частью, решение которых позволяет определить поле, создаваемое любой заданной конфигурацией намагниченности.

Предположим теперь, что переменная часть конфигурации намагниченности имеет вид распространяющейся волны:

$$\mathbf{M} = \mathbf{m}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{kr})} = \mathbf{m}_0 e^{i\omega t} e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}. \quad (7.10)$$

Переменную часть поля будем искать в виде такой же волны:

$$\mathbf{H} = \mathbf{h}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} = \mathbf{h}_0 e^{i\omega t} e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}. \quad (7.11)$$

Выполняя дифференцирование экспонент, подставляя полученные выражения в (7.7)–(7.9) и приводя подобные члены, получаем:

$$h_{0x}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = -4\pi k_x(m_{0x}k_x + m_{0y}k_y + m_{0z}k_z); \quad (7.12)$$

$$h_{0y}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = -4\pi k_y(m_{0x}k_x + m_{0y}k_y + m_{0z}k_z); \quad (7.13)$$

$$h_{0z}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = -4\pi k_z(m_{0x}k_x + m_{0y}k_y + m_{0z}k_z). \quad (7.14)$$

Учтем, что

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2, \quad (7.15)$$

а также

$$m_{0x}k_x + m_{0y}k_y + m_{0z}k_z = \mathbf{m}_0\mathbf{k}, \quad (7.16)$$

после чего запишем (7.12)–(7.14) в виде единого векторного выражения:

$$\mathbf{h}_0 = -\frac{4\pi}{k^2}\mathbf{k}(\mathbf{m}_0\mathbf{k}). \quad (7.17)$$

Это и есть искомое выражение для магнитного поля, создаваемого распространяющейся дипольной магнитостатической волной («размагничивающее» поле дипольной магнитостатической волны).

Выражение (7.17) дает амплитуду поля, выраженную через амплитуду намагниченности. Для получения волновой зависимости поля от намагниченности надо обе стороны равенства умножить на волновой множитель $\exp[i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})]$.

Замечание. Отметим, что такое поле, вообще говоря, имеет место и при распространении чисто дипольных магнитостатических волн (глава 6). Однако здесь это поле получено в предположении безграничной протяженности волнового фронта в плоскости, перпендикулярной волновому вектору \mathbf{k} . Такое «размагничивающее» поле обусловлено «размагничивающим фактором» равным 4π и от расстояния до плоскости не зависит. Это можно видеть из (7.17), где числитель и знаменатель пропорциональны квадрату волнового числа, то есть длины волны, так что поле в целом по абсолютной величине просто пропорционально $4\pi m_0$ и от длины волны не зависит. Не так однако обстоит дело в случае магнитостатических дипольных волн, рассмотренных в главе 6. Там эти волны распространяются в плоскости относительно тонкой пластины, так что размагничивающее поле, создаваемое динамической намагниченностью вдоль направления распространения волны, спадает по экспоненте с показателем, пропорциональным толщине пластины. То есть, если длина волны значительно превышает толщину пластины, то размагничивающее поле волны спадает практически до нуля на расстоянии такой толщины, что значительно меньше длины волны. Поэтому в формировании дисперсии дипольной волны в пластине поле размагничивания участвует в тем меньшей степени, чем длина волны больше.

Ситуация полностью аналогична задаче об отражении электромагнитных волн от гранулированных пленок [485, разделы 21, 22, рис. 7в]. Различие состоит в том, что там рассматривается спад амплитуды отраженной волны, а здесь — спад поля распространяющейся волны, тогда как характер постоянной спада в обоих случаях полностью совпадает.

Таким образом, поле вида (7.17) участвует в формировании дисперсии дипольных волн только в случае, когда длина этих волн сравнима или меньше толщины пластины. В реальных экспериментах по распространению дипольных волн в пленках железоиттриевого граната [1, 2] толщина пленки обычно составляет единицы (редко десятки) микрон, тогда как длина волны — сотни и тысячи микрон. То есть при интерпретации этих экспериментов поля вида (7.17) можно не учитывать. Однако, когда длина волны становится порядка одного микрона и меньше, что имеет место для обменных волн, учет поля (7.17) становится принципиально необходимым.

7.1.2. Обменное поле обменной магнитостатической волны

Найдем теперь эффективное поле, создаваемое намагниченностью магнитостатической волны при распространении этой волны в магнитной среде, обладающей неоднородным обменным взаимодействием.

Будем исходить из плотности энергии неоднородного обмена, которую можно рассматривать как отражение того факта, что намагниченность \mathbf{M} создает эффективное поле неоднородного обменного взаимодействия \mathbf{H}_{ex} . Плотность энергии неоднородного обмена имеет три вида записи, различающиеся видом констант, каждый из которых используется при описании определенного круга магнитных явлений. Эти виды записи рассмотрены подробно в разделе 5.2.4. При рассмотрении обменных волн традиционно используется вид записи (5.60) или (5.64), которым и будем пользоваться далее:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{ex}} &= \frac{q}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial M_i}{\partial x_j} \right)^2 = \\
 &= \frac{q}{2} \left\{ \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_y}{\partial z} \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial M_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_z}{\partial z} \right)^2 \right\}. \quad (7.18)
 \end{aligned}$$

Эффективное поле имеет вид [15, стр. 68; 16, стр. 42]

$$\mathbf{H}_{\text{ex}} = -\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \mathbf{M}} + \sum_{p=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_p} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_p} \right)} \right]. \quad (7.19)$$

При этом

$$\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \mathbf{M}} = \mathbf{i} \frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial M_x} + \mathbf{j} \frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial M_y} + \mathbf{k} \frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial M_z}, \quad (7.20)$$

а также:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_p} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_p} \right)} \right] &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} \right)} \right]. \end{aligned} \quad (7.21)$$

В этом выражении

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right)} &= \frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\mathbf{i} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial M_y}{\partial x} + \mathbf{k} \frac{\partial M_z}{\partial x} \right)} = \\ &= \mathbf{i} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} \right)} \right] + \mathbf{j} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} \right)} \right] + \mathbf{k} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_z}{\partial x} \right)} \right]. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Аналогично

$$\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \right)} = \mathbf{i} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_x}{\partial y} \right)} \right] + \mathbf{j} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} \right)} \right] + \mathbf{k} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} \right)} \right]; \quad (7.23)$$

$$\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} \right)} = \mathbf{i} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} \right)} \right] + \mathbf{j} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_y}{\partial z} \right)} \right] + \mathbf{k} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_z}{\partial z} \right)} \right]. \quad (7.24)$$

Подставляя (7.22)–(7.24) в (7.21), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_p} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_p} \right)} \right] &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mathbf{i} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} \right)} \right] + \mathbf{j} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} \right)} \right] + \mathbf{k} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_z}{\partial x} \right)} \right] \right\} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mathbf{i} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_x}{\partial y} \right)} \right] + \mathbf{j} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} \right)} \right] + \mathbf{k} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} \right)} \right] \right\} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mathbf{i} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} \right)} \right] + \mathbf{j} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_y}{\partial z} \right)} \right] + \mathbf{k} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_z}{\partial z} \right)} \right] \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{i} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_x}{\partial y} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} \right)} \right] \right\} + \\
 &+ \mathbf{j} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_y}{\partial z} \right)} \right] \right\} + \\
 &+ \mathbf{k} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_z}{\partial x} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_z}{\partial z} \right)} \right] \right\}. \quad (7.25)
 \end{aligned}$$

Подставляя (7.20) и (7.25) в (7.19), получаем компоненты эффективного поля обменного взаимодействия в виде:

$$\begin{aligned}
 (H_{\text{ex}})_x &= -\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial M_x} + \\
 &+ \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_x}{\partial y} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} \right)} \right] \right\}; \quad (7.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (H_{\text{ex}})_y &= -\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial M_y} + \\
 &+ \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_y}{\partial z} \right)} \right] \right\}; \quad (7.27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (H_{\text{ex}})_z &= -\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial M_z} + \\
 &+ \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_z}{\partial x} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_z}{\partial z} \right)} \right] \right\}. \quad (7.28)
 \end{aligned}$$

Найдем теперь эти компоненты полей, исходя из вида плотности энергии (7.18). Выражения, присутствующие в (7.26)–(7.28) в квадратных скобках, принимают вид:

$$\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} \right)} = q \frac{\partial M_x}{\partial x}; \quad (7.29)$$

$$\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_x}{\partial y} \right)} = q \frac{\partial M_x}{\partial y}; \quad (7.30)$$

$$\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} \right)} = q \frac{\partial M_x}{\partial z}; \quad (7.31)$$

$$\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} \right)} = q \frac{\partial M_y}{\partial x}; \quad (7.32)$$

$$\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} \right)} = q \frac{\partial M_y}{\partial y}; \quad (7.33)$$

$$\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_y}{\partial z} \right)} = q \frac{\partial M_y}{\partial z}; \quad (7.34)$$

$$\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_z}{\partial x} \right)} = q \frac{\partial M_z}{\partial x}; \quad (7.35)$$

$$\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} \right)} = q \frac{\partial M_z}{\partial y}; \quad (7.36)$$

$$\frac{\partial U_{\text{ex}}}{\partial \left(\frac{\partial M_z}{\partial z} \right)} = q \frac{\partial M_z}{\partial z}. \quad (7.37)$$

Подставляя (7.29)–(7.37) в (7.26)–(7.28), получаем:

$$(H_{\text{ex}})_x = q \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2} \right); \quad (7.38)$$

$$(H_{\text{ex}})_y = q \left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2} \right); \quad (7.39)$$

$$(H_{\text{ex}})_z = q \left(\frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} \right); \quad (7.40)$$

или в векторном виде

$$\mathbf{H}_{\text{ex}} = q \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right). \quad (7.41)$$

Эти выражения позволяют определить эффективное поле неоднородного обменного взаимодействия, создаваемое любой заданной конфигурацией намагниченности.

Предположим теперь, что переменная во времени и пространстве конфигурация намагниченности имеет вид распространяющейся волны

$$\mathbf{M} = \mathbf{m}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{k})} = \mathbf{m}_0 e^{i\omega t} e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}, \quad (7.42)$$

где

$$\mathbf{m}_0 = i m_{0x} - \mathbf{j} m_{0y} + \mathbf{k} m_{0z}, \quad (7.43)$$

причем:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2. \quad (7.44)$$

Переменную часть поля будем искать в виде такой же волны:

$$\mathbf{H}_{\text{ex}} = \mathbf{h}_{\text{ex}0} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{k})} = \mathbf{h}_{\text{ex}0} e^{i\omega t} e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}. \quad (7.45)$$

Выполняя дифференцирование экспонент, подставляя полученные выражения в (7.38)–(7.40) и учитывая (7.44), получаем:

$$(h_{\text{ex}0})_x = -qk^2 m_{0x}; \quad (7.46)$$

$$(h_{\text{ex}0})_y = -qk^2 m_{0y}; \quad (7.47)$$

$$(h_{\text{ex}0})_z = -qk^2 m_{0z}, \quad (7.48)$$

или, записывая (7.46)–(7.48) в виде векторного выражения, получаем:

$$\mathbf{h}_{\text{ex}0} = -qk^2 \mathbf{m}_0. \quad (7.49)$$

Это и есть искомое выражение для эффективного магнитного поля, создаваемого распространяющейся обменной магнитостатической волной («обменное» поле обменной магнитостатической волны).

Можно видеть, что это поле пропорционально квадрату волнового числа, то есть проявляется тем сильнее, чем длина волны меньше. Более подробно, с учетом реальной величины константы обменного взаимодействия q , зависимость этого поля от волнового числа иллюстрируется врезкой на рис. 7.1.

Выражение (7.49) дает амплитуду эффективного поля, выраженную через амплитуду намагниченности. Для получения волновой зависимости эффективного поля от намагниченности надо обе стороны равенства умножить на волновой множитель $\exp[i(\omega t - \mathbf{kr})]$.

7.1.3. Решение уравнения движения вектора намагниченности для обменной магнитостатической волны

Дипольное поле, создаваемое динамической намагниченностью при распространении в среде обменной магнитостатической волны («размагничивающее» поле дипольной магнитостатической волны), имеет вид (7.17)

$$\mathbf{H}_M = -\frac{4\pi}{k^2} \mathbf{k}(\mathbf{mk}). \quad (7.50)$$

Эффективное поле, создаваемое динамической намагниченностью при распространении в среде обменной магнитостатической волны, имеет вид (7.49)

$$\mathbf{H}_E = -qk^2 \mathbf{m}. \quad (7.51)$$

Будем полагать, что полное эффективное поле имеет вид

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_M + \mathbf{H}_E = \mathbf{H}_0 - \frac{4\pi}{k^2} \mathbf{k}(\mathbf{mk}) - qk^2 \mathbf{m}, \quad (7.52)$$

где \mathbf{m} — переменная намагниченность, имеющая пространственно-временную зависимость вида $\exp[i(\omega t - \mathbf{kr})]$.

Выберем систему координат, ось Oz которой параллельна направлению постоянного поля \mathbf{H}_0 . При этом (7.52) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \mathbf{i} & \left[-\frac{4\pi}{k^2} k_x (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_x \right] + \\ & + \mathbf{j} \left[-\frac{4\pi}{k^2} k_y (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_y \right] + \\ & + \mathbf{k} \left[H_0 - \frac{4\pi}{k^2} k_z (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_z \right]. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Положим далее, что намагниченность имеет вид

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m} = \mathbf{i}m_x + \mathbf{j}m_y + \mathbf{k}(M_0 + m_z). \quad (7.54)$$

Уравнение движения для намагниченности (уравнение Ландау–Лифшица в отсутствие затухания) имеет вид (1.5)

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}]. \quad (7.55)$$

Записывая (7.55) по компонентам, получаем:

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = -\gamma (M_y H_z - M_z H_y); \quad (7.56)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = -\gamma (M_z H_x - M_x H_z); \quad (7.57)$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial t} = -\gamma (M_x H_y - M_y H_x). \quad (7.58)$$

Подставляя (7.53) и (7.54) в (7.56)–(7.58), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma & \left\{ m_y \left[H_0 - \frac{4\pi}{k^2} k_z (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_z \right] - \right. \\ & \left. - (M_0 + m_z) \left[-\frac{4\pi}{k^2} k_y (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_y \right] \right\}; \end{aligned} \quad (7.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_y}{\partial t} = -\gamma & \left\{ (M_0 + m_z) \left[-\frac{4\pi}{k^2} k_x (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_x \right] - \right. \\ & \left. - m_x \left[H_0 - \frac{4\pi}{k^2} k_z (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_z \right] \right\}; \end{aligned} \quad (7.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_z}{\partial t} = -\gamma & \left\{ m_x \left[-\frac{4\pi}{k^2} k_y (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_y \right] - \right. \\ & \left. - m_y \left[-\frac{4\pi}{k^2} k_x (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_x \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.61)$$

Выполним линеаризацию, для чего предположим, что: $m_{x,y} \ll M_0 \sim H_0$, а также $m_z \approx 0$:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma \left\{ m_y H_0 - M_0 \left[-\frac{4\pi}{k^2} k_y (m_x k_x + m_y k_y) - qk^2 m_y \right] \right\}; \quad (7.62)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\gamma \left\{ M_0 \left[-\frac{4\pi}{k^2} k_x (m_x k_x + m_y k_y) - qk^2 m_x \right] - m_x H_0 \right\}. \quad (7.63)$$

Обе стороны этих выражений имеют координатно-временную зависимость вида $\exp [i(\omega t - \mathbf{kr})]$. Выполняя дифференцирование по времени, разделяя обе части на этот множитель и опуская индекс «0» у амплитуд компонент намагниченности, получаем:

$$i\omega m_x = -\gamma \left\{ m_y H_0 - M_0 \left[-\frac{4\pi}{k^2} k_y (m_x k_x + m_y k_y) - qk^2 m_y \right] \right\}; \quad (7.64)$$

$$i\omega m_y = -\gamma \left\{ M_0 \left[-\frac{4\pi}{k^2} k_x (m_x k_x + m_y k_y) - qk^2 m_x \right] - m_x H_0 \right\}. \quad (7.65)$$

Введем обозначения:

$$\omega_H = \gamma H_0; \quad (7.66)$$

$$\omega_M = 4\pi\gamma M_0; \quad (7.67)$$

$$\omega_E = \gamma q k^2 M_0. \quad (7.68)$$

Формулы (7.67) и (7.68) можно записать в виде:

$$\omega_M = \gamma H_M; \quad (7.69)$$

$$\omega_E = \gamma H_E, \quad (7.70)$$

где введены обозначения для статических полей:

размагничивания

$$H_M = 4\pi M_0, \quad (7.71)$$

неоднородного обмена

$$H_E = qk^2 M_0. \quad (7.72)$$

Раскрывая в выражениях (7.64)–(7.65) скобки, подставляя (7.66)–(7.68), приводя подобные члены и располагая слагаемые в порядке следования переменных, получаем:

$$\left(i\omega + \omega_M \frac{k_x k_y}{k^2} \right) m_x + \left(\omega_H + \omega_E + \omega_M \frac{k_y^2}{k^2} \right) m_y = 0; \quad (7.73)$$

$$\left(\omega_H + \omega_E + \omega_M \frac{k_x^2}{k^2} \right) m_x - \left(i\omega - \omega_M \frac{k_x k_y}{k^2} \right) m_y = 0. \quad (7.74)$$

Уравнения (7.73)–(7.74) представляют собой систему, связывающую компоненты динамической намагниченности m_x и m_y с параметрами среды и распространяющейся волны. Определитель этой системы равен

$$D_0 = \begin{vmatrix} \left(i\omega + \omega_M \frac{k_x k_y}{k^2} \right) & \left(\omega_H + \omega_E + \omega_M \frac{k_y^2}{k^2} \right) \\ \left(\omega_H + \omega_E + \omega_M \frac{k_x^2}{k^2} \right) & - \left(i\omega - \omega_M \frac{k_x k_y}{k^2} \right) \end{vmatrix} =$$

$$= \omega^2 - \left(\omega_H + \omega_E \right) \left(\omega_H + \omega_E + \omega_M \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right). \quad (7.75)$$

Полагая этот определитель равным нулю

$$D_0 = 0, \quad (7.76)$$

находим частоту свободно распространяющейся волны в виде

$$\omega = \sqrt{(\omega_H + \omega_E) \left(\omega_H + \omega_E + \omega_M \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right)}. \quad (7.77)$$

Эту формулу можно записать через статические поля H_0 , H_E и H_M в виде

$$\omega = \gamma \sqrt{(H_0 + H_E) \left(H_0 + H_E + H_M \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right)}. \quad (7.78)$$

Формулы (7.77) и (7.78) определяют закон дисперсии (дисперсионное соотношение) для обменных магнитостатических волн в безграничной среде.

Видно, что закон дисперсии является квадратичным по волновому числу k в соответствии с выражением для поля неоднородного обмена H_E (7.72) (или частоты ω_E (7.70)).

7.1.4. Частные случаи закона дисперсии

Рассмотрим некоторые частные случаи закона дисперсии.

Прежде всего введем угол θ_k между направлением волнового вектора волны и координатной осью Oz (направлением постоянного поля \mathbf{H}_0), определяемый равенством

$$\sin \theta_k = \frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{k}. \quad (7.79)$$

При этом (7.77) и (7.78) принимают вид

$$\omega = \sqrt{(\omega_H + \omega_E) \left(\omega_H + \omega_E + \omega_M \sin^2 \theta_k \right)}, \quad (7.80)$$

или

$$\omega = \gamma \sqrt{(H_0 + qk^2 M_0) \left(H_0 + qk^2 M_0 + 4\pi M_0 \sin^2 \theta_k \right)}. \quad (7.81)$$

При $\theta_k = 0^\circ$, то есть при распространении волны вдоль направления постоянного поля (вдоль оси Oz), ее частота становится равной:

$$\omega = \omega_H + \omega_E = \gamma(H_0 + qk^2 M_0). \quad (7.82)$$

При $\theta_k = 90^\circ$, то есть при распространении волны перпендикулярно направлению поля (в плоскости Oxy) ее частота становится равной

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{(\omega_H + \omega_E)(\omega_H + \omega_E + \omega_M)} = \\ &= \gamma \sqrt{(H_0 + qk^2 M_0)(H_0 + qk^2 M_0 + 4\pi M_0)}, \quad (7.83) \end{aligned}$$

что несколько выше, чем частота, определяемая (7.82), как это будет далее показано на рис. 7.1 (где кривая 2 проходит выше кривой 1).

Из сравнения выражений (7.82) и (7.83) можно видеть, что повышение частоты обменных волн в случае распространения перпендикулярно приложенному полю обусловлено последним слагаемым во второй круглой скобке выражения (7.83), которое пропорционально намагниченности насыщения. То есть можно сделать вывод, что такое повышение частоты обусловлено чисто магнитной причиной, каковой является влияние дипольного поля волны вида (7.17).

7.1.5. Графическая иллюстрация дисперсии обменных волн

Рассмотрим некоторые свойства дисперсии обменных волн, для чего обратимся к рис. 7.1, где показаны дисперсионные кривые при двух крайних значениях угла распространения волны θ_k относительно направления поля. Кривая 1 построена по формуле (7.82), кривая 2 — по формуле (7.83).

Из рисунка четко видна квадратичность закона дисперсии обменных волн, следующая из увеличения жесткости системы по мере уменьшения длины волн.

На врезке показана зависимость поля неоднородного обмена от волнового числа, которая тоже является квадратичной. В диапазоне СВЧ резонансное поле составляет порядка сотен и тысяч эрстед. Так что неоднородный обмен может заметно проявиться тогда, когда его поле становится сравнимым с этой величиной. Из врезки можно видеть, что H_E достигает нескольких эрстед, когда волновое число становится больше $(2-5) \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$. Такому волновому числу соответствует длина волны порядка одного-двух микрометров. То есть, начиная с этой величины в сторону укорочения, обязательно следует учитывать влияние обменных магнитостатических волн.

7.2. Вынужденная обменная магнитостатическая волна

В предыдущих разделах рассмотрен закон дисперсии обменных волн, получаемый как следствие свободных колебаний. Представляет интерес также определить восприимчивость системы, то есть ее реакцию

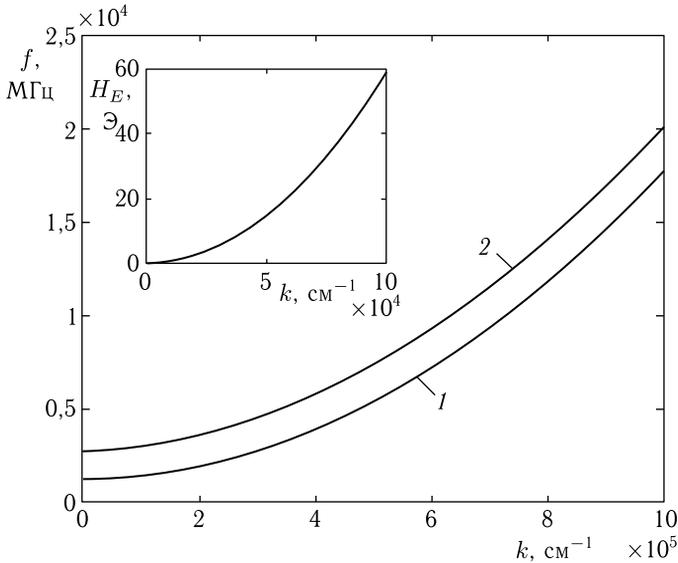


Рис. 7.1. Дисперсионные кривые для обменных волн при различных углах распространения относительно направления поля: 1 — 0° ; 2 — 90° . На врезке — зависимость обменного поля от волнового числа. Параметры построения: $4\pi M_0 = 1750$ Гс; $H = 435,5$ Э. Константа неоднородного обменного взаимодействия для ЖИГ (при $4\pi M_0 = 1750$ Гс) положена равной $q = 4,23 \cdot 10^{-11}$ эрг $\cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{Э}^{-2}$ [235, стр. 21]

на воздействие внешним полем, что требует рассмотрения вынужденных колебаний с учетом обменного взаимодействия.

7.2.1. Уравнение движения и эффективные поля

Уравнение движения для вектора намагниченности (Ландау–Лифшица) позволяет, наряду со свободными, найти также вынужденные колебания намагниченности, возбуждаемые внешним полем.

Будем искать решение этого уравнения в виде магнитостатической волны, переменная намагниченность \mathbf{m} которой имеет пространственно-временную зависимость вида

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{m}_0 \exp [i(\omega t - \mathbf{kr})]. \quad (7.84)$$

Предположим, что действующее в магнитной среде поле имеет вид

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h} + \mathbf{H}_M + \mathbf{H}_E. \quad (7.85)$$

Слагаемые этого поля представляют собой:

постоянное подмагничивающее поле

$$\mathbf{H}_0 = \text{const}; \quad (7.86)$$

переменное магнитное поле

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 \exp [i(\omega t - \mathbf{kr})]; \quad (7.87)$$

поле, создаваемое динамической намагниченностью при распространении в среде дипольной магнитостатической волны («размагничивающее» поле дипольной магнитостатической волны),

$$\mathbf{H}_M = -\frac{4\pi}{k^2} \mathbf{k}(\mathbf{mk}) = -\frac{4\pi}{k^2} \mathbf{k}(\mathbf{m}_0 \mathbf{k}) \exp [i(\omega t - \mathbf{kr})]; \quad (7.88)$$

эффе́ктивное поле, создаваемое динамической намагниченностью при распространении в среде обменной магнитостатической волны,

$$\mathbf{H}_E = -qk^2 \mathbf{m} = -qk^2 \mathbf{m}_0 \exp [i(\omega t - \mathbf{kr})]. \quad (7.89)$$

Таким образом, полное поле имеет вид

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h} - \frac{4\pi}{k^2} \mathbf{k}(\mathbf{mk}) - qk^2 \mathbf{m}, \quad (7.90)$$

где последние три слагаемые содержат множитель вида $\exp [i(\omega t - \mathbf{kr})]$, который далее для краткости записи опускаем.

Выберем систему координат, ось Oz которой параллельна направлению постоянного поля \mathbf{H}_0 . При этом (7.90) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \mathbf{i} & \left[h_x - \frac{4\pi}{k^2} k_x (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_x \right] + \\ & + \mathbf{j} \left[h_y - \frac{4\pi}{k^2} k_y (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_y \right] + \\ & + \mathbf{k} \left[H_0 + h_z - \frac{4\pi}{k^2} k_z (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_z \right]. \end{aligned} \quad (7.91)$$

Положим далее, что намагниченность имеет вид

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m} = \mathbf{i}m_x + \mathbf{j}m_y + \mathbf{k}(M_0 + m_z), \quad (7.92)$$

где M_0 — постоянная намагниченность (намагниченность насыщения среды), вектор которой в равновесном состоянии ориентирован вдоль постоянного поля \mathbf{H}_0 (то есть вдоль оси Oz).

Уравнение движения для намагниченности (уравнение Ландау–Лифшица) (1.5) в отсутствие затухания имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}]. \quad (7.93)$$

Записывая (7.93) по компонентам, получаем:

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = -\gamma (M_y H_z - M_z H_y); \quad (7.94)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = -\gamma (M_z H_x - M_x H_z); \quad (7.95)$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial t} = -\gamma (M_x H_y - M_y H_x). \quad (7.96)$$

Подставляя (7.91) и (7.92) в (7.94)–(7.96), получаем:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma \left\{ m_y \left[H_0 + h_z - \frac{4\pi}{k^2} k_z (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_z \right] - (M_0 + m_z) \left[h_y - \frac{4\pi}{k^2} k_y (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_y \right] \right\}; \quad (7.97)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\gamma \left\{ (M_0 + m_z) \left[h_x - \frac{4\pi}{k^2} k_x (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_x \right] - m_x \left[H_0 + h_z - \frac{4\pi}{k^2} k_z (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_z \right] \right\}; \quad (7.98)$$

$$\frac{\partial m_z}{\partial t} = -\gamma \left\{ m_x \left[-\frac{4\pi}{k^2} k_y (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_y \right] - m_y \left[-\frac{4\pi}{k^2} k_x (m_x k_x + m_y k_y + m_z k_z) - qk^2 m_x \right] \right\}. \quad (7.99)$$

Выполним линеаризацию, для чего предположим, что: $m_{x,y} \ll M_0 \sim H_0$, $h_{x,y,z} \ll H_0$, а также $m_z \approx 0$. В результате получаем:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma \left\{ m_y H_0 - M_0 \left[h_y - \frac{4\pi}{k^2} k_y (m_x k_x + m_y k_y) - qk^2 m_y \right] \right\}; \quad (7.100)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\gamma \left\{ M_0 \left[h_x - \frac{4\pi}{k^2} k_x (m_x k_x + m_y k_y) - qk^2 m_x \right] - m_x H_0 \right\}. \quad (7.101)$$

Обе стороны этих выражений имеют координатно-временную зависимость вида $\exp(i\omega t - \mathbf{kr})$.

Выполнив дифференцирование по времени, разделив обе части на этот множитель и опуская индекс «0» у амплитуд компонент намагниченности и переменного поля, получаем:

$$i\omega m_x = -\gamma \left\{ m_y H_0 - M_0 \left[h_y - \frac{4\pi}{k^2} k_y (m_x k_x + m_y k_y) - qk^2 m_y \right] \right\}; \quad (7.102)$$

$$i\omega m_y = -\gamma \left\{ M_0 \left[h_x - \frac{4\pi}{k^2} k_x (m_x k_x + m_y k_y) - qk^2 m_x \right] - m_x H_0 \right\}. \quad (7.103)$$

Введем обозначения, подобные (7.66)–(7.71):

$$\omega_H = \gamma H_0; \quad (7.104)$$

$$\omega_M = 4\pi\gamma M_0; \quad (7.105)$$

$$\omega_E = \gamma qk^2 M_0. \quad (7.106)$$

Формулы (7.105) и (7.106) можно записать в виде:

$$\omega_M = \gamma H_M; \quad (7.107)$$

$$\omega_E = \gamma H_E, \quad (7.108)$$

где введены обозначения для статических полей размагничивания:

$$H_M = 4\pi M_0,$$

неоднородного обмена:

$$H_E = qk^2 M_0. \quad (7.109)$$

7.2.2. Эффективная динамическая восприимчивость

Раскрывая в выражениях (7.102)–(7.103) скобки, подставляя (7.104)–(7.106), приводя подобные члены и располагая слагаемые в порядке следования переменных, получаем:

$$\left(i\omega + \omega_M \frac{k_x k_y}{k^2}\right) m_x + \left(\omega_H + \omega_E + \omega_M \frac{k_y^2}{k^2}\right) m_y = \gamma M_0 h_y; \quad (7.110)$$

$$\left(\omega_H + \omega_E + \omega_M \frac{k_x^2}{k^2}\right) m_x - \left(i\omega - \omega_M \frac{k_x k_y}{k^2}\right) m_y = \gamma M_0 h_x. \quad (7.111)$$

Уравнения (7.110)–(7.111) представляют собой систему, связывающую компоненты динамической намагниченности m_x и m_y с параметрами среды, распространяющейся волны и компонентами переменного поля.

Определитель этой системы равен

$$D_0 = \begin{vmatrix} \left(i\omega + \omega_M \frac{k_x k_y}{k^2}\right) & \left(\omega_H + \omega_E + \omega_M \frac{k_y^2}{k^2}\right) \\ \left(\omega_H + \omega_E + \omega_M \frac{k_x^2}{k^2}\right) & -\left(i\omega - \omega_M \frac{k_x k_y}{k^2}\right) \end{vmatrix} = \\ = \omega^2 - (\omega_H + \omega_E) \left(\omega_H + \omega_E + \omega_M \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2}\right). \quad (7.112)$$

Решая систему (7.110)–(7.111), находим амплитуды компонент намагниченности:

$$m_x = -\frac{\gamma M_0}{D_0} \left\{ \left(\omega_H + \omega_E + \omega_M \frac{k_y^2}{k^2}\right) h_x + \left(i\omega - \omega_M \frac{k_x k_y}{k^2}\right) h_y \right\} \quad (7.113)$$

$$m_y = \frac{\gamma M_0}{D_0} \left\{ \left(i\omega + \omega_M \frac{k_x k_y}{k^2}\right) h_x - \left(\omega_H + \omega_E + \omega_M \frac{k_x^2}{k^2}\right) h_y \right\}, \quad (7.114)$$

где D_0 определяется выражением (7.112).

При этом обе части полученных равенств имеют пространственно-временную зависимость вида $\exp[i(\omega t - \mathbf{kr})]$.

Формально можно ввести динамическую восприимчивость $\vec{\chi}_d$, такую, что

$$\mathbf{m} = \vec{\chi}_d \mathbf{h}, \quad (7.115)$$

где

$$\vec{\chi}_d = -\frac{\gamma M_0}{D_0} \begin{pmatrix} \left(\omega_H + \omega_E + \omega_M \frac{k_y^2}{k^2} \right) & \left(i\omega - \omega_M \cdot \frac{k_x k_y}{k^2} \right) \\ -\left(i\omega + \omega_M \cdot \frac{k_x k_y}{k^2} \right) & \left(\omega_H + \omega_E + \omega_M \frac{k_x^2}{k^2} \right) \end{pmatrix}, \quad (7.116)$$

причем D_0 определяется выражением (7.112).

Меняя порядок следования слагаемых внутри D_0 с соответствующим изменением знака перед дробью, получаем компоненты этого тензора в виде:

$$\chi_{d11} = \frac{\gamma M_0 \left(\omega_H + \omega_E + \omega_M \frac{k_y^2}{k^2} \right)}{(\omega_H + \omega_E) \left(\omega_H + \omega_E + \omega_M \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \omega^2}; \quad (7.117)$$

$$\chi_{d12} = \frac{\gamma M_0 \left(i\omega - \omega_M \frac{k_x k_y}{k^2} \right)}{(\omega_H + \omega_E) \left(\omega_H + \omega_E + \omega_M \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \omega^2}; \quad (7.118)$$

$$\chi_{d21} = -\frac{\gamma M_0 \left(i\omega + \omega_M \frac{k_x k_y}{k^2} \right)}{(\omega_H + \omega_E) \left(\omega_H + \omega_E + \omega_M \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \omega^2}; \quad (7.119)$$

$$\chi_{d22} = \frac{\gamma M_0 \left(\omega_H + \omega_E + \omega_M \frac{k_x^2}{k^2} \right)}{(\omega_H + \omega_E) \left(\omega_H + \omega_E + \omega_M \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) - \omega^2}. \quad (7.120)$$

При заданных компонентах волнового вектора компоненты тензора имеют резонансную расходимость на частоте:

$$\omega = \sqrt{(\omega_H + \omega_E) \left(\omega_H + \omega_E + \omega_M \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right)}. \quad (7.121)$$

Аналогично задание частоты накладывает ограничения на резонансные компоненты волнового вектора.

7.3. Замечания о возможности возбуждения обменных волн в эксперименте

Приведем некоторые дополнительные замечания, следующие из приведенного выше рассмотрения обменных волн. Прежде всего рассмотрим вопрос о возбуждении обменных волн, а затем кратко остановимся на вопросе возбуждения в более общем математическом аспекте.

7.3.1. Обменные волны, распространяющиеся по толщине пленки

В предыдущих разделах рассмотрены обменные магнитостатические волны, распространяющиеся в безграничной однородной среде. Рассмотрение таких волн в ограниченной среде требует учета граничных условий.

Для намагниченности уравнение движения, подобное (7.93), можно записать в виде [17, стр. 205]

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma [\mathbf{M} \times (H_e + H_E + H_S)], \quad (7.122)$$

где поле H_e по-прежнему определяется как производная от плотности энергии по намагниченности (1.6):

$$\mathbf{H}_e = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{M}}, \quad (7.123)$$

поле H_E — описывает неоднородное обменное взаимодействие (7.109):

$$H_E = qk^2 M_0, \quad (7.124)$$

поле H_S — эффективное поле «поверхностной анизотропии», существующее лишь в тонком поверхностном слое и учитывающее особые условия для намагниченности в этом слое. Более подробно роль и физическое содержание понятия поверхностной анизотропии, в том числе с многочисленными ссылками, рассмотрено в [17, стр. 206–208].

Наиболее простая ситуация имеет место в случае распространения обменных волн в тонкой пленке в направлении, перпендикулярном ее плоскости. При этом по толщине пленки устанавливаются стоячие волны, количество которых кратно нечетному числу полуволн. Такое явление обычно называется «спин-волновым резонансом» и также рассмотрено в [17, стр. 208–214].

7.3.2. Обменные волны, распространяющиеся в плоскости пленки

Для практики, по-видимому, значительный интерес представляет рассмотрение обменных спиновых волн, распространяющихся в плоскости тонкой пленки. Трудность теоретической интерпретации таких волн состоит прежде всего в сложности требуемых для их описания граничных условий. Некоторые возможные пути ее преодоления кратко описаны в [17, стр. 214–219].

Важнейшим практическим вопросом является управляемое возбуждение и регистрация (детектирование) обменных волн, в первую очередь, распространяющихся в плоскости пленки.

Такое возбуждение открывает возможность создания таких устройств как волноводы, резонаторы, фильтры, управляемые линии

задержки и другие, подобные устройствам на дипольных волнах [17, стр. 219–220].

Геометрические размеры таких устройств обещают быть во столько же раз меньше подобных устройств на дипольных волнах, во сколько раз длина обменной волны меньше длины волны дипольной, то есть как минимум на три–четыре порядка.

Довольно удобным практически реализованным способом возбуждения обменных волн является преобразование дипольных волн, распространяющихся в условиях плавно меняющейся неоднородности внутреннего магнитного поля в образце.

Некоторые сведения о таком способе возбуждения можно найти в [17, стр. 220–221]. Подробное описание с приведением результатов экспериментов содержится в пионерских статьях [115–118, 120–122].

Ситуация здесь подобна распространению поверхностных магнито-статических волн в поперечно неоднородном поле, величина которого по ходу волны постепенно возрастает. При этом длина магнито-статической волны увеличивается настолько, что становится сравнимой с длиной электромагнитной волны той же частоты. При этом происходит достаточно эффективное преобразование коротких магнито-статических волн в длинные электромагнитные, что проявляет себя как излучение электромагнитных волн из феррита. Подробному рассмотрению такого излучения, в том числе на основе модели ускоренного движения магнитных зарядов, посвящены главы 7 и 8 монографии [2].

Возбуждение обменных волн на неоднородности поля происходит как бы в обратном порядке, то есть длина дипольной волны по мере распространения уменьшается, пока она не сравнивается с длиной обменной волны, когда и происходит преобразование.

Инструментом расчета изменения длины волны здесь является метод ВКБ, краткое рассмотрение которого приведено в одном из следующих далее разделов.

Следует заметить, что преобразование на неоднородности поля позволяет возбудить обменные волны, длина которых составляет лишь единицы и небольшие доли микрометра, то есть недостаточна для явного проявления квадратичности закона дисперсии (рис. 7.1). Квадратичные обменные волны эффективно возбуждаются лишь параметрическим путем в сильно нелинейном режиме [66–68], где они, как правило, являются мешающим фактором.

Другой возможностью возбуждения обменных волн в линейном режиме может явиться создание локальной неоднородности, геометрические размеры которой сравнимы с требуемой длиной волны.

При этом электромагнитная волна на локальной неоднородности создаст перепад магнитного поля, который будет эффективно взаимодействовать с полем короткой обменной волны. Локальной неоднородностью магнитной среды может быть дефект, доменная граница, трещина в пленке, скачок толщины, какая-либо искусственно созданная неоднородность, например токовый элемент или аппликация.

Теоретическую интерпретацию такого возбуждения можно реализовать путем разложения поля на неоднородности в спектр с помощью интеграла (или ряда) Фурье с последующим рассмотрением перекрытия спектральных составляющих с полем длинной электромагнитной волны.

Трудностью технического осуществления такого возбуждения является крайняя малость размера такой неоднородности, исчисляемая долями микрометра и нанометрами. Однако сегодняшняя технология вполне справляется с такими размерами [445, 446], так что можно ожидать скорого решения и этой задачи.

7.3.3. Общая задача о возбуждении волны волной

Рассмотренные в разделе 4.1 задачи относятся к решению однородного волнового уравнения в случае свободных колебаний. Однако для практики представляет значительный интерес возбуждение волнового процесса, которое в общем случае описывается неоднородным уравнением. Для граничной задачи хорошо известно решение неоднородного уравнения при заданных граничных и начальных условиях [10, стр. 96–103]. В основе такого решения лежит его представление в виде разложения в ряд по собственным функциям однородной задачи.

В случае возбуждения точечной силой решение выполняется путем сшивания двух решений по обе стороны от точки приложения силы [10, стр. 110–113]. При этом возможен резонанс, условием которого является совпадение частоты возбуждения с частотой собственных колебаний, а также приложение силы в точке пучности стоячей волны.

Решение рассмотренной в разделе 7.2.1 задачи о возбуждении дипольно-обменной магнитостатической волны предполагает вынуждающее поле в виде (7.87), а волну намагниченности — в виде (7.84), то есть как волна, так и вынуждающее воздействие имеют одну и ту же пространственно-временную зависимость вида $\exp[i(\omega t - \mathbf{kr})]$. То есть заведомо предполагаются условия резонанса, что и дает резонансную частоту в виде (7.121).

Однако в общем случае пространственно-временная зависимость поля (7.87) может не совпадать с пространственно-временной зависимостью (7.84). Такое несовпадение обусловлено тем, что возбуждающее поле задается извне как возбуждаемая независимым генератором электромагнитная волна, а свойства обменной волны задаются законом дисперсии, то есть внутренними свойствами среды (намагниченностью и обменным полем) в совокупности с величиной приложенного постоянного поля.

Такая ситуация ставит задачу о возбуждении волны одного типа волной же, но уже другого типа, то есть о возбуждении волны волной.

Очевидно, постановка такой задачи довольно тривиальна, однако в настоящее время решение ее в общем виде авторам настоящей монографии неизвестно.

Следует оговориться, что приведенное здесь заявление относится только к кругу вопросов, касающихся компетенции авторов, так что за сообщение подобного решения (если оно имеется в общем виде) авторы были бы весьма благодарны. За свое возможное неведение авторы приносят глубочайшие извинения, но все же полагают возможным привести перечень некоторых практических задач, для решения которых, по их мнению, такое решение было бы полезно.

Довольно удобным реализованным способом возбуждения обменных волн является преобразование дипольных волн, распространяющихся в условиях плавно меняющейся неоднородности внутреннего магнитного поля в образце.

Итак, будем полагать, что возбуждающее воздействие на одну волну осуществляется другой волной, частота и волновое число которой могут быть произвольными. При таком возбуждении должен наблюдаться какой-то резонанс по двум переменным — по частоте и по длине волны (или по волновому числу). Можно построить пространственный график: по одной горизонтальной оси — частота, по другой — длина волны (или волновое число), по вертикальной оси — амплитуда возбужденной волны. Этот график должен иметь пик на пересечении резонансной частоты с резонансной длиной волны (или волновым числом). При несовпадении направлений распространения той и другой волн возможна сложная картина интерференционного типа.

Такое решение — возбуждение одной волны другой волной может быть полезным, например, для следующих задач:

- возбуждение магнитостатической волны электромагнитной волной или электромагнитной волны магнитостатической, в том числе излучение электромагнитных волн из феррита, рассмотренное в [2], но без прямого привлечения модели ускоренного движения магнитных зарядов;
- возбуждение волн одной природы волнами другой природы, например, упругих или обменных волн электромагнитными или электромагнитных волн — упругими или обменными;
- возбуждение волны, распространяющейся вдоль одной из внутренних поверхностей щелевой или другой волноведущей структуры, другой волной, распространяющейся вдоль другой поверхности той же структуры;
- возбуждение волн искусственными структурами, в которых могут создаваться бегущие возмущения, например какими-то решетками, питаемыми током;
- возбуждение волн другими волнами на неоднородностях среды;
- возбуждение волн солитонами или бегущими доменами, представляющими собой возмущение волнового характера.

Разумеется, круг вопросов, касающихся возбуждения волны волной, этими положениями далеко не исчерпывается. Авторы привели лишь небольшую часть задач, которые им первыми пришли в голову. Возмож-

но, определенный интерес представляет также решение обратных задач, касающихся не только возбуждения, но и приема (регистрации) одних волн на основе анализа изменения параметров других. Более подробную разработку этих и других подобных вопросов авторы предоставляют любознательному читателю.

Выводы по главе 7

Данная глава посвящена рассмотрению основного математического аппарата, используемого при описании свойств обменных магнитостатических волн. Получено дисперсионное соотношение для случая безграничной среды, определена эффективная динамическая восприимчивость, обсуждается возможность возбуждения обменных волн, а также приведена схема постановки задачи о возбуждении волны волной.

Основные результаты, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрены дисперсионные свойства обменных магнитостатических волн. Получено дипольное поле обменной волны, обычно именуемое «размагничивающим полем обменной волны». Проведено сравнение этого поля с дипольным полем дипольной волны. Показано, что в реальной ситуации распространения дипольной волны в пластине, толщина которой значительно меньше длины волны, необходимость учета размагничивающего поля отсутствует, тогда как для обменных волн, длина которых меньше толщины пластины, его учет является принципиально необходимым.

2. Получено эффективное магнитное поле обменной магнитостатической волны, обусловленное неоднородным обменным взаимодействием. Выявлена квадратичность величины этого поля по волновому числу, отмечено возрастание его роли в случае, когда длина волны составляет единицы микрометров и менее.

3. Получено дисперсионное соотношение для обменной волны и отмечены частные случаи закона дисперсии для волн, распространяющихся параллельно и перпендикулярно направлению магнитного поля. Приведена графическая иллюстрация дисперсии обменных волн. С учетом реальной величины константы неоднородного обменного взаимодействия показано, что необходимость учета в законе дисперсии неоднородного обмена возникает для волн, длина которых меньше единиц микрометров, причем влияние такого взаимодействия возрастает пропорционально квадрату волнового числа. Показано, что роль неоднородного обмена наиболее сильно сказывается на дисперсии волн, распространяющихся перпендикулярно направлению постоянного поля, что проявляется в смещении дисперсионной кривой в сторону более высоких частот. Отмечено, что физической причиной, приводящей к наблюдаемому увеличению частоты, является влияние дипольного поля распространяющейся волны.

4. Рассмотрена вынужденная обменная магнитостатическая волна, возбуждаемая переменным полем, пространственно-временные характеристики которого совпадают с таковыми для возбуждаемой волны. Получен тензор эффективной магнитной восприимчивости для обменной волны, выявлен его резонансный характер.

5. Рассмотрены возможные способы возбуждения обменных волн. Отмечен частный случай возбуждения обменных волн в тонкой пленке перпендикулярно ее плоскости — «спин-волновой резонанс». В качестве другого реализуемого на практике случая приведено преобразование дипольных волн в обменные при распространении в условиях плавно меняющейся неоднородности внутреннего магнитного поля в образце. Отмечена важность практического разрешения задачи о непосредственном возбуждении обменных волн, распространяющихся в плоскости пленки, что может дать начало созданию широкого разнообразия устройств обработки информации, размеры которых будут на несколько порядков меньше размеров аналогичных устройств, использующих дипольные волны. Обсуждена возможность возбуждения обменных волн на искусственно созданной локальной неоднородности пленки. Отмечена технологическая трудность реализации такой неоднородности, обусловленная малостью требуемых геометрических размеров, исчисляемых нанометрами.

6. В качестве возможного обобщения рассмотренных вопросов обсуждена постановка общей математической задачи о возбуждении волны за счет ее взаимодействия с другой волной, частота и волновое число которой могут быть произвольными. Отмечено, что в этом случае должен наблюдаться резонанс по двум переменным — по частоте и по длине волны или по волновому числу. При несовпадении направлений распространения той и другой волн возможна сложная картина интерференционного типа. Отмечена важность решения такой задачи для ряда как фундаментальных, так и технических приложений, в том числе касающихся возбуждения волн одной природы волнами другой природы, например магнитостатических волн электромагнитными, упругими, движущимися токовыми решетками или бегущими доменами, а также обратная задача, касающаяся приема (регистрации) таких волн.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

При пространственном изменении параметров среды характеристики волн, распространяющихся в такой среде, также изменяются. Такое изменение в большинстве случаев можно описать с помощью волнового уравнения, коэффициенты которого зависят от одной или нескольких координат. Рассмотрим сначала решение подобного уравнения на основе приближенного метода Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ), отметим частный случай решения уравнения Рэлея, после чего обратимся к обобщению метода Гамильтона–Аулда для магнитостатических волн на случай трехмерной среды. В изложении будем следовать монографиям [1, 9, 417]. Остальные необходимые ссылки указаны в тексте.

8.1. Метод Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ)

Метод Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ) имеет значительное количество вариаций, сутью которых является учет зависимости волнового числа от координаты. При этом решение ищется в виде экспоненты, показатель которой в случае достаточно медленного изменения параметров среды сводится к интегралу от квадратного корня из волнового числа.

В довольно простом и достаточно общем виде метод ВКБ изложен в книге [417, стр. 30–32], которой и будем следовать в дальнейшем изложении.

Итак, метод ВКБ предназначен для приближенного решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Наиболее общий вид такого уравнения следующий:

$$z'' + \psi(x)z' + g(x)y = 0, \quad (8.1)$$

где $\psi(x)$ и $g(x)$ — известные функции, заданные условием задачи.

Следуя [417, стр. 17], исключим из этого уравнения первую производную, для чего сделаем подстановку

$$z(x) = v(x)p(x). \quad (8.2)$$

При этом:

$$z' = v'p + vp'; \quad (8.3)$$

$$z'' = v''p + 2v'p' + vp''. \quad (8.4)$$

Подставляя в исходное уравнение, группируя подобные члены и разделив на p , получаем:

$$v'' + v' \left(\psi + \frac{2p'}{p} \right) + v \left(\frac{p''}{p} + \psi \frac{p'}{p} + g \right) = 0. \quad (8.5)$$

Приравнявая коэффициент при v' к нулю, получаем уравнение для определения p :

$$\psi + \frac{2p'}{p} = 0, \quad (8.6)$$

решая которое, получаем

$$p = e^{-\frac{1}{2} \int \psi(x) dx}. \quad (8.7)$$

При этом:

$$p' = -\frac{1}{2} \psi p; \quad (8.8)$$

$$p'' = -\frac{1}{2} p \left(\psi' - \frac{\psi^2}{2} \right). \quad (8.9)$$

Подставляя (8.7)–(8.9) в (8.5), получаем уравнение для $v(x)$ в виде

$$v'' + v \left(-\frac{\psi'}{2} - \frac{\psi^2}{4} + g \right) = 0. \quad (8.10)$$

Введем обозначение

$$f = -\frac{\psi'}{2} - \frac{\psi^2}{4} + g, \quad (8.11)$$

где ψ и g — исходные заданные уравнением (8.1) функции.

С этим обозначением уравнение (8.10) принимает вид:

$$v'' + f(x)v = 0. \quad (8.12)$$

Если решение этого уравнения $v(x)$ известно, то решение исходного уравнения (8.1), в соответствии с (8.2), принимает вид

$$y = vp = v(x) e^{-\frac{1}{2} \int \psi(x) dx}. \quad (8.13)$$

Итак, показано, что с помощью подстановки (8.2) любое линейное дифференциальное уравнение второго порядка можно привести к линейному уравнению второго порядка без первой производной. Именно к такому уравнению применяется метод ВКБ. Перейдем теперь к непосредственному применению метода ВКБ:

8.1.1. Метод ВКБ. Первое приближение

Пусть исходное уравнение имеет вид

$$y'' + f(x)y = 0. \quad (8.14)$$

Можно видеть, что это уравнение соответствует координатной части классического волнового уравнения при гармонической зависимости от времени.

Будем искать решение уравнения (8.14) в виде экспоненты с показателем, зависящим от x ,

$$y = e^{i\varphi(x)}. \quad (8.15)$$

Из (8.15) путем дифференцирования с помощью логарифма, находим:

$$y' = i\varphi' y; \quad (8.16)$$

$$y'' = -(\varphi')^2 y + i\varphi'' y. \quad (8.17)$$

Подставляя в исходное уравнение и разделив на y , получаем

$$-(\varphi')^2 + i\varphi'' + f = 0. \quad (8.18)$$

Предположим, что:

$$|\varphi''| \ll |f|. \quad (8.19)$$

При этом в уравнении (8.18) второй производной можно пренебречь и оно принимает вид

$$-(\varphi')^2 + f = 0, \quad (8.20)$$

откуда находим

$$\varphi' = \pm\sqrt{f}. \quad (8.21)$$

Отсюда

$$\varphi = \pm \int \sqrt{f(x)} dx. \quad (8.22)$$

Подставляя (8.22) в (8.15), получаем приближенное решение исходного уравнения (8.14) в виде

$$y = e^{\pm i \int \sqrt{f(x)} dx}. \quad (8.23)$$

Выражение (8.21) позволяет выразить вторую производную от φ через f :

$$\varphi'' = \pm \frac{f'}{2\sqrt{f}}. \quad (8.24)$$

Подставляя (8.24) в (8.19), получаем условие применимости (8.19), выраженное через f ,

$$\left| \frac{f'}{2\sqrt{f}} \right| \ll |f|. \quad (8.25)$$

8.1.2. Метод ВКБ. Второе приближение

Итак, формула (8.23) дает первое приближение решения уравнения (8.14). Придадим ему индекс «1». Второму приближению придадим индекс «2». Найдем второе приближение с помощью итерации. Для этого подставим найденную вторую производную от φ (8.24)

в уравнение (8.18), в результате чего получим уравнение для второго приближения φ в виде

$$-(\varphi_2')^2 + i\varphi_1'' + f = 0. \quad (8.26)$$

Здесь в формуле (8.22) надо следить за знаками, поэтому рассмотрим их по отдельности.

Рассмотрим сначала знак ПЛЮС:

$$\varphi_1 = \int \sqrt{f(x)} dx. \quad (8.27)$$

При этом

$$\varphi_1'' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}. \quad (8.28)$$

Подставляя (8.28) в (8.26) и выделяя квадрат первой производной от φ , получаем

$$(\varphi_2')^2 = f + i \frac{f'}{2\sqrt{f}}. \quad (8.29)$$

Так как из условия применимости метода (8.25) следует, что второе слагаемое по модулю значительно меньше первого, то можно воспользоваться приближенной формулой

$$\sqrt{A + \delta} \approx \sqrt{A} + \frac{\delta}{2\sqrt{A}}, \quad (8.30)$$

применяя которую к (8.29), получаем

$$\varphi_2' = \sqrt{f} + \frac{i}{4} \cdot \frac{f'}{f}. \quad (8.31)$$

Интегрируя (8.31), получаем

$$\varphi_2 = \int \sqrt{f(x)} dx + i \frac{1}{4} \ln[f(x)]. \quad (8.32)$$

При этом, учитывая, что $e^{\ln a} = a$, а также $e^{b \ln a} = a^b$, получаем из (8.15) решение уравнения (8.14) во втором приближении:

$$y^{(+)} = f^{-\frac{1}{4}} e^{i \int \sqrt{f(x)} dx}. \quad (8.33)$$

Рассмотрим теперь знак МИНУС:

$$\varphi_1 = - \int \sqrt{f(x)} dx. \quad (8.34)$$

При этом

$$\varphi_1'' = -\frac{f'}{2\sqrt{f}}. \quad (8.35)$$

Подставляя (8.35) в (8.26) и выделяя квадрат первой производной от φ , получаем

$$(\varphi_2')^2 = f - i\frac{f'}{2\sqrt{f}}. \quad (8.36)$$

Извлекая квадратный корень, получаем

$$\varphi_2' = \pm \sqrt{f - i\frac{f'}{2\sqrt{f}}}. \quad (8.37)$$

Так как (8.34) содержит знак минус, то и здесь надо брать минус. При этом получаем

$$\varphi_2' = -\sqrt{f - i\frac{f'}{2\sqrt{f}}}. \quad (8.38)$$

Так как из условия применимости метода (8.25) следует, что второе слагаемое по модулю значительно меньше первого, то можно воспользоваться приближенной формулой

$$\sqrt{A - \delta} \approx \sqrt{A} - \frac{\delta}{2\sqrt{A}}, \quad (8.39)$$

применяя которую к (8.38), получаем

$$\varphi_2' = -\sqrt{f} + \frac{i}{4} \cdot \frac{f'}{f}. \quad (8.40)$$

Интегрируя (8.40), получаем

$$\varphi_2 = -\int \sqrt{f(x)} dx + i\frac{1}{4} \ln[f(x)]. \quad (8.41)$$

При этом, учитывая, что $e^{\ln a} = a$, а также $e^{b \ln a} = a^b$, получаем из (8.15) решение уравнения (8.14) во втором приближении:

$$y^{(-)} = f^{-\frac{1}{4}} e^{-i \int \sqrt{f(x)} dx}. \quad (8.42)$$

Таким образом, из сравнения (8.33) и (8.42) с (8.27) и (8.34) видно, что второе приближение при обоих знаках сводится к умножению первого приближения на $f^{-\frac{1}{4}}$. При этом общее решение исходного уравнения (8.14) во втором приближении можно записать в виде

$$y = f^{-\frac{1}{4}} \left[C_1 e^{i \int \sqrt{f(x)} dx} + C_2 e^{-i \int \sqrt{f(x)} dx} \right], \quad (8.43)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

В таком виде метод ВКБ был применен в работах [447, 448] для расчета распространения поверхностных магнитостатических волн в одномерном магнетном кристалле переменной толщины.

8.1.3. Оценка точности метода ВКБ на реальном примере уравнения второго порядка

Проверим применимость метода ВКБ к реальной задаче, для чего сравним точность получаемого приближенного решения с более точным численным решением того же уравнения по методу Эйлера [414, стр. 701]. Для обеспечения точности метода Эйлера возьмем заведомо малый шаг, при котором в рассматриваемом интервале изменения независимой переменной решение при уменьшении величины шага на порядок меняется не более, чем на единицы процентов.

Итак, рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка с переменным коэффициентом вида

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x)y = 0. \quad (8.44)$$

Это уравнение эквивалентно системе уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = v, \\ \frac{dv}{dx} = -f(x)y. \end{cases} \quad (8.45)$$

Пошаговые формулы для численного решения системы двух уравнений первого порядка методом Эйлера имеют вид:

$$y_{k+1} = y_k + \left(\frac{dy}{dx}\right)_k \Delta x; \quad (8.46)$$

$$v_{k+1} = v_k + \left(\frac{dv}{dx}\right)_k \Delta x, \quad (8.47)$$

откуда для системы (8.45) получаем:

$$y_{k+1} = y_k + v_k \Delta x; \quad (8.48)$$

$$v_{k+1} = v_k - f(x_k)y_k \Delta x. \quad (8.49)$$

Аналитическое решение, полученное методом ВКБ во втором приближении, имеет вид

$$y = e^{i\varphi(x)}, \quad (8.50)$$

где

$$\varphi = \pm \int \sqrt{f(x)} dx + \frac{i}{4} \ln[f(x)]. \quad (8.51)$$

Подставляя (8.51) в (8.50), получаем

$$y \approx \frac{1}{[f(x)]^{1/4}} \left(A e^{i \int \sqrt{f(x)} dx} + B e^{-i \int \sqrt{f(x)} dx} \right), \quad (8.52)$$

или, переходя от экспонент к тригонометрическим функциям:

$$y \approx \frac{1}{[f(x)]^{1/4}} \left[A \cos \left(\int \sqrt{f(x)} dx \right) + iB \sin \left(\int \sqrt{f(x)} dx \right) \right], \quad (8.53)$$

где A и B — произвольные постоянные, которые могут быть определены из граничных условий.

Критерием применимости метода ВКБ является выполнение неравенства

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f'}{\sqrt{f}} \right| \ll |f|. \quad (8.54)$$

Рассмотрим частный вид уравнения (8.44), полагая

$$f(x) = (ax + b)^2. \quad (8.55)$$

При этом уравнение (8.44) принимает вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (ax + b)^2 y = 0. \quad (8.56)$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение колебаний, в котором волновое число линейно зависит от координаты.

Уравнение (8.56) эквивалентно системе двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = v, \\ \frac{dv}{dx} = -(ax + b)^2 y. \end{cases} \quad (8.57)$$

Пошаговые формулы для численного решения (метод Эйлера) для системы (8.57) имеют вид:

$$y_{k+1} = y_k + v_k \Delta x; \quad (8.58)$$

$$v_{k+1} = v_k - (ax_k + b)^2 y_k \Delta x. \quad (8.59)$$

Аналитическое решение, полученное методом ВКБ во втором приближении, имеет вид

$$y = A e^{-\frac{1}{2} \ln(ax+b)} \cos \left[\left(\frac{a}{2} x + b \right) x \right]. \quad (8.60)$$

Аналогичное решение имеется с синусом вместо косинуса.

При этом критерий (8.54) принимает вид

$$a \ll (ax + b)^2, \quad (8.61)$$

то есть при заданных значениях a и b выполняется при достаточно больших значениях x .

8.1.4. Получение коэффициентов a и b по двум точкам

Пусть прямая $y = f(x)$ проходит через две точки: $1(x_1, y_1)$ и $2(x_2, y_2)$ (рис. 8.1). Для волнового уравнения это эквивалентно тому, что волновое число при $x = x_1$ принимает значение y_1 , при $x = x_2$ — значение y_2 , а между этими значениями меняется линейно.

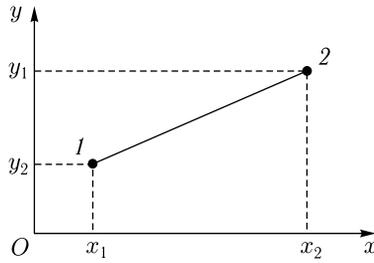


Рис. 8.1. Схема построения прямой, проходящей через две точки

Уравнение прямой имеет вид

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2} = ax + b, \quad (8.62)$$

то есть:

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}; \quad (8.63)$$

$$b = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}. \quad (8.64)$$

8.1.5. Решение при различных входных параметрах

Далее на рисунках приведены решения уравнения (8.56) при различных входных параметрах задачи. Решение методом Эйлера получено без каких-либо нормировочных коэффициентов, для метода ВКБ в формуле (8.60) введен коэффициент $A = 10$. Сплошные линии — метод Эйлера, пунктирные линии — метод ВКБ. Параметры g_1 и g_2 — левая и правая части критерия (8.61) при $x = x_1$, которые при $x_1 = 0$ равны: $g_1 = a$, $g_2 = b^2$. Параметры λ_1 и λ_2 — длины волн при x_1 и x_2 , соответственно равные

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\pi}{y_{1,2}}. \quad (8.65)$$

Остальные параметры соответствуют координатам начальной и конечной точек изменения x и y .

На рис. 8.2 длина волны по координате x не меняется. При этом $g_1 \ll g_2$, то есть критерий применимости метода ВКБ выполняется хорошо и пунктирные кривые почти полностью совпадают со сплошными.

На рис. 8.3 длина волны по координате x уменьшается в 5 раз.

При этом $g_1 < g_2$, то есть критерий применимости метода ВКБ выполняется удовлетворительно и пунктирные кривые почти полностью совпадают со сплошными. По мере увеличения координаты x совпадение улучшается, что обусловлено укорочением волны с соответствующим улучшением применимости метода ВКБ.

На рис. 8.4 длина волны по координате x уменьшается в 10 раз. При этом $g_1 > g_2$, то есть критерий применимости метода ВКБ не выполняется. Поэтому пунктирные кривые заметно расходятся со сплошными. По мере увеличения координаты x расхождение уменьшается,

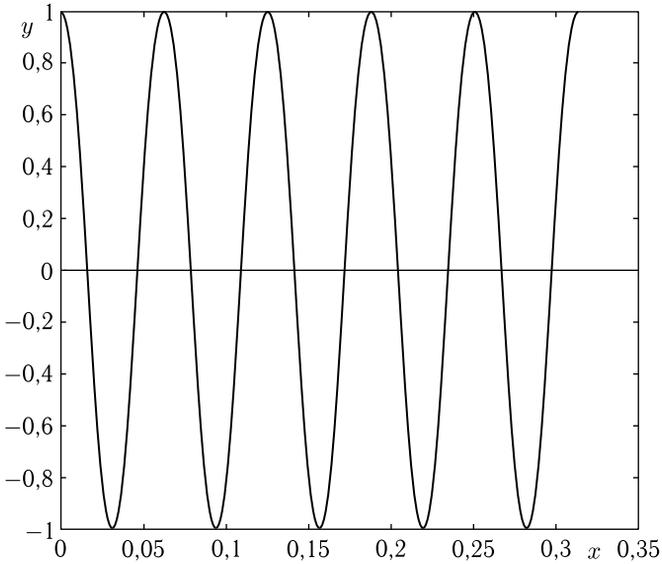


Рис. 8.2. Решения уравнения (8.56) методом Эйлера (сплошные линии) и методом ВКБ (пунктирные линии). Параметры построения: $y_1 = 100$; $y_2 = 100$; $x_1 = 0,00$; $x_2 = 0,31$; $\lambda_1 = 0,063$; $\lambda_2 = 0,063$; $g_1 = 0,00$; $g_2 = 10\,000$

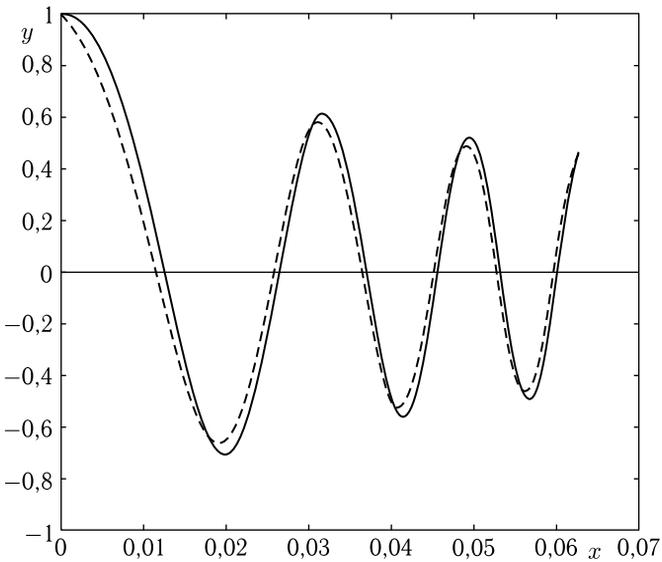


Рис. 8.3. Решения уравнения (8.56) методом Эйлера (сплошные линии) и методом ВКБ (пунктирные линии). Параметры построения: $y_1 = 100$; $y_2 = 500$; $x_1 = 0,00$; $x_2 = 0,063$; $\lambda_1 = 0,063$; $\lambda_2 = 0,012$; $g_1 = 6400$; $g_2 = 10\,000$

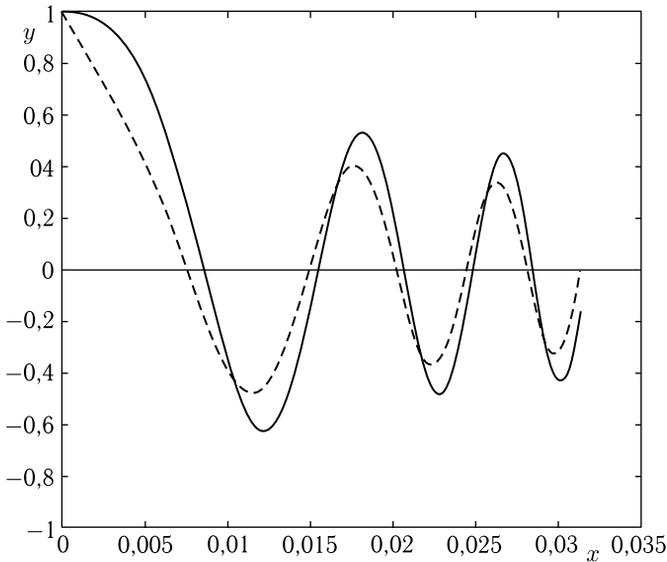


Рис. 8.4. Решения уравнения (8.56) методом Эйлера (сплошные линии) и методом ВКБ (пунктирные линии). Параметры построения: $y_1 = 100$; $y_2 = 1000$; $x_1 = 0,00$; $x_2 = 0,031$; $\lambda_1 = 0,063$; $\lambda_2 = 0,0063$; $g_1 = 29000$; $g_2 = 10000$

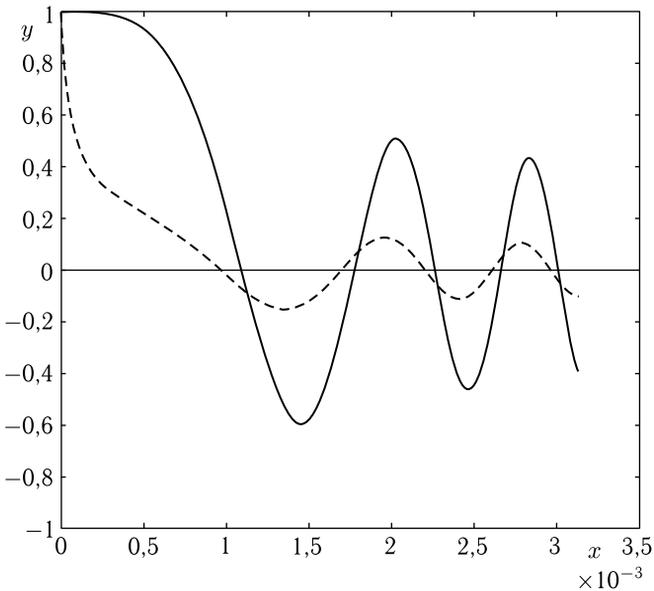


Рис. 8.5. Решения уравнения (8.56) методом Эйлера (сплошные линии) и методом ВКБ (пунктирные линии). Параметры построения: $y_1 = 100$; $y_2 = 10000$; $x_1 = 0,00$; $x_2 = 0,0031$; $\lambda_1 = 0,063$; $\lambda_2 = 0,00063$; $g_1 = 3\,200\,000$; $g_2 = 10000$

что обусловлено укорочением волны с приближением к условиям применимости метода ВКБ.

На рис. 8.5 длина волны по координате x уменьшается в 100 раз. При этом $g_1 \gg g_2$, что резко противоречит критерию применимости метода ВКБ. Поэтому пунктирные кривые расходятся со сплошными очень сильно, особенно при малых значениях координаты x . По мере увеличения x расхождение не уменьшается.

Общей особенностью всех рассмотренных случаев является довольно хорошее соответствие величин периодов осцилляций кривых, полученных обоими методами. Это соответствие сохраняется даже в случае нарушения критерия применимости метода ВКБ более чем на два порядка.

8.2. Уравнение Рэлея для волны в неоднородной среде

Решение волнового уравнения при произвольной зависимости волнового числа от координаты, по-видимому, может быть получено только численными методами. Однако имеется частный случай зависимости, при котором уравнение может быть решено в аналитическом виде. Представление такого уравнения и его точное аналитическое решение принадлежит Рэлею и приведено в его знаменитой «Теории звука» [9, стр. 257–258]. Ввиду важности такого решения, кратко рассмотрим здесь общую схему его получения.

8.2.1. Аналитическое решение уравнения Рэлея

Уравнение Рэлея для волны в неоднородной среде представляет собой координатную часть одномерного волнового уравнения, где зависимость от времени в виде $e^{i\omega t}$ предполагается уже исключенной, а волновое число обратно пропорционально координате:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + k^2(x)U = 0, \quad (8.66)$$

где

$$k = \frac{n}{x}, \quad (8.67)$$

а n — произвольное действительное число.

При этом уравнение Рэлея принимает вид

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{n^2}{x^2} U = 0. \quad (8.68)$$

Умножая (8.68) на x^2 , получаем

$$x^2 \frac{d^2 U}{dx^2} + n^2 U = 0. \quad (8.69)$$

Это уравнение является частным видом уравнения Эйлера [415, стр. 110; 416, стр. 229], для решения которого используется замена переменной x на p :

$$x = e^p, \quad (8.70)$$

то есть

$$p = \ln x. \quad (8.71)$$

При этом:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dU}{dp}; \quad (8.72)$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d^2U}{dp^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dU}{dp}. \quad (8.73)$$

Подставляя (8.73) в уравнение (8.69), получаем

$$\frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{d^2U}{dp^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dU}{dp} \right) + n^2U = 0, \quad (8.74)$$

откуда получаем

$$\frac{d^2U}{dp^2} - \frac{dU}{dp} + n^2U = 0. \quad (8.75)$$

Это — линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Будем искать его решение в виде

$$U = e^{\lambda p}. \quad (8.76)$$

Подставляя (8.76) в (8.75), получаем уравнение для λ

$$\lambda^2 - \lambda + n^2 = 0. \quad (8.77)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - n^2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4n^2}}{2}. \quad (8.78)$$

При этом решение уравнения (8.75) принимает вид

$$U = Ae^{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-4n^2}}{2}\right)p} + Be^{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-4n^2}}{2}\right)p}, \quad (8.79)$$

где A и B — произвольные постоянные.

Вынося общий множитель $e^{p/2}$ за скобки, получаем

$$U = e^{\frac{p}{2}} \left[Ae^{\frac{\sqrt{1-4n^2}}{2}p} + Be^{-\frac{\sqrt{1-4n^2}}{2}p} \right], \quad (8.80)$$

В формуле (8.80) p определяется выражением (8.71). При этом, учитывая, что

$$e^{\frac{p}{2}} = e^{\frac{\ln x}{2}} = (e^{\ln x})^{1/2} = x^{1/2}, \quad (8.81)$$

для случая $n < 1/2$ получаем

$$U = x^{1/2} \left[A e^{\frac{\sqrt{1-4n^2}}{2} \ln x} + B e^{-\frac{\sqrt{1-4n^2}}{2} \ln x} \right]. \quad (8.82)$$

При $n > 1/2$ получаем

$$U = x^{1/2} \left[A e^{i \frac{\sqrt{4n^2-1}}{2} \ln x} + B e^{-i \frac{\sqrt{4n^2-1}}{2} \ln x} \right]. \quad (8.83)$$

В этом случае удобно выразить экспоненты через тригонометрические функции:

$$U = x^{1/2} \left[C \cos \left(\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2} \ln x \right) + i D \sin \left(\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2} \ln x \right) \right], \quad (8.84)$$

где C и D — произвольные постоянные, связанные с A и B соотношениями:

$$C = A + B; \quad (8.85)$$

$$D = A - B. \quad (8.86)$$

8.2.2. Графическая иллюстрация решения уравнения Рэлея

Решение уравнения Рэлея иллюстрируется рис. 8.6 и рис. 8.7. Координата меняется от 1 до 9. Рис. 8.6 относится к случаю, когда волновое число с координатой уменьшается, рис. 8.7 — когда волновое число увеличивается. В обоих случаях $n = 10$. Действительные части функций изображены сплошными линиями, мнимые — пунктиром.

Случай уменьшения волнового числа соответствует волновому числу (8.67) и уравнению (8.68), рассмотренным выше. Полученные зависимости (для первого слагаемого выражения (8.83)) показаны на рис. 8.6. На этом рисунке: $u = \frac{n}{x}$ — волновое число;

$$v = e^{i \frac{\sqrt{4n^2-1}}{2} \ln x},$$

$v' = \operatorname{Re}(v)$, $v'' = \operatorname{Im}(v)$ — действительная и мнимая части экспоненциального множителя;

$$w = x^{1/2} e^{i \frac{\sqrt{4n^2-1}}{2} \ln x},$$

$w' = \operatorname{Re}(w)$, $w'' = \operatorname{Im}(w)$ — действительная и мнимая части полного решения.

Из рисунка видно, что при уменьшении волнового числа длина волны увеличивается, как это и должно быть, исходя из обратной пропорциональности этих параметров. Здесь представлено плавное изменение, реализуемое решением единого уравнения (8.68). Мнимая часть решения следует тому же закону, что и действительная, с отставанием по фазе на 90° . Амплитуда полного решения w по координате

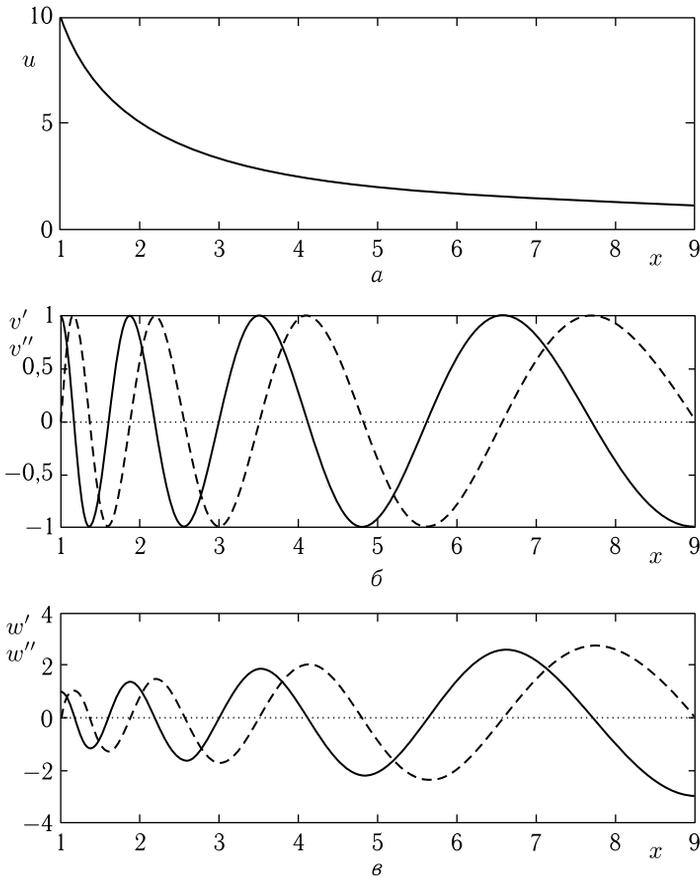


Рис. 8.6. Зависимости волнового числа (а), экспоненциального множителя (б) и полного вида (в) решения уравнения Рэлея от координаты x при уменьшении волнового числа по координате

возрастает, что соответствует коэффициенту $x^{1/2}$ перед экспоненциальным множителем.

Для рассмотрения случая увеличения волнового числа положим

$$k = \frac{n}{m - x}, \quad (8.87)$$

где m — постоянное действительное число.

При этом уравнение (8.68) принимает вид

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{n^2}{(m - x)^2} U = 0. \quad (8.88)$$

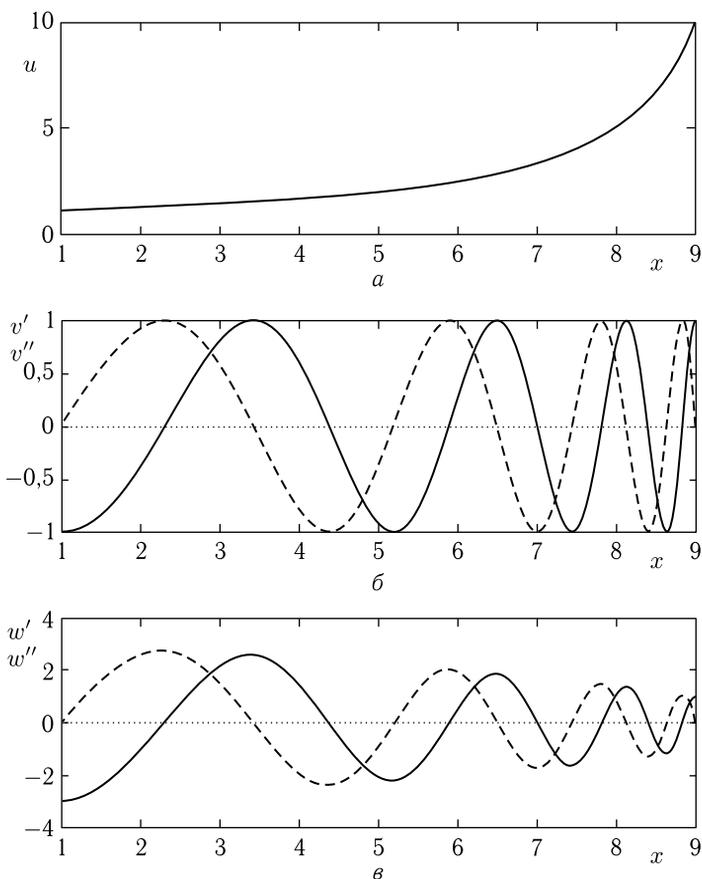


Рис. 8.7. Зависимости волнового числа (а), экспоненциального множителя (б) и полного вида (в) решения уравнения Рэля от координаты x при увеличении волнового числа по координате

Введем новую переменную

$$y = m - x. \quad (8.89)$$

При этом получаем:

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{dU}{dy}; \quad (8.90)$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{d^2U}{dy^2}. \quad (8.91)$$

Уравнение (8.88) принимает вид

$$\frac{d^2U}{dy^2} + \frac{n^2}{y^2}U = 0, \quad (8.92)$$

что эквивалентно уравнению (8.68), то есть имеет решение в виде (8.82)–(8.84) с заменой x на $m - x$.

Для удобства сравнения потребуем, чтобы максимальное значение волнового числа при возрастании (при $x = 9$) равнялось максимальному значению волнового числа при убывании (при $x = 1$), то есть, с учетом (8.67) и (8.87), выполнялось условие

$$\frac{n}{m-x} \Big|_{x=9} = \frac{n}{x} \Big|_{x=1}, \quad (8.93)$$

из которого получаем: $m = 10$, то есть: $y = 10 - x$.

Полученные зависимости показаны на рис. 8.7. На этом рисунке: $u = \frac{n}{m-x}$ — волновое число;

$$v = e^{i \frac{\sqrt{4n^2-1}}{2} \ln(m-x)},$$

$v' = \operatorname{Re}(v)$, $v'' = \operatorname{Im}(v)$ — действительная и мнимая части экспоненциального множителя;

$$w = (m-x)^{1/2} e^{i \frac{\sqrt{4n^2-1}}{2} \ln(m-x)},$$

$w' = \operatorname{Re}(w)$, $w'' = \operatorname{Im}(w)$ — действительная и мнимая части полного решения.

Из рисунка видно, что при увеличении волнового числа длина волны уменьшается, как это и должно быть, исходя из обратной пропорциональности этих параметров. Здесь представлено плавное изменение, реализуемое решением единого уравнения (8.88). Мнимая часть решения следует тому же закону, что и действительная, с опережением по фазе на 90° . Амплитуда полного решения w по координате убывает, что соответствует коэффициенту $(m-x)^{1/2}$ перед экспоненциальным множителем.

8.3. Магнитостатические волны в неоднородном поле

Одним из предметов рассмотрения в настоящей монографии является распространение волн намагниченности в среде, пространственные магнитные характеристики которой изменяются. Примером такого пространственного изменения, рассматриваемым здесь в первую очередь, является поворот вектора намагниченности в доменной границе.

Другим видом пространственного изменения параметров среды, даже без изменения ориентации вектора намагниченности, может явиться намагничивание ее неоднородным полем. Подробному рассмотрению распространения магнитостатических волн в неоднородно намагниченных средах посвящена первая монография настоящей серии [1]. Выявлен сложный характер траекторий волновых пучков поверхностных магнитостатических волн (ПМСВ) для случая двух простран-

ственных измерений, то есть когда волны распространяются в тонкой пластине, намагниченной в ее плоскости.

8.3.1. Метод Гамильтона–Аулда для двух измерений

Для расчета траекторий предложен метод Гамильтона–Аулда, основанный на аналогии между распространяющейся волной и механической частицей, закон движения которой описывается классическими уравнениями Гамильтона [449].

Полученная система уравнений Гамильтона–Аулда позволяет находить траектории распространения волновых пучков МСВ путем численного решения задачи Коши методом Эйлера или Рунге–Кутты [145, 146, 151].

С целью дополнения основной рассматриваемой здесь картины, приведем без вывода уравнения Гамильтона–Аулда, позволяющие найти траекторию волны $z(y)$, а также зависимости волнового числа k и угла φ от координаты y в случае распространения волны в плоскости Oyz , например в тонкой пластине, намагниченной в ее плоскости. Эти уравнения имеют следующий вид [1, стр. 106]:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{k \sin \varphi - \frac{\partial k}{\partial \varphi} \cos \varphi}{k \cos \varphi + \frac{\partial k}{\partial \varphi} \sin \varphi}; \quad (8.94)$$

$$\frac{dk}{dy} = k \frac{\frac{\partial k}{\partial y} \cos \varphi + \frac{\partial k}{\partial z} \sin \varphi}{k \cos \varphi + \frac{\partial k}{\partial \varphi} \sin \varphi}; \quad (8.95)$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = - \frac{\frac{\partial k}{\partial y} \sin \varphi - \frac{\partial k}{\partial z} \cos \varphi}{k \cos \varphi + \frac{\partial k}{\partial \varphi} \sin \varphi}, \quad (8.96)$$

где: k — длина волнового вектора ПМСВ, φ — угол между волновым вектором ПМСВ и осью Oy , а частные производные, входящие в правую часть приведенных уравнений, определяются из дисперсионного соотношения

$$f(\omega, k, H(y, z)) = 0 \quad (8.97)$$

по правилам дифференцирования неявных функций [414]. При этом распределение магнитного поля $H(y, z)$ в плоскости Oyz предполагается заранее заданным. Последовательные шаги расчета траектории осуществляются вдоль оси Oy . Решение уравнений (8.94)–(8.96) при этом дает последовательные значения координаты z , а также волнового числа k и азимутального угла волнового вектора φ . Подробный вывод уравнений (8.94)–(8.96) приведен в [1, стр. 99–106]. Последовательность вывода состоит в записи уравнений Гамильтона для частицы в декартовой системе координат с последующим исключением временной переменной, заменой гамильтониана на частоту и импульса

на волновое число, с дальнейшим переводом полученных уравнений в полярную систему координат. Многочисленные варианты решения системы (8.94)–(8.96) также содержатся в [1].

8.3.2. Метод Гамильтона–Аулда для трех измерений

Рассматриваемые в настоящей монографии неоднородности намагниченности, например такие, как доменная граница, являются трехмерными, поэтому представляет интерес получение подобных уравнений для трехмерного случая, подразумевающего что волна распространяется в полном трехмерном пространстве.

По имеющимся в распоряжении авторов сведениям, на сегодняшний день более или менее подробное решение такой задачи отсутствует.

Авторы могут лишь предложить вариант уравнений, полученных тем же методом, что и (8.94)–(8.96), то есть исходя из трехмерной декартовой системы координат с последующим переводом уравнений в сферическую систему. Дисперсионное соотношение предполагается в виде

$$f(\omega, k, H(x, y, z)) = 0. \quad (8.98)$$

Предлагаемые уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k \sin \varphi \sin^2 \theta - \frac{\partial k}{\partial \varphi} \cos \varphi - \frac{\partial k}{\partial \theta} \sin \varphi \sin \theta \cos \theta}{k \cos \varphi \sin^2 \theta + \frac{\partial k}{\partial \varphi} \sin \varphi - \frac{\partial k}{\partial \theta} \cos \varphi \sin \theta \cos \theta}; \quad (8.99)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{k \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial k}{\partial \theta} \sin^2 \theta}{k \cos \varphi \sin^2 \theta + \frac{\partial k}{\partial \varphi} \sin \varphi - \frac{\partial k}{\partial \theta} \cos \varphi \sin \theta \cos \theta}; \quad (8.100)$$

$$\frac{dk}{dx} = k \sin \theta \frac{\frac{\partial k}{\partial x} \cos \varphi \sin \theta + \frac{\partial k}{\partial y} \sin \varphi \sin \theta + \frac{\partial k}{\partial z} \cos \theta}{k \cos \varphi \sin^2 \theta + \frac{\partial k}{\partial \varphi} \sin \varphi - \frac{\partial k}{\partial \theta} \cos \varphi \sin \theta \cos \theta}; \quad (8.101)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{-\frac{\partial k}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial k}{\partial y} \cos \varphi}{k \cos \varphi \sin^2 \theta + \frac{\partial k}{\partial \varphi} \sin \varphi - \frac{\partial k}{\partial \theta} \cos \varphi \sin \theta \cos \theta}; \quad (8.102)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \sin \theta \frac{\frac{\partial k}{\partial x} \cos \varphi \cos \theta + \frac{\partial k}{\partial y} \sin \varphi \cos \theta - \frac{\partial k}{\partial z} \sin \theta}{k \cos \varphi \sin^2 \theta + \frac{\partial k}{\partial \varphi} \sin \varphi - \frac{\partial k}{\partial \theta} \cos \varphi \sin \theta \cos \theta}. \quad (8.103)$$

Поскольку здесь вместо трех требующих определения переменных z , k и φ имеется пять — y , z , k , φ , θ , то и уравнений получается не три, а пять. Текущей переменной является не y , а x , что отражает не более чем соответствующий выбор ориентации исходной системы координат (так как в предыдущем случае координата x была перпендикулярна плоскости распространения волны, то есть выпадала из рассмотрения, а здесь такое ограничение отсутствует).

Если в этих уравнениях положить, что волна распространяется в плоскости Oxy , так что $\theta = 90^\circ$, $z = 0$, а также $\partial/\partial\theta \rightarrow 0$ и $\partial/\partial z \rightarrow 0$, то можно видеть, что они с точностью до замены x на y переходят в уравнения (8.94)–(8.96), соответствующие двумерному случаю.

Подробную проверку корректности вывода системы (8.99)–(8.103) и дальнейшее более подробное ее обобщение на трехмерный случай, например при пространственном изменении не поля, а ориентации намагниченности, а также постановку и решение многочисленных возможных здесь задач авторы предоставляют любознательному читателю.

Замечание. Следует заметить, что в трехмерной среде ограничение на размер плоского фронта волны, задаваемое толщиной пластины (глава 6, задача Дэймона–Эшбаха), может отсутствовать, так что при рассмотрении конкретной задачи для достаточно коротких волн может понадобиться учет размагничивающего поля дипольной волны в виде (7.17). Вообще говоря, ограничение может задаваться не только толщиной пластины, но и шириной волнового пучка, однако этот вопрос авторы также оставляют для будущих исследователей.

Выводы по главе 8

Данная глава посвящена рассмотрению основного математического аппарата, используемого при описании распространения волн намагниченности в структуре с плавными неоднородностями. Рассмотрено применение метода ВКБ в первом и втором приближениях, решение Рэлея для уравнения, волновое число которого обратно пропорционально квадрату координаты, а также метод Гамильтона–Аулда для распространения магнитостатических волн в поле, неоднородном по двум и трем измерениям

Основные результаты, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрена общая идеология метода Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ). Отмечено, что объектом применения метода является дифференциальное уравнение второго порядка волнового типа, содержащее кроме второй производной произведение искомой функции на квадрат волнового числа. Приведена подстановка, с помощью которой любое линейное дифференциальное уравнение второго порядка можно привести к подобному виду, что и является условием применения метода ВКБ. Показано, что решение такого уравнения при условии достаточно медленного изменения волнового числа в первом приближении можно представить в виде экспоненты, показатель которой пропорционален произведению мнимой единицы на интеграл от зависящего от координаты волнового числа. Методом итерации получено решение во втором приближении. Показано, что второе приближение

сводится к умножению первого приближения на величину, обратную квадратному корню из волнового числа.

2. Выполнена оценка точности метода ВКБ на реальном примере волнового уравнения второго порядка путем сравнения с численным решением того же уравнения, получаемом методом Эйлера. В качестве пробы выбрана линейная зависимость волнового числа от координаты. Показано, что метод ВКБ обеспечивает точность до единиц процентов при изменении длины волны по мере распространения до пяти раз, однако при изменении длины волны на порядок и более точность метода резко падает.

3. Рассмотрено уравнение Рэлея, представляющее собой координатную часть волнового уравнения, в котором гармоническая зависимость от времени уже исключена, а волновое число обратно пропорционально координате. Показано, что такое уравнение является частным случаем дифференциального уравнения Эйлера, коэффициенты при производных которого равны переменной в степени, равной порядку производной. Показано, что решение исходного уравнения представляет собой произведение квадратного корня от координатной переменной на тригонометрическую функцию, аргумент которой пропорционален логарифму от той же переменной. Приведена графическая иллюстрация решения уравнения Рэлея, представляющего собой синусоиду, период которой по координате возрастает или уменьшается, амплитуда также убывает или увеличивается.

4. Кратко рассмотрена задача о распространении магнитостатических волн в неоднородно намагниченной среде. Отмечена важность метода Гамильтона–Аулда расчета траекторий волновых пучков, основанного на аналогии между распространением волны и движением частицы в поле заданного потенциала. Приведена система уравнений Гамильтона–Аулда для распространения магнитостатической волны в магнитной пластине, что соответствует задаче в двух измерениях. Отмечена возможность обобщения метода на трехмерный случай. Приведена система уравнений для трех измерений. Показано, что для этой системы задача в двух измерениях является частным случаем.

Глава 9

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ, КАСАЮЩИЕСЯ РАСЧЕТА ОРИЕНТАЦИОННЫХ ПЕРЕХОДОВ

Данная глава посвящена краткому обзору необходимых для дальнейшего вопросов, касающихся расчета изменения ориентации намагниченности в процессе ориентационных переходов. Приведены основные приемы работы с ориентационными переходами, основанные на минимизации плотности энергии. Кратко излагается методика работы с матрицами перехода между различными системами координат, а также способы получения таких матриц. В изложении будем в основном опираться на материал работ [3, 12, 16, 17, 198, 414, 450–453], а также на приведенную в [3] библиографию. Остальные необходимые ссылки указаны в тексте.

9.1. Общая идеология ориентационного перехода

Основным предметом рассмотрения в настоящей монографии является исследование волновых процессов в магнитной среде, пребывающей в условиях ориентационного перехода. Понятие ориентационного перехода, необходимое для понимания дальнейшего материала, подробно рассмотрено в третьей монографии настоящей серии [3, гл. 5]. Поэтому здесь, следуя [3, гл. 5], лишь наметим основные свойства такого перехода и приведем простейший пример, который позволит читателю в достаточной степени ориентироваться в дальнейшем изложении. Для более углубленного понимания вопроса авторы монографии настоятельно рекомендуют читателю обратиться к главе 5 монографии [3] и приведенным там многочисленным ссылкам.

9.1.1. Общее понятие ориентационного перехода

Под ориентационным переходом будем понимать состояние, в котором находится магнетик при переходе от одного стационарного состояния к другому, причем эти состояния отличаются равновесной ориентацией намагниченности внутри магнетика.

Стационарное состояние магнетика при заданной температуре определяется равновесием между тремя полями: полем анизотропии, полем размагничивания и полем, приложенным к магнетiku извне. При этом вектор намагниченности в каждой точке магнетика имеет ориентацию, определяющую минимумом потенциальной энергии в этой точке.

Типичным примером ориентационного перехода является намагничивание одноосного магнетика в направлении, перпендикулярном оси анизотропии. При этом в отсутствие поля вектор намагниченности ориентируется точно вдоль оси анизотропии (размагничивание пока не учитываем), а по мере увеличения поля постепенно отклоняется от этой оси, поворачиваясь к направлению поля. Переход заканчивается тогда, когда вектор намагниченности выстраивается точно вдоль поля, после чего дальнейшее увеличение поля его ориентации не меняет.

Такая картина ориентационного перехода предполагает, что ограниченный в пространстве образец магнетика в целом намагничен однородно, то есть направления вектора намагничивания во всех его точках одни и те же. Однако из-за размагничивания формы эти направления в различных точках образца могут меняться. При этом ориентационный переход в различных точках образца будет происходить по-разному, однако в конечном счете при достаточной величине поле все-таки заставит намагниченность во всем образце выстроиться вдоль своего направления.

Важнейшей причиной изменения направления намагниченности внутри образца является стремление уменьшить энергию поля, возникающего во внешнем пространстве за счет выхода намагниченности на поверхность образца. Такое стремление заставляет образец разбиваться на домены, причем в случае достаточно большой одноосной анизотропии направления векторов намагниченности в соседних доменах приобретают взаимно противоположные направления.

Приложение внешнего поля вдоль оси анизотропии приводит к уничтожению доменов невыгодного знака, так что образец снова обретает однородное состояние. Каждое из таких состояний магнетика называется «фазой», так что в отсутствие поля магнетик находится в «неоднородной фазе» — с доменами, а при достаточном поле переходит в «однородную фазу» — без доменов. Такой переход от одной фазы к другой под действием поля представляет собой фазовый переход.

Восстановление доменов при уменьшении поля от величины насыщения происходит с определенным гистерезисом, так как для их зарождения требуется определенная энергия. Эта энергия требуется для преодоления обменного взаимодействия, заставляющего выстраиваться все спины магнетика в одном направлении. Таким образом, поскольку переход от однородной фазы к неоднородной под действием поля, приложенного вдоль оси анизотропии, происходит с гистерезисом, этот переход является фазовым переходом первого рода.

Пусть теперь намагничивание образца происходит полем, приложенным перпендикулярно оси анизотропии. При этом векторы намагниченности внутри каждого из доменов будут поворачиваться к полю в одинаковой степени, составляя с ним одинаковые углы, то есть полностью симметричным образом. Когда поле достигнет величины, достаточной для выстраивания ориентации намагниченности вдоль своего

направления, домены вообще исчезнут и весь образец будет намагничен однородно.

Таким образом, и здесь по мере увеличения поля произойдет переход от неоднородной фазы к однородной. Однако теперь при уменьшении поля два направления, в которых может отклониться вектор намагниченности при зарождении неоднородной фазы, будут эквивалентны, вследствие чего зарождение произойдет сразу в обоих направлениях, так что однородное распределение намагниченности исказится в виде синусоидальной волны, период которой будет равным периоду зарождающейся доменной структуры. Причиной возбуждения такой волны может быть тепловая флуктуация, причем энергетического барьера здесь преодолевать не придется, так как переориентировать направление намагниченности на обратное необходимости не будет. Таким образом, и здесь произойдет переход от однородной фазы к неоднородной, причем без потери энергии и без какого-либо гистерезиса, то есть это будет уже фазовый переход второго рода.

Направления векторов намагниченности в доменах разных знаков в процессе перехода будут составлять между собой определенный угол, меньший 180 градусов. Такое состояние намагниченности называется «угловой фазой». В отсутствие поля векторы намагниченности в соседних доменах будут антипараллельны друг другу, то есть будут составлять между собой угол в 180 градусов. Такое состояние намагниченности называется «коллинеарной фазой». Переход между коллинеарной и угловой фазами также можно считать фазовым переходом второго рода, так как он происходит без какой-либо затраты энергии в бесконечно малом, но отличном от нуля поле. Таким образом, можно считать, что намагничивание одноосного магнетика полем, перпендикулярным оси анизотропии, происходит посредством ориентационного перехода, начало и конец которого представляют собой два фазовых перехода второго рода — один от коллинеарной фазы к угловой, второй от угловой фазы к однородной.

9.1.2. Пример простого ориентационного перехода

В качестве простейшего примера рассмотрим ориентационный переход на примере намагничивания безграничной среды с одноосной анизотропией полем, перпендикулярным оси анизотропии. Геометрия задачи показана на рис. 9.1.

Декартова система координат $Oxyz$ выбрана таким образом, что ось Oz параллельна оси магнитной анизотропии (оси легкого намагничивания). Поле \mathbf{H} перпендикулярно такой оси анизотропии, причем ось Ox направлена вдоль этого поля. Ось Oy перпендикулярна осям Ox и Oz , в силу симметрии задачи ее направление в плоскости Oxy произвольно. Кроме декартовой системы $Oxyz$ введена сферическая система координат $Or\theta\varphi$, начало которой приходится на ту же точку O , что и декартовой системы, полярная ось $O\theta$ совпадает с осью Oz , то есть с ОЛН, а азимутальная $O\varphi$ с осью Ox , то есть с направлением поля.

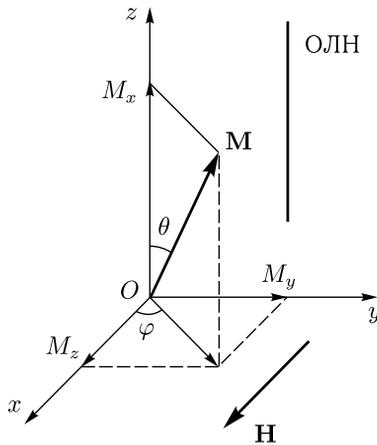


Рис. 9.1. Геометрия задачи для иллюстрации простого ориентационного перехода. ОЛН — ось легкого намагничивания

Вектор намагниченности \mathbf{M} имеет длину M_0 , компоненты M_x , M_y , M_z и составляет с осью Oz угол θ , а его проекция на плоскость Oxy составляет с осью Ox угол φ .

В отсутствие поля вектор намагниченности ориентирован вдоль оси Oz , а при включении поля поворачивается к его направлению, в чем собственно и состоит ориентационный переход. Благодаря симметрии задачи относительно плоскости Oxz , вектор намагниченности при своем повороте всегда будет оставаться в этой плоскости, то есть угол φ всегда будет оставаться равным нулю [12].

Полагая, что в отсутствие поля вектор намагниченности ориентирован в положительном направлении оси Oz , получаем:

$$M_x = M_0 \sin \theta; \quad (9.1)$$

$$M_y = 0; \quad (9.2)$$

$$M_z = M_0 \cos \theta, \quad (9.3)$$

то есть:

$$\mathbf{M} = \{M_0 \sin \theta; 0; M_0 \cos \theta\}. \quad (9.4)$$

При этом поле, ориентированное в положительном направлении оси Ox , равно:

$$H_x = H_0; \quad (9.5)$$

$$H_y = 0; \quad (9.6)$$

$$H_z = 0, \quad (9.7)$$

то есть:

$$\mathbf{H} = \{H_0; 0; 0\}. \quad (9.8)$$

Ограничимся рассмотрением перехода в интервале углов $0 \leq \theta \leq 90^\circ$. Будем искать равновесное положение вектора намагниченности, исходя из минимума плотности энергии магнетика в целом.

Плотность энергии одноосной анизотропии (при $M_y = 0$) определяется формулой, подобной (5.43) при $K > 0$, т. е. равна [12, 235]

$$U_a = K \left(\frac{M_x}{M_0} \right)^2 = \frac{K}{M_0^2} M_x^2, \quad (9.9)$$

где K — константа одноосной анизотропии.

Можно видеть, что при $K > 0$ минимум энергии соответствует $M_x = 0$, то есть выстраиванию намагниченности вдоль оси Oz .

Плотность энергии взаимодействия намагниченности с внешним полем равна [12, 235]

$$U_m = -\mathbf{M}\mathbf{H}, \quad (9.10)$$

откуда можно видеть, что вследствие своей отрицательности, а также того факта, что угол между векторами \mathbf{M} и \mathbf{H} равен $(90^\circ - \theta)$, она минимальна при ориентации намагниченности вдоль поля (то есть при $\theta = 90^\circ$).

Полная плотность энергии равна сумме (9.9) и (9.10):

$$U = U_a + U_m = \frac{K_u}{M_0^2} M_x^2 - \mathbf{M}\mathbf{H}. \quad (9.11)$$

Записывая в сферической системе координат, получаем

$$U = K \sin^2 \theta - M_0 H_0 \sin \theta. \quad (9.12)$$

Определим эффективное поле анизотропии [15–17, 235]

$$H_a = \left. \frac{\partial U_a}{\partial M_x} \right|_{M_x=M_0} = \frac{2K}{M_0}. \quad (9.13)$$

Введем нормированное внешнее поле

$$h = \frac{H_0}{H_a} = \frac{M_0 H_0}{2K}. \quad (9.14)$$

Выражая $M_0 H_0$ из (9.14) и подставляя в (9.12), получаем плотность энергии в виде

$$U = K (\sin^2 \theta - 2h \sin \theta). \quad (9.15)$$

Равновесное положение вектора намагниченности будем искать из условия минимума плотности энергии (9.15) по углу θ . Таким условием является равенство нулю первой производной U по θ и положительность второй [414, 454, 455]. Найдем эти производные:

$$\frac{dU}{d\theta} = 2K \cos \theta (\sin \theta - h); \quad (9.16)$$

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = 2K (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + h \sin \theta). \quad (9.17)$$

Приравнявая (9.16) к нулю, получаем условие наличия экстремума:

$$\cos \theta (\sin \theta - h) = 0; \quad (9.18)$$

Поскольку это уравнение содержит два сомножителя, то для равенства нулю левой части достаточно, чтобы хотя бы один из сомножителей равнялся нулю. То есть возможны два случая. Рассмотрим их последовательно.

СЛУЧАЙ ПЕРВЫЙ:

$$\cos \theta = 0, \quad (9.19)$$

то есть

$$\theta = \pi/2. \quad (9.20)$$

Подставляя (9.20) в (9.17), находим вторую производную:

$$\frac{d^2 U}{d\theta^2} = 2K(-1 + h). \quad (9.21)$$

Экстремум является минимумом в случае положительности второй производной [414, 454, 455]. Поскольку $K > 0$, то минимум имеет место при $-1 + h > 0$, то есть $h > 1$ или, с учетом (9.13)–(9.14) — при $H_0 > H_a$, то есть при внешнем поле, большем поля анизотропии.

СЛУЧАЙ ВТОРОЙ:

$$\sin \theta - h = 0, \quad (9.22)$$

то есть

$$\sin \theta = h, \quad (9.23)$$

или:

$$\theta = \arcsin h. \quad (9.24)$$

Подставляя (9.24) в (9.17), находим вторую производную

$$\frac{d^2 U}{d\theta^2} = 2K(1 - h^2). \quad (9.25)$$

Экстремум является минимумом в случае положительности второй производной [414, 454, 455].

Поскольку $K > 0$, то минимум имеет место при $1 - h^2 > 0$, то есть $|h| < 1$ или, с учетом (9.13)–(9.14) — при $H_0 < H_a$, то есть при внешнем поле, меньшем поля анизотропии.

В случае $H_0 = H_a$, то есть $h = 1$ вторые производные (9.21) и (9.25) равны нулю, то есть в этой точке функция (9.15) имеет перегиб [414, 454, 455], который соответствует стыковке двух рассмот-

ренных случаев. При этом функция (9.15) в точке стыковки остается непрерывной, что соответствует фазовому переходу второго рода.

Обратимся теперь к рис. 9.2, где показаны зависимости равновесного значения угла θ (а), а также нормированных компонент намагниченности $M_{x,z}$ (б) от поля h . Равенство внешнего поля H_0 полю анизотропии H_a соответствует $h = 1$, как это отмечено вертикальной точечной линией.

На рис. 9.2, а кривая при $0 \leq h \leq 1$ построена по формуле (9.24), а при $h \geq 1$ по формуле (9.20).

На рис. 9.2, б кривая 1 при $0 \leq h \leq 1$ построена по формуле (9.1) с учетом (9.23), что соответствует

$$M_x = M_0 \cdot h = M_0 \frac{H_0}{H_a}, \quad (9.26)$$

а при $h \geq 1$ по той же формуле (9.1), но с учетом (9.20), что соответствует $M_x = M_0$.

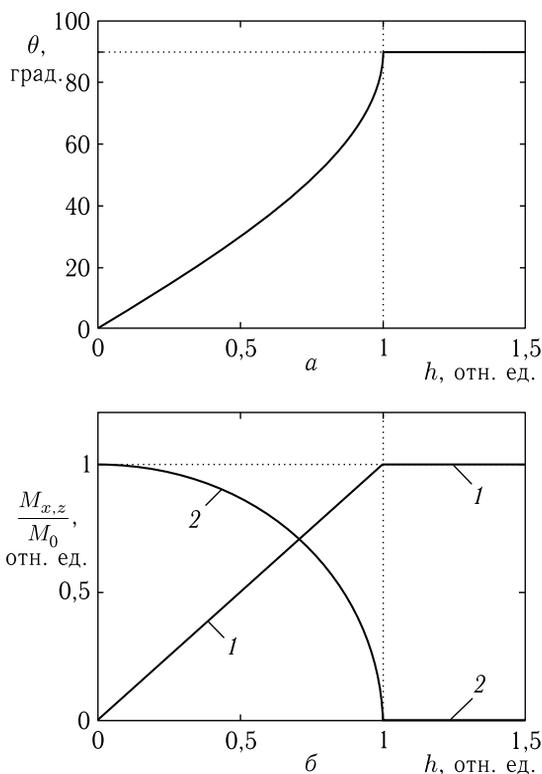


Рис. 9.2. Зависимость равновесного значения угла θ (а), а также нормированных компонент намагниченности $M_{x,z}$ (б) от поля h : 1 — M_x/M_0 ; 2 — M_z/M_0

Кривая 2 при $0 \leq h \leq 1$ построена по формуле (9.3) с учетом (9.23), что соответствует

$$M_z = M_0 \sqrt{1 - h^2} = M_0 \sqrt{1 - (H_0/H_a)^2}, \quad (9.27)$$

а при $h \geq 1$ по той же формуле (9.3), но с учетом (9.20), что соответствует $M_z = M_0$.

Из рисунка видно, что все приведенные зависимости до точки $h = 1$ меняются плавно, причем ориентация вектора намагниченности меняется также плавно, то есть происходит собственно ориентационный переход. После точки $h = 1$ все зависимости далее не меняются, так что ориентация вектора намагниченности больше не меняется, и он остается выстроенным вдоль оси Ox , то есть вдоль приложенного поля.

В точке $h = 1$ все кривые претерпевают излом, однако остаются непрерывными, что соответствует фазовому переходу второго рода.

Замечание. Рассмотренный ориентационный переход соответствует точной ориентации поля перпендикулярно оси анизотропии. При этом фазовый переход второго рода происходит в точке, соответствующей равенству внешнего поля и поля анизотропии (то есть при $h = 1$). Однако в случае отклонения направления поля от нормали к оси анизотропии, даже при увеличении поля H_0 выше H_a (то есть при $h > 1$), вектор намагниченности не выстраивается точно вдоль поля, но по мере увеличения поля лишь асимптотически стремится к нему, в результате чего фазовый переход получается «размытым» или «размазанным». За более подробным рассмотрением этого вопроса авторы монографии рекомендуют обратиться к [3, гл. 5] и цитируемым там ссылкам.

9.2. Условия ориентационного перехода

Итак, одним из основных вопросов, рассматриваемых в настоящей монографии, является изучение волновых процессов в условиях ориентационных переходов, обусловленных действием постоянного магнитного поля.

9.2.1. Требование минимизации энергии при ориентационном переходе

Ориентационный переход состоит в изменении ориентации вектора намагниченности от одного устойчивого положения до другого. При этом каждое из устойчивых или равновесных положений намагниченности соответствует минимальному значению плотности энергии магнетика при заданных внутренних и внешних условиях. В качестве внутренних здесь выступают в первую очередь магнитная анизотропия материала, а также анизотропия формы образца. Внешним является

приложенное извне постоянное магнитное поле. В магнитоупругой среде в формировании положения равновесия намагниченности могут также участвовать упругая и магнитоупругая энергии, а также спонтанные или обусловленные внешними силами деформации. При изменении действующего на образец постоянного поля равновесное положение намагниченности может изменяться, в чем и состоит ориентационный переход.

С математической стороны равновесное положение вектора намагниченности определяется минимизацией полной плотности энергии магнитного образца. Такая минимизация выполняется путем приравнивания к нулю первой производной от плотности энергии по компонентам вектора намагниченности. При этом, в соответствии с обычными правилами нахождения экстремума [414, 454, 455], необходимым условием минимума плотности энергии является положительность второй ее производной по намагниченности.

9.2.2. Аналитическое определение равновесного положения вектора намагниченности

Нахождение равновесного положения вектора намагниченности, несмотря на идеологическую простоту, часто является довольно сложной задачей. Так, пространственное положение минимума плотности энергии определяется вариацией только одной координаты в том случае, когда значения других координат однозначно определяются симметрией системы или какими-то другими заранее заданными условиями, то есть все другие координаты из рассмотрения могут быть исключены.

При этом дифференцирование выражения для плотности энергии приводит к уравнению, порядок которого на единицу ниже порядка соответствующего слагаемого в исходном выражении. Например, если плотность энергии содержит анизотропию второго порядка, то получающееся уравнение будет иметь первый порядок, но если анизотропия имеет четвертый порядок, то уравнение будет уже третьего порядка. Для решения уравнений третьего порядка существуют достаточно подробно разработанные алгебраические методы, например метод Кардано или дополняющее его «тригонометрическое решение» [414, 416]. Решение некоторых задач такого типа можно найти, например, в работах [23, 54, 58]. В случае сочетания двух видов анизотропии второго порядка, например одноосной и размагничивающей, когда оси той и другой не совпадают, получается уравнение уже четвертого порядка. Для решения такого уравнения можно использовать, например, метод Феррари, разрешающим для которого является уравнение третьего порядка [414, 416]. Более подробно решение уравнений третьей и четвертой степеней, в основном следуя [416], описано в третьей монографии настоящей серии [3, разд. 2.4] Следует заметить, что в обоих случаях решение получается хотя и достижимым, но довольно громоздким.

Возможны и более сложные случаи, например, когда пространственное положение минимума плотности энергии зависит не от одной координаты, а от двух или даже трех. Еще большее усложнение может дать учет магнитоупругого взаимодействия. В этих случаях минимизация выполняется по правилам нахождения локальных экстремумов функций нескольких переменных [414, 454, 455]. То есть приравнивается к нулю не одна производная, а частные производные по нескольким переменным. В результате получается не одно уравнение, а система нескольких алгебраических уравнений, как правило, высоких степеней, общее разрешение которой традиционными методами часто весьма затруднительно.

В таких случаях более удобным оказывается применение численных методов, некоторые из которых рассматриваются в следующем разделе.

9.3. Численные методы нахождения равновесного положения вектора намагниченности

Численные методы нахождения равновесного положения вектора намагниченности в рассматриваемых в настоящей монографии задачах представляют собой алгоритмы решения нелинейных алгебраических или тригонометрических уравнений. Эти уравнения возникают из приравнивания к нулю производных от плотности энергии по компонентам намагниченности.

При этом тригонометрические уравнения, как правило, могут быть сведены к алгебраическим путем соответствующих замен переменных. Например, можно все тригонометрические функции свести к синусам и косинусам, после чего заменить косинусы квадратными корнями из разности между единицей и квадратом синуса, в результате чего в уравнении останутся только синусы. Далее достаточно заменить синусы на какие-то алгебраические переменные, в результате чего получатся уравнения, содержащие только эти алгебраические переменные.

Проще всего равновесное положение находится тогда, когда для минимизации плотности энергии требуется вариация лишь одной компоненты намагниченности, то есть одной переменной. В этом случае требуется найти корни лишь одного алгебраического уравнения, степень которого может быть третьей, четвертой или более высокой. В некоторых случаях в результате дифференцирования плотности энергии появляются квадратные корни, которые могут получаться, например, при замене тригонометрических переменных алгебраическими, когда синус выражается через косинус. К уравнениям, содержащим квадратные корни, может привести также замена одной из переменных корнем из разности между единицей и суммой квадратов других переменных. Такие корни получаются при учете сохранения длины вектора намагни-

ченности, сумма квадратов нормированных компонент которого должна равняться единице. Подобные уравнения, как правило, могут быть сведены к простым степенным алгебраическим путем соответствующих процедур освобождения от иррациональности. То есть квадратный корень следует выделить в одну, например левую, часть уравнения, а все, что остается — в другую, то есть правую, после чего обе части возвести в квадрат, что даст возможность избавиться от корня в левой части. Если в правой части все же остаются еще какие-то корни, то снова следует их выделить в левую часть, а все остальное — в правую, после чего снова возвести в квадрат и так далее. Повторение подобной процедуры необходимое число раз приведет к алгебраическому уравнению, содержащему лишь целые степени неизвестного без каких-либо корней. Однако степень полученного таким путем уравнения может быть достаточно высокой, например, третьей или четвертой, а в случае учета магнитоупругого взаимодействия — шестой, восьмой и более.

Таким образом, задача сводится к нахождению корней степенного алгебраического уравнения, имеющего вид приравненного к нулю многочлена, иногда имеющего достаточно высокую степень, в том числе не допускающую аналитического разрешения (пятую и более).

Для решения таких уравнений можно использовать любые известные численные методы, например метод половинного деления, метод хорд, метод касательных (метод Ньютона) и другие. Применению упомянутых методов должно предшествовать исследование области существования корней, то есть примерной локализации границ интервала изменения переменной, где знак составляющего уравнение многочлена меняется. Такое исследование удобно выполнять графическими методами. Справочные данные по всем перечисленным методам можно найти, например, в [414]. Довольно подробное и доступное для начального изучения описание подобных методов содержится в [456].

Важнейшим методом решения подобных уравнений является метод итераций. Метод состоит в том, что исходное уравнение представляют в виде равенства, в левой части которого находится искомая переменная в первой степени, а в правой — все, что остается от исходного уравнения после выделения этой переменной. Задается какое-то приближенное начальное значение переменной и подставляется в правую часть, в результате чего слева получается новое, уже уточненное, значение той же переменной. Затем это новое значение опять подставляется в правую часть, находится следующее уточненное значение переменной и так далее до тех пор, пока получаемое на каждом последующем шаге уточненное значение переменной в пределах заданной точности не перестанет меняться. Это и будет искомое значение корня исходного уравнения. При определении интервала для выбора начального значения также желательно пользоваться графическим представлением. Итерационный процесс сходится в том случае,

если производная правой части в заданном интервале будет меньше единицы. В противном случае процесс будет расходящимся, так что для нахождения корня надо выбирать другой интервал или использовать другое выделение переменной в левую часть итерационного уравнения. При этом критерием выбора также должна быть меньшая величина значения производной по сравнению с единицей. Схему процесса итераций также можно найти в [414], а подробное описание с рекомендациями по выбору начального значения — в [456].

В задачах, рассматриваемых далее в настоящей монографии, авторы использовали некоторые слегка измененные варианты перечисленных методов. Такой выбор определялся удобством, традициями и в какой-то степени личными вкусами авторов, что однако никак не исключает применения других перечисленных методов в их классическом варианте. Схемы применявшихся авторами численных методов кратко опишем далее.

9.3.1. Метод поиска нуля

Метод поиска нуля можно рассматривать как видоизменение метода половинного деления. Отличие состоит в том, что текущий интервал поиска делится не на две части, а на десять.

Итак, метод состоит в последовательности следующих шагов.

Сначала определяется интервал, внутри которого находится искомый корень. Это определение удобнее всего сделать графическим путем. Исходное уравнение приводится к виду, при котором вся функциональная часть (далее просто — функция) сосредоточена в левой части равенства, а правая равна нулю. Далее строится график зависимости этой функции от переменной, после чего на графике определяются границы интервала, в котором функция меняет знак.

Выбирается шаг по переменной, заведомо меньший длины полученного интервала. В процессе прохождения переменной с этим шагом от одного конца интервала до другого в каждой точке определяется значение функции. Прохождение интервала по шагам производится до того момента, когда функция изменит знак. Тогда значение переменной возвращается на один шаг назад, длина шага уменьшается в десять раз, после чего осуществляется прохождение переменной с уменьшенным шагом, начиная от нового (возвращенного) значения, снова до момента изменения знака функции.

После этого переменная снова делает шаг назад, величина шага делится на десять и процесс повторяется в той же последовательности до тех пор, пока величина шага не станет меньше заданного наперед значения требуемой точности.

Деление шага можно осуществлять не на десять, а на любое другое число, например в методе половинного деления уменьшение шага происходит всего в два раза. Деление на десять хотя и требует несколько большего машинного времени, чем деление на два, однако

имеет некоторое преимущество в плане машинной алгоритмизации задачи, так как число десять связано с десятичной системой счисления, так что длина последовательно уменьшающегося шага хорошо укладывается в рамки десятичной дроби. Что касается времени, то оно определяется еще и сложностью вычисления функции в каждой точке, задаваемой шагом. Типичное время однократного расчета нуля с точностью до долей процента составляет доли секунды, что, как правило, несущественно для оператора. При многократном вычислении время увеличивается в число раз, задаваемое кратностью вычисления.

Достоинство метода поиска нуля состоит в простоте его реализации на ЭВМ и довольно малом по сравнению с другими методами временем расчета.

Некоторым недостатком является трудность реализации в случае, если вектор намагниченности в процессе ориентационного перехода перемещается не в одной плоскости, а выходит из нее в трехмерное пространство. При этом дифференцирование плотности энергии по всем компонентам намагниченности приводит не к одному, а к системе из двух или трех уравнений, что создает в применении метода некоторую неопределенность, так как нуль одного из уравнений может не совпадать с нулями других. Для обхода такой неопределенности приходится задавать шаг не только по одной переменной, но и по другой и при каждом шаге второй переменной находить нуль для первой, после чего из получившихся нулей выбирать тот, который будет соответствовать минимуму плотности энергии. В такой ситуации по все параметрам преимущество приобретает метод установления, рассматриваемый далее.

Тем не менее, область допустимого применения метода поиска нуля остается довольно широкой. Так, метод поиска нуля по одной переменной использовался авторами настоящей монографии при расчете параметров композиционной среды, состоящей из произвольно ориентированных ферритовых сфер, описанной в третьей монографии настоящей серии [3, гл. 8]. В настоящей монографии подобный расчет используется при рассмотрении электромагнитных волн в той же среде (глава 15).

9.3.2. Метод установления

Метод установления можно рассматривать как вариант приспособленного к поиску равновесного состояния намагниченности метода итераций [414, 456, 457], ибо в том и в другом случаях решение ищется путем последовательных приближений, реализация которых состоит в совокупности выполняемых друг за другом однотипных шагов.

На первом шаге задается какое-то, предположительно более или менее близкое к искомому, начальное направление вектора намагниченности.

Исходя из этого направления, определяются компоненты намагниченности, которые используются для нахождения поля анизотропии.

Из внешнего поля и полученного таким образом поля анизотропии находится поле, направление которого определяется суммой векторов того и другого полей.

Вектор намагниченности ориентируется вдоль найденного направления суммарного поля и из компонент этого вектора снова вычисляется поле анизотропии.

Это поле анизотропии вновь складывается с внешним полем, находится ориентация суммарного поля, вдоль которого снова направляется вектор намагниченности. Компоненты такого нового вектора намагниченности опять используются для вычисления поля анизотропии, и так далее.

Таким образом, происходит постепенное приближение направления вектора намагниченности к равновесному, которое, после достижения требуемой точности принимается за искомое.

Сходимость процесса установления обеспечивается единственностью минимума плотности энергии, из которой определяется поле анизотропии. Если плотность энергии имеет несколько минимумов, как, например, это имеет место для кубической анизотропии, то начальная ориентация вектора намагниченности должна выбираться таким образом, чтобы между искомым минимумом и начальным положением намагниченности не было потенциальных барьеров. То есть перед заданием начальной ориентации намагниченности следует предварительно качественно исследовать конфигурацию поверхности плотности энергии, например, графическим методом, чтобы выбирать начальное положение как можно более близким к искомому. Более подробно вопрос о сходимости метода установления обсуждается в третьей монографии настоящей серии [3, разд. 4.7].

Достоинство метода установления по сравнению с методом поиска нуля состоит в возможности его использования при произвольной ориентации нескольких осей анизотропии, когда вектор намагниченности в процессе ориентационного перехода не остается в одной плоскости, а может выстраиваться в любом направлении во всем трехмерном пространстве. То есть этот метод уместно применять в тех случаях, когда дифференцирование плотности энергии осуществляется не по одной компоненте намагниченности, а по нескольким, так что вместо одного уравнения получается система из двух или даже трех уравнений.

Метод установления находит широкое применение при расчете структуры доменных границ, распределения намагниченности в доменах и в периодических доменных структурах. Некоторые из таких работ обобщены в третьей монографии настоящей серии [3, разд. 7.4]. Там же приведены примеры расчета ориентации равновесной намагниченности в пленках ферритов-гранатов с одноосной анизотропией, ось которой отклонена от нормали к плоскости пленки.

В настоящей монографии этот метод используется как вспомогательный при некоторых расчетах ориентации намагниченности в среде с доменами (глава 13).

9.3.3. Метод динамического установления

Другую возможность численного нахождения равновесной ориентации намагниченности являет метод динамического установления. Несмотря на сходство названий, этот метод имеет принципиальное отличие от рассмотренного в предыдущем разделе метода простого установления.

Здесь при заданном значении внешнего поля после задания начальной ориентации намагниченность «отпускается» в свободную прецессию, закон движения которой дается классическим уравнением Ландау–Лифшица [15–17]. Уравнение решается численно в полном нелинейном виде (три уравнения первого порядка), причем затухание прецессии задается с помощью диссипативного члена Гильберта [18]. При такой свободной прецессии амплитуда колебаний вектора намагниченности за счет затухания постепенно уменьшается, в результате чего по окончании релаксации вектор останавливается в положении, соответствующем равновесному состоянию. Это конечное положение определяется тем точнее, чем меньше затухание и шаг численного расчета прецессии. Несколько более подробно метод динамического установления обсуждается в третьей монографии настоящей серии [3, разд. 7.4].

Важным достоинством метода является возможность определения установления намагниченности в двух и даже трех измерениях без предварительно предположения о движении вектора намагниченности вдоль какой-то плоскости.

Недостатком метода является большее требуемое машинное время, что при расчете сложных структур может быть критичным. Так, для расчета методом простого установления достаточно нескольких сотен итераций, тогда как для расчета прецессии намагниченности в тех же условиях уже для одного круга прецессии требуется примерно такое же количество машинных шагов. То есть метод динамического установления, по сравнению с методом простого установления, требует машинного времени по крайней мере на один-два порядка больше.

Метод динамического установления находит широкое применение при расчете структуры доменных границ, распределения намагниченности в доменах и в периодических доменных структурах [458–468]. Сравнение этого метода с некоторыми аналитическими моделями приведено в работе [469].

Преимущество метода динамического установления особенно ярко выявляется в случае множественности минимумов плотности энергии, в первую очередь в двумерных структурах [460–462], а также при расчете распределения намагниченности в периодических доменных структурах [459, 462, 464, 468].

9.4. Аппарат матриц перехода

Ориентационный переход состоит в перемещении вектора намагниченности из одного устойчивого положения в другое, также устойчивое. При этом устойчивость обоих таких положений определяется минимумом суммарной плотности энергии магнетика, представляющей собой сумму плотностей энергии магнитной анизотропии, анизотропии формы и взаимодействия намагниченности с внешним полем. При этом формы записи всех перечисленных видов энергии в различных системах отсчета, как правило, различаются.

Для многих задач, касающихся волновых процессов в анизотропной среде, значительное удобство представляет система координат, одна из осей которой связана с равновесным положением вектора намагниченности. К таким задачам относятся в первую очередь нахождение условий ферромагнитного резонанса, динамической магнитной восприимчивости и дисперсионных характеристик различных волновых процессов.

Предположение о малости динамического отклонения вектора намагниченности от равновесного положения позволяет произвести линеаризацию системы уравнений движения, что значительно упрощает, а в ряде случаев вообще делает единственно возможным соответствующие математические выкладки. Таким образом, подобные задачи удобнее решать в системе, связанной с равновесным положением вектора намагниченности.

С другой стороны, форма записи плотности энергии, в первую очередь энергии магнитной анизотропии, как правило, имеет наиболее простой вид в системе координат, оси которой связаны с характерными осями кристаллографической ячейки. Равновесное же положение вектора намагниченности определяется не только кристаллографией, но и формой образца, а также направлением и величиной внешнего поля. Поэтому две системы координат, одна из которых связана с кристаллографической ячейкой, а другая с равновесной намагниченностью, как правило, имеют в пространстве различную ориентацию.

Таким образом, для удобного решения задачи в системе, связанной с намагниченностью, надо иметь инструмент преобразования плотности энергии, записанной в какой-то другой системе, к виду записи в системе, связанной с намагниченностью.

С другой стороны, наряду с получением условий ориентационного перехода как такового, то есть с нахождением равновесной ориентации вектора намагниченности, во многих случаях требуется как-то анализировать дальнейшее поведение вектора намагниченности вблизи найденного равновесного положения.

К таким задачам относится нахождение динамической восприимчивости, знание которой необходимо для исследования ферромагнитного резонанса и волновых процессов в магнитной среде. В этом случае преобразования требует уже не только вектор намагниченности,

но и правило, связывающее поведение намагниченности с действующим магнитным полем. Такое правило обеспечивает динамическая магнитная восприимчивость, играющая роль коэффициента, связывающего вектор поля с вектором намагниченности. Благодаря гиротропному характеру магнитной среды, такой коэффициент, то есть динамическая магнитная восприимчивость имеет тензорный характер. Вычисление динамической магнитной восприимчивости, как правило, удобнее производить в системе, связанной с намагниченностью, где можно осуществить линеаризацию получающихся уравнений движения. Далее следует полученную таким образом восприимчивость преобразовать в систему, связанную с полем, кристаллической ячейкой, лабораторией или с каким-то еще другим характерным и важным для практики направлением. То есть здесь речь идет о преобразовании не вектора, но теперь уже тензора, что, как правило, является задачей более сложной.

Тем не менее, во всех подобных случаях успешно работает и традиционно используется аппарат матрицы переходов. Этот аппарат, а также правила работы с ним, довольно подробно описаны в третьей монографии настоящей серии [3], поэтому здесь не будем углубляться в подробности, а приведем лишь основные сведения, необходимые для дальнейшего изложения.

9.4.1. Общая схема преобразования

Как отмечено выше, начальным этапом решения большинства задач магнитной динамики в условиях ориентационного перехода является нахождение этих условий, что обычно осуществляется путем минимизации выражения для плотности энергии. Для решения подобных задач необходим инструмент, позволяющий преобразовывать выражение для плотности энергии из одной системы координат в другую.

Плотность энергии в общем случае представляет собой выражение, составленное тем или иным способом из компонент различных векторов или тензоров. Так, плотность энергии анизотропии содержит компоненты векторов намагниченности, плотность энергии взаимодействия намагниченности с полем — компоненты векторов намагниченности и поля, а, например, плотность энергии магнитоупругого взаимодействия — компоненты тензора деформаций и вектора намагниченности.

При этом природа тех или иных векторов или тензоров при переходе от одной системы координат к другой полностью сохраняется. То есть вектор намагниченности, заданный в одной системе, в другой системе переходит в вектор опять же намагниченности, а тензор деформаций — опять же в тензор деформаций.

Таким образом, для преобразования плотности энергии из одной системы координат в другую требуется лишь знание правил преобразования векторов и тензоров между этими системами. Оба эти вида преобразований осуществляются с помощью одних и тех же матриц перехода. При этом вектор можно рассматривать как матрицу с одним столбцом и с числом строк, равным размерности системы координат,

а тензор — как матрицу, количество строк и столбцов которой равны друг другу и также определяются размерностью системы координат. Приведем схему выполнения обоих таких преобразований.

9.4.2. Преобразование вектора

В общем случае для преобразования плотности энергии, надо выразить компоненты вектора, заданные в одной системе координат, через компоненты того же вектора в другой системе. То есть, выражаясь терминами математики, надо осуществить переход от одного базиса к другому.

Согласно правилам такого перехода [414, 450, 451] преобразование компонент вектора производится с помощью матрицы перехода в соответствии с формулой

$$\mathbf{a}_1 = \overleftrightarrow{A}_{21} \mathbf{a}_2, \quad (9.28)$$

где \mathbf{a}_1 — вектор в первой системе координат, \mathbf{a}_2 — вектор во второй системе координат, $\overleftrightarrow{A}_{21}$ — матрица перехода от второй системы к первой. Матрица $\overleftrightarrow{A}_{21}$ для трехмерной системы координат имеет вид

$$\overleftrightarrow{A}_{21} = \begin{pmatrix} A_{xx}^{(21)} & A_{xy}^{(21)} & A_{xz}^{(21)} \\ A_{yx}^{(21)} & A_{yy}^{(21)} & A_{yz}^{(21)} \\ A_{zx}^{(21)} & A_{zy}^{(21)} & A_{zz}^{(21)} \end{pmatrix}, \quad (9.29)$$

а преобразование (9.28) осуществляется по обычным правилам перемножения двух матриц, которое здесь предстает в виде умножения матрицы на вектор [414, 450, 451]:

$$\begin{pmatrix} a_x^{(1)} \\ a_y^{(1)} \\ a_z^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{xx}^{(21)} & A_{xy}^{(21)} & A_{xz}^{(21)} \\ A_{yx}^{(21)} & A_{yy}^{(21)} & A_{yz}^{(21)} \\ A_{zx}^{(21)} & A_{zy}^{(21)} & A_{zz}^{(21)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x^{(2)} \\ a_y^{(2)} \\ a_z^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{xx}^{(21)} a_x^{(2)} + A_{xy}^{(21)} a_y^{(2)} + A_{xz}^{(21)} a_z^{(2)} \\ A_{yx}^{(21)} a_x^{(2)} + A_{yy}^{(21)} a_y^{(2)} + A_{yz}^{(21)} a_z^{(2)} \\ A_{zx}^{(21)} a_x^{(2)} + A_{zy}^{(21)} a_y^{(2)} + A_{zz}^{(21)} a_z^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (9.30)$$

9.4.3. Преобразование тензора

Рассмотренное выше преобразование вектора не полностью охватывает все разнообразие задач, решаемых в условиях ориентационного перехода. Как при вычислении плотности энергии, так и динамических свойств намагниченности требуется также преобразование тензоров

из одной системы координат в другую. Рассмотрим теперь общую схему таких преобразований.

В рамках настоящей монографии используются два вида тензоров. Тензоры первого вида описывают состояние тела как таковое. К таким тензорам относится, например, тензор деформаций. Деформации тела являются характеристиками, никакими другими воздействиями не обусловленные, так как просто описывают смещение точек тела по отношению к каким-то начальным их положениям.

Тензоры второго вида описывают изменение состояния тела, или новое его состояние, получающееся в результате какого-то внешнего воздействия. К таким тензорам относится, например, тензор магнитной восприимчивости, связывающий состояние вектора намагниченности тела при воздействии на него внешнего магнитного поля. В динамике этот тензор получается из решения существенно динамического уравнения Ландау–Лифшица, являющегося для намагниченности уравнением движения, происходящего под действием поля (в какой-то степени — аналог второго закона Ньютона для механического волчка). То есть тензор магнитной восприимчивости связывает два вектора — поля и намагниченности, причем при выключении поля намагниченность, им обусловленная, пропадает. Тензором такого же вида является тензор магнитной проницаемости. Теми же свойствами обладают электрические аналоги магнитных тензоров — тензоры диэлектрической восприимчивости и проницаемости.

В рассматриваемых в рамках настоящей монографии выражениях для плотности энергии наряду с векторами присутствуют тензоры только первого вида (например, тензор размагничивания), тогда как в вычислениях восприимчивости или частотных свойств участвуют тензоры второго вида (например, тензоры восприимчивости и проницаемости)

Преобразование тензоров того и другого вида при изменении системы координат происходит различным образом. Рассмотрим их по отдельности.

9.4.4. Преобразование тензоров первого вида

Преобразование компонент тензора первого вида производится с помощью той же матрицы перехода, что и для вектора, то есть в соответствии с подобной (9.28) формулой

$$\vec{u}_1 = \vec{A}_{21} \vec{u}_2, \quad (9.31)$$

где \vec{u}_1 — тензор в первой системе координат, \vec{u}_2 — тензор во второй системе координат, \vec{A}_{21} — матрица перехода от второй системы к первой. Важным обстоятельством является здесь тот факт, что как начальный, так и конечный тензоры \vec{u}_2 и \vec{u}_1 имеют одну и ту же природу (то есть, например, оба являются тензорами деформаций или размагничивания).

В развернутом виде с помощью того же правила перемножения матриц получаем:

$$\begin{pmatrix} u_{xx}^{(1)} & u_{xy}^{(1)} & u_{xz}^{(1)} \\ u_{yx}^{(1)} & u_{yy}^{(1)} & u_{yz}^{(1)} \\ u_{zx}^{(1)} & u_{zy}^{(1)} & u_{zz}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{xx}^{(21)} & A_{xy}^{(21)} & A_{xz}^{(21)} \\ A_{yx}^{(21)} & A_{yy}^{(21)} & A_{yz}^{(21)} \\ A_{zx}^{(21)} & A_{zy}^{(21)} & A_{zz}^{(21)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx}^{(2)} & u_{xy}^{(2)} & u_{xz}^{(2)} \\ u_{yx}^{(2)} & u_{yy}^{(2)} & u_{yz}^{(2)} \\ u_{zx}^{(2)} & u_{zy}^{(2)} & u_{zz}^{(2)} \end{pmatrix} = \\
 = \begin{pmatrix} A_{xx}^{(21)}u_{xx}^{(2)} + A_{xy}^{(21)}u_{yx}^{(2)} + A_{xz}^{(21)}u_{zx}^{(2)} & A_{xx}^{(21)}u_{xy}^{(2)} + A_{xy}^{(21)}u_{yy}^{(2)} + A_{xz}^{(21)}u_{zy}^{(2)} & A_{xx}^{(21)}u_{xz}^{(2)} + A_{xy}^{(21)}u_{yz}^{(2)} + A_{xz}^{(21)}u_{zz}^{(2)} \\ A_{yx}^{(21)}u_{xx}^{(2)} + A_{yy}^{(21)}u_{yx}^{(2)} + A_{yz}^{(21)}u_{zx}^{(2)} & A_{yx}^{(21)}u_{xy}^{(2)} + A_{yy}^{(21)}u_{yy}^{(2)} + A_{yz}^{(21)}u_{zy}^{(2)} & A_{yx}^{(21)}u_{xz}^{(2)} + A_{yy}^{(21)}u_{yz}^{(2)} + A_{yz}^{(21)}u_{zz}^{(2)} \\ A_{zx}^{(21)}u_{xx}^{(2)} + A_{zy}^{(21)}u_{yx}^{(2)} + A_{zz}^{(21)}u_{zx}^{(2)} & A_{zx}^{(21)}u_{xy}^{(2)} + A_{zy}^{(21)}u_{yy}^{(2)} + A_{zz}^{(21)}u_{zy}^{(2)} & A_{zx}^{(21)}u_{xz}^{(2)} + A_{zy}^{(21)}u_{yz}^{(2)} + A_{zz}^{(21)}u_{zz}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (9.32)$$

Итак, для перевода выражения для плотности энергии из одной системы координат в другую следует выполнить преобразование всех входящих в это выражение векторов и тензоров в соответствии с формулами (9.28) и (9.31) (или (9.30) и (9.32)), после чего подставить преобразованные выражения на место исходных.

9.4.5. Преобразование тензоров второго вида

Преобразование компонент тензора второго вида производится несколько другим образом. Представим такое преобразование в виде задачи. Предположим, что во второй системе координат, где аналитические выкладки предельваются достаточно легко, найдено соотношение

$$\mathbf{a}_2 = \vec{\chi}_2 \mathbf{b}_2, \quad (9.33)$$

связывающее два вектора \mathbf{a}_2 и \mathbf{b}_2 посредством тензора $\vec{\chi}_2$. Важным отличием от предыдущего случая является тот факт, что природа векторов \mathbf{a}_2 и \mathbf{b}_2 здесь различна (то есть, например, один является вектором намагнитченности, а другой — поля).

В результате преобразования к исходной системе требуется получить соотношение

$$\mathbf{a}_1 = \vec{\chi}_1 \mathbf{b}_1, \quad (9.34)$$

где природа векторов \mathbf{a}_1 и \mathbf{b}_1 — та же, что и в предыдущем случае, но теперь они записаны уже в новой системе координат, а тензор $\vec{\chi}_1$ представляет собой преобразованный к новой системе тензор $\vec{\chi}_2$.

Будем полагать, что известны матрицы переходов $\overleftrightarrow{A}_{21}$ и $\overleftrightarrow{A}_{12}$, связывающие компоненты исходных и преобразованных векторов соотношениями:

$$\mathbf{a}_1 = \overleftrightarrow{A}_{21} \mathbf{a}_2; \quad (9.35)$$

$$\mathbf{b}_1 = \overleftrightarrow{A}_{21} \mathbf{b}_2, \quad (9.36)$$

а также:

$$\mathbf{a}_2 = \overleftrightarrow{A}_{12} \mathbf{a}_1; \quad (9.37)$$

$$\mathbf{b}_2 = \overleftrightarrow{A}_{12} \mathbf{b}_1. \quad (9.38)$$

Начиная с выражения (9.35) с учетом (9.33), а затем (9.38), выполним цепочку последовательных преобразований:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \overleftrightarrow{A}_{21} \mathbf{a}_2 = \overleftrightarrow{A}_{21} (\overleftrightarrow{\chi}_2 \mathbf{b}_2) = \overleftrightarrow{A}_{21} \overleftrightarrow{\chi}_2 \mathbf{b}_2 = \\ &= \overleftrightarrow{A}_{21} \overleftrightarrow{\chi}_2 (\mathbf{b}_2) = \overleftrightarrow{A}_{21} \overleftrightarrow{\chi}_2 (\overleftrightarrow{A}_{12} \mathbf{b}_1) = (\overleftrightarrow{A}_{21} \overleftrightarrow{\chi}_2 \overleftrightarrow{A}_{12}) \mathbf{b}_1. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Запишем начальный и конечный члены этой цепочки:

$$\mathbf{a}_1 = (\overleftrightarrow{A}_{21} \overleftrightarrow{\chi}_2 \overleftrightarrow{A}_{12}) \mathbf{b}_1. \quad (9.40)$$

Сравнивая полученное выражение с (9.34), получаем

$$\overleftrightarrow{\chi}_1 = \overleftrightarrow{A}_{21} \overleftrightarrow{\chi}_2 \overleftrightarrow{A}_{12}, \quad (9.41)$$

что и представляет собой искомую формулу преобразования тензора $\overleftrightarrow{\chi}_2$ в тензор $\overleftrightarrow{\chi}_1$ с помощью матриц прямого и обратного перехода $\overleftrightarrow{A}_{12}$ и $\overleftrightarrow{A}_{21}$.

Ту же формулу можно получить и несколько иным способом. Так, если в формулу (9.33) подставить \mathbf{a}_2 и \mathbf{b}_2 в виде (9.37) и (9.38), то есть

$$\overleftrightarrow{A}_{12} \mathbf{a}_1 = \overleftrightarrow{\chi}_2 \overleftrightarrow{A}_{12} \mathbf{b}_1, \quad (9.42)$$

после чего умножить обе стороны этого выражения слева на $\overleftrightarrow{A}_{21}$:

$$\overleftrightarrow{A}_{21} \overleftrightarrow{A}_{12} \mathbf{a}_1 = \overleftrightarrow{A}_{21} \overleftrightarrow{\chi}_2 \overleftrightarrow{A}_{12} \mathbf{b}_1, \quad (9.43)$$

откуда, учитывая, что присутствующее в левой части произведение прямой и обратной матриц равно единице, то есть

$$\overleftrightarrow{A}_{21} \overleftrightarrow{A}_{12} = 1, \quad (9.44)$$

то получаем соотношение (9.40), откуда следует (9.41).

Заметим, что при использовании формулы (9.41) следует вычислять производную от конца к началу (справа налево), то есть сначала выполнить умножение $\overleftrightarrow{\chi}_2$ на $\overleftrightarrow{A}_{12}$, после чего то, что получится, умножить на $\overleftrightarrow{A}_{21}$. Следует также соблюдать порядок сомножителей, учитывая, что при перемножении матриц перестановочный закон не имеет места [414, 450, 451].

Замечание. Представленный здесь способ перемножения матриц в виде (9.32) аналогичен правилу перемножения детерминантов по правилу «комбинирования строк со столбцами» [451, стр. 30]. Не следует

однако путать этот способ со способом перемножения детерминантов, который кроме приведенного имеет еще три варианта: «комбинирование строк со строками», «столбцов со строками» и «столбцов со столбцами» [451, стр. 30]. Во всех возможных четырех случаях значение детерминанта не меняется, что обеспечивается возможностью перестановки строк со столбцами. Однако для матриц перестановка строк со столбцами недопустима (так как переводит прямую матрицу в обратную), поэтому для получения верного результата следует использовать именно «комбинирование строк со столбцами». В самом деле, путем элементарного геометрического разложения вектора по обеим системам координат можно убедиться, что попытка использования вместо правила «комбинирования строк со столбцами» любого другого из трех перечисленных выше приводит к неверным выражениям для компонент получающегося вектора, то есть недопустимо. Более подробное разъяснение математической корректности этого вопроса можно найти в [451, стр. 250].

9.4.6. Структура матриц перехода

В рассматриваемых далее в настоящей монографии задачах преобразование координат осуществляется от одной декартовой системы к другой, также декартовой, причем начала обеих систем совпадают. Поэтому рассмотрим преобразование на примере двух таких декартовых систем.

Важным частным случаем перехода является преобразование вектора \mathbf{a}' , заданного в повернутой системе координат $Ox'y'z'$, в вектор \mathbf{a} , заданный в исходной системе $Oxyz$. Как показано в [452, 453], компонентами матрицы перехода в случае двух декартовых систем являются косинусы углов между осями координат этих систем.

Прямой переход осуществляется с помощью прямого преобразования:

$$\mathbf{a} = \overleftrightarrow{A} \mathbf{a}', \quad (9.45)$$

где таблица компонент матрицы перехода имеет вид

$$\begin{array}{c|ccc} & x' & y' & z' \\ \hline x & \cos(\angle xOx') & \cos(\angle xOy') & \cos(\angle xOz') \\ \hline y & \cos(\angle yOx') & \cos(\angle yOy') & \cos(\angle yOz') \\ \hline z & \cos(\angle zOx') & \cos(\angle zOy') & \cos(\angle zOz') \\ \hline \end{array}, \quad (9.46)$$

то есть сама матрица прямого преобразования имеет вид

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \cos(\angle xOx') & \cos(\angle xOy') & \cos(\angle xOz') \\ \cos(\angle yOx') & \cos(\angle yOy') & \cos(\angle yOz') \\ \cos(\angle zOx') & \cos(\angle zOy') & \cos(\angle zOz') \end{pmatrix}. \quad (9.47)$$

Обратный переход, то есть преобразование вектора \mathbf{a} , заданного в декартовой системе координат $Oxyz$, в вектор \mathbf{a}' , заданный в системе $Ox'y'z'$, осуществляется с помощью обратного преобразования

$$\mathbf{a}' = \overleftrightarrow{A}^{-1} \mathbf{a}. \quad (9.48)$$

При этом таблица компонент матрицы перехода имеет вид

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x' & \cos(\angle x'Ox) & \cos(\angle x'Oy) & \cos(\angle x'Oz) \\ y' & \cos(\angle y'Ox) & \cos(\angle y'Oy) & \cos(\angle y'Oz) \\ z' & \cos(\angle z'Ox) & \cos(\angle z'Oy) & \cos(\angle z'Oz) \end{array}. \quad (9.49)$$

Соответствующая матрица обратного преобразования имеет вид

$$\overleftrightarrow{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\angle x'Ox) & \cos(\angle x'Oy) & \cos(\angle x'Oz) \\ \cos(\angle y'Ox) & \cos(\angle y'Oy) & \cos(\angle y'Oz) \\ \cos(\angle z'Ox) & \cos(\angle z'Oy) & \cos(\angle z'Oz) \end{pmatrix}. \quad (9.50)$$

Из сравнения (9.47) и (9.50) можно видеть, что взаимное преобразование матриц обоих переходов друг в друга получается путем замены строк одной матрицы столбцами другой и обратно.

Исходя из того, что последовательное применение прямого и обратного преобразований должно привести вектор к своему исходному значению, следует, что произведение матриц прямого и обратного преобразований должно быть равно единичной матрице, оставляющей вектор неизменным, то есть должно выполняться равенство

$$\overleftrightarrow{A} \overleftrightarrow{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.51)$$

Это свойство, характеризующее поворот одной декартовой системы относительно другой, обе из которых являются правыми и имеют общее начало, является достаточно общим. Оно выполняется при условии, что базис каждой из матриц (то есть набор направляющих векторов осей координат) является ортонормированным, где нормировка состоит в равенстве единице суммы квадратов компонент каждого из этих векторов [414, стр. 447, формула (14.10.3)]. То есть сумма квадратов компонент каждого направляющего вектора одной системы, разложенного по осям другой системы, должна равняться единице. Таким образом, по каждой из осей каждой системы задается единичный вектор, а компоненты матриц являются косинусами углов между единичными векторами одной системы и единичными векторами другой.

При этом если матрица, например, прямого перехода будет получена, то матрицу обратного перехода можно получить из нее путем замены строк соответствующими столбцами. То же касается и получения матрицы прямого перехода из матрицы обратного.

Итак, главная задача нахождения матрицы поворота состоит в определении единичных направляющих векторов осей одной системы относительно другой.

Эта задача решается методами аналитической геометрии, позволяющими находить соотношения между ориентацией прямых, плоскостей и векторов в трехмерной декартовой системе координат [452, 453]. Перечень требуемых задач, а также конкретные примеры их применения к различным видам ориентации систем координат друг относительно друга, в том числе применительно к осям кубической кристаллографической ячейки, подробно описаны в третьей монографии настоящей серии [3]. Таким образом, желающим подробно разобраться в технике формирования матриц перехода, авторы рекомендуют обратиться к цитированной монографии. Здесь же ограничимся лишь некоторыми случаями, необходимыми для решения рассматриваемых далее задач. Соответствующие матрицы перехода будут получены и применены на практике в ходе дальнейшего текста.

Выводы по главе 9

Данная глава посвящена краткому обзору основного математического аппарата, используемого при расчете свойств ориентационных переходов. Приведены методы рассмотрения ориентационных переходов, основанные на минимизации плотности энергии. Кратко излагается методика работы с матрицами перехода между различными системами координат.

Основные результаты, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрена общая идеология ориентационного перехода как процесса, состоящего в изменении ориентации вектора намагниченности. Приведено соотношение между понятиями ориентационного и фазового переходов, отмечено, что при фазовом переходе происходит изменение фазового состояния магнетика, тогда как при простом ориентационном переходе изменение фазы отсутствует. Отмечено, что в ряде случаев плавное изменение намагниченности в процессе ориентационного перехода может сопровождаться изменением фазы, в безгистерезисном случае представляющим собой фазовый переход второго рода. Рассмотрен пример простейшего ориентационного перехода, имеющего место в магнитной среде, обладающей одноосной анизотропией, при намагничивании такой среды полем, перпендикулярным оси анизотропии. Показано, что при таком ориентационном переходе при величине поля, равной значению поля анизотропии, вектор намагниченности выстраивается вдоль направления поля, причем момент выстраивания

представляет собой фазовый переход второго рода. Отмечено, что в случае отклонения поля от нормали к оси анизотропии, даже при увеличении поля выше соответствующего значению поля анизотропии, вектор намагниченности не выстраивается точно вдоль поля, но по мере увеличения поля лишь асимптотически стремится к нему, в результате чего фазовый переход получается «размытым» или «размазанным».

2. Рассмотрены основные положения расчета ориентационного перехода, состоящие в минимизации плотности энергии магнетика при воздействии внешнего поля с учетом магнитной анизотропии и намагничивающего фактора формы образца. Такая минимизация позволяет определить равновесное положение намагниченности в условиях перехода, необходимое для анализа волновых процессов, рассматриваемых как динамическое отклонение намагниченности от равновесного положения. Отмечено, что с математической стороны процедура минимизации включает в себя нахождение нуля первой производной от плотности энергии, что часто приводит к необходимости решения алгебраических уравнений высоких степеней. Обсуждаются возможности аналитического решения уравнений третьей и четвертой степеней с помощью методов Кардано и Феррари, однако отмечено, что такое решение, как правило, приводит к математическим выражениям, отличающимся значительной громоздкостью.

3. В качестве возможного дополнения, а в ряде случаев и единственной возможной альтернативы аналитического решения отмечены численные методы нахождения равновесного положения, простейшим из которых является метод поиска нуля. Приведен алгоритм метода, состоящий в разбиении полного интервала изменения переменной на ряд шагов с последовательным вычислением производной от плотности энергии по шагам до момента изменения ее знака, что после последующего уточнения с меньшим шагом принимается за искомое значение переменной, обеспечивающей равновесное положение. Достоинство метода поиска нуля состоит в простоте его реализации на ЭВМ и довольно малом по сравнению с другими методами временем расчета. Недостатком является трудность реализации в случае, если вектор намагниченности в процессе ориентационного перехода перемещается не в одной плоскости, а выходит из нее в трехмерное пространство. При этом дифференцирование плотности энергии приводит к системе из нескольких уравнений, что значительно усложняет применение метода в связи с необходимостью следить одновременно за всеми переменными.

4. В качестве довольно удобного метода нахождения равновесного положения приведен метод установления, являющийся вариантом широко используемого в вычислительной математике метода итераций. Приведен алгоритм метода, состоящий в первичном задании достаточно вероятного значения ориентации намагниченности, вычислении при этом значения поля анизотропии, сумма которого с внешним полем задает новое значение ориентации, и так далее. Повторение такого

процесса приводит к постепенному приближению направления вектора намагниченности к равновесному, которое и принимается за искоемое. Достоинством метода является его довольно быстрая сходимость. Другим достоинством является возможность использования при произвольной ориентации нескольких осей анизотропии, что при аналитическом решении приводит к трудно разрешимой системе нескольких алгебраических уравнений высоких степеней.

5. В качестве другого полезного метода численного нахождения равновесного положения намагниченности приведен метод динамического установления. Алгоритм метода состоит в «отпускании» вектора намагниченности в свободную прецессию из некоторого заданного начального положения, в результате чего по мере затухания колебаний вектор намагниченности приходит в состояние, соответствующее минимуму энергии. Равновесное положение определяется тем точнее, чем меньше параметр диссипации и меньше шаг расчета по углу прецессии. Отмечено важное достоинство метода, состоящее в возможности определения равновесия намагниченности в трех измерениях без предварительно предположения о движении вектора намагниченности вдоль какой-то определенной плоскости. Недостатком метода является довольно большее требуемое машинное время, как правило, превышающее таковое при использовании простого метода установления более чем на порядок

6. Рассмотрен аппарат матриц перехода между двумя различными системами координат, одна из которых связана с равновесным положением намагниченности, а другая выбирается исходя из удобства записи плотности энергии анизотропии. Приведена общая схема преобразования, состоящая в умножении вектора или тензора, описывающего состояние намагниченности, на соответствующую матрицу перехода. Отмечены два вида тензоров, первый из которых описывает состояние тела как таковое, а второй — изменение состояния тела, получающееся в результате внешнего воздействия. Примером тензоров первого вида является тензор деформаций, второго — тензор динамической магнитной или диэлектрической проницаемости. Отмечено, что правило преобразования тензоров первого вида, состоит в простом умножении тензора на матрицу перехода, тогда как правило преобразования тензора второго вида состоит в последовательном умножении исходного тензора на матрицу прямого и обратного перехода.

7. Рассмотрена структура матриц перехода. Отмечено, что компоненты матрицы соответствуют косинусам углов между осями исходной и повернутой систем координат. Приведено соотношение между матрицами прямого и обратного перехода, состоящее в равенстве единице произведения таких матриц. Отмечено, что методом получения компонент матриц перехода является решение задачи об определении единичных направляющих векторов осей одной системы координат относительно другой, что достигается применением методов аналитической геометрии для каждого конкретного случая.

Глава 10

ДИНАМИЧЕСКАЯ МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ПРИ ОРИЕНТАЦИОННОМ ПЕРЕХОДЕ

В предыдущей главе рассмотрено квазистатическое изменение ориентации вектора намагниченности в процессе ориентационного перехода. Важнейшей задачей дальнейшего изложения будет рассмотрение магнитостатических волн в условиях ориентационного перехода, для решения которой необходимо знание динамической магнитной восприимчивости при таком переходе. Получение тензора восприимчивости для решения задачи о ферромагнитном резонансе подробно рассмотрено в предыдущей монографии настоящей серии [3, гл. 6, разд. 6.3 и 6.4]. Поэтому здесь ограничимся лишь кратким описанием основных положений приведенного там математического аппарата, а для более подробного знакомства рекомендуем читателю обратиться непосредственно к монографии [3]. В качестве подготовительного этапа приведем необходимые сведения о магнитной анизотропии, также более подробно описанной в [3, гл. 4, разд. 4.5]. В ходе изложения будем, в основном, следовать [3], а также приведенной там более подробной библиографии. Остальные необходимые ссылки будут приведены в тексте.

10.1. Некоторые виды магнитной анизотропии

Согласно отмеченному выше, главным условием реализации ориентационного перехода является наличие магнитной анизотропии образца. Достаточно подробно вопрос о магнитной анизотропии с многочисленными библиографическими ссылками рассмотрен в третьей монографии настоящей серии [3], посвященной ферромагнитному резонансу в условиях ориентационного перехода. Ряд выражений для плотности энергии анизотропии различных видов, в том числе в декартовой и сферической системах координат, необходимых для анализа дипольных и обменных волн, а также структуры доменных границ, рассмотрен выше в разделе 5.2. Поэтому здесь ограничимся лишь кратким перечислением особенностей анизотропии, важных именно для ориентационного перехода, не вдаваясь в излишние подробности.

Магнитная анизотропия может быть двух видов — обусловленная кристаллографической симметрией материала и формой конкретного магнитного образца. Рассмотрим далее оба эти вида.

10.1.1. Магнитная кристаллографическая анизотропия

Наиболее распространенными видами магнитной кристаллографической анизотропии материала являются одноосная и кубическая. Рассмотрим эти виды по отдельности.

ОДНООСНАЯ АНИЗОТРОПИЯ

В декартовой системе координат $Oxyz$, ось Oz которой ориентирована вдоль оси анизотропии, плотность энергии одноосной анизотропии имеет вид

$$U_a^{(1)} = K(m_x^2 + m_y^2), \quad (10.1)$$

где K — константа анизотропии, $m_{x,y}$ — нормированные на намагнитченность насыщения M_0 компоненты вектора намагнитченности.

Исходя из условия сохранения длины вектора намагнитченности

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1, \quad (10.2)$$

можно записать (10.1) в виде

$$U_a^{(2)} = -K m_z^2. \quad (10.3)$$

Можно видеть, что эти два выражения отличаются лишь на постоянное слагаемое, так что

$$U_a^{(1)} = K + U_a^{(2)}. \quad (10.4)$$

При этом, поскольку в общем случае уравнение движения определяется производной от плотности энергии по обобщенной координате [449], то в процессе дифференцирования $U_a^{(1)}$ и $U_a^{(2)}$ по компонентам намагнитченности постоянное слагаемое в любом случае пропадает. Поэтому, с точки зрения потенциала, выражения (10.1) и (10.3) можно считать эквивалентными.

Квадратичный (второй) порядок выражений (10.1) и (10.3) по компонентам намагнитченности отражает независимость плотности энергии анизотропии при изменении знака соответствующей компоненты.

Знак константы K определяет, является ли равновесным положением намагнитченности ось Oz или плоскость Oxy . Так, при $K > 0$ выражения (10.1) и (10.3) имеют минимум при $m_{x,y} \rightarrow 0$ или при $m_z \rightarrow \infty$, то есть намагнитченность, подчиняясь минимуму энергии, стремится ориентироваться вдоль оси Oz . Это анизотропия типа «легкая ось». При $K < 0$ те же выражения имеют минимум при $m_{x,y} \rightarrow \infty$ или $m_z \rightarrow 0$, то есть намагнитченность стремится ориентироваться в плоскости Oxy . Это анизотропия типа «легкая плоскость».

С точки зрения потенциала, как отмечено выше, выражения (10.1) и (10.3) являются эквивалентными, однако в [3] показано, что рассчитанные по этим формулам эффективные поля [16, 17]

$$\mathbf{H}_e = -\frac{1}{M_0} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{m}} \quad (10.5)$$

получаются несколько различными. Поэтому, как отмечено в [3], с точки зрения физического смысла для описания анизотропии типа «легкая ось» более подходит выражение (10.1), а для описания анизотропии типа «легкая плоскость» удобнее выражение (10.3). Тем не менее, при конкретных расчетах следует руководствоваться не просто этим правилом, а учитывать физический смысл в соответствии с качественным характером рассматриваемого явления.

КУБИЧЕСКАЯ АНИЗОТРОПИЯ

Другим широко распространенным видом магнитной анизотропии является кубическая. В декартовой системе координат $Oxyz$, оси которой ориентированы вдоль ребер кубической ячейки (то есть кристаллографических осей типа [001]) выражение для кубической анизотропии имеет две формы записи [15–17]:

$$U_c^{(1)} = -K_1(m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2), \quad (10.6)$$

$$U_c^{(2)} = \frac{K_1}{2}(m_x^4 + m_y^4 + m_z^4), \quad (10.7)$$

эквивалентные с точностью до постоянного слагаемого.

При этом константа K_1 обычно носит название «первой константы кубической анизотропии».

При практических расчетах принципиальное различие между выражениями (10.6) и (10.7), как правило, отсутствует, так что выбор того или другого из них определяется простотой математических выкладок или личными вкусами автора.

В случае положительной константы K_1 легкими направлениями намагничивания являются пространственные диагонали кубической ячейки (то есть оси типа [111]), а в случае отрицательной — ребра куба той же ячейки (то есть оси типа [001]). Из широко распространенных материалов первый вид анизотропии свойственен, например, железитриевому гранату (ЖИГ) и никелю, второй — железу.

Из выражений (10.6) и (10.7) можно видеть, что, в отличие от одноосной анизотропии, кубическая анизотропия по компонентам намагниченности имеет четвертый, то есть более высокий порядок. Это обстоятельство отражает более сложный характер кристаллографической симметрии кубической ячейки, не меняющейся не только при повороте вокруг какой-то одной оси, но и при повороте вокруг трех взаимно перпендикулярных осей на углы, равные 90° .

Иногда в качестве «добавки» к (10.6), (10.7) используется слабое, соответствующее кубической анизотропии шестого порядка [16, 17]:

$$U_c^{(6)} = K_2 m_x^2 m_y^2 m_z^2, \quad (10.8)$$

где K_2 носит название «второй константы кубической анизотропии». В большинстве материалов, в том числе в ЖИГ, эта константа является отрицательной и имеет величину на порядок меньшую, чем K_1 . Более подробно вопрос о соотношении знака константы K_2 относительно знака и величины K_1 рассматривается в [3, разд. 4.3.3], а также в монографии [198, стр. 166–169].

10.1.2. Анизотропия формы (размагничивания)

Другим видом анизотропии, определяющим равновесное положение намагниченности в пространственно ограниченных образцах, является анизотропия формы. Плотность энергии анизотропии формы, называемой также энергией размагничивания, в общем случае имеет вид [12, 16, 17]

$$U_p = -\frac{1}{2} \mathbf{M} \mathbf{H}_m, \quad (10.9)$$

где \mathbf{H}_m — поле размагничивания. В общем случае поле \mathbf{H}_m является неоднородным, то есть зависит от координат точки наблюдения внутри тела.

Однако его однородность сохраняется в том случае, если образец имеет форму эллипсоида, частными случаями которого являются сфера, тонкий цилиндр или тонкая пленка. В этих случаях размагничивающее поле принимает вид [12, 16, 17]:

$$\mathbf{H}_m = -\vec{N} \cdot \mathbf{M} = -M_0 \vec{N} \mathbf{m}, \quad (10.10)$$

где \mathbf{m} — нормированный вектор намагниченности, а \vec{N} — тензор размагничивающих факторов эллипсоида:

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} N_x & 0 & 0 \\ 0 & N_y & 0 \\ 0 & 0 & N_z \end{pmatrix}. \quad (10.11)$$

В случае тонкой пленки, ориентированной перпендикулярно оси Ox , тензор размагничивающих факторов имеет вид

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} 4\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.12)$$

Подставляя (10.12) в (10.10), выполняя умножение и подставляя полученное выражение в (10.9), получаем плотность энергии размагничивания в виде

$$U_m^{(1)} = 2\pi M_0^2 m_x^2. \quad (10.13)$$

С учетом условия сохранения длины вектора намагниченности

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1, \quad (10.14)$$

это выражение с точностью до постоянного слагаемого можно записать в виде:

$$U_m^{(2)} = -2\pi M_0^2(m_y^2 + m_z^2). \quad (10.15)$$

Можно видеть, что (10.13) и (10.15) с точностью до константы и наименования компоненты намагниченности совпадают с (10.3) и (10.1) соответственно. То есть в плотности энергии размагничивания коэффициент $2\pi M_0^2$ играет ту же роль, что и константа одноосной анизотропии K в плотности энергии анизотропии.

Однако, в отличие от плотности энергии анизотропии, здесь знак этого коэффициента отрицательный, то есть выражения (10.13) и (10.15) описывают анизотропию типа «легкая плоскость», что определяется выбором формы образца в виде тонкой пленки, плоскость которой перпендикулярна оси Ox .

В случае тонкого цилиндра, параллельного той же оси, знак единственного отличного от нуля члена тензора (10.12) будет отрицательным, так что выражения (10.13) и (10.15) изменят знаки, то есть будут описывать анизотропию типа «легкая ось».

Относительно выбора между выражениями (10.13) и (10.15) остаются справедливыми те же соображения, которые высказывались выше относительно выбора между выражениями (10.1) и (10.3).

10.1.3. Анизотропия внешнего поля

Плотность энергии взаимодействия вектора намагниченности с внешним полем зависит от их взаимной ориентации, поэтому условно можно говорить об «анизотропии» внешнего поля, которая при фиксированном направлении и величине поля проявляется в зависимости плотности энергии от ориентации намагниченности.

Плотность энергии взаимодействия намагниченности \mathbf{M} с внешним полем \mathbf{H} имеет вид [12, 16, 17]

$$U_h = -\mathbf{M}\mathbf{H}. \quad (10.16)$$

В декартовой системе координат $Oxyz$ это выражение приобретает вид

$$U_h = -M_0 H_0 (m_x h_x + m_y h_y + m_z h_z), \quad (10.17)$$

где H_0 — абсолютная величина вектора намагниченности, $h_{x,y,z}$ — его нормированные на H_0 компоненты.

Здесь все компоненты намагниченности входят только в первой степени, поэтому условие сохранения длины вектора намагниченности к упрощению выражения не приводит, а эффективные поля, получаемые путем дифференцирования по компонентам намагниченности, получаются просто равными компонентам внешнего поля $H_0 h_{x,y,z}$.

10.2. Преобразование вектора намагниченности при повороте координат

Ориентационный переход состоит в изменении ориентации вектора намагниченности. Первым этапом решения задачи о нахождении динамической восприимчивости является нахождение условий свободного ферромагнитного резонанса в процессе поворота намагниченности, к чему и перейдем далее.

10.2.1. Преобразование компонент вектора в декартовой системе координат

Итак, рассмотрим преобразование компонент вектора намагниченности при повороте системы координат. Будем следовать общему изложению подобной задачи в традиционных курсах аналитической геометрии [452, 453]. Геометрия для рассматриваемого здесь частного случая представлена на рис. 10.1.

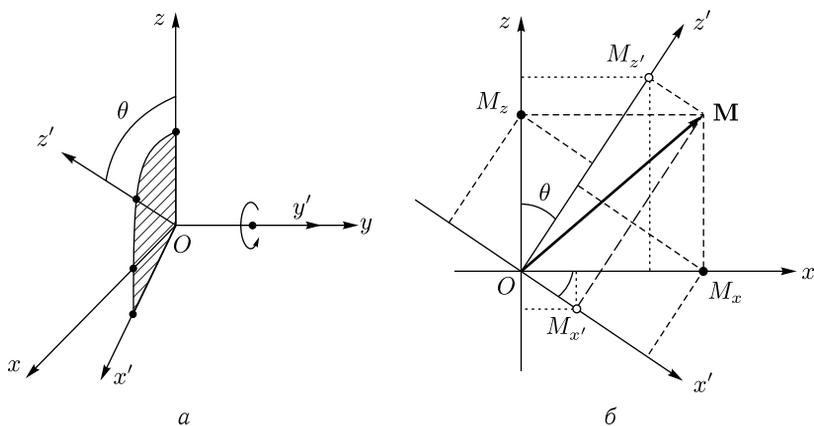


Рис. 10.1. Геометрия задачи: *a* — схема поворота системы координат на угол θ вокруг оси Oy , заштрихованная плоскость содержит оси Ox , Oz , Ox' , Oz' ; *б* — схема образования компонент вектора намагниченности, вид в заштрихованной плоскости вдоль положительного направления оси Oy

На рис. 10.1, *a* показана схема поворота исходной системы координат $Oxyz$ вокруг оси Oy на угол θ . В результате такого поворота исходная система $Oxyz$ перешла в систему $Ox'yz'$, так что угол между осями Ox и Ox' , а также Oz и Oz' равен θ . При этом ось Oy переходит в ось Oy' непосредственно.

На рис. 10.1, *б* показана схема преобразования компонент вектора намагниченности при таком повороте осей. Следуя [452, 453], можно видеть, что прямое преобразование имеет вид:

$$M_x = M_{x'} \cos \theta + M_{z'} \sin \theta; \quad (10.18)$$

$$M_z = -M_{x'} \sin \theta + M_{z'} \cos \theta. \quad (10.19)$$

Соответствующее обратное преобразование имеет вид:

$$M_{x'} = M_x \cos \theta - M_z \sin \theta; \quad (10.20)$$

$$M_{z'} = M_x \sin \theta + M_z \cos \theta. \quad (10.21)$$

При этом в обоих случаях y -компонента не меняется, так что $M_y = M_{y'}$, или $M_{y'} = M_y$.

Прямое и обратное преобразования в трехмерном случае определяются формулами:

$$\mathbf{M} = \overleftrightarrow{A}_3 \mathbf{M}', \quad (10.22)$$

$$\mathbf{M}' = \overleftrightarrow{A}_3^{-1} \mathbf{M}, \quad (10.23)$$

где соответствующие матрицы имеют вид:

$$\overleftrightarrow{A}_3 = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}; \quad (10.24)$$

$$\overleftrightarrow{A}_3^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (10.25)$$

10.3. Свободный ферромагнитный резонанс при ориентационном переходе

Как показано в [3, гл. 6], частота свободного ферромагнитного резонанса в случае, когда приложенное поле меньше поля анизотропии, существенно отличается от таковой, когда такое поле превышает поле анизотропии. Рассмотрим далее полный интервал приложенного поля от нуля до больших его значений более подробно.

10.3.1. Приложенное поле меньше поля анизотропии

Рассмотрим прежде всего случай, когда поле недостаточно для полного поворота вектора намагниченности к направлению поля, то есть именно в условиях ориентационного перехода. Ограничимся случаем одноосной анизотропии в безграничной среде при поле, направленном перпендикулярно оси анизотропии.

Геометрия задачи показана на рис. 10.2.

Основная система координат $Oxyz$ ориентирована таким образом, что ось Ox совпадает с осью анизотропии, а ось Oz совпадает с направлением поля. Вспомогательная система координат $Ox'y'z'$ ориентирована таким образом, что ось Oz' направлена вдоль равновесного направления вектора намагниченности, а ось Ox' лежит в плоскости, проходящей через оси Oz и Oz' . При этом оси Oy и Oy' обеих систем

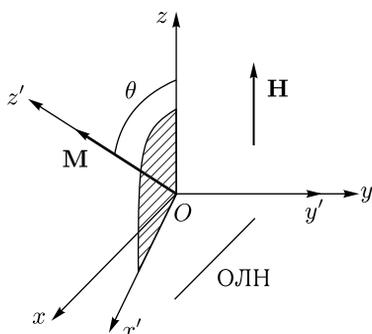


Рис. 10.2. Геометрия задачи. Штриховкой показана единая плоскость $Ox'xz'$

координат совпадают друг с другом. Таким образом, оси Ox , Oz , Ox' и Oz' лежат в одной плоскости, перпендикулярной осям Oy и Oy' , а при изменении поля, приводящему к повороту вектора намагниченности в этой плоскости, система $Ox'y'z'$, следуя за намагниченностью, поворачивается относительно системы $Oxyz$ вокруг оси Oy или Oy' . Угол поворота между осями Oz и Oz' обозначен через θ . Очевидно, что угол между осями Ox и Ox' также равен θ .

Для удобства терминологии будем называть систему $Oxyz$ — связанной с полем, а систему $Ox'y'z'$ — связанной с намагниченностью.

Плотность энергии анизотропии и взаимодействия поля с намагниченностью обычно записываются в системе, связанной с полем, то есть $Oxyz$, поэтому сначала надо перевести все плотности энергии в систему $Ox'y'z'$.

Полная плотность энергии в системе координат, связанной с полем, имеет вид

$$U = -\frac{K}{M_0^2} M_x^2 - \mathbf{M}\mathbf{H}, \quad (10.26)$$

где первое слагаемое соответствует энергии анизотропии, а второе — энергии взаимодействия намагниченности с полем.

Для того чтобы записать плотность энергии в системе $Ox'y'z'$ надо входящие в (10.26) компоненты намагниченности и поля из системы $Oxyz$ преобразовать в систему $Ox'y'z'$. Пользуясь матрицей (10.24) в соответствии с формулой (10.22), а также учитывая, что результат скалярного произведения (второе слагаемое в формуле (10.26)) от ориентации системы координат не зависит, после раскрытия скобок и упорядочения по степеням переменных приводим выражение для плотности энергии к виду:

$$U = -\frac{K}{M_0^2} \cos^2 \theta M_{x'}^2 - \frac{K}{M_0^2} \sin^2 \theta M_{z'}^2 - \frac{2K}{M_0^2} \sin \theta \cos \theta M_{x'} M_{z'} + H_0 \sin \theta M_{x'} - H_0 \cos \theta M_{z'}. \quad (10.27)$$

Введем вспомогательные обозначения:

$$A_1 = -\frac{K}{M_0^2} \cos^2 \theta; \quad (10.28)$$

$$A_2 = -\frac{K}{M_0^2} \sin^2 \theta; \quad (10.29)$$

$$A_3 = -\frac{2K}{M_0^2} \sin \theta \cos \theta; \quad (10.30)$$

$$A_4 = H_0 \sin \theta; \quad (10.31)$$

$$A_5 = -H_0 \cos \theta. \quad (10.32)$$

С этими обозначениями плотность энергии (10.27) принимает вид

$$U = A_1 \cdot M_{x'}^2 + A_2 \cdot M_{z'}^2 + A_3 \cdot M_{x'} M_{z'} + A_4 \cdot M_{x'} + A_5 \cdot M_{z'}. \quad (10.33)$$

В равновесном состоянии эффективное поле по оси Ox' должно быть равно нулю, то есть

$$H_{ex'}^{(0)} = -\frac{\partial U}{\partial M_{x'}} = 0. \quad (10.34)$$

Дифференцируя (10.33) и приравнявая производную к нулю, получаем

$$2A_1 M_{x'} + A_3 M_{z'} + A_4 = 0. \quad (10.35)$$

В равновесии должно быть: $M_{x'} = 0$, $M_{y'} = 0$, $M_{z'} = M_0$. Подставляя эти значения в (10.35), получаем

$$A_3 M_0 + A_4 = 0. \quad (10.36)$$

Подставляя A_3 и A_4 в соответствии с (10.30) и (10.31), получаем уравнение для определения угла θ в равновесном состоянии:

$$-\frac{2K}{M_0} \cos \theta + H_0 = 0, \quad (10.37)$$

откуда, используя в соответствии с (9.13) обозначение для поля анизотропии

$$H_a = 2K/M_0, \quad (10.38)$$

получаем:

$$\cos \theta = \frac{H_0}{H_a}; \quad (10.39)$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{H_a^2 - H_0^2}}{H_a}. \quad (10.40)$$

Заменяя синус и косинус угла θ с помощью (10.39), (10.40), а также используя обозначение H_a (10.38), получаем выражения параметров A_{1-5} через поля:

$$A_1 = -\frac{H_0^2}{2M_0H_a}; \quad (10.41)$$

$$A_2 = -\frac{H_a^2 - H_0^2}{2M_0H_a}; \quad (10.42)$$

$$A_3 = -\frac{H_0\sqrt{H_a^2 - H_0^2}}{M_0H_a}; \quad (10.43)$$

$$A_4 = \frac{H_0\sqrt{H_a^2 - H_0^2}}{H_a}; \quad (10.44)$$

$$A_5 = -\frac{H_0^2}{H_a}. \quad (10.45)$$

Дифференцируя выражение для плотности энергии (10.33), находим эффективные поля:

$$H_{ex'} = -(2A_1M_{x'} + A_3M_{z'} + A_4); \quad (10.46)$$

$$H_{ey'} = 0; \quad (10.47)$$

$$H_{ez'} = -(A_3M_{x'} + 2A_2M_{z'} + A_5). \quad (10.48)$$

Уравнения движения для намагниченности, получаемые из раскрытия векторного произведения в уравнении Ландау–Лифшица (1.5) в системе $Ox'y'z'$, имеют вид:

$$\frac{\partial M_{x'}}{\partial t} = -\gamma(M_{y'}H_{ez'} - M_{z'}H_{ey'}); \quad (10.49)$$

$$\frac{\partial M_{y'}}{\partial t} = -\gamma(M_{z'}H_{ex'} - M_{x'}H_{ez'}); \quad (10.50)$$

$$\frac{\partial M_{z'}}{\partial t} = -\gamma(M_{x'}H_{ey'} - M_{y'}H_{ex'}). \quad (10.51)$$

Подставляя поля (10.46)–(10.48) и упорядочивая по переменным, получаем:

$$\frac{\partial M_{x'}}{\partial t} = \gamma \{A_3M_{x'}M_{y'} + 2A_2M_{y'}M_{z'} + A_5M_{y'}\}; \quad (10.52)$$

$$\frac{\partial M_{y'}}{\partial t} = -\gamma \{A_3M_{x'}^2 - A_3M_{z'}^2 + 2(A_2 - A_1)M_{x'}M_{z'} + A_5M_{x'} - A_4M_{z'}\} \quad (10.53)$$

$$\frac{\partial M_{z'}}{\partial t} = -\gamma \{2A_1M_{x'}M_{y'} + A_3M_{y'}M_{z'} + A_4M_{y'}\}. \quad (10.54)$$

Для линеаризации положим: $M_{x'} = m_{x'}$, $M_{y'} = m_{y'}$, $M_{z'} = M_0$, где $m_{x'} \ll M_0$, $m_{y'} \ll M_0$. Подставляя эти переменные в (10.52)–(10.54)

и оставляя члены только нулевого и первого порядков по $m_{x'}$ и $m_{y'}$, получаем:

$$\frac{\partial m_{x'}}{\partial t} = \gamma (2A_2 M_0 + A_5) m_{y'}; \quad (10.55)$$

$$\frac{\partial m_{y'}}{\partial t} = -\gamma \{ [2(A_2 - A_1) M_0 + A_5] m_{x'} - \underline{(A_3 M_0 + A_4) M_0} \}; \quad (10.56)$$

$$\frac{\partial m_{z'}}{\partial t} = -\gamma (A_3 M_0 + A_4) m_{y'}. \quad (10.57)$$

Из структуры выражений для A_3 (10.43) и A_4 (10.44) можно видеть, что подчеркнутое в (10.56) слагаемое равно нулю, то есть из трех уравнений (10.55)–(10.57) остаются только первые два:

$$\frac{\partial m_{x'}}{\partial t} = \gamma (2A_2 M_0 + A_5) m_{y'}; \quad (10.58)$$

$$\frac{\partial m_{y'}}{\partial t} = -\gamma [2(A_2 - A_1) M_0 + A_5] m_{x'}. \quad (10.59)$$

С помощью (10.41)–(10.45) найдем выражения в скобках:

$$2A_2 M_0 + A_5 = -H_a; \quad (10.60)$$

$$2(A_2 - A_1) M_0 + A_5 = -\frac{H_a^2 - H_0^2}{H_a}. \quad (10.61)$$

Подставляя эти выражения в (10.58)–(10.59), получаем:

$$\frac{\partial m_{x'}}{\partial t} = -\gamma H_a m_{y'}; \quad (10.62)$$

$$\frac{\partial m_{y'}}{\partial t} = \gamma \frac{H_a^2 - H_0^2}{H_a} m_{x'}. \quad (10.63)$$

При зависимости от времени вида $\exp(i\omega t)$ получаем:

$$i\omega m_{x'}^{(0)} + \gamma H_a m_{y'}^{(0)} = 0; \quad (10.64)$$

$$\gamma \frac{H_a^2 - H_0^2}{H_a} m_{x'}^{(0)} - i\omega m_{y'}^{(0)} = 0, \quad (10.65)$$

где $m_{x'}^{(0)}$ и $m_{y'}^{(0)}$ — амплитуды переменных компонент намагниченности.

Равенство нулю определителя этой системы дает резонансную частоту в виде

$$\omega_0 = \gamma \sqrt{H_a^2 - H_0^2}. \quad (10.66)$$

10.3.2. Приложенное поле больше поля анизотропии

Рассмотрим теперь в той же геометрии (рис. 10.2) случай, когда приложенное поле больше поля анизотропии.

В равновесном состоянии намагниченность направлена вдоль поля, то есть:

$$\mathbf{M}^{(0)} = \{0; 0; M_0\}. \quad (10.67)$$

Таким образом, все вычисления можно провести в системе координат, связанной с полем, то есть $Oxyz$.

Полная плотность энергии в этой системе имеет вид

$$U = -\frac{K}{M_0^2} M_x^2 - M_z H_0, \quad (10.68)$$

где первое слагаемое соответствует энергии анизотропии, а второе — энергии взаимодействия намагниченности с полем.

Дифференцируя выражение для плотности энергии (10.68), находим эффективные поля, с учетом которых полные уравнения движения в соответствии с (10.49)–(10.51) принимают вид:

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = -\gamma H_0 M_y; \quad (10.69)$$

$$\frac{\partial M_{y'}}{\partial t} = -\gamma \left(\frac{2K}{M_0^2} M_z - H_0 \right) M_x; \quad (10.70)$$

$$\frac{\partial M_{z'}}{\partial t} = \gamma \frac{2K}{M_0^2} M_x M_y. \quad (10.71)$$

Выполняя линеаризацию в предположении: $M_x = m_x$, $M_y = m_y$, $M_z = M_0$, получаем:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma H_0 m_y; \quad (10.72)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = \gamma (H_0 - H_a) m_x, \quad (10.73)$$

где поле анизотропии H_a определяется формулой (10.38).

При зависимости от времени вида $\exp(i\omega t)$ получаем:

$$i\omega m_x^{(0)} + \gamma H_0 m_y^{(0)} = 0; \quad (10.74)$$

$$\gamma (H_0 - H_a) m_x^{(0)} - i\omega m_y^{(0)} = 0, \quad (10.75)$$

где $m_x^{(0)}$ и $m_y^{(0)}$ — амплитуды переменных компонент намагниченности.

Равенство нулю определителя этой системы дает резонансную частоту в виде

$$\omega_0 = \gamma \sqrt{H_0 (H_0 - H_a)}. \quad (10.76)$$

10.3.3. Произвольное значение приложенного поля

Обобщая формулы (10.66) и (10.76) на произвольное значение приложенного поля, а также выполняя нормировку частоты ω_0 на γH_a и поля H_0 на H_a , получаем:

при $H_0 \leq H_a$

$$\frac{\omega_0}{\gamma H_a} = \sqrt{1 - \left(\frac{H_0}{H_a} \right)^2}; \quad (10.77)$$

при $H_0 \geq H_a$

$$\frac{\omega_0}{\gamma H_a} = \sqrt{\left(\frac{H_0}{H_a} \right) \left(\frac{H_0}{H_a} - 1 \right)}. \quad (10.78)$$

Соответствующие этим формулам зависимости иллюстрируются рис. 10.3 [3, рис. 6.6]. Кривые 1 и 2 построены по формулам (10.77)

и (10.78), кривая 3 соответствует линейной зависимости частоты от поля в отсутствие анизотропии, кривая 4 — той же зависимости, сдвинутой вниз на нормированную величину 0,5. Врезка фактически повторяет зависимость поперечной компоненты намагниченности от поля при ориентационном переходе, показанную на рис. 9.2, б.

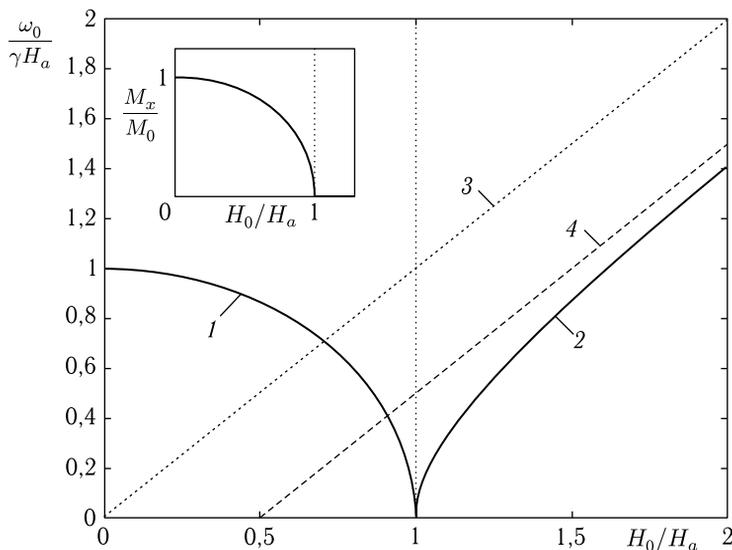


Рис. 10.3. Зависимость резонансной частоты ω_0 от поля H_0 при ориентационном переходе. На врезке — зависимость компоненты намагниченности M_x от поля H_0 при таком же переходе. Все единицы — нормированные. Кривые соответствуют следующим зависимостям: 1 — $\omega_0(H_0)$ при $H_0 \leq H_a$; 2 — $\omega_0(H_0)$ при $H_0 \geq H_a$; 3 — $\omega_0 = \gamma H_0$; 4 — $\omega_0 = \gamma H_0 - 1/2$

Из рисунка видно, что по мере увеличения поля от нуля частота резонанса уменьшается, а при поле, равном полю анизотропии, падает до нуля (кривая 1). Из врезки видно, что этот момент как раз соответствует окончанию ориентационного перехода, то есть выстраиванию намагниченности точно вдоль поля. Обращение в нуль частоты в этой точке соответствует «размягчению» системы, то есть состоянию «мягкой моды» [198, 200–205]. При поле, большем поля анизотропии, намагниченность своего положения не меняет, но частота увеличивается за счет увеличения поля H_0 . Зависимость частоты от поля (кривая 2) по мере его увеличения стремится к линейной пропорциональности самому полю (кривая 4), однако за счет присутствия поля анизотропии H_a проходит ниже таковой, соответствующей γH_0 (кривая 4), на величину, равную 0,5 нормированных единиц.

Такой сдвиг асимптоты 4 кривой 2 вниз относительно кривой 3 сохраняется вплоть до стремления H_0 к бесконечности. Причину

постоянства величины сдвига можно объяснить, если найти асимптоту формулы (10.78) при стремлении H_0 к бесконечности. Процедура нахождения такой асимптоты путем раскрытия получающейся неопределенности с помощью правила Лопиталья [414, 455], приведена в [3, разд. 6.3.5]. Результатом является как раз наблюдаемый сдвиг на величину $1/2$ [3, разд. 6.3.5, формула (6.154)].

10.4. Вынужденный ферромагнитный резонанс при ориентационном переходе

В предыдущих разделах рассмотрен свободный ферромагнитный резонанс в условиях ориентационного перехода. Была получена резонансная частота и исследована ее зависимость от приложенного поля, величина которого может быть как ниже, так и выше поля анизотропии. Обратимся теперь к рассмотрению вынужденных колебаний намагниченности в той же ситуации, следуя [3, разд. 6.4]. Главной целью такого рассмотрения будет получение тензора восприимчивости и его зависимости от поля.

Геометрия задачи показана на рис. 10.4 [3, разд. 6.4.1, рис. 6.7]. Отличие от геометрии, представленной на рис. 10.2, состоит в добавлении переменного поля \mathbf{h} , ориентация которого относительно постоянного поля предполагается произвольной.

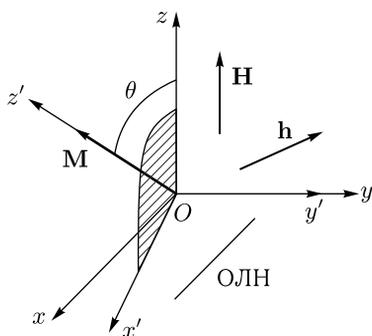


Рис. 10.4. Геометрия задачи

Среду будем считать безграничной, обладающей одноосной анизотропией, причем поле приложено по нормали к этой оси. Будем рассматривать две системы координат — связанную с полем $Oxyz$ и связанную с намагниченностью $Ox'y'z'$. Ось Oz первой системы совпадает с направлением поля, ось Oz' второй совпадает с равновесным направлением вектора намагниченности. Плоскости Oxz и $Ox'z'$ той и другой систем совпадают друг с другом. Оси Oy и Oy' также совпадают.

Поскольку тензор восприимчивости можно полагать жестко связанным с равновесным вектором намагниченности (так как прецессия будет рассматриваться именно в этой системе), то зададим переменное поле сразу в виде разложения по осям системы $Ox'y'z'$:

$$\mathbf{h} = \{h_{x'}, h_{y'}, h_{z'}\}. \quad (10.79)$$

С другой стороны, нахождение тензора восприимчивости является подготовительным этапом к решению задачи о распространении магнитостатических волн в касательно намагниченной пластине с нормальной одноосной анизотропией. Поскольку эта задача будет решаться в системе, связанной с полем, то полученный в системе $Ox'y'z'$ тензор восприимчивости затем надо будет преобразовать в систему $Oxyz$.

Таким образом, полная задача будет решаться в два этапа:

1) рассмотрение вынужденных колебаний в системе, связанной с намагниченностью, линеаризация задачи и получение тензора восприимчивости в этой системе;

2) преобразование полученного тензора восприимчивости к системе, связанной с полем.

Как и ранее (раздел 10.3), рассмотрение проведем по отдельности для случаев приложенного поля меньшего и большего поля анизотропии.

10.4.1. Приложенное поле меньше поля анизотропии

Рассмотрим прежде всего случай, когда поле недостаточно для полного поворота вектора намагниченности к его направлению. В разделе 9.1 показано, что в этом случае вектор намагниченности претерпевает ориентационный переход от направления, определяемого анизотропией среды, к направлению поля. Получим сначала тензор восприимчивости в системе, связанной с намагниченностью, а затем преобразуем этот тензор к системе, связанной с полем.

ВОСПРИИМЧИВОСТЬ В СИСТЕМЕ, СВЯЗАННОЙ С НАМАГНИЧЕННОСТЬЮ

Преобразуя поле подобно вектору намагниченности (10.23) с помощью матрицы (10.25), учетом (10.79), находим поле в системе $Ox'y'z'$:

$$H_{x'} = -H_0 \sin \theta + h_{x'}; \quad (10.80)$$

$$H_{y'} = h_{y'}; \quad (10.81)$$

$$H_{z'} = H_0 \cos \theta + h_{z'}. \quad (10.82)$$

Полная плотность энергии U равна сумме плотностей энергии анизотропии и энергии взаимодействия намагниченности с полем (10.26).

В системе $Ox'y'z'$, подобно (10.27), полная плотность энергии принимает вид

$$U = -\frac{K}{M_0^2} \cos^2 \theta M_{x'}^2 - \frac{K}{M_0^2} \sin^2 \theta M_{z'}^2 - \frac{2K}{M_0^2} \sin \theta \cos \theta M_{x'} M_{z'} + \\ + (H_0 \sin \theta - h_{x'}) M_{x'} - h_{y'} M_{y'} + (-H_0 \cos \theta - h_{z'}) M_{z'}. \quad (10.83)$$

Вводя обозначения, аналогичные (10.28)–(10.32), приводим полную плотность энергии к виду

$$U = A_1 M_{x'}^2 + A_2 M_{z'}^2 + A_3 M_{x'} M_{z'} + \\ + (A_4 - h_{x'}) M_{x'} - h_{y'} M_{y'} + (A_5 - h_{z'}) M_{z'}. \quad (10.84)$$

Дифференцируя это выражение по компонентам намагниченности (с обратным знаком), находим эффективные поля:

$$H_{ex'} = -[2A_1 M_{x'} + A_3 M_{z'} + (A_4 - h_{x'})]; \quad (10.85)$$

$$H_{ey'} = h_{y'}; \quad (10.86)$$

$$H_{ez'} = -[A_3 M_{x'} + 2A_2 M_{z'} + (A_5 - h_{z'})]. \quad (10.87)$$

Уравнения движения намагниченности, получаемые из раскрытия векторного произведения в уравнении Ландау–Лифшица (1.5) в системе $Ox'y'z'$, имеют вид (10.49)–(10.51). Подставляя в эти уравнения поля (10.85)–(10.87) и упорядочивая по переменным, получаем:

$$\frac{\partial M_{x'}}{\partial t} = \gamma \{ A_3 M_{x'} M_{y'} + 2A_2 M_{y'} M_{z'} + (A_5 - h_{z'}) M_{y'} + h_{y'} M_{z'} \}; \quad (10.88)$$

$$\frac{\partial M_{y'}}{\partial t} = -\gamma \{ A_3 M_{x'}^2 - A_3 M_{z'}^2 + 2(A_2 - A_1) M_{x'} M_{z'} + \\ + (A_5 - h_{z'}) M_{x'} - (A_4 - h_{x'}) M_{z'} \}; \quad (10.89)$$

$$\frac{\partial M_{z'}}{\partial t} = -\gamma \{ 2A_1 M_{x'} M_{y'} + A_3 M_{y'} M_{z'} + h_{y'} M_{x'} + (A_4 - h_{x'}) M_{y'} \}. \quad (10.90)$$

Для линеаризации положим: $M_{x'} = m_{x'}$, $M_{y'} = m_{y'}$, $M_{z'} = M_0$, где $m_{x'} \ll M_0$, $m_{y'} \ll M_0$. Также будем считать возбуждение малым, то есть $h_{x'} \sim h_{y'} \sim h_{z'} \ll H_0$, причем $H_0 \sim M_0$, то есть слагаемые вида $m_i m_k$, а также $h_j m_l$ имеют второй порядок малости, так что при линеаризации отбрасываются. Подставляя такие компоненты намагниченности в (10.88)–(10.90), учитывая, что, согласно (10.36), в равновесном состоянии $A_3 M_0 + A_4 = 0$, и оставляя члены только нулевого и первого порядков по $m_{x'}$ и $m_{y'}$, получаем:

$$\frac{\partial m_{x'}}{\partial t} = \gamma(2A_2 M_0 + A_5) m_{y'} + \gamma M_0 h_{y'}; \quad (10.91)$$

$$\frac{\partial m_{y'}}{\partial t} = -\gamma \{ [2(A_2 - A_1) M_0 + A_5] m_{x'} - \gamma M_0 h_{x'} \}; \quad (10.92)$$

$$\frac{\partial m_{z'}}{\partial t} = 0. \quad (10.93)$$

Последнее из этих уравнений соответствует условию $M_{z'} = M_0$, то есть удовлетворяется тождественно, так что далее не рассматривается.

Пользуясь (10.28)–(10.32), преобразуем входящие в (10.91)–(10.92) выражения в скобках:

$$2A_2M_0 + A_5 = -H_a; \quad (10.94)$$

$$2(A_2 - A_1)M_0 + A_5 = -\frac{H_a^2 - H_0^2}{H_a}. \quad (10.95)$$

Подставляя эти выражения в (10.91)–(10.92), получаем систему уравнений движения для малых компонент намагниченности в виде:

$$\frac{\partial m_{x'}}{\partial t} = -\gamma H_a m_{y'} + \gamma M_0 h_{y'}; \quad (10.96)$$

$$\frac{\partial m_{y'}}{\partial t} = \gamma \frac{H_a^2 - H_0^2}{H_a} m_{x'} - \gamma M_0 h_{x'}. \quad (10.97)$$

При зависимости от времени вида $\exp(i\omega t)$ получаем:

$$i\omega m_{x'}^{(0)} + \gamma H_a m_{y'}^{(0)} = \gamma M_0 h_{y'}^{(0)}; \quad (10.98)$$

$$\gamma \frac{H_a^2 - H_0^2}{H_a} m_{x'}^{(0)} - i\omega m_{y'}^{(0)} = \gamma M_0 h_{x'}^{(0)}, \quad (10.99)$$

где $m_{x'}^{(0)}$ и $m_{y'}^{(0)}$ — амплитуды переменных компонент намагниченности.

Как и для уравнений (10.64)–(10.65), равенство нулю определителя этой системы дает резонансную частоту в виде

$$\omega_0 = \gamma \sqrt{H_a^2 - H_0^2}. \quad (10.100)$$

Для упрощения дальнейшей записи формул введем вспомогательные обозначения:

$$B_1 = H_a; \quad (10.101)$$

$$B_2 = \frac{H_a^2 - H_0^2}{H_a}. \quad (10.102)$$

Опустим также далее верхний индекс «0», не забывая однако, что величины, обозначаемые далее через $m_{x'}$, $m_{y'}$, $h_{x'}$, $h_{y'}$ являются амплитудами синусоидальных переменных и не зависят от времени.

В результате получаем уравнения движения в виде:

$$i\omega m_{x'} + \gamma B_1 m_{y'} = \gamma M_0 h_{y'}; \quad (10.103)$$

$$\gamma B_2 m_{x'} - i\omega m_{y'} = \gamma M_0 h_{x'}. \quad (10.104)$$

Решая эту систему, находим выражения $m_{x'}$, $m_{y'}$ через $h_{x'}$, $h_{y'}$:

$$m_{x'} = G_1 h_{x'} + H h_{y'}; \quad (10.105)$$

$$m_{y'} = -H h_{x'} + G_2 h_{y'}, \quad (10.106)$$

где:

$$G_1 = \frac{\gamma^2 B_1 M_0}{D_0} = \frac{\gamma^2 H_a M_0}{\gamma^2 (H_a^2 - H_0^2) - \omega^2}; \quad (10.107)$$

$$G_2 = \frac{\gamma^2 B_2 M_0}{D_0} = \frac{\gamma^2 (H_a^2 - H_0^2) M_0}{H_a [\gamma^2 (H_a^2 - H_0^2) - \omega^2]}; \quad (10.108)$$

$$H = \frac{i\omega\gamma M_0}{D_0} = \frac{i\omega\gamma M_0}{\gamma^2 (H_a^2 - H_0^2) - \omega^2}, \quad (10.109)$$

$$D_0 = \gamma^2 B_1 B_2 - \omega^2 = \gamma^2 (H_a^2 - H_0^2) - \omega^2. \quad (10.110)$$

Таким образом, получено решение задачи о вынужденных колебаниях намагниченности в системе, связанной с намагниченностью.

Запишем это решение с помощью матриц:

$$\mathbf{m}' = \overleftrightarrow{\boldsymbol{\chi}'} \mathbf{h}', \quad (10.111)$$

где $\boldsymbol{\chi}'$ — тензор восприимчивости, имеющий вид

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\chi}'} = \begin{pmatrix} G_1 & H & 0 \\ -H & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.112)$$

где G_1 , G_2 , H определяются формулами (10.107)–(10.109).

ВОСПРИИМЧИВОСТЬ В СИСТЕМЕ, СВЯЗАННОЙ С ПОЛЕМ

Итак, получен тензор восприимчивости в системе, связанной с намагниченностью (10.112), то есть первая часть поставленной задачи решена. Для разрешения второй части этот тензор надо преобразовать в систему, связанную с полем. Эту задачу можно решить двумя способами:

1) исходя из уравнений (10.105)–(10.106) последовательно преобразовать компоненты векторов намагниченности \mathbf{m}' и поля \mathbf{h}' в систему, связанную с полем, после чего из полученных уравнений найти тензор восприимчивости;

2) преобразовать тензор, полученный в системе, связанной с намагниченностью, к системе, связанной с полем, используя соответствующие матрицы поворота систем координат.

Оба эти способа приводят к одинаковым результатам, однако второй несколько проще и менее громоздок, поэтому рассмотрим преобразование именно вторым способом.

Итак, согласно (10.111) имеется соотношение

$$\mathbf{m}' = \overleftrightarrow{\chi}' \mathbf{h}', \quad (10.113)$$

которое надо привести к виду:

$$\mathbf{m} = \overleftrightarrow{\chi} \mathbf{h}. \quad (10.114)$$

В главе 9 для случая перехода от одной системы координат к другой рассмотрены правила преобразования векторов и тензоров (раздел 9.4). Рассмотрим, как эти правила можно применить к преобразованию получаемых здесь тензоров.

Пусть для преобразования векторов имеются матрицы \overleftrightarrow{A} и $\overleftrightarrow{A}^{-1}$ такие, что прямое преобразование имеет вид:

$$\mathbf{m} = \overleftrightarrow{A} \mathbf{m}'; \quad (10.115)$$

$$\mathbf{h} = \overleftrightarrow{A} \mathbf{h}', \quad (10.116)$$

а соответствующее ему обратное преобразование имеет вид:

$$\mathbf{m}' = \overleftrightarrow{A}^{-1} \mathbf{m}; \quad (10.117)$$

$$\mathbf{h}' = \overleftrightarrow{A}^{-1} \mathbf{h}. \quad (10.118)$$

Используя эти формулы в совокупности с (10.113), выполним цепочку последовательных преобразований:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \overleftrightarrow{A} \mathbf{m}' = \overleftrightarrow{A} (\overleftrightarrow{\chi}' \mathbf{h}') = \overleftrightarrow{A} \overleftrightarrow{\chi}' \mathbf{h}' = \overleftrightarrow{A} \overleftrightarrow{\chi}' (\overleftrightarrow{A}^{-1} \mathbf{h}) = \\ &= \overleftrightarrow{A} \overleftrightarrow{\chi}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{h} = (\overleftrightarrow{A} \overleftrightarrow{\chi}' \overleftrightarrow{A}^{-1}) \mathbf{h}'. \end{aligned} \quad (10.119)$$

Из сравнения первого и последнего членов этой цепочки с (10.114) получаем:

$$\overleftrightarrow{\chi} = \mathbf{A} \overleftrightarrow{\chi}' \overleftrightarrow{A}^{-1}. \quad (10.120)$$

Можно видеть, что по структуре эта формула совпадает с приведенной в разделе 9.4 формулой (9.41), то есть выполненные здесь преобразования являются частным случаем приведенных в разделе 9.4, так что и выполняются по тем же правилам (с точностью до фактического определения прямого и обратного преобразований).

Из сравнения рис. 10.4 с рис. 10.1 можно видеть, что присутствующая в обоих случаях система $Oxyz$ связана с полем, а система $Ox'y'z'$ связана с намагниченностью. Поэтому присутствующие в выражении (10.120) матрицы \overleftrightarrow{A} и $\overleftrightarrow{A}^{-1}$ тождественны матрицам \overleftrightarrow{A}_3

и \vec{A}_3^{-1} , описываемым формулами (10.24) и (10.25). Таким образом, для входящих в выражение (10.120) матриц \vec{A} и \vec{A}^{-1} получаем:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}; \quad (10.121)$$

$$\vec{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (10.122)$$

Здесь взаимная ориентация систем $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ определяется равновесным положением вектора намагниченности, то есть, согласно (10.39) и (10.40), угол θ связан с полями H_0 и H_A соотношениями:

$$\cos\theta = \frac{H_0}{H_a}; \quad (10.123)$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{H_a^2 - H_0^2}}{H_a}. \quad (10.124)$$

Подставляя в выражение (10.120) матрицы (10.121) и (10.122), а также тензор восприимчивости (10.112), после чего выполняя перемножение матриц справа налево, получаем тензор восприимчивости в системе связанной с полем в виде

$$\vec{\chi} = \begin{pmatrix} G_1 \cos^2\theta & H \cos\theta & -G_1 \sin\theta \cos\theta \\ -H \cos\theta & G_2 & H \sin\theta \\ -G_1 \sin\theta \cos\theta & -H \sin\theta & G_1 \sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad (10.125)$$

где величины G_1 , G_2 , H определяются соотношениями (10.107)–(10.109).

Итак, получен тензор восприимчивости в системе, связанной с полем, так что вектор намагниченности \mathbf{m} определяется через поле \mathbf{h} соотношением (10.114).

Выполним некоторые упрощения, для чего запишем тензор восприимчивости (10.125) в укороченных обозначениях:

$$\vec{\chi} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad (10.126)$$

где в соответствии с (10.107)–(10.109) с учетом (10.101)–(10.102), а также (10.123)–(10.124), имеют место соотношения:

$$A_{11} = G_1 \cos^2 \theta = \frac{\gamma^2 M_0 H_0^2}{H_a [\gamma^2 (H_a^2 - H_0^2) - \omega^2]}; \quad (10.127)$$

$$A_{12} = H \cos \theta = \frac{i\omega\gamma M_0 H_0}{H_a [\gamma^2 (H_a^2 - H_0^2) - \omega^2]}; \quad (10.128)$$

$$A_{13} = -G_1 \sin \theta \cos \theta = -\frac{\gamma^2 M_0 H_0 \sqrt{H_a^2 - H_0^2}}{H_a [\gamma^2 (H_a^2 - H_0^2) - \omega^2]}; \quad (10.129)$$

$$A_{22} = G_2 = \frac{\gamma^2 M_0 (H_a^2 - H_0^2)}{H_a [\gamma^2 (H_a^2 - H_0^2) - \omega^2]}; \quad (10.130)$$

$$A_{23} = H \sin \theta = \frac{i\omega\gamma M_0 \sqrt{H_a^2 - H_0^2}}{H_a [\gamma^2 (H_a^2 - H_0^2) - \omega^2]}; \quad (10.131)$$

$$A_{33} = G_1 \sin^2 \theta = \frac{\gamma^2 M_0 (H_a^2 - H_0^2)}{H_a [\gamma^2 (H_a^2 - H_0^2) - \omega^2]}. \quad (10.132)$$

При этом компоненты вектора намагниченности выражаются через компоненты поля с помощью тензора (10.126) следующим образом:

$$m_x = A_{11}h_x + A_{12}h_y + A_{13}h_z; \quad (10.133)$$

$$m_y = -A_{12}h_x + A_{22}h_y + A_{23}h_z; \quad (10.134)$$

$$m_z = A_{13}h_x - A_{23}h_y + A_{33}h_z. \quad (10.135)$$

Введем нормированные частоты:

$$\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}; \quad (10.136)$$

$$\Omega_H = \frac{H_0}{4\pi M_0}; \quad (10.137)$$

$$\Omega_A = \frac{H_a}{4\pi M_0}. \quad (10.138)$$

Разделив числители и знаменатели дробей, входящих в (10.107)–(10.109), на $(4\pi\gamma M_0)^2$ и вводя частоты (10.136)–(10.138), получаем:

$$G_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega_A}{(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2}; \quad (10.139)$$

$$G_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega_A^2 - \Omega_H^2}{\Omega_A [(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2]}; \quad (10.140)$$

$$H = \frac{i}{4\pi} \frac{\Omega}{(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2}. \quad (10.141)$$

С помощью этих обозначений, а также учитывая (10.123)–(10.124), выразим компоненты тензора (10.127)–(10.132) через нормированные частоты:

$$A_{11} = \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega_H^2}{\Omega_A \left[(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2 \right]}; \quad (10.142)$$

$$A_{12} = \frac{i}{4\pi} \frac{\Omega \Omega_H}{\Omega_A \left[(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2 \right]}; \quad (10.143)$$

$$A_{13} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\Omega_H \sqrt{\Omega_A^2 - \Omega_H^2}}{\Omega_A \left[(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2 \right]}; \quad (10.144)$$

$$A_{22} = \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega_A^2 - \Omega_H^2}{\Omega_A \left[(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2 \right]}; \quad (10.145)$$

$$A_{23} = \frac{i}{4\pi} \frac{\Omega \sqrt{\Omega_A^2 - \Omega_H^2}}{\Omega_A \left[(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2 \right]}; \quad (10.146)$$

$$A_{33} = \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega_A^2 - \Omega_H^2}{\Omega_A \left[(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2 \right]}. \quad (10.147)$$

Из такой записи можно видеть, что

$$A_{22} = A_{33}, \quad (10.148)$$

то есть независимыми в тензоре (10.126) являются не шесть, а всего пять компонент, так что его можно записать в несколько более простом виде:

$$\vec{\chi} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{22} \end{pmatrix}. \quad (10.149)$$

Замечание. Примечательно отметить, что полученный тензор, хотя и обладает определенными свойствами симметрии, но не является ни полностью симметричным, ни полностью антисимметричным. Так, компоненты χ_{12} и χ_{21} , а также χ_{23} и χ_{32} , симметричные относительно главной диагонали, имеют противоположные знаки, тогда как для членов χ_{13} и χ_{31} , симметричных относительно той же диагонали, знаки совпадают. Этим свойством полученный тензор существенно отличается от классического тензора для магнетика в насыщенном состоянии, который является антисимметричным [15–17]. Можно полагать, что такие свойства симметрии тензора, определяющего восприимчивость магнетика в условиях ориентационного перехода, заметным образом должны сказываться на дисперсии и свойствах невзаимности для различных волновых процессов в ферритах.

10.4.2. Приложенное поле больше поля анизотропии

Рассмотрим теперь случай, когда приложенное поле больше поля анизотропии. Как показано в разделе 10.3.3, в этом случае вектор намагниченности ориентирован точно вдоль поля, так что задачу можно полностью решить в системе, связанной с полем.

Для рассмотрения вынужденных колебаний будем считать, что приложенное поле имеет вид

$$\mathbf{H} = \{h_x, h_y, H_0\}, \quad (10.150)$$

где $h_x \sim h_y \ll H_0$.

Плотность энергии имеет вид

$$U = -\frac{K}{M_0^2}M_x^2 - h_xM_x - h_yM_y - H_0M_z. \quad (10.151)$$

Дифференцируя это выражение, получаем эффективные поля в виде:

$$H_{ex} = \frac{2K}{M_0^2}M_x + h_x; \quad (10.152)$$

$$H_{ey} = h_y; \quad (10.153)$$

$$H_{ez} = H_0. \quad (10.154)$$

Уравнения движения намагниченности, получаемые из раскрытия векторного произведения в уравнении Ландау-Лифшица (1.5) в системе $Oxyz$, имеют вид:

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = -\gamma(M_yH_{ez} - M_zH_{ey}); \quad (10.155)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = -\gamma(M_zH_{ex} - M_xH_{ez}); \quad (10.156)$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial t} = -\gamma(M_xH_{ey} - M_yH_{ex}). \quad (10.157)$$

Подставляя эффективные поля (10.152)–(10.154), получаем уравнения движения в виде:

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = -\gamma H_0 M_y + \gamma h_y M_z; \quad (10.158)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = -\gamma \left(\frac{2K}{M_0^2} M_z - H_0 \right) M_x - \gamma h_x M_z; \quad (10.159)$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial t} = -\gamma \left\{ h_y M_x - \left(\frac{2K}{M_0^2} M_x + h_x \right) M_y \right\}. \quad (10.160)$$

Выполняя линеаризацию в предположении: $M_x = m_x$, $M_y = m_y$, $M_z = M_0$, а также учитывая, что $h_x \sim h_y \ll H_0$, то есть оставляя члены только первого порядка по m_x , m_y , h_x , h_y , получаем:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma H_0 m_y + \gamma M_0 h_y; \quad (10.161)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = \gamma (H_0 - H_a) m_x - \gamma M_0 h_x, \quad (10.162)$$

где для H_a использовано обозначение (10.38).

Третье уравнение здесь не выписано, так как оно удовлетворяется тождественно.

При зависимости от времени вида $\exp(i\omega t)$ получаем:

$$i\omega m_x^{(0)} + \gamma H_0 m_y^{(0)} = \gamma M_0 h_y^{(0)}; \quad (10.163)$$

$$\gamma(H_0 - H_a)m_x^{(0)} - i\omega m_y^{(0)} = \gamma M_0 h_x^{(0)}, \quad (10.164)$$

где $m_x^{(0)}$ и $m_y^{(0)}$ — амплитуды переменных компонент намагниченности.

Решая эти уравнения, получаем:

$$m_x^{(0)} = P_1 h_x^{(0)} + Q h_y^{(0)}; \quad (10.165)$$

$$m_y^{(0)} = Q h_x^{(0)} + P_2 h_y^{(0)}, \quad (10.166)$$

где введены обозначения:

$$P_1 = \frac{\gamma^2 M_0 H_0}{\gamma^2 H_0 (H_0 - H_a) - \omega^2}; \quad (10.167)$$

$$P_2 = \frac{\gamma^2 M_0 (H_0 - H_a)}{\gamma^2 H_0 (H_0 - H_a) - \omega^2}; \quad (10.168)$$

$$Q = \frac{i\omega\gamma M_0}{\gamma^2 H_0 (H_0 - H_a) - \omega^2}. \quad (10.169)$$

Таким образом, тензор восприимчивости имеет вид

$$\vec{\chi} = \begin{pmatrix} P_1 & Q & 0 \\ -Q & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.170)$$

Записывая компоненты тензора через нормированные частоты (10.136)–(10.138), получаем:

$$P_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega_H}{\Omega_H (\Omega_H - \Omega_A) - \Omega^2}; \quad (10.171)$$

$$P_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega_H - \Omega_A}{\Omega_H (\Omega_H - \Omega_A) - \Omega^2}; \quad (10.172)$$

$$Q = \frac{i}{4\pi} \frac{\Omega}{\Omega_H (\Omega_H - \Omega_A) - \Omega^2}. \quad (10.173)$$

Заметим, что в отличие от (10.149) этот тензор восприимчивости имеет чисто антисимметричный вид, что согласуется с классическим тензором для прецессии намагниченности в насыщенном состоянии [15–17].

Выводы по главе 10

Данная глава посвящена рассмотрению динамической магнитной восприимчивости при ориентационном переходе при касательном намагничивании пластины с нормальной одноосной анизотропией.

Приведены некоторые виды плотности энергии анизотропии и размагничивания, важные для анализа ориентационных переходов. Найдены резонансные частоты ферромагнитного резонанса и получен тензор динамической восприимчивости в условиях ориентационного перехода.

Основные результаты, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрены некоторые виды магнитной анизотропии, важные для рассмотрения ориентационного перехода. Приведены два варианта записи плотности энергии одноосной магнитной анизотропии, отражающие, в зависимости от знака константы, анизотропию типа «легкая ось» или «легкая плоскость». Приведены два вида записи плотности энергии кубической анизотропии, переходящие друг в друга при учете сохранения длины вектора намагниченности. Отмечено, что оба вида записи эквивалентны с точностью до постоянной добавки. Приведены выражения для плотности энергии поля размагничивания для эллипсоида, а также плотности энергии анизотропии внешнего поля, представляющего собой плотность энергии взаимодействия этого поля с вектором намагниченности.

2. Рассмотрен ферромагнитный резонанс при простом ориентационном переходе. Определена равновесная ориентация вектора намагниченности при изменении поля, перпендикулярного к ОЛН, в интервале полей, меньших поля анизотропии. Получена матрица преобразования, соответствующая переходу от лабораторной системы координат к системе, связанной с намагниченностью. В такой системе координат получены уравнения движения намагниченности и выполнена их линеаризация. Получена резонансная частота свободной прецессии и показано, что она определяется квадратным корнем из разности между квадратами поля анизотропии и внешнего поля.

3. Рассмотрены условия резонанса при ориентации внешнего поля перпендикулярно ОЛН при внешнем поле, большем поля анизотропии. Получены линеаризованные уравнения движения и найдена резонансная частота свободной прецессии. Показано, что в этом случае она определяется квадратным корнем из произведения внешнего поля на разность между внешним полем и полем анизотропии.

4. Полученные два решения обобщены на полный интервал изменения поля от нуля до бесконечности. Показано, что по мере увеличения поля, при его значении меньшем поля анизотропии, резонансная частота понижается вплоть до нуля в точке фазового перехода, после чего, в поле, большем поля анизотропии, увеличивается по закону, асимптотически стремящемуся к линейному возрастанию. Отмечен постоянный, не зависящий от величины поля сдвиг асимптоты вниз по сравнению с линейной зависимостью, соответствующей прямой пропорциональности резонансной частоты величине поля.

5. Рассмотрена вынужденная прецессия намагниченности в условиях ориентационного перехода. Представлена формулировка задачи о получении тензора динамической восприимчивости для ферромагнитного

резонанса в пластине с нормальной одноосной анизотропией, намагничиваемой полем, перпендикулярным оси анизотропии. Показано, что решение такой задачи для случая внешнего поля, меньшего поля анизотропии, требует последовательной реализации двух этапов. Первый этап состоит в рассмотрении вынужденных колебаний в системе, связанной с намагниченностью, линеаризации уравнений движения и получении тензора восприимчивости в этой системе. Второй этап состоит в преобразовании полученного тензора восприимчивости к лабораторной системе координат, связанной с полем. В рамках первого этапа получены линеаризованные уравнения вынужденной прецессии намагниченности, из решения которых найден тензор динамической восприимчивости, имеющий антисимметричный характер. В рамках второго этапа выполнено преобразование полученного тензора к лабораторной системе координат. Приведены два возможных способа выполнения такого преобразования, показана их эквивалентность и найдены матрицы прямого и обратного преобразований.

6. Показано, что полученный тензор восприимчивости в системе, связанной с полем, не является полностью ни симметричным, ни антисимметричным. Так, компоненты, расположенные в непосредственной близости от главной диагонали матрицы тензора, являются антисимметричными, а более удаленные от той же диагонали — симметричными. Высказано предположение о важности специфической симметрии полученного тензора в формировании дисперсии и характеристик невязимости волновых процессов в ферритах.

7. Рассмотрено решение той же задачи для случая внешнего поля, большего поля анизотропии. Показано, что здесь, благодаря ориентации вектора намагниченности точно вдоль направления поля, задача может быть полностью решена в один этап в системе, связанной с полем. Получены линеаризованные уравнения движения для вынужденной прецессии намагниченности. Из решения уравнений получен тензор динамической восприимчивости, показано, что он является полностью антисимметричным. Отмечен резонансный характер компонент тензора, отличающийся от классического лишь наличием разности поля анизотропии и внешнего поля.

Глава 11

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ ПРИ РАБОТЕ СО СТАТИКОЙ И ДИНАМИКОЙ ДОМЕННЫХ ГРАНИЦ

Данная глава посвящена некоторым вопросам, касающимся статики и динамики локального изменения ориентации намагниченности в магнитной среде. Важным примером статического локального изменения ориентации намагниченности является доменная граница. При движении такой границы соответствующая ей неоднородность намагниченности также перемещается. Гиротропные свойства среды приводят к возможности интерпретации такого перемещения в виде локализованной волны солитонного типа, описываемой волновой переменной Даламбера. Таким образом, статическая доменная граница, движущаяся доменная граница и магнитный солитон представляют собой явления родственного характера, допускающие сходное математическое описание.

Указание на такое сходство аппарата встречается во множестве литературных источников, например в [327, стр. 6064; 383, стр. 27, 144; 387, стр. 123; 386, стр. 209; 470, стр. 473]. Однако нигде, по крайней мере в известной авторами настоящей монографии литературе, достаточно подробным образом такое сходство не рассматривается.

По этой причине авторы сочли возможным включить в настоящую монографию данную главу, целью которой является дать начинающему читателю возможность «с чистого листа», доступным образом ознакомиться с некоторыми элементарными математическими приемами, используемыми при решении подобных задач. С целью возможности самостоятельного воспроизведения выкладки приведены с максимальной подробностью и снабжены многочисленными ссылками. Основной материал главы опирается на классические источники [12, 16, 17, 233–236, 383, 384, 386]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

11.1. Стационарное распределение намагниченности в доменной границе

Рассмотрим стационарное распределение намагниченности в доменной границе при одноосной анизотропии в отсутствие внешнего поля.

11.1.1. Общая геометрия распределения намагниченности в доменной границе

Общая геометрия распределения намагниченности в доменной границе иллюстрируется рис. 11.1.

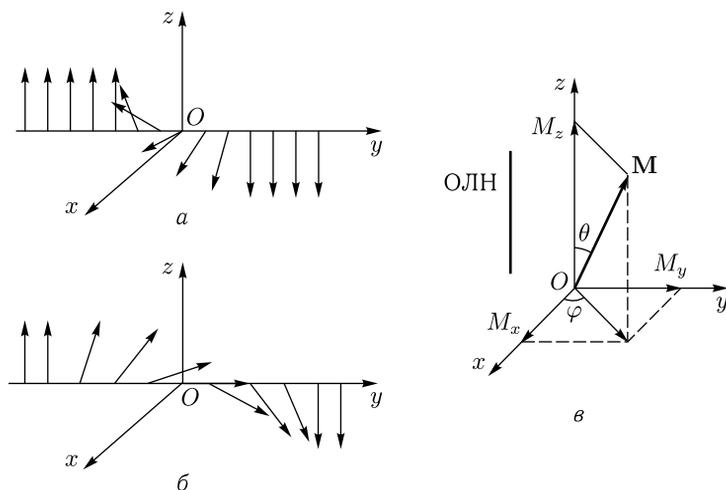


Рис. 11.1. Ориентация вектора намагниченности в блоховской (а) и неелевской (б) доменных границах, а также используемые при их расчете системы координат (в). ОЛН — ось анизотропии (ось легкого намагничивания)

Рассматривается магнитная среда, обладающая одноосной анизотропией (ОЛН — ось легкого намагничивания). Задача решается в декартовой системе координат $Oxyz$, ось Oz которой направлена вдоль оси анизотропии. Наряду с декартовой рассматривается также сферическая система координат $Or\theta\varphi$, полярная ось которой совпадает с осью Oz , от этой оси отсчитывается полярный угол θ . Азимутальная плоскость системы совпадает с плоскостью Oxy , а азимутальный угол φ отсчитывается от оси Ox в положительном направлении (то есть от оси Ox к оси Oy и далее по кругу).

Предположим, что доменная граница является плоской, причем плоскость границы параллельна координатной плоскости Oxz , а нормаль к плоскости границы, соответственно, ориентирована вдоль оси Oy . В стационарном состоянии вне границы вектор намагниченности направлен вдоль оси анизотропии, то есть вдоль координатной оси Oz . По одну сторону от границы вектор ориентирован в положительном направлении оси Oz , по другую — в отрицательном. Внутри границы вектор намагниченности поворачивается от одного из этих направлений до другого, причем этот поворот может происходить как в плоскости Oxz , так и в плоскости Oyz . В первом случае граница является «блоховской», во втором — «неелевской». Азимутальный угол вектора

намагниченности φ в блоховской границе равен нулю, а в неелевской составляет $\pm\pi/2$.

11.1.2. Плотность энергии и уравнения стационарного состояния

Рассмотрим сначала наиболее общий случай, то есть будем полагать, что обе сферические координаты θ и φ вдоль оси Oy могут меняться.

Будем полагать, что полная плотность энергии имеет вид (разд. 5.2):

$$U = A \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 \right] + K \sin^2\theta + 2\pi M_0^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi, \quad (11.1)$$

где A — константа неоднородного обменного взаимодействия, связанная с константой q соотношением (5.61)

$$A = qM_0^2/2, \quad (11.2)$$

K — константа одноосной анизотропии ($K > 0$).

Структура этого выражения следующая. Группа слагаемых в квадратных скобках соответствует плотности энергии неоднородного обменного взаимодействия в предположении, что граница движется как целое вдоль одного направления, в качестве которого выбрана ось Oy (это слагаемое соответствует формуле (5.77)). Второе слагаемое соответствует одноосной анизотропии, ось которой параллельна координатной оси Oz , подобно формуле (5.49) с учетом приведенного в [3, разд. 4.2.2] замечания о знаке константы (в формуле (5.49), как и в [3, форм. (4.51)] константа при легкоосной анизотропии положена отрицательной, здесь же она положительна). Третье слагаемое соответствует плотности энергии поля размагничивания плоской границы, параллельной координатной плоскости Oxz (подобно формуле (5.39)).

Условие стационарного состояния определяется минимумом плотности энергии (11.1) в пределах изменения координаты y по обе стороны от границы на достаточно далеких расстояниях, где намагниченность уже можно считать ориентированной в одном направлении. То есть требуется найти минимум интеграла

$$U[\theta(y), \varphi(y)] = \int_{y_1}^{y_2} U \left[y, \theta, \varphi, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right] dy. \quad (11.3)$$

Это — задача вариационного исчисления, в случае одной переменной состоящая в поиске минимума функционала [415, стр. 292]:

$$v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (11.4)$$

где штрих означает дифференцирование по x . Нахождение минимума сводится к решению уравнения Эйлера [415, стр. 297], имеющего вид

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0, \quad (11.5)$$

где индекс внизу означает дифференцирование по соответствующей переменной.

Запишем уравнение (11.5) в более развернутом виде:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)} \right] = 0. \quad (11.6)$$

Введем замену обозначений, соответствующих плотности энергии (11.1) и функционалу (11.3)

$$F \rightarrow U, \quad y \rightarrow \varphi, \quad x \rightarrow y. \quad (11.7)$$

Подставляя эти обозначения в (11.6), получаем уравнение для φ :

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{d}{dy} \left[\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)} \right] = 0. \quad (11.8)$$

Аналогичное уравнение получаем для θ :

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{d}{dy} \left[\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)} \right] = 0. \quad (11.9)$$

Совокупность уравнений (11.8) и (11.9) обеспечивает нахождение минимума функционала (11.3) от плотности энергии (11.1).

При этом из геометрии задачи можно видеть, что вдали от границы полярный угол θ и его производная $\partial\theta/\partial y$ стремятся к нулю. То же касается азимутального угла φ и его производной $\partial\varphi/\partial y$. Таким образом, даже при пределах интегрирования y_1 и y_2 стремящихся к бесконечности по ту и другую стороны от границы, все равно функционал (11.3) отражает лишь энергию только доменной границы, где ориентация вектора намагниченности меняется заметным образом.

Замечание. Заметим, что вычисление функционала вида (11.3), характеризующего энергию доменной границы, является традиционным приемом для самых разнообразных конфигураций границы, от простой блоховской стенки без учета размагничивания [12, стр. 299] до 180 и 90-градусных границ [12, стр. 319, 327], в том числе с учетом магнитоупругого взаимодействия [12, стр. 332].

Итак, пользуясь выражением (11.1), находим производные:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 4M_0^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi; \quad (11.10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)} = 2A \sin^2 \theta \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad (11.11)$$

$$\frac{d}{dy} \left[\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)} \right] = 4A \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + 2A \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad (11.12)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 2A \sin \theta \cos \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + 2K \sin \theta \cos \theta + 4\pi M_0^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi; \quad (11.13)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)} = 2A \frac{\partial \theta}{\partial y}; \quad (11.14)$$

$$\frac{d}{dy} \left[\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)} \right] = 2A \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \quad (11.15)$$

Подставим эти производные в уравнения (11.8) и (11.9) и заменим частные производные на полные (так как θ и φ зависят только от y). В результате получаем:

$$2\pi M_0^2 \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi - A \left(2 \cos \theta \frac{d\theta}{dy} \frac{d\varphi}{dy} + \sin \theta \frac{d^2 \varphi}{dy^2} \right) = 0; \quad (11.16)$$

$$K \sin \theta \cos \theta - A \frac{d^2 \theta}{dy^2} + A \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + 2\pi M_0^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi = 0. \quad (11.17)$$

Разделим уравнение (11.16) на A , уравнение (11.17) на K и изменим порядок слагаемых:

$$\sin \theta \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + 2 \cos \theta \frac{d\theta}{dy} \frac{d\varphi}{dy} - \frac{2\pi M_0^2}{A} \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi = 0; \quad (11.18)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dy^2} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 - \frac{K}{A} \sin \theta \cos \theta - \frac{2\pi M_0^2}{A} \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi = 0. \quad (11.19)$$

Введем параметр, характеризующий ширину доменной границы [12, стр. 300; 235, стр. 100]:

$$\Delta_0 = \sqrt{\frac{A}{K}}. \quad (11.20)$$

Введем также еще один вспомогательный параметр:

$$m = \frac{2\pi M_0^2}{K}. \quad (11.21)$$

Можно видеть, что

$$m = \frac{4\pi M_0}{2K/M_0} = \frac{H_p}{H_a} = \frac{1}{Q}, \quad (11.22)$$

где введены традиционно принятые обозначения:

для поля размагничивания (подобно (5.36) в общем случае))

$$H_p = 4\pi M_0; \quad (11.23)$$

для поля анизотропии (9.13), (10.38)

$$H_a = 2K/M_0; \quad (11.24)$$

для фактора качества материала [235, стр. 11]

$$Q = H_a/H_p. \quad (11.25)$$

Таким образом, физический смысл введения параметра m состоит в том, что он отражает соотношение между полями размагничивания и анизотропии, а также обратен параметру качества материала (то есть для ЦМД он всегда должен быть меньше единицы, причем, чем он меньше, тем материал для устройств на ЦМД более пригоден).

С помощью введенных параметров приведем уравнения (11.18) и (11.19) к виду:

$$\sin \theta \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + 2 \cos \theta \frac{d\theta}{dy} \frac{d\varphi}{dy} - \frac{m}{\Delta_0^2} \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi = 0; \quad (11.26)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dy^2} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 - \frac{1}{\Delta_0^2} \sin \theta \cos \theta - \frac{m}{\Delta_0^2} \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi = 0. \quad (11.27)$$

Введем нормированную координатную переменную

$$g = y/\Delta_0. \quad (11.28)$$

Правило дифференцирования произвольной функции F по координате y имеет вид [454, 455]:

$$\frac{d^n F}{dy^n} = \frac{1}{\Delta_0^n} \frac{d^n F}{dg^n}. \quad (11.29)$$

В результате такой замены координатной переменной уравнения (11.26) и (11.27) принимают вид:

$$\sin \theta \frac{d^2 \varphi}{dg^2} + 2 \cos \theta \frac{d\theta}{dg} \frac{d\varphi}{dg} - m \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi = 0; \quad (11.30)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dg^2} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{dg} \right)^2 - \sin \theta \cos \theta - m \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi = 0. \quad (11.31)$$

Эти уравнения полностью характеризуют распределение ориентации вектора намагниченности в покоящейся доменной границе.

Решение их в общем виде является непростой задачей, ответ на которую авторам настоящей монографии не известен. Рассмотрение значительно упрощается в предположении о неизменности азимутальной ориентации вектора намагниченности во всем пространстве, то есть при $\varphi = \text{const}$.

При этом уравнения (11.30) и (11.31) принимают вид:

$$m \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi = 0; \quad (11.32)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dg^2} - \sin \theta \cos \theta - m \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi = 0. \quad (11.33)$$

Уравнение (11.32) относительно φ допускает два варианта:

$$\sin \varphi = 0; \quad (11.34)$$

$$\cos \varphi = 0. \quad (11.35)$$

Это — случаи блоховской и неелевской доменных границ.

Рассмотрим их по отдельности.

11.1.3. Блоховская доменная граница

Рассмотрим сначала условие (11.34). Система уравнений (11.32)–(11.33) принимает вид:

$$\sin \varphi = 0; \quad (11.36)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dg^2} - \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (11.37)$$

Из уравнения (11.36) получаем: $\varphi = 0$.

Над первым слагаемым уравнения (11.37) выполним следующие преобразования:

$$\frac{d^2 \theta}{dg^2} = \frac{d}{dg} \left(\frac{d\theta}{dg} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d\theta}{dg} \right) \frac{d\theta}{dg} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left[\left(\frac{d\theta}{dg} \right)^2 \right]. \quad (11.38)$$

Подставляя это выражение в уравнение (11.37), получаем

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{d\theta} \left[\left(\frac{d\theta}{dg} \right)^2 \right] - \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (11.39)$$

Приведем (11.39) к виду

$$d \left[\left(\frac{d\theta}{dg} \right)^2 \right] = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta. \quad (11.40)$$

Возьмем интеграл от правой части:

$$2 \int \sin \theta \cos \theta d\theta = \sin^2 \theta + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная интегрирования.

Выполняя интегрирование обеих частей уравнения (11.40), получаем

$$\left(\frac{d\theta}{dg}\right)^2 = \sin^2 \theta + C_1. \quad (11.41)$$

Найдем постоянную интегрирования C_1 из условий на бесконечности (записываем условия для переменной g , имеющей вид (11.28), эквивалентные условиям для координатной переменной y):

$$\frac{d\theta}{dg} \Big|_{g \rightarrow \pm\infty} = 0; \quad (11.42)$$

$$\theta \Big|_{g \rightarrow -\infty} = 0; \quad (11.43)$$

$$\theta \Big|_{g \rightarrow +\infty} = \pi. \quad (11.44)$$

Записывая (11.41) при $g \rightarrow \pm\infty$ и подставляя условия (11.42)–(11.44), получаем, что $C_1 = 0$. При этом (11.41) принимает вид

$$\left(\frac{d\theta}{dg}\right)^2 = \sin^2 \theta. \quad (11.45)$$

Извлекая корень и отделяя функцию θ от переменной g , получаем

$$\frac{d\theta}{\sin \theta} = \pm dg. \quad (11.46)$$

Воспользуемся табличным интегралом [402, стр. 85, форм. (432.19)] (получаемым с помощью подстановки через тангенс половинного угла)

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right|, \quad (11.47)$$

в результате чего из (11.46), получаем

$$\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right| = \pm g + C_2. \quad (11.48)$$

Найдем постоянную C_2 , исходя из того, что при $g = 0$ должно быть $\theta = \pi/2$. Это условие означает, что при расположении начала координат в центре границы, вектор намагниченности ориентирован точно посередине между двумя крайними положениями, соответствующими $g \rightarrow \pm\infty$. Итак, подставляя эти условия в (11.48), получаем $C_2 = 0$. При этом из (11.48) получаем

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \exp(\pm g), \quad (11.49)$$

откуда находим θ :

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} [\exp(\pm g)]. \quad (11.50)$$

Знаки «+» и «-» означают правый или левый винт вдоль оси Oy .

Возвращаясь к исходной координате y , в соответствии с (11.28) получаем

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} [\exp(\pm y/\Delta_0)], \quad (11.51)$$

где Δ_0 определяется формулой (11.20).

11.1.4. Неелевская доменная граница

Рассмотрим теперь условие (11.35). Система уравнений (11.32)–(11.33) принимает вид:

$$\cos \varphi = 0; \quad (11.52)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dg^2} - \sin \theta \cos \theta - m \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi = 0. \quad (11.53)$$

Из уравнения (11.52) получаем $\varphi = \pi/2$. Из уравнения (11.53) при этом получаем

$$\frac{d^2 \theta}{dg^2} - (1 + m) \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (11.54)$$

Это уравнение сводится к (11.37) с точностью до коэффициента $(1 + m)$. Граничные условия на бесконечности и условие при $y = 0$ (или $g = 0$) совпадают с предыдущим случаем.

При этом аналогично (11.45), получаем

$$\left(\frac{d\theta}{dg} \right)^2 = (1 + m) \sin^2 \theta. \quad (11.55)$$

Окончательное решение, подобно (11.50), принимает вид

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\pm \sqrt{1 + m} g \right) \right]. \quad (11.56)$$

Записывая через исходную переменную y с помощью (11.28), а также раскрывая Δ_0 через параметры материала в соответствии с (11.20), получаем

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\pm \frac{y}{\sqrt{\frac{A}{K + 2\pi M_0^2}}} \right) \right]. \quad (11.57)$$

Из сравнения с (11.51), можно видеть, что здесь параметр Δ_0 , определяемый формулой (11.20), заменяется на параметр:

$$\Delta_0 \rightarrow \sqrt{\frac{A}{K + 2\pi M_0^2}}. \quad (11.58)$$

Для разграничения свойств блоховской и неелевской границ каждому из этих параметров дадим собственное обозначение:

$$\sqrt{\frac{A}{K}} \rightarrow \Delta_B. \quad (11.59)$$

$$\sqrt{\frac{A}{K + 2\pi M_0^2}} \rightarrow \Delta_N. \quad (11.60)$$

11.1.5. Краткая сводка формул для обоих видов границ

Итак, приведем краткую сводку полученных формул для обоих видов границ:

БЛОХОВСКАЯ ГРАНИЦА (11.36), (11.51), (11.20):

$$\varphi = 0; \quad (11.61)$$

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} [\exp (\pm y / \Delta_B)], \quad (11.62)$$

где:

$$\Delta_B = \sqrt{\frac{A}{K}}. \quad (11.63)$$

НЕЕЛЕВСКАЯ ГРАНИЦА (11.52), (11.57), (11.60):

$$\varphi = \pi / 2; \quad (11.64)$$

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} [\exp (\pm y / \Delta_N)], \quad (11.65)$$

где:

$$\Delta_N = \sqrt{\frac{A}{K + 2\pi M_0^2}}. \quad (11.66)$$

Этими двумя вариантами исчерпываются все возможные решения системы (11.30)–(11.31), для которых выполняется условие $\varphi = \text{const}$.

11.1.6. Приведение уравнений для блоховской и неелевской границ к одинаковому виду

Уравнения для полярного угла θ , соответствующие границам блоховского и неелевского типа (11.37) и (11.54), являются сходными в том отношении, что путем определенной замены координатной переменной могут быть приведены к одинаковому виду. Покажем, как это можно сделать и выведем этот вид уравнения.

Итак, уравнение для блоховской границы имеет вид (11.37)

$$\frac{d^2 \theta}{dg^2} - \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (11.67)$$

Уравнение для неелевской границы имеет вид (11.54)

$$\frac{d^2 \theta}{dg^2} - (1 + m) \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (11.68)$$

То и другое уравнения получены из (11.31) в предположении $\varphi = \text{const}$. При этом первое уравнение соответствует $\varphi = 0$, второе — $\varphi = \pi/2$. Если уравнение (11.31) допускает промежуточные между 0 и $\pi/2$ решения, отвечающие условию постоянства φ (например, с полем или анизотропией в плоскости), такие что $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, то оно принимает вид

$$\frac{d^2 \theta}{dg^2} - (1 + m \sin^2 \varphi_0) \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (11.69)$$

Это уравнение переходит в (11.67) или (11.68) при $\varphi_0 = 0$ или $\varphi_0 = \pi/2$ соответственно.

Введем обозначение

$$m_0 = (1 + m \sin^2 \varphi_0)^{1/2}. \quad (11.70)$$

С этим обозначением уравнение (11.69) принимает вид:

$$\frac{d^2\theta}{dg^2} - m_0^2 \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (11.71)$$

Это уравнение описывает блоховскую границу при $m_0 = 1$ и неелевскую при

$$m_0 = \sqrt{1 + m}, \quad (11.72)$$

а также случаи других значений φ_0 при

$$m_0 = \sqrt{1 + m \sin^2 \varphi_0}. \quad (11.73)$$

Введем новую переменную

$$q = m_0 g, \quad (11.74)$$

то есть

$$q = (1 + m \sin^2 \varphi_0)^{1/2} g. \quad (11.75)$$

Производные по этой переменной имеют вид

$$\frac{d^n \theta}{dq^n} = m_0^n \frac{d^n \theta}{dg^n}, \quad (11.76)$$

так что уравнение (11.71) принимает вид

$$\frac{d^2\theta}{dq^2} - \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (11.77)$$

Это и есть искомое уравнение. Оно является универсальным в том отношении, что при надлежащей замене переменной q вида (11.75) описывает распределение намагниченности как в блоховской, так и в неелевской границе, а также во всех промежуточных между 0 и $\pi/2$ случаях, соответствующих $\varphi = \text{const}$.

Далее в разделах 11.3.3 и 11.3.5 будет показано, что классическое солитонное уравнение синус-Гордона в переменных Даламбера может быть приведено к виду уравнения (11.77), то есть для решения уравнения синус-Гордона достаточно найти решение уравнения (11.77), например так, как это сделано в разделах 11.1.3, 11.1.4.

11.2. Уравнение движения вектора намагниченности в сферических координатах

Для дальнейшего рассмотрения важен будет вид уравнения движения вектора намагниченности в сферической системе координат. Приведем краткий вывод такого уравнения.

11.2.1. Соотношение между декартовой и сферической системами координат

Будем полагать, что системы координат — декартова $Oxyz$ и сферическая $Or\theta\varphi$ имеют общее начало в точке O , направление оси Oz декартовой системы совпадает с направлением полярной оси сферической системы, а направление оси Ox декартовой системы совпадает с направлением азимутальной оси сферической системы. То есть системы имеют вид, показанный на рис. 11.2.

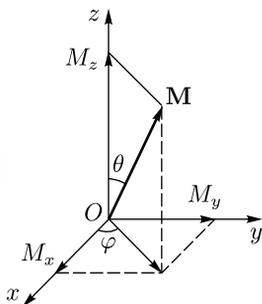


Рис. 11.2. Системы координат — декартова $Oxyz$ и сферическая $Or\theta\varphi$, а также вектор намагниченности \mathbf{M}

Декартовы компоненты вектора намагниченности \mathbf{M} , длина которого равна M_0 , а начало совпадает с точкой O , выраженные через сферические координаты, имеют вид:

$$M_x = M_0 \sin \theta \cos \varphi; \quad (11.78)$$

$$M_y = M_0 \sin \theta \sin \varphi; \quad (11.79)$$

$$M_z = M_0 \cos \theta. \quad (11.80)$$

При этом:

$$\theta = \arccos \frac{M_z}{M_0}; \quad (11.81)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{M_y}{M_x}. \quad (11.82)$$

11.2.2. Полные уравнения движения в декартовой системе координат

Уравнение движения вектора намагниченности — уравнение Ландау–Лифшица с диссипативным членом в форме Гильберта [15–18] имеет вид (1.5)

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}_e] + \frac{\alpha}{M_0} \left[\mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right]. \quad (11.83)$$

Здесь \mathbf{M} — вектор намагниченности, M_0 — намагниченность насыщения, γ — гиромагнитная постоянная, α — параметр затухания Гильберта, \mathbf{H}_e — эффективное поле, равное:

$$\mathbf{H}_e = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{M}}, \quad (11.84)$$

где U — плотность энергии магнетика, то есть в декартовой системе координат имеем:

$$\mathbf{H}_e = -\mathbf{i} \frac{\partial U}{\partial M_x} - \mathbf{j} \frac{\partial U}{\partial M_y} - \mathbf{k} \frac{\partial U}{\partial M_z}, \quad (11.85)$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — единичные направляющие векторы осей Ox , Oy и Oz соответственно.

Раскрывая векторные произведения, запишем компоненты уравнения (11.83) в декартовой системе координат:

$$\dot{M}_x = -\gamma(M_y H_z - M_z H_y) + \frac{\alpha}{M_0}(M_y \dot{M}_z - M_z \dot{M}_y); \quad (11.86)$$

$$\dot{M}_y = -\gamma(M_z H_x - M_x H_z) + \frac{\alpha}{M_0}(M_z \dot{M}_x - M_x \dot{M}_z); \quad (11.87)$$

$$\dot{M}_z = -\gamma(M_x H_y - M_y H_x) + \frac{\alpha}{M_0}(M_x \dot{M}_y - M_y \dot{M}_x). \quad (11.88)$$

Здесь точка обозначает дифференцирование по времени, а индекс «e» у компонент поля \mathbf{H}_e опущен для упрощения записи.

11.2.3. Переход к сферической системе координат

Дальнейшая задача состоит в том, чтобы перевести запись компонент уравнения движения в декартовой системе (11.86)–(11.88) в сферическую систему координат, для чего воспользуемся выражениями (11.78)–(11.82).

Прежде всего отметим, что в сферической системе координат имеются три координаты: две угловые θ и φ , а также радиальная r . При этом вектор намагниченности всегда направлен вдоль радиальной координаты. Будем полагать, что длина вектора намагниченности не меняется и всегда равна M_0 , так что положение вектора намагниченности определяется всего двумя координатами θ и φ . Из этого следует, что вместо трех уравнений движения по компонентам в декартовой системе (11.86)–(11.88), в сферической системе остаются только два — для двух переменных θ и φ .

С учетом того, что теперь U зависит только от θ и φ , можно записать компоненты поля (11.84) в виде:

$$H_x = -\frac{\partial U}{\partial M_x} = -\frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial M_x} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial M_x}; \quad (11.89)$$

$$H_y = -\frac{\partial U}{\partial M_y} = -\frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial M_y} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial M_y}; \quad (11.90)$$

$$H_z = -\frac{\partial U}{\partial M_z} = -\frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial M_z} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial M_z}. \quad (11.91)$$

В соответствии с (11.81)–(11.82) получаем:

$$\frac{\partial \theta}{\partial M_x} = 0; \quad (11.92)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial M_y} = 0; \quad (11.93)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial M_z} = -\frac{1}{M_0 \sin \theta}; \quad (11.94)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial M_x} = -\frac{\sin \varphi}{M_0 \sin \theta}; \quad (11.95)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial M_y} = \frac{\cos \varphi}{M_0 \sin \theta}; \quad (11.96)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial M_z} = 0. \quad (11.97)$$

Подставляя (11.92)–(11.97) в (11.89)–(11.91), получаем:

$$H_x = \frac{\sin \varphi}{M_0 \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}; \quad (11.98)$$

$$H_y = -\frac{\cos \varphi}{M_0 \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}; \quad (11.99)$$

$$H_z = \frac{1}{M_0 \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}. \quad (11.100)$$

Дифференцируя M_x , M_y , M_z по времени с учетом зависимости от координат θ и φ (11.78)–(11.80), а также учитывая (11.81)–(11.82), получаем:

$$\dot{M}_x = M_0(\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi); \quad (11.101)$$

$$\dot{M}_y = M_0(\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi); \quad (11.102)$$

$$\dot{M}_z = -M_0 \sin \theta \dot{\theta}. \quad (11.103)$$

Находим компоненты векторного произведения $[\mathbf{M} \times \mathbf{H}_e]$ с учетом (11.78)–(11.80) и (11.98)–(11.100):

$$M_y H_z - M_z H_y = \sin \varphi \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta \cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}; \quad (11.104)$$

$$M_z H_x - M_x H_z = \frac{\cos \theta \cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial \theta}; \quad (11.105)$$

$$M_x H_y - M_y H_x = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}. \quad (11.106)$$

Аналогично находим векторные произведения $[\mathbf{M} \times \dot{\mathbf{M}}]$ с учетом (11.78)–(11.80) и (11.101)–(11.103):

$$M_y \dot{M}_z - M_z \dot{M}_y = -M_0^2 (\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi); \quad (11.107)$$

$$M_z \dot{M}_x - M_x \dot{M}_z = -M_0^2 (-\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi); \quad (11.108)$$

$$M_x \dot{M}_y - M_y \dot{M}_x = M_0^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta. \quad (11.109)$$

Подставляя (11.104)–(11.109) в записанное по компонентам уравнение движения (11.86)–(11.88), получаем:

$$\begin{aligned} M_0(\cos \theta \cos \varphi \dot{\theta} - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi) = \\ = -\gamma \left(\sin \varphi \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta \cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) - \\ - \alpha M_0 (\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi); \end{aligned} \quad (11.110)$$

$$\begin{aligned} M_0(\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi) = \\ = -\gamma \left(\frac{\cos \theta \sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) - \\ - \alpha M_0 (-\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi); \end{aligned} \quad (11.111)$$

$$-M_0 \dot{\theta} \sin \theta = \gamma \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \alpha M_0 \dot{\varphi} \sin^2 \theta. \quad (11.112)$$

Выразим из третьего уравнения $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = -\frac{\gamma}{M_0 \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \alpha \dot{\varphi} \sin \theta. \quad (11.113)$$

Из этого выражения попутно выразим также $\partial U / \partial \varphi$ (понадобится далее):

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -\frac{M_0 \sin \theta}{\gamma} (\dot{\theta} + \alpha \dot{\varphi} \sin \theta). \quad (11.114)$$

Разрешение (11.110) и (11.111) относительно $\dot{\varphi}$ приводит к совпадающим выражениям. В результате получаем:

$$\dot{\varphi} = \frac{\gamma}{M_0(1 + \alpha^2) \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{\alpha \gamma}{M_0(1 + \alpha^2) \sin^2 \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}. \quad (11.115)$$

Подставляя в это уравнение выражение (11.114), получаем:

$$\dot{\varphi} = \frac{\gamma}{M_0 \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \dot{\theta} \frac{\alpha}{\sin \theta}. \quad (11.116)$$

11.2.4. Полные уравнения движения для полярной и азимутальной компонент вектора намагниченности

Итак получена система из двух уравнений движения в сферических координатах (11.113) и (11.116), связанных условием постоянства длины вектора намагниченности. Выпишем их здесь вместе еще раз в связи с особой важностью для дальнейшего рассмотрения:

$$\dot{\theta} = -\frac{\gamma}{M_0 \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \alpha \dot{\varphi} \sin \theta; \quad (11.117)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\gamma}{M_0 \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \dot{\theta} \frac{\alpha}{\sin \theta}. \quad (11.118)$$

Эти уравнения получены без каких-либо ограничений на величины как полярного и азимутального углов θ и φ , так и параметра затухания α , то есть без какой-либо линеаризации, так что пригодны для описания нелинейного движения вектора намагниченности при условии сохранения его длины. Уравнения также получены без какого-либо предположения о характере распределения намагниченности в пространстве, то есть в этом смысле являются локальными. С математической стороны необходимым условием применимости этих уравнений является непрерывность плотности энергии в пространстве, что будет обеспечивать ее дифференцируемость при вычислении эффективных полей по формулам (11.89)–(11.91). Неоднородность намагниченности, например, в случае неоднородного обмена или неоднородного внешнего поля в этом случае будет учитываться соответствующими слагаемыми в выражении для плотности энергии, как это будет рассмотрено далее.

11.3. Приведение уравнения движения для намагниченности к солитонному виду

Система уравнений движения для намагниченности в сферических координатах без учета затухания имеет вид (11.117)–(11.118):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\gamma}{M_0 \sin \theta} \frac{\delta U}{\delta \varphi}; \quad (11.119)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\gamma}{M_0 \sin \theta} \frac{\delta U}{\delta \theta}. \quad (11.120)$$

Здесь вместо частных введены функциональные производные, что связано с необходимостью учета неоднородного обменного взаимодействия, при котором в расчете эффективных полей типа (7.19) используются именно функциональные производные, имеющие вид:

$$\frac{\delta U}{\delta \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)} \right]; \quad (11.121)$$

$$\frac{\delta U}{\delta \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)} \right]. \quad (11.122)$$

Будем рассматривать такую доменную границу, в которой азимутальная переменная от координаты не зависит, то есть выполняются соотношения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \quad (11.123)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (11.124)$$

Однако независимость азимутального угла от координаты не означает независимость его от времени, что и будет использовано в дальнейшем.

Для простоты рассмотрения положим внешнее поле отсутствующим. Учет такого поля в качестве «продвигающего» необходим при расчете скорости движения доменной границы, что будет сделано в разделе, посвященном вычислению подвижности границы и «предельной скорости Уокера» (раздел 11.4). Здесь же ограничимся случаем свободного движения границы, как бы по инерции, которое в отсутствие затухания можно полагать равномерным.

11.3.1. Плотность энергии в сферической системе координат

Итак, будем полагать, что полная плотность энергии, записанная в сферической системе координат, имеет вид

$$U = A \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + K \sin^2 \theta + 2\pi M_0^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi, \quad (11.125)$$

где A — константа неоднородного обменного взаимодействия, связанная с константой q соотношением (5.61):

$$A = qM_0^2/2, \tag{11.126}$$

K — константа одноосной анизотропии ($K > 0$).

Структура этого выражения, подобная структуре (11.1), следующая. Граница предполагается плоской, параллельной координатной плоскости Oxz . Первое слагаемое соответствует плотности энергии неоднородного обменного взаимодействия в предположении, что граница движется как целое вдоль одного направления, в качестве которого выбрана ось Oy (это слагаемое соответствует формуле (5.76), соответствующей постоянству φ). Второе слагаемое соответствует одноосной анизотропии, ось которой параллельна координатной оси Oz (подобно второму слагаемому в формуле (11.1)). Третье слагаемое соответствует плотности энергии поля размагничивания плоской границы, параллельной координатной плоскости Oxz (подобно третьему слагаемому в формуле (11.1), а также формуле (5.39)).

11.3.2. Уравнение движения доменной границы в предположении постоянства азимутального угла вектора намагниченности

С использованием этого выражения находим входящие в правые части уравнений (11.119)–(11.120) производные (11.121)–(11.122):

$$\frac{\delta U}{\delta \theta} = 2K \sin \theta \cos \theta + 4\pi M_0^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi - 2A \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}; \tag{11.127}$$

$$\frac{\delta U}{\delta \varphi} = 4\pi M_0^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi. \tag{11.128}$$

Подставляя эти производные в уравнения (11.119)–(11.120), получаем:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -4\pi\gamma M_0 \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi; \tag{11.129}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\gamma}{M_0 \sin \theta} \left(2K \sin \theta \cos \theta + 4\pi M_0^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi - 2A \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right). \tag{11.130}$$

Положим далее, что азимутальный угол φ в процессе движения границы меняется мало (случай большого изменения этого угла рассмотрен далее в разделе 11.4), так что можно положить $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$, а также $\sin^2 \varphi \ll 1$. При этом вторым слагаемым в скобках в уравнении (11.130) можно пренебречь. При этом уравнения (11.129)–(11.130) принимают вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -4\pi\gamma M_0 \varphi \sin \theta; \tag{11.131}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\gamma}{M_0 \sin \theta} \left(2K \sin \theta \cos \theta - 2A \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right). \tag{11.132}$$

Продифференцируем уравнение (11.131) еще раз по времени:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -4\pi\gamma M_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \sin \theta + \varphi \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} \right). \quad (11.133)$$

Подставим вместо первого слагаемого в скобках выражение (11.132), а вместо второго — выражение (11.131), после чего раскроем скобки. В результате получаем:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -8\pi\gamma^2 M_0 \sin \theta \cos \theta + 8\pi\gamma^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + 16\pi^2\gamma^2 M_0^2 \varphi^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (11.134)$$

Поскольку третье слагаемое правой части содержит φ^2 , его можно считать малым, то есть опустить. В результате получаем уравнение для θ в виде:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -8\pi\gamma^2 M_0 \sin \theta \cos \theta + 8\pi\gamma^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \quad (11.135)$$

Разделив на $8\pi\gamma^2 A$ и меняя порядок слагаемых, получаем

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{1}{8\pi\gamma^2 A} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{K}{A} \sin \theta \cos \theta. \quad (11.136)$$

Введем обозначение

$$c = 2\gamma\sqrt{2\pi A}, \quad (11.137)$$

то есть

$$c^2 = 8\pi\gamma^2 A. \quad (11.138)$$

С помощью этого обозначения записываем (11.136) в виде

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{K}{A} \sin \theta \cos \theta, \quad (11.139)$$

или

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{K}{2A} \sin 2\theta, \quad (11.140)$$

11.3.3. Солитонный вид уравнения движения доменной границы

Полученное уравнение (11.140) является классическим уравнением для солитонов типа синус-Гордона (3.7). В таком виде оно обычно встречается в литературе [325–327], а также [204, стр. 359–360, форм. (8.24)]. Его решение, приведенное там же [204, стр. 360, форм. (8.26)], имеет вид

$$\theta(y, t) = \arcsin \left\{ \operatorname{sech} [B(y - vt)] \right\}, \quad (11.141)$$

или

$$\theta(y, t) = \arcsin \left\{ \frac{1}{\operatorname{ch} [B(y - vt)]} \right\}, \quad (11.142)$$

где

$$B = \sqrt{\frac{K/A}{1 - v^2/c^2}}. \quad (11.143)$$

В этих выражениях v — произвольная скорость (меньшая c).

При использовании выражения (11.142) следует учитывать, что согласно своему определению, при заданном значении A синуса угла α (то есть при $A = \sin \alpha$), $\arcsin A$ имеет два значения: α и $\pi - \alpha$. Поэтому более корректная запись решения уравнения (11.139) имеет вид

$$\theta(y, t) = \begin{cases} \arcsin \left\{ \frac{1}{\operatorname{ch} [B(y - vt)]} \right\} & -\infty < y - vt \leq 0, \\ \pi - \arcsin \left\{ \frac{1}{\operatorname{ch} [B(y - vt)]} \right\} & 0 \leq y - vt < +\infty. \end{cases} \quad (11.144)$$

Можно видеть, что знаменатель в выражении (11.144) имеет релятивистский характер, то есть выражение становится тем больше, чем ближе скорость v приближается к величине c . При этом величина B стремится к бесконечности, так что аргумент гиперболического косинуса в формуле (11.144) увеличивается, то есть выражение в фигурных скобках уменьшается. Такое уменьшение аргумента арксинуса приводит к его уменьшению, так что пространственная протяженность участка резкого изменения угла θ также уменьшается, то есть возмущение намагниченности, распространяющееся со скоростью v , по мере приближения v к c по координате y сужается.

11.3.4. Геометрическая интерпретация профиля движущейся доменной границы

Рассмотрим геометрическую интерпретацию выражения (11.144). Для простоты положим $t = 0$. В силу волнового характера переменной $y - vt$ получаемый при этом профиль выражения (11.144) при произвольном значении времени t будет оставаться неизменным, лишь сдвигаясь вдоль оси Oy как целое, что является общим свойством решения волнового уравнения методом Даламбера [10, стр. 53]. То есть рассмотрим функцию:

$$\theta(y, 0) = \begin{cases} \arcsin \left\{ \frac{1}{\operatorname{ch} [By]} \right\} & -\infty < y \leq 0, \\ \pi - \arcsin \left\{ \frac{1}{\operatorname{ch} [By]} \right\} & 0 \leq y < +\infty. \end{cases} \quad (11.145)$$

Профиль волны, определяемый выражением (11.145), при различных отношениях скорости v к параметру c показан на рис. 11.3. Для простоты положено $K/A = 1$.

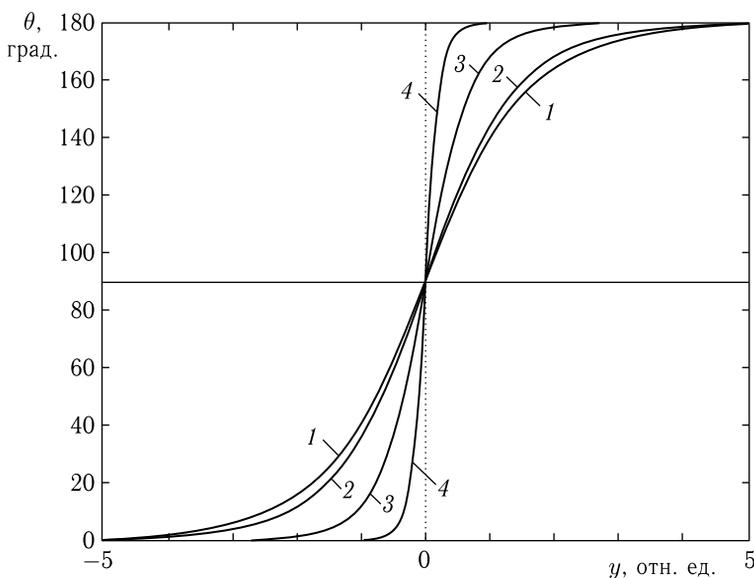


Рис. 11.3. Зависимость полярного угла намагниченности θ от координаты y при различных значениях отношения v/c : 1 — 0,00; 2 — 0,50; 3 — 0,90; 4 — 0,99. Параметры: $t = 0$; $K/A = 1$

Из рисунка видно, что по мере увеличения скорости движения возмущения намагниченности $\theta(y)$ само это возмущение становится все более резким. В пределе при $v \rightarrow c$ интервал перепада намагниченности на 180° стремится к нулю, точнее к пределу, ограничиваемому межатомным расстоянием элементов среды (то есть, когда еще можно пользоваться непрерывным приближением).

Из структуры уравнения (11.139) видно, что при изменении знака θ на обратный оно полностью сохраняется. При этом зависимости, подобные показанным на рис. 11.3, при $y \rightarrow -\infty$ будут начинаться от 180° , а при $y \rightarrow +\infty$ стремиться к нулю. То есть кривые будут зеркальным образом отражены в линии, соответствующей $\theta = 90^\circ$.

Замечание. Из проведенного рассмотрения следует, что возмущение намагниченности не может двигаться со скоростью, превышающей величину параметра c , определяемого формулой (11.137). Однако нельзя забывать, что такое утверждение получено в предположении малости азимутального угла φ , что в процессе расчета позволило перейти от выражений (11.129)–(11.130) к выражениям (11.131)–(11.132), а также от (11.134) к (11.135). Выполнение расчета при произвольном значении угла φ приводит к другому значению предельной скорости движения возмущения намагниченности, а именно, к так называемой «предельной скорости Уокера». Более подробно этот вопрос рассмотрен в разделе 11.4, где скорость Уокера получена в явном виде.

11.3.5. Приведение уравнения для движущейся границы к уравнению для стационарной границы

Будем исходить из уравнения для движущейся границы в виде, подобном (11.140):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{K}{A} \sin \theta \cos \theta = 0, \quad (11.146)$$

где, в соответствии с (11.138)

$$c^2 = 8\pi\gamma^2 A. \quad (11.147)$$

Заменим переменную y на g в соответствии с формулой

$$g = \frac{y}{\Delta_0}, \quad (11.148)$$

где

$$\Delta_0 = \sqrt{A/K}. \quad (11.149)$$

Введем обозначение

$$a = c/\Delta_0, \quad (11.150)$$

то есть

$$a^2 = c^2 K/A. \quad (11.151)$$

Уравнение (11.146) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial g^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (11.152)$$

Будем искать решение в виде переменной Даламбера

$$\theta = \theta(y - vt). \quad (11.153)$$

Согласно (11.148), заменим переменную в решении:

$$y = \Delta_0 g, \quad (11.154)$$

а также введем обозначение

$$v_0 = v/\Delta_0. \quad (11.155)$$

Аргумент решения принимает вид

$$y - vt = \Delta_0 g - \Delta_0 v_0 t = \Delta_0 (g - v_0 t), \quad (11.156)$$

то есть (11.153) принимает вид

$$\theta = \theta(g - v_0 t). \quad (11.157)$$

Введем обозначение

$$u = g - v_0 t. \quad (11.158)$$

Переходя к переменной u , находим производные:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial g^2} = \frac{d^2 \theta}{du^2}; \quad (11.159)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = v_0^2 \frac{d^2 \theta}{du^2}. \quad (11.160)$$

Здесь в правых частях производные не частные, а обыкновенные, так как, согласно (11.157), переменная u для θ является единственной.

Подстановка (11.159)–(11.160) в уравнение (11.152) приводит его к виду

$$\left(1 - \frac{v_0^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (11.161)$$

Введем еще одну замену переменной:

$$r = \frac{u}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{a^2}}}, \quad (11.162)$$

то есть

$$u = \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{a^2}} r. \quad (11.163)$$

При этом

$$\frac{d^2}{du^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{v_0^2}{a^2}\right)} \frac{d^2}{dr^2}, \quad (11.164)$$

так что уравнение (11.161) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} - \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (11.165)$$

Это уравнение совпадает с уравнением для стационарной доменной границы (11.37). Его решение может быть записано в двух эквивалентных видах (эквивалентность подробно доказывается в разделе 11.3.6): традиционный вид для стационарной границы (11.50)

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} [\exp(r)]; \quad (11.166)$$

традиционный вид для солитона (11.141), (11.142)

$$\theta = \arcsin [\operatorname{sech}(r)] = \arcsin \left(\frac{1}{\operatorname{ch} r} \right). \quad (11.167)$$

Раскрывая r по формуле (11.162), а также учитывая (11.149), приведем (11.167) к виду, используемому в [325–327]:

$$\theta = \arcsin \left\{ \operatorname{sech} h \left[\sqrt{\frac{K/A}{1 - v^2/c^2}} (y - vt) \right] \right\}. \quad (11.168)$$

Замечание. Подробный способ получения решения уравнения (11.165) в виде (11.167) авторам настоящей монографии не известен, да они и не ставили себе такой задачи. Вместо этого они дают подробный вывод решения вида (11.166) (разделы 11.1.3, 11.1.4) и доказательство математической эквивалентности обоих видов решения (11.166) и (11.167) (раздел 11.3.6), что для рассматриваемых в настоящей монографии вопросов полагают вполне достаточным. Более подробный разбор или поиск в литературе решения уравнения (11.165) в виде (11.167) авторы предоставляют любознательному читателю.

11.3.6. Математическая эквивалентность двух видов решения солитонного уравнения

В разделах 11.3.5 и 11.1.3, 11.1.4 показано, что распространение волнового возмущения солитонного типа и распределение намагниченности в стационарной доменной границе при соответствующей замене переменных сводятся к решению одного и того же уравнения (11.165) или (11.37), имеющего вид

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial g^2} - \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (11.169)$$

При этом в задачах о распространении солитонов решение, с точностью до знаков, обычно записывается в виде (11.142) или (11.167):

$$\theta_S = \arcsin \left(\frac{1}{\operatorname{ch} g} \right), \quad (11.170)$$

а в задачах о структуре доменной границы — в виде (11.50):

$$\theta_D = 2 \operatorname{arctg} [\exp(g)], \quad (11.171)$$

где g — нормированная координатная переменная, согласно (11.28) с учетом (11.20), имеющая вид

$$g = \sqrt{\frac{K}{A}} y. \quad (11.172)$$

Покажем математическую эквивалентность обоих этих видов решения, для чего надо доказать, что $\theta_S = \theta_D$.

Для этого возьмем синус от обеих частей (11.170) и тангенс от половины обеих частей (11.171). В результате получаем:

$$\sin \theta_S = \frac{1}{\operatorname{ch} g}; \quad (11.173)$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\theta_D}{2} \right) = \exp(g). \quad (11.174)$$

Выразим синус θ_D через тангенс половинного угла:

$$\sin \theta_D = \frac{2 \operatorname{tg}(\theta_D/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\theta_D/2)}. \quad (11.175)$$

Подставим в это выражение (11.174), запишем экспоненту через показательную функцию и выполним преобразования:

$$\sin \theta_D = \frac{2e^g}{1 + e^{2g}} = \frac{2}{e^g + e^{-g}} = \frac{1}{\operatorname{ch} g}. \quad (11.176)$$

Сравнивая полученное выражение с (11.173), получаем

$$\sin \theta_S = \sin \theta_D, \quad (11.177)$$

откуда, учитывая, что полярный угол определен только в первой и четвертой четвертях координатной плоскости, получаем

$$\theta_S = \theta_D, \quad (11.178)$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Здесь выражения (11.170) и (11.171) взяты в простейшем виде, что сделано для упрощения вычислений. Вообще говоря, решение уравнения (11.169) для солитона имеет вид (11.144) или (11.145), а для доменной границы — вид (11.50), то есть в обоих случаях функция распределения намагниченности описывает отражение относительно горизонтальной оси при $\theta = 90^\circ$. Приведенное доказательство в любом случае остается в силе, убедиться в чем, в случае желания, предоставляем любознательному читателю.

11.3.7. Преобразование уравнения для движущейся границы в классическое уравнение синус-Гордона

Уравнение для движущейся границы (11.146) с учетом (11.147) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{1}{8\pi\gamma^2 A} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{K}{A} \sin \theta \cos \theta. \quad (11.179)$$

Введем обозначение

$$c = \sqrt{8\pi\gamma^2 A}. \quad (11.180)$$

Подставим это обозначение в (11.179), умножим на c^2 , изменим знак и порядок слагаемых. В результате получаем

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + 4\pi\gamma^2 K \sin 2\theta = 0. \quad (11.181)$$

Введем новые переменные u и x , такие, что:

$$\theta = u/2; \quad (11.182)$$

$$y = cx, \quad (11.183)$$

а также введем обозначение

$$m^2 = 8\pi\gamma^2 K. \quad (11.184)$$

Подставляя эти величины в (11.181) и сокращая общий множитель $1/2$, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m^2 \sin u = 0. \quad (11.185)$$

Это — классический вид уравнения синус-Гордона, как оно приведено в разделе 3.2.3 (формула (3.7)).

Легко осуществимо и обратное преобразование. Для этого в уравнении (11.185) надо положить:

$$m^2 = 8\pi\lambda^2 K; \quad (11.186)$$

$$u = 2\theta; \quad (11.187)$$

$$x = y/c. \quad (11.188)$$

Производные принимают вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}; \quad (11.189)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad (11.190)$$

подставляя которые в (11.185), с учетом (11.186) получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + 4\pi\gamma^2 K \sin 2\theta = 0, \quad (11.191)$$

совпадающее с уравнением (11.181). Деление этого уравнения на c^2 с последующим изменением порядка слагаемых и подстановкой (11.180) приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{1}{8\pi\gamma^2 A} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{K}{A} \sin \theta \cos \theta. \quad (11.192)$$

совпадающему с (11.179).

Таким образом, можно видеть, что нахождение решения уравнения (11.179) каким-либо доступным способом также обеспечивает тем же способом решение классического уравнения синус-Гордона (11.185).

В разделе 11.3.5 показано, что решение уравнения (11.179) сводится к решению уравнения для стационарной доменной границы вида (11.37)

$$\frac{d^2 \theta}{dg^2} - \sin \theta \cos \theta = 0, \quad (11.193)$$

где координатная переменная g определяется выражением (11.28) с учетом (11.20), то есть имеет вид

$$g = y\sqrt{K/A}. \quad (11.194)$$

Таким образом, для получения решения классического уравнения синус-Гордона (11.185) достаточно решить уравнение (11.193) для стационарной доменной границы.

Замечание. Получаемое при этом решение, с точки зрения теории солитонов, будет односолитонным. Для получения многосолитонных решений можно далее воспользоваться преобразованиями Бэклунда [383, стр. 195–198].

Однако, согласно экспериментам по доменной структуре (множество из которых описано в [235]), взаимодействие даже двух доменных границ классическому определению солитона не подчиняется. Так, при однонаправленном движении границы не проходят сквозь друг друга без изменения собственной формы, а следуют друг за другом на некотором расстоянии. При встречном же движении границы, если обладают противоположными винтовыми ориентациями намагниченности, то просто «схлопываются», то есть в результате их встречи обе исчезают.

То есть взаимодействие двух или нескольких доменных границ должно рассматриваться более детализированными способами, по-видимому, с учетом уравнения вида (11.179) для каждой границы в отдельности. При этом необходимо учитывать условия, побуждающие границу к движению, то есть какое-то «продвигающее» поле, которое для различных границ может различаться. Авторы настоящей монографии не ставили своей задачей углубляться до такой степени в динамику доменных границ, однако любознательному читателю могут порекомендовать обратиться к обзорным монографиям [233–236].

11.4. Решение Уокера для скорости плоской доменной границы

Рассмотрим вызванное внешним «продвигающим» полем равномерное движение отдельной локализованной в пространстве доменной границы. Далее будет показано, что скорость такого движения при малом поле пропорциональна величине этого поля, а при достаточно большом его значении ограничивается на постоянном уровне по достижении так называемой «скорости Уокера» [233–236, 300, 302].

11.4.1. Общая геометрия задачи и влияние продвигающего поля

Общая геометрия задачи показана на рис. 11.4. Используются одновременно две системы координат с общим началом в точке O : декартова $Oxyz$ и сферическая $Or\theta\varphi$. Полярная ось сферической системы ориентирована вдоль оси Oz , азимутальная — вдоль оси Ox . Внешнее постоянное «продвигающее» поле направлено вдоль оси Oz . Ось анизотропии (ОЛН) также ориентирована вдоль той же оси.

Прежде чем начинать аналитическое рассмотрение предположим решению некоторые качественные соображения, поясняющие принятые далее ограничения и приближения.

Прежде всего отметим, что задача решается в случае безграничной среды, так что какое-либо влияние границ образца не рассматривается. В плоскости Oxz предполагаем распределение намагниченности полностью однородным, то есть от координат x и z не зависящим. Единственная зависимость предполагается только вдоль оси Oy , то есть в этом отношении задачу можно считать одномерной.

На многомерный случай получаемое далее решение распространить вполне можно, например, как это делается в теории цилиндрических доменов, где вводится скручивание границы и динамика горизонтальных блоховских линий [233, 235], однако эти эффекты являются вторичными и приводят к новым более жестким ограничениям скорости движения границы. Для более подробного ознакомления с подобными явлениями читатель может обратиться, например, к обзорным монографиям [233, 235] и ряду других подобных. Авторы настоящей монографии не ставят своей задачей подробное изложение теории ЦМД, поэтому здесь ограничиваются наиболее простым случаем одномерной геометрии, позволяющим выявить предельную скорость движения доменной границы в чистом виде.

Если начинать решение задачи с нахождения равновесного положения намагниченности, то можно видеть, что в отсутствие внешнего поля (то есть при $H = 0$) намагниченность должна быть ориентирована во всем пространстве в одном направлении — вдоль ОЛН. Единство ориентации намагниченности во всем пространстве при этом обеспечивается неоднородным обменным взаимодействием, энергия которого увеличивается при любой разориентации намагниченности в близко расположенных участках оси Oy . При этом имеются две возможных ориентации, обладающие одинаковой энергией — в положительном и отрицательном направлениях оси Oz .

Если теперь предположить, что намагниченность во всем пространстве ориентирована в отрицательном направлении оси Oz , то включение поля H в положительном направлении той же оси приведет к переориентации намагниченности с отрицательного направления оси Oz на положительное. Потенциальный барьер, который должна преодолеть намагниченность при такой переориентации, будучи переворачиваемой как целое, слишком высок. Однако, если в какой-то области оси Oy имеется локальный участок, где намагниченность уже перевернута в требуемом направлении (то есть в положительном относительно

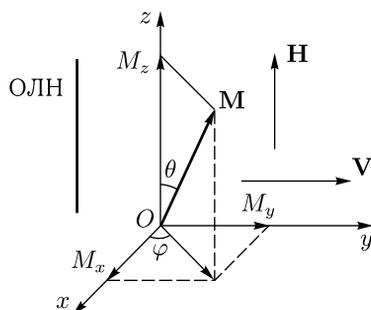


Рис. 11.4. Общая геометрия задачи

оси Oz), то на границе такого участка создаются условия для значительно более легкого переворота намагниченности. В этом случае новую намагниченность кроме поля тянет и уже перевернутая намагниченность, тяга которой обусловлена стремлением выравнивания локальной ориентации намагниченности, как того требует уменьшение энергии неоднородного обменного взаимодействия. Таким образом, под действием поля перевернутый участок стремится расшириться, что происходит как бы путем перемещения в сторону расширения локализованной доменной границы. Такое перемагничивание объема среды происходит со значительно меньшей затратой энергии, чем преодоление энергетического барьера при перевороте намагниченности как целого во всем объеме тела.

Поэтому приложенное поле H можно рассматривать как поле, вызывающее движение локализованной по оси Oy доменной границы. В общем случае, благодаря цилиндрической симметрии задачи, направление перемещения границы в плоскости Oxy никак не задано, то есть все направления перемещения в этой плоскости равноправны. Однако для конкретизации задачи будем считать, что граница перемещается в направлении оси Oy (то есть ограничиваем себя не более чем выбором ориентации системы координат).

В сферической системе координат поле и намагниченность имеют вид:

$$\mathbf{H} = \{0, 0, H\}; \quad (11.195)$$

$$\mathbf{M} = \{M_0 \sin \theta \cos \varphi, M_0 \sin \theta \sin \varphi, M_0 \cos \theta\}. \quad (11.196)$$

Будем полагать также, что азимутальная ориентация вектора намагниченности, определяемая углом φ , от координаты y и от времени t не зависит, то есть везде в пространстве выполняются условия:

$$\varphi = \text{const}, \quad (11.197)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \quad (11.198)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (11.199)$$

Заметим, что эти условия не являются бесспорными, особенно на бесконечности, однако, как будет видно далее, именно они позволяют свести поставленную задачу к одномерной, зависящей только от одной координаты y .

Вообще говоря, в отсутствие доменной границы ориентация намагниченности по азимутальному углу не определена, так что вдали от границы является произвольной. То есть можно полагать, что вдали от границы угол φ имеет то же значение, что и внутри нее. Такое постоянство азимутального угла можно отнести за счет влияния неоднородного обменного взаимодействия.

При этом следует полагать, что ориентация намагниченности является единой не только в тех областях пространства, через которые доменная граница уже прошла, но и впереди нее, то есть там, где намагниченность еще «не знает», что на нее идет доменная граница. То есть возмущение намагниченности должно распространяться в пространстве быстрее, чем движется сама доменная граница. Такое «забегающее вперед» возмущение может создаваться обменными спиновыми волнами, определенное влияние которых на движение доменов рассмотрено, например, в [317]. В простейшем же случае можно полагать, что рассматриваемая здесь задача имеет силу в тех пределах, где неоднородный обмен достаточен для поддержания однородности намагниченности, то есть в многодоменном образце — в пределах одного домена. На данном же этапе будем считать, что условия (11.197), (11.198) и (11.199) полностью выполняются.

11.4.2. Плотность энергии движущейся границы

Итак, перейдем теперь к аналитическому рассмотрению поставленной задачи.

В принятой геометрии в отсутствие внешнего (продвигающего) поля плотность энергии соответствует выражению (11.125), где энергия неоднородного обмена получается подобно (5.77), то есть из (5.76) с учетом условия (11.198). Чтобы ввести внешнее поле, воспользуемся выражением (5.34), в котором положим $\theta_H = 0$, а также $\varphi_H = 0$. В результате суммарная плотность энергии, записанная в сферической системе координат, принимает вид

$$U = A \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + K \sin^2 \theta - H M_0 \cos \theta + 2\pi M_0^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi, \quad (11.200)$$

где A — константа неоднородного обменного взаимодействия, связанная с константой q соотношением (5.61)

$$A = q M_0^2 / 2, \quad (11.201)$$

K — константа одноосной анизотропии ($K > 0$).

11.4.3. Уравнения движения вектора намагниченности с учетом его переориентации

Для описания переориентации намагниченности при движении доменной границы воспользуемся уравнениями движения вектора намагниченности в сферической системе координат (11.117)–(11.118), которые запишем в несколько более удобном для дальнейшего виде:

$$\gamma \frac{\delta U}{\delta \varphi} = -M_0 \frac{\partial \theta}{\partial t} \sin \theta - \alpha M_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \sin^2 \theta; \quad (11.202)$$

$$\gamma \frac{\delta U}{\delta \theta} = M_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \sin \theta - \alpha M_0 \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (11.203)$$

Здесь частные производные заменены на функциональные в связи с необходимостью при вычислении эффективных полей учета

координатных производных от намагниченности, отражающих влияние неоднородного обмена [16, 17]. Эти производные, подобно (11.121), (11.122), имеют вид:

$$\frac{\delta U}{\delta \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)} \right]; \quad (11.204)$$

$$\frac{\delta U}{\delta \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)} \right]. \quad (11.205)$$

11.4.4. Приведение уравнения движения границы к зависимости от переменной Даламбера

Будем полагать, что в структуре существует динамическое одномерное (меняющееся только вдоль оси Oy и безграничное по двум другим осям Ox и Oz) пространственное возмущение намагниченности, движущееся вдоль оси Oy с постоянной скоростью \mathbf{v} и сохраняющее свою конфигурацию в процессе такого движения. Такое возмущение будем рассматривать как движущуюся доменную границу, разделяющую области пространства, в одной из которых переворот намагниченности уже произошел, а в другой такой поворот еще только должен произойти тогда, когда туда дойдет доменная граница. Такое предположение позволяет нам перейти в систему координат, движущуюся с этим возмущением с той же скоростью \mathbf{v} , то есть ввести замену переменных:

$$Y = y - vt. \quad (11.206)$$

Теперь вместо функции от двух переменных $\theta(y, t)$ будем рассматривать функцию только одной переменной $\theta(Y)$.

Так как $\theta(Y)$ явно не зависит от t и y , тогда как Y зависит, то дифференцирование надо выполнять по правилам дифференцирования сложных функций [454, 455]. При этом получаем:

$$\frac{\partial \theta(Y)}{\partial y} = \frac{\partial \theta(Y)}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial Y}; \quad (11.207)$$

$$\frac{\partial \theta(Y)}{\partial t} = \frac{\partial \theta(Y)}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial t} = -v \frac{\partial \theta}{\partial Y}. \quad (11.208)$$

Подставляя эти производные в (11.202) и (11.203), а также учитывая выражения (11.204) и (11.205), а также условия (11.198), (11.199), получаем:

$$\gamma \frac{\partial U}{\partial \varphi} = M_0 v \frac{\partial \theta}{\partial Y} \sin \theta; \quad (11.209)$$

$$\gamma \frac{\partial U}{\partial \theta} - \gamma \frac{\partial}{\partial Y} \left[\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)} \right] = \alpha M_0 v \frac{\partial \theta}{\partial Y}. \quad (11.210)$$

Запишем полученные выражения в несколько другом виде:

$$v \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\gamma}{M_0 \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}; \quad (11.211)$$

$$\alpha v \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\gamma}{M_0} \left\{ \frac{\partial U}{\partial \theta} - \gamma \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)} \right] \right\}. \quad (11.212)$$

Здесь во втором слагаемом правой части последнего выражения дифференцирование по Y заменено на дифференцирование по y в силу эквивалентности в соответствии с выражениями (11.206) и (11.207).

Найдем производные от плотности энергии w (11.200):

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 4\pi M_0^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi; \quad (11.213)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 2K \sin \theta \cos \theta + HM_0 \sin \theta + 4\pi M_0^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi; \quad (11.214)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)} = 2A \frac{\partial \theta}{\partial y} = 2A \frac{\partial \theta}{\partial Y}; \quad (11.215)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)} \right] = 2A \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 2A \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}. \quad (11.216)$$

Подставляя эти производные в уравнения (11.211) и (11.212), получаем:

$$v \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 4\pi \gamma M_0 \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi; \quad (11.217)$$

$$\begin{aligned} \alpha v \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \gamma H \sin \theta + 4\pi \gamma M_0 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi + \\ + \frac{2\gamma K}{M_0} \sin \theta \cos \theta - \frac{2\gamma A}{M_0} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}. \end{aligned} \quad (11.218)$$

Из (11.217) выделяем производную:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{4\pi \gamma M_0}{v} \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi. \quad (11.219)$$

Дифференцируя это выражение по Y и повторно используя (11.219), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} = \frac{4\pi \gamma M_0}{v} \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \\ = \left(\frac{4\pi \gamma M_0}{v} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi. \end{aligned} \quad (11.220)$$

Подставляя полученные производные (11.219) и (11.220) в (11.218), разделив все на $\gamma \sin \theta$, перенося член, содержащий H , в левую часть

и вынося за скобку $\cos \theta$ в правой части, получаем

$$4\pi\alpha M_0 \sin \varphi \cos \varphi - H = \cos \theta \left[4\pi M_0 \sin^2 \varphi + \right. \\ \left. + \frac{2K}{M_0} - \frac{2A}{M_0} \left(\frac{4\pi\gamma M_0}{v} \right)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \right]. \quad (11.221)$$

11.4.5. Критическое поле Уокера

Так как левая часть выражения (11.221) от θ не зависит, тогда как правая зависит, то в силу произвольности θ обе части равны нулю.

Из равенства нулю левой части получаем

$$H = 2\pi\alpha M_0 \sin 2\varphi. \quad (11.222)$$

Выражая $\sin 2\varphi$, получаем

$$\sin 2\varphi = \frac{H}{2\pi\alpha M_0}. \quad (11.223)$$

Здесь H — внешнее поле, которое вызывает движение доменной границы.

Исходя из математического смысла левой части, следует считать, что правая часть не должна превышать единицу. То есть (11.223) можно рассматривать как условие, определяющее максимально допустимое значение угла φ , при котором правая часть становится равной единице. Поскольку под знаком синуса стоит удвоенный аргумент, то из этого следует, что максимальное значение угла φ равно 45° .

Введем обозначение

$$H_w = 2\pi\alpha M_0. \quad (11.224)$$

С этим обозначением запишем (11.223) в виде

$$\sin 2\varphi = \frac{H}{2\pi\alpha M_0} = \frac{H}{H_w}. \quad (11.225)$$

Отсюда, соответствии с математическим смыслом синуса, получаем

$$\sin 2\varphi \leq \frac{H}{H_w}. \quad (11.226)$$

Выражение (11.224) обычно называется «предельным или критическим полем Уокера» [233, 235], и оно определяет максимально допустимое значение внешнего поля, при котором система уравнений (11.202), (11.203) с учетом (11.197)–(11.199) способна описать равномерное поступательное движение плоской доменной границы в соответствии с (11.206).

Более подробное рассмотрение показывает, что при превышении внешнего поля величины H_w равномерное движение доменной границы становится неустойчивым и ее скорость приобретает осциллирующий характер. Такое состояние, называемое «срывом стационарного движе-

ния доменной стенки», более подробно рассмотрено в обзорной монографии [235, стр. 171–174].

Из (11.224) можно видеть, что поле Уокера прямо пропорционально параметру затухания прецессии намагниченности α . То есть, чем больше затухание, тем выше допустимое значение поля, при котором стенку еще можно рассматривать движущейся равномерно. Определим теперь скорость движения доменной границы в пределах допустимого значения поля.

11.4.6. Предельная скорость Уокера

Из равенства нулю правой части (11.221) получаем

$$4\pi M_0 \sin^2 \varphi + \frac{2K}{M_0} - \frac{2A}{M_0} \left(\frac{4\pi\gamma M_0}{v} \right)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = 0. \quad (11.227)$$

Умножая на $M_0/2$ получаем для v^2 :

$$v^2 = \frac{A(4\pi\gamma M_0)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{2\pi M_0^2 \sin^2 \varphi + K}. \quad (11.228)$$

Подобно (11.25), введем традиционно используемый в технике ЦМД параметр, называемый «фактором качества» пленки [235, стр. 11]:

$$Q = \frac{K}{2\pi M_0}, \quad (11.229)$$

с помощью которого запишем (11.228) в виде

$$v^2 = \frac{2\pi A\gamma^2 \sin^2 2\varphi}{Q + \sin^2 \varphi}. \quad (11.230)$$

Учтем далее, что толщина доменной границы равна [235, стр. 100]

$$\Delta_0 = \sqrt{A/K}. \quad (11.231)$$

Выражая из этой формулы A , учитывая (11.229) и подставляя в (11.230), получаем

$$v^2 = \frac{4\pi^2\gamma^2 M_0^2 \Delta_0^2 Q \sin^2 2\varphi}{Q + \sin^2 \varphi}. \quad (11.232)$$

Извлекая корень, получаем

$$v = \frac{2\pi\gamma M_0 \Delta_0 \sin^2 2\varphi}{\sqrt{1 + \frac{1}{Q} \sin^2 \varphi}}. \quad (11.233)$$

Подставляя (11.225) и проводя некоторые упрощения, получаем

$$v = \frac{\gamma \Delta_0 H}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{Q} \sin^2 \varphi}}. \quad (11.234)$$

Найдем теперь $\sin^2 \varphi$ из того же условия (11.225):

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{H}{H_w} \right)^2} \right]. \quad (11.235)$$

Подставляя это выражение в (11.234), находим скорость равномерного движения границы в виде

$$v = \frac{\gamma \Delta_0}{\alpha} \left\{ 1 + \frac{1}{2Q} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{H}{H_w} \right)^2} \right] \right\}^{-1/2} H. \quad (11.236)$$

Можно видеть, что в такой записи при малом поле $H \ll H_w$ скорость движения границы прямо пропорциональна этому полю:

$$v = \frac{\gamma \Delta_0}{\alpha} H. \quad (11.237)$$

Это — классическая формула [235, стр. 158, форм. (10.16)], с точностью до обозначений впервые полученная еще в работе [14, стр. 140, форм. (29)].

Коэффициент пропорциональности между скоростью и полем, называемый подвижностью [233, 235], имеет вид:

$$\mu = \frac{\gamma \Delta_0}{\alpha}, \quad (11.238)$$

то есть

$$v = \mu H. \quad (11.239)$$

При поле, равном критическому, то есть при $H = H_w$, из (11.236) получаем:

$$v = 2\pi\gamma\Delta_0 M_0 \left(1 + \frac{1}{2Q} \right)^{-1/2}. \quad (11.240)$$

Это — скорость, при которой вектор намагниченности отклонен от плоскости границы на угол $\varphi = 45^\circ$, в соответствии с условием (11.225) при $H = H_w$. Такая скорость является пределом, выше которого доменная граница не может двигаться как целое, ибо в противном случае нарушается условие (11.226).

При $Q \gg 1$ выражение (11.240) приобретает особенно простой вид:

$$v_w = 2\pi\gamma\Delta_0 M_0. \quad (11.241)$$

С учетом (11.231) можно записать v_w через параметры материала:

$$v_w = 2\pi\gamma M_0 \sqrt{A/K}. \quad (11.242)$$

Полученная здесь скорость (11.241) или (11.242) считается предельной скоростью, который может достигнуть доменная граница при своем движении как целое. Исторически устоявшееся название этой скорости — «предельная скорость Уокера» или «Уокеровская скорость» [235, стр. 172]. Однако следует заметить, что самим Уокером такое выражение опубликовано не было, на что есть указание в книге [235,

стр. 369, ссылка № 320]. Благодаря такому положению, в большинстве статей по ЦМД семидесятых годов указывалось на скорость Уокера со ссылкой «No published».

Следует заметить также, что решение уравнения движения намагниченности в виде волны, описываемой переменной Даламбера вида (11.206), имеющее солитонный характер, было независимо также получено в работе [300].

11.5. Замечание об энергии доменной границы

Авторы настоящей монографии не ставили своей целью более подробный расчет конфигурации и распределения намагниченности в доменной границе и структуре в целом, так что приведенные в данной главе выкладки имеют чисто методическое значение, как весьма полезные для понимания дальнейшего изложения.

В самом деле, на основе полученных двух решений (11.60)–(11.63) и (11.64)–(11.66) нельзя напрямую сделать вывод о том, какой вид границы реализуется в практической ситуации. Вывод обоих выражений носит в первую очередь методический характер, призванный пояснить, как именно надо работать с распределением намагниченности в пределах доменной границы. Тем не менее, на их основе можно попытаться сделать некоторые полезные выводы.

Так, из сравнения выражений (11.63) и (11.66), в обоих случаях определяющих ширину доменной границы, можно видеть, что при всех одинаковых параметрах ширина неелевской границы должна быть несколько меньше, чем ширина блоховской, причем такое различие становится тем заметнее, чем намагниченность материала больше. Отсюда можно сделать вывод, что плотность энергии, приходящейся на единицу площади границы, для блоховской границы должна быть больше, чем такая же плотность энергии для границы неелевской. Однако такой вывод является ошибочным. В самом деле, плотность энергии границы определяется интегралом от выражения (11.1), где последнее слагаемое отражает плотность энергии размагничивания, реализующейся только для неелевской границы в виде добавки $2\pi M_0^2$ к константе анизотропии K в выражении (11.66). Именно это размагничивание как бы «сжимает» неелевскую границу, делая ее более тонкой, чем блоховская. Но одновременно оно и повышает общую плотность энергии границы, что отражается в положительном знаке последнего слагаемого в (11.1). Таким образом, в простейшем варианте, чтобы оценить энергетическое преимущество той или иной границы, следует рассчитать интеграл вида (11.3), в который входит (11.1), при условии подстановки в него выражений (11.60)–(11.63) и (11.64)–(11.66).

Подобный расчет для блоховской границы выполнен, например, в [12, стр. 301], в том числе для различных других вариантов доменных границ в [12, стр. 324–327]. Следует заметить, что в реальной ситуации кроме приведенных также следует учитывать дополнительные факторы,

такие, как магнитоупругое взаимодействие, другие виды анизотропии, а также форму образца.

Так, на основе учета магнитоупругого взаимодействия, в [12, стр. 321–322] выявлена невыгодность 90-градусных границ по сравнению с 180-градусными, а на основе учета анизотропии в плоскости пленки найдены условия, при которых границы неелевского типа становятся более выгодными [235, стр. 103].

Зависимость энергии доменных границ блоховского и неелевского типа от толщины пленки, из которой следует, что в особенно тонких пленках неелевские границы становятся более выгодными по сравнению с блоховскими, представлена в работе [234, стр. 142, рис. 13.3]. Указано критическое значение толщины пленки, составляющее около 0,1 от Δ_0 , ниже которого более выгодна стенка Нееля, а выше — стенка Блоха.

Некоторые вопросы, касающиеся математического аппарата, используемого при расчете границ неелевского типа, можно найти в обзорно-справочной монографии [234, стр. 51–61]. Заметим однако, что все математические выражения, присутствующие в этой монографии, приведены без вывода, хотя целесообразность к ней обращения, которое авторы рекомендуют любознательному читателю, возможно, в какой-то степени оправдывается довольно подробной библиографией.

Выводы по главе 11

Данная глава посвящена некоторым вопросам, касающимся статики и динамики локального изменения ориентации намагниченности в магнитной среде, каковым является доменная граница. Показано, что статическая доменная граница, движущаяся доменная граница и магнитный солитон представляют собой явления родственного характера, допускающие сходное математическое описание.

Основные результаты, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрено стационарное распределение намагниченности в доменной границе при одноосной анизотропии в отсутствие внешнего поля. Приведена общая геометрия задачи, введены две системы координат — декартова и сферическая. Одна из осей декартовой системы совпадает с осью анизотропии, а проходящая через нее плоскость совпадает с плоскостью доменной границы. Полярная ось сферической системы параллельна оси одноосной анизотропии, а азимутальный угол отсчитывается от плоскости границы. Представлена схема распределения намагниченности в доменной границе, соответствующая расположению оси одноосной анизотропии в плоскости границы. Отмечено, что вдали от доменной границы вектор намагниченности ориентирован вдоль оси анизотропии, по разные стороны от границы в положительном и отрицательном направлениях, а внутри самой границы поворачивается

от положительного направления к отрицательному на сравнительно небольшом расстоянии вдоль нормали к плоскости границы.

2. Выделены два частных случая распределения намагниченности. Первый случай — блоховская доменная граница, в которой вектор намагниченности в процессе поворота остается параллельным плоскости, проходящей через ось анизотропии перпендикулярно нормали к плоскости границы, Второй случай — неелевская доменная граница, в которой вектор намагниченности в процессе поворота остается параллельным плоскости, проходящей через ось анизотропии и нормаль к плоскости границы.

3. Приведено выражение для плотности энергии доменной границы в сферической системе координат, состоящее из трех слагаемых. Первое слагаемое соответствует плотности энергии неоднородного обменного взаимодействия в предположении, что граница движется как целое вдоль нормали к собственной плоскости. Второе слагаемое соответствует плотности энергии одноосной анизотропии, ось которой лежит в плоскости границы. Третье слагаемое соответствует плотности энергии поля размагничивания, перпендикулярного плоскости границы.

4. В качестве предварительного рассмотрен общий случай структуры границы, предполагающий изменение по нормали к плоскости границы как полярного, так и азимутального углов вектора намагниченности. Выявлено, что условием стационарного состояния ориентации намагниченности является минимизация интеграла от плотности энергии по координате, перпендикулярной плоскости границы. Для выполнения минимизации использован аппарат вариационного исчисления, состоящий в решении системы из двух уравнений Эйлера, соответствующих полярной и азимутальной координатам намагниченности. Введена новая координатная переменная, нормированная на ширину (толщину) доменной границы. С использованием этой переменной получена система двух связанных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, соответствующих полярной и азимутальной координатам. Ввиду крайне высокой сложности решения полученной системы рассмотрен частный случай, предполагающий неизменность азимутальной ориентации вектора намагниченности во всем пространстве. Показано, что в таком предположении система значительно упрощается, причем решение одного из ее уравнений допускает только два значения азимутального угла, соответствующие нулю и 90° градусам, а другое определяет распределение намагниченности по полярному углу. Отмечено, что первое решение соответствует блоховской доменной границе, а второе — неелевской.

5. Рассмотрена конфигурация распределения намагниченности в блоховской доменной границе. Путем двойного интегрирования уравнения стационарного состояния с учетом граничных условий на бесконечности получено решение для зависимости полярного угла вектора намагниченности от нормированной координаты, перпендикулярной плоскости границы. Показано, что такое решение имеет вид удвоенного

арктангенса от экспоненты, показатель которой равен нормированной координате.

6. Рассмотрена конфигурация распределения намагниченности в неелевской доменной границе. Показано, что решение сводится к случаю блоховской границы с учетом умножения на коэффициент, равный сумме единицы и отношения поля размагничивания по толщине пленки к полю одноосной анизотропии, обратно пропорциональный фактору качества магнитной пленки. Показано, что решение имеет вид удвоенного арктангенса от экспоненты, показатель которой равен нормированной координате, умноженной на квадратный корень из упомянутого коэффициента.

7. Выполнено приведение уравнений для блоховской и неелевской границ к одинаковому виду с точностью до нормирующего коэффициента, равного сумме единицы и отношения поля размагничивания к полю одноосной анизотропии. Показано, что такое единое уравнение представляет собой разность между второй производной от полярного угла намагниченности по нормированной координате и произведением синуса на косинус полярного угла. Отмечена эквивалентность между полученным уравнением и классическим солитонным уравнением синус-Гордона в переменных Даламбера.

8. Рассмотрено уравнение движения намагниченности в сферической системе координат. Выполнен перевод классического уравнения Ландау–Лифшица, записанного в декартовой системе координат, в сферическую систему. Показано, что при условии постоянства длины вектора намагниченности система уравнений Ландау–Лифшица для трех декартовых координат переходит в систему из двух уравнений относительно полярной и азимутальной координат вектора намагниченности, связывающих производные от этих координат по времени с производными от плотности энергии магнетика по этим координатам. Отмечен локальный характер полученной системы, указано, что условием ее применимости является непрерывность плотности энергии магнетика, в том числе с учетом энергии неоднородного обменного взаимодействия.

9. Рассмотрено применение полученных уравнений движения к задаче о динамике доменной границы при условии постоянства и малости азимутального угла вектора намагниченности. Записана плотность энергии магнетика, содержащая энергию неоднородного обменного взаимодействия, энергию анизотропии и поля размагничивания, перпендикулярного плоскости границы. С помощью этих производных получено неоднородное уравнение движения для полярного угла вектора намагниченности, однородная часть которого содержит разность вторых производных от полярного угла по времени и координате, а неоднородная — произведение синуса на косинус полярного угла. Показано, что полученное уравнение с точностью до нормирующих коэффициентов полностью совпадает с классическим солитонным уравнением синус-Гордона. Обсуждено классическое решение уравнения синус-Гордона, пред-

ставляющее собой арксинус от обратного гиперболического косинуса переменной Даламбера. Приведен вид такого решения, сохраняющий корректность во всем интервале изменения переменной Даламбера — от минус до плюс бесконечности.

10. Рассмотрена геометрическая интерпретация полученного решения. Показано, что оно на минус бесконечности стремится к нулю, на плюс бесконечности стремится к 180° , а вблизи нуля имеет резкий перепад между этими значениями, происходящий в интервале изменения координаты порядка нескольких (обычно трех-пяти) нормированных ее значений. Установлен квазирелятивистский характер приведенного решения. Показано, что при стремлении скорости движения границы к пределу, пропорциональному произведению гиромангнитной постоянной на корень из постоянной неоднородного обмена, интервал резкого изменения ориентации намагниченности уменьшается, стремясь к малой величине, ограниченной величиной расстояния между атомами. Отмечена некорректность реализации такого предела, обусловленная принятым при решении задачи условием малости азимутального угла вектора намагниченности.

11. Рассмотрено приведение уравнения для движущейся границы к уравнению для стационарной границы путем введения переменной Даламбера. Показано, что для реализации такого приведения необходима нормировка координатной переменной на ширину (толщину) доменной границы, а также умножение переменной Даламбера на релятивистский множитель, содержащий отношение констант анизотропии и неоднородного обмена. Результатом преобразований является уравнение, содержащее вторую производную по координате от полярного угла и произведение синуса на косинус того же угла, что с точностью до нормировки совпадает с уравнением для стационарной границы.

12. Рассмотрено соотношение двух видов решения солитонного уравнения — через арксинус от обратного гиперболического косинуса и через арктангенс от экспоненты, показатель которой содержит координатную переменную. В каждом из решений выделена неизвестная, соответствующая полярному углу вектора намагниченности, после чего путем сравнения выявлена их полная идентичность, что доказывает математическую эквивалентность обоих видов решения солитонного уравнения.

13. Рассмотрено преобразование уравнения для движущейся доменной границы в классическое уравнение синус-Гордона. Для реализации такого преобразования введено обозначение коэффициента при производной по координате, эквивалентное скорости в волновом уравнении обычного типа, выполнена нормировка координатной переменной на ширину (толщину) доменной границы и нормировка полярного угла вектора намагниченности на одну вторую, а также введено обозначение для коэффициента при неоднородной части исходного уравнения. В результате получено уравнение, с точностью до обозначений полностью совпадающее с классическим уравнением синус-Гордона.

Установлено, что проведение подобных преобразований позволяет свести решение уравнения синус-Гордона к решению уравнения для стационарной доменной границы. Выявлена ограниченность получаемого решения, состоящая в его односолитонном характере. Отмечено, что подобная ограниченность может быть преодолена путем использования классических преобразований Бэклунда, однако в силу специфики поведения доменной границы в магнитной среде использование подобных преобразований в какой-то степени проблематично, и его правомерность требует более подробного исследования.

14. Рассмотрено решение уравнений движения для доменной границы без ограничения, налагаемого малостью азимутального угла вектора намагниченности, однако в предположении его постоянства по всему объему магнетика. Исследовано движение границы под воздействием «продвигающего» поля, параллельного оси анизотропии. Качественно рассмотрена возможность реализации такого поля. Отмечено, что в случае многодоменной структуры перемагничивание образца происходит не сразу целиком во всем объеме, что требует преодоления высокого потенциального барьера, а путем смещения границ доменов, что и проявляется как воздействие на границу «продвигающего» поля. Записано выражение для плотности энергии магнетика, содержащее кроме энергий неоднородного обмена, анизотропии и поля размагничивания границы, также еще и энергию взаимодействия намагниченности с внешним (продвигающим) полем. Выполнена подстановка этого выражения в уравнения движения намагниченности с учетом затухания, записанные в сферической системе координат. Для характеристики движения границы вдоль нормали к ее плоскости введена переменная Даламбера, содержащая разность между координатой границы и произведением скорости движения границы на время. Введение такой переменной позволило осуществить дальнейшее решение задачи в системе отсчета, движущейся вдоль нормали к границе со скоростью движения самой границы. В результате перехода к новым переменным получено уравнение, содержащее два сомножителя, один из которых зависит только от азимутальной переменной, а второй — только от полярной. Условие произвольности полярного угла позволило выделить уравнение для азимутального угла, решение которого дало зависимость этого угла от продвигающего поля. Условием разрешимости этого уравнения явилось предельное значение поля, называемое «полем Уокера», а также предельное значение азимутального угла, равное 45 градусам. Отмечено, что такому значению угла соответствует предельная скорость доменной границы, называемая «предельной скоростью Уокера». Показано, что предельное поле Уокера пропорционально произведению намагниченности насыщения на параметр затухания Гильберта, а предельная скорость Уокера пропорциональна произведению гиромангнитной постоянной на намагниченность насыщения и ширину (толщину) доменной границы или на квадратный корень из отношения констант неоднородного обмена и анизотропии. Отмечено, что при превыше-

нии полем предельного значения Уокера движение доменной границы становится неустойчивым и ее скорость приобретает осциллирующий характер.

15. Рассмотрена скорость движения доменной границы в пределах допустимого значения поля, то есть когда оно меньше поля Уокера. Отмечено, что в силу пропорциональности поля Уокера параметру затухания прецессии намагниченности, при увеличении затухания интервал поля, в котором движение границы является равномерным, сужается. Из решения уравнения движения при малом значении продвигающего поля получено выражение для скорости равномерного движения границы, обратно пропорциональной параметру затухания и прямо пропорциональное произведению ширины границы на величину продвигающего поля. Установлена тождественность коэффициента между продвигающим полем и скоростью, соответствующего классическому определению подвижности доменных границ при поле, значительно меньшем поля Уокера. Показано, что при полном решении уравнения движения границы без предположения о малости продвигающего поля, подстановка поля Уокера в полученное выражение для скорости границы приводит к значению, равному предельной скорости Уокера.

16. Приведены некоторые замечания, касающиеся энергии доменной границы. Отмечено, что проведенное рассмотрение носит предельно идеализированный характер, не позволяющий напрямую установить, какая структура доменной границы — блоховская или неелевская реализуется в практическом случае. Отмечено, что при всех одинаковых параметрах ширина неелевской границы должна быть несколько меньше, чем ширина блоховской, причем такое различие становится тем заметнее, чем намагниченность материала больше. Причиной сжатия неелевской границы является размагничивающее поле границы, которое в то же время увеличивает плотность энергии границы на единицу ее площади. Отмечено, что для оценки энергетического преимущества той или иной структуры границы следует рассчитывать полный интеграл по всему объему тела, в том числе учитывать магнитоупругое взаимодействие, дополнительные виды анизотропии и форму образца. Приведены библиографические ссылки на работы, где подобные расчеты выполняются в полном объеме, в том числе на основе учета магнитоупругого взаимодействия выявлена невыгодность 90-градусных границ по сравнению со 180-градусными, а на основе учета анизотропии в плоскости пленки найдены условия, при которых границы неелевского типа становятся более выгодными по сравнению с блоховскими.

Глава 12

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЛЕНКАХ С ДОМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Основным предметом рассмотрения в настоящей монографии является динамика вектора намагниченности в условиях изменения его ориентации. В этом отношении данная монография является логическим продолжением предыдущей монографии [3], посвященной исследованию ферромагнитного резонанса в условиях ориентационного перехода. При этом ориентация намагниченности по пространству полагалась однородной. В настоящей монографии основное внимание уделено рассмотрению динамики намагниченности в условиях неоднородного распределения ее ориентации. В эксперименте одним из характерных примеров неоднородного распределения является доменная структура.

Ферромагнитный резонанс в образцах с доменной структурой исследовался в значительном числе работ, частично обобщенных в [15–17]. Здесь мы рассматриваем распространение магнитостатических волн в магнитных пленках, пребывающих в ненасыщенном состоянии, то есть также при наличии доменной структуры. Средой для распространения магнитостатических волн традиционно является железиттриевый гранат (ЖИГ), магнитные колебания в котором имеют рекордно малые потери, что позволяет магнитостатическим волнам распространяться на расстояния, составляющие несколько сантиметров (обычно до 2–4 см).

Теория распространения магнитостатических волн в доменах в настоящее время, по мнению авторов настоящей монографии, развита недостаточно, тогда как эксперимент проявляет значительное число разнообразных особенностей, теоретической трактовки еще не нашедших. Поэтому авторы сочли уместным сначала изложить основные экспериментальные результаты исследования распространения магнитостатических волн в пленках ЖИГ с доменами, чему и посвящена настоящая глава. Некоторые теоретические аспекты такого распространения будут рассмотрены в двух следующих главах. Материал главы опирается на результаты экспериментов, выполненных во Фрязинской части ИРЭ РАН с участием одного из авторов монографии в период с 1992 по 2012 годы. Основные результаты описаны в работах [471–488],

а также обобщены в [144]. Описание аппаратуры и методики измерений основано на материале, обобщенном в [1, стр. 125–132]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

12.1. Техника эксперимента и методика измерений

Описанные в настоящей главе эксперименты были выполнены на том же измерительном стенде, что описан в первой монографии настоящей серии [1, стр. 125–132]. Ввиду важности использовавшейся техники для понимания сути описываемых далее экспериментов, вкратце повторим описание стенда, подвижных антенн и магнита, приведенное в [1].

12.1.1. Основная техника эксперимента

Рассмотрим сначала основную технику эксперимента, следуя [1, стр. 125–132].

ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЙ СТЕНД

Эксперименты, описанные далее, проводилась на измерительном стенде, упрощенная блок-схема которого приведена на рис. 12.1 [1, стр. 126, рис. 3.5]. Здесь 1 — ферритовая пленка, 2 — магнит, 3 — излучающий преобразователь, 4 — приемный преобразователь, 5 — генератор СВЧ, 6 — приемник СВЧ, 7 — генератор синхронизации, 8 — осциллограф, 9 — источник света, 10 — микроскоп, 11 — поляризатор, 12 — анализатор. В большинстве экспериментов вместо генератора 5, приемника 6 и осциллографа 8 использовался единый прибор — измеритель комплексных коэффициентов передачи типа Р4-23, или панорамный измеритель типа Р2-52–Р2-58. Если использовались отдельные приборы, то в качестве генератора СВЧ 5 в зависимости от диапазона использовались генераторы Г4-79–Г4-81. В качестве приемника 6 — измерительные приемники П5-3–П5-5. Генератор сигналов синхронизации 7 — генератор импульсов Г5-15 или Г5-71. Осциллограф 8 — С1-54 или С1-72. Источник света 9 — осветитель для микроскопа ОИ-9М или лампа накаливания. Микроскоп 10 — МБС, МБД или другой аналогичный. Поляризатор 11 и анализатор 12 — на основе поляроидной пленки. В качестве магнита 2 использовался постоянный или электромагнит. Постоянный магнит имел круглые полюса диаметром 20 см, зазор между которыми регулировался от 5 до 25 см, что обеспечивало поле между центрами полюсов от 200 до 700 Э. Электромагнит имел полюса диаметром 12 см и в зазоре 9 см обеспечивал поле от 0 до 1700 Э. Излучающий и приемный преобразователи были выполнены в виде подвижных антенн из прямого провода длиной 3–4 мм и диаметром 12 мкм, наложенных на плоскость пленки. Механическая система обеспечивала перемещение антенн по всей плоскости пленки (диаметром 70 мм) и вращение их вокруг оси, перпендикулярной плоскости пленки. Геометрическое расположение и ориентация подвижных антенн

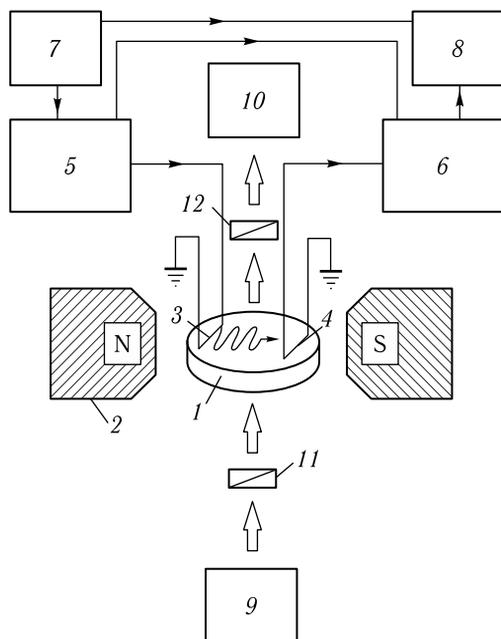


Рис. 12.1. Упрощенная блок-схема измерительного стенда [1, стр. 126, рис. 3.5]: 1 — ферритовая пленка, 2 — магнит, 3 — излучающий преобразователь, 4 — приемный преобразователь, 5 — генератор СВЧ, 6 — приемник СВЧ, 7 — генератор синхронизации, 8 — осциллограф, 9 — источник света, 10 — микроскоп, 11 — поляризатор, 12 — анализатор

определялись с помощью измерительного микроскопа 10, снабженного объект-микрометром. Наблюдение осуществлялось в отраженном свете, для чего использовался дополнительный источник подсветки в виде лампы накаливания, размещенный сбоку от пленки 1 (на рисунке не показан).

Измерительный стенд работает следующим образом. Сигнал СВЧ от генератора 5 подается на излучающий преобразователь 3, наложенный на плоскость ферритовой пленки 1. Здесь электромагнитный сигнал преобразуется в МСВ, которая распространяется по ферритовой пленке 1, находящейся в поле магнита 2. Когда МСВ достигает приемного преобразователя 4, то она снова преобразуется в электромагнитный сигнал, который принимается, усиливается и детектируется приемником 6, после чего подается на осциллограф 8. Генератор 5 может работать в непрерывном режиме, в импульсном режиме, задаваемом генератором 7, а также в режиме качания частоты. В непрерывном режиме исследуется прохождение сигнала, ориентационные и полевые зависимости, закон дисперсии МСВ, в импульсном режиме — задержка импульсного сигнала во времени, в режиме развертки по частоте — АЧХ,

фазовые характеристики, дисперсия МСВ. Опорный сигнал для измерения фазовых характеристик подается на приемник 6 с генератора 5 по дополнительному каналу (минуя пленку). При работе в импульсном режиме от генератора импульсов 7 на осциллограф 8 подается сигнал синхронизации. Доменная структура пленок наблюдается по эффекту Фарадея в проходящем поляризованном свете. Для этого используется источник света 9, поляризатор 11, анализатор 12 и микроскоп 10. Взаимная независимость оптического и СВЧ каналов позволяет проводить СВЧ измерения и наблюдение доменной структуры одновременно, что обеспечивает необходимую высокую точность измерений.

ПОДВИЖНЫЕ ЗОНДЫ

Приведем краткое описание конструкции зондовой установки, позволявшей исследовать распространение ПМСВ по плоскости пленки [1, стр. 127–130]. В первоначальной разработке конструкции принимали участие А. В. Вашковский, С. В. Герус, Д. Г. Шахназарян, А. В. Вороненко, Э. Г. Локк и другие участники авторских коллективов соответствующих работ.

Исследование распространения ПМСВ в плоскости пленки проводилось на установке, содержащей подвижные излучающий и приемный преобразователи, в качестве которых использовались прямолинейные проволочные антенны длиной 3–5 мм и диаметром 12–15 мкм, наложенные на плоскость пленки. Механическая конструкция установки иллюстрируется рис. 12.2 [1, стр. 128, рис. 3.6].

На рис. 12.2, а показана общая схема установки в виде сбоку между магнитными полюсами, то есть при взгляде вдоль поля от одного полюса до другого.

Основу установки составляет оптическая скамья 1, на которой установлены три оптических столика 2, 3 и 4. Столики 2 и 4 предназначены для крепления кронштейнов 5 и 6, несущих подвижные антенны, на столике 3 крепится образец 7, то есть исследуемая ферритовая пленка.

В качестве примера рассмотрим конструкция левого по рисунку столика 2, конструкции двух других столиков 3 и 4 аналогичны.

Столик выполнен с возможностью перемещения верхней несущей площадки в вертикальном направлении, что обеспечивается поступательным движением цилиндрической стойки 8 внутри цилиндрического тубуса 9. На поверхности стойки нанесена винтовая резьба, на которую накручивается гайка 10, опирающаяся на верхний край тубуса 9. Фиксация стойки от поворота вокруг вертикальной оси обеспечивается винтом (на рисунке не показан), ввинченным в боковую стенку тубуса и своим концом входящим в прямолинейную вертикальную прорезь на поверхности стойки, проходящей через всю покрывающую стойку резьбу. На верхнем конце стойки закреплено несущее основание, представляющее собой скрепленные крест-накрест два регулируемых продольными винтами ползунка 11 и 12 типа «ласточкиных хвостов».

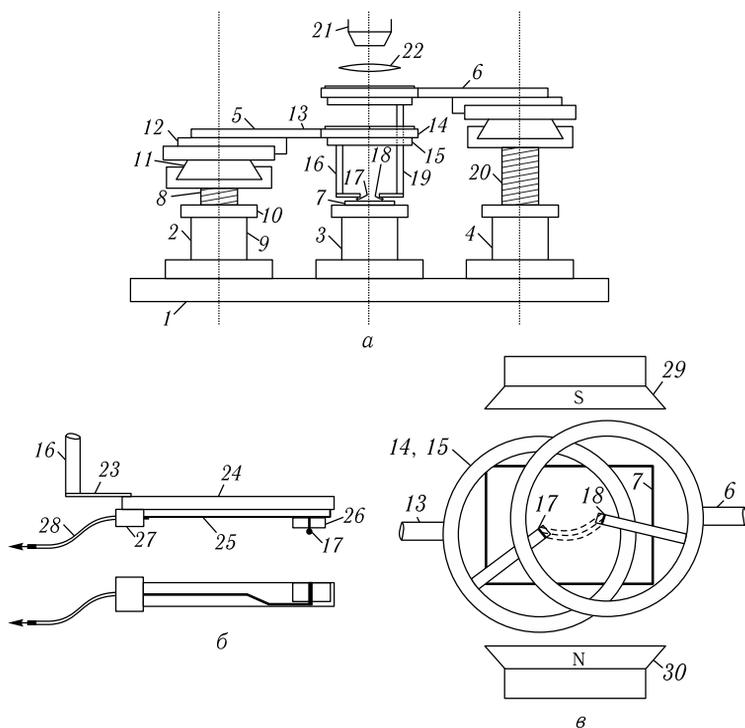


Рис. 12.2. Схема зондовой установки [1, стр. 128, рис. 3.6]

Благодаря описанной конструкции верхняя поверхность несущего основания имеет возможность плавного перемещения в трех взаимно перпендикулярных направлениях — вертикальном и двух горизонтальных — вдоль направления оптической скамьи и перпендикулярно к нему.

В верхней части несущего основания закреплен собственно кронштейн 5, представляющий собой стержень 13, на конце которого закреплено круговое кольцо 14, в которое соосно вставлено другое кольцо 15, могущее свободно вращаться относительно первого. Кольцо 15 предохранено от проваливания в кольцо 14 бортиком, выступающим в его верхней части. Положение кольца 15 относительно кольца 14 фиксируется винтом (на рисунке не показан), ввинчиваемым сбоку в кольцо 14 и упирающимся в боковую поверхность кольца 15.

На внутренней стороне кольца 15 в вертикальном положении закреплен держатель 16, к нижнему концу которого, изогнутого под прямым углом, присоединена собственно антенна 17, центр которой совпадает с осью колец 14 и 15.

Таким образом, вращение внутреннего кольца 15 относительно кольца 14 обеспечивает поворот антенны относительно вертикальной оси.

Вся система в целом обеспечивает возможность перемещения антенны по всей плоскости пленки в двух взаимно перпендикулярных координатах, а также поворот антенны относительно вертикальной оси, перпендикулярной плоскости пленки, на любой угол.

Вторая антенна 18 крепится на стойке 4 аналогичным образом с помощью кронштейна 6 и держателя 19. При этом, чтобы избежать взаимных помех при перемещении антенн, стойка 20 столика 4 выдвинута вверх так, чтобы его несущая поверхность с кронштейном 6 и закрепленными на нем кольцами находилась выше аналогичных колец кронштейна 5. При этом держатель 19 выполнен более длинным, чем держатель 16 на величину порядка 1–2 см, достаточную для беспрепятственного перемещения кронштейнов 5 и 6 с закрепленными на них кольцами друг относительно друга.

Поверхность пленки 7 с расположенными на ней антеннами 17 и 18 наблюдается сверху с помощью микроскопа 20, снабженного вспомогательной линзой 21, позволяющей увеличить его предметное расстояние до нескольких сантиметров. Регистрация положения антенн и их ориентация измерялись с помощью входящего в комплект микроскопа объект-микрометра.

На рис. 12.2, б более подробно показана схема конструкции держателя подвижной антенны. В верхней части рисунка приведен вид сбоку (аналогичный виду на рис. 12.2, а), в нижней — вид снизу со стороны пленки.

Собственно вертикальная часть держателя 16 заканчивается горизонтальной площадкой, к которой двумя винтами (на рисунке не показаны) одним концом прикреплена пружинящая пластина 23. Пластина выполнена пружинящей, чтобы обеспечить мягкость механического контакта между антенной 17 и поверхностью пленки 7, во избежание механических повреждений пленки.

К другому концу пружинящей пластины прикреплена жесткая пластина 24, на нижней поверхности которой закреплена микрополосковая линия 25, выполненная на подложке из поликора. На конце микрополосковой линии помещается поликоровая накладка 26. Собственно антенна выполнена в виде проводника 17, расположенного на поверхности этой накладки перпендикулярно оси полосковой линии, причем один конец проводника антенны соединен с центральным проводником полосковой линии, а другой заземлен на ее подложку. На другом конце полосковой линии находится разъем 27 с подключенным к нему коаксиальным кабелем 28.

На рис. 12.2, в показана схема картины, наблюдаемой в микроскоп. Снаружи картина окаймляется закрепленными на кронштейнах 13 и 6 кольцами 14, 15 обоих столиков. Смещение колец относительно друг друга обусловлено требуемым расположением подвижных антенн. Вообще говоря, кольца не должны попадать в поле зрения микроскопа, так как внутренние их размеры должны обеспечивать беспрепятственный доступ к поверхности пленки, для чего их диаметр

выбирается достаточно большим (порядка 7–10 см). Сквозь отверстия колец видна поверхность пленки 7, над которой располагаются верхние поверхности держателей подвижных антенн 17 и 18. Сами антенны находятся на нижней поверхности держателей, а сверху видны только контуры краев держателей, по координатам которых, измеряемым объект-микроскопом, устанавливается расположение непосредственно проводников антенн. Пунктирными линиями между антеннами показаны возможные траектории ПМСВ, непосредственно в микроскоп не наблюдаемые, но могущие быть измеренными с помощью подвижных антенн.

Вся конструкции находится в поле магнита, полюса которого 29 и 30 расположены таким образом, чтобы поле было направлено перпендикулярно оси установки (оси оптической скамьи 1), а в плоскости пленки было достаточно однородным. То есть магнит по высоте должен быть установлен на таком уровне, чтобы ось, проходящая через центры полюсов, приходилась на уровень плоскости пленки.

Все детали установки, кроме магнита, должны быть выполнены из немагнитных материалов, в качестве которых в настоящей работе использовалась латунь, медь или дюралюминий.

Приведем некоторые типичные размеры установки. Оптическая скамья — с любым удобным профилем, шириной около 10–20 см, исходя из устойчивости установки в целом на лабораторном столе. Длина скамьи должна обеспечивать удобство размещения столиков, то есть составлять 40–60 см. Расстояние между столиками 2 и 4 — порядка 30–40 см. Высота столиков 2 и 4 — около 15–20 см, столика 3 — около 10 см. Возможность перемещения: по вертикали — от 10 до 25 см, по обоим горизонтальным осям — до 10 см. Диаметр колец: внешнего — около 8 см, внутреннего — около 7 см. Высота колец: внешнего — около 2 см, внутреннего — около 3 см. Высота держателей 16 и 19 — 4 см и 6 см соответственно. Расстояние от поверхности пленки до объектива микроскопа — до 12 см. Линза 22 должна иметь фокусное расстояние около 3–5 см и располагаться на отдельном держателе, неподвижном относительно микроскопа.

МАГНИТ

Опишем вкратце один из использовавшихся в данной работе магнитов, создающих в плоскости пленки постоянное поле [1, стр. 130–132]. Схема магнита показана на рис. 12.3 [1, стр. 131, рис. 3.7].

Приведенные на рисунке размеры даны в миллиметрах. Все размеры являются приблизительными, то есть при повторении конструкции могут быть изменены в зависимости от требуемых условий эксплуатации.

Станина, полюса и сердечники выполнены из мягкого железа «сталь-3». Для всего магнитопровода по его длине надо по возможности соблюдать условие, чтобы площадь поперечного сечения была никак не меньше поперечного сечения сердечников катушек, а еще

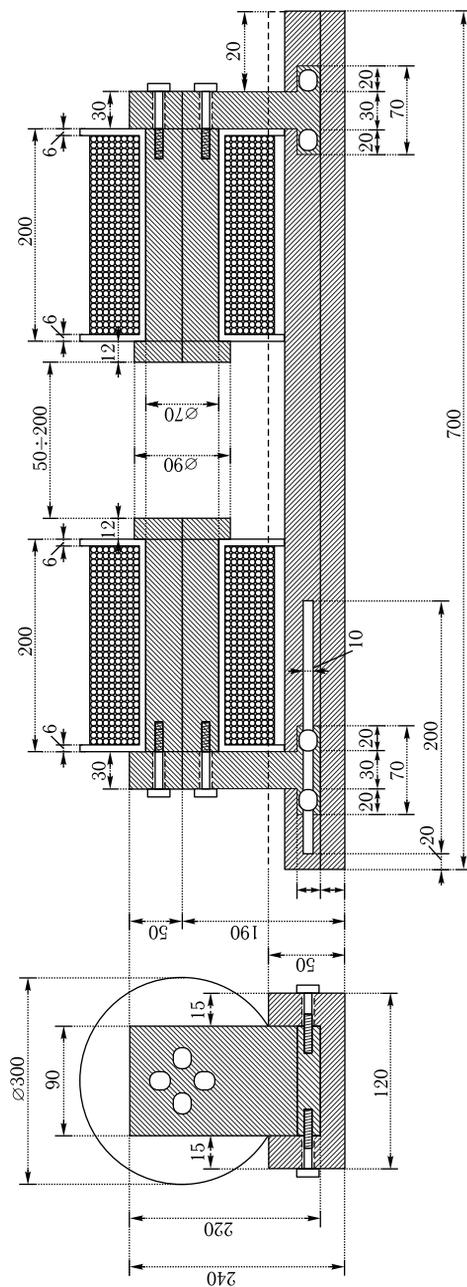


Рис. 12.3. Схема магнита [1, стр. 131, рис. 3.7]

лучше — чтобы была больше. То есть, чем лучше соблюдается это условие, тем большее поле сможет дать магнит. На рисунке пунктиром показан контур внешнего края станины, убранный, чтобы не затемнять рисунок.

Правый по рисунку полюс закреплялся на станине неподвижно. Левый можно было передвигать и закреплять неподвижно в нужном положении с помощью винтов, перемещающихся в пазах станины, чем достигалась установка требуемого зазора между полюсами от 50 до 200 мм.

Каркасы катушек с толщиной всех стенок по 6 мм — из дюраля. Боковые щечки катушек скреплены со сквозным цилиндрическим основанием с помощью винтов МЗ, входящих со стороны щечек в основание вдоль продольной оси цилиндра. Каркасы катушек изнутри обклеены лакотканью.

Катушки намотаны медным проводом ПЭЛ-0,8 (или ПЭВ-0,8), то есть проводом диаметром 0,8 мм в эмаливой изоляции. Намотка — навалом, равномерность намотки устанавливалась на глаз. Намотка осуществлялась с помощью большого токарного станка (размером с диван), запущенного на медленный обратный ход. Время намотки заняло два дня.

Каждая из катушек содержит по четыре секции, так что на обеих катушках секций всего восемь. Секции намотаны друг на друга, то есть одна поверх другой. Количество витков не считалось. Количество провода в секциях подгонялись по равенству сопротивления, то есть самая внутренняя секция была самой толстой, самая внешняя — самой тонкой. Требуемые толщины секций рассчитывались заранее, исходя из среднего диаметра витков, то есть так, чтобы объем провода в каждой секции, определяемый как произведение поперечного сечения секции на среднюю длину витка, сохранялся постоянным. В соответствии с полученными значениями толщин секций в щечках были просверлены отверстия, через которые концы намотки каждой секции выводились наружу. Между секциями прокладывался слой лакоткани. Концы обмоток выводились в трубках из кембрика толщиной около 3 мм. На каждой щечке снаружи была закреплена текстолитовая плата с разводкой выводов катушек.

Столь сложное секционированное устройство катушек было сделано для универсальности, то есть для того, чтобы магнит можно было питать от источника с возможно произвольным соотношением тока и напряжения. Так, при последовательном соединении всех секций общее сопротивление было довольно большим, и для питания можно было использовать источник такого типа, как для ламповых схем, то есть с напряжением 200–300 В и током менее 1 А. При параллельном соединении секций общее сопротивление было довольно малым и можно было использовать источник зарядного устройства для аккумуляторов или сами аккумуляторы, то есть с напряжением 10–20 В и током 5–10 А. Кроме того, можно было на большую часть секций подавать

постоянное питание, а на одну-две секции — регулируемое, что давало дополнительную возможность вариаций в выборе источника, а также обеспечивало более тонкую регулировку поля. Благодаря независимости секций друг от друга можно было питать только какую-то часть из них, или каждую секцию по отдельности от своего источника.

Магнит без охлаждения обеспечивает в зазоре 5 см поле до 3000 Э, в зазоре 10 см — до 1500 Э. В меньшем зазоре и при некотором небольшом нагреве (градусов на десять выше комнатной и не долго) может обеспечить поле до 5000 Э.

Один из рабочих вариантов источников питания магнита состоит из двух ЛАТРов (больших), один из которых питает шесть или семь секций, а другой — одну или две. Выпрямление тока осуществляется с помощью силовых диодов (около 20 штук), сглаживание — с помощью четырех электролитических конденсаторов 500 мкФ на 450 В. Измерение базового и регулировочного токов осуществляется с помощью двух микроамперметров на 100 мкА с шунтами.

12.1.2. Методика измерений

Рассмотрим теперь вкратце применявшуюся методику измерений.

Что касается параметров доменной структуры, то здесь измерения проводились полностью стандартным магнитооптическим методом, основанным на наблюдении доменов в поляризованном свете на просвет по эффекту Фарадея [235, стр. 55–56]. Благодаря различию ориентации намагниченности в отдельных доменах, поляризованный свет, проходя через домены противоположных знаков, испытывает поворот поляризации в противоположных направлениях, что после рассмотрения через анализатор дает картину чередующихся темных и светлых полос. Измерение размера доменов и их ориентации выполнялись с помощью измерительного микроскопа, снабженного объект-микроскопом (10 на рис. 12.1).

В описываемых далее экспериментах по распространению магнито-статических волн измерялась дисперсионная зависимость и снимались эквивалентные кривые.

Дисперсионная зависимость снималась при постоянном значении поля путем задания значений частоты с определенным шагом. При каждом заданном значении частоты выполнялось перемещение приемного преобразователя вдоль направления распространения волны. Наблюдалось изменение фазы принимаемого сигнала и фиксировались два значения координаты приемного преобразователя, при которых происходило изменение фазы на 360° , что давало длину волны. По полученной длине волны определялось волновое число (как обратная величина, умноженная на 2π), что и давало точку на зависимости волнового числа от частоты. Такие измерения проводились в каждой точке шага по частоте, что и давало полную дисперсионную кривую как зависимость частоты от волнового числа.

Эквивалентные кривые, как и зависимости частоты от поля, соответствующие определенному волновому числу, снимались при фиксированном расстоянии между преобразователями, что обеспечивало фиксированную длину волны или волнового числа. При этом первичное значение волнового числа определялось путем перемещения приемного преобразователя, после чего во всем интервале изменения поля этот преобразователь далее не перемещался. При изменении поля с определенным шагом, частота подбиралась так, чтобы набег фазы оставался постоянным. Получаемые таким образом значения частот образовывали зависимость частоты от поля, соответствующую постоянной фазе, что и давало «эквивалентную» кривую. Получаемые таким образом результаты приведены далее.

12.2. Основные свойства пленок ЖИГ и доменных структур в них

Прежде чем рассматривать эксперименты по распространению магнитостатических волн в пленках железоиттриевого граната (ЖИГ) с доменами, остановимся кратко на статических свойствах самих пленок и доменов в них.

В экспериментах, описанных далее, исследовались пленки ЖИГ, выращенные на подложках из гадолиний-галлиевого граната (ГГГ), вырезанных в кристаллографической плоскости типа (111). Намагниченность насыщения пленок составляла 1700–1900 Гс, их толщина — 5–20 мкм, диаметр подложек равнялся 60–70 мм. В большинстве случаев пленки отличались от объемных монокристаллов ЖИГ наличием наведенной (ростовой) анизотропии, обусловленной некоторым рассогласованием параметров решетки пленки и подложки. Кроме одноосной в пленках имелась заметная кубическая анизотропия, причем поле одноосной анизотропии составляло ~ 100 –400 Э, а поле кубической ~ 40 Э, то есть обе эти величины были значительно меньше намагниченности насыщения (порядка 1750 Гс), в результате чего характер доменной структуры получался весьма сложным, не поддающимся расчету аналитическими методами.

12.2.1. Разделение пленок на два типа по характеру доменной структуры

Эксперименты, описанные в работах [471–488] и особенно [477], показали, что по характеру доменной структуры все доступные авторам этих работ пленки ЖИГ можно было разделить на два типа. В пленках первого типа при наблюдении в микроскоп контрастность доменной структуры высока: углы поворота плоскости поляризации света в отдельных доменах составляют до 2° – 3° . В пленках второго типа контрастность наблюдаемой доменной структуры довольно мала: углы поворота не превышают $0,26^\circ$ – $0,4^\circ$. Высокая контрастность наблюдаемой доменной структуры в пленках первого типа свидетель-

ствуется об ориентации векторов намагниченности в доменах вблизи нормали к плоскости пленки (под углом 70° – 90° к этой плоскости). В пленках второго типа векторы намагниченности ориентированы вблизи плоскости пленки (отклонение не превышает 20°). При толщине пленок 5–20 мкм ширина доменов в пленках первого типа значительно меньше толщины пленки и составляет 2–5 мкм, а в пленках второго типа — заметно больше их толщины и составляет 10–20 мкм.

12.2.2. Роль нормальной анизотропии

Причиной существования двух видов доменных структур является разная величина поля одноосной анизотропии, перпендикулярной плоскости пленки. Действительно, равновесная ориентация векторов намагниченности внутри доменов обусловлена, главным образом, двумя факторами: полем анизотропии и полем размагничивания. В насыщенном состоянии поле размагничивания определяется только формой пленки, тогда как при наличии доменной структуры оно также зависит от отношения ширины доменов к толщине пленки. В системе координат $Oxyz$, плоскость Oyz которой совпадает с плоскостью пленки, плотность энергии одноосной анизотропии и размагничивающего поля вдоль оси Ox можно записать в виде

$$W = K(M_y^2 + M_z^2)M_0^{-2} + 2\pi GM_x^2, \quad (12.1)$$

где K — константа одноосной анизотропии, $M_{x,y,z}$ — компоненты вектора намагниченности, M_0 — намагниченность насыщения, G — коэффициент, определяющий размагничивающий фактор (заметим, что использование здесь понятия размагничивающего фактора не вполне корректно ввиду неоднородности поля внутри домена, однако для грубой оценки указанной неоднородностью можно пренебречь). Для пленки без доменов $G = 1$. Для пленки с доменами $G < 1$ и определяется конкретной формой доменов. С точностью до постоянного слагаемого (12.1) можно записать в виде

$$W = (K - 2\pi GM_0^2)(M_y^2 + M_z^2)M_0^{-2}. \quad (12.2)$$

Находя равновесное положение вектора намагниченности, получаем, что намагниченность ориентирована перпендикулярно плоскости пленки при $H_a > H_{mg}$ и лежит в плоскости пленки при $H_a < H_{mg}$, где $H_a = 2K/M_0$ — поле одноосной анизотропии, $H_{mg} = 4\pi GM_0$ — эффективное размагничивающее поле с учетом формы доменов. Первое неравенство ($H_a > H_{mg}$) соответствует пленкам первого типа, второе ($H_a < H_{mg}$) — пленкам второго типа.

В пленках второго типа, где ширина доменов больше толщины пленки, размагничивающий фактор домена в направлении, перпендикулярном плоскости пленки, приближается к 4π , то есть H_{mg} к $4\pi M_0$, поэтому ориентация вектора намагниченности близка к плоскости пленки. В пленках первого типа, где ширина доменов меньше толщины пленки, поле H_{mg} складывается из размагничивающего поля формы самого

домена, а также полей, создаваемых другими доменами. При ширине домена 2–4 мкм и толщине пленки 10–15 мкм, оценивая размагничивающий фактор в приближении эллипсоида [16, стр. 571–573; 17, стр. 445–447], получаем $G \sim 0,2$, то есть $H_{mg} \sim 350$ Э. Действие соседних доменов и кубической анизотропии уменьшают эту величину. Экспериментальные оценки показывают, что имеет место критическое значение поля одноосной анизотропии, составляющее около 120 Э. Итак, если поле одноосной анизотропии меньше 120 Э, то вектор намагниченности лежит в плоскости пленки, если больше этой величины — вектор намагниченности перпендикулярен плоскости пленки. При этом даже небольшое (единицы процентов) изменение поля анизотропии относительно указанной критической величины резко меняет равновесную ориентацию вектора намагниченности — от параллельной плоскости пленки до перпендикулярной к ней.

Таким образом, с определенной уверенностью можно полагать, что отмеченное выше резкое разграничение пленок по характеру доменной структуры на два различных типа обусловлено плавными небольшими вариациями поля анизотропии вокруг критического значения ~ 120 Э.

12.2.3. Экспериментальное исследование анизотропных свойств пленок

Для более подробного выявления количественных характеристик были проведены измерения основных параметров 19 пленок ЖИГ, 9 из которых относились к первому типу, 10 — ко второму. Пленки были выращены на подложках из ГГГ диаметром 60–70 мм, вырезанных в плоскости (111). Толщина пленок, измеренная интерференционным методом, составляла от 5,2 до 19,1 мкм. Измерение анизотропии и намагниченности пленок проводилось в насыщенном состоянии методом ферромагнитного резонанса (ФМР) в диапазоне частот 2–4 ГГц при намагничивании пленки в плоскости параллельно проекции оси типа [111] на плоскость пленки и перпендикулярно этой проекции. Резонансная частота для первого случая вычислялась по формуле (полученной с помощью методов, описанных в [3, главы 6, 7]):

$$f_h = \frac{\gamma}{2\pi} \left\{ (H_0 - 3\sqrt{2} H_k M_x^e / M_0) \times \right. \\ \left. \times [H_0 + 4\pi M_0 - H_a + H_k (1 - \sqrt{2} M_x^e / M_0)] \right\}^{1/2}, \quad (12.3)$$

где

$$\frac{M_x^e}{M_0} = \frac{\sqrt{2} H_k / 3}{H_0 + 4\pi M_0 - H_a + H_k}, \quad (12.4)$$

$H_a = 2K/M_0$, $H_k = K_1/M_0$, γ — гиромагнитное отношение, H_0 — внешнее магнитное поле, M_0 — намагниченность насыщения, K и K_1 — константы одноосной и кубической анизотропии соответственно. Эта формула выполняется тем точнее, чем больше поле H_0 . Так, для ЖИГ с $4\pi M_0 = 1750$ Гс, $H_k = 40$ Э, $H_a > 200$ Э при $H_0 \geq 500$ Э

погрешность не превышает 1%. Аналогично резонансная частота для второго случая имеет вид

$$f_s = \frac{\gamma}{2\pi} [H_0(H_0 + 4\pi M_0 - H_a + H_k) - 2H_k^2]^{1/2}. \quad (12.5)$$

Эта формула в рамках принятой модели является точной.

В формулы (12.3) и (12.5) намагниченность насыщения M_0 и поле одноосной анизотропии H_a входят только в комбинации вида

$$R = 4\pi M_0 - H_a, \quad (12.6)$$

что обусловлено одинаковым (с точностью до констант) видом выражений для плотности энергии одноосной анизотропии и поля размагничивания пленки. Поэтому измерение ФМР в насыщенном состоянии не позволяет определить M_0 и H_a по отдельности (более подробно вопрос о раздельном измерении M_0 и H_a рассмотрен в [3, раздел 7.5]). В то же время, из (12.3) и (12.5) получаем выражения для определения величины R в виде:

$$R_h = \frac{(2\pi f_h/\gamma)}{H_0 - 3\sqrt{2} H_k M_x^e/M_0} - H_0 - H_k(1 - \sqrt{2} M_x^e/M_0); \quad (12.7)$$

$$R_s = [(2\pi f_s/\gamma)^2 - H_0(H_0 + H_k + 2H_k^2)]/H_0. \quad (12.8)$$

Очевидно, величины R_h и R_s должны быть между собой равны. В (12.7) входит величина M_x^e/M_0 , которая сама определяется через R по формуле (12.4). Однако, для ЖИГ при $H_0 > 400$ Э значение M_x^e/M_0 по сравнению с H_0/H_k мало, поэтому сначала в формуле (12.4) можно вместо $R = 4\pi M_0 - H_a$ подставить $R \approx 4\pi M_0$, а затем, найдя новое значение R по формуле (12.7), использовать его для уточнения полученного результата и так далее. Опыт показал, что такой процесс последовательных приближений сходится очень быстро и уже на втором-третьем шаге дает погрешность менее 1 Э.

В ходе контрольных экспериментов было показано, что поле кубической анизотропии во всех пленках равно 40 ± 5 Э, а отклонение оси одноосной анизотропии от нормали к плоскости пленки не превышает 5° , поэтому в формулах (12.3)–(12.8) полагалось $H_k = 40$ Э, а указанное отклонение оси не учитывалось.

Измерения величины R в исследованных пленках показали, что она лежит в интервале от 1698 до 1894 Гс, причем имеется критическое значение $R_0 = 1806 \pm 5$ Гс, ниже которого ($R < R_0$) пленки проявляют свойства первого типа, выше ($R > R_0$) — второго. Факт наличия четко определенного критического значения величины $R = 4\pi M_0 - H_a$ свидетельствует в пользу предложенной выше модели, основанной на предположении о решающей роли одноосной анизотропии в пленках. Следует отметить тот парадоксальный факт, что в 15 из 19 исследованных пленок величина $R = 4\pi M_0 - H_a$ оказалась больше величины 1750 Гс, характерной для объемных монокристаллов ЖИГ [2–4, 9]. С другой стороны, если полагать, что намагниченность пленок $4\pi M_0$ определяется только их составом, а поле одноосной анизотропии H_a

только упругими напряжениями, то можно оценить эти величины по отдельности. Так, максимальное из измеренных значений $4\pi M_0 - H_a$ равно 1894 Гс. Предполагая, что в этом случае $H_a \approx 0$, получаем $4\pi M_0 = 1894$ Гс. Считая эту величину одинаковой для всех пленок, находим, что поле одноосной анизотропии H_a лежит в пределах 0–200 Э, а критическая величина H_a равна 90 Э. Полученная ранее оценка на основе модели размагничивающих полей доменов, равная 120 Э, соответствует указанному значению довольно близко.

12.2.4. Доменная структура пленок

Рассмотрим теперь поведение доменной структуры пленок обоих типов при их касательном намагничивании. Во всех случаях при увеличении поля контрастность доменной структуры падает, что затрудняет точное измерение поля насыщения. Поэтому одновременно с наблюдением доменной структуры проводилось измерение резонансной частоты ФМР по излому полевой зависимости которой определялось поле насыщения (в соответствии с [3, разд. 6.3.5, рис. 6.6]).

Ориентационная зависимость поля насыщения представляет собой centrosymmetricную кривую шестого порядка, минимумы которой, соответствуют трем осям, составляющим между собой углы в 120° , а максимумы — трем перпендикулярам к этим осям. Оси легкого намагничивания (минимумы кривой) соответствуют кристаллографическим осям типа [110] и находятся посередине между проекциями осей типа [111] на плоскость пленки. Оси трудного намагничивания (максимумы кривой) соответствуют перпендикулярам к осям типа [110] и совпадают с проекциями осей типа [111] на плоскость пленки (подобно [3, разд. 4.3.9, рис. 4.9], а также [3, разд. 10.2.5, рис. 10.14]). Максимальное поле насыщения (перпендикулярно осям типа [110]) для пленок первого типа составляет от 35 до 77 Э, для пленок второго типа — от 21 до 36 Э. Минимальное поле насыщения (вдоль оси [110]) меньше максимального для пленок первого типа на 8–12 Э, для пленок второго типа — на 11–16 Э.

Пленки первого типа в размагниченном состоянии имеют доменную структуру, состоящую из блоков линейной полосовой структуры, домены внутри которых ориентированы вдоль осей легкого намагничивания (как отмечено выше — оси в плоскости пленки, занимающие промежуточное положение между двумя соседствующими проекциями осей типа [111] на плоскость пленки). При касательном намагничивании в поле не более 3–5 Э блочная доменная структура сменяется линейной полосовой, ориентированной вдоль поля. При намагничивании вдоль легкой оси линейная полосовая структура остается симметричной (ширина доменов разных знаков одинакова) вплоть до поля, близкого к половине поля насыщения, после чего скачком перестраивается в зигзагообразную, а затем еще одним скачком перестраивается в линейную полосовую несимметричную. При дальнейшем намагничивании домены одного знака растут за счет доменов другого знака вплоть до поля

насыщения, когда невыгодные домены исчезают. Полевой интервал существования зигзагообразной структуры составляет не более 5–7 Э. Период доменной структуры в размагниченном состоянии для пленок первого типа составляет от 2,9 до 8,3 мкм, период симметричной и зигзагообразной структур при увеличении поля слегка уменьшается (на 10–12%), а период несимметричной структуры плавно увеличивается в 2–3 раза вплоть до ее исчезновения.

Симметричный характер доменной структуры в небольших полях связан с симметричной ориентацией векторов намагниченности внутри доменов, обусловленной симметричным расположением двух осей типа [111] относительно плоскости, проходящей через ось одноосной анизотропии и направление поля, то есть относительно оси легкого намагничивания (пространственная ориентация осей типа [111] по обе стороны относительно плоскости пленки подробно показана в [3, разд. 10.2.5, рис. 10.14]). Переход к зигзагообразной структуре обусловлен перескоком векторов намагниченности на указанные оси типа [111], причем благодаря симметричному расположению этих осей относительно плоскости пленки, зигзагообразная доменная структура остается симметричной. При дальнейшем увеличении поля вектор намагниченности доменов одного знака ложится на направление поля, а другого еще остается вблизи оси типа [111], в результате чего структура становится несимметричной. Далее домены, вектор намагниченности в которых ориентирован вдоль поля, растут, а другие домены убывают вплоть до полного их исчезновения.

При намагничивании вдоль трудной оси домены наблюдаются только в интервале полей, меньших приблизительно половины поля насыщения, причем структура всегда остается симметричной. При этом в небольших полях имеются две группы доменов, вектор намагниченности в которых ориентирован в плоскости, проходящей через ближайшую к направлению поля ось типа [111] и ось одноосной анизотропии, а при увеличении поля во всей пленке вектор намагниченности поворачивается к оси типа [111], в результате чего домены исчезают, а дальнейшее намагничивание вплоть до поля насыщения происходит только путем поворота вектора намагниченности к направлению поля.

В пленках второго типа из-за крайне малой контрастности наблюдение доменов было возможно только в полях не более 10–12 Э, причем период доменной структуры составлял от 15,0 до 26,3 мкм, а вид структуры, оставаясь линейным полосовым, по мере увеличения поля постепенно переходил от симметричного к несимметричному. При этом векторы намагниченности в разных доменах с самого начала ориентированы вблизи плоскости пленки под углами не более $\sim 20^\circ$, что соответствует отклонению от этой плоскости осей типа [111], а дальнейшее намагничивание происходит путем поворота векторов намагниченности к направлению поля.

Важным отличием поведения доменов в большинстве пленок второго типа от пленок первого типа является гистерезисный характер их

перестройки при циклическом изменении поля от нуля до поля насыщения и обратно. Так, при увеличении поля от нуля до насыщения, в зависимости от направления поля в плоскости пленки, угол между направлением доменов и поля может составлять от 7° до 60° . В то же время, при уменьшении поля от насыщающего до нуля этот угол всегда близок к 0° . После уменьшения поля до нуля начальное направление доменов восстанавливается, а новое увеличение поля приводит к повторению цикла изменения ориентации структуры в том же порядке.

Такой гистерезисный характер изменения ориентации доменной структуры, по-видимому, связан с наличием в плоскости пленки дополнительной оси одноосной анизотропии четвертого порядка по намагниченности. Эта ось анизотропии ориентирована примерно посередине между проекциями осей типа [111] на плоскость пленки, а величина поля анизотропии составляет $\sim 20\text{--}100$ Э.

12.3. Распространение МСВ в пленках ЖИГ с доменами

В предыдущем разделе 12.2 рассмотрены основные свойства пленок ЖИГ и доменных структур в них. Рассмотрим теперь эксперименты по распространению магнитостатических волн (МСВ) в таких пленках. Измерялись зависимости спектров МСВ от поля, а также законы дисперсии МСВ в различных условиях. По характеру доменной структуры исследовавшиеся пленки принадлежали к первому или второму типу (раздел 12.2.1).

12.3.1. Распространение МСВ в пленках первого типа

Рассмотрим сначала свойства МСВ на примере пленки ЖИГ первого типа, для которой $4\pi M_0 - H_a = 1724$ Гс, то есть согласно оценкам раздела 12.2.2, если $4\pi M_0 = 1894$ Гс, то $H_a = 170$ Э. Толщина пленки равна 7,9 мкм. При намагничивании вдоль оси типа [110] поле установления симметричной линейной структуры составляло 3 Э, зигзагообразная структура возникала в поле 26 Э и переходила в линейную несимметричную в поле 34 Э, которая в свою очередь исчезала в поле насыщения, равном 62 Э. При намагничивании перпендикулярно оси типа [110] поле перехода от симметричной к несимметричной структуре составляло 38 Э, поле насыщения — 69 Э. Период симметричной доменной структуры составлял 5 мкм и менялся мало, период несимметричной структуры возрастал с 5 мкм в поле 40 Э до 12 мкм в поле 60 Э.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ МСВ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО НАПРАВЛЕНИЮ ПОЛЯ

На рис. 12.4 показаны полевые зависимости частот спектра МСВ, распространяющихся перпендикулярно направлению поля. Утолщенная кривая соответствует низшей наблюдаемой частоте спектра, остальные кривые являются «эквифазными», то есть такими, вдоль которых

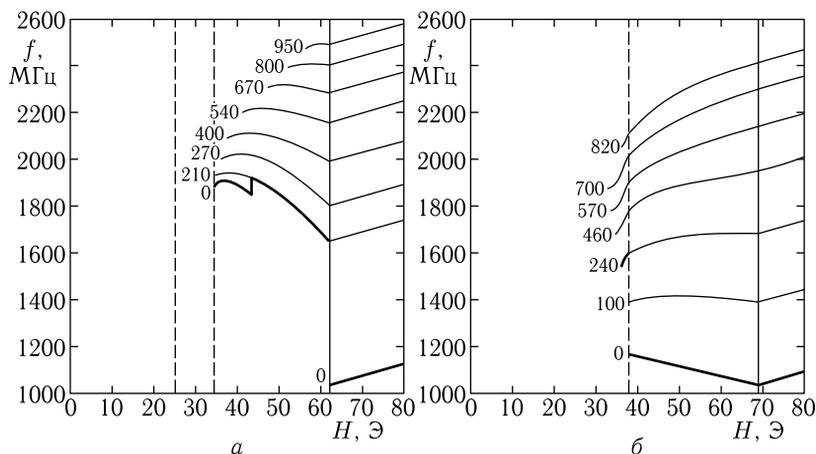


Рис. 12.4. Полевые зависимости частот спектра МСВ, распространяющихся перпендикулярно направлению поля для пленки первого типа: *a* — поле параллельно оси типа [110], *б* — поле перпендикулярно оси типа [110]. Цифры на кривых — значения волнового числа

фаза волны, сохраняется постоянной. При снятии каждой эквифазной кривой расстояние между излучающим и приемным преобразователями МСВ сохранялось фиксированным ($\sim 1,5$ см), поэтому каждая эквифазная кривая соответствует своему постоянному значению волнового числа. Цифры на кривых соответствуют значениям волнового числа в см^{-1} , измеренным путем перемещения приемного преобразователя. Рис. 12.4, *a* соответствует намагничиванию пленки вдоль оси типа [110], рис. 12.4, *б* — перпендикулярно этой оси.

Из рис. 12.4, *a* видно, что при заданном направлении поля в области симметричной и зигзагообразной доменных структур ($H_0 < 34$ Э) МСВ в пленке не распространяются. В области несимметричной доменной структуры ($34 \text{ Э} < H_0 < 62 \text{ Э}$) спектр МСВ с увеличением поля расширяется со 150 МГц при $H_0 = 34$ Э до 1450 МГц при $H_0 = 62$ Э, причем нижняя граница спектра снижается с 1850 МГц при $H_0 = 34$ Э до 1050 МГц при $H_0 = 62$ Э, тогда как верхняя в этих же полях повышается с 2000 МГц до 2500 МГц. При увеличении поля выше 62 Э доменная структура в пленке отсутствует, пленка полностью насыщена и спектр МСВ смещается как целое в сторону более высоких частот. Важным обстоятельством является тот факт, что в поле от 43 Э до 59 Э распространение МСВ с малыми волновыми числами отсутствует, а спектр МСВ начинается с волновых чисел $k \sim 200\text{--}220 \text{ см}^{-1}$. В поле большем насыщающего ($H_0 > 62$ Э) спектр МСВ содержит все волны, начиная с $k \sim 0$ до 950 см^{-1} .

Из рис. 12.4, *б* видно, что при намагничивании пленки перпендикулярно оси типа [110], в большей части интервала существования

симметричной структуры МСВ не распространяются, однако вблизи перехода к несимметричной структуре в интервале полей от 32 до 38 Э наблюдается распространение МСВ с волновыми числами большими 240 см^{-1} (вплоть до $k = 820 \text{ см}^{-1}$). В области несимметричной доменной структуры ($38 \text{ Э} < H_0 < 69 \text{ Э}$) спектр МСВ при увеличении поля аналогично предыдущему случаю расширяется, однако в меньшей степени: с 950 МГц до 1350 МГц, причем нижняя граница спектра снижается с 1150 МГц до 1050 МГц, а верхняя повышается с 2100 МГц до 2400 МГц, при этом спектр МСВ содержит все волны с волновыми числами $0 < k < 820 \text{ см}^{-1}$. В поле выше 69 Э доменная структура в пленке отсутствует, пленка полностью насыщена и спектр МСВ смещается как целое в сторону более высоких частот.

На рис. 12.5 показаны дисперсионные кривые для рассмотренных спектров МСВ, снятые при разных полях. Рис. 12.5, *а* соответствует намагничиванию пленки вдоль оси типа [110], рис. 12.5, *б* — перпендикулярно этой оси. На рис. 12.5, *а* кривая 1 снята в поле 36 Э, что соответствует началу интервала существования несимметричной доменной структуры. Кривая 2 снята в поле 55 Э, близком к концу того же интервала. Кривая 3 снята в поле 62 Э, соответствующем насыщению пленки. Наклон всех кривых относительно горизонтальной оси положителен, что соответствует прямым волнам. С ростом поля интервал волновых чисел полного спектра МСВ увеличивается, а частота понижается. Кривая 2 начинается с $k = 210 \text{ см}^{-1}$, что соответствует утолщенной кривой на рис. 12.4, *а*. Кривая 3 соответствует классическим поверхностным волнам Дэймона–Эшбаха [119], [1, разд. 2.4], пример кривых дисперсии для которых приведен на рис. 6.3.

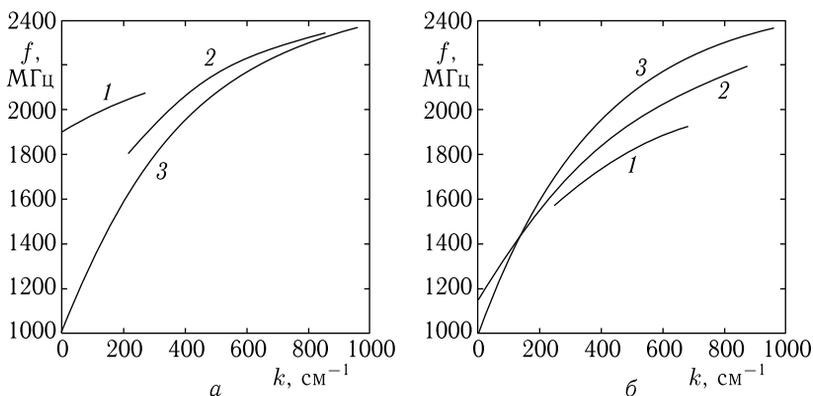


Рис. 12.5. Дисперсионные кривые для спектров МСВ, представленных на рис. 12.4, снятые при различных полях: *а* — поле параллельное оси [110], равно: 1 — 36 Э, 2 — 55 Э, 3 — 62 Э; *б* — поле перпендикулярное оси [110], равно: 1 — 37 Э, 2 — 40 Э, 3 — 70 Э

На рис. 12.5, б кривая 1 снята при поле 37 Э, что соответствует концу интервала существования симметричной доменной структуры. Кривая 2 снята в поле 40 Э, близком к началу интервала существования несимметричной структуры. Кривая 3 снята в поле 70 Э, соответствующем насыщению пленки. Эти кривые, в основном, аналогичны предыдущему случаю, однако ограничение снизу интервала волновых чисел происходит в области симметричной доменной структуры (кривая 1), в области же несимметричной структуры (кривая 2) такое ограничение отсутствует.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ МСВ ПАРАЛЛЕЛЬНО НАПРАВЛЕНИЮ ПОЛЯ

Рассмотрим теперь распространение МСВ в той же пленке вдоль направления приложенного поля. Этот случай иллюстрируется рис. 12.6 и рис. 12.7. На рис. 12.6 показаны полевые зависимости частот спектра МСВ для низшей наблюдаемой частоты спектра (утолщенная кривая) и эквивфазных кривых, соответствующих приведенным на них значениям волнового числа. Рис. 12.6, а соответствует намагничиванию пленки вдоль оси типа [110], рис. 12.6, б — перпендикулярно этой оси.

В отличие от предыдущего случая, здесь МСВ распространяются, в основном, в области существования симметричной доменной структуры. В области несимметричной структуры только при намагничивании пленки вдоль оси типа [110] (рис. 12.6, а), наблюдается небольшая область возбуждения МСВ в полях 34–48 Э. С увеличением поля как нижняя граница спектра, так и все эквивфазные кривые стремятся вниз по частоте. Волновое число ограничено снизу только в узких

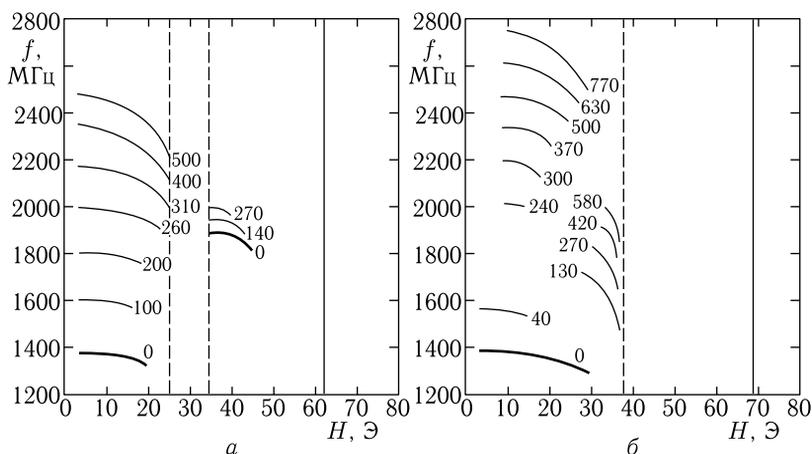


Рис. 12.6. Полевые зависимости частот спектра МСВ, распространяющихся параллельно направлению поля для пленки первого типа: а — поле параллельно оси типа [110], б — поле перпендикулярно оси типа [110]. Цифры на кривых — значения волнового числа

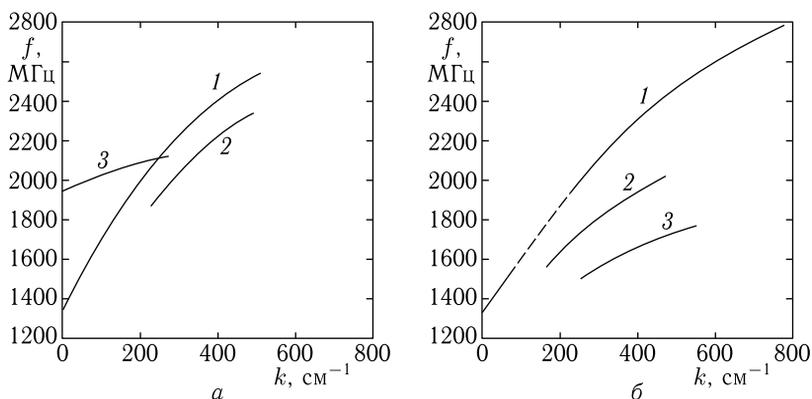


Рис. 12.7. Дисперсионные кривые для спектров МСВ, представленных на рис. 12.6, снятые при различных полях: *a* — поле параллельное оси [110], равно: 1 — 6 Э, 2 — 27 Э, 3 — 36 Э; *б* — поле перпендикулярное оси [110], равно: 1 — 23 Э, 2 — 32 Э, 3 — 38 Э

областях: 20–26 Э на рис. 12.6, *a* и 30–38 Э на рис. 12.6, *б*, обе из которых расположены вблизи верхней полевой границы существования симметричной структуры.

На рис. 12.7, *a* и рис. 12.7, *б* для тех же ориентаций поля приведены дисперсионные зависимости. На рис. 12.7, *a* кривая 1 соответствует полю 6 Э, кривая 2 — полю 27 Э и кривая 3 — полю 36 Э. На рис. 12.7, *б* кривая 1 соответствует полю 23 Э, кривая 2 — полю 32 Э и кривая 3 — полю 38 Э. Наклон всех кривых положителен, то есть все наблюдаемые МСВ — прямые. На кривой 1 рис. 12.7, *б* имеется разрыв (пунктир) в области волновых чисел от 70 до 240 см^{-1} , что видно и из рис. 12.6, *б*. В остальном поведении дисперсионных кривых соответствует спектрам, приведенным на рис. 12.6.

12.3.2. Распространение МСВ в пленках второго типа

Рассмотрим теперь распространение МСВ в пленках второго типа. Распространения МСВ вдоль направления поля на всех исследованных пленках обнаружено не было, поэтому описанные далее результаты относятся только к случаю распространения МСВ перпендикулярно направлению поля.

На рис. 12.8 и рис. 12.9 приведены спектры и дисперсионные кривые для пленки, имеющей $4\pi M_0 - H_a = 1810$ Гс, то есть при $4\pi M_0 = 1894$ Гс получаем: $H_a = 84$ Э. Толщина пленки равна 17,9 мкм. Рис. 12.8, *a* и рис. 12.9, *a* соответствуют намагничиванию пленки вдоль оси типа [110], рис. 12.8, *б* и рис. 12.9, *б* — перпендикулярно этой оси. Поле насыщения в первом случае равно 19 Э, во втором — 34 Э. Ниже поля насыщения в обоих случаях существует линейная полосовая несимметричная доменная структура.

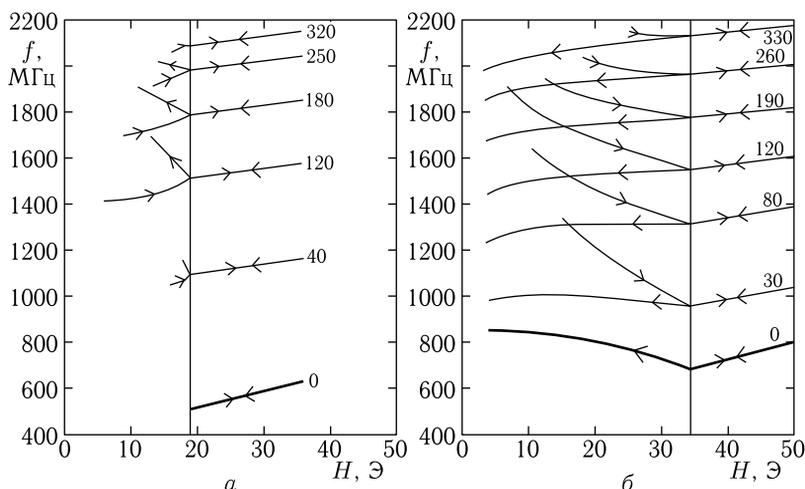


Рис. 12.8. Полевые зависимости частот спектра МСВ, распространяющихся перпендикулярно направлению поля для пленки второго типа: *a* — поле параллельно оси типа [110], *б* — поле перпендикулярно оси типа [110]. Цифры на кривых — значения волнового числа

Важнейшей особенностью большинства пленок второго типа является гистерезисный характер изменения ориентации доменов при циклическом перемагничивании пленки. Этот гистерезисный характер ярко проявляется в гистерезисе зависимостей частоты спектра от поля. Стрелки на кривых на рис. 12.8 показывают характер изменения (увеличение или уменьшение) поля. Из рис. 12.8, *a* видно, что при увеличении поля от нуля частоты спектра повышаются вплоть до поля насыщения (19 Э). При обратном изменении поля от значения насыщения до нуля частоты спектра также повышаются. При этом значения частот эквивалентных кривых в малых полях, полученные при различных направлениях изменения поля, сильно различаются. Так, в поле 10 Э для эквивалентной кривой с $k = 120 \text{ см}^{-1}$ это различие достигает 300 МГц. При снижении поля до нуля частоты эквивалентных кривых восстанавливаются и весь цикл повторяется. При намагничивании пленки перпендикулярно оси типа [110] (рис. 12.8, *б*) гистерезисные явления выражены еще заметнее. Так, в поле 10 Э различие между частотами эквивалентных кривых для $k = 120 \text{ см}^{-1}$, полученными при различных направлениях изменения поля, достигает 400 МГц.

На рис.12.9 приведены дисперсионные зависимости для того же характера изменения поля. На рис. 12.9, *a* кривая 1 снята при увеличении поля и соответствует 15 Э, кривая 2 — при уменьшении поля и соответствует тем же 15 Э, кривая 3 снята в режиме насыщения при поле 19 Э. На рис. 12.9, *б* кривая 1 снята при увеличении поля и соответствует 22 Э, кривая 2 — при уменьшении поля и соответствует

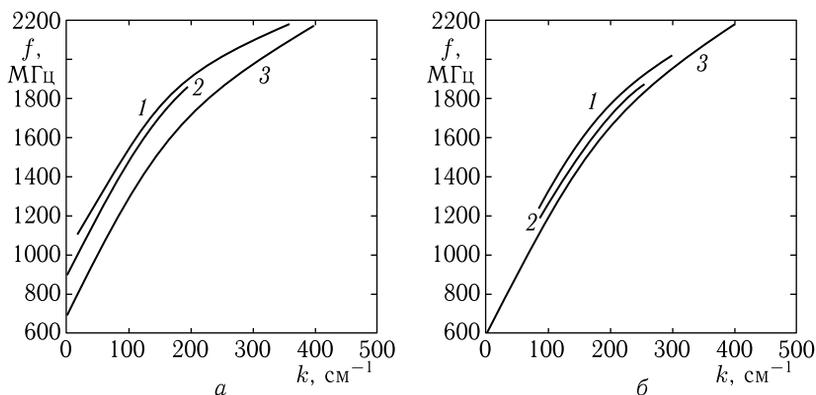


Рис. 12.9. Дисперсионные кривые для спектров МСВ, представленных на рис. 12.8, снятые при различных величинах и характере изменения поля (ориентация поля — та же, что на предыдущих рисунках): *а* — 1 — поле увеличивается, величина поля — 15 Э, 2 — поле уменьшается, величина поля — 15 Э, 3 — состояние насыщения пленки, величина поля — 19 Э; *б* — 1 — поле увеличивается, величина поля — 22 Э, 2 — поле уменьшается, величина поля — 22 Э, 3 — состояние насыщения пленки, величина поля — 34 Э

тем же 22 Э, кривая 3 снята в режиме насыщения при поле 34 Э. Наклон всех кривых по-прежнему положительный, что соответствует прямым волнам. В обоих случаях дисперсионные кривые, соответствующие увеличению и уменьшению поля (кривые 1 и 2), близки между собой и проходят несколько выше аналогичной кривой для случая насыщения (кривые 3). По кривым, приведенным на рис. 12.8 и рис. 12.9, можно проследить ограничение снизу значений волнового числа, также зависящее от направления изменения поля.

12.3.3. Основные факторы, определяющие природу наблюдаемых явлений

В результате проделанных экспериментов были выявлены основные факторы, определяющие поведение МСВ в касательно намагниченных ненасыщенных ферритовых пленках. В качестве главных факторов можно выделить два:

1) одноосная анизотропия, ось которой перпендикулярна плоскости пленки;

2) линейная полосовая доменная структура с направлением доменов вдоль приложенного поля.

Дополнительными факторами являются: кубическая анизотропия, одноосная анизотропия с осью в плоскости пленки, а также тот факт, что поля анизотропии всех видов сравнимы между собой, тогда как намагниченность превышает эту величину на порядок. Поскольку одноосная анизотропия вызвана механически напряженным состоянием пленок, большое значение может иметь магнитострикция.

Взаимодействие столь большого количества факторов сильно усложняет картину наблюдаемых явлений и делает ее полную теоретическую интерпретацию вряд ли возможной. В то же время, несомненно определяющими факторами являются лишь первые два из упомянутых выше: одноосная анизотропия и доменная структура, поэтому в следующих двух главах будет рассмотрено действие именно этих факторов по отдельности.

Выводы по главе 12

Данная глава посвящена описанию экспериментальных результатов исследования распространения магнитостатических волн в пленках железиттриевого граната с доменами. Выявлены два типа пленок, отличающихся характером нормальной анизотропии. В пленках обоих типов исследована дисперсия МСВ и получены эквивалентные кривые.

Основные результаты, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрены результаты экспериментального исследования пленок железиттриевого граната (ЖИГ) и доменных структур в них применительно к задаче исследования распространения магнитостатических волн (МСВ) в пленках в ненасыщенном состоянии. Приведены основные характеристики и описано устройство используемой в экспериментах аппаратуры: измерительного стенда, подвижных излучающего и приемного преобразователей, а также универсального (как для МСВ, так и для доменов) электромагнита.

2. Методом ферромагнитного резонанса и магнитооптическим (по исчезновению доменов) исследованы основные параметры пленок (анизотропия и намагниченность). Показано, что в пленках ЖИГ, выращенных на подложках, ориентированных в плоскости типа (111), решающую роль в формировании доменной структуры играет наведенная одноосная анизотропия, ось которой перпендикулярна плоскости пленки.

3. Выявлено критическое значение поля анизотропии (порядка 120 Э), выше которого векторы намагниченности в доменах ориентированы вблизи нормали к плоскости пленки, а ниже — вблизи плоскости пленки. По этому параметру все пленки разбиты на два класса (типа), характеризующиеся резко отличными свойствами доменной структуры.

4. В пленках первого типа при наблюдении в микроскоп контрастность доменной структуры высока, ширина доменов не превышает единиц микрон, а поле насыщения при намагничивании пленки в плоскости составляет 50–150 Э. Процесс намагничивания характеризуется последовательной сменой трех видов доменной структуры: линейной полосовой симметричной, зигзагообразной симметричной и линейной полосовой несимметричной.

5. В пленках второго типа при наблюдении в микроскоп контрастность доменной структуры низка, ширина доменов составляет десятки микрон, а поле насыщения при намагничивании пленки в плоскости

не превышает 30–40 Э. В течение всего процесса намагничивания доменная структура является линейной полосовой несимметричной. В таких пленках, наряду с кубической и нормальной одноосной анизотропией имеется одноосная анизотропия четвертого порядка с осью вблизи плоскости пленки, благодаря которой процесс перемагничивания пленок полем в плоскости приобретает гистерезисный характер.

6. Выполнено экспериментальное исследование распространения магнитостатических волн в пленках ЖИГ первого и второго типа. Измерены полевые зависимости частот спектра МСВ, в том числе низшей и эквивалентных, соответствующих ряду фиксированных значений волнового числа, при намагничивании пленки полем в ее плоскости.

7. Показано, что для пленок первого типа МСВ, распространяющиеся перпендикулярно направлению поля, эффективно возбуждаются лишь в области больших полей, где существует несимметричная линейная полосовая доменная структура, тогда как МСВ, распространяющиеся вдоль направления поля, возбуждаются лишь в области малых полей, где существует симметричная линейная полосовая структура. В области существования зигзагообразной структуры распространение МСВ отсутствует.

8. Для пленок второго типа распространение МСВ наблюдается только перпендикулярно направлению поля, причем эффективность возбуждения с увеличением поля падает. Во всех случаях частота низшей ветви спектра МСВ и большинства эквивалентных кривых с увеличением поля уменьшается. Для пленок второго типа полевые зависимости частот спектра МСВ имеют гистерезисный характер, отвечающий гистерезису доменной структуры. Дисперсионные свойства всех наблюдаемых МСВ соответствуют прямым волнам.

9. Выполнен сравнительный анализ различных факторов, определяющих свойства МСВ в исследованных пленках. Рассмотрены такие факторы, как одноосная анизотропия, доменная структура, одноосная анизотропия четвертого порядка в плоскости пленки, магнитоупругое взаимодействие. В результате экспериментов установлено, что основными факторами, определяющими поведение спектров МСВ в пленках обоих типов, являются одноосная анизотропия и доменная структура.

Глава 13

ФЕРРОМАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС В ПЛАСТИНЕ С ДОМЕНАМИ

Предыдущая глава посвящена описанию экспериментальных результатов по распространению магнитостатических волн (МСВ) в касательно намагниченных ненасыщенных ферритовых пленках. Ввиду сложности явления во всей его совокупности, рассмотрим сначала возможную теоретическую интерпретацию частного случая, а именно — однородного ферромагнитного резонанса (ФМР) в доменах. При этом специфика магнитостатических волн, налагаемая учетом их распространения в плоскости пленки, в первую очередь закон дисперсии, из рассмотрения выпадает, однако изучение ФМР позволяет определить начальную частоту спектра МСВ, соответствующую нулевому значению волнового числа. В рамках настоящей главы влияние доменов на частоту ФМР будем учитывать через посредство обусловленных ими локальных эффективных полей, после чего проведем сравнение полученных результатов с экспериментом.

В изложении материала будем опираться на работы [489–515], в первую очередь на [491], а также на [498–508]. Остальные необходимые ссылки будут приведены в тексте.

13.1. Модель локальных эффективных полей

Итак, будем считать, что при намагничивании ферритовой пластины слабым полем, недостаточным для насыщения, в ней существует доменная структура. В этих условиях вектор намагниченности внутри каждого домена подвержен действию определенного внутреннего поля, то есть имеет равновесную ориентацию, при отклонении от которой он стремится вернуться к исходному положению. При малой диссипации вокруг равновесного положения могут возникать колебания, вследствие гиротропии представляющие собой определенную прецессию с частотой, задаваемой внутренним полем. Внешнее переменное поле приводит к вынужденным колебаниям, то есть к возбуждению ферромагнитного резонанса (ФМР). Поскольку внутренние поля доменов связаны друг с другом и с внешним постоянным полем, то частота ФМР в доменной структуре может существенно отличаться от частоты ФМР в безграничном однородно намагниченном магнетике. Более того, при изменении приложенного постоянного поля вектор намагниченности поворачивается, то есть претерпевает ориентационный переход, так что

частота ФМР при этом также меняется. В настоящем разделе будет рассмотрено возбуждение именно такого ФМР, то есть при наличии доменов, намагниченность внутри которых находится в условиях ориентационного перехода.

Основой дальнейшего рассмотрения является учет локальных эффективных полей в доменах. Действительно, вектор намагниченности в каждом отдельном домене подвержен действию как размагничивающих полей от границ собственного домена, так и проникающих внутрь домена полей, создаваемых другими доменами. Очевидно, такие локальные поля неоднородны, однако учет неоднородности сильно усложняет задачу и приводит ее к весьма сложной системе интегральных уравнений. Поэтому для простоты будем считать, что все поля однородны (эллипсоидальное приближение) [110] и учтем действие на домен только его ближайших соседей.

13.1.1. Общая геометрия задачи

Общая геометрия задачи показана на рис. 13.1. Безграничная по двум направлениям ферритовая пластина толщины d намагничена постоянным полем \mathbf{H}_0 в ее плоскости. Декартова система координат $Oxyz$ ориентирована таким образом, что плоскость Oyz совпадает с плоскостью ферритовой пластины, а ось Ox ей перпендикулярна. Пластина имеет одноосную анизотропию, ось легкого намагничивания (ОЛН) которой перпендикулярна ее плоскости, то есть по направлению совпадает с осью Ox . Поле \mathbf{H}_0 приложено в плоскости пластины, причем ось Oz ориентирована вдоль этого поля. Будем полагать, что это поле недостаточно для уничтожения доменной структуры, так что вся пластина разбита на домены, причем доменная структура является сквозной и однослойной. Таким образом, пластина содержит плоскопараллельные домены, границы которых параллельны плоскости Oxz и проходят вдоль этой плоскости от одной поверхности

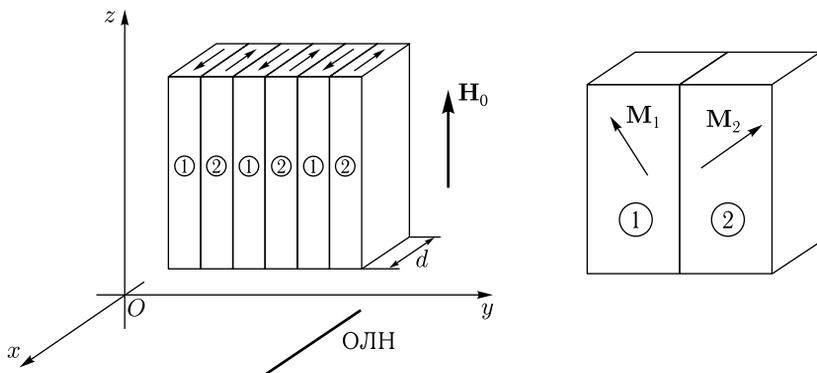


Рис. 13.1. Общая геометрия задачи. В правой части — схема двух соседних доменов. \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2 — векторы намагниченности соседних доменов

пластины до другой. Вдоль оси Oy все домены имеют одинаковую ширину примерно того же порядка, что и толщина пластины, вдоль оси Ox они ограничены внешними поверхностями пластины, а вдоль оси Oz протяженность доменов безгранична.

Внутренние свойства доменов, их поля и ориентации векторов намагниченности, чередуются через один, так что полная структура представляет собой чередование доменов двух видов «1» и «2», схематическое устройство соседней пары которых показано на рис. 13.1 в правой части рисунка. Предполагается, что поле одноосной анизотропии превышает размагничивающее поле пластины, так что в отсутствие внешнего поля векторы намагниченности внутри доменов ориентированы вдоль ОЛН (то есть вдоль оси Ox), причем направления векторов намагниченности в соседних доменах чередуются, как это условно показано стрелками на верхнем торце пластины. При увеличении поля векторы намагниченности поворачиваются к направлению поля, причем, благодаря симметрии, такой поворот происходит симметрично относительно плоскости Oyz . Поворот заканчивается тогда, когда поле достигает величины, соответствующей окончанию ориентационного перехода, после чего пластина становится намагниченной однородно с единым вектором намагниченности, ориентированным вдоль оси Oz .

Доменные границы предполагаются бесконечно тонкими, причем их положение, структура и плотность энергии при изменении поля H_0 не меняются.

Замечание. Предположение о неизменности структуры границ при изменении поля, вообще говоря, не является безусловным. В действительности, при увеличении поля, то есть по мере стремления ориентации векторов намагниченности к направлению поля, угол между направлениями намагниченности в соседних доменах уменьшается. При этом угол поворота намагниченности внутри границы уменьшается, так что ее энергия также уменьшается. Более того, вблизи окончания ориентационного перехода плотность энергии границы вообще стремится к нулю, так как распределение намагниченности стремится к однородному, при котором границы исчезают. В таких условиях период доменной структуры, определяемый равновесием между плотностью энергии границ и поля размагничивания, также меняется, то есть ширина доменов не сохраняется. В экспериментах на пленках ферритов-гранатов с нормальной одноосной анизотропией при увеличении поля вплоть до окончания ориентационного перехода наблюдается, как правило, уменьшение периода доменной структуры примерно в два–три раза [36, 206, 208, 211, 212, 324, 516]. Если же к одноосной примешивается также сравнимая по величине кубическая анизотропия, как это имеет место в некоторых видах пленок ЖИГ, то при изменении касательного поля может меняться не только период, но и полный характер доменной структуры, в том числе с линейного полосового на зигзагообразный [477]. В рамках настоящей монографии эти сложные

случаи доменных структур не рассматриваются, во-первых, по причине крайней сложности соответствующих теоретических моделей, и во-вторых потому, что введенное выше простое предположение о постоянстве периода структуры, несмотря на свою простоту, все же позволяет интерпретировать значительное число наблюдаемых в эксперименте фактов.

13.1.2. Внутренние поля доменов в полной структуре

Внутри доменов действуют два вида полей, формируемых самими доменами: поля размагничивания собственных граней и поля воздействия соседних доменов. Рассмотрим формирование тех и других полей по отдельности.

13.1.3. Поля размагничивания собственных граней

Рассмотрим формирование внутренних полей доменов и соответствующую плотность энергии. Обратимся сначала к рис. 13.2, где показана общая геометрия отдельно взятого домена.

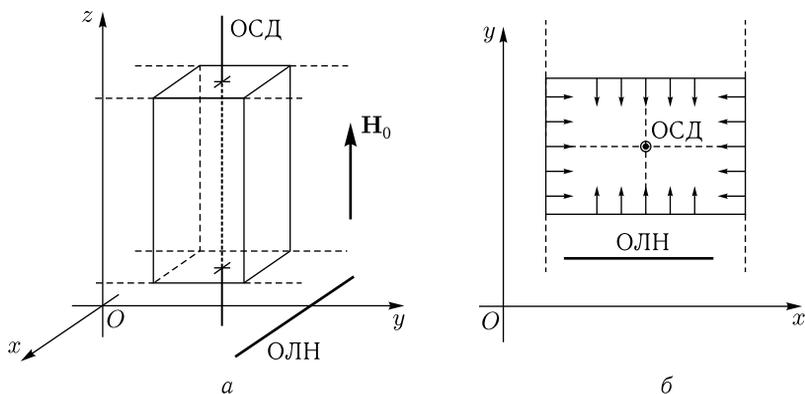


Рис. 13.2. Общая геометрия отдельного домена

На рис. 13.2, *а* представлен общий вид домена и связанной с ним системы координат. Как и на рис. 13.1, домен безгранично продолжается вдоль оси Oz , а его размеры вдоль осей Ox и Oy ограничиваются, вдоль первой — внешними поверхностями пластины, а вдоль второй — соседними доменами. По форме домен представляет собой прямоугольный параллелепипед, противоположные грани которого параллельны плоскостям Oxz и Oyz , а протяженность вдоль оси Oz бесконечна. В силу параллельности граней домена плоскостям Oxz и Oyz , внутри домена можно выделить ось симметрии домена (ОСД), параллельную оси Oz и одинаково удаленную от парных противоположащих граней домена. Но поперечные размеры домена вдоль осей Ox и Oy могут быть различными и заранее никак не регламентируются.

Ось легкого намагничивания, перпендикулярная плоскости пластины, здесь перпендикулярна граням домена, параллельным плоскости Oyz . Постоянное поле ориентировано вдоль оси симметрии домена, то есть вдоль координатной оси Oz .

На рис. 13.2, б представлена схема формирования размагничивающих полей внутри домена в плоскости его поперечного сечения, то есть Oxy . Стрелками показаны размагничивающие поля, которые при отклонении вектора намагниченности от оси симметрии, стремятся вернуть его к этой оси. Все эти поля направлены внутрь домена и симметричны относительно плоскостей, параллельных Oxz и Oyz , проходящих через ОСД.

В качестве рабочей модели будем полагать, что действие размагничивающих полей эквивалентно действию одноосной анизотропии, плотность энергии которой можно представить в виде

$$U^{(p)} = -\frac{K^{(p)}}{M_0^2} M_z^2, \quad (13.1)$$

где константа такой анизотропии положительна: $K^p > 0$.

Учитывая, что в силу сохранения длины вектора намагниченности:

$$M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = M_0^2, \quad (13.2)$$

выражение (13.1) с точностью до постоянного слагаемого можно записать в виде

$$U^{(p)} = \frac{K^{(p)}}{M_0^2} M_x^2 + \frac{K^{(p)}}{M_0^2} M_y^2, \quad (13.3)$$

Поскольку размеры граней домена вдоль осей Ox и Oy могут быть различными, целесообразно записать плотность энергии такой анизотропии с раздельными константами:

$$U^{(p)} = \frac{K_x^{(p)}}{M_0^2} M_x^2 + \frac{K_y^{(p)}}{M_0^2} M_y^2, \quad (13.4)$$

где, как и прежде: $K_x^{(p)} > 0$, $K_y^{(p)} > 0$.

Это выражение отражает размагничивание граней доменов как одного, так и другого знака, так что полная плотность энергии должна иметь вид

$$U^{(p)} = \frac{K_{1x}^{(p)}}{M_0^2} M_{1x}^2 + \frac{K_{1y}^{(p)}}{M_0^2} M_{1y}^2 + \frac{K_{2x}^{(p)}}{M_0^2} M_{2x}^2 + \frac{K_{2y}^{(p)}}{M_0^2} M_{2y}^2, \quad (13.5)$$

где: $K_{1,2x}^{(p)} > 0$, $K_{1,2y}^{(p)} > 0$.

13.1.4. Поля воздействия соседних доменов друг на друга

Рассмотрим теперь действие доменов друг на друга через поля, выходящие за пределы отдельных доменов. Вектор намагниченности внутри каждого отдельного домена ориентирован более или менее

однородно, что обусловлено обменным взаимодействием, требующим коллинеарности намагниченности в возможно большем объеме магнетика. Подходя к доменной границе, за пределами которой его ориентация резко нарушается, вектор намагниченности создает два встречно направленных поля: одно из них обращено внутрь домена и представляет собой поле размагничивания, рассмотренное выше, а второе — обращено наружу домена и создает за пределами последнего поле, которое может проникнуть в соседний домен. Формирование двух таких полей можно представить как результат образования на поверхности домена слоя магнитных зарядов, величина которых пропорциональна внутренней намагниченности домена. Поле, выходящее наружу из исходного домена, проникает в соседний домен, где участвует в образовании его внутреннего поля, взаимодействующего с находящейся там намагниченностью.

Плотность энергии такого взаимодействия пропорциональна произведению поля на намагниченность, то есть в конечном счете произведению намагниченностей двух соседних доменов с определенным коэффициентом пропорциональности. Поскольку домен имеет поверхности, параллельные плоскостям Oxz и Oyz , то именно на этих плоскостях образуются поверхностные заряды, пропорциональные величине нормальной составляющей намагниченности, выходящей на эту плоскость.

Схема формирования поверхностных зарядов и создаваемых ими полей иллюстрируется рис. 13.3.

На рис. 13.3, *а* показан случай ориентации намагниченности в домене №1 вдоль оси Oy в положительном ее направлении, так что создаваемые вектором \mathbf{M}_1 заряды лежат как раз на границе между доменами. Внутри домена №2 эти заряды создают поле \mathbf{H}_{12} , которое стремится повернуть вектор намагниченности этого домена \mathbf{M}_2 вдоль своего направления, как это показано стрелкой.

Плотность энергии такого взаимодействия намагниченностей соседних доменов можно представить в виде

$$U_y^{(12)} = -\frac{\beta_y}{M_0} M_{1y} M_{2y}, \quad (13.6)$$

где β_y — коэффициент пропорциональности, в данном случае положительный: $\beta_y > 0$, что требуется минимумом энергии при однонаправленном расположении векторов \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 , а деление на M_0 введено для размерности (чтобы параметр β_y имел размерность эффективно-го поля).

На рис. 13.3, *б* показан случай ориентации намагниченности домена №1 в положительном направлении оси Ox . При этом вектор \mathbf{M}_1 создает на обеих поверхностях пластины, параллельных плоскости Oyz , заряды разных знаков. При этом на границе между доменами заряды не образуются. Создаваемые таким образом на поверхностях пластины заряды образуют поля, выходящие за пределы пластины и возвращающиеся в нее в области расположения другого домена. Силовые линии

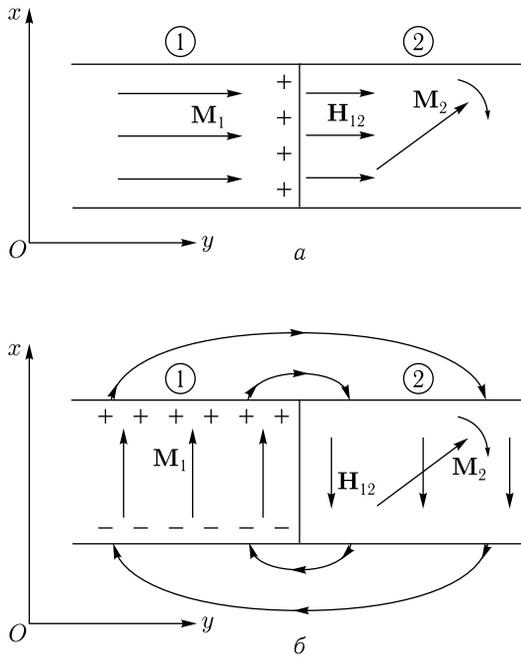


Рис. 13.3. Схема формирования полей, обеспечивающих воздействие доменов друг на друга

этих полей показаны изогнутыми стрелками. В домене №2 возникает поле \mathbf{H}_{12} , которое стремится повернуть вектор намагниченности \mathbf{M}_2 к своему направлению, как это показано стрелкой вплоть до антипараллельной ориентации относительно \mathbf{M}_1 .

Плотность энергии такого взаимодействия намагниченностей соседних доменов можно представить в виде:

$$U_x^{(12)} = \frac{\beta_x}{M_0} M_{1x} M_{2x}, \quad (13.7)$$

где β_x — коэффициент пропорциональности положительный: $\beta_x > 0$, что требуется минимумом энергии при противонаправленном расположении векторов \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 , а деление на M_0 также введено для размерности (чтобы параметр β_x имел размерность эффективного поля).

Таким образом, полную плотность энергии взаимодействия двух доменов можно записать в виде

$$U_{xy}^{(12)} = \frac{\beta_x}{M_0} M_{1x} M_{2x} - \frac{\beta_y}{M_0} M_{1y} M_{2y}, \quad (13.8)$$

где $\beta_x > 0$, $\beta_y > 0$.

13.1.5. Полная плотность энергии

Рассмотрим теперь полную плотность энергии доменной структуры в целом. Такая энергия образуется за счет следующих видов взаимодействия:

- 1) взаимодействие намагниченности с внешним полем;
- 2) взаимодействие намагниченности с полем одноосной анизотропии;
- 3) взаимодействие намагниченности с полями размагничивания собственных граней;
- 4) взаимодействие намагниченности с полями от соседних доменов.

Запишем полную плотность энергии для двух соседних доменов:

$$\begin{aligned}
 U = & -H_0 M_{1z} - H_0 M_{2z} - \frac{K}{M_0^2} M_{1x}^2 - \frac{K}{M_0^2} M_{2x}^2 + \\
 & + \frac{K_x^{(p)}}{M_0^2} M_{1x}^2 + \frac{K_y^{(p)}}{M_0^2} M_{1y}^2 + \frac{K_x^{(p)}}{M_0^2} M_{2x}^2 + \frac{K_y^{(p)}}{M_0^2} M_{2y}^2 + \\
 & + \frac{\beta_x}{M_0} M_{1x} M_{2x} - \frac{\beta_y}{M_0} M_{1y} M_{2y}. \quad (13.9)
 \end{aligned}$$

В этом выражении первые два слагаемых соответствуют взаимодействию намагниченности с внешним полем, следующие два — с полем одноосной анизотропии, следующие четыре — с полями размагничивания граней и последние два — с полями от соседних доменов.

Замечание. Приведенное здесь выражение (13.9) представляет собой сумму плотностей энергии доменов двух знаков, полученных так, как если бы каждый домен занимал полностью весь объем пластины. На самом деле, в принятой геометрии суммарный объем доменов одного знака равен суммарному объему доменов другого знака, так что каждая доменная фаза занимает лишь половину полного объема. Поэтому для получения корректного выражения для полной энергии должен быть введен нормировочный коэффициент, в данном случае равный 1/2. Однако, при выводе уравнения движения исходя из эффективных полей, получаемых путем дифференцирования выражения для плотности энергии, должен быть введен обратный нормировочный коэффициент, в данном случае равный двум, так что обе нормировки взаимно компенсируются. Физический смысл такой компенсации состоит в том, что дифференцирование выражения (13.9) без нормировки дает поля, действующие на вектор намагниченности в данной точке пространства, без учета того, что данный домен занимает лишь половину общего объема. Таким образом, получаемые поля представляют собой как бы локальные поля, действующие на вектор намагниченности именно в той локальной точке пространства, где он и должен прецессировать. Поэтому вычисление частот прецессии может быть сделано с использованием приведенного выражения (13.9), но какие-либо амплитудные расчеты, например касающиеся возбуждения прецессии внешним полем,

должны проводиться с учетом нормировочного коэффициента. То есть, если внешнее переменное поле в каком-то ограниченном образце будет возбуждать домены только одного знака, то необходимо учитывать, что мощность такого возбуждения приходится только на половину объема всего возбуждаемого образца. Однако в рамках настоящей монографии энергетические расчеты проводиться не будут, поэтому для вычисления эффективных полей и соответственно частоты свободной прецессии можно будет ограничиться выражением (13.9). Более подробно вопросы нормировки, в том числе для доменов различного объема, рассмотрены, например, в [17, разд. 8.3].

Запишем плотность энергии (13.9) через эффективные поля, для чего введем обозначения:

$$H_a = \frac{2K}{M_0}; \quad (13.10)$$

$$H_{dx} = \frac{2K_x^{(p)}}{M_0}; \quad (13.11)$$

$$H_{dy} = \frac{2K_y^{(p)}}{M_0}; \quad (13.12)$$

$$H_{sx} = \beta_x; \quad (13.13)$$

$$H_{sy} = \beta_y. \quad (13.14)$$

С этими обозначениями (13.9) принимает вид

$$\begin{aligned} U = & -H_0 M_{1z} - H_0 M_{2z} - \frac{H_a}{2M_0} M_{1x}^2 - \frac{H_a}{2M_0} M_{2x}^2 + \\ & + \frac{H_{dx}}{2M_0} M_{1x}^2 + \frac{H_{dy}}{2M_0} M_{1y}^2 + \frac{H_{dx}}{2M_0} M_{2x}^2 + \frac{H_{dy}}{2M_0} M_{2y}^2 + \\ & + \frac{H_{sx}}{M_0} M_{1x} M_{2x} - \frac{H_{sy}}{M_0} M_{1y} M_{2y}. \end{aligned} \quad (13.15)$$

Введем вспомогательные обозначения:

$$G_1 = -\frac{H_a - H_{dx}}{2M_0}; \quad (13.16)$$

$$G_2 = \frac{H_{dy}}{2M_0}; \quad (13.17)$$

$$G_3 = \frac{H_{sx}}{M_0}; \quad (13.18)$$

$$G_4 = -\frac{H_{sy}}{M_0}; \quad (13.19)$$

$$G_5 = -H_0. \quad (13.20)$$

С этими обозначениями (13.15) принимает вид

$$\begin{aligned} U = & G_1 (M_{1x}^2 + M_{2x}^2) + G_2 (M_{1y}^2 + M_{2y}^2) + \\ & + G_3 M_{1x} M_{2x} + G_4 M_{1y} M_{2y} + G_5 (M_{1z} + M_{2z}). \end{aligned} \quad (13.21)$$

Главной задачей настоящего рассмотрения является нахождение собственных частот свободной прецессии намагниченности в доменной структуре. Традиционным способом решения такой задачи является использование классического уравнения Ландау–Лифшица в линейном приближении. Такое приближение требует предварительного нахождения равновесного состояния вектора намагниченности, вокруг которого затем рассматриваются малые колебания. Поскольку здесь имеются два вида доменов, то и равновесных состояний намагниченности получается два, каждое соответствующее своему домену. То есть минимизацию плотности энергии (13.21) надо проводить по двум параметрам, по одному для каждого домена. С другой стороны, даже если принять во внимание постоянство длины вектора намагниченности, то есть учесть, что:

$$M_{1x}^2 + M_{1y}^2 + M_{1z}^2 = M_0^2; \quad (13.22)$$

$$M_{2x}^2 + M_{2y}^2 + M_{2z}^2 = M_0^2, \quad (13.23)$$

то все равно остается четыре параметра M_{1x} , M_{1y} , M_{2x} , M_{2y} , что создает для задачи некоторую неопределенность. Однако в принятой здесь геометрии условия симметрии позволяют существенно упростить ситуацию и свести процедуру минимизации ко всего одному параметру. Покажем, как это можно сделать, для чего более подробно рассмотрим ориентацию векторов намагниченности в доменах, исходя из физической сущности задачи.

13.2. Ориентация намагниченности в доменах

Ориентация намагниченности внутри доменов иллюстрируется рис. 13.4, где показаны равновесные положения векторов \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 в доменах двух разных знаков. Здесь, как и ранее, внешнее поле ориентировано вдоль оси Oz , а ось легкого намагничивания (ОЛН) — вдоль оси Ox . Кроме внешнего поля и анизотропии на векторы намагниченности действуют внутренние поля, создаваемые другими доменами, однако для упрощения ситуации эти поля на рисунке не показаны.

В силу симметрии геометрии задачи и тождественности свойств обоих доменов, в равновесном состоянии векторы намагниченности \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 находятся в плоскости Oxz , то есть $M_{1y} = 0$ и $M_{2y} = 0$. При этом $M_{1z} = M_{2z}$, $M_{1x} = -M_{2x}$, так что углы, которые составляют векторы намагниченности с осью Oz , между собой по величине равны, но по знаку противоположны: $|\theta_1| = |\theta_2|$, $\theta_2 = -\theta_1$.

При таких значениях параметров плотность энергии (13.21) принимает вид:

$$U = (2G_1 - G_3)M_x^2 + 2G_5M_z, \quad (13.24)$$

где компоненты намагниченности второго домена выражены через соответствующие компоненты намагниченности первого, и в силу равенства их величин числовые индексы опущены.

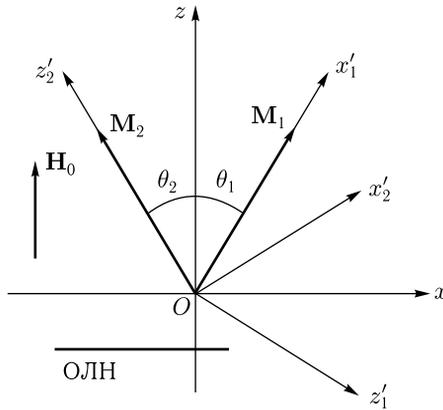


Рис. 13.4. Схема ориентации равновесных положений векторов намагниченности внутри доменов

Учтем теперь условие (13.22), из которого получаем

$$M_x^2 = M_0^2 - M_z^2. \quad (13.25)$$

Подставляя это выражение в (13.24) и оставляя только переменные слагаемые, получаем

$$U \rightarrow -(2G_1 - G_3)M_z^2 + 2G_5M_z. \quad (13.26)$$

Следуя обычной процедуре нахождения равновесного состояния (глава 9, а также [3, гл. 5]), то есть выполняя дифференцирование (13.26) по M_z и приравнивая производную к нулю, получаем равновесное значение z -компоненты намагниченности:

$$M_z = \frac{G_5}{2G_1 - G_3}. \quad (13.27)$$

Раскрывая G_1 , G_3 , G_5 с помощью (13.16), (13.18), (13.20), получаем

$$M_z = \frac{M_0 H_0}{H_a - H_{dx} + H_{sx}}. \quad (13.28)$$

Таким образом, z -компонента равновесного положения намагниченности определена. Эта компонента в обоих доменах одна и та же. Компоненты M_{1x} и M_{2x} можно найти из соотношения (13.25), с учетом того, что в разных доменах эти компоненты имеют противоположные знаки.

Из рис. 13.4 можно видеть, что компоненты намагниченности связаны с углами θ_1 и θ_2 соотношениями:

$$M_{1x} = M_0 \sin \theta_1; \quad (13.29)$$

$$M_{1z} = M_0 \cos \theta_1; \quad (13.30)$$

$$M_{2x} = M_0 \sin \theta_2; \quad (13.31)$$

$$M_{2z} = M_0 \cos \theta_2. \quad (13.32)$$

При этом, в соответствии с (13.28), получаем:

$$\cos \theta_1 = \frac{H_0}{H_a - H_{dx} + H_{sx}}; \quad (13.33)$$

$$\sin \theta_1 = \frac{\sqrt{(H_a - H_{dx} + H_{sx})^2 - H_0^2}}{H_a - H_{dx} + H_{sx}}; \quad (13.34)$$

$$\cos \theta_2 = \frac{H_0}{H_a - H_{dx} + H_{sx}}; \quad (13.35)$$

$$\sin \theta_2 = -\frac{\sqrt{(H_a - H_{dx} + H_{sx})^2 - H_0^2}}{H_a - H_{dx} + H_{sx}}. \quad (13.36)$$

13.2.1. Ориентационные переходы в доменах

Из рассмотрения полученных выражений (13.29)–(13.36) в соответствии с физическим существом задачи можно видеть, что при увеличении поля H_0 в доменах того и другого знака происходят ориентационные переходы. В отсутствие поля, то есть при $H_0 = 0$, векторы намагниченности в обоих доменах ориентированы вдоль оси Ox , так как именно вдоль этой оси лежит ОЛН. Направления векторов \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 при этом противоположны друг другу. При увеличении поля H_0 , приложенного вдоль оси Oz , векторы намагниченности поворачиваются к этой оси до тех пор, пока не выстраиваются вдоль нее. Углы, образуемые в процессе поворота векторами намагниченности с осью Oz , описываются формулами (13.33)–(13.36). Поворот заканчивается, когда поле H_0 становится равным величине $H_a - H_{dx} + H_{sx}$, что и представляет собой окончание ориентационного перехода. Из формул (13.33)–(13.36) можно видеть, что при этом углы θ_1 и θ_2 обращаются в нуль.

Таким образом, до этого значения поля пластина остается разбитой на домены, то есть в ней сосуществуют две магнитные фазы, а выше него намагниченность всей пластины становится однородной, то есть фаза остается одна. То есть значение поля H_0 , равное $H_a - H_{dx} + H_{sx}$ представляет собой поле ориентационного фазового перехода второго рода, в том плане, как это рассмотрено в главе 9, а также более подробно в [3, гл. 2, 5].

13.2.2. Плотность энергии в системе, связанной с намагниченностью

Для обеспечения возможности линеаризации уравнений движения, колебания каждого из векторов намагниченности следует рассматривать в системе, координат, связанной с его равновесным положением. Из рис. 13.4 можно видеть, что для вектора \mathbf{M}_1 это будет система $Ox'_1z'_1$, для вектора \mathbf{M}_2 — система $Ox'_2z'_2$. То есть для рассмотрения колебаний вектора \mathbf{M}_1 исходную систему координат надо

повернуть на угол θ_1 , определяемый соотношениями (13.33) и (13.34), а для рассмотрения колебаний вектора \mathbf{M}_2 — повернуть на угол θ_2 , определяемый соотношениями (13.35) и (13.36).

Таким образом, здесь имеются два вектора намагниченности, каждый из которых содержит по три компоненты, то есть полное число переменных равно шести. В этом случае, в соответствии с общими правилами работы с анизотропией (глава 9, а также в более подробном изложении [3, гл. 3]), следует рассматривать векторы не третьего порядка, а шестого, то есть решать задачу о преобразовании компонент векторов в шестимерном пространстве. При этом исходную систему координат можно рассматривать как шестимерную, связанную с пленкой систему $Oxyz$, а совокупность двух систем $Ox'_1y'_1z'_1$ и $Ox'_2y'_2z'_2$ — как тоже шестимерную, связанную с намагниченностью систему $Ox'_1y'_1z'_1x'_2y'_2z'_2$.

Итак, представим совокупность одновременно сосуществующих двух трехмерных векторов намагниченности в виде одного шестимерного вектора, содержащего компоненты обоих векторов в исходной системе координат $Oxyz$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{1x} \\ M_{1y} \\ M_{1z} \\ M_{2x} \\ M_{2y} \\ M_{2z} \end{pmatrix}. \quad (13.37)$$

После преобразования, то есть поворота каждой из систем на свой угол, новый шестимерный вектор намагниченности должен иметь вид

$$\mathbf{M}' = \begin{pmatrix} M_{1x'} \\ M_{1y'} \\ M_{1z'} \\ M_{2x'} \\ M_{2y'} \\ M_{2z'} \end{pmatrix}. \quad (13.38)$$

Запишем прямое преобразование в матричной форме:

$$\mathbf{M} = \overleftrightarrow{A} \mathbf{M}'. \quad (13.39)$$

Соответствующее ему обратное преобразование имеет вид

$$\mathbf{M}' = \overleftrightarrow{A}^{-1} \cdot \mathbf{M}. \quad (13.40)$$

В соответствии с геометрией, представленной на рис. 13.4, учитывая, что оси Oy , Oy'_1 и Oy'_2 совпадают и направлены перпендикулярно плоскости рисунка к читателю, а компоненты матриц перехода равны косинусам углов между соответствующими осями координат (глава 9, а также [3, гл. 3]), получаем матрицу прямого перехода в виде

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}. \quad (13.41)$$

Соответствующая матрица обратного перехода имеет вид

$$\vec{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}. \quad (13.42)$$

Пользуясь правилами перемножения матриц, в соответствии с соотношением (13.39), получаем:

$$M_{1x} = M_{1x'} \cos \theta_1 + M_{1z'} \sin \theta_1; \quad (13.43)$$

$$M_{1z} = -M_{1x'} \sin \theta_1 + M_{1z'} \cos \theta_1; \quad (13.44)$$

$$M_{2x} = M_{2x'} \cos \theta_2 + M_{2z'} \sin \theta_2; \quad (13.45)$$

$$M_{2z} = -M_{2x'} \sin \theta_2 + M_{2z'} \cos \theta_2; \quad (13.46)$$

$$M_{1y} = M_{1y'}; \quad (13.47)$$

$$M_{2y} = M_{2y'}. \quad (13.48)$$

Из этих формул получаем квадратичные комбинации:

$$M_{1x}^2 = M_{1x'}^2 \cos^2 \theta_1 + M_{1z'}^2 \sin^2 \theta_1 + 2M_{1x'} M_{1z'} \sin \theta_1 \cos \theta_1; \quad (13.49)$$

$$M_{2x}^2 = M_{2x'}^2 \cos^2 \theta_2 + M_{2z'}^2 \sin^2 \theta_2 + 2M_{2x'} M_{2z'} \sin \theta_2 \cos \theta_2; \quad (13.50)$$

$$\begin{aligned} M_{1x} M_{2x} &= M_{1x'} M_{2x'} \cos \theta_1 \cos \theta_2 + M_{1x'} M_{2z'} \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \\ &+ M_{1z'} M_{2x'} \sin \theta_1 \cos \theta_2 + M_{1z'} M_{2z'} \sin \theta_1 \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (13.51)$$

Подставляя (13.43)–(13.51) в (13.21), после приведения подобных членов, получаем плотность энергии, выраженную через компоненты векторов намагниченности в повернутых, связанных с намагниченностью системах координат $Ox'_1y'_1z'_1$ и $Ox'_2y'_2z'_2$:

$$\begin{aligned}
 U = & A_1 M_{1x'}^2 + A_2 M_{1z'}^2 + A_3 M_{1x'} M_{1z'} + \\
 & + B_1 M_{2x'}^2 + B_2 M_{2z'}^2 + B_3 M_{2x'} M_{2z'} + \\
 & + C_1 M_{1x'} M_{2x'} + C_2 M_{1x'} M_{2z'} + C_3 M_{1z'} M_{2x'} + C_4 M_{1z'} M_{2z'} + \\
 & + D_1 M_{1y'}^2 + D_2 M_{2y'}^2 + D_3 M_{1y'} M_{2y'} + \\
 & + A_4 M_{1x'} + A_5 M_{1z'} + B_4 M_{2x'} + B_5 M_{2z'}, \quad (13.52)
 \end{aligned}$$

где введены вспомогательные обозначения:

$$A_1 = G_1 \cos^2 \theta_1; \quad (13.53)$$

$$A_2 = G_1 \sin^2 \theta_1; \quad (13.54)$$

$$A_3 = 2G_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1; \quad (13.55)$$

$$A_4 = -G_5 \sin \theta_1; \quad (13.56)$$

$$A_5 = G_5 \cos \theta_1; \quad (13.57)$$

$$B_1 = G_1 \cos^2 \theta_2; \quad (13.58)$$

$$B_2 = G_1 \sin^2 \theta_2; \quad (13.59)$$

$$B_3 = 2G_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2; \quad (13.60)$$

$$B_4 = -G_5 \sin \theta_2; \quad (13.61)$$

$$B_5 = G_5 \cos \theta_2; \quad (13.62)$$

$$C_1 = G_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2; \quad (13.63)$$

$$C_2 = G_3 \cos \theta_1 \sin \theta_2; \quad (13.64)$$

$$C_3 = G_3 \sin \theta_1 \cos \theta_2; \quad (13.65)$$

$$C_4 = G_3 \sin \theta_1 \sin \theta_2; \quad (13.66)$$

$$D_1 = G_2; \quad (13.67)$$

$$D_2 = G_2; \quad (13.68)$$

$$D_3 = G_4. \quad (13.69)$$

Здесь коэффициенты G_1 – G_5 определяются формулами (13.16)–(13.20), а $\cos \theta_{1,2}$, $\sin \theta_{1,2}$ — формулами (13.33)–(13.36), причем входящие в эти формулы поля H_a , H_{dx} , H_{dy} , H_{sx} , H_{sy} связаны с константами материала и параметрами доменов формулами (13.10)–(13.14).

13.2.3. Эффективные поля

Эффективные поля, следуя (1.6), находим путем дифференцирования по компонентам намагниченности выражения для полной плотности энергии (13.52):

$$H_{1x'} = -(2A_1M_{1x'} + A_3M_{1z'} + C_1M_{2x'} + C_2M_{2z'} + A_4); \quad (13.70)$$

$$H_{1y'} = -(2D_1M_{1y'} + D_3M_{2y'}); \quad (13.71)$$

$$H_{1z'} = -(2A_2M_{1z'} + A_3M_{1x'} + C_3M_{2x'} + C_4M_{2z'} + A_5); \quad (13.72)$$

$$H_{2x'} = -(2B_1M_{2x'} + B_3M_{2z'} + C_1M_{1x'} + C_3M_{1z'} + B_4); \quad (13.73)$$

$$H_{2y'} = -(2D_2M_{2y'} + D_3M_{1y'}); \quad (13.74)$$

$$H_{2z'} = -(2B_2M_{2z'} + B_3M_{2x'} + C_2M_{1x'} + C_4M_{1z'} + B_5). \quad (13.75)$$

13.3. Уравнения движения и резонансные частоты

Рассмотрим теперь уравнения движения векторов намагниченности в обоих доменах, а также соответствующие резонансные частоты собственных колебаний намагниченности.

13.3.1. Уравнения движения для векторов намагниченности в доменах двух знаков

Уравнения движения для намагниченности, получаемые из раскрытия векторного произведения в уравнении Ландау–Лифшица (1.5) в системе $Ox'_1y'_1z'_1x'_2y'_2z'_2$ (то есть в системах $Ox'_1y'_1z'_1$ и $Ox'_2y'_2z'_2$ для векторов \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 соответственно), имеют вид:

$$\dot{M}_{1x'} = -\gamma(M_{1y'}H_{1z'} - M_{1z'}H_{1y'}); \quad (13.76)$$

$$\dot{M}_{1y'} = -\gamma(M_{1z'}H_{1x'} - M_{1x'}H_{1z'}); \quad (13.77)$$

$$\dot{M}_{1z'} = -\gamma(M_{1x'}H_{1y'} - M_{1y'}H_{1x'}); \quad (13.78)$$

$$\dot{M}_{2x'} = -\gamma(M_{2y'}H_{2z'} - M_{2z'}H_{2y'}); \quad (13.79)$$

$$\dot{M}_{2y'} = -\gamma(M_{2z'}H_{2x'} - M_{2x'}H_{2z'}); \quad (13.80)$$

$$\dot{M}_{2z'} = -\gamma(M_{2x'}H_{2y'} - M_{2y'}H_{2x'}), \quad (13.81)$$

где с целью сокращения геометрического объема записи дифференцирование по времени обозначено точкой над соответствующей переменной [258, 517].

Подставляя (13.70)–(13.75) в (13.76)–(13.81), получаем полные уравнения движения для компонент намагниченности:

$$\begin{aligned} \dot{M}_{1x'} = \gamma \{ & A_3M_{1x'}M_{1y'} + 2(A_2 - D_1)M_{1y'}M_{1z'} + \\ & + C_3M_{1y'}M_{2x'} + C_4M_{1y'}M_{2z'} - D_3M_{1z'}M_{2y'} + A_5M_{1y'} \}; \end{aligned} \quad (13.82)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_{1y'} = \gamma \{ & -A_3 M_{1x'}^2 + A_3 M_{1z'}^2 + 2(A_1 - A_2) M_{1x'} M_{1z'} - \\ & - C_3 M_{1x'} M_{2x'} - C_4 M_{1x'} M_{2z'} + C_1 M_{1z'} M_{2x'} + C_2 M_{1z'} M_{2z'} - \\ & - A_5 M_{1x'} + A_4 M_{1z'} \}; \end{aligned} \quad (13.83)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_{1z'} = \gamma \{ & -2(A_1 - D_1) M_{1x'} M_{1y'} - A_3 M_{1y'} M_{1z'} + \\ & + D_3 M_{1x'} M_{2y'} - C_1 M_{1y'} M_{2x'} - C_2 M_{1y'} M_{2z'} - A_4 M_{1y'} \}; \end{aligned} \quad (13.84)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_{2x'} = \gamma \{ & B_3 M_{2x'} M_{2y'} + 2(B_2 - D_2) M_{2y'} M_{2z'} + \\ & + C_2 M_{1x'} M_{2y'} + C_4 M_{1z'} M_{2y'} - D_3 M_{1y'} M_{2z'} + B_5 M_{2y'} \}; \end{aligned} \quad (13.85)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_{2y'} = \gamma \{ & -B_3 M_{2x'}^2 + B_3 M_{2z'}^2 + 2(B_1 - B_2) M_{2x'} M_{2z'} - \\ & - C_2 M_{1x'} M_{2x'} + C_1 M_{1x'} M_{2z'} - C_4 M_{1z'} M_{2x'} + C_3 M_{1z'} M_{2z'} - \\ & - B_5 M_{2x'} + B_4 M_{2z'} \}; \end{aligned} \quad (13.86)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_{2z'} = \gamma \{ & -2(B_1 - D_2) M_{2x'} M_{2y'} - B_3 M_{2y'} M_{2z'} - \\ & - C_1 M_{1x'} M_{2y'} - C_3 M_{1z'} M_{2y'} + D_3 M_{1y'} M_{2x'} - B_4 M_{2y'} \}. \end{aligned} \quad (13.87)$$

Так как полученные уравнения описывают колебания векторов намагниченности относительно их равновесных положений, то возникает возможность выполнить линеаризацию задачи. Итак положим:

$$M_{1x'} = m_{1x'}; \quad (13.88)$$

$$M_{1y'} = m_{1y'}; \quad (13.89)$$

$$M_{1z'} = M_0 + m_{1z'}; \quad (13.90)$$

$$M_{2x'} = m_{2x'}; \quad (13.91)$$

$$M_{2y'} = m_{2y'}; \quad (13.92)$$

$$M_{2z'} = M_0 + m_{2z'} \quad (13.93)$$

где: $m_{1x'} \sim m_{1y'} \sim m_{1z'} \sim m_{2x'} \sim m_{2y'} \sim m_{2z'} \ll M_0$.

Подставляем (13.88)–(13.93) в уравнения движения (13.82)–(13.87) и оставляем члены, линейные по $m_{1x'}$, $m_{1y'}$, $m_{2x'}$, $m_{2y'}$:

$$\dot{m}_{1x'} = \gamma \left\{ [2(A_2 - D_1)M_0 + C_4 M_0 + A_5] m_{1y'} - D_3 M_0 m_{2y'} \right\}; \quad (13.94)$$

$$\begin{aligned} \dot{m}_{1y'} = \gamma \left\{ [2(A_1 - A_2)M_0 - C_4 M_0 - A_5] m_{1x'} + \right. \\ \left. + C_1 M_0 m_{2x'} + \underline{[(A_3 + C_2)M_0 + A_4] M_0} \right\}; \end{aligned} \quad (13.95)$$

$$\dot{m}_{1z'} = \gamma \left\{ - \underline{[(A_3 + C_2)M_0 + A_4] m_{1y'}} \right\}; \quad (13.96)$$

$$\dot{m}_{2x'} = \gamma \left\{ [2(B_2 - D_2)M_0 + C_4 M_0 + B_5] m_{2y'} - D_3 M_0 m_{1y'} \right\}; \quad (13.97)$$

$$\begin{aligned} \dot{m}_{2y'} = \gamma \left\{ [2(B_1 - B_2)M_0 - C_4 M_0 - B_5] m_{2x'} + \right. \\ \left. + C_1 M_0 m_{1x'} + \underline{[(B_3 + C_3)M_0 + B_4] M_0} \right\}; \end{aligned} \quad (13.98)$$

$$\dot{m}_{2z'} = \gamma \left\{ - \underline{[(B_3 + C_3)M_0 + B_4] m_{2y'}} \right\}. \quad (13.99)$$

В уравнениях для $\dot{m}_{1y'}$ и $\dot{m}_{2y'}$ имеются постоянные слагаемые: $[(A_3 + C_2)M_0 + A_4]M_0$ и $[(B_3 + C_3)M_0 + B_4]M_0$ (подчеркнуты).

Подобные же выражения (без M_0) содержатся в уравнениях для $\dot{m}_{1z'}$ и $\dot{m}_{2z'}$ (также подчеркнуты). Поскольку системы $Ox_1'y_1'z_1'$ и $Ox_2'y_2'z_2'$ соответствуют направлению осей Oz_1' и Oz_2' вдоль равновесных положений векторов \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 , то в соответствии с общими правилами линеаризации ([3, раздел 6.1.4]), эти слагаемые должны равняться нулю.

Для проверки такого положения следует выполнить последовательную подстановку в эти выражения $A_3, A_4, B_3, B_4, C_2, C_3$, определяемые формулами (13.55), (13.56), (13.60), (13.61), (13.64), (13.65), после чего раскрыть $\cos \theta_{1,2}, \sin \theta_{1,2}$ по формулам (13.33)–(13.36), где поля $H_a, H_{dx}, H_{dy}, H_{sx}, H_{sy}$ связаны с параметрами материала и доменов формулами (13.10)–(13.14). Выполнение такой процедуры после несложных, хотя и несколько громоздких вычислений приводит к соотношениям:

$$(A_3 + C_2)M_0 + A_4 = 0; \quad (13.100)$$

$$(B_3 + C_3)M_0 + B_4 = 0. \quad (13.101)$$

При этом подчеркнутые слагаемые в уравнениях для $\dot{m}_{1y'}$ и $\dot{m}_{2y'}$ (13.95) и (13.98) исчезают, а правая часть уравнений (13.96) и (13.99) становится равной нулю, откуда следует: $\dot{m}_{1z'} = 0$ и $\dot{m}_{2z'} = 0$. Таким образом, из шести уравнений (13.94)–(13.97) остаются только четыре, и линеаризованная система уравнений для переменных составляющих компонент намагниченности принимает вид:

$$\dot{m}_{1x'} = \gamma \{ [2(A_2 - D_1)M_0 + C_4M_0 + A_5]m_{1y'} - D_3M_0m_{2y'} \}; \quad (13.102)$$

$$\dot{m}_{1y'} = \gamma \{ [2(A_1 - A_2)M_0 - C_4M_0 - A_5]m_{1x'} + C_1M_0m_{2x'} \}; \quad (13.103)$$

$$\dot{m}_{2x'} = \gamma \{ [2(B_2 - D_2)M_0 + C_4M_0 + B_5]m_{2y'} - D_3M_0m_{1y'} \}; \quad (13.104)$$

$$\dot{m}_{2y'} = \gamma \{ [2(B_1 - B_2)M_0 - C_4M_0 - B_5]m_{2x'} + C_1M_0m_{1x'} \}. \quad (13.105)$$

Замечание. При проведении линеаризации компоненты намагниченности $M_{1z'}$ и $M_{2z'}$ положены равными постоянной величине M_0 в сумме с малыми добавками $m_{1z'}$ и $m_{2z'}$, как это видно из формул (13.90) и (13.93). Однако в рамках классической процедуры линеаризации (см. напр. [16, стр. 32]) полагается сразу $M_{1z'} = M_0$ и $M_{2z'} = M_0$, то есть $m_{1z'}$ и $m_{2z'}$ полагаются равными нулю, и уравнения для $\dot{m}_{1z'}$ и $\dot{m}_{2z'}$ не рассматриваются. Такое отличие проведенной здесь процедуры от классической, состоящее в выборе $M_{1z'}$ и $M_{2z'}$ в виде (13.90) и (13.93), обусловлено тем, что при классическом решении заведомо предполагается, что намагниченность в равновесном состоянии ориентирована точно вдоль постоянного поля, то есть по оси Oz . Здесь же равновесное положение векторов намагниченности \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 заранее не известно, в результате чего в уравнениях (13.95) и (13.98) появляются постоянные слагаемые, а уравнения (13.96) и (13.99) обретают значимость. Как показано в [3, раздел

6.1.4], условие равенства нулю этих слагаемых как раз и определяет равновесное состояние намагниченности, поэтому подстановка в них заведомо равновесных значений $A_3, A_4, B_3, B_4, C_2, C_3$ приводит к соотношениям (13.100) и (13.101), позволяющим преобразовать систему (13.94)–(13.99) к виду (13.102)–(13.105).

13.3.2. Резонансные частоты собственных колебаний

Введем вспомогательные обозначения для коэффициентов при переменных в уравнениях (13.102)–(13.105):

$$P_1 = -\gamma[2(A_2 - D_1)M_0 + C_4M_0 + A_5]; \quad (13.106)$$

$$P_2 = \gamma D_3 M_0; \quad (13.107)$$

$$P_3 = -\gamma[2(A_1 - A_2)M_0 - C_4M_0 - A_5]; \quad (13.108)$$

$$P_4 = -\gamma C_1 M_0; \quad (13.109)$$

$$Q_1 = -\gamma[2(B_2 - D_2)M_0 + C_4M_0 + B_5]; \quad (13.110)$$

$$Q_2 = \gamma D_3 M_0; \quad (13.111)$$

$$Q_3 = -\gamma[2(B_1 - B_2)M_0 - C_4M_0 - B_5]; \quad (13.112)$$

$$Q_4 = -\gamma C_1 M_0. \quad (13.113)$$

С этими обозначениями система (13.102)–(13.105) принимает вид:

$$\dot{m}_{1x'} + P_1 m_{1y'} + P_2 m_{2y'} = 0; \quad (13.114)$$

$$P_3 m_{1x'} + \dot{m}_{1y'} + P_4 m_{2x'} = 0; \quad (13.115)$$

$$Q_2 m_{1y'} + \dot{m}_{2x'} + Q_1 m_{2y'} = 0; \quad (13.116)$$

$$Q_2 m_{1x'} + Q_3 m_{2x'} + \dot{m}_{2y'} = 0. \quad (13.117)$$

Будем полагать, что зависимость компонент намагниченности от времени имеет вид $e^{i\omega t}$. Подстановка такой зависимости в (13.114)–(13.117) после дифференцирования и сокращения временного множителя дает:

$$i\omega m_{1x'}^{(0)} + P_1 m_{1y'}^{(0)} + P_2 m_{2y'}^{(0)} = 0; \quad (13.118)$$

$$P_3 m_{1x'}^{(0)} + i\omega m_{1y'}^{(0)} + P_4 m_{2x'}^{(0)} = 0; \quad (13.119)$$

$$Q_2 m_{1y'}^{(0)} + i\omega m_{2x'}^{(0)} + Q_1 m_{2y'}^{(0)} = 0; \quad (13.120)$$

$$Q_4 m_{1x'}^{(0)} + Q_3 m_{2x'}^{(0)} + i\omega m_{2y'}^{(0)} = 0, \quad (13.121)$$

где верхний индекс «(0)» означает амплитуды соответствующих компонент намагниченности.

Определитель этой системы имеет вид

$$D_0 = \begin{vmatrix} i\omega & P_1 & 0 & P_2 \\ P_3 & i\omega & P_4 & 0 \\ 0 & Q_2 & i\omega & Q_1 \\ Q_4 & 0 & Q_3 & i\omega \end{vmatrix}. \quad (13.122)$$

Равенство нулю этого определителя дает уравнение для резонансных частот:

$$\omega^4 + \omega^2(P_1P_3 + Q_1Q_3 + P_2Q_4 + P_4Q_2) + (P_1Q_1 - P_2Q_2)(P_3Q_3 - P_4Q_4) = 0 \quad (13.123)$$

Решение этого уравнения для квадрата частоты ω имеет вид

$$\omega^2 = -\frac{1}{2} \cdot (P_1P_3 + Q_1Q_3 + P_2Q_4 + P_4Q_2) \pm \frac{1}{2} \times \sqrt{(P_1P_3 + Q_1Q_3 + P_2Q_4 + P_4Q_2)^2 - (P_1Q_1 - P_2Q_2)(P_3Q_3 - P_4Q_4)}. \quad (13.124)$$

Это выражение получено без какого-либо предположения о соотношении между входящими в него величинами и имеет силу при любом произвольном соотношении параметров материала и размеров чередующихся доменов. Однако свойства симметрии доменов, рассматриваемых в настоящей задаче, позволяют его значительно упростить.

Так, из симметричности ориентации векторов намагниченности в доменах, так что $\theta_1 = \theta_2$ (рис. 13.4), для коэффициентов (13.53)–(13.62) следует выполнение соотношений $A_i = B_i$, где $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Кроме того, из (13.67) и (13.68) видно, что $D_1 = D_2$. Подстановка этих соотношений в (13.106)–(13.113) показывает, что $Q_j = P_j$, где $j = 1, 2, 3, 4$. Последнее равенство позволяет в выражениях (13.123)–(13.124) параметры Q_j заменить на P_j .

При этом уравнение для ω принимает вид

$$\omega^4 + 2\omega^2(P_1P_3 + P_2P_4) + (P_1^2 - P_2^2)(P_3^2 - P_4^2) = 0. \quad (13.125)$$

Решая это уравнение, после раскрытия скобок в подкоренном выражении получаем

$$\omega^2 = -(P_1P_3 + P_2P_4) \pm (P_1P_4 + P_2P_3). \quad (13.126)$$

Из раскрытия скобок при том и другом значении знака по отдельности, с последующим разложением на множители, получаем два решения:

$$\omega_1^2 = -(P_1 + P_2)(P_3 - P_4); \quad (13.127)$$

$$\omega_2^2 = -(P_1 + P_2)(P_3 + P_4); \quad (13.128)$$

где P_1, P_2, P_3, P_4 определяются соотношениями (13.106)–(13.109).

Это — квадраты двух резонансных частот, то есть сами частоты находятся из этих выражений путем извлечения квадратного корня:

$$\omega_1 = \sqrt{-(P_1 + P_2)(P_3 - P_4)}; \quad (13.129)$$

$$\omega_2 = \sqrt{-(P_1 + P_2)(P_3 + P_4)}. \quad (13.130)$$

Заметим, что знаки «минус» под корнем не означают мнимости конечных выражений, так как эти знаки далее компенсируются отрицательными величинами вторых сомножителей подкоренных выражений.

Запишем входящие в последние выражения вспомогательные параметры $A_1, A_2, A_5, C_1, C_4, D_1, D_3$ через поля $H_0, H_a, H_{dx}, H_{dy}, H_{sx}, H_{sy}$ и намагниченность M_0 , для чего воспользуемся формулами (13.53), (13.54), (13.57), (13.63), (13.66), (13.67), (13.69), с учетом (13.16)–(13.20), а также (13.33)–(13.36).

В результате получаем:

$$A_1 = -\frac{H_0^2(H_a - H_{dx})}{2M_0H_{Ax}^2}; \quad (13.131)$$

$$A_2 = -\frac{(H_{Ax}^2 - H_0^2)(H_a - H_{dx})}{2M_0H_{Ax}^2}; \quad (13.132)$$

$$A_5 = -\frac{H_0^2}{H_{Ax}}; \quad (13.133)$$

$$C_1 = \frac{H_0^2H_{sx}}{M_0H_{Ax}^2}; \quad (13.134)$$

$$C_4 = -\frac{(H_{Ax}^2 - H_0^2)H_{sx}}{M_0H_{Ax}^2}; \quad (13.135)$$

$$D_1 = \frac{H_{dy}}{2M_0}; \quad (13.136)$$

$$D_3 = -\frac{H_{sy}}{M_0}, \quad (13.137)$$

где введено вспомогательное обозначение:

$$H_{Ax} = H_a - H_{dx} + H_{sx}, \quad (13.138)$$

представляющее собой поле окончания ориентационного перехода, где происходит фазовый переход второго рода (раздел 9.1), с учетом внутреннего размагничивающего поля домена и воздействия на намагниченность полей от соседних доменов.

С помощью формул (13.131)–(13.138) получаем сомножители, входящие в выражения частот (13.127) и (13.128):

$$P_1 + P_2 = \gamma(H_{Ax} + H_{dy} - H_{sy}); \quad (13.139)$$

$$P_3 - P_4 = -\gamma\frac{H_{Ax}^2 - H_0^2}{H_{Ax}}; \quad (13.140)$$

$$P_3 + P_4 = -\gamma\frac{H_{Ax}^2 - H_0^2}{H_{Ax}} - \gamma\frac{2H_0^2H_{sx}}{H_{Ax}^2}. \quad (13.141)$$

Можно видеть, что в рассматриваемом интервале полей до перехода (то есть при $H_0 \leq H_{Ax}$) величины $P_3 - P_4$ и $P_3 + P_4$ отрицательны, что и дает упомянутую выше компенсацию минусов в подкоренных выражениях формул (13.129) и (13.130).

Подставляя полученные множители в (13.127) и (13.128), получаем частоты, выраженные через поля:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\gamma^2}{H_{Ax}} (H_{Ax} + H_{dy} - H_{sy})(H_{Ax}^2 - H_0^2)}; \quad (13.142)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \frac{2\gamma^2 H_{sx}}{H_{Ax}^2} (H_{Ax} + H_{dy} - H_{sy}) H_0^2}. \quad (13.143)$$

Из общего характера формул (13.142) и (13.143) можно видеть, что зависимости обеих частот от поля H_0 имеют характер квадратного корня из квадратичного полинома. При этом надо не забывать, что обе они получены для интервала полей $0 \leq H_0 \leq H_{Ax}$, то есть от нуля до поля перехода.

Интересно проследить значения этих частот на границах упомянутого интервала.

Так, при $H_0 = 0$ из (13.142) и (13.143) получаем:

$$\omega_1|_{H_0=0} = \gamma \sqrt{H_{Ax}(H_{Ax} + H_{dy} - H_{sy})}; \quad (13.144)$$

$$\omega_2|_{H_0=0} = \gamma \sqrt{H_{Ax}(H_{Ax} + H_{dy} - H_{sy})}, \quad (13.145)$$

то есть в отсутствие поля обе частоты совпадают, то есть имеется только одна резонансная частота.

При $H_0 = H_{Ax} = H_A - H_{dx} + H_{sx}$, то есть при поле фазового перехода

$$\omega_1|_{H_0=H_{Ax}} = 0; \quad (13.146)$$

$$\omega_2|_{H_0=H_{Ax}} = \gamma \sqrt{2H_{sx}(H_{Ax} + H_{dy} - H_{sy})}, \quad (13.147)$$

то есть одна из частот падает до нуля, а вторая сохраняет отличное от нуля конечное значение.

Напомним, что в полученных формулах поля связаны с параметрами материала и доменов формулами (13.10)–(13.14).

13.3.3. Условия дискретности и вырождения резонансных частот

Таким образом, из формул (13.142)–(13.147) можно видеть, что полный спектр ФМР имеет две ветви. В отсутствие поля H_0 ветви вырождены и их частоты совпадают. При увеличении поля вырождение снимается, частота одной из ветвей уменьшается и в точке фазового перехода обращается в нуль, а частота второй уменьшается, остается постоянной или увеличивается в зависимости от параметров материала, принимая в точке перехода конечное отличное от нуля значение. Далее видно, что частота ФМР, кроме поля анизотропии H_a и намагничен-

ности насыщения $4\pi M_0$, определяется также четырьмя локальными эффективными полями: H_{dx} , H_{dy} , H_{sx} и H_{sy} , которые связаны между собой через форму и размеры доменов. При этом поле анизотропии и намагниченность насыщения могут быть найдены независимо, например, из экспериментов по ФМР в насыщенном состоянии, а локальные поля можно определить через эти параметры материала с помощью микромагнитного расчета. Такой расчет, аналогичный выполняемому при исследовании статики доменной структуры [235], показывает, что для сквозных доменов, ширина которых близка к толщине пластины, локальные эффективные поля приближенно равны:

$$H_{dx} = 2\pi M_x; \quad (13.148)$$

$$H_{sx} = (0,6 \div 0,8)H_{dx}; \quad (13.149)$$

$$H_{dy} = H_{sy}. \quad (13.150)$$

Заметим, что при выполнении третьего из этих равенств конкретные значения H_{dy} и H_{sy} не критичны. В случае несквозных доменов с треугольными замыкающими призмами соотношение между эффективными полями примерно сохраняется, а сами поля уменьшаются.

13.4. Зависимости резонансных частот от параметров модели

Рассмотрим теперь, как в случае принятой модели резонансные частоты обеих ветвей спектра зависят от параметров материала и геометрии доменов. Для удобства дальнейшего сравнения с экспериментом перейдем в (13.142)–(13.143) от круговых частот к линейным:

$$f_1 = \gamma \sqrt{\frac{1}{H_{Ax}} (H_{Ax} + H_{dy} - H_{sy})(H_{Ax}^2 - H_0^2)}; \quad (13.151)$$

$$f_2 = \gamma \sqrt{\left(\frac{f_1}{\gamma}\right)^2 + \frac{2H_{sx}}{H_{Ax}^2} (H_{Ax} + H_{dy} - H_{sy})H_0^2}, \quad (13.152)$$

где в соответствии с (13.138) использовано обозначение:

$$H_{Ax} = H_A - H_{dx} + H_{sx}, \quad (13.153)$$

а параметр γ равен 2,8 МГц/Э.

Рассмотрим сначала как меняются полевые зависимости ветвей спектра при различных параметрах материала и доменной структуры. Для наглядности будем варьировать параметры по отдельности. Получаемые при этом зависимости, построенные при $4\pi M_0 = 1750$ Гс, показаны на рис. 13.5–13.9.

13.4.1. Изменение внешнего поля

На рис. 13.5 показаны зависимости резонансных частот от поля H_0 при различных значениях поля анизотропии H_a . При этом все остальные поля полагаются равными нулю, так что $H_{Ax} = H_a$, а формулы (13.151)–(13.152) принимают вид:

$$f_1 = \gamma \sqrt{H_a^2 - H_0^2}; \quad (13.154)$$

$$f_2 = \gamma \sqrt{H_a^2 - H_0^2}. \quad (13.155)$$

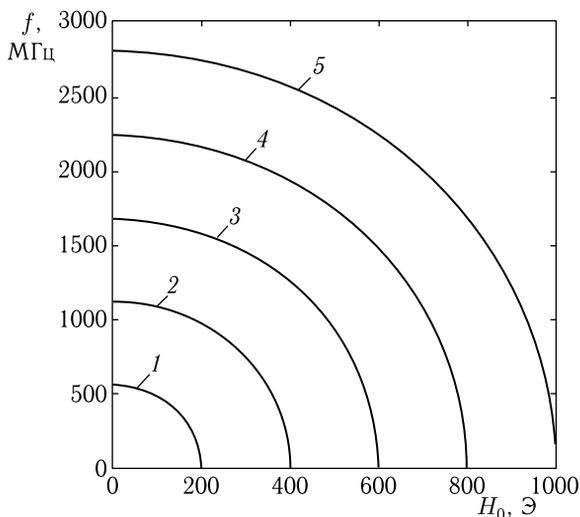


Рис. 13.5. Полевые зависимости частот ветвей спектра ФМР в доменах при различных значениях поля анизотропии H_a : 1 — 200 Э; 2 — 400 Э; 3 — 600 Э; 4 — 800 Э; 5 — 1000 Э

Из рисунка можно видеть, что имеет место вырождение ветвей, то есть слияние в одну, как это следует из формул (13.154) (13.155). При нулевом поле все кривые начинаются на равных расстояниях друг от друга с интервалами по частоте, равными 560 МГц (то есть $\gamma \cdot 200$ Э, где $\gamma = 2,8$ МГц/Э). При увеличении поля радиальные интервалы между кривыми сохраняются, что следует из квадратично-корневой зависимости (13.154), представляющей собой уравнение окружности с центром в начале координат (то есть в точке $H = 0$, $f = 0$). Заканчиваются кривые в точках, соответствующих нулевой частоте, при поле $H_0 = H_a$, как это видно из (13.154) и (13.155).

13.4.2. Влияние поля размагничивания торцов доменов

На рис. 13.6 показаны зависимости резонансных частот от внешнего поля при различных значениях поля размагничивания торцов

доменов H_{dx} в случае, когда поле анизотропии $H_a = 800$ Э, а все остальные поля равны нулю. При этом $H_{Ax} = H_a - H_{dx}$, так что формулы (13.151)–(13.152) принимают вид:

$$f_1 = \gamma \sqrt{(H_a - H_{dx})^2 - H_0^2}; \quad (13.156)$$

$$f_2 = \gamma \sqrt{(H_a - H_{dx})^2 - H_0^2}. \quad (13.157)$$

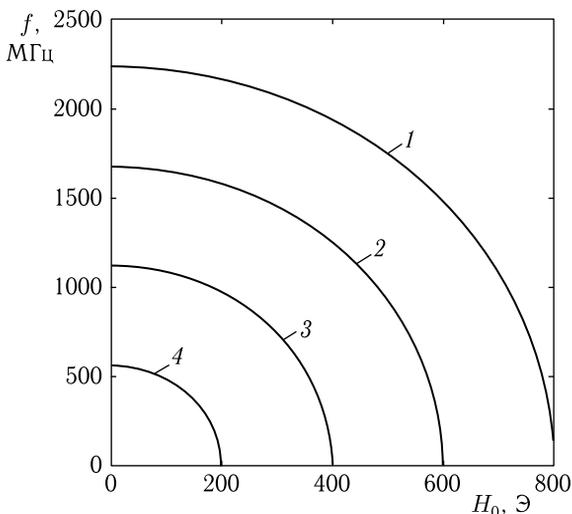


Рис. 13.6. Полевые зависимости частот ветвей спектра ФМР в доменах при различных значениях поля размагничивания торцов доменов H_{dx} : 1 — 0 Э; 2 — 200 Э; 3 — 400 Э; 4 — 600 Э

Из рисунка можно видеть, что здесь, как и в предыдущем случае, имеет место вырождение ветвей, то есть слияние в одну, как это следует из формул (13.156) и (13.157). При нулевом поле все кривые начинаются на равных расстояниях друг от друга с интервалами по частоте также равными 560 МГц (то есть $\gamma 200$ Э), однако здесь отсчет номеров кривых идет в обратном направлении, то есть при нулевом поле частота равна 2240 МГц, а дальше, по мере увеличения H_{dx} шагами по 200 Э, снижается также шагами по 560 МГц. Как и в предыдущем случае, при увеличении поля H_{dx} равными шагами, радиальные интервалы между кривыми сохраняются, что следует из квадратично-корневой зависимости (13.156) и (13.158), представляющей собой уравнение окружности с центром в начале координат, то есть в точке $H = 0, f = 0$, которая достигается при $H_{dx} = 600$ Э. Заканчиваются кривые в точках, соответствующих нулевой частоте, при поле $H_0 = H_a - H_{dx}$, как это видно из (13.156) и (13.157).

13.4.3. Влияние поля размагничивания боковых граней доменов

На рис. 13.7 показаны зависимости резонансных частот от поля размагничивания боковых граней доменов H_{dy} в случае, когда поле анизотропии $H_a = 800$ Э, а все остальные поля равны нулю. При этом $H_{Ax} = H_a$, так что формулы (13.151)–(13.152) принимают вид:

$$f_1 = \gamma \sqrt{\frac{1}{H_a} (H_a + H_{dy}) (H_a^2 - H_0^2)}; \quad (13.158)$$

$$f_2 = \gamma \sqrt{\frac{1}{H_a} (H_a + H_{dy}) (H_a^2 - H_0^2)}. \quad (13.159)$$

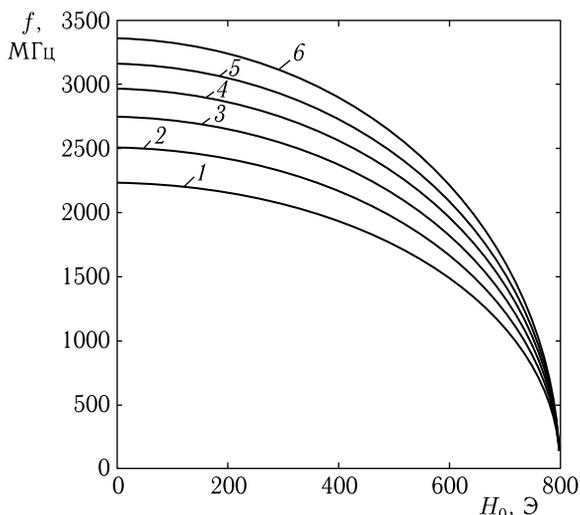


Рис. 13.7. Полевые зависимости частот ветвей спектра ФМР в доменах при различных значениях поля размагничивания боковых граней доменов H_{dy} : 1 — 0 Э; 2 — 200 Э; 3 — 400 Э; 4 — 600 Э; 5 — 800 Э; 6 — 1000 Э

Из рисунка можно видеть, что здесь, как и в обоих предыдущих случаях, имеет место вырождение ветвей, то есть слияние в одну, как это следует из формул (13.158) и (13.159). При нулевом поле H_0 расстояние между кривыми по мере увеличения поля H_{dy} несколько уменьшается. Так, при $H_{dy} = 0$ Э частота в нулевом поле (кривая 1) составляет 2240 МГц, а при $H_{dy} = 200$ Э (кривая 2) достигает 2504 Э. При $H_{dy} = 800$ Э (кривая 5) эта частота равняется 3168 МГц, а при $H_{dy} = 1000$ Э (кривая 6) составляет 3360 МГц. Таким образом, при увеличении поля H_{dy} в обоих случаях на одну и ту же величину 200 Э, частота в первом случае увеличивается на 264 МГц, а во втором — всего на 192 МГц. Все кривые представляют собой четвертые части эллипсов, главные оси которых лежат на осях ко-

ординат. При поле $H_0 = H_A$ все кривые приходят в одну и ту же точку, соответствующую частоте равной нулю, как это можно видеть из формул (13.158) и (13.159).

13.4.4. Влияние полей воздействия доменов друг на друга

На рис. 13.8 показаны зависимости резонансных частот от поля взаимодействия намагниченностей через торцы доменов H_{sx} в случае, когда поле анизотропии $H_a = 800$ Э, а все остальные поля равны нулю. При этом $H_{Ax} = H_a + H_{sx}$, так что формулы (13.151)–(13.152) принимают вид:

$$f_1 = \gamma \sqrt{(H_a + H_{sx})^2 - H_0^2}; \tag{13.160}$$

$$f_2 = \gamma \sqrt{(H_a + H_{sx})^2 - \frac{H_a - H_{sx}}{H_a + H_{sx}} H_0^2}. \tag{13.161}$$

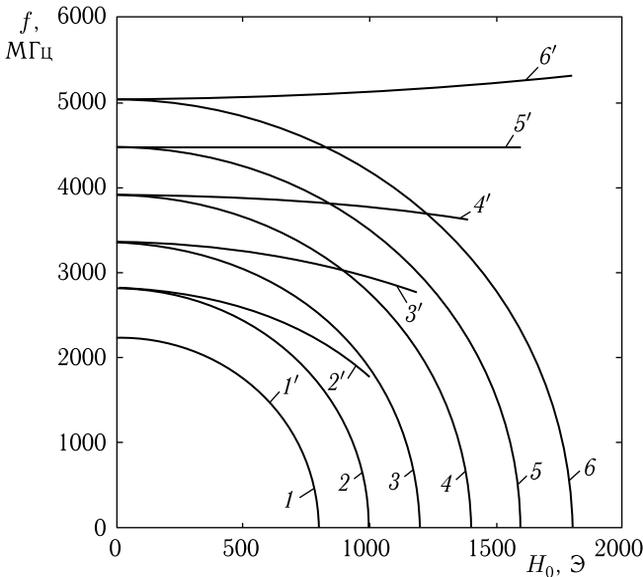


Рис. 13.8. Полевые зависимости частот ветвей спектра ФМР в доменах при различных значениях поля взаимодействия через торцы доменов H_{sx} : 1, 1' — 0 Э; 2, 2' — 200 Э; 3, 3' — 400 Э; 4, 4' — 600 Э; 5, 5' — 800 Э; 6, 6' — 1000 Э

Из рисунка можно видеть, что здесь, в отличие от предыдущих случаев, вырождение отсутствует, как что формулы (13.160) и (13.161) имеют вид совершенно различный.

Формула (13.160), описывающая кривые 1–6, соответствует окружностям с центрами в начале координат, подобным приведенным на рис. 13.5 и рис. 13.6, построенным по формулам (13.154) и (13.156), только лишь с другим параметром под корнем.

Формула (13.161) при $H_0 = 0$ Э дает те же частоты, что и формула (13.160) при том же поле. То есть все кривые, соответствующие одним и тем же значениям поля H_{sx} , начинаются попарно в одних и тех же точках.

Однако далее, по мере увеличения поля H_0 эти кривые существенным образом расходятся. Исключение составляют только кривые 1 и $1'$, для которых $H_{sx} = 0$ Э, так что они полностью совпадают благодаря равенству единице коэффициента при H_0^2 во втором подкоренном слагаемом в формуле (13.161). Но по мере увеличения поля H_{sx} этот коэффициент постепенно уменьшается, в результате чего загиб вниз кривых $2'$, $3'$, $4'$ становится тем меньше, чем соответствующая величина H_{sx} больше. При достижении величины $H_{sx} = H_a$ зависимость частоты f_2 от поля H_0 пропадает (соответствующий коэффициент под корнем равняется нулю), так что кривая $5'$ представляет собой горизонтальную прямую линию, соответствующую частоте $\gamma(H_a + H_{sx}) = 4480$ МГц. При дальнейшем увеличении поля H_{sx} коэффициент при H_0^2 под корнем меняет знак, так что зависимость f_2 от H_0 из спадающей превращается в возрастающую, как это можно видеть из хода кривой $6'$. Все кривые, как убывающие, так и возрастающие заканчиваются при поле $H_0 = H_a + H_{sx}$, как это и должно быть из условия достижения полем H_0 значения поля перехода.

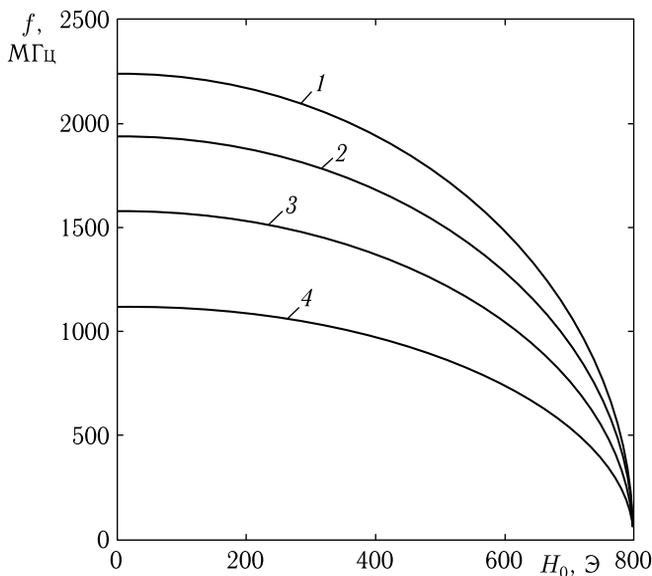


Рис. 13.9. Полевые зависимости частот ветвей спектра ФМР в доменах при различных значениях поля взаимодействия через боковые грани доменов H_{sy} :
 $1 - 0$ Э; $2 - 200$ Э; $3 - 400$ Э; $4 - 600$ Э

На рис. 13.9 показаны зависимости резонансных частот от поля взаимодействия намагниченностей через боковые грани доменов H_{sy} в случае, когда поле анизотропии $H_a = 800$ Э, а все остальные поля равны нулю. При этом $H_{Ax} = H_a$, так что формулы (13.151)–(13.152) принимают вид:

$$f_1 = \gamma \sqrt{\frac{1}{H_a}(H_a - H_{sy})(H_a^2 - H_0^2)}; \quad (13.162)$$

$$f_2 = \gamma \sqrt{\frac{1}{H_a}(H_a - H_{sy})(H_a^2 - H_0^2)}. \quad (13.163)$$

Из рисунка можно видеть, что здесь, как и в большинстве предыдущих случаев имеет место вырождение ветвей, то есть слияние в одну, как это следует из формул (13.162) и (13.163). При нулевом поле H_0 расстояние между кривыми по мере увеличения поля H_{sy} несколько увеличивается. Так, при $H_{sy} = 0$ Э частота в нулевом поле (кривая 1) составляет 2240 МГц, а при $H_{sy} = 200$ Э (кривая 2) уменьшается до 1940 Э. При $H_{sy} = 400$ Э (кривая 3) эта частота равняется 1584 МГц, а при $H_{sy} = 600$ Э (кривая 4) падает до 1120 МГц. Таким образом, при увеличении поля H_{sy} в обоих случаях на одну и ту же величину от нуля до 200 Э, а затем от 400 до 600 Э частота в первом случае уменьшается на 300 МГц, а во втором уже на 464 МГц. Зависимость при $H_{sy} = 800$ Э, то есть при $H_{sy} = H_a$, как видно из формул (13.162) и (13.163), соответствует частоте, равной нулю, то есть совпадает с горизонтальной осью чертежа.

Подобно рис. 13.7, все кривые представляют собой четвертые части эллипсов, главные оси которых лежат на осях координат. При поле $H_0 = H_a$ все кривые приходят в одну и ту же точку, соответствующую частоте равной нулю, как это также видно из формул (13.162) и (13.163).

13.4.5. Обсуждение полевых зависимостей и вырождения ветвей спектра

Из рассмотрения этих рисунков можно видеть следующее. При увеличении поля анизотропии H_a частота и поле перехода увеличиваются (рис. 13.5). То же самое происходит при уменьшении поля размагничивания торцов доменов H_{dx} , так как оно действует против поля анизотропии (рис. 13.6). С другой стороны, поле, действующее на рассматриваемый домен через торцы со стороны ближайших соседей H_{sx} , увеличивает частоту и поле перехода (рис. 13.8). Поле размагничивания боковых граней домена H_{dy} , не меняя поля перехода, несколько увеличивает резонансную частоту в области малых внешних полей (рис. 13.7). В то же время поле, действующее на рассматриваемый домен через боковые грани со стороны ближайших соседей H_{sy} , также

не меняя поля перехода, уменьшает резонансную частоту в области малых внешних полей (рис. 13.9).

На всех рисунках, кроме рис. 13.8, обе ветви вырождены и частота их в поле фазового перехода равна нулю. Для кривых, приведенных на рис. 13.8 вырождение ветвей отсутствует, обе ветви разделены по частоте, и в поле фазового перехода частота одной из них (нижней) равна нулю, а другой (верхней) существенно отлична от нуля. При увеличении внешнего поля H_0 частота верхней ветви может уменьшаться, оставаться постоянной или увеличиваться в тем большей степени, чем большую величину имеет поле взаимодействия намагниченностей доменов через торцы.

Рассмотрим причину такого поведения ветвей спектра. Поле анизотропии H_a не может снять вырождения ветвей спектра, так как оно с взаимодействием доменов (то есть с введением в игру второй степени свободы) никак не связано. Внутренние поля размагничивания отдельного домена от торцов и боковых граней H_{dx} и H_{dy} также не могут снять вырождения ветвей по той же причине. Поле взаимодействия доменов через боковые грани H_{sy} также не снимает частотного вырождения, так как оно действует в направлении, перпендикулярном плоскости, в которой перемещаются векторы намагниченности доменов обоих знаков при изменении внешнего поля. По этой причине его действие на векторы намагниченности остается одним и тем же при любой ориентации векторов намагниченности в доменах и при изменении внешнего поля не меняется. С другой стороны, поле взаимодействия доменов через торцы H_{sx} является единственным фактором, способным снять частотное вырождение, так как оно действует в направлении, лежащем в плоскости, в которой перемещаются векторы намагниченности доменов обоих знаков при изменении внешнего поля. По этой причине действие этого поля на векторы намагниченности при изменении их ориентации меняется существенным образом, что и снимает вырождение частотных ветвей.

Заметим, что этот вывод не вполне согласуется с результатом, полученным впервые в работе [31] и повторенным позднее в ряде других работ, цитируемых в [15–17]. В этих работах домены рассматриваются как тонкие бесконечно протяженные слои, поэтому учитывается только взаимодействие векторов намагниченности с боковыми гранями доменов, а поля, связанные с торцами доменов, из рассмотрения выпадают. При этом, тем не менее, вырождение ветвей снимается и частота верхней ветви в поле перехода получается отличной от нуля. По мнению авторов настоящей монографии, полученное в этих работах правдоподобное снятие вырождения ветвей обусловлено не полями на боковых гранях доменов, а учетом размагничивающих факторов образца в целом в направлении вдоль оси анизотропии. При таком подходе усреднение намагниченности по доменам обоих знаков приводит к математическим выражениям, аналогичным тем, которые описывают взаимодействие векторов намагниченности через торцы доменов, использованные в настоящей работе.

13.5. Сравнение с экспериментом

Применим теперь модель локальных полей для интерпретации экспериментальных результатов. В качестве примера выберем два крайних случая:

- 1) поле анизотропии значительно больше намагниченности;
- 2) поле анизотропии значительно меньше намагниченности.

Первый случай рассмотрен в работе [31] на основе гексаферрита бария, имеющего $H_a = 17\,000$ Э, $4\pi M_0 = 4800$ Гс.

Второй случай рассмотрен здесь в главе 12 на основе железиттриевого граната, имеющего $H_a = 100\text{--}200$ Э, $4\pi M_0 = 1750$ Гс. Воспользуемся далее для оценки локальных эффективных полей результатами микромагнитного расчета, приведенными выше, то есть будем считать, что: $H_{dx} = 2\pi M_0$, $H_{sx} = (0,6\text{--}0,8)H_{dx}$, $H_{dy} = H_{sy}$. Для расчета резонансных частот будем пользоваться формулами (13.151)–(13.154).

13.5.1. Поле анизотропии больше намагниченности

Рассмотрим сначала первый случай — поле анизотропии значительно больше намагниченности. Зависимости резонансных частот от поля H_0 для гексаферрита бария показаны на рис. 13.10. Кривые 1, 2 рассчитаны по значениям параметров материала, приведенным в работе [31] для температуры 20°C : $H_a = 17\,000$ Э, $4\pi M_0 = 4800$ Гс.

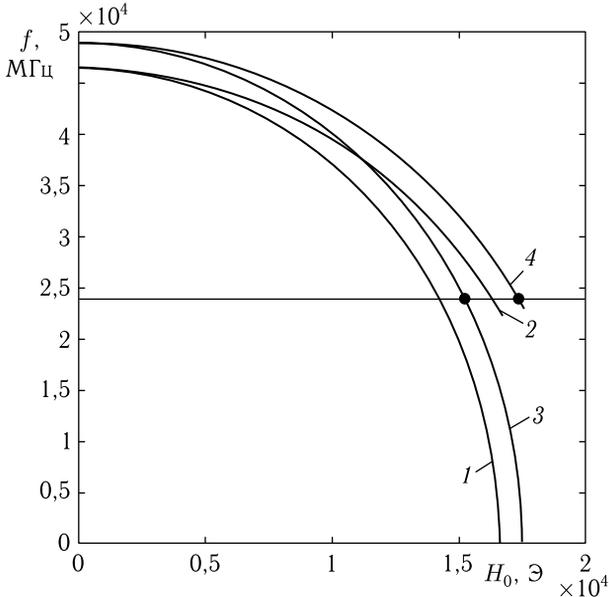


Рис. 13.10. Полевые зависимости частот ветвей спектра ФМР в доменах для гексаферрита бария. Линии — теория, точки — эксперимент из [31]. Кривые 1, 2 — расчет без поправки к полю анизотропии, 3, 4 — с поправкой

В соответствии с приведенными выше соотношениями локальные эффективные поля были взяты равными: $H_{dx} = 2400 \text{ Э}$, $H_{sx} = 2000 \text{ Э}$, $H_{dy} = H_{sy}$.

В описанных в работе [31] экспериментах частота СВЧ сигнала, возбуждающего ФМР, сохранялась постоянной, равной 23 900 МГц (показана сплошной горизонтальной линией на рис. 6.18), а менялось лишь внешнее поле H_0 . На рис. 13.10 точками отмечены значения резонансных полей для обеих ветвей ФМР, соответствующие экспериментальным данным, приведенным в работе [31].

Из рисунка видно, что рассчитанные значения резонансных полей, соответствующих рабочей частоте, по сравнению с экспериментальными получаются несколько заниженными — приблизительно на 1000 Э, что составляет около 6%. Для обеспечения лучшего согласия с экспериментом были рассчитаны те же зависимости при поле анизотропии равном $H_a = 17900 \text{ Э}$ (больше значения, приведенного в работе [31], на 900 Э, то есть на те же 6%). Полученные кривые 3, 4 приведены на том же рисунке. В этом случае различие между расчетными и экспериментальными значениями резонансных полей может быть уменьшено до 0,1%, то есть совпадение теории с экспериментом следует признать очень хорошим. Величина добавки к полю анизотропии, необходимой для столь хорошего описания экспериментальных результатов, во всем интервале температур, исследованном в работе [31] (от $-196 \text{ }^\circ\text{C}$ до $+200 \text{ }^\circ\text{C}$), остается практически постоянной и составляет 900 Э.

13.5.2. Поле анизотропии меньше намагниченности

Рассмотрим теперь второй случай — поле анизотропии значительно меньше намагниченности. Зависимости резонансных частот от поля H_0 для железиттриевого граната показаны на рис. 13.11.

На этом рисунке кривые 1, 2 рассчитаны по значениям параметров материала, близким, к полученным в главе 12. При этом намагниченность полагалась равной $4\pi M_0 = 1750 \text{ Гс}$, а поле анизотропии, исходя из значения поля фазового перехода $H_{Ax} = 70 \text{ Э}$, составило $H_a = 245 \text{ Э}$. В соответствии с приведенными выше соотношениями использовались следующие значения локальных эффективных полей: $H_{dx} = 875 \text{ Э}$, $H_{sx} = 700 \text{ Э}$, $H_{dy} = H_{sy}$. При таких значениях параметров расчет дает две ветви (кривые 1 и 2), частоты которых в нулевом поле совпадают и равны 200 МГц, а при увеличении H_0 вплоть до поля фазового перехода $H_{Ax} = 70 \text{ Э}$ частота одной ветви (1) падает до нуля, а другой (2) — растет до величины 880 МГц. Показанные на том же рисунке утолщенные кривые построены путем обобщения экспериментальных данных, приведенных в главе 12 в пренебрежении кубической анизотропией и ориентацией образца в плоскости. Тот факт, что в эксперименте наблюдалась лишь одна ветвь, можно объяснить перпендикулярностью векторов возбуждающего СВЧ поля и внешнего поля H_0 . Поэтому следует сравнивать экспериментальные данные лишь

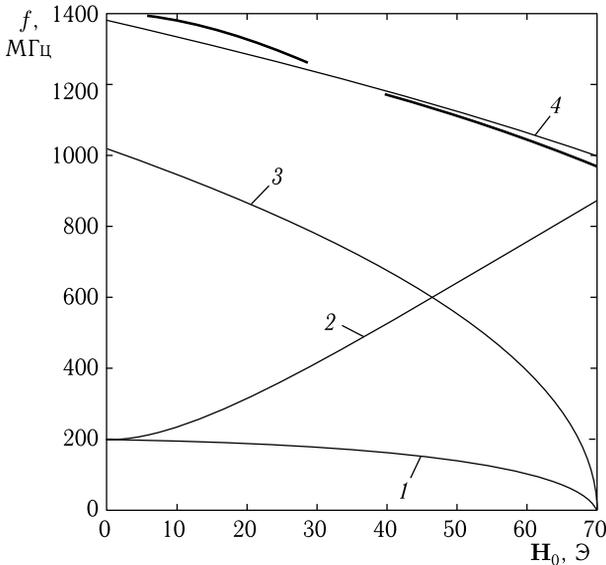


Рис. 13.11. Полевые зависимости частот ветвей спектра ФМР в доменах для железоиттриевого граната. Тонкие линии — теория, утолщенные — эксперимент. Кривые 1, 2 — расчет без поправки к полю, 3, 4 — с поправкой

с кривой 2 на рис. 13.11. Здесь следует отметить очень существенные расхождения. Во-первых, экспериментальная кривая во всем интервале полей H_0 спадает, а расчетная — растет. Во-вторых, в области малых полей экспериментально наблюдаемая частота ФМР составляет около 1400 МГц, а расчетная — 200 МГц, то есть в семь раз меньше. Удовлетворительным можно признать лишь соответствия экспериментального и расчетного значений резонансной частоты в поле фазового перехода — 970 МГц и 880 МГц соответственно.

13.5.3. Интерпретация полученных результатов на основе гипотезы об энергетической щели

Наблюдаемое сильное расхождение теоретического описания с экспериментом поставило вопрос о подборе таких значений расчетных параметров, которые позволили бы описать эксперимент более адекватно. Такие параметры были найдены и составили: поле анизотропии $H_a = 1000$ Э, локальные эффективные поля: $H_{dx} = 80$ Э, $H_{sx} = 65$ Э, $H_{dy} = H_{sy}$. При этом поле фазового перехода составило $H_{Ax} = 985$ Э, то есть для получения наблюдаемого в эксперименте значения 70 Э внешнее поле следует отсчитывать не от нуля, а от величины 915 Э. Соотношения $H_{sx} = (0,6-0,8)H_{px}$ и $H_{dy} = H_{sy}$ при этом выполняются, однако H_{dx} меньше $2\pi M_0$ приблизительно на порядок. При таких значениях параметров построены кривые 3 и 4 на рис. 13.11.

Видно, что кривая 4 совпадает с наблюдаемой в эксперименте (утолщенные линии) с точностью $\sim 4\%$.

Таким образом, описанные в главе 12 экспериментальные данные по распространению МСВ в ненасыщенных пленках ЖИГ, говорят о том, что в спектре ФМР имеется частотная щель, которую можно описать с помощью фиксированной добавки к внешнему полю. С учетом такой добавки модель локальных эффективных полей позволяет количественно описать наблюдаемую в эксперименте зависимость низкой частоты спектра МСВ от поля с весьма высокой точностью.

13.5.4. Возможные механизмы формирования щели

В предыдущем разделе установлено, что теория локальных полей доменов более или менее согласуется с экспериментом по ФМР только в случае учета существования в спектре ФМР заметной частотной щели. На примере гексаферрита бария и железоиттриевого граната было показано, что щель имеет место в материалах как с малой, так и с большой по сравнению с намагниченностью насыщения анизотропией и составляет около 800–900 МГц.

Физическая природа щели на момент написания настоящей монографии остается авторам неизвестной, однако следует заметить, что они видят две возможных причины наличия такой щели: несовершенство теории и свойство материала, в первую очередь его доменной структуры.

По поводу теории можно отметить, что авторы использовали наиболее простую и доступную модель доменов, а именно сквозную, однослойную, плоскопараллельную структуру без замыкающих доменов с выходом намагниченности на поверхность пластины.

Доменные границы полагались плоскими и бесконечно тонкими и их энергия не учитывалась. Структура полагалась периодической, однако период ее не учитывался. По сути дела рассчитывалась лишь плотность энергии пары соседствующих доменов, причем резонансные частоты ФМР определялись в условиях ориентационного перехода вектора намагниченности к направлению внешнего поля в каждом домене. Условия ориентационного перехода определялись без учета поперечного сечения доменов и толщины пластины.

Приведем краткий список факторов, учет которых мог бы привести к уточнению предложенной модели локальных полей доменов:

- конфигурация распределения намагниченности и плотности энергии доменных границ;
- периодичность доменной структуры, учет зависимости размеров доменов от толщины пластины;
- конфигурация распределения намагниченности вблизи поверхности пластины, учет скручивания границы и возможных замыкающих доменов.

Другой возможной причиной существования щели могут быть свойства самого магнитного материала, образующего пластину. Так, в теории совершенно не учитывался тот факт, что любой магнитный ма-

териал обладает магнитоупругими свойствами. При этом можно полагать, что при значительном преобладании анизотропии над намагнитченностью (как в гексаферрите бария) магнитоупругое взаимодействие вносит в частоту ФМР сравнительно небольшой вклад по сравнению со вкладом от анизотропии. В обратном случае, то есть при значительном преобладании намагнитченности над анизотропией (как в железиттриевом гранате), влияние магнитоупругого взаимодействия на частоту ФМР может быть сравнимым с влиянием анизотропии и даже превышать таковое.

Более того, известно, что в некоторых материалах, в первую очередь в антиферромагнетиках со слабым ферромагнетизмом, магнитоупругое взаимодействие приводит к образованию в спектре ФМР значительной частотной щели, достигающей по величине десяти и более гигагерц [242, 243]. Наличие такой щели приводит к заметному числу разнообразных физических эффектов [244–251], в первую очередь к аномально сильной зависимости скорости упругих волн от поля [244–246].

Причина щели здесь состоит в том, что в двухподрешеточном антиферромагнетике со слабым ферромагнетизмом векторы намагнитченности подрешеток слегка скошены друг относительно друга, образуя небольшой вектор слабого ферромагнетизма. При этом магнитоупругое взаимодействие приводит к образованию спонтанной деформации, создающей определенное поле магнитострикции. Переменное поле, воздействующее на суммарный вектор слабого ферромагнетизма в режиме ФМР, приводит к изменению угла между векторами намагнитченности подрешеток, что приводит к умножению слабого поля магнитострикции на весьма сильное поле обменного взаимодействия. Включение в работу столь мощного фактора приводит к сильному увеличению частоты ФМР, что и проявляется как наличие щели в спектре ФМР.

В случае ориентационного перехода в доменах каждую группу доменов одного знака можно рассматривать как определенную подрешетку, а наличие доменов двух знаков с противоположными ориентациями намагнитченности при приложении поля в отношении геометрии весьма напоминает двухподрешеточную структуру антиферромагнетика со слабым ферромагнетизмом.

То есть механизм образования щели здесь может быть сходным с механизмом спонтанной деформации в антиферромагнетике.

Дальше приведенной аналогии авторы настоящей монографии не осмеливаются простираť своих видов.

Заметим лишь, что в железиттриевом гранате, благодаря слабости анизотропии по сравнению с намагнитченностью, поле магнитоупругого взаимодействия может быть сравнимым с полем анизотропии, что должно сказываться на структуре доменных границ и доменов в целом. Так, при намагнитчивании пленки ЖИГ с нормальной анизотропией (пленки первого типа по классификации раздела 12.2.1) полем в ее плоскости, векторы намагнитченности в доменах противоположных

знаков наклоняются к направлению поля по обе стороны симметрично относительно плоскости пленки. При этом магнитоупругое взаимодействие приводит к взаимно противоположно ориентированным деформациям доменов того и другого знаков. Поскольку те и другие домены принадлежат к одной пленке, то это взаимодействие приводит к волнообразному распределению упругих напряжений в пленке, обладающему весьма высокой энергией. Картина получается сходной с распределением намагниченности в ферромагнетике с кубической анизотропией (типа железа, где легкие оси — ребра куба), в котором магнитоупругое взаимодействие, создавая подобные волнообразные упругие напряжения, приводит к запрещению образования 90-градусных доменных границ, оставляя возможными только 180-градусные границы [12, стр. 321–322].

Следует заметить, что подобное влияние магнитоупругого взаимодействия в пленке ЖИГ первого типа может способствовать ориентации намагниченности перпендикулярно плоскости пленки, то есть вносить дополнительный вклад в нормальную одноосную анизотропию наряду с рассогласованием параметров пленки и подложки, что является определяющим механизмом анизотропии в пленках смешанных ферритов-гранатов [235, стр. 24].

В заключение настоящего раздела авторы монографии считают своим долгом заметить, что приведенные здесь соображения ни в коей мере не претендуют на исчерпывающую полноту, то есть никак не являются «абсолютной истиной в последней инстанции», а дают лишь некоторые (возможно, ошибочные) наметки интерпретации щели, имея слабую надежду, что они могут быть хоть в какой-то мере полезными для будущих исследователей.

Выводы по главе 13

Данная глава посвящена рассмотрению ферромагнитного резонанса в пленках с нормальной одноосной анизотропией на основе модели локальных эффективных полей доменов. Результаты расчета резонансных частот сравниваются с данными эксперимента.

Основные результаты, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрена плоскопараллельная доменная структура в пластине с нормальной одноосной анизотропией. Предложена модель локальных эффективных полей в доменах двух знаков с противоположными направлениями намагниченности. В качестве локальных полей рассмотрены размагничивающие поля от границ собственного домена, а также проникающие внутрь домена поля, создаваемые другими доменами.

2. Рассмотрена конфигурация доменной структуры, представляющая собой пакет одинаковых прямоугольных параллелепипедов, плоскости оснований которых совпадают с общей плоскостью магнитной

пластины, а боковые грани, соседствуя друг с другом, ориентированы перпендикулярно плоскости пластины.

3. Рассмотрено формирование внутренних полей доменов как полей размагничивания собственных боковых граней. В качестве рабочей модели положено, что действие размагничивающих полей эквивалентно действию одноосной анизотропии. Для учета полей граней, соответствующих противоположащим парам боковых поверхностей доменов, введены две константы эквивалентной одноосной анизотропии, с помощью которых записана соответствующая плотность энергии.

4. Рассмотрено формирование полей воздействия соседних доменов друг на друга через поля, выходящие за пределы отдельных доменов. Отмечено, что при отклонении вектора намагниченности от нормали к плоскости пластины этот вектор создает на боковых поверхностях домена два встречно направленных поля: одно из них обращено внутрь домена и представляет собой поле размагничивания, а второе — обращено наружу домена и создает за пределами последнего поле, которое проникает в соседний домен.

Формирование двух таких полей представлено как результат образования на поверхности домена слоя магнитных зарядов, величина которых пропорциональна внутренней намагниченности домена. Показано, что плотность энергии в этом случае пропорциональна произведению намагниченностей того и другого доменов. Записана плотность энергии, содержащая две константы, соответствующие взаимодействию намагниченностей доменов через торцы и боковые грани.

5. Рассмотрена плотность энергии для доменной структуры в целом, образуемой за счет следующих видов взаимодействия: взаимодействие намагниченности с внешним полем; взаимодействие намагниченности с полем одноосной анизотропии; взаимодействие намагниченности с полями размагничивания собственных граней; взаимодействие намагниченности с полями от соседних доменов. Записано выражение для плотности энергии двух соседних доменов, содержащее десять слагаемых, два из которых соответствуют взаимодействию намагниченности с внешним полем, другие два — с полем одноосной анизотропии, следующие четыре — с полями размагничивания граней и последние два — с полями от соседних доменов. Показано, что с помощью соответствующей нормировки полученное выражение может быть сведено к сумме всего пяти слагаемых с пятью константами.

6. На основе полученного выражения для плотности энергии рассмотрена ориентация векторов намагниченности в доменах при намагничивании пластины касательным полем. Показано, что условие сохранения длины векторов намагниченностей внутри доменов, а также свойства симметрии структуры позволяют свести задачу о равновесной ориентации намагниченности к вариации всего одного параметра, в качестве которого фигурирует угол отклонения вектора намагниченности от направления внешнего поля.

7. Рассмотрены ориентационные переходы векторов намагниченности в доменах под действием поля в плоскости пластины. Показано, что поле окончания ориентационного перехода, соответствующее фазовому переходу второго рода, равно полю анизотропии минус поле собственного размагничивания доменов плюс поле воздействия намагниченностей доменов друг на друга. Получены равновесные ориентации векторов намагниченности в доменах того и другого знаков.

8. С использованием найденной равновесной ориентации намагниченности выполнено преобразование выражения для плотности энергии в систему координат, связанную с равновесным вектором намагниченности. Получена матрица перехода шестого порядка, представляющая собой комбинацию из двух матриц перехода третьего порядка, соответствующих той и другой равновесным ориентациям вектора намагниченности в доменах. На основе полученной матрицы найдено шестимерное выражение для плотности энергии в повернутых системах координат, путем дифференцирования которого по компонентам намагниченностей найдены шесть эффективных полей, по три поля для каждого из двух равновесных направлений намагниченности.

9. С использованием полученных эффективных полей записаны уравнения движения для шести компонент векторов намагниченности в доменах того и другого знаков. Выполнена линеаризация полученных уравнений, в результате которой получена система всего четырех уравнений движения, соответствующая компонентам намагниченности, перпендикулярным направлению внешнего поля. В предположении гармонической зависимости компонент намагниченности от времени, получена система из четырех алгебраических уравнений первого порядка для амплитуд колебаний соответствующих векторов намагниченности. Из равенства нулю определителя полученной системы найдено уравнение для собственных частот колебаний намагниченности, имеющее биквадратный характер. С учетом симметрии задачи показано, что полученное уравнение содержит всего два положительных корня, определяющих две частоты ферромагнитного резонанса, причем зависимость обеих частот от внешнего поля имеет характер квадратного корня из квадратичного полинома. Показано, что в отсутствие поля обе частоты совпадают, а при поле, соответствующем окончанию ориентационного перехода, то есть в поле фазового перехода второго рода, одна из частот падает до нуля, а вторая сохраняет конечное значение.

10. Рассмотрены зависимости полученных резонансных частот от параметров модели, то есть от параметров материала и геометрии доменов. Показано, что в отсутствие размагничивающих полей и поля взаимодействия доменов имеет место вырождение двух резонансных частот в одну. Зависимость такой вырожденной частоты от величины внешнего поля представляет собой уравнение окружности с центром в точке, соответствующей нулевому полю и нулю частоты. Зависимость заканчивается в точке, соответствующей полю анизотропии. Рассмотрены зависимости резонансных частот от внешнего поля при заданном

поле анизотропии и различных значениях поля размагничивания торцов доменов. Показано, что здесь, как и в предыдущем случае имеет место вырождение ветвей, а также концентрический характер кривых, соответствующих различным значениям поля размагничивания торцов доменов. Рассмотрены зависимости резонансных частот от внешнего поля при заданном поле анизотропии и различных значениях поля размагничивания боковых граней доменов. Показано, что здесь, как и в предыдущих случаях, имеет место вырождение ветвей, однако теперь концентрический характер кривых нарушается: все они начинаются на разных частотах и сходятся в одну точку. Рассмотрены зависимости резонансных частот от внешнего поля при заданном поле анизотропии и различных значениях поля взаимодействия намагниченностей через боковые грани доменов. Показано, что здесь, как и в предыдущих случаях, имеет место вырождение ветвей, однако, как и в случае размагничивания от боковых граней доменов, концентрический характер кривых нарушается: все они начинаются на разной частоте, а в поле фазового перехода сходятся в одну точку. Рассмотрены зависимости резонансных частот от внешнего поля при заданном поле анизотропии и различных значениях поля взаимодействия намагниченностей через торцы доменов. Показано, что в этом случае вырождение ветвей снимается, причем из каждой пары ветвей расположение первых сохраняет концентрический характер, а вторые, начинаясь при тех же частотах, что и первые, в зависимости от параметров материала, плавно возрастают или убывают, принимая конечное значение и заканчиваясь при том же поле фазового перехода, что и первые.

11. Рассмотрены физические причины отмеченного поведения ветвей спектра от поля. Показано, что поле взаимодействия доменов через торцы является единственным фактором, способным снять частотное вырождение, так как только оно действует в направлении, лежащем в плоскости, в которой перемещаются векторы намагниченности доменов обоих знаков при изменении внешнего поля. По этой причине его действие на векторы намагниченности при изменении их ориентации меняется существенным образом, что и снимает вырождение частотных ветвей. Отмечено отличие такого вывода от результатов ряда работ, где взаимодействие доменов через торцы не учитывается, но вырождение ветвей все же снимается. Отмечено, что такое различие обусловлено учетом в этих работах поля размагничивания не отдельных доменов, а образца в целом, что приводит к математическим выражениям, близким к рассмотренным в настоящей монографии.

12. Проведено сравнение рассчитанных зависимостей частоты ФМР от поля с экспериментальными для двух случаев: 1) поле анизотропии значительно больше намагниченности (гексаферрит бария); 2) поле анизотропии значительно меньше намагниченности (железтитриевый гранат). Из сравнения расчетных данных с экспериментом установлено, что в спектре ФМР имеется зависящая от поля частотная щель — малая, когда поле анизотропии значительно больше намагниченности,

и большая в обратном случае. Щель максимальна в отсутствие внешнего поля, с его увеличением уменьшается, а в поле фазового перехода стремится к нулю. Модель локальных эффективных полей без щели адекватно описывает эксперимент лишь для случая, когда поле анизотропии значительно превышает намагниченность, а в обратном случае требует поправки на величину этой щели. Для пленки ЖИГ модель локальных эффективных полей с учетом щели позволяет количественно описать наблюдаемую в эксперименте зависимость низшей частоты спектра МСВ от поля с точностью в единицы процентов. Обсуждены возможные причины происхождения щели, приведены рекомендации по совершенствованию теоретического рассмотрения, а также указано на такую возможную причину щели, как магнитоупругое взаимодействие, проявляющееся особенно сильно в материале с малой анизотропией по сравнению с намагниченностью, каковым является железитриевый гранат.

МАГНИТОСТАТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В УСЛОВИЯХ ОРИЕНТАЦИОННОГО ПЕРЕХОДА

В главе 12 на основе анализа экспериментов выявлены два основных фактора, определяющие поведение МСВ в ненасыщенных пленках ЖИГ в условиях ориентационного перехода: одноосная анизотропия и доменная структура. Расчет теоретической модели, учитывающей одновременное действие обоих факторов, связан с большими математическими трудностями, поэтому в рамках настоящей монографии авторы разбили полную задачу на две составляющие: в одной рассматриваются волновые процессы в пластине с одноосной анизотропией, но без доменов, во второй — однородный ферромагнитный резонанс в той же пластине, но уже с доменами. Решение второй задачи (ФМР в доменах) уже в какой-то мере выполнено в главе 13, поэтому теперь остановимся на первой (МСВ с анизотропией). В результате будет выявлена роль обеих составляющих полной задачи по отдельности, так что можно полагать, что общая картина, по крайней мере с качественной стороны, будет в какой-то степени являться их суммой. Итак, в настоящей главе рассмотрим первую задачу — магнитостатические волны в касательно намагниченной пластине с нормальной одноосной анизотропией без доменов.

В изложении материала будем опираться на работы [489–515, 518], в первую очередь на [489, 490, 492–494]. Остальные необходимые ссылки будут приведены в тексте.

14.1. Общая постановка задачи

Предположим, что ферритовая пластина (пленка) с намагниченностью $4\pi M_0$ имеет одноосную анизотропию, легкая ось которой перпендикулярна плоскости пластины. Поле одноосной анизотропии определяется выражением (9.13), (10.38):

$$H_a = 2K/M_0, \quad (14.1)$$

где K — константа анизотропии (предполагается, что $K > 0$). Пусть поле анизотропии превышает намагниченность, то есть $H_a > 4\pi M_0$. Подобно показанному в разделе 9.1.2, в отсутствие поля H_0 вектор намагниченности ориентирован перпендикулярно плоскости пластины, а при приложении поля в ее плоскости поворачивается к направлению

поля и ложится в плоскость при поле, равном эффективному полю анизотропии

$$H_A = H_a - 4\pi M_0. \quad (14.2)$$

То есть по мере увеличения поля H_0 от нуля до величины H_A происходит ориентационный переход, по окончании которого вектор намагниченности остается направленным вдоль поля.

14.1.1. Общая геометрия задачи

Геометрия задачи и ориентация исходной системы координат показаны на рис. 14.1. Среда, в которой рассматривается распространение МСВ, состоит из горизонтально расположенных слоев 1, 2 и 3. Слой 2 представляет собой плоскопараллельную бесконечно протяженную ферритовую пластину толщиной d , к обеим поверхностям которой примыкают слои 1 и 3, представляющие собой бесконечно протяженные свободные полупространства.

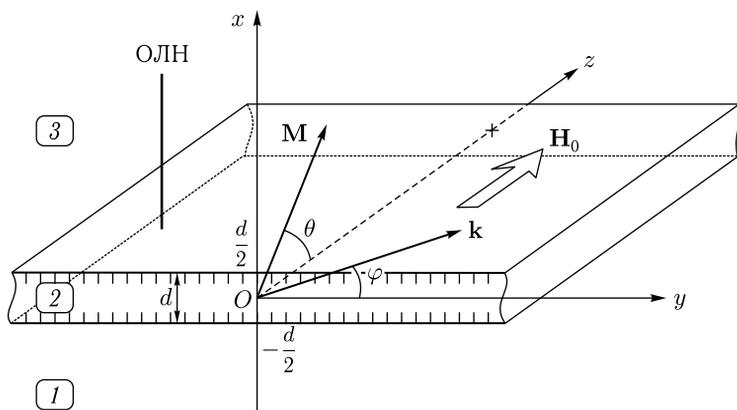


Рис. 14.1. Общая геометрия задачи о спектре МСВ в касательно намагниченной ферритовой пластине с нормальной одноосной анизотропией: 1, 3 — свободные полупространства, 2 — ферритовая пластина

Система координат $Oxyz$ выбрана таким образом, что ее начало — точка O располагается в центре ферритовой пластины на расстоянии $d/2$ от обеих ее поверхностей, плоскость Oyz параллельна плоскости ферритовой пластины, а ось Ox ей перпендикулярна. Поле H_0 приложено в плоскости пластины вдоль оси Oz . Ось одноосной анизотропии (ось легкого намагничивания — ОЛН) перпендикулярна плоскости пластины и направлена вдоль оси Ox .

Вектор намагниченности \mathbf{M} при любом поле H_0 остается в плоскости Oxz и составляет с осью Oz угол θ , который при $H_0 < H_A$ определяется выражением, подобным (9.24):

$$\theta = \arccos(H_0/H_A), \quad (14.3)$$

а при $H_0 > H_A$ равен нулю. Далее ограничимся случаем $H_0 < H_A$, так как случай $H_0 > H_A$ мало отличается от известных [15–17], поскольку состоит главным образом в нормировке поля, то есть замене поля H_0 на эффективное поле $H_0 - H_A$.

В рассматриваемом случае равновесные значения компонент вектора намагниченности имеют вид:

$$M_x = M_0 \frac{\sqrt{H_A^2 - H_0^2}}{H_A}; \quad (14.4)$$

$$M_z = M_0 \frac{H_0}{H_A}. \quad (14.5)$$

Вдоль плоскости ферритовой пластины распространяется МСВ, волновой вектор которой \mathbf{k} составляет с осью Oy угол φ .

Замечание. Следует заметить, что здесь (рис. 14.1) наименование осей исходной системы координат $Oxyz$ отличается от принятой в разделе 9.1.2 системы координат с тем же наименованием (рис. 9.1). Там ось Ox ориентирована вдоль поля, а ось Oz — вдоль ОЛН, здесь же — ось Ox ориентирована вдоль ОЛН, а ось Oz — вдоль поля. Такое различие обусловлено несовпадением традиционного выбора ориентации осей в задачах, касающихся доменов, и задачах, касающихся МСВ. Поэтому, хотя в обоих случаях угол θ отсчитывается от оси Oz , но в разных классах задач эта ось имеет разное направление, так что углы θ в этих двух классах, несмотря на одинаковое обозначение, дополняют друг друга до 90° . По этой причине в формуле (9.24), приведенной в разделе 9.1.2, фигурирует синус, а здесь в формуле (14.3) — косинус. То есть M_x и M_z меняются местами, так что формула (9.26) заменяется здесь на (14.5), а формула (9.27) заменяется здесь на (14.4).

14.1.2. Геометрия задачи, соответствующая ориентационному переходу

Рассмотрим теперь геометрию той же задачи в упрощенном виде, соответствующем непосредственно ориентационному переходу, для чего обратимся к рис. 14.2, где основная система координат $Oxyz$, плоскость пластины, направления поля и оси анизотропии (ОЛН) ориентированы так же, как на рис. 14.1.

На рис. 14.2, *a* показана общая геометрия структуры в целом. В основе задачи лежит безграничная ферритовая пластина толщины d , вид на поперечное сечение которой показан на рис. 14.2, *б*.

Материал пластины имеет одноосную анизотропию, причем ось легкого намагничивания (ОЛН) ориентирована перпендикулярно плоскости пластины. Пластина намагничена постоянным полем \mathbf{H}_0 , лежащим в ее плоскости. Кроме постоянного поля имеется малое переменное поле \mathbf{h} (такое, что $h \ll H_0$), необходимое на этапе определения тензора восприимчивости. Направление этого поля произвольно.

Декартова система координат $Oxyz$, связанная с пластиной, выбрана таким образом, что плоскость Oyz параллельна плоскости пластины,

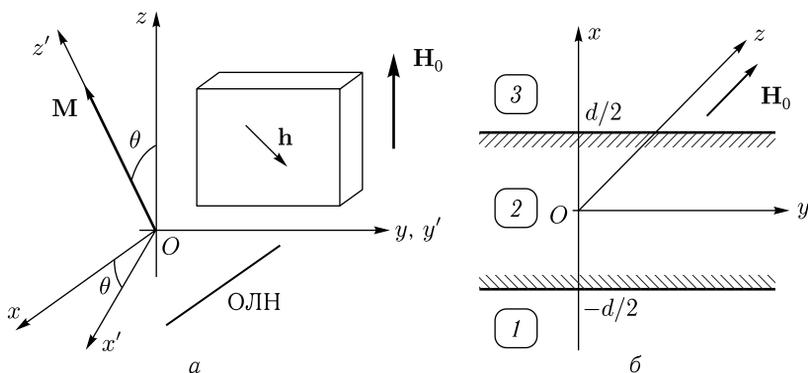


Рис. 14.2. Геометрия задачи, соответствующая ориентационному переходу: *a* — общая геометрия; *б* — вид на поперечное сечение пластины вдоль оси Oz

а ось Ox ей перпендикулярна. Начало координат совпадает с центром толщины пластины, так что ее поверхности приходятся на координаты $\pm d/2$. Ось Oz ориентирована вдоль направления поля \mathbf{H}_0 .

Кроме системы $Oxyz$, связанной с пластиной, имеется другая система координат $Ox'y'z'$, связанная с намагниченностью. Начало этой системы, точка O , совпадает с началом системы $Oxyz$, плоскость $Ox'z'$ совпадает с плоскостью Oxz , а ось Oy' совпадает с осью Oy . Ось Oz' совпадает с равновесным направлением вектора намагниченности \mathbf{M} . В условиях ориентационного перехода (то есть когда поле H_0 меньше поля анизотропии H_A) вектор \mathbf{M} отклонен от направления поля \mathbf{H}_0 на угол θ . Таким образом, угол между осями Oz и Oz' , а также Ox и Ox' равен θ .

Пластина с обеих поверхностей окружена свободными пространствами, то есть полная структура представляет собой совокупность трех сред, граничащих друг с другом по плоскостям, параллельным Oyz или $Oy'z'$, соответствующим $x = \pm d/2$. Для удобства обращения при расчете среды пронумерованы в положительном направлении оси Ox цифрами от 1 до 3, как это показано на рис. 14.2, б.

14.1.3. Общее приближение магнитостатики

Итак, общая геометрия задачи аналогична таковой для классической задачи Дэймона–Эшбаха [1, 119] (раздел 6.1.1), за исключением добавления связанной с намагниченностью системы $Ox'y'z'$, поворачивающейся в процессе ориентационного перехода за равновесным положением вектора намагниченности.

Подобно задаче Дэймона–Эшбаха будем решать задачу в приближении магнитостатики. Общие уравнения магнитостатики имеют вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0; \quad (14.6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (14.7)$$

где

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}. \quad (14.8)$$

Предположим, что поле и намагниченность имеют вид:

$$\mathbf{H} = H_i \mathbf{n}_z + \mathbf{h} \cdot e^{i\omega t}; \quad (14.9)$$

$$\mathbf{M} = M_0 \mathbf{n}_z + \mathbf{m} \cdot e^{i\omega t}. \quad (14.10)$$

Здесь: H_i — внутреннее постоянное поле, в силу безграничности пластины равное внешнему H_0 ; h — амплитуда переменного поля, m — амплитуда переменной составляющей намагниченности, причем обе эти амплитуды подчиняются условию

$$h \sim m \ll H_0 \sim M_0. \quad (14.11)$$

Подставляя (14.9), (14.10) в (14.6), (14.7), и учитывая, что при условии постоянства H_i и M_0 выполняются соотношения:

$$\text{rot}(\mathbf{H}_i \mathbf{n}_z) = 0, \quad (14.12)$$

а также

$$\text{div}(\mathbf{M}_0 \mathbf{n}_z) = 0, \quad (14.13)$$

получаем:

$$\text{rot} \mathbf{h} = 0; \quad (14.14)$$

$$\text{div}(\mathbf{h} + 4\pi\mathbf{m}) = 0. \quad (14.15)$$

Из уравнения (14.14) следует возможность введения потенциала переменного поля ψ такого, что

$$\mathbf{h} = \text{grad} \psi = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x}; \frac{\partial \psi}{\partial y}; \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\}. \quad (14.16)$$

При этом уравнение (14.15) принимает вид

$$\text{div}(\text{grad} \psi + 4\pi\mathbf{m}) = 0, \quad (14.17)$$

или

$$\Delta \psi + 4\pi \text{div} \mathbf{m} = 0. \quad (14.18)$$

Это — общее уравнение Уокера [1, 15–17, 114, 119], являющееся аналогом уравнения Лапласа в классической электродинамике [425, 519], с тем отличием, что здесь потенциал определяется через намагниченность магнитной среды. Поскольку в настоящей задаче тензор восприимчивости будет определен в системе, следующей за намагниченностью, то есть в общем случае будет иметь все девять компонент, напомним вкратце, следуя [1], вывод уравнения Уокера при произвольном виде такого тензора.

14.1.4. Уравнение Уокера с произвольным тензором восприимчивости

Переменная намагниченность \mathbf{m} обусловлена действием переменного поля \mathbf{h} , так что \mathbf{m} и \mathbf{h} связаны между собой через восприимчивость $\overleftrightarrow{\chi}$ следующим соотношением:

$$\mathbf{m} = \overleftrightarrow{\chi} \mathbf{h}, \quad (14.19)$$

где $\overleftrightarrow{\chi}$, благодаря анизотропии или гиротропии среды, имеет тензорный характер.

Будем полагать, что тензор $\overleftrightarrow{\chi}$ в декартовой системе координат $Oxyz$ имеет вид

$$\overleftrightarrow{\chi} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix}, \quad (14.20)$$

то есть выражение намагниченности через поле имеет вид

$$\begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix}, \quad (14.21)$$

так что:

$$m_x = a_{xx}h_x + a_{xy}h_y + a_{xz}h_z; \quad (14.22)$$

$$m_y = a_{yx}h_x + a_{yy}h_y + a_{yz}h_z; \quad (14.23)$$

$$m_z = a_{zx}h_x + a_{zy}h_y + a_{zz}h_z. \quad (14.24)$$

Дифференцируя (14.22)–(14.24) по одноименным координатам, а также учитывая, что из соотношения (14.16) следует:

$$h_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (14.25)$$

$$h_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad (14.26)$$

$$h_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (14.27)$$

получаем:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} = a_{xx} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_{xy} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + a_{xz} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}; \quad (14.28)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} = a_{yx} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + a_{yy} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + a_{yz} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}; \quad (14.29)$$

$$\frac{\partial m_z}{\partial z} = a_{zx} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} + a_{zy} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} + a_{zz} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (14.30)$$

Записывая уравнение (14.18) в координатах, то есть раскрывая выражения для оператора Лапласа и дивергенции, получаем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 4\pi \left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_z}{\partial z} \right). \quad (14.31)$$

Подставляя в это выражение (14.28)–(14.30), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 4\pi \left[a_{xx} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_{yy} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + a_{zz} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \right. \\ \left. + (a_{xy} + a_{yx}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + (a_{xz} + a_{zx}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + (a_{yz} + a_{zy}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \right] = 0. \end{aligned} \quad (14.32)$$

Приводя подобные члены и записывая координаты в порядке возрастания, получаем

$$\begin{aligned} (1 + 4\pi a_{xx}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (1 + 4\pi a_{yy}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + (1 + 4\pi a_{zz}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \\ + 4\pi (a_{xy} + a_{yx}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + 4\pi (a_{xz} + a_{zx}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + 4\pi (a_{yz} + a_{zy}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} = 0. \end{aligned} \quad (14.33)$$

Это — искомое уравнение Уокера, записанное в декартовой системе координат для произвольного тензора восприимчивости (14.20). Условия гиротропии и анизотропии накладывают на компоненты тензора определенные соотношения, которые могут быть получены из решения уравнения движения для намагниченности (уравнения Ландау–Лифшица).

В общем случае уравнение движения для намагниченности может быть решено в любой другой декартовой системе, ориентированной произвольным образом относительно принятой здесь, где записано уравнение Уокера (14.18). В этом случае полученные в результате такого решения компоненты тензора восприимчивости должны быть преобразованы в принятую здесь систему с помощью соответствующих матриц поворота.

14.1.5. Уравнения движения и граничные условия

В разделе 10.4.1 для случая ориентационного перехода в геометрии, совпадающей с принятой здесь, получен тензор магнитной восприимчивости в виде (10.126)

$$\vec{\chi} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad (14.34)$$

где компоненты этого тензора определяются формулами (10.127)–(10.132) или (10.142)–(10.147) (здесь заново не выписываем, чтобы не создавать излишнюю громоздкость).

При этом, согласно (10.133)–(10.135), компоненты вектора намагниченности выражаются через компоненты поля с помощью тензора (14.34) следующим образом:

$$m_x = A_{11}h_x + A_{12}h_y + A_{13}h_z; \quad (14.35)$$

$$m_y = -A_{12}h_x + A_{22}h_y + A_{23}h_z; \quad (14.36)$$

$$m_z = A_{13}h_x - A_{23}h_y + A_{33}h_z. \quad (14.37)$$

Полученное в разделе 14.1.4 уравнение Уокера для потенциала (14.33) при таком тензоре имеет вид

$$(1 + 4\pi A_{11}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (1 + 4\pi A_{22}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + (1 + 4\pi A_{33}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 8\pi A_{13} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = 0. \quad (14.38)$$

Граничные условия на поверхностях пластины требуют непрерывности нормальной составляющей индукции и касательной составляющей поля:

$$B_x^i \Big|_{x=\pm d/2} = B_x^e \Big|_{x=\pm d/2}; \quad (14.39)$$

$$H_{y,z}^i \Big|_{x=\pm d/2} = H_{y,z}^e \Big|_{x=\pm d/2}. \quad (14.40)$$

Верхний индекс «*i*» соответствует области пространства внутри пластины, индекс «*e*» — окружающему пространству вне пластины.

Компоненты вектора магнитной индукции имеют вид

$$\begin{aligned} B_x^i &= h_x^i + 4\pi m_x = \frac{\partial \psi}{\partial x} + 4\pi(A_{11}h_x + A_{12}h_y + A_{13}h_z) = \\ &= (1 + 4\pi A_{11}) \frac{\partial \psi}{\partial x} + 4\pi A_{12} \frac{\partial \psi}{\partial y} + 4\pi A_{13} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (14.41)$$

При такой индукции и поле (14.16) граничные условия принимают вид:

$$(1 + 4\pi A_{11}) \frac{\partial \psi^i}{\partial x} + 4\pi A_{12} \frac{\partial \psi^i}{\partial y} + 4\pi A_{13} \frac{\partial \psi^i}{\partial z} \Big|_{x=\pm d/2} = \frac{\partial \psi^e}{\partial x} \Big|_{x=\pm d/2}, \quad (14.42)$$

$$\psi^i \Big|_{x=\pm d/2} = \psi^e \Big|_{x=\pm d/2}. \quad (14.43)$$

Введем обозначения:

$$\mu_H = 1 + 4\pi A_{11} = 1 + \frac{\Omega_H^2}{\Omega_A [(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2]}; \quad (14.44)$$

$$\mu_A = 1 + 4\pi A_{22} = 1 + \frac{\Omega_A^2 - \Omega_H^2}{\Omega_A [(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2]}; \quad (14.45)$$

$$\mu_P = 4\pi A_{13} = -\frac{\Omega_H \sqrt{\Omega_A^2 - \Omega_H^2}}{\Omega_A [(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2]}; \quad (14.46)$$

$$\nu_H = -i4\pi A_{12} = \frac{\Omega \Omega_H}{\Omega_A [(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2]}; \quad (14.47)$$

$$\nu_P = -i4\pi A_{23} = \frac{\Omega \sqrt{\Omega_A^2 - \Omega_H^2}}{\Omega_A [(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2]}, \quad (14.48)$$

где A_{ik} записаны через нормированные частоты (10.136)–(10.138) с помощью (10.142)–(10.147).

Эти обозначения позволяют записать тензор магнитной проницаемости

$$\vec{\mu} = 1 + 4\pi \vec{\chi} \quad (14.49)$$

через тензор восприимчивости (14.34) с учетом $A_{22} = A_{33}$ (10.148) в виде

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_H & \nu_H & \mu_P \\ -\nu_H & \mu_A & \nu_P \\ \mu_P & -\nu_P & \mu_A \end{pmatrix}. \quad (14.50)$$

Записывая для потенциала внутри пластины ψ^i уравнение Уокера и для потенциала вне пластины ψ^e уравнение Лапласа, а также граничные условия на поверхностях пластины при $x = \pm d/2$, получаем полную формулировку задачи.

Уравнения:

$$\mu_H \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial x^2} + \mu_A \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial y^2} + \mu_A \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial z^2} + 2\mu_P \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial x \partial z} = 0; \quad (14.51)$$

$$\frac{\partial^2 \psi^e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi^e}{\partial z^2} = 0; \quad (14.52)$$

граничные условия:

$$\mu_H \frac{\partial \psi^i}{\partial x} + i\nu_H \frac{\partial \psi^i}{\partial y} + \mu_P \frac{\partial \psi^i}{\partial z} \Big|_{x=\pm d/2} = \frac{\partial \psi^e}{\partial x} \Big|_{x=\pm d/2}; \quad (14.53)$$

$$\psi^i \Big|_{x=\pm d/2} = \psi^e \Big|_{x=\pm d/2}. \quad (14.54)$$

14.2. Задача для структуры из трех сред

Таким образом, получаем полную задачу для структуры из трех сред.

Уравнения:

область 1 (вне феррита):

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = 0; \quad (14.55)$$

область 2 (внутри феррита):

$$\mu_H \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \mu_A \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + \mu_A \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} + 2\mu_P \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial z} = 0; \quad (14.56)$$

область 3 (вне феррита):

$$\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} = 0. \quad (14.57)$$

Граничные условия на нижней (при $x = -d/2$) и верхней (при $x = d/2$) поверхностях:

$$\mu_H \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + i\nu_H \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \mu_P \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \Big|_{x=-d/2} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_{x=-d/2}; \quad (14.58)$$

$$\mu_H \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + i\nu_H \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \mu_P \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \Big|_{x=d/2} = \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \Big|_{x=d/2}; \quad (14.59)$$

$$\psi_2 \Big|_{x=-d/2} = \psi_1 \Big|_{x=-d/2}; \quad (14.60)$$

$$\psi_2 \Big|_{x=d/2} = \psi_3 \Big|_{x=d/2}. \quad (14.61)$$

14.2.1. Решение уравнений без граничных условий

Рассмотрим сначала решение уравнений во всех трех областях (14.55)–(14.57) без учета граничных условий.

ОБЛАСТЬ 1 (вне феррита)

Уравнение для потенциала ψ_1 в этой области имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = 0. \quad (14.62)$$

Решим уравнение (14.62) методом разделения переменных. Для этого предположим, что решение имеет вид

$$\psi_1 = X_1(x)Y_1(y)Z_1(z). \quad (14.63)$$

Подставим решение (14.63) в уравнение (14.62) и разделим все на $X_1Y_1Z_1$:

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2} = 0. \quad (14.64)$$

Введем постоянную разделения λ_1 :

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_1}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2} = \lambda_1^2. \quad (14.65)$$

Из (14.65) получаем уравнение для Z_1 :

$$\frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2} + \lambda_1^2 Z_1 = 0. \quad (14.66)$$

Его решение имеет вид

$$Z_1 = G_1 e^{i\lambda_1 z} + H_1 e^{-i\lambda_1 z}, \quad (14.67)$$

где G_1 и H_1 — неизвестные пока постоянные.

В случае действительности λ_1 полученное решение представляет собой две незатухающие волны, распространяющиеся вдоль оси Oz во встречных направлениях.

Для простоты будем полагать, что $\lambda_1 > 0$ и ограничимся далее рассмотрением волны, распространяющейся в положительном направлении оси Oz , то есть положим $G_1 = 0$. В силу отсутствия ограничений на амплитуду такой волны, положим также $H_1 = 1$.

В результате получаем решение в виде

$$Z_1 = e^{-i\lambda_1 z}. \quad (14.68)$$

Введем обозначение:

$$k_z^{(1)} = \lambda_1. \quad (14.69)$$

С этим обозначением решение принимает вид

$$Z_1 = e^{-ik_z^{(1)} z}. \quad (14.70)$$

Аналогично находим Y_1 и X_1 . Из (14.65) получаем

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_1}{\partial y^2} = \lambda_1^2. \quad (14.71)$$

Вводя еще одну постоянную разделения μ_1 , получаем

$$\frac{X_1''}{X_1} = -\frac{Y_1''}{Y_1} + \lambda_1^2 = \mu_1^2. \quad (14.72)$$

Из (14.72) получаем уравнение для X_1 :

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} - \mu_1^2 X_1 = 0. \quad (14.73)$$

Его решение имеет вид

$$X_1 = A_1 e^{\mu_1 x} + B_1 e^{-\mu_1 x}. \quad (14.74)$$

Поскольку в полной задаче решение ищется в виде волн, распространяющихся в плоскости ферритовой пластины, то есть Oyz , то естественно положить, что амплитуда волны по мере удаления от плоскости феррита спадает. Удаление от феррита вдоль оси Ox в области I при $\mu_1 > 0$ соответствует первому слагаемому решения (14.74), поэтому можно положить $B_1 = 0$, так что (14.74) принимает вид

$$X_1 = A_1 e^{\mu_1 x}. \quad (14.75)$$

Введем обозначение

$$k_x^{(1)} = \mu_1, \quad (14.76)$$

а также опустим у коэффициента A индекс «1». В результате получаем:

$$X_1 = Ae^{k_x^{(1)}x}. \quad (14.77)$$

Аналогичным образом из (14.72) получаем уравнение для Y_1 :

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial y^2} + (\mu_1^2 - \lambda_1^2)Y_1 = 0. \quad (14.78)$$

Его решение имеет вид

$$Y_1 = C_1 e^{i\sqrt{\mu_1^2 - \lambda_1^2}y} + D_1 e^{-i\sqrt{\mu_1^2 - \lambda_1^2}y}. \quad (14.79)$$

Это решение также имеет вид двух встречных незатухающих волн при действительном характере величины $\sqrt{\mu_1^2 - \lambda_1^2}$, то есть при положительности подкоренного выражения.

Для простоты ограничимся далее случаем распространения волны в положительном направлении оси Oy , то есть положим $C_1 = 0$. В силу отсутствия каких-либо ограничений на амплитуду этой волны, можно положить $D_1 = 1$. Таким образом, решение (14.79) принимает вид

$$Y_1 = e^{-i\sqrt{\mu_1^2 - \lambda_1^2}y}. \quad (14.80)$$

Введем обозначение

$$k_y^{(1)} = \sqrt{\mu_1^2 - \lambda_1^2}. \quad (14.81)$$

С этим обозначением из (14.80) получаем

$$Y_1 = e^{-ik_y^{(1)}y}. \quad (14.82)$$

Таким образом, в соответствии с (14.63), с учетом (14.68), (14.77) и (14.82) потенциал в области I принимает вид:

$$\psi_1 = X_1(x)Y_1(y)Z_1(z) = Ae^{k_x^{(1)}x}e^{-ik_y^{(1)}y}e^{-ik_z^{(1)}z}. \quad (14.83)$$

Перейдем далее к области 3 , как наиболее сходной с областью 1 , а область 2 рассмотрим отдельно после области 3 , так как она требует несколько другого математического аппарата.

ОБЛАСТЬ 3 (вне феррита)

Область 3 , хотя и расположена по другую сторону от ферритовой пластины, но по физическим свойствам среды (то есть свободного пространства) тождественна области 1 , поэтому рассмотрим ее раньше, чем область 2 , так как последняя требует более серьезного внимания.

В этой области уравнение (14.57) полностью аналогично уравнению (14.55) для области 1 , поэтому ход решения и получаемые выражения будут теми же самыми с заменой индекса «1» на индекс «3».

Решение по координате x должно спадать в положительном направлении оси Ox , поэтому в соотношении (14.74) надо оставить только второе слагаемое с коэффициентом равным единице (индекс «3» у коэффициента B , как и в области 1 , опускаем).

Поскольку область 3 представляет собой свободное пространство, такое же, как в области 1, так что эти среды тождественны, то постоянные разделения, то есть волновые числа (или длины волн) в обеих средах можно положить теми же самыми.

В результате получаем потенциал в области 3 в виде

$$\psi_3 = X_3(x)Y_3(y)Z_3(z) = Be^{k_x^{(1,3)}x}e^{-ik_y^{(1,3)}y}e^{-ik_z^{(1,3)}z}. \quad (14.84)$$

ОБЛАСТЬ 2 (внутри феррита)

Области 1 и 3 представляют собой свободное пространство, поэтому их рассмотрение выполнено сходным образом. Обратимся теперь к области 2, содержащей магнитную среду в условиях ориентационного перехода, где математический аппарат имеет несколько отличный характер.

Уравнение для потенциала ψ_2 в этой области имеет вид (14.56)

$$\mu_H \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \mu_A \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + \mu_A \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} + 2\mu_P \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial z} = 0. \quad (14.85)$$

Решить это уравнение обычным методом разделения переменных, как это сделано для областей 1 и 3, не представляется возможным, так как оно содержит слагаемое со смешанной производной, которое мешает такому разделению. Решение уравнений со смешанной производной подробно рассмотрено в разделах 4.1.6–4.1.8. Здесь воспользуемся хотя и не совсем общим, но значительно более простым вариантом, схема которого приведена в разделе 4.1.6.

Итак, выполним сначала разделение частичное, для чего предположим, что решение имеет вид

$$\psi_2 = U_2(x, z)Y_2(y). \quad (14.86)$$

Подставляя (14.86) в уравнение (14.85), разделив на $U_2 Y_2$ и опуская для простоты записи индекс «2», получаем

$$\mu_H \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu_A \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \mu_A \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + 2\mu_P \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 0. \quad (14.87)$$

В этом уравнении зависимость от y содержится только во втором слагаемом, а остальные зависят одновременно от x и z , но зависимости от y не содержат.

Подобно обычной схеме разделения переменных выделим слагаемое, содержащее y , и введем постоянную разделения λ :

$$\mu_H \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu_A \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + 2\mu_P \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = -\mu_A \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \lambda^2. \quad (14.88)$$

Получаем уравнение для Y :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\lambda^2}{\mu_A} Y = 0. \quad (14.89)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$Y = C_2 e^{i \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_A}} y} + D_2 e^{-i \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_A}} y}. \quad (14.90)$$

Аналогично задаче Дэймона-Эшбаха, положим $C_2 = 0$, $D_2 = 1$, а также введем обозначение

$$k_y = \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_A}}, \quad (14.91)$$

то есть

$$\lambda = \sqrt{\mu_A} k_y. \quad (14.92)$$

При этом получаем

$$Y = e^{-ik_y y}, \quad (14.93)$$

то есть при зависимости от времени в виде $\exp(i\omega t)$ это решение соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении оси Oy .

Из (14.88) кроме уравнения для Y получаем также уравнение для U :

$$\mu_H \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu_A \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + 2\mu_P \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \lambda^2 U = 0. \quad (14.94)$$

Следуя технике разделения переменных, будем предполагать, что

$$U(x, z) = X(x)Z(z). \quad (14.95)$$

Подставляя (14.95) в уравнение (14.94) и разделив на XZ , получаем

$$\mu_H \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \mu_A \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + 2\mu_P \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial z} - \lambda^2 = 0. \quad (14.96)$$

В этом уравнении переменные в явном виде не разделяются, поэтому сделаем еще одно дополнительное предположение. Будем полагать, что искомые волновые решения представляют собой волны, распространяющиеся в плоскости ферритовой пластины, то есть по рис. 14.2, *a* в плоскости Oyz . Решение по y в соответствии с (14.90) представляет собой совокупность двух волн, распространяющихся во встречных направлениях вдоль оси Oy .

Полагая, что решение по всей плоскости Oyz имеет волновой характер, будем считать, что

$$Z = e^{-i\xi z}, \quad (14.97)$$

где $\xi > 0$ — постоянная величина, смысл которой будет выяснен несколько дальше. В таком виде Z представляет собой волну, распространяющуюся в положительном направлении оси Oz .

Подставляя (14.97) в уравнение (14.96) и разделив на $e^{-i\xi z}$, получаем уравнение для X :

$$\mu_H \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - 2i\mu_P \xi \frac{\partial X}{\partial x} - (\lambda^2 + \mu_A \xi^2) X = 0. \quad (14.98)$$

Это — линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами относительно X . Решая его классическим способом [415, 416], положим

$$X = e^{\eta x}, \quad (14.99)$$

где η — постоянная величина, подлежащая определению. Подставляя (14.99) в (14.98) и разделив на $e^{\eta x}$, получаем

$$\mu_H \eta^2 - 2i\mu_P \xi \eta - (\lambda^2 + \mu_A \xi^2) = 0. \quad (14.100)$$

Это — квадратное уравнение относительно η , решая которое, находим:

$$\eta = \eta_1 \pm \eta_2 = i \frac{\mu_P \xi}{\mu_H} \pm \frac{\sqrt{\mu_H \lambda^2 + (\mu_H \mu_A - \mu_P^2) \xi^2}}{\mu_H}, \quad (14.101)$$

где

$$\eta_1 = i \frac{\mu_P \xi}{\mu_H}; \quad (14.102)$$

$$\eta_2 = \frac{\sqrt{\mu_H \lambda^2 + (\mu_H \mu_A - \mu_P^2) \xi^2}}{\mu_H}. \quad (14.103)$$

Решение уравнения (14.98) принимает вид

$$X = A_2 e^{(\eta_1 + \eta_2)x} + B_2 e^{(\eta_1 - \eta_2)x}, \quad (14.104)$$

где A_2 и B_2 — постоянные, подлежащие определению из граничных условий.

Заметим, что кроме (14.104) имеется еще одно решение с отрицательными показателями экспонент, которое пока для простоты опустим и вернемся к нему несколько далее.

Учитывая, что $e^{-i\xi z}$ представляет собой волну, распространяющуюся в положительном направлении оси Oz , отождествим ξ с волновым числом, то есть введем обозначение

$$k_z = \xi. \quad (14.105)$$

Так что (14.97) принимает вид

$$Z = e^{-ik_z z}. \quad (14.106)$$

Таким образом, с учетом (14.93), (14.104) и (14.106) потенциал (14.86) в области 2 принимает вид

$$\psi_2 = \left[A_2 e^{(\eta_1 + \eta_2)x} + B_2 e^{(\eta_1 - \eta_2)x} \right] e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}, \quad (14.107)$$

где в соответствии с (14.102), (14.103) с учетом (14.92) и (14.105)

$$\eta_1 = i \frac{\mu_P k_z}{\mu_H}; \quad (14.108)$$

$$\eta_2 = \frac{\sqrt{\mu_H \mu_A k_y^2 + (\mu_H \mu_A - \mu_P^2) k_z^2}}{\mu_H}. \quad (14.109)$$

14.2.2. Соотношение между волновыми числами

Найдем теперь соотношение между волновыми числами во всех трех областях. Поскольку частичные волны в каждой из трех областей представляют собой части единой волны, распространяющейся в плоскости Oyz , то волновые числа в этой плоскости для всех трех областей между собой равны, то есть:

$$k_y^{(1)} = k_y^{(3)} = k_y; \quad (14.110)$$

$$k_z^{(1)} = k_z^{(3)} = k_z. \quad (14.111)$$

Далее из соотношения (14.81) с учетом (14.69) и (14.76) получаем

$$k_y^2 = (k_x^{(1)})^2 - k_z^2. \quad (14.112)$$

Поскольку волновое число $k_x^{(1)}$ относится к пространству вне феррита, обозначим его верхним индексом «e», то есть

$$k_x^{(1)} = k_x^e. \quad (14.113)$$

При этом из (14.112) получаем

$$k_x^e = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}, \quad (14.114)$$

что подобно аналогичному соотношению в задаче Дэймона–Эшбаха (6.36) [1, стр. 82, форм. (2.484)].

14.2.3. Потенциалы во всех областях

С целью обобщения полученных решений, приведем теперь выражения для потенциалов во всех трех областях:

$$\psi_1 = X_1 Y Z; \quad (14.115)$$

$$\psi_2 = X_2 Y Z; \quad (14.116)$$

$$\psi_3 = X_3 Y Z, \quad (14.117)$$

где:

$$X_1 = A e^{k_x^e x}; \quad (14.118)$$

$$X_2 = A_2 e^{(\eta_1 + \eta_2)x} + B_2 e^{(\eta_1 - \eta_2)x}; \quad (14.119)$$

$$X_3 = B e^{-k_x^e x}; \quad (14.120)$$

$$Y = e^{-ik_y y}; \quad (14.121)$$

$$Z = e^{-ik_z z}, \quad (14.122)$$

а также:

$$\eta_1 = i \frac{\mu_P k_z}{\mu_H}; \quad (14.123)$$

$$\eta_2 = \frac{\sqrt{\mu_H \mu_A k_y^2 + (\mu_H \mu_A - \mu_P^2) k_z^2}}{\mu_H}, \quad (14.124)$$

причем выполняется соотношение (14.114)

$$k_x^e = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}. \quad (14.125)$$

Из сравнения (4.118)–(4.120) с выражениями для потенциалов в классической задаче Дэймона–Эшбаха (6.31)–(6.33) [1, стр. 69, форм. (2.328)–(2.330)], можно видеть, что здесь параметры η_1 и η_2 играют ту же роль, что k_x^i Дэймона–Эшбаха. Однако здесь вместо одного волнового числа k_x^i , отражающего структуру потенциала вдоль оси Ox , присутствуют два параметра η_1 и η_2 , что связано с более сложным характером распределения потенциала вдоль оси Ox , обусловленным спецификой ориентационного перехода.

14.3. Дисперсионное соотношение

В предыдущем разделе получено решение основных уравнений для всех трех сред без граничных условий в виде (14.115)–(14.125). Найдем теперь закон дисперсии распространяющихся волн, определяемый граничными условиями на поверхностях ферритовой пластины.

14.3.1. Дисперсионное соотношение в декартовой системе координат

Подставляя полные выражения для потенциалов (14.115)–(14.117) в полные граничные условия (14.42)–(14.43) и сокращая повторяющиеся множители, получаем граничные условия для x -компонент в следующем виде:

$$\mu_H \frac{\partial X_2}{\partial x} + (\nu_H k_y - i \mu_P k_z) X_2 \Big|_{x=-\frac{d}{2}} = \frac{\partial X_1}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{d}{2}}; \quad (14.126)$$

$$\mu_H \frac{\partial X_2}{\partial x} + (\nu_H k_y - i \mu_P k_z) X_2 \Big|_{x=\frac{d}{2}} = \frac{\partial X_3}{\partial x} \Big|_{x=\frac{d}{2}}; \quad (14.127)$$

$$X_2 \Big|_{x=-\frac{d}{2}} = X_1 \Big|_{x=-\frac{d}{2}}; \quad (14.128)$$

$$X_2 \Big|_{x=\frac{d}{2}} = X_3 \Big|_{x=\frac{d}{2}}. \quad (14.129)$$

При подстановке решения (14.118)–(14.120) в эти граничные условия, в ходе выкладок возникает ряд промежуточных выражений, играющих ту же роль, что и подобные выражения в задаче Дэймона–Эшбаха (6.48)–(6.51) [1, стр. 65, форм. (2.280)–(2.282)], отличающихся

однако некоторой спецификой, накладываемой данной задачей. Выпишем эти выражения и введем для них вспомогательные обозначения:

$$\beta_1 = \frac{(\eta_1 + \eta_2)d}{2}; \quad (14.130)$$

$$\beta_2 = \frac{(\eta_1 - \eta_2)d}{2}; \quad (14.131)$$

$$\delta = \frac{k_x^e d}{2}; \quad (14.132)$$

$$\varepsilon_1 = \mu_H(\eta_1 + \eta_2) - i\mu_P k_z + \nu_H k_y; \quad (14.133)$$

$$\varepsilon_2 = \mu_H(\eta_1 - \eta_2) - i\mu_P k_z + \nu_H k_y. \quad (14.134)$$

С учетом этих обозначений получаем систему уравнений для определения произвольных постоянных в виде:

$$A_2 \varepsilon_1 e^{-\beta_1} + B_2 \varepsilon_2 e^{-\beta_2} - A k_x^e e^{-\delta} = 0; \quad (14.135)$$

$$A_2 \varepsilon_1 e^{\beta_1} + B_2 \varepsilon_2 e^{\beta_2} + B k_x^e e^{-\delta} = 0; \quad (14.136)$$

$$A_2 e^{-\beta_1} + B_2 e^{-\beta_2} - A e^{-\delta} = 0; \quad (14.137)$$

$$A_2 e^{\beta_1} + B_2 e^{\beta_2} - B e^{-\delta} = 0. \quad (14.138)$$

Это система 4 уравнений с 4 неизвестными: A , A_2 , B_2 , B . Условием существования ненулевого решения является равенство нулю ее определителя: $D_0 = 0$, что и дает дисперсионное соотношение. Этот определитель имеет вид

$$D_0 = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 e^{-\beta_1} & \varepsilon_2 e^{-\beta_2} & -k_x^e e^{-\delta} & 0 \\ \varepsilon_1 e^{\beta_1} & \varepsilon_2 e^{\beta_2} & 0 & k_x^e e^{-\delta} \\ e^{-\beta_1} & e^{-\beta_2} & -e^{-\delta} & 0 \\ e^{\beta_1} & e^{\beta_2} & 0 & -e^{-\delta} \end{vmatrix}. \quad (14.139)$$

Можно видеть, что структура системы (14.135)–(14.138) с точностью до обозначений подобна структуре аналогичной системы в задаче Дэймона–Эшбаха (6.44)–(6.47) [1, стр. 64–65, форм. (2.271)–(2.274) а также (2.275)], так что раскрытие ее определителя может быть выполнено теми же средствами. Для раскрытия (14.139) умножим третью строку на $-k_x^e$ и прибавим к первой, а затем умножим четвертую строку на k_x^e и прибавим ко второй. После этого получившийся определитель разлагаем по четвертому столбцу, а которые остаются — по третьему.

В результате получаем:

$$D_0 = e^{-2\delta} \left\{ e^{-(\beta_1 - \beta_2)} \left[\varepsilon_1 \varepsilon_2 - (k_x^e)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) k_x^e \right] - e^{(\beta_1 - \beta_2)} \left[\varepsilon_1 \varepsilon_2 - (k_x^e)^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) k_x^e \right] \right\}. \quad (14.140)$$

Учитывая далее, что должно быть $D_0 = 0$, получаем дисперсионное соотношение вида

$$e^{2(\beta_1 - \beta_2)} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - (k_x^e)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) k_x^e}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - (k_x^e)^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) k_x^e}. \quad (14.141)$$

Введем вспомогательное обозначение

$$u = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - (k_x^e)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) k_x^e}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - (k_x^e)^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) k_x^e}. \quad (14.142)$$

С этим обозначением записываем (14.141) в виде:

$$e^{2(\beta_1 - \beta_2)} = u, \quad (14.143)$$

откуда

$$e^{(\beta_1 - \beta_2)} = \sqrt{u}. \quad (14.144)$$

Рассмотрим соотношение

$$\frac{e^{(\beta_1 - \beta_2)} - e^{-(\beta_1 - \beta_2)}}{e^{(\beta_1 - \beta_2)} + e^{-(\beta_1 - \beta_2)}} = \frac{\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}}{\sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}}} = \frac{u - 1}{u + 1}. \quad (14.145)$$

Подставляя в правую часть этого выражения обозначение (14.142), после несложных упрощений получаем

$$\frac{e^{(\beta_1 - \beta_2)} - e^{-(\beta_1 - \beta_2)}}{e^{(\beta_1 - \beta_2)} + e^{-(\beta_1 - \beta_2)}} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) k_x^e}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - (k_x^e)^2}. \quad (14.146)$$

В таком виде дисперсионное соотношение по форме совпадает с подобным соотношением в задаче Дэймона–Эшбаха [1, стр. 66–67, форм. (2.297) с учетом (2.294), (2.295)], а также (6.52) и (6.207). Отличие состоит в структуре входящих в него выражений $\beta_{1,2}$ и $\varepsilon_{1,2}$, определяемых спецификой ориентационного перехода.

14.3.2. Переход к полярной системе координат

В полученное дисперсионное соотношение (14.146) через посредство формул (14.130)–(14.134) входят три волновых числа: k_x^e , k_y , k_z , а также два параметра η_1 и η_2 , в соответствии с (14.99) и (14.101) представляющие собой составные части волнового числа по оси Ox внутри пластины.

В то же время, согласно (14.123), (14.124), параметры η_1 и η_2 выражаются через k_y , k_z , а волновое число k_x^e также выражается через k_y , k_z в соответствии с (14.125). Таким образом, в дисперсионном соотношении (14.146) полностью независимыми являются только два волновых числа: k_y и k_z . Это означает, что если задано, например, k_y , то дисперсионное соотношение позволяет определить k_z через k_y . Такое исключение можно удобно сделать в полярной системе координат, показанной на рис. 14.3.

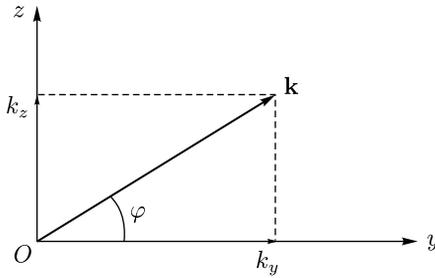


Рис. 14.3. Волновой вектор в полярной системе координат

При этом:

$$k_y = k \cos \varphi; \quad (14.147)$$

$$k_z = k \sin \varphi. \quad (14.148)$$

В этой системе две переменные k_y и k_z заменяются другими двумя переменными k и φ , через которые в конечном счете и выражается дисперсионное соотношение. Выполним такое преобразование.

С учетом (14.147)–(14.148) входящее в (14.146) волновое число k_x^e принимает вид

$$k_x^e = \sqrt{k_y^2 + k_z^2} = k. \quad (14.149)$$

Параметры β_1 и β_2 определяются формулами (14.130) и (14.131), где выражения для η_1 и η_2 в соответствии с (14.123) и (14.124) с учетом (14.147)–(14.148) принимают вид:

$$\eta_1 = i \frac{\mu_P k \sin \varphi}{\mu_H}; \quad (14.150)$$

$$\eta_2 = k \sqrt{\frac{\mu_A}{\mu_H} \left[\left(1 - \frac{\mu_P^2}{\mu_H \mu_A} \right) \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \right]}. \quad (14.151)$$

Введем обозначение

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu_A}{\mu_H} \left[\left(1 - \frac{\mu_P^2}{\mu_H \mu_A} \right) \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \right]}. \quad (14.152)$$

С этим обозначением получаем

$$\eta_2 = k\alpha. \quad (14.153)$$

Таким образом, показатели экспонент в (14.146) принимают вид

$$\beta_1 - \beta_2 = \frac{(\eta_1 + \eta_2)d}{2} - \frac{(\eta_1 - \eta_2)d}{2} = \eta_2 d = k d \alpha. \quad (14.154)$$

Преобразуем далее ε_1 и ε_2 в соответствии с (14.133) и (14.134) с учетом (14.150) и (14.153), а также (14.147) и (14.148):

$$\varepsilon_1 = k(\nu_H \cos \varphi + \mu_H \alpha); \quad (14.155)$$

$$\varepsilon_2 = k(\nu_H \cos \varphi - \mu_H \alpha). \quad (14.156)$$

При этом получаем:

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = k^2(\nu_H^2 \cos^2 \varphi - \mu_H^2 \alpha^2); \quad (14.157)$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 2k\mu_H \alpha. \quad (14.158)$$

Подставляя (14.157)–(14.158) в правую часть (14.146), а также учитывая (14.149) и сокращая дробь на k^2 , получаем

$$\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)k_x^e}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - (k_x^e)^2} = \frac{2\mu_H \alpha}{\nu_H^2 \cos^2 \varphi - \mu_H^2 \alpha^2 - 1}. \quad (14.159)$$

Введем обозначение

$$\beta = \nu_H^2 \cos^2 \varphi - \mu_H^2 \alpha^2. \quad (14.160)$$

С этим обозначением, а также с учетом (14.154), дисперсионное соотношение (14.146) принимает вид:

$$\frac{e^{kd\alpha} - e^{-kd\alpha}}{e^{kd\alpha} + e^{-kd\alpha}} = \frac{2\mu_H \alpha}{\beta - 1}. \quad (14.161)$$

Аналогично из (14.141) можно получить то же соотношение в виде

$$e^{2kd\alpha} = \frac{\beta - 1 + 2\mu_H \alpha}{\beta - 1 - 2\mu_H \alpha}. \quad (14.162)$$

Записывая (14.161) через гиперболическую функцию, получаем

$$\beta - 1 - 2\mu_H \alpha \operatorname{cth}(kd\alpha) = 0. \quad (14.163)$$

Можно видеть, что с точностью до обозначений это соотношение переходит в классическое соотношение Дэймона–Эшбаха, записанное в полярной системе координат [1, стр. 67, форм. (2.299)–(2.301)] или (6.209), (6.211):

$$\beta_{DE} - 1 - 2\mu\alpha_{DE} \operatorname{cth}(kd\alpha_{DE}) = 0, \quad (14.164)$$

где:

$$\alpha_{DE} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{\mu}}; \quad (14.165)$$

$$\beta_{DE} = (\nu^2 - \mu^2 + \mu) \cos^2 \varphi - \mu, \quad (14.166)$$

где индекс «DE», в [1] отсутствующий, введен для того, чтобы подчеркнуть принадлежность входящих в (14.162) параметров именно к задаче Дэймона–Эшбаха.

В соотношении (14.161) однако параметры α и β выражаются формулами (14.152) и (14.160), имеющими другой физический смысл, определяемый спецификой ориентационного перехода.

Запишем эти параметры в несколько более удобном, независимом друг от друга виде:

$$\alpha = \frac{\sqrt{\mu_H \mu_A - \mu_P^2 \sin^2 \varphi}}{\mu_H}. \quad (14.167)$$

$$\beta = (\nu_H^2 - \mu_P^2) \cos^2 \varphi - \mu_H \mu_A + \mu_P^2. \quad (14.168)$$

Таким образом, дисперсионное соотношение (14.163) в совокупности с (14.167)–(14.168) определяет дисперсионные свойства магнитоэлектронных волн в условиях ориентационного перехода в удобной для практики полярной системе координат.

Дисперсионное соотношение в виде (14.163) описывает волны при любых значениях α , которые могут быть как действительными, так и мнимыми.

При действительном значении α соотношение (14.163) удобно записать в виде

$$\operatorname{th}(kd\alpha) = \frac{2\mu_H \alpha}{\beta - 1}. \quad (14.169)$$

Здесь имеется только одна мода, подобно поверхностной моде Дэймона–Эшбаха, привязанная к поверхности пластины.

Выделяя из дисперсионного соотношения (14.169) экспоненту в явном виде, его можно разрешить относительно волнового числа k :

$$k = \frac{\mu_H}{2d\alpha} \ln \frac{\beta - 1 + 2\alpha}{\beta - 1 - 2\alpha}. \quad (14.170)$$

Для области мнимых значений α с учетом связи между гиперболическими и тригонометрическими функциями дисперсионное соотношение можно записать через $|\alpha|$ в виде

$$\operatorname{tg}(kd|\alpha|) = \frac{2\mu_H |\alpha|}{\beta - 1}. \quad (14.171)$$

Здесь имеется множество мод, определяемых периодичностью тригонометрического тангенса, подобно объемным модам Дэймона–Эшбаха, распределенных в объеме пластины.

Для объемных волн из (14.171) аналогично получаем:

$$k = -\frac{i\mu_H}{2d|\alpha|} \ln \frac{\beta - 1 + i2|\alpha|}{\beta - 1 - i2|\alpha|}, \quad (14.172)$$

откуда, раскрывая логарифм комплексного числа с помощью формулы [402, стр. 122, форм. 604]:

$$\ln(x \pm iy) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \pm i \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi k \right), \quad (14.173)$$

где полагаем:

$$x = \beta - 1; \quad (14.174)$$

$$y = 2|\alpha|, \quad (14.175)$$

находим

$$k = \frac{\mu_H}{d|\alpha|} \left[\arctg \left(\frac{2|\alpha|}{\beta - 1} \right) + 2\pi \cdot n \right], \quad (14.176)$$

где n — целое число.

Замечание. Более подробно характер распределения намагниченности в обеих типах волн разбирается в разделе 14.5. Для волн, описываемых соотношением (14.169) будет дано название «квазиповерхностные», а для волн, описываемых соотношением (14.171) — «квазиобъемные». В этих терминах добавка «квази» введена для того, чтобы подчеркнуть их отличие от обычных поверхностных и объемных волн Дэймона–Эшбаха, обусловленное пребыванием намагниченности в условиях ориентационного перехода.

14.4. Потенциалы, поля, намагниченность

Найдем теперь явные выражения для потенциалов, полей и динамической намагниченности распространяющихся волн во всех трех средах.

14.4.1. Потенциалы

Дисперсионное соотношение (14.141) получено из решения системы уравнений для коэффициентов потенциалов A , A_2 , B_2 , B (14.135)–(14.138):

$$A_2 \varepsilon_1 e^{-\beta_1} + B_2 \varepsilon_2 e^{-\beta_2} - A k_x^e e^{-\delta} = 0; \quad (14.177)$$

$$A_2 \varepsilon_1 e^{\beta_1} + B_2 \varepsilon_2 e^{\beta_2} + B k_x^e e^{-\delta} = 0; \quad (14.178)$$

$$A_2 e^{-\beta_1} + B_2 e^{-\beta_2} - A e^{-\delta} = 0; \quad (14.179)$$

$$A_2 e^{\beta_1} + B_2 e^{\beta_2} - B e^{-\delta} = 0, \quad (14.180)$$

где входящие в эти уравнения параметры β_1 , β_2 , δ , ε_1 , ε_2 определяются формулами (14.130)–(14.134).

Это система 4 уравнений с 4 неизвестными, определитель которой для нетривиальности решения должен быть равен нулю, откуда и было получено дисперсионное соотношение (14.146). При этом три из неизвестных можно выразить через четвертое, в качестве которого можно взять любое из упомянутых и задать его значение произвольно [414, 451, 520, 521]. После подстановки такого заданного заранее неизвестного во все уравнения (14.177)–(14.180) получается система теперь уже неоднородных, но пока еще четырех уравнений, содержащая всего три неизвестных. Однако уравнения этой системы связаны условием равенства нулю определителя исходной системы, то есть

дисперсионным соотношением, так что не являются независимыми. В силу такой связи любое из получившихся уравнений можно отбросить, в результате чего остается система всего из трех неоднородных уравнений с тремя неизвестными, которую можно решить непосредственно. При этом каждое из полученных значений трех остающихся неизвестных будет выражено через заданное значение первой неизвестной. Выбор трех уравнений из четырех может быть сделан исходя из удобства расчетов.

В силу произвольности выбора, число возможных его вариантов равно числу сочетаний из четырех по три, то есть $C_4^3 = 4$, так что в данном случае возможны всего четыре различных варианта. Во всех этих вариантах потенциалы сохраняют между собой отношения пропорциональности, то есть отличаются друг от друга постоянным функциональным множителем.

Рассмотрим один из возможных четырех вариантов, для чего положим амплитуду потенциала в первой среде равной единице, то есть $A = 1$. Подставляя это значение в (14.177)–(14.180), получаем:

$$A_2 \varepsilon_1 e^{-\beta_1} + B_2 \varepsilon_2 e^{-\beta_2} = k_x^e e^{-\delta}; \quad (14.181)$$

$$A_2 \varepsilon_1 e^{\beta_1} + B_2 \varepsilon_2 e^{\beta_2} + B k_x^e e^{-\delta} = 0; \quad (14.182)$$

$$A_2 e^{-\beta_1} + B_2 e^{-\beta_2} = e^{-\delta}; \quad (14.183)$$

$$A_2 e^{\beta_1} + B_2 e^{\beta_2} - B e^{-\delta} = 0. \quad (14.184)$$

Из этих четырех уравнений выбираем три: (14.181), (14.182) и (14.184). Такой выбор трех уравнений из четырех достаточно произволен и обусловлен желанием иметь в правой части как можно больше нулей (два из трех возможных значений). В результате получаем систему:

$$A_2 \varepsilon_1 e^{-\beta_1} + B_2 \varepsilon_2 e^{-\beta_2} = k_x^e e^{-\delta}; \quad (14.185)$$

$$A_2 \varepsilon_1 e^{\beta_1} + B_2 \varepsilon_2 e^{\beta_2} + B k_x^e e^{-\delta} = 0; \quad (14.186)$$

$$A_2 e^{\beta_1} + B_2 e^{\beta_2} - B e^{-\delta} = 0. \quad (14.187)$$

Решая эту систему, например, методом Крамера (расширенной матрицы или любым другим) [414, 451, 520, 521], получаем решение полной системы (14.177)–(14.180) в виде:

$$A = 1; \quad (14.188)$$

$$A_2 = - \frac{k_x^e (\varepsilon_2 + k_x^e) e^{\beta_2} e^{-\delta}}{\varepsilon_2 (\varepsilon_1 + k_x^e) e^{(\beta_1 - \beta_2)} - \varepsilon_1 (\varepsilon_2 + k_x^e) e^{-(\beta_1 - \beta_2)}}; \quad (14.189)$$

$$B_2 = \frac{k_x^e (\varepsilon_1 + k_x^e) e^{\beta_1} e^{-\delta}}{\varepsilon_2 (\varepsilon_1 + k_x^e) e^{(\beta_1 - \beta_2)} - \varepsilon_1 (\varepsilon_2 + k_x^e) e^{-(\beta_1 - \beta_2)}}; \quad (14.190)$$

$$B = \frac{k_x^e (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) e^{(\beta_1 + \beta_2)}}{\varepsilon_2 (\varepsilon_1 + k_x^e) e^{(\beta_1 - \beta_2)} - \varepsilon_1 (\varepsilon_2 + k_x^e) e^{-(\beta_1 - \beta_2)}}. \quad (14.191)$$

Таким образом, в соответствии с (14.118)–(14.120), зависящие от x составляющие потенциалов во всех трех областях принимают вид:

$$X_1 = Ae^{k_x^e x}; \quad (14.192)$$

$$X_2 = A_2 e^{\frac{2\beta_1}{d}x} + B_2 e^{\frac{2\beta_2}{d}x}; \quad (14.193)$$

$$X_3 = Be^{-k_x^e x}, \quad (14.194)$$

где в записи (14.193) учтено, что в соответствии с (14.130), (14.131) имеют место соотношения:

$$\eta_1 + \eta_2 = \frac{2\beta_1}{d}; \quad (14.195)$$

$$\eta_1 - \eta_2 = \frac{2\beta_2}{d}. \quad (14.196)$$

Подстановка выражений (14.192)–(14.194) в любое из граничных условий (14.128) или (14.129) приводит к дисперсионному соотношению вида (14.141). К такому же результату приводит подстановка этих выражений в условия (14.126) или (14.127), где после дифференцирования надо учитывать представление β_1 и β_2 в виде (14.130) и (14.131), а также раскрытие обозначений η_1 , η_2 посредством (14.108), (14.109), в которых надо k_z выразить через η_1 , а k_y через η_2 и η_1 .

Таким образом, в соответствии с (14.115)–(14.122) полные потенциалы принимают вид:

$$\psi_1 = Ae^{k_x^e x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}; \quad (14.197)$$

$$\psi_2 = \left(A_2 e^{\frac{2\beta_1}{d}x} + B_2 e^{\frac{2\beta_2}{d}x} \right) e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}; \quad (14.198)$$

$$\psi_3 = Be^{-k_x^e x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}. \quad (14.199)$$

Вводя обозначение

$$\psi_{yz} = e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}, \quad (14.200)$$

можно записать (14.197)–(14.199) в укороченном виде:

$$\psi_1 = Ae^{k_x^e x} \psi_{yz}; \quad (14.201)$$

$$\psi_2 = \left(A_2 e^{\frac{2\beta_1}{d}x} + B_2 e^{\frac{2\beta_2}{d}x} \right) \psi_{yz}; \quad (14.202)$$

$$\psi_3 = Be^{-k_x^e x} \psi_{yz}. \quad (14.203)$$

Такой вид имеют потенциалы при одном из четырех возможных вариантов выбора одной из переменных в системе уравнений (14.177)–(14.180). Другие варианты могут быть реализованы сходным образом, причем получаемые выражения для потенциалов всегда будут пропорциональны (14.197)–(14.199) с точностью до постоянных коэффициентов.

Данные потенциалы приведены в декартовой системе координат. В случае необходимости перевод их в цилиндрическую систему может

быть выполнен тривиальным, хотя и несколько громоздким образом, причем вид получаемых выражений не будет более простым или физически прозрачным, чем вид исходных. Опуская само преобразование, перечислим вкратце параметры, необходимые для его выполнения. Так, выражения (14.197)–(14.199) и входящие в них (14.188)–(14.191) содержат параметры: k_y , k_z , k_x^e , δ , ε_1 , ε_2 , β_1 , β_2 . При этом, согласно (14.147)–(14.149):

$$k_y = k \cos \varphi; \quad (14.204)$$

$$k_z = k \sin \varphi; \quad (14.205)$$

$$k_x^e = k. \quad (14.206)$$

Параметр δ , согласно (14.132), равен

$$\delta = \frac{kd}{2}. \quad (14.207)$$

Параметры ε_1 и ε_2 , в соответствии с (14.155), (14.156), имеют вид:

$$\varepsilon_1 = k(\nu_H \cos \varphi + \mu_H \alpha); \quad (14.208)$$

$$\varepsilon_2 = k(\nu_H \cos \varphi - \mu_H \alpha). \quad (14.209)$$

Параметры β_1 и β_2 , в соответствии с (14.130) и (14.131) с учетом (14.150) и (14.153), принимают вид:

$$\beta_1 = \frac{kd}{2} \left(i \frac{\mu_P}{\mu_H} \sin \varphi + \alpha \right); \quad (14.210)$$

$$\beta_2 = \frac{kd}{2} \left(i \frac{\mu_P}{\mu_H} \sin \varphi - \alpha \right), \quad (14.211)$$

причем:

$$\beta_1 - \beta_2 = kd\alpha; \quad (14.212)$$

$$\beta_1 + \beta_2 = i \frac{kd\mu_P}{\mu_H}. \quad (14.213)$$

Присутствующий в (14.208)–(14.212) параметр α , в соответствии с (14.167), имеет вид

$$\alpha = \frac{\sqrt{\mu_H \mu_A - \mu_P^2 \sin^2 \varphi}}{\mu_H}. \quad (14.214)$$

Входящие в приведенные выражения параметры μ_P , μ_A , μ_H , ν_H определяются формулами (14.44)–(14.48), нормированные частоты Ω , Ω_H , Ω_A , связывающие частоту ω с полем H_0 и параметрами материала пластины M_0 и H_A , формулами (10.136)–(10.138).

Заметим, что мнимые слагаемые в зависящих от x показателях экспонент, входящих в X_2 , вида (14.198), через посредство β_1 и β_2 вида (14.210) и (14.211), как раз определяют периодическую зависимость потенциала от координаты x внутри пластины, которая отличает квазиповерхностные волны от простых традиционных поверхностных

волн типа Дэймона–Эшбаха, где такая зависимость отсутствует. То же касается квазиобъемных волн, где периодическая зависимость в противоположных направлениях вдоль оси Ox различна, тогда как у объемных волн Дэймона–Эшбаха эта зависимость одинакова.

С другой стороны, мнимые составляющие в коэффициентах A_2 , B_2 и B , появляющиеся в результате мнимых частей параметров β_1 и β_2 , с координатной зависимостью не связаны, но лишь добавляют фазовый множитель к временной зависимости в соответствии с соотношением

$$(A + iB)e^{i\omega t} = Ae^{i\omega t} + Be^{i(\omega t + \pi/2)}, \quad (14.215)$$

справедливость которого легко проверяется по формуле Эйлера [414], откуда следует:

$$e^{i(\pi/2)} = 1. \quad (14.216)$$

14.4.2. Поля

Динамические поля распространяющейся волны определяются по формуле (14.16):

$$\mathbf{h} = \text{grad } \psi = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x}; \frac{\partial \psi}{\partial y}; \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\}. \quad (14.217)$$

В среде 1 получаем:

$$h_{1x} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = Ak_x^e e^{k_x^e x} \psi_{yz}; \quad (14.218)$$

$$h_{1y} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = -ik_y A e^{k_x^e x} \psi_{yz}; \quad (14.219)$$

$$h_{1z} = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = -ik_z A e^{k_x^e x} \psi_{yz}. \quad (14.220)$$

В среде 2 поля имеют вид:

$$h_{2x} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = \left(A_2 \frac{2\beta_1}{d} e^{\frac{2\beta_1}{d} x} + B_2 \frac{2\beta_2}{d} e^{\frac{2\beta_2}{d} x} \right) \psi_{yz}; \quad (14.221)$$

$$h_{2y} = \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = -ik_y \left(A_2 e^{\frac{2\beta_1}{d} x} + B_2 e^{\frac{2\beta_2}{d} x} \right) \psi_{yz}; \quad (14.222)$$

$$h_{2z} = \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = -ik_z \left(A_2 e^{\frac{2\beta_1}{d} x} + B_2 e^{\frac{2\beta_2}{d} x} \right) \psi_{yz}. \quad (14.223)$$

В среде 3 поля имеют вид:

$$h_{3x} = \frac{\partial \psi_3}{\partial x} = -Bk_x^e e^{-k_x^e x} \psi_{yz}; \quad (14.224)$$

$$h_{3y} = \frac{\partial \psi_3}{\partial y} = -ik_y B e^{-k_x^e x} \psi_{yz}; \quad (14.225)$$

$$h_{3z} = \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = -ik_z B e^{-k_x^e x} \psi_{yz}. \quad (14.226)$$

14.4.3. Намагниченность

Динамическая намагниченность отлична от нуля только в среде 2 и определяется через поле по формуле (14.19):

$$\mathbf{m} = \vec{\chi} \mathbf{h}. \quad (14.227)$$

Обозначения (14.44)–(14.48) с учетом (10.142)–(10.147) позволяют записать тензор восприимчивости (14.34) в виде

$$\vec{\chi} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_H - 1}{4\pi} & i \frac{\nu_H}{4\pi} & \frac{\mu_P}{4\pi} \\ -i \frac{\nu_H}{4\pi} & \frac{\mu_A - 1}{4\pi} & i \frac{\nu_P}{4\pi} \\ \frac{\mu_P}{4\pi} & -i \frac{\nu_P}{4\pi} & \frac{\mu_A - 1}{4\pi} \end{pmatrix}. \quad (14.228)$$

С помощью (14.227) и (14.228) с учетом (14.16) выражаем намагниченность через производные от потенциала:

$$m_x = \frac{\mu_H - 1}{4\pi} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + i \frac{\nu_H}{4\pi} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\mu_P}{4\pi} \frac{\partial \psi_2}{\partial z}; \quad (14.229)$$

$$m_y = -i \frac{\nu_H}{4\pi} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\mu_A - 1}{4\pi} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + i \frac{\nu_P}{4\pi} \frac{\partial \psi_2}{\partial z}; \quad (14.230)$$

$$m_z = \frac{\mu_P}{4\pi} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - i \frac{\nu_P}{4\pi} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\mu_A - 1}{4\pi} \frac{\partial \psi_2}{\partial z}. \quad (14.231)$$

14.5. Типы МСВ и структура их полей

Рассмотрим теперь с качественной стороны структуру полей распространяющихся МСВ, определяемую видом решения (4.115)–(4.125). Вдоль осей Oy и Oz — это бегущие волны, не отличающиеся от известных [119]. Вдоль оси Ox вне ферритовой пластины это волны, спадающие по экспоненте с действительным показателем, что также аналогично классическому случаю [119]. Внутри же пластины решение определяется множителем X_2 , представляющим собой произведение двух экспонент, показатели которых могут быть действительными или мнимыми.

14.5.1. Квазиобъемные и квазиповерхностные волны

Из выражений для компонент тензора $\vec{\mu}$ (14.44)–(14.48) можно видеть, что при $H_0 < H_A$ компоненты μ_H , μ_A и μ_P всегда действительные, а ν_H и ν_P всегда чисто мнимые. При этом из (14.123), (14.124) следует, что η_1 всегда чисто мнимое число, а η_2 может быть или действительным или чисто мнимым. Характер дисперсии МСВ определяется параметром α , в соответствии с (14.153) равным $\eta_2 k^{-1}$, то есть опять-таки действительностью или мнимостью η_2 . Если η_2

(или α) — мнимое число, то решение для X_2 является суперпозицией двух осциллирующих по оси Ox функций, амплитуды которых постоянны, то есть описывает две волны неизменной амплитуды, распространяющиеся навстречу друг другу вдоль оси Ox с разными скоростями. Следуя введенной в [489, 490, 494] терминологии, будем называть такие волны «квазиобъемными». Если η_2 (или α) — действительное, то решение для X_2 является суперпозицией двух осциллирующих по оси Ox функций, амплитуда одной из которых экспоненциально спадает, а другой — нарастает вдоль той же оси, то есть описывает две волны, распространяющиеся вдоль оси Ox навстречу друг другу с одинаковыми скоростями, но меняющимися по экспоненте в глубину от поверхности амплитудами. Подобно [489, 490, 494] такие волны будем называть «квазиповерхностными».

Рассмотрим структуру полей квазиобъемных и квазиповерхностных волн внутри ферритовой пластины более подробно. Отвлечемся пока от возможного невязанного характера поверхностных волн, определяемого направлением их распространения вдоль оси Oy , то есть будем считать, что амплитуды волн на поверхностях пластины при распространении волн в обоих направлениях одинаковы. Для этого случая распределение потенциала ψ_2 вдоль оси Ox в волнах обоих типов и классических МСВ [119] схематически показано на рис. 14.4 для случая $C = D$, когда амплитуды потенциала на обеих поверхностях пластины одинаковы и его распределение относительно плоскости $x = 0$ симметрично (в случае $C \neq D$ эта симметрия нарушена). На рис. 14.4, *а* показано распределение потенциала ψ_2 в классической поверхностной МСВ [119]. При удалении от поверхности ферритовой пластины потенциал монотонно спадает по экспоненте. На рис. 14.4, *б* показано распределение того же потенциала в квазиповерхностной МСВ. При удалении от поверхности ферритовой пластины потенциал также спадает, но не монотонно, а проходя через ряд осцилляций, амплитуда которых спадает по экспоненте. Эти осцилляции не являются статическими, а перемещаются вдоль оси Ox от поверхности к центру пластины и наоборот. Пространственный период этих осцилляций одинаков для обоих направлений распространения. На рис. 14.4, *в* показано распределение потенциала ψ_2 в классической объемной МСВ [119]. Амплитуда колебаний сохраняется постоянной по всей толщине ферритовой пластины. При кратном соотношении между толщиной пластины и длиной МСВ устанавливается режим стоячих волн, что проявляется в многомодовом характере волны. На рис. 14.4, *г* показано распределение того же потенциала в квазиобъемной МСВ. Амплитуда колебаний также сохраняется постоянной по всей толщине ферритовой пластины, однако длины волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оси Ox , различны (показаны сплошной линией и пунктиром). Для установления статической картины стоячих волн необходима кратность между толщиной пластины

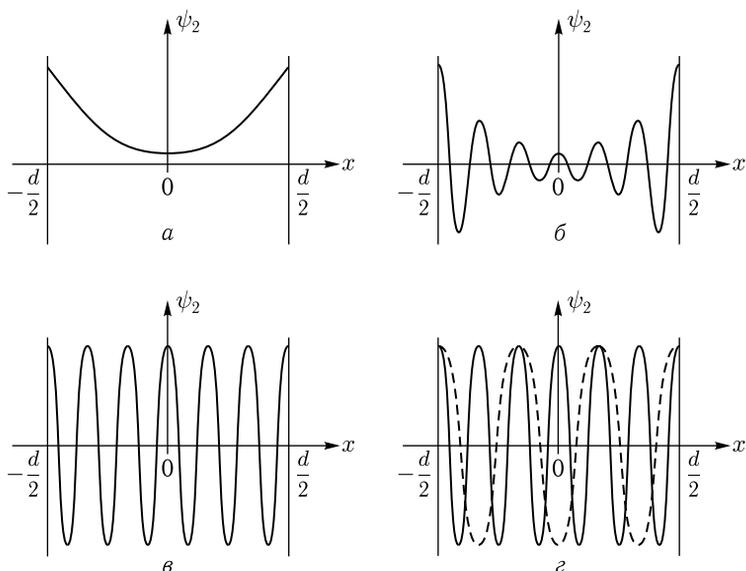


Рис. 14.4. Распределение потенциала ψ_2 вдоль оси Ox в МСВ различных типов: *a* — классическая поверхностная МСВ; *б* — квазиповерхностная МСВ; *в* — классическая объемная МСВ; *г* — квазиобъемная МСВ. Для удобства изображения амплитуды волн того и другого направлений вдоль оси Oy положены равными

и пространственным периодом осцилляций для обоих направлений распространения.

Заметим, что благодаря наличию в потенциале ψ_2 сомножителя вида $\exp(\eta_1 x)$, фазовый фронт волны в пластине, в отличие от изотропного случая [119], не перпендикулярен ее плоскости, то есть волновой вектор \mathbf{k} отклонен от плоскости пластины на некоторый угол, тем больший, чем больше угол φ . Отклонение отсутствует лишь при $\eta_1 = 0$, то есть $\varphi = 0$ или $\mu_P = 0$, что соответствует полям $H_0 = 0$ или $H_0 = H_A$. В общем случае, благодаря конечности толщины пластины, полная МСВ с учетом всех ее компонент распространяется только в плоскости пластины.

Действительно, решение (14.115)–(14.125) описывает две группы волн (с коэффициентами A_2 и B_2), каждая из которых распространяется от своей поверхности пластины внутрь под углом к ней. Волны одной группы, дойдя до противоположной поверхности пластины, отражаются от нее и преобразуются в волны второй группы. Углы падения и отражения при этом различны из-за гиротропии феррита. Далее процесс переотражения волн между плоскостями ферритовой пластины повторяется, в результате чего возникает суммарная волна, распространяющаяся в плоскости пластины.

14.5.2. Особенности решения в другой полуплоскости

Как отмечено в предыдущем разделе, переменные в уравнении (14.94) классическим путем не разделяются. Чтобы обойти это обстоятельство, было введено предположение о волновом характере волны вдоль оси Oz в виде $e^{-ik_z z}$ (14.97), (14.106), имеющее под собой то основание, что характер волн, распространяющихся в плоскости пластины внутри и вне нее, должен быть одинаковым. То есть, поскольку вне пластины характер волны вдоль оси Oz определяется экспонентой $e^{-ik_z z}$, то и внутри пластины характер волны вдоль той же оси также должен определяться той же экспонентой, как того требуют граничные условия (14.60)–(14.61).

Такой вид решения при временной зависимости $e^{i\omega t}$ соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении оси Oz .

Однако кроме такой волны может существовать и другая, распространяющаяся в отрицательном направлении той же оси, то есть описываемая экспонентой вида $e^{ik_z z}$. При этом потенциалы (14.115)–(14.117) сохраняют тот же вид, их составляющие (14.118)–(14.121) также не меняются, однако формула (14.122) заменяется на следующую:

$$Z = e^{ik_z z}. \quad (14.232)$$

Угол φ , определяющий направление волнового вектора \mathbf{k} в плоскости Oyz (рис. 14.3), теперь принимает отрицательные значения, так что составляющая волнового вектора k_z в соответствии с (14.148) становится отрицательной. При этом меняется только знак η_1 (14.150), тогда как η_2 , α , ε_1 , ε_2 , а также все их комбинации, определяемые соотношениями (14.151)–(14.157), не меняются, так что дисперсионное соотношение (14.163), а также входящие в него параметры α (14.167) и β (14.168) остаются неизменными. То же касается записи дисперсионного соотношения в виде (14.169) и (14.171).

Таким образом, закон дисперсии квазиобъемных и квазиповерхностных волн в обеих полуплоскостях по оси Oz — верхней и нижней, полностью сохраняется. Отличие состоит однако в распределении намагниченности вдоль оси Ox , то есть по толщине пластины. В нижней полуплоскости волна, описываемая экспонентой $e^{\eta_1 x}$, теперь распространяется в обратную сторону по отношению к волне в верхней полуплоскости, описываемой той же экспонентой, но с обратным знаком показателя.

Итак получаем, что в разных полуплоскостях по z волны внутри пластины по x бегут в противоположные стороны. На линии раздела этих полуплоскостей, то есть при $z = 0$, а также $\varphi = 0$, параметр η_1 в соответствии с (14.150) также равняется нулю (проходит через нуль с изменением знака). Это означает, что бегущие волны по оси Ox , описываемые экспонентой $e^{\eta_1 x}$, не существуют, так как экспонента равняется единице, то есть в направлении по толщине пластины бегущая компонента волн отсутствует.

Заметим, что подобно оси Oz ось Oy также допускает распространение волн как в положительном, так и в отрицательном направлениях, так что распространение в отрицательном направлении вместо (14.121) описывается экспонентой вида $e^{ik_y y}$. При этом угол φ меняется в интервале от 90° до 270° , где его косинус является отрицательным, так что компонента волнового числа k_y в соответствии с (14.147) меняет знак.

Однако, в отличие от k_z изменение знака k_y к какому-либо изменению параметров η_1 и η_2 , определяемых соотношениями (14.150) и (14.151), не приводит. У параметров ε_1 и ε_2 , определяемых соотношениями (14.155), (14.156), меняется знак первого слагаемого, однако их произведение и разность (14.157) и (14.158), входящие в соотношение (14.159), не меняются. Параметры α и β , определяемые соотношениями (14.152) и (14.160), также остаются прежними, так как $\cos \varphi$ входит в них только в квадрате, то есть от знака не зависит. Таким образом, дисперсионное соотношение (14.162), а также определяющие его параметры (14.167) и (14.168) при изменении направления распространения волны вдоль оси Oy с положительного на отрицательное не меняются. То же касается записи дисперсионного соотношения в виде (14.169) и (14.171).

Таким образом, в отрицательной полуплоскости относительно оси Oy структура волны совпадает с таковой в положительной полуплоскости. При этом бегущий характер волн вдоль оси Ox сохраняется, то есть волны по Ox в правой и левой полуплоскостях бегут в одну и ту же сторону.

14.5.3. Замечание о невязимном характере волн

Проведенное здесь рассмотрение выполнено без учета возможного невязимного характера распространения волн вдоль Oy и относится только к бегущему характеру волн по оси Ox . При этом на данном этапе амплитуды волн остаются неопределенными, а соотношение между ними должно быть получено из решения полной системы (14.135)–(14.138).

Однако не следует забывать о невязимном характере распространения поверхностных волн, имеющих место в классической задаче Дэймона–Эшбаха [1]. Невязимость проявляется в том, что волна положительного направления по оси Oy прижимается к верхней поверхности пластины, а отрицательного — к нижней.

Можно ожидать, что подобная невязимость имеет место и для рассматриваемых здесь квазиповерхностных волн. Рис. 14.4 построен без учета такой невязимности, так что амплитуды на обеих поверхностях положены равными. Сделано это не более чем для повышения наглядности структуры волны вдоль оси Ox . Более точное распределение амплитуд на различных поверхностях, получаемое путем решения полной системы (14.135)–(14.138), требует отдельного рассмотрения, которое авторы монографии оставляют будущим исследователям.

14.6. Частотные диапазоны и интервалы полей существования различных типов МСВ

Рассмотрим теперь на основе полученного дисперсионного соотношения (14.146) или (14.161), (14.169), (14.171) частотные диапазоны и интервалы полей существования различных типов МСВ.

14.6.1. Частотно-полевые области существования МСВ различных типов

Частотные границы диапазонов существования МСВ определяются допустимыми значениями волнового числа k , которое изменяется в пределах от нуля до бесконечности. Рассмотрим сначала эти границы при предельных значениях волнового числа $k = 0$ и $k = \infty$. Обозначим частоты МСВ с такими волновыми числами для квазиобъемных волн как $\Omega_{v,0}$ и $\Omega_{v,\infty}$, а для квазиповерхностных как $\Omega_{s,0}$ и $\Omega_{s,\infty}$. Для прямых волн выполняется соотношение: $\Omega_{v(s),0} < \Omega_{v(s),\infty}$, для обратных: $\Omega_{v(s),0} > \Omega_{v(s),\infty}$. Соответственно частотный диапазон существования для прямых волн простирается от $\Omega_{v(s),0}$ до $\Omega_{v(s),\infty}$, для обратных — от $\Omega_{v(s),\infty}$ до $\Omega_{v(s),0}$. Для всех типов прямых волн групповая скорость положительна: направление переноса энергии совпадает с направлением распространения фазового фронта и с положительным направлением оси Oy . Для всех типов обратных волн групповая скорость отрицательна: направление переноса энергии противоположно направлению распространения фазового фронта и совпадает с отрицательным направлением оси Oy .

Как видно из дисперсионных соотношений (14.169) и (14.171), они имеют два «простых» решения:

$$\alpha = 0 \quad (14.233)$$

и при $k = 0$

$$\mu_H \alpha = 0 \text{ или } \mu_H |\alpha| = 0. \quad (14.234)$$

Поскольку (14.233) не налагает никаких ограничений на величину k , из сравнения (14.233) и (14.234) следует, что частота МСВ с волновым числом $k = 0$ определяется из условия

$$\mu_H = 0 \quad (14.235)$$

и равна

$$\Omega_{s,0} = \Omega_{v,0} = \sqrt{(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) + \frac{\Omega_H^2}{\Omega_A}}. \quad (14.236)$$

Эта частота не зависит от угла φ .

Дисперсия МСВ существенно зависит от направления распространения волны, определяемого углом φ . Рассмотрим далее два важных частных случая: $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 90^\circ$.

При $\varphi = 0^\circ$ из условия $k \rightarrow \infty$ для квазиобъемных волн получаем

$$\Omega_{v,\infty} = \sqrt{\frac{(\Omega_A^2 - \Omega_H^2)(\Omega_A + 1)}{\Omega_A}}. \quad (14.237)$$

Аналогично для квазиповерхностных волн находим

$$\Omega_{s,\infty} = \frac{\Omega_A^3 + \Omega_H^2}{2\Omega_A\Omega_H}. \quad (14.238)$$

При $\varphi = 90^\circ$ условие $k \rightarrow \infty$ для квазиобъемных волн дает две частоты, соответствующие прямым:

$$\Omega_{v,\infty 1} = \sqrt{\Omega_A + (\Omega_A^2 - \Omega_H^2)} \quad (14.239)$$

и обратным волнам:

$$\Omega_{v,\infty 2} = \sqrt{\Omega_A^2 - \Omega_H^2}, \quad (14.240)$$

а квазиповерхностные волны вообще отсутствуют.

Частотно-полевые области существования волн различных типов для случая $\Omega_A = 2$ приведены на рис. 14.5. Здесь поле $\Omega_H = 0$ соответствует ориентации вектора намагниченности ферритовой пластины по нормали к ее плоскости, а поле $\Omega_H = \Omega_A = 2$ соответствует ориентации в плоскости. В промежуточном интервале полей $0 < \Omega_H < \Omega_A$ вектор намагниченности занимает промежуточное положение между двумя указанными ориентациями.

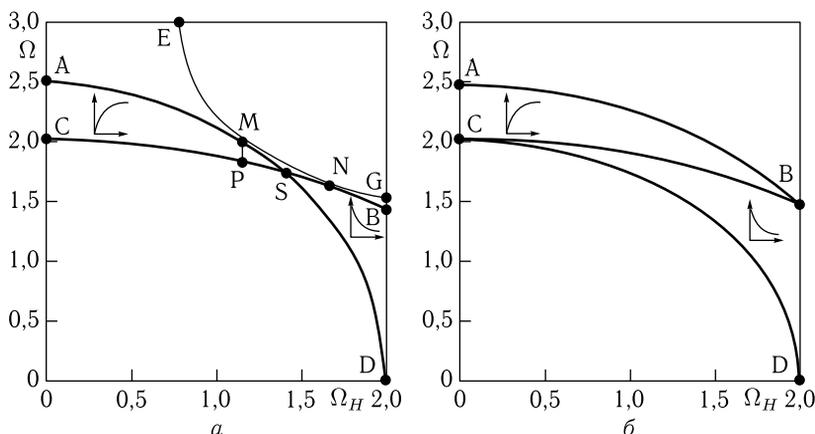


Рис. 14.5. Частотно-полевые области существования МСВ различных типов, распространяющихся перпендикулярно (а) и параллельно (б) направлению поля. Маленькие врезки изображают закон дисперсии, из которого виден прямой или обратный характер волн

Рисунок 14.5, *a* соответствует $\varphi = 0^\circ$. Кривая СВ соответствует $k = 0$ и построена по формуле (14.236). Частота в точке С равна

$$\Omega^{(C)} = \Omega_A. \quad (14.241)$$

Частота в точке В равна

$$\Omega^{(B)} = \sqrt{\Omega_A}. \quad (14.242)$$

Кривая AD соответствует $k = \infty$ и построена по формуле (14.237). Частота в точке А равна

$$\Omega^{(A)} = \sqrt{\Omega_A(\Omega_A + 1)}. \quad (14.243)$$

Частота в точке D равна нулю:

$$\Omega^{(D)} = 0. \quad (14.244)$$

Кривые СВ и AD пересекаются в точке S, где поле и частота определяются выражениями:

$$\Omega_H^{(S)} = \frac{\Omega_A}{\sqrt{2}}; \quad (14.245)$$

$$\Omega^{(S)} = \frac{\Omega_A(\Omega_A + 1)}{\sqrt{2}}. \quad (14.246)$$

Кривая EG соответствует $k = \infty$ и построена по формуле (14.238). Эта кривая касается кривой AD в точке M и кривой СВ в точке N. Поле и частота в точке M равны:

$$\Omega_H^{(M)} = \frac{\Omega_A \sqrt{\Omega_A}}{\sqrt{2\Omega_A + 1}}; \quad (14.247)$$

$$\Omega^{(M)} = \frac{(\Omega_A + 1)\sqrt{\Omega_A}}{\sqrt{2\Omega_A + 1}}. \quad (14.248)$$

Аналогичные величины в точке N равны:

$$\Omega_H^{(N)} = \frac{\Omega_A \sqrt{\Omega_A}}{\sqrt{2\Omega_A - 1}}; \quad (14.249)$$

$$\Omega^{(N)} = \frac{\Omega_A \sqrt{\Omega_A}}{\sqrt{2\Omega_A - 1}}. \quad (14.250)$$

Между кривыми AD и СВ существуют квазиобъемные МСВ, в криволинейном треугольнике MSN — квазиповерхностные. Вне этих областей всякие МСВ отсутствуют. В области ASC квазиобъемные волны являются прямыми. При этом в области AMPS (где линия MP параллельна вертикальной оси) допустимы все значения волнового числа от нуля до бесконечности, а в области MSP — только от нуля

до конечного значения k_s , где в точке M $k_s = \infty$, а в точке S $k_s = 0$. В области SBD квазиобъемные волны являются обратными. При этом на линии SB всегда $k = 0$, а на линии SD $k = \infty$. В области MSN квазиповерхностные волны всегда прямые. При этом на линии MS волновое число равно k_s , на линии SN $k = 0$ и на линии MN $k = \infty$.

Рисунок 14.5, б соответствует $\varphi = 90^\circ$. Кривая CB соответствует $k = 0$ и построена по формуле (14.236). Кривая AB соответствует $k = \infty$ и построена по формуле (14.239). Кривая CD также соответствует $k = \infty$ и построена по формуле (14.240). Частоты в точках A, B, C и D те же, что и в предыдущем случае. Между кривыми AB и CB существуют прямые квазиобъемные МСВ, причем на линии CB всегда $k = 0$, а на линии AB $k = \infty$. Между кривыми CB и CD существуют обратные квазиобъемные МСВ, причем на линии CB всегда $k = 0$, а на линии CD $k = \infty$. В обеих областях возможны все значения волнового числа от нуля до бесконечности. Вне этих областей всякие МСВ отсутствуют.

14.6.2. Частотные границы между областями квазиповерхностных и квазиобъемных волн

Рассмотрим теперь границы между областями квазиповерхностных и квазиобъемных волн, исходя из условия $\alpha = 0$. Введем вспомогательный параметр

$$\xi = \mu_H \mu_A - \mu_P^2 \sin^2 \varphi, \quad (14.251)$$

где μ_H , μ_A и μ_P определяются соотношениями (14.44)–(14.46).

Из сравнения с (14.167) можно видеть, что этот параметр связан со введенным ранее параметром α соотношением

$$\alpha = \frac{\sqrt{\xi}}{\mu_H}. \quad (14.252)$$

Целесообразность введения параметра ξ обусловлена тем, что именно от его знака зависит действительный или мнимый характер α , что позволяет выбрать между дисперсионными соотношениями (14.169) и (14.171), то есть между квазиповерхностным и квазиобъемным характером волн.

Таким образом, при $\xi > 0$ волны квазиповерхностные, так что дисперсионное соотношение имеет вид (14.169), а при $\xi < 0$ волны квазиобъемные, для которых дисперсионное соотношение имеет вид (14.171).

Типичный пример зависимости ξ от нормированной частоты Ω при различных значениях поля Ω_H для случая $\varphi = 0^\circ$ иллюстрируется рис. 14.6. Заштрихованные области, в которых $\xi < 0$, соответствуют квазиобъемным волнам. Вне этих областей, то есть где $\xi > 0$, волны квазиповерхностные.

Из рисунка видно, что частотная область существования квазиобъемных волн имеет вид полосы, центральная часть которой по мере увеличения Ω_H смещается вниз по частоте, а ширина до значе-

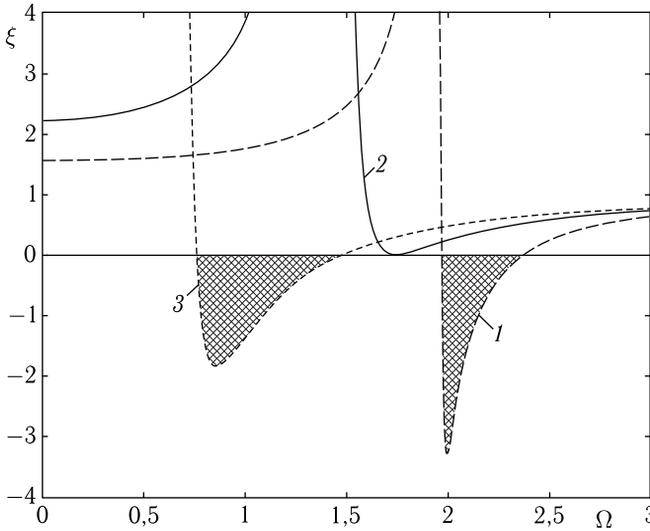


Рис. 14.6. Зависимости ξ от частоты Ω в случае $\varphi = 0^\circ$ при различных значениях Ω_H : 1 — 0,5; 2 — 1,4; 3 — 1,9. Кривые построены при $\Omega_A = 2$

ния $\Omega_H = 1,4$ уменьшается, при $\Omega_H = 1,4$ стягивается в точку, после чего увеличивается. Области квазиповерхностных волн располагаются по обе стороны от области квазиобъемных.

Условие $\xi = 0$ позволяет определить частотные границы между областями квазиповерхностных и квазиобъемных волн в зависимости от постоянного поля. Наиболее просто это можно сделать в полярной системе координат, где упомянутое условие имеет вид

$$\mu_H \mu_A - \mu_P^2 \sin^2 \varphi = 0. \quad (14.253)$$

Пользуясь формулами (14.44)–(14.46) для μ_H , μ_A , μ_P и выполняя несложные преобразования, получаем уравнение для определения Ω :

$$\Omega_A^2 \left[(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2 \right]^2 + \Omega_A^3 \left[(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2 \right] + \Omega_H^2 (\Omega_A^2 - \Omega_H^2) \cos^2 \varphi = 0. \quad (14.254)$$

Это уравнение относительно величины $(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2$ является квадратным. Решая его, получаем два значения частоты Ω , отличающиеся знаком перед внутренним корнем:

$$\Omega_{1,2} = \sqrt{(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) + \frac{\Omega_A^2 \mp \sqrt{\Omega_A^4 - 4\Omega_H^2(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) \cos^2 \varphi}}{2\Omega_A}}. \quad (14.255)$$

Рассмотрим случаи минуса и плюса по отдельности, каждый для двух значений ориентации волнового вектора: $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 90^\circ$.

1) Случай первый — МИНУС:

$$\mathbf{1-1)} \varphi = 0^\circ.$$

Внутренний корень в (14.255) принимает вид

$$\sqrt{\Omega_A^4 - 4\Omega_H^2(\Omega_A^2 - \Omega_H^2)} = \sqrt{(\Omega_A^2 - 2\Omega_H^2)^2} = |\Omega_A^2 - 2\Omega_H^2|. \quad (14.256)$$

Возможны ДВА варианта:

1-1-а)

$$\Omega_A^2 - 2\Omega_H^2 > 0, \text{ то есть: } \Omega_H < \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega_A. \quad (14.257)$$

При этом (14.256) принимает вид

$$\sqrt{\Omega_A^4 - 4\Omega_H^2(\Omega_A^2 - \Omega_H^2)} = \Omega_A^2 - 2\Omega_H^2, \quad (14.258)$$

откуда из (14.155) получаем

$$\Omega_1^{(1)} \Big|_{\varphi=0^\circ} = \sqrt{\Omega_A^2 - \frac{\Omega_A - 1}{\Omega_A}\Omega_H^2}. \quad (14.259)$$

1-1-б)

$$\Omega_A^2 - 2\Omega_H^2 < 0, \text{ то есть: } \Omega_H > \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega_A. \quad (14.260)$$

При этом (14.256) принимает вид

$$\sqrt{\Omega_A^4 - 4\Omega_H^2(\Omega_A^2 - \Omega_H^2)} = 2\Omega_H^2 - \Omega_A^2, \quad (14.261)$$

откуда из (14.255) получаем

$$\Omega_1^{(2)} \Big|_{\varphi=0^\circ} = \sqrt{\Omega_A(\Omega_A + 1) - \frac{\Omega_A + 1}{\Omega_A}\Omega_H^2}. \quad (14.262)$$

При $\Omega_H = 0$ из (14.259) получаем

$$\Omega_1 \Big|_{\varphi=0^\circ, \Omega_H=0} = \Omega_A. \quad (14.263)$$

При $\Omega_H = \Omega_A$ из (14.262) получаем

$$\Omega_1 \Big|_{\varphi=0^\circ, \Omega_H=\Omega_A} = 0. \quad (14.264)$$

1-2) $\varphi = 90^\circ$.

Внутренний корень в (14.255) принимает вид

$$\sqrt{\Omega_A^4} = \Omega_A^2. \quad (14.265)$$

Так как (14.265) от Ω_H не зависит, то вариант получается всего ОДИН:

$$\Omega_1|_{\varphi=90^\circ} = \sqrt{\Omega_A^2 - \Omega_H^2}. \quad (14.266)$$

При $\Omega_H = 0$ из (14.266) получаем

$$\Omega_1|_{\varphi=90^\circ, \Omega_H=0} = \Omega_A. \quad (14.267)$$

При $\Omega_H = \Omega_A$ из (14.266) получаем

$$\Omega_1|_{\varphi=90^\circ, \Omega_H=\Omega_A} = 0. \quad (14.268)$$

2) Случай второй — ПЛЮС:

2-1) $\varphi = 0^\circ$.

Внутренний корень в (14.255) принимает тот же вид (14.256).

Возможны ДВА варианта:

2-1-a)

$$\Omega_A^2 - 2\Omega_H^2 > 0, \text{ то есть: } \Omega_H < \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega_A \quad (14.269)$$

откуда получаем

$$\Omega_2^{(1)}|_{\varphi=0^\circ} = \sqrt{\Omega_A(\Omega_A + 1) - \frac{\Omega_A + 1}{\Omega_A}\Omega_H^2}. \quad (14.270)$$

2-1-б)

$$\Omega_A^2 - 2\Omega_H^2 < 0, \text{ то есть: } \Omega_H > \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega_A, \quad (14.271)$$

откуда получаем

$$\Omega_2^{(2)}|_{\varphi=0^\circ} = \sqrt{\Omega_A^2 - \frac{\Omega_A - 1}{\Omega_A}\Omega_H^2}. \quad (14.272)$$

При $\Omega_H = 0$ из (14.270) получаем

$$\Omega_1|_{\varphi=0^\circ, \Omega_H=0} = \sqrt{\Omega_A(\Omega_A + 1)}. \quad (14.273)$$

При $\Omega_H = \Omega_A$ из (14.272) получаем

$$\Omega_1|_{\varphi=0^\circ, \Omega_H=\Omega_A} = \sqrt{\Omega_A}. \quad (14.274)$$

2-2) $\varphi = 90^\circ$.

При этом внутренний корень в (14.255) принимает вид (14.265) и вариант получается всего ОДИН:

$$\Omega_2|_{\varphi=90^\circ} = \sqrt{\Omega_A(\Omega_A + 1) - \Omega_H^2}. \quad (14.275)$$

При $\Omega_H = 0$ из (14.275) получаем

$$\Omega_2|_{\varphi=90^\circ, \Omega_H=0} = \sqrt{\Omega_A(\Omega_A + 1)}, \quad (14.276)$$

При $\Omega_H = \Omega_A$ из (14.275) получаем

$$\Omega_1|_{\varphi=90^\circ, \Omega_H=\Omega_A} = \sqrt{\Omega_A}. \quad (14.277)$$

Пример зависимостей $\Omega_{1,2}(\Omega_H)$ для случая $\Omega_A = 2$ показан на рис. 14.7. Сплошные линии соответствуют Ω_1 , пунктирные — Ω_2 . Кривые 1 соответствуют $\varphi = 0^\circ$, 2 — $\varphi = 90^\circ$. Стрелками внизу показаны значения Ω_H , соответствующие кривым 1–3 на рис. 14.6.

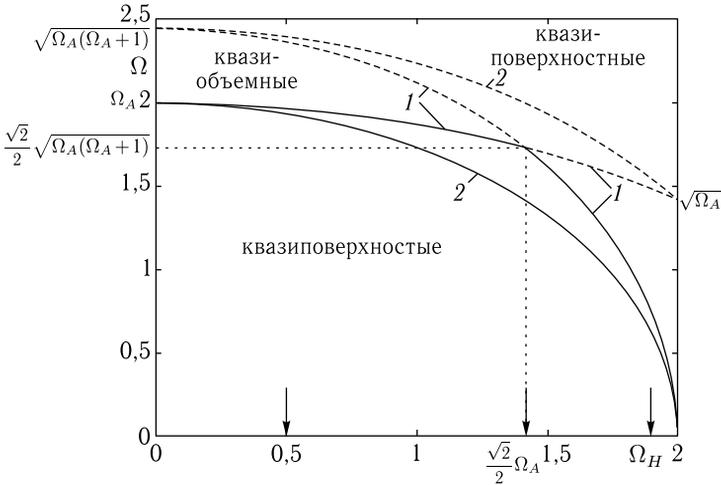


Рис. 14.7. Зависимости $\Omega_{1,2}(\Omega_H)$ и частотные области существования квазиповерхностных и квазиобъемных волн при $\Omega_A = 2$

Из рисунка видно, что, тогда как кривые 2 для Ω_1 и Ω_2 , соответствующие $\varphi = 90^\circ$, плавно спадают без каких-либо особенностей, то кривые 1 для Ω_1 и Ω_2 , соответствующие $\varphi = 0^\circ$, претерпевают излом и в определенной точке соприкасаются друг с другом, после чего их продолжения как бы меняются местами, создавая иллюзию пересечения двух плавных кривых. Такое их поведение обусловлено изменением знака выражения под модулем в (14.256). Точка, где кривые 1 для Ω_1 и Ω_2 при $\varphi = 0^\circ$ соприкасаются, определяется условием равенства нулю внутреннего корня в (14.255), при котором эти выражения становятся равными. Это условие означает:

$$\Omega_A^4 - 4\Omega_H^2(\Omega_A^2 - \Omega_H^2)\cos^2\varphi|_{\varphi=0^\circ} = 0, \quad (14.278)$$

что дает приведенное поле

$$\Omega_H = \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega_A, \quad (14.279)$$

которое соответствует частоте:

$$\Omega = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\Omega_A(\Omega_A + 1)}. \quad (14.280)$$

Пользуясь (14.233), нетрудно показать, что ориентация вектора намагниченности в этом поле соответствует углу $\theta = 45^\circ$.

14.6.3. Предельные частоты дисперсионного соотношения

Предельные частоты законов дисперсии при $k \rightarrow 0$ и $k \rightarrow \infty$ для квазиповерхностных и квазиобъемных волн находятся из соответствующих дисперсионных соотношений (14.169) и (14.171). Рассмотрение удобно провести в полярной системе координат.

Для квазиповерхностных волн дисперсионное соотношение имеет вид (14.169). При $k = 0$ необходимым условием конечности левой части (14.169) является $\xi = 0$, что соответствует частотам (14.255).

При $k \rightarrow \infty$ выражение (14.169) дает

$$\beta - 1 - 2\sqrt{\xi} = 0, \quad (14.281)$$

откуда, с учетом (14.167) и (14.168), получаем

$$\sqrt{\mu_H \mu_A - \mu_P^2 \sin^2 \varphi} = -1 \pm \nu_H \cos \varphi. \quad (14.282)$$

Подставляя в (14.282) явные выражения для μ_H , μ_A , μ_P , ν_H (14.44)–(14.47) и разрешая полученное уравнение относительно Ω , получаем

$$\Omega_P = \frac{\Omega_A^3 + \Omega_H^2 \cos^2 \varphi}{2\Omega_H \Omega_A \cos \varphi}. \quad (14.283)$$

При $\varphi = 0^\circ$ получаем

$$\Omega_P|_{\varphi=0^\circ} = \frac{\Omega_A^3 + \Omega_H^2}{2\Omega_H \Omega_A}. \quad (14.284)$$

При $\varphi = 90^\circ$ получаем: $\Omega_P \rightarrow \infty$.

Для квазиобъемных волн дисперсионное соотношение имеет вид (14.171). При $k = 0$ необходимым условием конечности левой части (14.171) является $\xi = 0$, что соответствует частотам (14.255). При $k \rightarrow \infty$ левая часть (14.171) периодически осциллирует от $-\infty$ до $+\infty$. При этом правая часть должна оставаться конечной, что может быть выполнено только при условии $\xi = 0$, что опять приводит к тем же частотам (14.255).

14.6.4. Деформация областей существования квазиобъемных и квазиповерхностных волн при изменении поля анизотропии

Рассмотрим теперь как меняются зависимости $\Omega_{1,2}(\Omega_H)$, соответствующие $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 90^\circ$, при изменении поля анизотропии. Примеры таких кривых приведены на рис. 14.8.

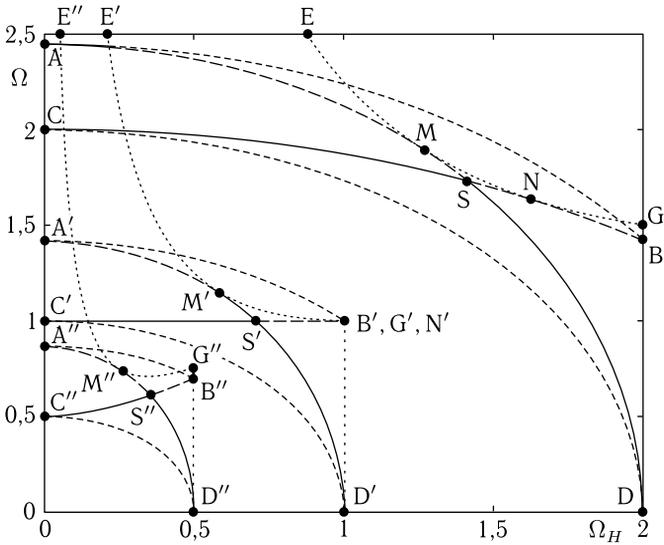


Рис. 14.8. Зависимости нормированных граничных частот между областями квазиобъемных и квазиповерхностных волн от нормированного постоянного поля

Кривые, обозначенные буквами без штрихов, соответствуют $\Omega_A = 2,0$, буквами с одним штрихом — $\Omega_A = 1,0$, с двумя штрихами — $\Omega_A = 0,5$. Так как кривые, соответствующие различным Ω_A , по конфигурации довольно сходны, то рассмотрим основные особенности на примере кривых, обозначенных буквами без штрихов (при $\Omega_A = 2,0$).

Кривые ASB, CSD и EMNG (и обозначенные теми же буквами со штрихами) соответствуют $\varphi = 0^\circ$, кривые AB и CD — $\varphi = 90^\circ$. Кривые CSD и CD соответствуют Ω_1 , кривые ASB и AB — Ω_2 . Участок AS кривой ASB построен по формуле (14.270), участок SB — по формуле (14.272). Участок CS кривой CSD построен по формуле (14.259), участок SD — по формуле (14.262). Кривая EG построена по формуле (14.284). Кривая AB построена по формуле (14.275), кривая CD — по формуле (14.266). Частоты в точках A, B, C, D равны:

$$\Omega(A) = \sqrt{\Omega_A(\Omega_A + 1)}; \quad (14.285)$$

$$\Omega(B) = \sqrt{\Omega_A}; \quad (14.286)$$

$$\Omega(C) = \Omega_A; \quad (14.287)$$

$$\Omega(D) = 0. \quad (14.288)$$

Спадающий вид кривых $\Omega_{1,2}(\Omega_H)$ отражает характерное свойство динамических возбуждений при ориентационном фазовом переходе второго рода: уменьшение резонансной частоты вплоть до нуля (мягкая мода) вследствие потери устойчивости системы в точке перехода

(при $\Omega_H = \Omega_A$) (раздел 10.3.3, рис. 10.3). Важно отметить, что до нуля спадает только зависимость $\Omega_1(\Omega_H)$, тогда как зависимость $\Omega_2(\Omega_H)$ при $\Omega_H = \Omega_A$ принимает значение $\sqrt{\Omega_A}$, что обусловлено дипольным волновым характером этой зависимости, который сообщает системе дополнительную жесткость даже при полной компенсации статического поля анизотропии постоянным полем.

Из рис. 14.8 видно, что, тогда как кривые AB и CD плавно спадают без каких-либо соприкосновений, то кривые ASB и CSD соприкасаются друг с другом в точке S и претерпевают в ней излом, после чего их продолжения как бы меняются местами, создавая иллюзию пересечения двух плавных кривых. Такое их поведение обусловлено изменением знака выражения под модулем в (14.256). Точка S, где кривые ASB и CSD соприкасаются, определяется условием равенства нулю внутреннего корня в (14.255), при котором эти выражения становятся равными, что дает:

$$\Omega(S) = \frac{\sqrt{\Omega_A(\Omega_A + 1)}}{\sqrt{2}}; \quad (14.289)$$

$$\Omega_H(S) = \frac{\Omega_A}{\sqrt{2}}. \quad (14.290)$$

Из (14.234) можно видеть, что этой точке соответствует $\theta = 45^\circ$.

Кривая EMNG на рис. 14.8 построена по формуле (14.284). Эта кривая касается кривой ASB в точках M и N, где поля и частоты равны:

$$\Omega_H(M) = \frac{\Omega_A \sqrt{\Omega_A}}{\sqrt{2\Omega_A + 1}}; \quad (14.291)$$

$$\Omega(M) = \frac{\sqrt{\Omega_A}(\Omega_A + 1)}{\sqrt{2\Omega_A + 1}}; \quad (14.292)$$

$$\Omega_H(N) = \frac{\Omega_A \sqrt{\Omega_A}}{\sqrt{2\Omega_A - 1}}; \quad (14.293)$$

$$\Omega(N) = \frac{\Omega_A \sqrt{\Omega_A}}{\sqrt{2\Omega_A - 1}}. \quad (14.294)$$

В соответствии с рис. 14.7 можно видеть, что допустимые области существования квазиобъемных волн при $\varphi = 0^\circ$ заключены между парой спадающих кривых CSD и ASB, а при $\varphi = 90^\circ$ — между кривыми CD и AB. Вне этих областей волны могут быть только квази-поверхностными. Анализ дисперсионных соотношений, выполненный в работах [489, 490, 494], показывает, что при $\varphi = 0^\circ$ в криволинейных треугольниках ASC и BSD существуют квазиобъемные волны, а в криволинейном треугольнике MSN — квазиповерхностные. При $\varphi = 90^\circ$ между кривыми AB и CD существуют квазиобъемные волны, а квазиповерхностные волны вообще отсутствуют. Вне этих областей какие-либо волны не существуют.

Приведенные на рис. 14.8 кривые, обозначенные буквами со штрихами, показывают, как меняются зависимости $\Omega_{1,2}(\Omega_H)$, соответствующие $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 90^\circ$, при изменении поля анизотропии. Из рисунка видно, что при уменьшении поля анизотропии общий вид кривых, в основном, сохраняется, а их размах по обеим осям уменьшается пропорционально полю анизотропии. Заметно меняется кривая CSB, состоящая из двух участков CS и SB, а также кривая EMNG. Так, при $\Omega_A = 2,0$ кривая CSB в целом спадает, а кривая EMNG в целом спадает и касается кривой ASB в двух точках M и N. При $\Omega_A = 1,0$ кривая C'S'B' идет строго горизонтально, причем точка B' совпадает с точками G' и N'. При $\Omega_A = 0,5$ кривая C''S''B'' возрастает, точки B и G опять расходятся, кривая E''M''G'' на участке M''G'' спадает, а точка N вообще отсутствует. Такая трансформация этой кривой обусловлена уменьшением жесткости системы при уменьшении нормированного поля анизотропии.

14.6.5. Границы областей существования квазиобъемных и квазиповерхностных волн при различных ориентациях волнового вектора

Рассмотрим теперь, как ведут себя зависимости $\Omega_{1,2}(\Omega_H)$ при различных направлениях волнового вектора относительно поля, то есть при изменении угла φ . Примеры таких кривых при $\Omega_A = 0,5$ приведены на рис. 14.9. Кривые 1–4 построены по формуле (14.255) со знаком «минус» перед внутренним корнем, кривые 1'–4' — по формуле (14.255)

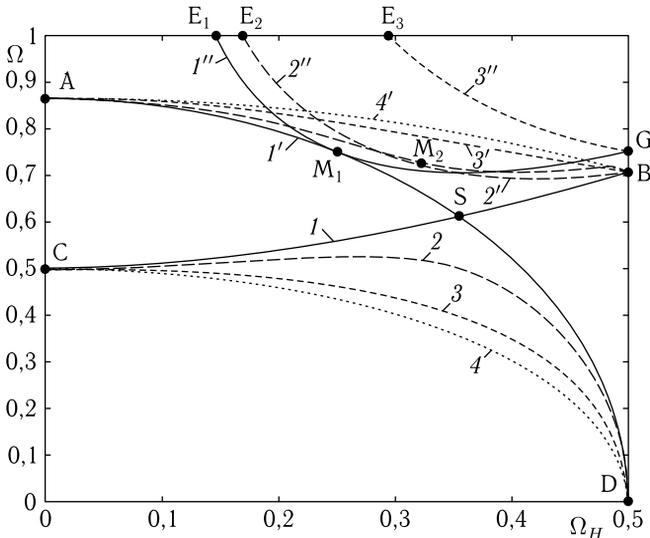


Рис. 14.9. Зависимости граничных частот областей квазиобъемных и квазиповерхностных волн от постоянного поля при различных значениях угла φ

со знаком «плюс», кривые $1''-3''$ — по формуле (14.283). Кривые $1, 1', 1''$ соответствуют $\varphi = 0^\circ$, кривые $2, 2', 2''$ — $\varphi = 30^\circ$, кривые $3, 3', 3''$ — $\varphi = 60^\circ$, кривые $4, 4'$ — $\varphi = 90^\circ$.

Из рисунка видно, что значения граничных частот при изменении φ от 0° до 90° , соответствующие точкам А, В, С, D, не меняются, причем кривые для Ω_1 и Ω_2 имеют резкий излом и соприкасаются в точке S только при $\varphi = 90^\circ$, а при увеличении φ становятся плавными и расходятся от точки соприкосновения в обе стороны тем сильнее, чем угол φ больше, стремясь к кривым, соответствующим $\varphi = 90^\circ$, причем это стремление с увеличением угла φ замедляется. Кривые $E_{1,2}M_{1,2}$, соответствующие частоте Ω_P (14.283) при $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 30^\circ$ имеют с кривой для Ω_2 (14.255) одну точку соприкосновения $M_{1,2}$, которая при увеличении угла φ смещается в сторону больших полей. При $\varphi = 60^\circ$ точка соприкосновения кривых для Ω_P и Ω_2 отсутствует, а при $\varphi \rightarrow 90^\circ$ кривая для Ω_P устремляется к бесконечности (выходит за пределы рисунка).

Таким образом, интервал существования квазиповерхностных волн ограничен сверху углом отсечки φ_c , который определяется условием совпадения точек M и B при $\Omega_H = \Omega_A$, то есть $\Omega_P = \Omega(B)$, где $\Omega(B)$ определяется формулой (14.286). При этом для угла отсечки φ_c получаем уравнение

$$\sin^4 \varphi_c + 4\Omega_A \sin^3 \varphi_c + 2(2\Omega_A^2 - 1) \sin^2 \varphi_c - 4\Omega_A \sin \varphi_c + 1 = 0. \quad (14.295)$$

Аналитическое решение этого уравнения крайне громоздко, численное же решение дает зависимость угла отсечки φ_c от нормированного поля анизотропии Ω_A , показанную на рис. 14.10.

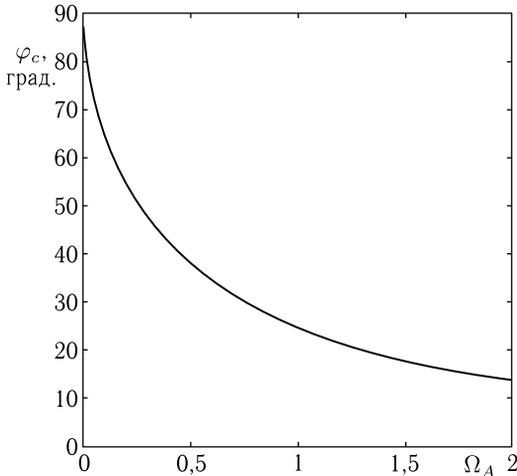


Рис. 14.10. Зависимость угла отсечки для квазиповерхностных волн от нормированного поля анизотропии

Из рисунка видно, что при $\Omega_A \rightarrow 0$ угол отсечки стремится к 90° , а по мере увеличения Ω_A угол отсечки уменьшается, стремясь к нулю. В силу симметрии геометрии задачи (рис. 14.1) зависимость $\varphi_c(\Omega_A)$ относительно оси Oz также симметрична. Для квазиобъемных волн отсечка отсутствует: для них допустимы любые направления волнового вектора относительно поля.

14.7. Дисперсионные свойства различных МСВ

Рассмотрим теперь подробнее дисперсионные зависимости для тех же случаев.

14.7.1. Распространение волн перпендикулярно направлению поля

На рис. 14.11 показаны дисперсионные кривые для $\varphi = 0^\circ$ при различных значениях поля. Рассмотрены квазиобъемные волны, то есть такие, частоты которых лежат в областях ASC и BSD на рис. 14.5, а. Номера кривых соответствуют различным значениям поля Ω_H . Утолщенными линиями выделены кривые, соответствующие характерным точкам на рис. 14.5, а. При этом кривая 1 соответствует точкам А и С на рис. 14.5, а ($\Omega_H = 0$), кривая 12 — точкам В и D ($\Omega_H = \Omega_A$) на том же рисунке. Кривая 7 соответствует точке М ($\Omega_H = \Omega_H^{(M)}$),

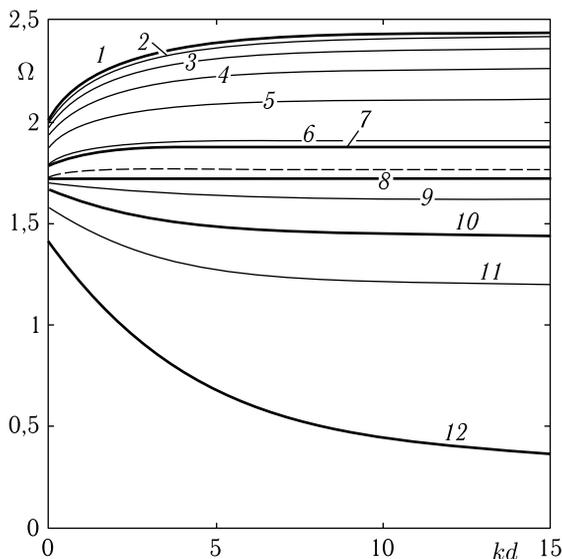


Рис. 14.11. Дисперсионные кривые для квазиобъемных МСВ, распространяющихся перпендикулярно направлению поля при различных значениях нормированного поля Ω_H : 1 — 0,00; 2 — 0,25; 3 — 0,50; 4 — 0,75; 5 — 1,00; 6 — 1,25; 7 — 1,2649; 8 — 1,4142; 9 — 1,50; 10 — 1,6330; 11 — 1,75; 12 — 2,00

кривая 8 — точке S ($\Omega_H = \Omega_H^{(S)}$) и кривая 10 — точке N ($\Omega_H = \Omega_H^{(N)}$). Для сравнения пунктирной линией показана дисперсионная кривая, соответствующая квазиповерхностной волне в поле $\Omega_H = \Omega_H^{(S)} = 1,4142$.

Из рисунка видно, что наклон дисперсионных кривых 1–7 положителен, что соответствует прямым волнам, а наклон дисперсионных кривых 9–12 — отрицателен, что соответствует обратным волнам. Кривая 8, соответствующая точке S на рис. 14.5, *a* (поле $\Omega_H^{(S)}$), представляет собой горизонтальную прямую, то есть групповая скорость на ней равна нулю. Такая волна не распространяется и энергии не переносит. Групповые скорости прямых и обратных квазиобъемных волн, описываемых кривыми 1–7 и 9–12, по модулю тем больше, чем сильнее поля этих волн отличаются от величины $\Omega_H^{(S)}$.

На рис. 14.12 показаны аналогичные дисперсионные кривые для $\varphi = 0^\circ$ при различных значениях поля, соответствующие квазиповерхностным волнам, то есть таким, частоты которых лежат в области MNS на рис. 14.5, *a*. Номера кривых соответствуют различным значениям поля Ω_H . Дисперсионные кривые для квазиповерхностных волн показаны пунктирными линиями. Сплошными линиями показаны дисперсионные кривые для квазиобъемных волн, существующих при тех же значениях поля. Утолщенными линиями выделены кривые, соответствующие

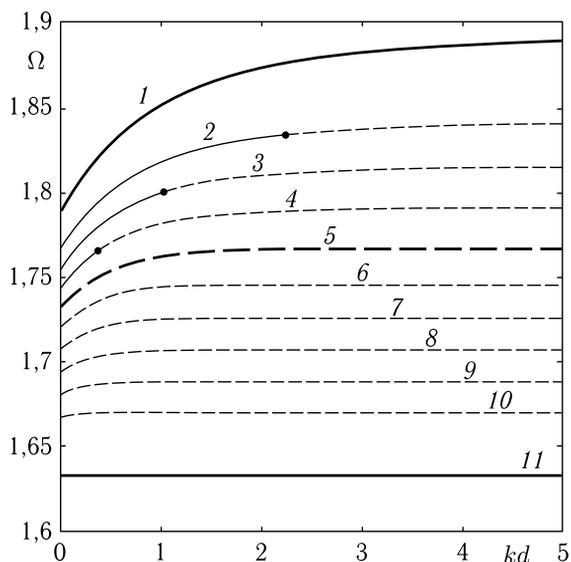


Рис. 14.12. Дисперсионные кривые для квазиобъемных (сплошные линии) и квазиповерхностных (пунктир) МСВ, распространяющихся перпендикулярно направлению поля при различных значениях нормированного поля Ω_H : 1 — 1,2649; 2 — 1,3242; 3 — 1,3542; 4 — 1,3842; 5 — 1,4142; 6 — 1,4442; 7 — 1,4742; 8 — 1,5042; 9 — 1,5342; 10 — 1,5642; 11 — 1,6330

характерным точкам на рис. 14.5, а. Кривая 1 соответствует точке М ($\Omega_H = \Omega_H^{(M)}$), кривая 5 — точке S ($\Omega_H = \Omega_H^{(S)}$) и кривая 11 — точке N ($\Omega_H = \Omega_H^{(N)}$).

Из рисунка видно, что наклон всех дисперсионных кривых 1–10 положителен, что соответствует прямым волнам. Кривая 11, соответствующая точке N на рис. 14.5, а (поле $\Omega_H^{(N)}$), представляет собой горизонтальную прямую, что означает равенство нулю групповой скорости. Такая волна не распространяется и энергии не переносит. Групповые скорости остальных волн, описываемых кривыми 1–10, по модулю тем больше, чем сильнее поля этих волн отличаются от величины $\Omega_H^{(N)}$. Дисперсионные кривые 2–4 состоят из двух частей. Первая, соответствующая меньшему полю, описывает квазиобъемные волны (сплошная линия), вторая, соответствующая большему полю — квазиповерхностные волны (пунктир). Обе части кривых описываются одним и тем же дисперсионным соотношением (14.169) (или (14.161)) и непрерывно переходят друг в друга при изменении величины α с действительной на мнимую. Граница перехода от квазиобъемных к квазиповерхностным волнам соответствует участку MS кривой AD на рис. 14.5, а. Таким образом, в полях между $\Omega_H^{(M)}$ и $\Omega_H^{(S)}$ интервал допустимых значений волновых чисел для квазиобъемных волн ограничен сверху, а для квазиповерхностных — снизу. Вне этого интервала полей волновые числа тех и других волн могут быть любыми от нуля до бесконечности.

14.7.2. Распространение волн параллельно направлению поля

Рассмотрим теперь случай $\varphi = 90^\circ$, дисперсионные кривые для которого при различных значениях поля показаны на рис. 14.13. Номера кривых соответствуют различным значениям поля Ω_H . Сплошные линии соответствуют прямым квазиобъемным волнам, пунктирные — обратным. Утолщенными линиями выделены кривые, соответствующие характерным полям на рис. 14.5, б. Кривая 1 соответствует прямым квазиобъемным волнам в нулевом поле ($\Omega_H = 0$), кривая 6 — обратным квазиобъемным волнам в том же поле. Кривая 5 соответствует прямым квазиобъемным волнам в поле анизотропии ($\Omega_H = \Omega_A$), кривая 10 — обратным квазиобъемным волнам в том же поле.

Из рисунка видно, что как прямые, так и обратные волны существуют во всем интервале полей от нуля до поля анизотропии, при этом волновые числа для обоих типов волн могут быть любыми от нуля до бесконечности. Кривые для прямых и обратных волн, соответствующие одним и тем же значениям поля (1 и 6, 2 и 7, 3 и 8, 4 и 9, 5 и 10) начинаются при $k = 0$ на одних и тех же частотах, определяемых кривой СВ на рис. 14.5, б. Групповая скорость прямых квазиобъемных волн максимальна в нулевом поле (кривая 1), а с увеличением поля уменьшается и в поле анизотропии стремится к нулю (кривая 5). Групповая скорость обратных квазиобъемных волн в нулевом поле

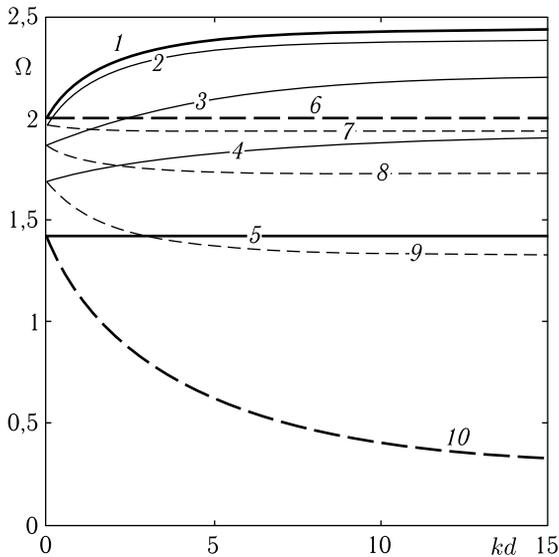


Рис. 14.13. Дисперсионные кривые для прямых (сплошные линии) и обратных (пунктир) квазиобъемных МСВ, распространяющихся параллельно направлению поля при различных значениях нормированного поля Ω_H : 1 — 0,0; 2 — 0,5; 3 — 1,0; 4 — 1,5; 5 — 2,0; 6 — 0,0; 7 — 0,5; 8 — 1,0; 9 — 1,5; 10 — 2,0

стремится к нулю (кривая 6), а с увеличением поля увеличивается и в поле анизотропии достигает максимума (кривая 10).

14.8. Сравнение с экспериментом

Сравним теперь предсказываемые теорией свойства спектров МСВ с экспериментами, описанными в главе 12. Для этого сначала обобщим наиболее характерные свойства полученных спектров МСВ.

14.8.1. Основные свойства спектров МСВ

Приведем наиболее важные свойства полученных спектров МСВ для интерпретации экспериментальных результатов.

1) В отсутствие поля частота спектра МСВ максимальна, а при увеличении поля снижается, причем в поле анизотропии, когда вектор намагниченности ложится в плоскость пластины, низшая частота спектра МСВ стремится к нулю, тогда как верхняя остается конечной, однако меньшей, чем в отсутствие поля.

2) В отсутствие поля существуют только прямые квазиобъемные волны. В поле, равном полю анизотропии, существуют только обратные квазиобъемные волны. В интервале полей от нуля до поля анизотропии спектр прямых квазиобъемных волн всегда сужается, а обратных квазиобъемных всегда расширяется.

3) При распространении волн перпендикулярно полю в полях меньших определенной критической величины (точка S на рис. 14.5, рис. 14.8, рис. 14.9) квазиобъемные волны могут быть только прямыми, в полях больших этой величины — только обратными. Квазиповерхностные волны всегда являются только прямыми и существуют в определенном интервале полей (от точки M до точки N, включающем в себя точку S). Интервал допустимых значений волнового числа для прямых квазиобъемных волн в некоторой области полей меньших критического значения (точка S) ограничен сверху, аналогичный интервал для квазиповерхностных волн ограничен снизу и является продолжением интервала волновых чисел для квазиобъемных волн.

4) При распространении волн вдоль поля существуют только квазиобъемные волны. В отсутствие поля квазиобъемные волны являются прямыми, в поле, равном полю анизотропии — обратными. В промежуточном интервале полей квазиобъемные волны могут быть как прямыми, так и обратными, причем прямые всегда лежат выше по частоте, чем обратные. Интервал допустимых значений волнового числа для тех и других волн всегда простирается от нуля до бесконечности.

14.8.2. Соотношение теории с экспериментальными результатами

Сравним теперь предсказываемые теорией свойства спектров МСВ с экспериментами, описанными в разделе 12.3. Теория дает объяснение следующим фактам:

1) В отсутствие поля частота спектра МСВ максимальна, с увеличением поля снижается и в поле анизотропии достигает определенной конечной величины. В теории эта величина равна нулю, в эксперименте — отлична от нуля.

2) Дисперсионные свойства всех наблюдаемых МСВ соответствуют прямым волнам. Во всех интервалах полей, где в эксперименте наблюдаются прямые волны, теория предсказывает существование прямых квазиобъемных или квазиповерхностных волн. Предсказанные теорией квазиобъемные обратные волны в эксперименте не наблюдались, однако их существование нельзя исключить, так как явное наблюдение обратных волн геометрией эксперимента (раздел 14.1.1) не предусматривалось.

3) При распространении МСВ перпендикулярно полю в эксперименте при увеличении поля спектр МСВ несколько расширяется. Теория предсказывает некоторое сужение спектра прямых квазиобъемных МСВ, за которым, однако, следует расширение спектра за счет прямых квазиповерхностных и обратных квазиобъемных МСВ.

4) При распространении МСВ вдоль поля в эксперименте при увеличении поля наблюдается сильное сужение спектра МСВ. Теория предсказывает такое сужение для квазиобъемных прямых волн.

5) В некоторых случаях в эксперименте наблюдается ограничение допустимых значений волнового числа сверху или снизу. Теория до-

пускает такое ограничение и объясняет его изменением характера волн с квазиобъемного на квазиповерхностный.

Таким образом, теория, развитая на основе предложенной модели ориентационного перехода намагниченности при касательном намагничивании пленки с нормальной одноосной анизотропией, объясняет многие экспериментальные факты вполне адекватно. Более того, теория предсказывает существование обратных квазиобъемных волн, обнаружение которых требует постановки дополнительных экспериментов. Необъясненными остаются количественные значения частот спектра МСВ в различных полях и их связь с параметрами ферритовой пленки.

Выводы по главе 14

Данная глава посвящена задаче, возникающей при интерпретации экспериментов по распространению магнитостатических волн в ненасыщенных ферритовых пленках. Рассмотрены волны, распространяющиеся в касательно намагниченной пластине с нормальной одноосной анизотропией в условиях ориентационного перехода. Выявлены два типа волн — квазиповерхностные и квазиобъемные. Получены дисперсионные соотношения и распределение намагниченности для обоих типов волн.

Основные результаты, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Методом решения граничной задачи рассмотрены магнитостатические волны в касательно намагниченной ферритовой пластине с осью анизотропии, перпендикулярной ее плоскости, в предположении, что поле анизотропии превышает поле размагничивания пластины. При этом вектор намагниченности, будучи в отсутствие поля ориентирован перпендикулярно плоскости пластины, по мере увеличения поля ложится в плоскость, что представляет собой ориентационный фазовый переход второго рода.

2. В рамках общего приближения магнитостатики получено уравнение для потенциала в магнитной среде — уравнение Уокера, являющееся магнитным аналогом уравнения Лапласа в случае произвольного вида тензора магнитной восприимчивости. Для случая ориентационного перехода в геометрии, соответствующей условиям рассматриваемой задачи, получен тензор динамической магнитной проницаемости, имеющий антисимметричный вид и содержащий пять частотно зависимых, не зависящих друг от друга компонент. С использованием полученного тензора записаны граничные условия на поверхностях пластины, требующие непрерывности нормальной составляющей индукции и касательной составляющей поля.

3. Рассмотрена задача для структуры из трех сред — магнитной пластины и примыкающих к ее поверхностям двух свободных полупространств. Отмечено, что вне магнитной пластины потенциал

подчиняется классическому уравнению Лапласа для трех координат, решение которого получено методом разделения переменных. Показано, что полученное решение представляет собой произведение трех экспонент, волновые числа для которых являются чисто действительными или чисто мнимыми. Установлено, что внутри магнитной пластины уравнение Уокера для потенциала в условиях ориентационного перехода содержит смешанную производную по двум координатам — перпендикулярной и параллельной плоскости пластины. Показано, что в случае периодичности распределения динамического потенциала по всей поверхности пластины подстановка предполагаемого решения в виде экспоненты приводит к квадратному уравнению, два корня которого соответствуют двум показателям пробной экспоненты. При этом один из показателей соответствует распространению волнового возмущения в положительном направлении оси координат, перпендикулярной плоскости пластины, а другой — в отрицательном.

4. Путем подстановки решения в граничные условия получено дисперсионное соотношение, в зависимости от величины параметров материала и ориентации вектора намагниченности содержащее гиперболический или тригонометрический тангенс. Показано, что гиперболическое решение соответствует волне, привязанной к поверхности и имеющей единственную моду, названную «квазиповерхностной». Тригонометрическое решение имеет много мод, распределенных по объему пластины и названных «квазиобъемными». Отмечено, что частица «квази» в названиях волн отражает их характер, связанный с ориентационным переходом, существенным образом отличный от характера классических поверхностных и объемных волн.

5. Путем решения системы уравнений, получаемой из граничных условий при задании величины одного из постоянных коэффициентов, получены выражения для потенциалов во всех трех средах. Отмечено, что потенциалы в средах, расположенных вне магнитной пластины, по существу не отличаются от классических потенциалов типа Дэймона–Эшбаха, имеющих место в отсутствие ориентационного перехода и отражают экспоненциальный спад поля волны по мере удаления от обеих плоскостей пластины. Однако потенциалы внутри пластины для квазиповерхностных волн имеют характер произведения спадающей экспоненты на периодический множитель типа синусоиды. Наличие такого множителя существенным образом отличает квазиповерхностные волны от простых традиционных поверхностных волн Дэймона–Эшбаха, где такая зависимость отсутствует. Потенциалы внутри пластины для квазиобъемных волн также имеют в своем составе дополнительный множитель типа синусоиды. В этом случае периодическая зависимость в двух противоположных направлениях вдоль оси, перпендикулярной плоскости пластины (то есть зависимость от знака нормальной координаты) получается различной. Такое различие отличает квазиобъемные волны от простых объемных волн Дэймона–Эшбаха, где эта зависимость одинакова.

6. Определена структура полей квазиповерхностных и квазиобъемных волн. Показано, что в случае квазиповерхностных волн распределение намагниченности представляет собой суперпозицию двух осциллирующих по нормали к плоскости пластины функций, амплитуда одной из которых экспоненциально спадает, а другой нарастает. В случае квазиобъемных волн распределение намагниченности представляет собой суперпозицию двух осциллирующих по нормали к плоскости пластины волн, амплитуды которых постоянны, а скорости различны и направлены навстречу друг другу. Рассмотрен характер распределения намагниченности при распространении волн на всей плоскости магнитной пластины. Показано, что закон дисперсии квазиобъемных и квазиповерхностных волн в обеих полуплоскостях по оси, совпадающей с направлением внешнего поля, полностью сохраняется. При этом однако направления распространения компонент волн, перпендикулярных плоскости пластины, в верхней и нижней полуплоскостях относительно направления поля меняются на противоположные. При распространении волн в плоскости пластины в обоих (положительном и отрицательном) направлениях вдоль нормали к направлению поля дисперсионное соотношение не меняется, причем направление распространения волны перпендикулярно плоскости пластины сохраняется.

7. На основе анализа закона дисперсии квазиобъемных и квазиповерхностных волн выявлены частотно-полевые области их существования. Показано, что в отсутствие поля частота спектра МСВ максимальна, а при увеличении поля снижается, причем в поле анизотропии, когда вектор намагниченности находится в плоскости пластины, низшая частота спектра МСВ стремится к нулю, тогда как верхняя остается конечной, однако меньшей, чем в отсутствие поля. В отсутствие поля существуют только прямые квазиобъемные волны. В поле, равном полю анизотропии, существуют только обратные квазиобъемные волны. В интервале полей от нуля до поля анизотропии спектр прямых квазиобъемных волн всегда сужается, а обратных квазиобъемных — всегда расширяется. При распространении волн перпендикулярно полю в полях меньших определенной критической величины квазиобъемные волны являются прямыми, в полях больших этой величины — обратными. Квазиповерхностные волны всегда являются только прямыми. Интервал допустимых значений волнового числа для прямых квазиобъемных волн может быть ограничен сверху, аналогичный интервал для квазиповерхностных волн может быть ограничен снизу. При распространении волн вдоль поля существуют только квазиобъемные волны. В отсутствие поля квазиобъемные волны являются прямыми, в поле, равном полю анизотропии, — обратными. В промежуточном интервале полей квазиобъемные волны могут быть как прямыми, так и обратными, причем прямые всегда лежат выше по частоте, чем обратные. Интервал допустимых значений волнового числа для тех и других волн всегда простирается от нуля до бесконечности.

8. Проведено сравнение предсказываемых теорией свойств спектров МСВ с экспериментом, выполненным на пленках ЖИГ. Показано, что теория, развитая на основе предложенной модели одноосной анизотропии, перпендикулярной плоскости пленки, объясняет следующие экспериментальные факты: общую тенденцию снижения частоты спектра МСВ при увеличении поля; прямой характер дисперсии наблюдаемых МСВ в интервалах полей, где теория предсказывает существование прямых квазиобъемных или квазиповерхностных волн; расширение наблюдаемого спектра МСВ при увеличении поля в области существования прямых квазиобъемных и обратных квазиобъемных МСВ; сужение наблюдаемого спектра МСВ при увеличении поля в области существования прямых квазиобъемных волн; наблюдаемое ограничение допустимых значений волнового числа в условиях, когда теория предсказывает изменение характера волн с квазиобъемного на квазиповерхностный. Сверх того теория предсказывает существование обратных квазиобъемных волн, обнаружение которых требует постановки дополнительных экспериментов. Необъясненными остаются количественные значения частот спектра МСВ в различных полях и их связь с параметрами ферритовой пленки.

Глава 15

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЕ С ОРИЕНТАЦИОННЫМ ПЕРЕХОДОМ

Данная глава посвящена рассмотрению распространения электромагнитной волны через многослойную структуру, векторы намагниченности в слоях которой находятся в условиях ориентационного перехода. В качестве базовой задачи рассмотрено распространение волны в бигиротропной среде и отражение такой волны от границы раздела двух сред. Примером среды с ориентационным переходом выбрана композиционная структура, состоящая из анизотропных произвольно ориентированных ферритовых сфер. Для случаев двух и трехслойной структур получены амплитудно-частотные характеристики, найдены коэффициенты отражения и прохождения.

Изложение в основном базируется на работах [522–542], в первую очередь на [522–528], а также на материале главы 8 монографии [3]. Свойства волн в бигиротропной среде, в том числе отражение от одной границы раздела сред, рассмотрим, следуя [2, разд. 2.5, 2.6]. В общей трактовке вопросов отражения будем опираться на серию монографий [427, 428, 543–549], а также на статьи [550–566]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

15.1. Общий случай электромагнитной волны в среде с тензорными параметрами

В общем случае вопрос о распространении электромагнитной волны в среде с тензорными параметрами решается на основании общих уравнений электродинамики (уравнений Максвелла) в отсутствие электрических и магнитных зарядов, имеющих вид (в системе СГС) [424, стр. 352]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (15.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad (15.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0; \quad (15.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (15.4)$$

где магнитная \mathbf{B} и диэлектрическая \mathbf{D} индукции связаны с магнитным \mathbf{H} и электрическим \mathbf{E} полями соотношениями [424, стр. 354]:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad (15.5)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (15.6)$$

где μ и ε — магнитная и диэлектрическая проницаемости среды.

15.1.1. Общий случай среды тензорного характера

В тензорной среде скаляры μ и ε заменяются тензорами $\vec{\mu}$ и $\vec{\varepsilon}$, так что соотношения (15.5), (15.6) принимают вид:

$$\mathbf{B} = \vec{\mu} \mathbf{H}; \quad (15.7)$$

$$\mathbf{D} = \vec{\varepsilon} \mathbf{E}. \quad (15.8)$$

Традиционный способ получения волнового уравнения, например, для магнитного поля в среде со скалярными параметрами состоит в следующем. Берется ротор от обеих частей уравнения (15.2):

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \mathbf{E}). \quad (15.9)$$

Левая часть полученного соотношения преобразуется в соответствии со стандартной формулой векторного анализа [567, стр. 159, форм. (6.65); 568, стр. 254, форм. (6.31)]

$$\text{rot rot } \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}, \quad (15.10)$$

что дает

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{grad div } \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H}. \quad (15.11)$$

В силу скалярного характера магнитной проницаемости из (15.4) следует

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (15.12)$$

так что

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H}. \quad (15.13)$$

Это выражение используется для преобразования левой части (15.9), а в правую подставляется (15.1).

В результате получается уравнение волнового типа

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{\varepsilon^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (15.14)$$

Однако применение подобного приема в случае среды с тензорными параметрами к волновому уравнению вида (15.14) не приводит, так как вместо (15.12) имеет место соотношение (15.4).

Это соотношение, с учетом определения магнитной проницаемости через восприимчивость:

$$\vec{\mu} = 1 + 4\pi \vec{\chi}, \quad (15.15)$$

может быть записано в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = -4\pi(\vec{\chi}\mathbf{H}), \quad (15.16)$$

так что подстановка этого выражения в (15.11) вместо (15.14) приводит к уравнению

$$\Delta \mathbf{H} + \operatorname{grad} \operatorname{div} (\vec{\chi}\mathbf{H}) - \frac{\varepsilon^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (15.17)$$

Запись этого уравнения в декартовых координатах приводит к системе уравнений со множеством смешанных производных. Решение его в общем виде крайне громоздко, и авторам настоящей монографии не известно. Однако имеется частный случай, вполне разрешимый аналитическими методами и, в то же время, весьма близкий к реальности. Это случай бигиротропной среды, к рассмотрению которой и перейдем далее.

15.2. Электромагнитные волны, распространяющиеся в бигиротропной среде

Рассмотрим общие свойства электромагнитных волн, распространяющихся в бигиротропной среде [2, разд. 2.5, 2.6]. При рассмотрении отражения и прохождения электромагнитных волн через многослойные структуры традиционно используется система СИ [427, 428, 543–549], поэтому далее будем работать именно в этой системе.

Будем исходить из уравнений (15.1) и (15.2), которые в системе СИ при временной зависимости $\exp(i\omega t)$ имеют вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega\mu_0 \vec{\mu}\mathbf{H}; \quad (15.18)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = i\omega\varepsilon_0 \vec{\varepsilon}\mathbf{E}, \quad (15.19)$$

где ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные в системе СИ.

Введем декартову систему координат $Oxyz$ и предположим, что среда является бигиротропной с осью гиротропии вдоль оси Oz . В этом случае тензоры магнитной и диэлектрической проницаемостей имеют вид:

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix}; \quad (15.20)$$

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & i\varepsilon_a & 0 \\ -i\varepsilon_a & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}. \quad (15.21)$$

Будем заведомо предполагать, что решение уравнения (15.17) имеет волновой характер, то есть координатно-временная зависимость распространяющейся волны имеет вид

$$\exp [i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})] = \exp [i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)]. \quad (15.22)$$

При этом производные по координатам представляют собой операторы:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow -ik_x, \quad \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow -ik_y, \quad \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -ik_z. \quad (15.23)$$

Расписывая (15.18) и (15.19) по компонентам, с учетом тензорного характера (15.20) и (15.21), для амплитуд координатных компонент электрического и магнитного полей волны $E_{x,y,z}$ и $H_{x,y,z}$, получаем систему уравнений [2, стр. 48, форм. (2.161)–(2.166)]:

$$-ik_y E_z + ik_z E_y + i\omega\mu_0\mu H_x - \omega\mu_0\mu_a H_y = 0; \quad (15.24)$$

$$-ik_z E_x + ik_x E_z + \omega\mu_0\mu_a H_x + i\omega\mu_0\mu H_y = 0; \quad (15.25)$$

$$-ik_x E_y + ik_y E_x + i\omega\mu_0\mu_{\parallel} H_z = 0; \quad (15.26)$$

$$-ik_y H_z + ik_z H_y - i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_x + \omega\varepsilon_0\varepsilon_a E_y = 0; \quad (15.27)$$

$$-ik_z H_x + ik_x H_z - \omega\varepsilon_0\varepsilon_a E_x - i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_y = 0; \quad (15.28)$$

$$-ik_x H_y + ik_y H_x - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_{\parallel} E_z = 0. \quad (15.29)$$

Это — основная система уравнений для волны, распространяющейся в произвольном направлении в бигиротропной среде, имеющей ось гиротропии вдоль оси Oz . Частные случаи подобной системы для несколько другой геометрии приведены в работах [15–17, 557, 569]. В работах [525, 526] близкая система использовалась для исследования распространения волн в композиционной среде, содержащей ферритовые элементы в условиях ориентационного перехода. В настоящей работе эта система полагается в основу задачи о многослойной среде с магнитными параметрами.

15.2.1. Гиромагнитная и гироэлектрическая волны

Рассмотрим плоскую волну, волновой вектор которой ориентирован по нормали к оси гиротропии, то есть в плоскости Oxy при $k_z = 0$. При этом система (15.24)–(15.29) распадается на две независимые системы, описывающие две независимые волны [2, стр. 49, форм. (2.173)–(2.178)]:

ГИРОМАГНИТНАЯ:

$$\omega\mu_0\mu H_x + i\omega\mu_0\mu_a H_y - k_y E_z = 0; \quad (15.30)$$

$$\omega\mu_0\mu_a H_x + i\omega\mu_0\mu H_y + ik_x E_z = 0; \quad (15.31)$$

$$k_y H_x - k_x H_y - \omega\varepsilon_0\varepsilon_{\parallel} E_z = 0. \quad (15.32)$$

ГИРОЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ:

$$\omega\varepsilon_0\varepsilon E_x + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_a E_y + k_y H_z = 0; \quad (15.33)$$

$$\omega\varepsilon_0\varepsilon_a E_x + i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_y - ik_x H_z = 0; \quad (15.34)$$

$$k_y E_x - k_x E_y + \omega\mu_0\mu_{\parallel} H_z = 0. \quad (15.35)$$

Поскольку в рассматриваемой среде главную роль играет тензорная магнитная проницаемость, рассмотрим далее только гиромангнитные волны.

15.2.2. Поля гиромангнитной волны

Рассмотрим гиромангнитную волну, геометрия полей и волнового вектора для которой показана на рис. 15.1 [2, стр. 49, рис. 2.4].

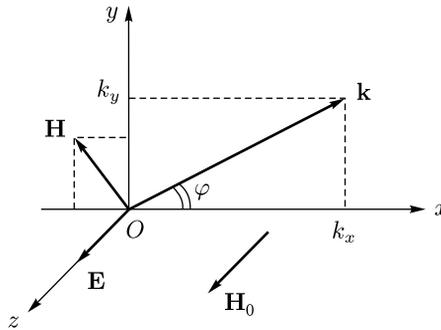


Рис. 15.1. Геометрия полей и волнового вектора гиромангнитной волны

Здесь гиротропия обеспечивается магнитным полем \mathbf{H}_0 , направленным вдоль оси Oz , волновой вектор лежит в плоскости Oxy , электрическое поле волны направлено вдоль оси Oz , а магнитное — лежит в плоскости Oxy . Система уравнений для H_x , H_y , E_z имеет вид (15.30)–(15.32). Из равенства нулю детерминанта этой системы получаем дисперсионное соотношение:

$$k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2 \mu_0 (\mu^2 - \mu_a^2) \varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel}}{\mu}. \quad (15.36)$$

Полагая заданным поле E_z , из (15.30)–(15.32) получаем систему для определения H_x и H_y , откуда находим:

$$H_x = \frac{k_y \mu + ik_x \mu_a}{\omega \mu_0 (\mu^2 - \mu_a^2)} E_z; \quad (15.37)$$

$$H_y = \frac{-k_x \mu + ik_y \mu_a}{\omega \mu_0 (\mu^2 - \mu_a^2)} E_z. \quad (15.38)$$

В полярной системе координат с углом φ между волновым вектором \mathbf{k} и осью Ox (рис. 15.1), то есть:

$$k_x = k \cos \varphi; \quad (15.39)$$

$$k_y = k \sin \varphi, \quad (15.40)$$

причем

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2, \quad (15.41)$$

При этом дисперсионное соотношение принимает вид

$$k^2 = \frac{\omega^2 \mu_0 (\mu^2 - \mu_a^2) \varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel}}{\mu}, \quad (15.42)$$

а компоненты вектора магнитного поля волны равны:

$$H_x = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel}}{\mu_0 \mu (\mu^2 - \mu_a^2)}} (\mu \sin \varphi + i \mu_a \cos \varphi) E_z; \quad (15.43)$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel}}{\mu_0 \mu (\mu^2 - \mu_a^2)}} (-\mu \cos \varphi + i \mu_a \sin \varphi) E_z. \quad (15.44)$$

15.2.3. Линейномагнитный и гиромагнитный импедансы

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести импедансы:

линейномагнитный

$$Z = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu (\mu^2 - \mu_a^2)}{\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel}}}; \quad (15.45)$$

гиромагнитный

$$Z_a = \frac{1}{\mu_a} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu (\mu^2 - \mu_a^2)}{\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel}}}. \quad (15.46)$$

Пользуясь (15.45) и (15.46), из (15.43) и (15.44) получаем поля волны в виде:

$$H_x = \left(\frac{\sin \varphi}{Z} + i \frac{\cos \varphi}{Z_a} \right) E_z; \quad (15.47)$$

$$H_y = \left(-\frac{\cos \varphi}{Z} + i \frac{\sin \varphi}{Z_a} \right) E_z. \quad (15.48)$$

Из выражения (15.42) можно видеть, что закон дисперсии для гиромагнитной волны от величины угла φ между волновым вектором \mathbf{k} и осью Ox не зависит. Такое обстоятельство обусловлено цилиндрической симметрией структуры в целом относительно оси гиротропии, совпадающей в данном случае с осью Oz (рис. 15.1). При этом требование ориентации волнового вектора в плоскости Oxy общности не нарушает, так как при любой его ориентации можно всегда так повернуть систему координат $Oxyz$ вокруг оси Oz (то есть вокруг оси гиротропии), чтобы вектор \mathbf{k} точно ложился в плоскость Oxy .

С другой стороны, поля H_x и H_y (выражения (15.43), (15.44) или (15.47), (15.48)) от угла φ зависят. Это обстоятельство просто отражает ориентацию вектора \mathbf{k} относительно осей Ox и Oy в соответствии с формулами (15.39), (15.40).

В простейшем случае, если положить $\varphi = 0$, то есть вектор \mathbf{k} ориентирован вдоль оси Ox , то получающаяся волна содержит компоненту электрического поля E_z , ориентированную вдоль оси Ox , и компоненту магнитного поля, ориентированную вдоль оси Oy , так что обе эти составляющие полей перпендикулярны вектору \mathbf{k} . Эти компоненты соответствуют поперечному характеру электромагнитной волны [424, стр. 622]. Однако здесь имеется еще одна компонента магнитного поля, ориентированная вдоль оси Ox , то есть продольная относительно волнового вектора. То есть гиромангнитная волна в тензорной среде не является чисто поперечной, как в среде со скалярными проницаемостями, а содержит еще и продольную составляющую, направление которой совпадает с направлением волнового вектора волны.

15.3. Тензор магнитной проницаемости композиционной среды

В предыдущем разделе получены поля и дисперсионное соотношение для гиромангнитной волны, распространяющейся в среде с бигиротропными параметрами. При этом главную роль играют компоненты тензора магнитной проницаемости μ и μ_a . Для того, чтобы применить полученные результаты к рассмотрению волны в композиционной среде, состоящей из анизотропных ферритовых сфер, надо найти упомянутые компоненты тензора магнитной проницаемости для такой среды.

Предварительным этапом нахождения компонент тензора магнитной проницаемости является определение тензора восприимчивости. Подробный вывод компонент тензора восприимчивости для среды из сфер, находящихся в условиях ориентационного перехода, выполнен в главе 8 предыдущей монографии настоящей серии [3]. Поэтому здесь приведем лишь краткую схему проделанных там вычислений.

15.3.1. Схема получения тензора динамической восприимчивости для композиционной среды

Рассматривается композиционная среда, состоящая из сферических анизотропных магнитных частиц, вкрапленных в немагнитную матрицу. Предполагается, что взаимодействие между частицами отсутствует.

Задача о получении тензора динамической магнитной восприимчивости решается в два этапа. Первый — нахождение тензора восприимчивости для одной частицы в случае произвольной ориентации ее оси анизотропии, второй — суммирование восприимчивостей отдельных частиц с последующим усреднением по всем возможным ориентациям осей анизотропии отдельных частиц.

Для решения задачи о восприимчивости одной частицы введены пять вспомогательных систем координат. Первая — лабораторная, связанная с направлением внешнего поля; вторая — связанная с осью анизотропии, соответствующая нулевому значению азимутального угла ОЛН; третья — связанная с равновесной намагниченностью, также соответствующая нулевому значению азимутального угла ОЛН; четвертая — связанная с осью анизотропии, соответствующая произвольному значению азимутального угла ОЛН; пятая — связанная с равновесной намагниченностью, также соответствующая произвольному значению азимутального угла ОЛН,

В качестве первого шага решения находится равновесная ориентация вектора намагниченности, определяемая взаимодействием намагниченности с полем анизотропии и постоянным полем. Для этого введены две вспомогательные системы координат: одна — связанная с полем и другая — связанная с намагниченностью. Путем минимизации плотности энергии получено уравнение для определения полярного угла равновесного положения вектора намагниченности. Решение этого уравнения, выполненное численным методом, характеризует поведение полярного угла вектора намагниченности, свойственное затянутому ориентационному переходу.

В системе, связанной с намагниченностью, записано уравнение движения вектора намагниченности (Ландау–Лифшица), выполнена его линеаризация и получены компоненты тензора восприимчивости в условиях ориентационного перехода.

С помощью соответствующих матриц перехода, компоненты которых выражены через полярные и азимутальные углы равновесного положения вектора намагниченности и заданной ориентации оси анизотропии, полученное решение преобразовано в систему, связанную с полем. Результатом выполнения проделанных преобразований является тензор динамической магнитной восприимчивости для одной частицы, записанный в лабораторной системе координат, связанной с полем.

С целью получения восприимчивости для композиционной структуры, состоящей из большого числа частиц с хаотически ориентированными в пространстве осями анизотропии, выполнено усреднение полученных компонент тензора по всем возможным значениям полярного и азимутального углов таких осей. Для этого построена вспомогательная сфера, на поверхность которой наложена сетка из параллелей и меридианов. Нахождение полной усредненной восприимчивости состоит в вычислении восприимчивости для всех полученных на сфере возможных значений угловых координат, задающих ориентации осей анизотропии, с последующим суммированием полученных значений и делением на общее количество возможных ориентаций.

Получаемый таким образом тензор магнитной восприимчивости композиционной среды, при полностью равномерном распределении ориентации осей анизотропии частиц по всему пространству, является

антисимметричным, причем структура его совпадает со структурой обычного антисимметричного тензора восприимчивости (см. напр. [17, стр. 20, форм. (1.47)]).

15.3.2. Явный вид компонент тензора магнитной восприимчивости

Итак, будем полагать, что тензор динамической магнитной восприимчивости имеет вид

$$\vec{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix}. \quad (15.49)$$

В случае равномерного распределения ориентаций осей анизотропии по азимутальному углу φ_a в пределах от нуля до 360 градусов, выражения для компонент тензора восприимчивости для отдельной частицы, будучи усредненными по углу φ_a , упрощаются и принимают вид [523, 531, 536]:

$$\chi_{xx} = \chi_{yy} = \frac{(\Omega_1 + i\Omega\alpha) \cos^2 \theta_m + (\Omega_2 + i\Omega\alpha)}{4[\Omega_1\Omega_2 - (1 + \alpha^2)\Omega^2 + i\alpha\Omega(\Omega_1 + \Omega_2)]}; \quad (15.50)$$

$$\chi_{xy} = -\chi_{yx} = \frac{i\Omega \cos \theta_m}{4\pi[\Omega_1\Omega_2 - (1 + \alpha^2)\Omega^2 + i\alpha\Omega(\Omega_1 + \Omega_2)]}; \quad (15.51)$$

$$\chi_{xz} = \chi_{yz} = \chi_{zx} = \chi_{zy} = 0; \quad (15.52)$$

$$\chi_{zz} = \frac{(\Omega_1 + i\Omega\alpha) \sin^2 \theta_m}{4\pi[\Omega_1\Omega_2 - (1 + \alpha^2)\Omega^2 + i\alpha\Omega(\Omega_1 + \Omega_2)]}, \quad (15.53)$$

где θ_a и θ_m — полярные углы ориентации оси анизотропии и вектора намагниченности, а также:

$$\Omega_1 = \frac{1}{4\pi M_0} [H_a \sin^2(\theta_a - \theta_m) + H_0 \cos \theta_m]; \quad (15.54)$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{4\pi M_0} \{H_a \cos [2(\theta_a - \theta_m)] + H_0 \cos \theta_m\}; \quad (15.55)$$

$$\Omega = \frac{1}{4\pi M_0} \frac{\omega}{\gamma}, \quad (15.56)$$

α — параметр затухания, γ — гиромагнитное отношение.

В этом случае свойства симметрии тензора восприимчивости те же, что и для однородной изотропной среды:

$$\chi_{xx} = \chi_{yy}, \quad \chi_{xy} = -\chi_{yx}, \quad \chi_{xz} = \chi_{yz} = \chi_{zx} = \chi_{zy} = 0. \quad (15.57)$$

Для нахождения тензора восприимчивости для среды в целом надо выражения (15.50)–(15.53) усреднить по всем возможным значениям угла θ_m с помощью процедуры, описанной в работах [522, 523], а также в [3, разд. 8.4].

Полная процедура усреднения с учетом коэффициента заполнения позволяет получить компоненты тензора удельной восприимчивости среды из анизотропных ферритовых сфер в виде

$$\chi_{ik} = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{r}{d}\right)^3 \frac{\sum_{n=0}^{n_{\max}} \left(\sum_{m=0}^{m_{n\max}} \chi_{ik}^{(n,m)} \right)}{2\pi \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{\sin(n\theta_0)}{\theta_0}}, \quad (15.58)$$

где: r — радиус ферритовой сферы, d — расстояние между соседними узлами решетки, n и m — угловые номера положений оси анизотропии, $n_{\max} = \pi/2\theta_0$, $m_{n\max} = 2\pi \sin(n \cdot \theta_0)/\theta_0$, θ_0 — шаг усреднения по углу.

15.3.3. Явный вид компонент тензора магнитной проницаемости

Перейдем от тензора восприимчивости к тензору проницаемости:

$$\vec{\mu} = \vec{1} + \vec{\chi}, \quad (15.59)$$

так что

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \chi_{xx} & i\chi_{xy} & 0 \\ -i\chi_{xy} & 1 + \chi_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \chi_{zz} \end{pmatrix}. \quad (15.60)$$

В результате получаем компоненты тензора проницаемости в виде:

$$\mu = 1 + \frac{4}{3}\pi \left(\frac{r}{d}\right)^3 \times \frac{\sum_{n=0}^{n_{\max}} \left(\sum_{m=0}^{m_{n\max}} \frac{(\Omega_1 + i\Omega\alpha) \cos^2 \theta_m + (\Omega_2 + i\Omega\alpha)}{4[\Omega_1\Omega_2 - (1 + \alpha^2)\Omega^2 + i\alpha\Omega(\Omega_1 + \Omega_2)]} \right)}{2\pi \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{\sin(n \cdot \theta_0)}{\theta_0}}; \quad (15.61)$$

$$\mu_a = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{r}{d}\right)^3 \times \frac{\sum_{n=0}^{n_{\max}} \left(\sum_{m=0}^{m_{n\max}} \frac{\Omega \cos \theta_m}{4\pi[\Omega_1\Omega_2 - (1 + \alpha^2)\Omega^2 + i\alpha\Omega(\Omega_1 + \Omega_2)]} \right)}{2\pi \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{\sin(n \cdot \theta_0)}{\theta_0}}; \quad (15.62)$$

$$\mu_{\parallel} = 1 + \frac{4}{3}\pi \left(\frac{r}{d}\right)^3 \times \frac{\sum_{n=0}^{n_{\max}} \left(\sum_{m=0}^{m_{n\max}} \frac{(\Omega_1 + i\Omega\alpha) \sin^2 \theta_m}{4\pi[\Omega_1\Omega_2 - (1 + \alpha^2)\Omega^2 + i\alpha\Omega(\Omega_1 + \Omega_2)]} \right)}{2\pi \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{\sin(n \cdot \theta_0)}{\theta_0}}. \quad (15.63)$$

Приведенные компоненты соответствуют структурным элементам тензора магнитной проницаемости для бигиротропной среды (15.20).

15.4. Дисперсионные свойства гиромагнитной волны в композиционной среде

Полученные компоненты тензора проницаемости позволяют найти дисперсионное соотношение для гиромагнитной волны в композиционной среде с помощью соотношения (15.42). Рассмотрим далее некоторые характерные случаи.

15.4.1. Дисперсионные кривые при различных значениях анизотропии

Некоторые примеры получающихся дисперсионных кривых при различных константах одноосной анизотропии K показаны на рис. 15.2.

Кривые 1–3 соответствуют значениям константы анизотропии: 7000 эрг · см⁻³, 12 000 эрг · см⁻³ и 20 000 эрг · см⁻³. Кривая 4 соответствует электромагнитной волне в свободном пространстве. При построении полагалось $M_0 = 1750$ Гс, $H_0 = 500$ Э, направления осей анизотропии отдельных частиц распределены в трехмерном пространстве равномерно.

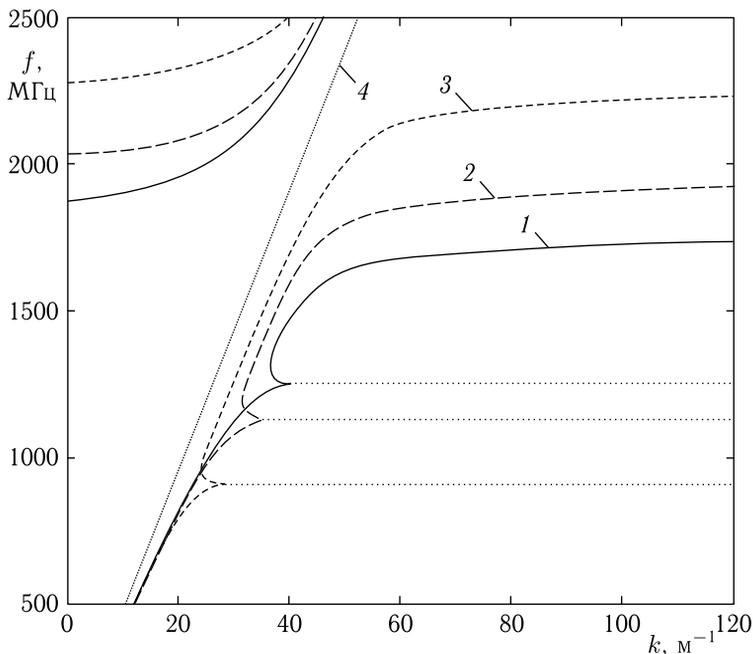


Рис. 15.2. Дисперсионные кривые для гиромагнитной волны в композиционной среде при различных значениях константы анизотропии K : 1 — 7000 эрг · см⁻³; 2 — 12 000 эрг · см⁻³; 3 — 20 000 эрг · см⁻³; 4 — свободное пространство

Из рис. 15.2 видно, что каждая кривая содержит две области, где волновое число стремится к бесконечности, например для кривой 1 — вблизи частот 1250 МГц и 1700 МГц. Эти области по частоте соответствуют экстремумам восприимчивости [522, 523, 531, 536] при параллельном и перпендикулярном направлениях поля относительно оси анизотропии:

$$f_1 = \gamma \sqrt{H(H - H_a)} = 1252 \text{ МГц}; \quad (15.64)$$

$$f_2 = \gamma(H + H_a) = 1680 \text{ МГц}, \quad (15.65)$$

где $\gamma = 2,8 \text{ МГц} \cdot \text{Э}^{-1}$,

$$H_a = 2K/M_0 = 100 \text{ Э}. \quad (15.66)$$

Можно видеть, что с увеличением константы анизотропии частотный интервал между f_1 и f_2 увеличивается.

Между частотами f_1 и f_2 дисперсионная кривая имеет С-образный вид, то есть каждому значению волнового числа соответствуют две частоты, причем основная верхняя ветвь дисперсионной кривой соответствует прямым волнам, а нижняя меньшая — обратным. В обоих случаях групповая скорость волны по мере увеличения волнового числа уменьшается.

15.5. Падение электромагнитной волны на композиционную структуру, содержащую гиромангнитные элементы в условиях ориентационного перехода

Обратимся теперь к рассмотрению падения гиромангнитной волны на структуру, состоящую из нескольких слоев, каждый из которых представляет собой композиционную среду из анизотропных ферритовых сфер, находящихся в условиях ориентационного перехода. В качестве первого этапа рассмотрим падение волны на одну границу раздела между двумя такими средами, после чего обратимся к более сложному случаю трехслойной структуры. Будем следовать [2, разд. 2.6], а также [525–527, 540].

15.5.1. Ориентация полей и волновых векторов гиромангнитных волн противоположных направлений

В дальнейшем изложении будем рассматривать распространение гиромангнитных волн в бигиротропной среде в двух противоположных направлениях. Геометрия полей и волновых векторов для таких волн показана на рис. 15.3, где рис. 15.3,а соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении оси Ox , рис. 15.3,б — в отрицательном направлении той же оси.

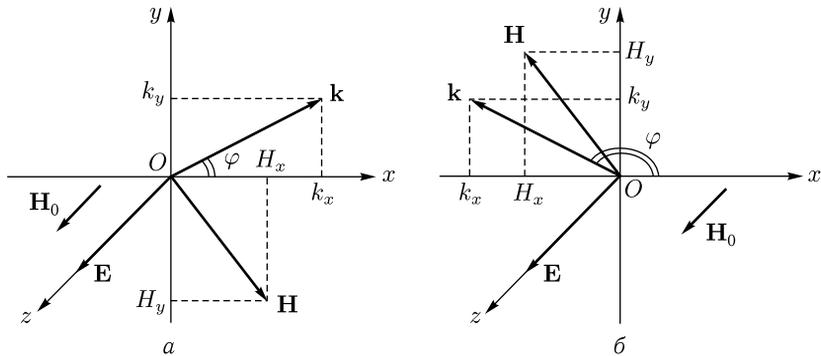


Рис. 15.3. Геометрия полей и волновых векторов гиромагнитных волн противоположных направлений

Гиротропия обеспечивается магнитным полем \mathbf{H}_0 , направленным вдоль оси Oz . Будем полагать, что тензоры магнитной и диэлектрической проницаемостей имеют вид (15.20), (15.21):

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix}; \quad (15.67)$$

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & i\varepsilon_a & 0 \\ -i\varepsilon_a & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}. \quad (15.68)$$

Согласно разделу 15.2.1, в среде с такими тензорами может распространяться гиромагнитная волна, волновой вектор которой направлен вдоль оси Ox , ее электрическое поле направлено вдоль оси Oz , а магнитное поле имеет две компоненты вдоль осей Ox и Oy . В полярной системе координат с углом φ между волновым вектором \mathbf{k} и осью Ox , то есть при:

$$k_x = k \cos \varphi; \quad (15.69)$$

$$k_y = k \sin \varphi; \quad (15.70)$$

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2, \quad (15.71)$$

в случае задания поля волны E_z , компоненты магнитного поля этой волны имеют вид (15.47), (15.48):

$$H_x = \left(\frac{\sin \varphi}{Z} + i \frac{\cos \varphi}{Z_a} \right) E_z; \quad (15.72)$$

$$H_y = \left(-\frac{\cos \varphi}{Z} + i \frac{\sin \varphi}{Z_a} \right) E_z, \quad (15.73)$$

где введены импедансы (15.45), (15.46):

линейномагнитный

$$Z = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu (\mu^2 - \mu_a^2)}{\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel}}}; \quad (15.74)$$

гиромагнитный

$$Z_a = \frac{1}{\mu_a} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu (\mu^2 - \mu_a^2)}{\varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel}}}. \quad (15.75)$$

В формулах (15.69)–(15.73) надо учитывать, что при распространении волны как в положительном, так и в отрицательном направлениях относительно оси Ox , угол φ отсчитывается от положительного направления этой оси.

Дисперсионное соотношение для такой волны имеет вид (15.42)

$$k^2 = \frac{\omega^2 \mu_0 (\mu^2 - \mu_a^2) \varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel}}{\mu}. \quad (15.76)$$

От направления распространения волны и от угла φ это соотношение не зависит. В основу дальнейшего рассмотрения будет положено именно это соотношение с учетом компонент магнитной проницаемости μ и μ_a для композиционной среды. Диэлектрическая проницаемость ε_{\parallel} , кроме особо оговоренных случаев, будет полагаться равной единице.

15.6. Отражение и прохождение электромагнитных волн при падении на одну границу между двумя композиционными средами

Обратимся к рассмотрению падения волны на одну границу, разделяющую две композиционные среды, содержащие ферритовые элементы, находящиеся в условиях ориентационного перехода.

15.6.1. Общая геометрия задачи

Рассмотрим отражение и прохождение гиромагнитной волны через плоскую границу раздела двух сред при нормальном падении. Для общности будем полагать обе среды обладающими гиромагнитными параметрами. В силу нормального характера падения в формулах (15.69)–(15.73) надо положить $\varphi = 0$.

Геометрия задачи иллюстрируется рис. 15.4 [2, стр. 53, рис. 2.5]. Показаны заполненные гиромагнитной волноведущей средой две области пространства 1 и 2, разделенные плоской границей между ними. Ось гиротропии, определяемая заданием постоянного магнитного поля, лежит в плоскости границы.

Волна падает из области 1 на границу раздела между областями 1 и 2, частично проходит в область 2 и частично отражается обратно в область 1. Волновые векторы падающей \mathbf{k}_i , проходящей \mathbf{k}_t и отра-

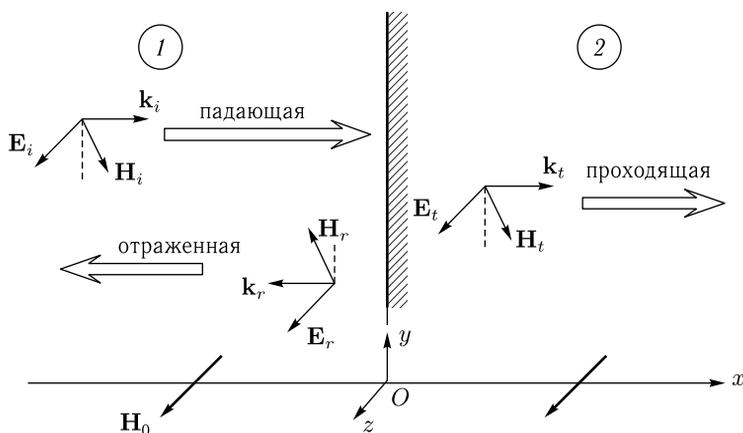


Рис. 15.4. Геометрия падения волны на плоскую границу раздела двух гиромангнитных сред

женной \mathbf{k}_r волн перпендикулярны границе раздела сред. Электрические поля всех волн параллельны плоскости раздела, магнитные имеют две составляющие — параллельную и перпендикулярную плоскости раздела. Ось координат Ox перпендикулярна границе раздела, плоскость Oxy совпадает с плоскостью раздела сред, ось Oz параллельна вектору электрического поля падающей волны \mathbf{E}_i .

15.6.2. Поля гиромангнитной волны и граничные условия

Полные координатно-временные зависимости полей имеют вид:

$$\text{для падающей волны: } e^{i(\omega t - k_1 x)}; \quad (15.77)$$

$$\text{для отраженной волны: } e^{i(\omega t + k_1 x)}; \quad (15.78)$$

$$\text{для проходящей волны: } e^{i(\omega t - k_2 x)}. \quad (15.79)$$

Обозначая амплитуды электрических полей падающей, отраженной и проходящей волн через E_{i0} , E_{r0} и E_{t0} соответственно, с учетом (15.77)–(15.79), получаем координатные составляющие полей по обе стороны от границы раздела сред.

В среде 1:

$$E_{1z} = E_{i0}e^{ik_1 x} + E_{r0}e^{-ik_1 x}; \quad (15.80)$$

$$H_{1x} = \frac{i}{Z_{a1}}E_{i0}e^{-ik_1 x} - \frac{i}{Z_{a1}}E_{r0}e^{ik_1 x}; \quad (15.81)$$

$$H_{1y} = -\frac{i}{Z_1}E_{i0}e^{-ik_1 x} + \frac{i}{Z_1}E_{r0}e^{ik_1 x}; \quad (15.82)$$

в среде 2:

$$E_{2z} = E_{t0} e^{-ik_2 x}; \quad (15.83)$$

$$H_{2x} = \frac{i}{Z_{a2}} E_{t0} e^{-ik_2 x}; \quad (15.84)$$

$$H_{2y} = -\frac{i}{Z_2} E_{t0} e^{-ik_2 x}. \quad (15.85)$$

Граничные условия — непрерывность касательных составляющих полей на границе раздела:

$$E_{1z}|_{x=0} = E_{2z}|_{x=0}, \quad (15.86)$$

$$H_{1y}|_{x=0} = H_{2y}|_{x=0}. \quad (15.87)$$

15.6.3. Амплитуды волн в обеих средах

Подставляя (15.80)–(15.85) в (15.86)–(15.87), получаем систему уравнений для амплитуд волн в обеих средах, решая которую, находим отличные от нуля координатные составляющие амплитуд полей всех волн, выраженные через E_{i0} .

Для падающей волны:

$$E_{iz} = E_{i0} \text{ — задано}; \quad (15.88)$$

$$H_{ix} = \frac{i}{Z_{a1}} E_{i0}; \quad (15.89)$$

$$H_{iy} = \frac{1}{Z_1} E_{i0}. \quad (15.90)$$

Для отраженной волны:

$$E_{rz} = \frac{-Z_1 + Z_2}{Z_1 + Z_2} E_{i0}; \quad (15.91)$$

$$H_{rx} = \frac{i}{Z_{a1}} \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} E_{i0}; \quad (15.92)$$

$$H_{ry} = \frac{1}{Z_1} \frac{-Z_1 + Z_2}{Z_1 + Z_2} E_{i0}. \quad (15.93)$$

Для проходящей волны:

$$E_{tz} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} E_{i0}; \quad (15.94)$$

$$H_{tx} = \frac{i}{Z_{a2}} \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} E_{i0}; \quad (15.95)$$

$$H_{ty} = -\frac{1}{Z_2} \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} E_{i0}. \quad (15.96)$$

15.6.4. Коэффициенты отражения и прохождения по полям

Находим коэффициенты отражения и прохождения по полям, выраженные через импедансы.

Из электрического поля:

$$R_{ez} = \frac{E_{rz}}{E_{iz}} = \frac{-Z_1 + Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad (15.97)$$

$$T_{ez} = \frac{E_{tz}}{E_{iz}} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (15.98)$$

Из x -компоненты магнитного поля:

$$R_{hx} = \frac{H_{rx}}{H_{ix}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad (15.99)$$

$$T_{hx} = \frac{H_{tx}}{H_{ix}} = \frac{Z_{a1}}{Z_{a2}} \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (15.100)$$

Из y -компоненты магнитного поля:

$$R_{hy} = \frac{H_{ry}}{H_{iy}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad (15.101)$$

$$T_{hy} = \frac{H_{ty}}{H_{iy}} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}. \quad (15.102)$$

В этих выражениях коэффициенты отражения и прохождения выражены через импедансы, величины которых определяются компонентами тензоров магнитной проницаемости вида (15.61)–(15.63) в обеих средах.

Можно видеть, что в отличие от случая изотропных сред [427, 428, 543–549], коэффициенты отражения и прохождения по электрическому и обоим компонентам магнитно поля получаются различными, что обусловлено тензорным гиромангнитным характером волноведущих сред.

15.6.5. Частотные зависимости коэффициентов отражения и прохождения

Рассмотрим теперь частотные зависимости коэффициентов отражения и прохождения, для чего обратимся к рис. 15.5 и рис. 15.6.

На этих рисунках сверху (a) показаны зависимости коэффициентов отражения (сплошные линии) и прохождения (пунктир), полученные из зависимости электрического поля (15.97), (15.98), от частоты. Рис. 15.5 соответствует прохождению волны из среды в меньшей константой анизотропии $K_1 = 7000$ эрг · см⁻³ в среду с большей константой анизотропии $K_2 = 12000$ эрг · см⁻³ (из среды менее плотной в более плотную). Рис. 15.6 соответствует прохождению волны из среды с большей константой $K_1 = 7000$ эрг · см⁻³ в среду с меньшей константой $K_2 = 3000$ эрг · см⁻³ (из среды более плотной в менее плотную). Внизу на тех же рисунках для сравнения показаны частотные зависимости действительной (сплошные линии) и мнимой (пунктир) компонент восприимчивости χ_{xx} . При этом верхние зависимости (δ) соответствуют восприимчивости первой среды, а нижние (ϵ) — второй.

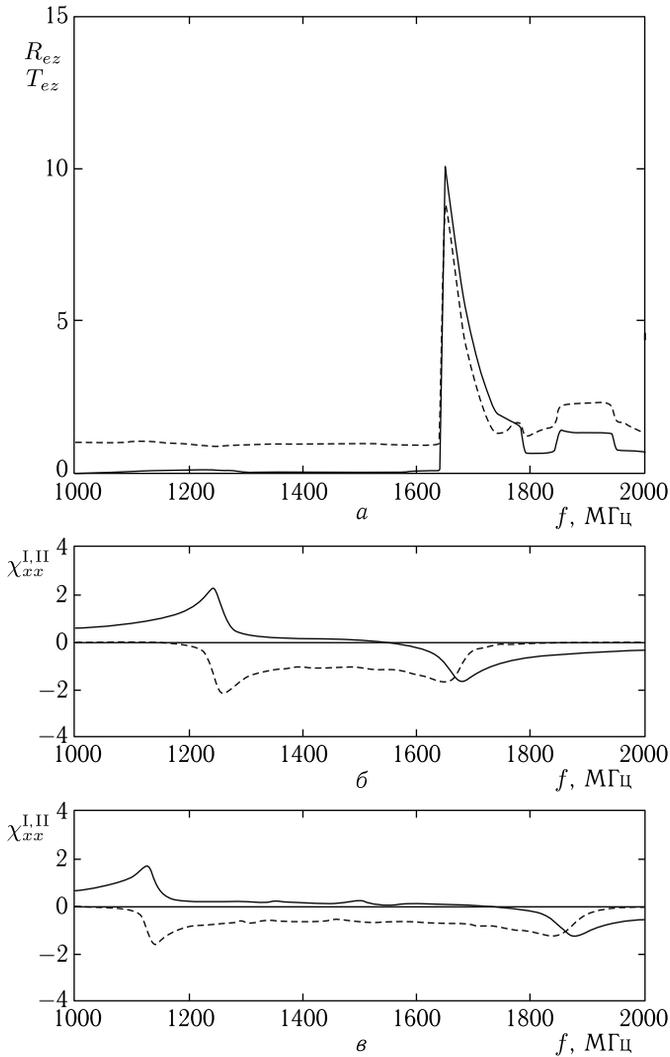


Рис. 15.5. Частотные зависимости коэффициентов отражения и прохождения (a) и компонент магнитной восприимчивости (b), (v) при прохождении волны из менее плотной среды в более плотную

Из рисунков видно, что в обоих случаях коэффициенты отражения и прохождения ведут себя сходным образом: тот и другой резко возрастают (коэффициент прохождения на порядок, отражения — более чем на два порядка) в области высокочастотных экстремумов восприимчивости, то есть для рис. 15.5 — от 1650 МГц до 1790 МГц, и имеют несколько меньшую величину до 1950 МГц, а для рис. 15.6 —

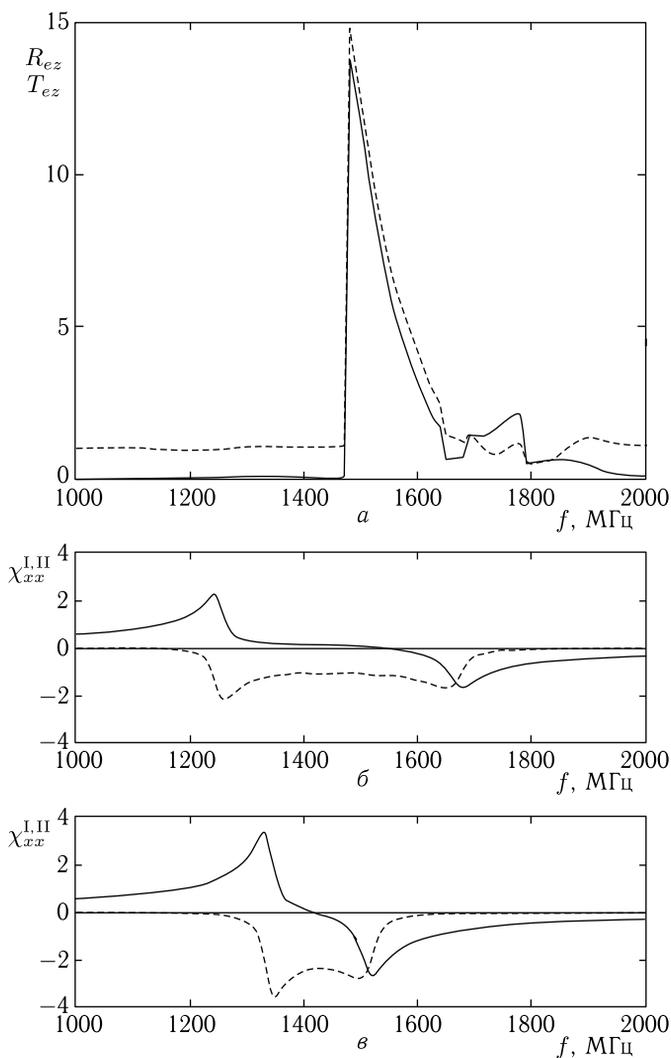


Рис. 15.6. Частотные зависимости коэффициентов отражения и прохождения (а) и компонент магнитной восприимчивости (б), (в) при прохождении волны из более плотной среды в менее плотную

от 1480 МГц до 1650 МГц, и имеют несколько меньшую величину до 1790 МГц. Из сравнения с последующими рисунками видно, что эти экстремумы приходятся точно на область, где восприимчивости первой и второй сред перестают перекрываться, то есть тогда, когда одна из сред еще обладает гиротропной активностью, а другая такой активности уже не имеет. Это означает, что отражение и прохождение

максимальны тогда, когда волна из чисто поперечной электромагнитной волны переходит в гиромагнитную и обратно, то есть продольная компонента магнитного поля волны появляется или исчезает. Отметим, что такое увеличение отражения и прохождения имеет место только вблизи высокочастотных экстремумов восприимчивости. Вблизи же низкочастотных экстремумов прохождение совершенно не меняется, хотя некоторое увеличение коэффициента отражения наблюдается, но является весьма незначительным (не более чем в полтора-два раза).

Интересно проследить, как частотные зависимости отражения и прохождения связаны с законом дисперсии гиромагнитных волн в обеих средах. Ответ на этот вопрос дает рис. 15.7, где на одном чертеже в более крупном масштабе совмещены частотные зависимости коэффициента отражения (1) и дисперсионные кривые (2), (3) при переходе волны из менее плотной среды ($K_1 = 7000 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3}$) в среду более плотную ($K_2 = 12000 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3}$). Зависимости для коэффициента прохождения ведут себя аналогичным образом и на рисунке не показаны. Кривая 4, соответствующая дисперсии волны в свободном пространстве, приведена для сравнения.

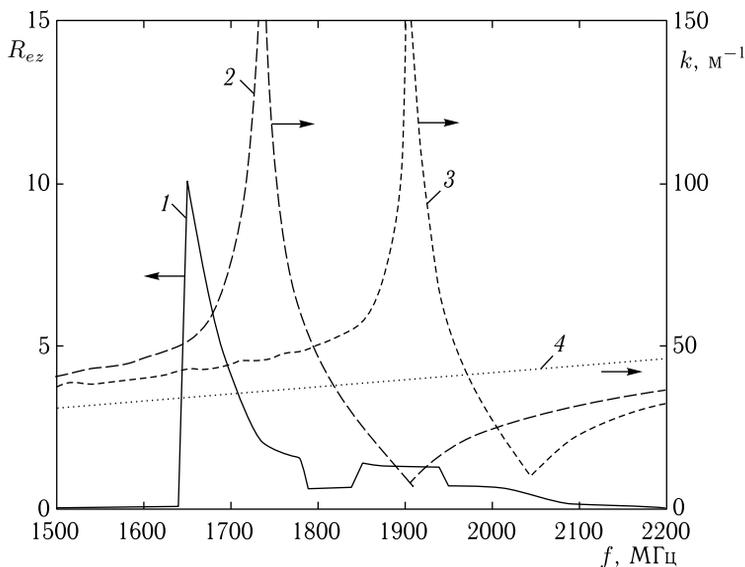


Рис. 15.7. Частотные зависимости коэффициента отражения (1) и дисперсионные кривые (2), (3) при переходе волны из менее плотной среды в более плотную. Кривая 4 — дисперсия волны в свободном пространстве

Из рисунка видно, что заметное увеличение коэффициента отражения (до двух раз и более) приходится на частотный промежуток между ветвями дисперсионного соотношения, соответствующими стремлению волнового числа к бесконечности в каждой из сред (1750 МГц

и 1900 МГц). Однако главный пик экстремума коэффициента отражения расположен несколько ниже этих частот — вблизи 1650 МГц.

Можно полагать, что такое поведение коэффициентов отражения и прохождения обусловлено фазовыми и поляризационными соотношениями между падающей, отраженной и проходящей волнами.

15.7. Отражение и прохождение электромагнитных волн при падении на трехслойную композиционную структуру

Обратимся теперь к рассмотрению более общего случая нормального падения электромагнитной волны на трехслойную структуру, состоящую из композиционных сред.

15.7.1. Нормальное падение гиромагнитной волны на структуру, состоящую из трех сред

Рассмотрим отражение и прохождение гиромагнитной волны через структуру, состоящую из трех сред, разделенных двумя плоскопараллельными границами. Для общности будем полагать все три среды обладающими произвольными гиромагнитными параметрами. Геометрия задачи иллюстрируется рис. 15.8. Показаны заполненные гиромагнитной волноведущей средой три области пространства 1, 2 и 3 (цифры в кругах), разделенные плоскопараллельными границами 1 и 2 (цифры в треугольниках). Система координат $Oxyz$ выбрана таким образом, что плоскость Oyz параллельна плоскостям границ, а ось Ox им пер-

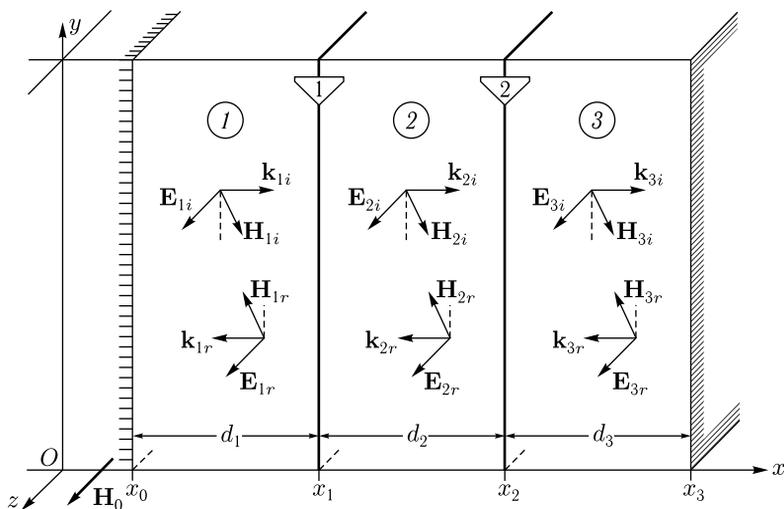


Рис. 15.8. Геометрия нормального падения волны на структуру из трех гиромагнитных сред

пендикулярна. Постоянное поле \mathbf{H}_0 направлено вдоль оси Oz , то есть ось гиротропии, определяемая заданием постоянного магнитного поля, лежит в плоскости границы. Внешние границы структуры имеют координаты x_0 и x_3 , на этих границах отражение отсутствует. Внутренние границы 1 и 2 имеют координаты x_1 и x_2 . При падении на эти границы волны частично проходят и частично отражаются. Все волны являются плоскими и распространяются вдоль оси Ox . При этом электрические поля всех волн направлены вдоль оси Oz , а магнитные имеют две составляющие вдоль осей Ox и Oy . Волновые векторы и поля волн, распространяющихся в положительном направлении оси Ox , имеют индекс « i », в отрицательном — индекс « r » с номером соответствующей среды.

На структуру со стороны внешних границ областей 1 и 3 падают две встречные волны с волновыми векторами \mathbf{k}_{1i} и \mathbf{k}_{3r} , электрические поля которых равны \mathbf{E}_{1i} и \mathbf{E}_{3r} . Магнитные поля этих волн равны соответственно \mathbf{H}_{1i} и \mathbf{H}_{3r} . В этих же областях присутствуют волны, образованные взаимодействием падающих волн с внутренними границами 1 и 2, имеющие волновые векторы \mathbf{k}_{1r} , \mathbf{k}_{3i} , электрические поля \mathbf{E}_{1r} , \mathbf{E}_{3i} и магнитные поля \mathbf{H}_{1r} и \mathbf{H}_{3i} . Внутри области 2 распространяются две волны в положительном и отрицательном направлениях оси Ox с волновыми векторами \mathbf{k}_{2i} , \mathbf{k}_{2r} , электрическими полями \mathbf{E}_{2i} , \mathbf{E}_{2r} и магнитными полями \mathbf{H}_{2i} и \mathbf{H}_{2r} . Зависимость от времени предполагается в виде $e^{i\omega t}$.

15.7.2. Поля распространяющихся волн

Будем рассматривать в каждой из сред две волны противоположных направлений. Обозначим волны, распространяющиеся вдоль положительного направления оси Ox индексом « i », вдоль отрицательного индексом « r ». Поскольку для гирромагнитной волны во всех областях компоненты магнитного поля H_x и H_y определяются компонентой электрического поля E_z , то далее для этой компоненты индекс « z » опускаем и сохраним только индексы, означающие принадлежность волны к области существования (1, 2, 3) и направлению распространения (i, r).

Суммарные волновые поля гирромагнитных волн относительно точек исхода каждой из волн, во всех трех областях имеют вид:

$$E_{1z} = E_{1i}e^{-ik_1(x-x_0)} + E_{1r}e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (15.103)$$

$$E_{2z} = E_{2i}e^{-ik_2(x-x_1)} + E_{2r}e^{ik_2(x-x_2)}; \quad (15.104)$$

$$E_{3z} = E_{3i}e^{-ik_3(x-x_2)} + E_{3r}e^{ik_3(x-x_3)}; \quad (15.105)$$

$$H_{1x} = \frac{i}{Z_{a1}}E_{1i}e^{-ik_1(x-x_0)} - \frac{i}{Z_{a1}}E_{1r}e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (15.106)$$

$$H_{2x} = \frac{i}{Z_{a2}}E_{2i}e^{-ik_2(x-x_1)} - \frac{i}{Z_{a2}}E_{2r}e^{ik_2(x-x_2)}; \quad (15.107)$$

$$H_3 = \frac{i}{Z_{a3}}E_{3i}e^{-ik_3(x-x_2)} - \frac{i}{Z_{a3}}E_{3r}e^{ik_3(x-x_3)}; \quad (15.108)$$

$$H_{1y} = -\frac{i}{Z_1} E_{1i} e^{-ik_1(x-x_0)} + \frac{i}{Z_1} E_{1r} e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (15.109)$$

$$H_{2y} = -\frac{i}{Z_2} E_{2i} e^{-ik_2(x-x_1)} + \frac{i}{Z_2} E_{2r} e^{ik_2(x-x_2)}; \quad (15.110)$$

$$H_{3y} = -\frac{i}{Z_3} E_{3i} e^{-ik_3(x-x_2)} + \frac{i}{Z_3} E_{3r} e^{ik_3(x-x_3)}. \quad (15.111)$$

Для исключения дробей в выражениях (15.106)–(15.111) удобно ввести адмиттансы линейномагнитные:

$$A_1 = \frac{1}{Z_1}; \quad A_2 = \frac{1}{Z_2}; \quad A_3 = \frac{1}{Z_3}, \quad (15.112)$$

а также гиромагнитные:

$$A_{a1} = \frac{1}{Z_{a1}}; \quad A_{a2} = \frac{1}{Z_{a2}}; \quad A_{a3} = \frac{1}{Z_{a3}}. \quad (15.113)$$

При этом поля принимают вид:

$$E_{1z} = E_{1i} e^{-ik_1(x-x_0)} + E_{1r} e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (15.114)$$

$$E_{2z} = E_{2i} e^{-ik_2(x-x_1)} + E_{2r} e^{ik_2(x-x_2)}; \quad (15.115)$$

$$E_{3z} = E_{3i} e^{-ik_3(x-x_2)} + E_{1r} e^{ik_2(x-x_3)}; \quad (15.116)$$

$$H_{1x} = iA_{a1} E_{1i} e^{-ik_1(x-x_0)} - iA_{a1} E_{1r} e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (15.117)$$

$$H_{2x} = iA_{a2} E_{2i} e^{-ik_2(x-x_1)} - iA_{a2} E_{2r} e^{ik_2(x-x_2)}; \quad (15.118)$$

$$H_3 = iA_{a3} E_{3i} e^{-ik_3(x-x_2)} - iA_{a3} E_{3r} e^{ik_3(x-x_3)}; \quad (15.119)$$

$$H_{1y} = -iA_1 E_{1i} e^{-ik_1(x-x_0)} + iA_1 E_{1r} e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (15.120)$$

$$H_{2y} = -iA_2 E_{2i} e^{-ik_2(x-x_1)} + iA_2 E_{2r} e^{ik_2(x-x_2)}; \quad (15.121)$$

$$H_{3y} = -iA_3 E_{3i} e^{-ik_3(x-x_2)} + iA_3 E_{3r} e^{ik_3(x-x_3)}. \quad (15.122)$$

Граничные условия — непрерывность касательных составляющих полей на границе раздела:

$$E_{1z}|_{x=x_1} = E_{2z}|_{x=x_1}; \quad (15.123)$$

$$H_{1y}|_{x=x_1} = H_{2y}|_{x=x_1}; \quad (15.124)$$

$$E_{2z}|_{x=x_2} = E_{3z}|_{x=x_2}; \quad (15.125)$$

$$H_{2y}|_{x=x_2} = H_{3y}|_{x=x_2}. \quad (15.126)$$

Итак, можно видеть, что совокупность магнитных полей гиромагнитных волн во всех трех областях однозначно задается электрическими полями тех же волн. Поскольку рассматривается падение встречных волн, заданных на внешних границах структуры, то есть при x_0 и x_3 , то это означает, что заданы поля: E_{1i} , E_{3r} , и требуется определить

поля: E_{1r} , E_{2i} , E_{2r} , E_{3i} . Для упрощения записи далее введем вспомогательные обозначения:

$$e_1 = e^{-ik_1(x_1-x_0)}; \quad (15.127)$$

$$e_2 = e^{-ik_2(x_2-x_1)}; \quad (15.128)$$

$$e_3 = e^{-ik_3(x_3-x_2)}. \quad (15.129)$$

Подставляя поля (15.114)–(15.122) в граничные условия (15.123)–(15.126) и используя введенные обозначения, получаем систему уравнений:

$$E_{1r} - E_{2i} - E_{2r}e_2 = -E_{1i}e_1; \quad (15.130)$$

$$E_{2i}e_2 + E_{2r} - E_{3i} = E_{3r}e_3; \quad (15.131)$$

$$A_1E_{1r} + A_2E_{2i} - A_2E_{2r}e_2 = A_1E_{1i}e_1; \quad (15.132)$$

$$A_2E_{2i}e_2 - A_2E_{2r} - A_3E_{3i} = -A_3E_{3r}e_3. \quad (15.133)$$

Решим эту систему по правилу Крамера [414, стр. 45]. Расширенная матрица [520, 521] имеет вид:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & -1 & -e_2 & 0 & -e_1E_{1i} \\ \hline 0 & e_2 & 1 & -1 & e_3E_{3r} \\ \hline A_1 & A_2 & -A_2e_2 & 0 & A_1e_1E_{1i} \\ \hline 0 & A_2e_2 & -A_2 & -A_3 & -A_3e_3E_{3r} \end{array} \right). \quad (15.134)$$

Находим детерминанты:

$$D_0 = (A_1 + A_2)(A_2 + A_3) + (A_1 - A_2)(A_2 - A_3)e_2^2; \quad (15.135)$$

$$D_{1r} = [(A_1 - A_2)(A_2 + A_3) + (A_1 + A_2)(A_2 - A_3)e_2^2]e_1E_{1i} + 4A_2A_3e_2e_3 \cdot E_{3r}; \quad (15.136)$$

$$D_{2i} = 2A_1(A_2 + A_3)e_1E_{1i} - 2(A_1 - A_2)A_3e_2e_3E_{3r}; \quad (15.137)$$

$$D_{2r} = 2A_1(A_2 - A_3)e_1e_2E_{1i} + 2(A_1 + A_2)A_3e_3E_{3r}; \quad (15.138)$$

$$D_{3i} = 4A_1A_2e_1e_2E_{1i} - [(A_1 + A_2)(A_2 - A_3) + (A_1 - A_2)(A_2 + A_3)e_2^2]e_3E_{3r}. \quad (15.139)$$

Запишем те же детерминанты через импедансы:

$$D_0 = (Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) + (Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)e_2^2; \quad (15.140)$$

$$D_{1r} = -[(Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3) + (Z_1 + Z_2)(Z_2 - Z_3)e_2^2]e_1E_{1i} + 4Z_1Z_2e_2e_3E_{3r}; \quad (15.141)$$

$$D_{2i} = 2Z_2(Z_2 + Z_3)e_1E_{1i} + 2(Z_1 - Z_2)Z_2e_2e_3E_{3r}; \quad (15.142)$$

$$D_{2r} = -2Z_2(Z_2 - Z_3)e_1e_2E_{1i} + 2(Z_1 + Z_2)Z_2e_3E_{3r}; \quad (15.143)$$

$$D_{3i} = 4Z_2Z_3e_1e_2E_{1i} + [(Z_1 + Z_2)(Z_2 - Z_3) + (Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3)e_2^2]e_3E_{3r}. \quad (15.144)$$

При этом компоненты полей имеют вид:

$$E_{1r} = \frac{D_{1r}}{D_0}; \quad (15.145)$$

$$E_{2i} = \frac{D_{2i}}{D_0}; \quad (15.146)$$

$$E_{2r} = \frac{D_{2r}}{D_0}; \quad (15.147)$$

$$E_{3i} = \frac{D_{3i}}{D_0}. \quad (15.148)$$

15.7.3. Коэффициенты отражения и прохождения по полям

Положим для простоты, что на структуру падает единственная волна с амплитудой E_{1i} и найдем коэффициенты отражения и прохождения по электрическому полю. Согласно классическому определению [570], коэффициент отражения по электрическому полю для структуры в целом R_{ez} равен модулю отношения амплитуды электрического поля отраженной волны к амплитуде электрического поля падающей:

$$R_{ez} = \left| \frac{E_{1r}}{E_{1i}} \right| = \left| \frac{(Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3) + (Z_1 + Z_2)(Z_2 - Z_3)e_2^2}{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) + (Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)e_2^2} \right|. \quad (15.149)$$

Аналогично коэффициент прохождения по электрическому полю для структуры в целом T_{ez} равен модулю отношения амплитуды электрического поля проходящей волны к амплитуде поля падающей:

$$T_{ez} = \left| \frac{E_{3i}}{E_{1i}} \right| = \left| \frac{4Z_2Z_3}{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) + (Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_3)e_2^2} \right|. \quad (15.150)$$

В этих выражениях коэффициенты отражения и прохождения выражены через импедансы, величины которых определяются компонентами тензоров магнитной проницаемости вида (15.61)–(15.63) в трех средах.

15.7.4. Частотные зависимости коэффициентов отражения и прохождения

На рис. 15.9 сверху (а) показаны зависимости коэффициентов отражения (сплошные линии) и прохождения (пунктир), полученные по формулам (15.149)–(15.150), от частоты. Внизу на тех же рисунках для сравнения показаны частотные зависимости действительной (сплошные линии) и мнимой (пунктир) компонент восприимчивости χ_{xx} . При этом верхние зависимости (б) соответствуют восприимчивости первой среды, средние (в) — восприимчивости второй среды, нижние (г) — третьей. Все параметры — те же, что использовались при построении дисперсионных кривых на рис. 15.8.

Из рис. 15.9, а видно, что коэффициенты отражения и прохождения ведут себя сходным образом: тот и другой резко возрастают (коэффициент прохождения на порядок, отражения — более чем на два порядка) в области высокочастотного экстремума восприимчивости

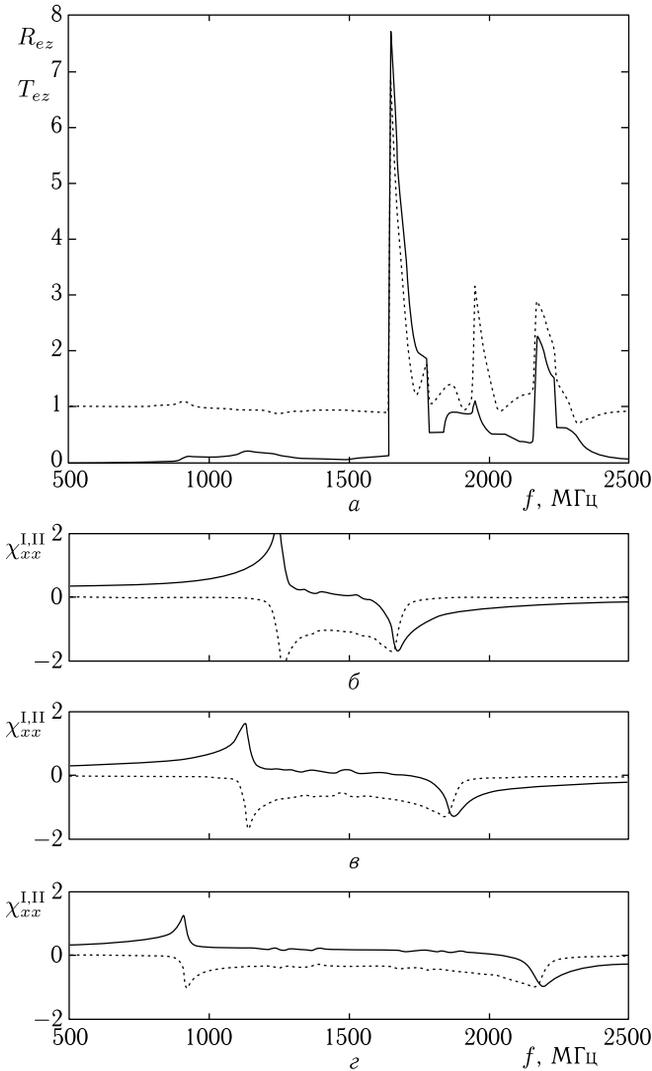


Рис. 15.9. Зависимости коэффициентов отражения и прохождения (а) и компонент магнитной восприимчивости (б), (в), (г) от частоты падающей волны

первой среды, то есть от 1650 МГц до 1780 МГц, имеют несколько меньшие подъемы в областях высокочастотных экстремумов восприимчивости двух других сред: от 1850 МГц до 2000 МГц и от 2170 МГц до 2240 МГц. Из сравнения с нижележащими рисунками (б, в, г) видно, что эти экстремумы приходятся точно на области, где восприимчивости двух соседних сред перестают перекрываться, то есть

тогда, когда одна из сред еще обладает гиротропной активностью, а другая такой активности уже не имеет. Это означает, что отражение и прохождение максимальны тогда, когда волна из чисто поперечной электромагнитной волны переходит в гиромангнитную и обратно, то есть продольная компонента магнитного поля волны появляется или исчезает. Сопоставление частотных зависимостей коэффициентов с приведенными на рис. 15.8 дисперсионными кривыми показывает, что максимумы коэффициентов отражения и прохождения приходятся на частотные промежутки между ветвями дисперсионных кривых, соответствующие стремлению волнового числа к бесконечности в каждой из сред. Такое поведение можно объяснить тем, что в этом случае на границе происходит резкое изменение величины волнового числа, что и обуславливает резкое изменение амплитуды распространяющейся волны. Наблюдаемое увеличение коэффициентов отражения и прохождения имеет место только вблизи высокочастотных экстремумов восприимчивости. Вблизи же низкочастотных экстремумов прохождение совершенно не меняется, хотя некоторое увеличение коэффициента отражения и наблюдается, но является весьма незначительным (не более чем в полтора–два раза).

Описанное поведение распространения волн через три среды относится к случаю, когда плотности сред по направлению падения исходной волны последовательно возрастают. При обратном порядке чередования плотностей сред амплитуды волн в отдельных слоях принимают другие значения, однако частотные зависимости коэффициентов отражения и прохождения для структуры в целом, в основном, сохраняются (при приведенных параметрах с точностью не хуже 10%). Это означает, что, несмотря на невзаимный характер распределения полей внутри структуры, свойства структуры в целом в первом приближении являются взаимными.

Отметим, что многие из перечисленных особенностей поведения коэффициентов отражения и прохождения частично отмечались для случая двух сред (раздел 15.6), однако здесь картина существенно усложняется наличием третьей среды. Такое усложнение становится особенно заметным в случае, когда высокочастотные экстремумы восприимчивости всех трех сред частично перекрываются. Тогда вместо раздельного существования на частотных зависимостях трех максимумов наблюдается один широкий подъем, испещренный множеством провалов большей или меньшей величины, что отражает сложную интерференционную картину взаимодействия волн того и другого направлений внутри структуры.

Выводы по главе 15

Данная глава посвящена исследованию распространения электромагнитной волны через многослойную структуру, векторы намагнитченности в слоях которой находятся в условиях ориентационного перехода.

В качестве примера выбрана композиционная структура, состоящая из анизотропных произвольно ориентированных ферритовых сфер. Для случаев двух и трехслойной структур получены амплитудно-частотные характеристики, найдены коэффициенты отражения и прохождения.

Основные результаты, освещаемые в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрен общий случай электромагнитной волны в среде с тензорными параметрами. Записаны общие уравнения электродинамики (Максвелла) для тензорной среды. Показано, что последовательное получение волнового уравнения приводит к необходимости учета составляющей поля, обусловленной динамической восприимчивостью. Приведен общий вид волнового уравнения для магнитного поля. Отмечено, что запись такого уравнения в декартовых координатах приводит к системе уравнений, содержащих смешанные производные, возможность аналитического решения которой не очевидна. В качестве среды, позволяющей освободиться от смешанных производных, указана бигиротропная тензорная среда.

2. Рассмотрены общие свойства электромагнитных волн, распространяющихся в бигиротропной среде. В декартовой системе координат записаны тензоры магнитной и диэлектрической проницаемостей для среды, обладающей бигиротропными свойствами. В предположении волнового характера (в переменных Даламбера) решения общих волновых уравнений для тензорной среды, получена система шести уравнений для декартовых компонент электрического и магнитного полей распространяющейся волны.

3. Показано, что для случая ориентации волнового вектора распространяющейся волны в направлении, перпендикулярном оси гиротропии, полная система из шести уравнений распадается на две независимые системы, каждая из которых содержит три связанных уравнения. При этом первая система содержит компоненту электрического поля вдоль оси гиротропии и две компоненты магнитного поля, одна из которых перпендикулярна волновому вектору распространяющейся волны, а вторая параллельна тому же вектору. Волна, соответствующая этой системе названа гиромангнитной. Вторая система содержит компоненту магнитного поля вдоль оси гиротропии и две компоненты электрического поля, одна из которых перпендикулярна волновому вектору распространяющейся волны, а вторая параллельна тому же вектору. Волна, соответствующая этой системе названа гироэлектрической.

4. Найдены магнитные поля гиромангнитной волны, выраженные через ее же электрическое поле, параллельное оси гиротропии. Получено дисперсионное соотношение, связывающее компоненты волнового вектора гиромангнитной волны, перпендикулярные оси гиротропии, с частотой волны, продольной и поперечной компонентами тензора магнитной проницаемости в сочетании с продольной компонентой тензора диэлектрической проницаемости среды. Введены понятия линейномаг-

нитного и гиромагнитного импедансов, с помощью которых записаны компоненты магнитного поля волны в компактном виде.

5. Рассмотрен тензор магнитной проницаемости композиционной среды, состоящей из анизотропных ферритовых сфер с произвольной ориентацией осей анизотропии. Отмечено, что при намагничивании такой среды внутри ферритовых сфер происходит ориентационный переход вектора намагниченности. Приведена общая схема получения тензора динамической восприимчивости для композиционной среды. Отмечено, что задача о получении тензора динамической магнитной восприимчивости решается в два этапа. Первый — нахождение тензора восприимчивости для одной частицы в случае произвольной ориентации ее оси анизотропии, второй — суммирование восприимчивостей отдельных частиц с последующим усреднением по всем возможным ориентациям осей анизотропии отдельных частиц. Отмечено, что получаемый таким образом тензор магнитной восприимчивости композиционной среды, при полностью равномерном распределении ориентации осей анизотропии частиц по всему пространству, является антисимметричным, причем структура его совпадает со структурой обычного антисимметричного тензора восприимчивости.

6. Приведен явный вид компонент тензора динамической магнитной восприимчивости. Отмечено, что в случае равномерного распределения ориентаций осей анизотропии по азимутальному углу в пределах от нуля до 360 градусов, выражения для компонент тензора восприимчивости для отдельной частицы, будучи усредненными по углу ориентации осей анизотропии, существенно упрощаются и содержат только три отличных от нуля компоненты, имеющие резонансный характер. Выполнена полная процедура усреднения по всем угловым координатам трехмерного пространства с учетом коэффициента заполнения, в результате чего получен полный тензор динамической магнитной восприимчивости.

7. Выполнен переход от тензора магнитной восприимчивости к тензору магнитной проницаемости. Показано, что полученные компоненты тензора проницаемости полностью соответствуют структурным элементам тензора магнитной проницаемости для бигиротропной среды.

8. Рассмотрены дисперсионные свойства гиромагнитной волны в композиционной среде при различных значениях константы анизотропии. Показано, что каждая дисперсионная кривая содержит две частоты, вблизи которых волновое число стремится к бесконечности. Эти частоты соответствуют экстремумам восприимчивости при параллельном и перпендикулярном направлениях поля относительно оси анизотропии, причем с увеличением константы анизотропии частотный интервал между ними увеличивается. В промежутке между упомянутыми частотами дисперсионная кривая имеет S-образный вид, то есть каждому значению волнового числа соответствуют две частоты, причем основная верхняя ветвь дисперсионной кривой соответствует прямым волнам, а нижняя меньшая — обратным. В обоих случаях

групповая скорость волны по мере увеличения волнового числа уменьшается.

9. Рассмотрены отражение и прохождение гиромагнитной волны через плоскую границу раздела двух бигиротропных композиционных сред при нормальном падении. Найдены поля распространяющихся волн и коэффициенты отражения и прохождения, выраженные через импедансы обеих сред. Рассмотрены частотные зависимости коэффициентов отражения и прохождения при распространении волны из менее плотной среды в более плотную и обратно. Показано, что в обоих случаях коэффициенты отражения и прохождения резко возрастают (до двух порядков) в области высокочастотных экстремумов восприимчивости, т.е. в интервале, где одна из сред обладает гиротропной активностью, а другая такой активности не имеет. Экстремальный характер частотного поведения коэффициентов отражения и прохождения сопоставлен с законом дисперсии гиромагнитных волн в обеих средах. Показано, что отражение максимально в интервале между высокочастотными границами областей гиромагнитных волн в обеих средах, а главный экстремум располагается несколько ниже этого интервала. Высказано предположение, что наблюдаемые явления обусловлены фазовыми и поляризационными соотношениями между падающей, отраженной и проходящей волнами.

10. Рассмотрены отражение и прохождение двух встречных гиромагнитных волн при нормальном падении на структуру, состоящую из трех гиромагнитных композиционных сред, разделенных двумя границами. Найдены поля распространяющихся волн и коэффициенты отражения и прохождения, выраженные через импедансы и адмитансы всех трех сред. Рассмотрены частотные зависимости коэффициентов отражения и прохождения. Показано, что коэффициенты отражения и прохождения резко возрастают (до двух порядков) в области высокочастотных экстремумов восприимчивости, в интервале, где одна из двух соседствующих сред обладает гиротропной активностью, а другая такой активности не имеет. Экстремальный характер частотного поведения коэффициентов отражения и прохождения сопоставлен с законом дисперсии гиромагнитных волн во всех трех средах. Показано, что отражение максимально в тех частотных областях, где волновое число какой-либо из сред стремится к бесконечности. Отмечена аналогия наблюдаемых явлений со случаем структуры, состоящей из двух сред, разделенных одной границей и выявлен более сложный характер частотных зависимостей, обусловленный интерференционным взаимодействием волн в отдельных слоях структуры. Отмечена невзаимность распространения волн в отдельных слоях структуры, сочетаемая с высокой степенью взаимности относительно структуры в целом.

Литература

1. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Магнитостатические волны в неоднородных полях — М.: ФИЗМАТЛИТ. 2016.
2. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Магнитостатические и электромагнитные волны в сложных структурах. — М.: ФИЗМАТЛИТ. 2017.
3. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Ферромагнитный резонанс в условиях ориентационного перехода. — М.: ФИЗМАТЛИТ. 2018.
4. БСЭ. Т. 5. М.: Советская энциклопедия. 1971. С. 314. Статья «Волны».
5. Физическая энциклопедия. Т. 1. М.: Советская энциклопедия. 1988. С. 315. Статья «Волны».
6. *Горелик Г. С.*, Колебания и волны. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит. 1959.
7. *Крауфорд Ф.* Волны (Берклевский курс физики, т. 3). — М.: Наука. 1984.
8. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука. 1957, 1973.
9. *Стретт Дж. В.* (лорд Рэлей). Теория звука. Т. 1. — М.: Гос. изд. техн.-теор. лит. 1955.
10. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука. 1972.
11. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир. 1964.
12. *Вонсовский С. В., Шур Я. С.* Ферромагнетизм. — М.: ОГИЗ Гостехиздат. 1948.
13. *Аркадьев В. К.* Электромагнитные процессы в металлах. — М.: ОНТИ. 1936.
14. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies // Phys. Zs. der Sowjetunion. 1935. V. 8. № 2. P. 153. Перевод: *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел // Ландау Л. Д. Собрание трудов. Т. 1. — М.: Наука. 1969. С. 128.
15. *Гуревич А. Г.* Ферриты на сверхвысоких частотах — М.: Гос. Изд. физ.-мат. лит. 1960.
16. *Гуревич А. Г.* Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках — М.: Наука. 1973.
17. *Гуревич А. Г., Мелков Г. А.* Магнитные колебания и волны — М.: ФИЗМАТЛИТ. 1994.
18. *Gilbert T. L.* A phenomenological theory of damping in ferromagnetic materials. // IEEE Trans. on Magn. 2004. V. 40. № 6. P. 3443.
19. *Власов В. С., Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Анализ линейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов. // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2013. № 11. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/nov13/3/text.pdf>.

20. Власов В. С., Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Анализ нелинейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов в квадратичном приближении. // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2014. № 1. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/11/text.pdf>.
21. Власов В. С., Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа автомодуляционного режима возбуждения гиперзвука магнитострикционным преобразователем // Сборник трудов XXII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». М.: НИУ МЭИ. 2014. С. 161.
22. Власов В. С., Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Динамика вынужденных колебаний намагниченности в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами в условиях ориентационного перехода // Сборник трудов XXII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — М.: НИУ МЭИ. 2014. С. 176.
23. Власов В. С., Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 1. Основные уравнения // РЭ. 2015. Т. 60. № 1. С. 79.
24. Власов В. С., Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 2. Некоторые нелинейные явления // РЭ. 2015. Т. 60. № 3. С. 297.
25. Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Анализ автомодуляционных колебаний в магнитоупругой среде на основе модели связанных магнитного и упругого осцилляторов // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. № 5. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/may15/4/text.pdf>.
26. Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Анализ автомодуляционных явлений в системе связанных магнитного и упругого осцилляторов на основе модели потенциала // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. № 6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun15/9/text.pdf>.
27. Власов В. С., Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Анализ колебаний в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами на основе модели квадратичного приближения. // Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы». — М.: ИНФРА-М. 2015. С. 202.
28. Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 1. Динамический потенциал // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2017. № 7. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jul17/6/text.pdf>.
29. Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 2. Линейная связь // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2017. № 8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/5/text.pdf>.
30. Иванов А. П., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 3. Нелинейная связь // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2017. № 8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/6/text.pdf>.

31. *Smit J., Beljers H.G.* Ferromagnetic resonance absorption in $\text{BaFe}_{12}\text{O}_{19}$ a highly anisotropic crystal // Philips Res. Rep. 1955. V. 10. № 2. P. 113.
32. *Suhl H.* Ferromagnetic resonance in nickel ferrite between one and two kilomegacycles // Phys. Rev. 1955. V. 97. № 2. P. 555.
33. *Аваева И.Г., Лисовский Ф.В., Осика В.А., Щеглов В.И.* Исследование эпитаксиальных пленок смешанных ферритов-гранатов методом ферромагнитного резонанса // ФТТ. 1975. Т. 17. № 10. С. 3045.
34. *Аваева И.Г., Лисовский Ф.В., Осика В.А., Щеглов В.И.* Ферромагнитный резонанс в эпитаксиальных пленках смешанных ферритов-гранатов // РЭ. 1976. Т. 21. № 9. С. 1894.
35. *Аваева И.Г., Лисовский Ф.В., Осика В.А., Щеглов В.И.* Ферромагнитный резонанс в эпитаксиальных пленках смешанных ферритов-гранатов // ФТТ. 1976. Т. 18. № 12. С. 3694.
36. *Щеглов В.И.* Исследование динамических явлений и фазовых переходов в магнитных диэлектриках с пространственно-временными неоднородностями. Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. Москва. 1980.
37. *Duřay B., Saez S., Cordier C., Dolabdjian C., Dubic C., Hristoforou E., Ubizskii S.* 2D hybrid yttrium iron garnet magnetic sensor noise characterization. // IEEE Sensors Journal. 2011. V. 11. № 12. P. 3211.
38. *Ветошко П.М.* Магнитометр // Патент РФ № 21000819. Приоритет от 30.09.1996.
39. *Никитин П.И., Ветошко П.М.* Измеритель магнитной восприимчивости // Патент РФ № 2177611. Приоритет от 09.03.2000.
40. *Vetoshko P.M., Volkovoy V.B., Zalogin V.N., Toporov A.Yu.* Measuring of the low alternating magnetic fields by means of Bi-contained rare earth ferritegarnet films with planar anisotropy // J. Appl. Phys. 1991. V. 70. № 10. P. 6298.
41. *Perlov A.Ya., Vetoshko P.M., Volkovoy V.B.* Three component magnetic field measurements using cubic anisotropy in (111) YIG films // J. Appl. Phys. 1994. V. 75. № 10. P. 5922.
42. *Валейко М.В., Ветошко П.М., Перлов А.Я., Топоров А.Ю.* Влияние констант анизотропии на магнитную восприимчивость материалов с кубической кристаллической структурой // ФТТ. 1994. Т. 36. № 10. С. 3067.
43. *Nikitin P.I., Kasatkin S.I., Muravjov A.M., Vetoshko P.M., Valeiko M.V., Konov V.I., Meydan T.* Magnetic field sensors based on thin film multilayer structures // Sensors and Actuators A. 2003. V. 106. № 1–3. P. 26.
44. *Vetoshko P.M., Valeiko M.V., Nikitin P.I.* Epitaxial iron garnet film as an active medium of an even harmonic magnetic field transducer // Sensors and Actuators A. 2003. V. 106. № 1–3. P. 270.
45. *Nikitin P.I., Vetoshko P.M., Ksenevich T.I.* New type of biosensors based on magnetic nanoparticle detect ion // J. Magn. Magn. Mater. 2007. V. 311. P. 445.
46. *Skidanov V., Vetoshko P.* Ultrasensitive core for magneto-optical fluxgate magnetometer with high space resolution // Procedia Engineering. 2010. V. 5. P. 989.

47. *Vetoshko P., Skidanov V., Stempkovskiy A.* Magnetization distribution near edge of YIG film core in fluxgate magnetometer // *Sensor Letters*. 2013. V. 11. P. 59.
48. *Ветошко П. М., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Формирование магнитного затухания за счет упругой диссипации в схеме ротационного магнетометра // *Электронный «Журнал радиоэлектроники»*. 2014. № 11. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/nov14/1/text.pdf>.
49. *Ветошко П. М., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Роль различных механизмов затухания в формировании установившегося режима прецессии намагниченности в магнитоупругой среде // *Сборник трудов XXII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. — М.: НИУ МЭИ. 2014. С. 237.
50. *Ветошко П. М., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Роль упругой диссипации в формировании затухания прецессии намагниченности в магнитоупругой среде // *ПЖТФ*. 2015. Т. 41. № 21. С. 1.
51. *Ветошко П. М., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Влияние подложки на магнитоупругие колебания в структуре «магнитная пленка – немагнитная подложка» // *Электронный «Журнал радиоэлектроники»*. 2015. № 8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug15/5/text.pdf>.
52. *Ветошко П. М., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Влияние диссипации прецессии намагниченности на установление колебаний в схеме ротационного магнетометра // *Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. — М.: ИНФРА-М. 2015. С. 173.
53. *Ветошко П. М., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Влияние подложки на возбуждение магнитоупругих колебаний в тонкой пленке феррита // *Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. — М.: ИНФРА-М. 2015. С. 188.
54. *Ветошко П. М., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Роль упругой диссипации в формировании резонансных свойств прецессии намагниченности в магнитоупругой среде // *РЭ*. 2017. Т. 62. № 4. С. 364.
55. *Vetoshko P. M., Shavrov V. G., Shcheglov V. I.* The participation of elastic dissipation in creation of magnetic dissipation in magnetoelastic medium // *Book of Abstracts of Moscow International Symposium on Magnetism (MISM)*. Moscow: «Изд-во Физ.фак. МГУ». 2017. P. 1077.
56. *Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Нелинейное возбуждение гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе // *РЭ*. 2009. Т. 54. № 7. С. 863.
57. *Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Возбуждение связанных магнитоупругих колебаний при нелинейном ферромагнитном резонансе // *Сборник трудов XVI Международной конференции «Радиолокация и радиосвязь»*. Москва–Фирсановка: Издание МЭИ. 2008. С. 197.
58. *Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Нелинейная динамика установления намагниченности в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами в условиях ориентационного перехода // *РЭ*. 2010. Т. 55. № 6. С. 689.
59. *Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Динамика установления намагниченности в нормально намагниченной ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами в условиях ориентационного пе-

- рехода // Сборник трудов XXI Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ)». — Москва: Изд. МГУ. С. 942.
60. *Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Динамика ориентационного перехода намагниченности в нормально намагниченной пластине из магнитоупругого диэлектрика // Сборник трудов IX Международного семинара «Магнитные фазовые переходы». Махачкала: Издание Института физики Дагестанского научного центра РАН. 2009. С. 71.
61. *Власов В. С.* Исследование релаксационной и нелинейной динамики магнитных и магнитоупругих колебаний пленок и частиц // Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. — Москва: МГУ. 2007.
62. *Власов В. С.* Исследование релаксационной и нелинейной динамики магнитных и магнитоупругих колебаний пленок и частиц // Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. — Москва: МГУ. 2007.
63. *Карпачев С. Н., Власов В. С., Котов Л. Н.* Нелинейная релаксационная динамика магнитной и упругой подсистем тонкой ферритовой пленки вблизи акустического резонанса. // Вестник МГУ. Сер.3. 2006. № 6. С. 60.
64. *Власов В. С., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре при ферромагнитном резонансе // РЭ. 2014. Т. 59. № 5. С. 482.
65. *Власов В. С., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Возбуждение гиперзвуковых колебаний при перемагничивании нормально намагниченной ферритовой пластины // РЭ. 2014. Т. 59. № 6. С. 572.
66. *Моносов Я. А.* Нелинейный ферромагнитный резонанс — М.: Наука. 1971.
67. *Захаров В. Е., Львов В. С., Старобинец С. С.* Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения // УФН. 1974. Т. 114. № 4. С. 609.
68. *Львов В. С.* Нелинейные спиновые волны. — М.: Наука. 1987.
69. Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Сб. статей под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ. 1961.
70. *Temiryazev A. G., Tikhomirova M. P., Zilberman P. E.* «Exchange» spin waves in nonuniform yttrium iron garnet films // JAP. 1994. V. 76. № 9. P. 5586.
71. *Gulyaev Yu. V., Temiryazev A. G., Tikhomirova M. P., Zilberman P. E.* Magnetoelastic interaction in yttrium iron garnet films with magnetic inhomogeneities through the film thickness // JAP. 1994. V. 75. № 10. P. 5619.
72. *Зильберман П. Е., Темирязов А. Г., Тихомирова М. П.* Возбуждение и распространение обменных спиновых волн в пленках железо-иттриевого граната // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. № 1. С. 281.
73. *Гуляев Ю. В., Зильберман П. Е., Темирязов А. Г., Тихомирова М. П.* Основная мода нелинейного спин-волнового резонанса в нормально намагниченных ферритовых пленках // ФТТ. 2000. Т. 42. № 6. С. 1062.
74. *Alvarez L. F., Pla O., Chubykalo O.* Quasiperiodicity, bistability, and chaos in the Landau-Lifshitz equation // Phys.Rev.B. 2000. V. 61. № 17. P. 11613(5).

75. Шутый А. М., Семенцов Д. И. Нелинейные эффекты прецессионного движения намагниченности в области ферромагнитного резонанса // ФТТ. 2000. Т. 42. № 7. С. 1268.
76. Шутый А. М., Семенцов Д. И. Динамика намагниченности в условиях нелинейного ферромагнитного резонанса в пленке типа (111) // ФТТ. 2001. Т. 43. № 8. С. 1439.
77. Шутый А. М., Семенцов Д. И. Динамика нелинейного прецессионного движения намагниченности в феррит-гранатовой пленке типа (100) // ФТТ. 2002. Т. 44. № 4. С. 734.
78. Семенцов Д. И., Шутый А. М. Нелинейная регулярная и стохастическая динамика намагниченности в тонкопленочных структурах // УФН. 2007. Т. 177. № 8. С. 831.
79. Семенцов Д. И., Шутый А. М. Высокоамплитудная прецессия и динамическая невосприимчивость магнитных моментов двухслойной пленки // ФТТ. 2003. Т. 45. № 5. С. 877.
80. Gerrits Th., Schneider M.L., Kos A.B., Silva T.J. Large-angle magnetization dynamics measured by time-resolved ferromagnetic resonance // Phys. Rev. B. 2006. V. 73. № 9. P. 094454(7).
81. Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Вынужденная нелинейная прецессия вектора намагниченности в условиях ориентационного перехода // РЭ. 2011. Т. 56. № 1. С. 84.
82. Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Несимметричная вынужденная нелинейная прецессия намагниченности в условиях ориентационного перехода // РЭ. 2011. Т. 56. № 6. С. 719.
83. Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Мультирежимный характер нелинейной прецессии намагниченности второго порядка в условиях ориентационного перехода // РЭ. 2011. Т. 56. № 9. С. 1120.
84. Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Несимметричное возбуждение прецессии намагниченности второго порядка в условиях ориентационного перехода // РЭ. 2012. Т. 57. № 5. С. 501.
85. Власов В. С., Кирушев М. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Прецессия намагниченности второго порядка в анизотропной среде. Часть 1. Одноосная анизотропия // РЭ. 2013. Т. 58. № 8. С. 806.
86. Власов В. С., Кирушев М. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Прецессия намагниченности второго порядка в анизотропной среде. II. Кубическая анизотропия // РЭ. 2013. Т. 58. № 9. С. 857.
87. Власов В. С., Кирушев М. С., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Прецессия намагниченности второго порядка в магнитоупругой среде // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. № 4. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr15/16/text.pdf>.
88. Власов В. С., Котов Л. Н., Щеглов В. И. Нелинейная прецессия вектора намагниченности в условиях ориентационного перехода. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2013.
89. Щеглов В. И., Шавров В. Г., Зубков В. И., Власов В. С., Котов Л. Н. Нелинейная прецессия вектора намагниченности в нормально намагниченной ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами при ориентационном фазовом переходе // Сборник трудов XII Международной конфе-

- ренции «Магнетизм, дальнейе и ближнее спин-спиновое взаимодействие». Москва–Фирсановка: Издание МЭИ. 2009. С. 92.
90. *Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Нелинейная прецессия намагниченности второго порядка в нормально намагниченной ферритовой пластине при ориентационном фазовом переходе // Сборник трудов XVIII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — Москва–Фирсановка (МЭИ): ПЛАНТИ. 2010. С. 122.
91. *Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Мультирежимный характер нелинейной прецессии намагниченности второго порядка при ориентационном переходе // Сборник трудов X Международного семинара «Магнитные фазовые переходы». — Махачкала: Издание Института физики Дагестанского научного центра РАН. 2010. С. 99.
92. *Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Кинетика перехода между различными режимами прецессии намагниченности второго порядка // Сборник трудов X Международного семинара «Магнитные фазовые переходы». — Махачкала: Издание Института физики Дагестанского научного центра РАН. 2010. С. 103.
93. *Vlasov V. S., Kotov L. N., Shavrov V. G., Shcheglov V. I.* Second order magnetization precession by reorientation transition // Book of Abstracts of Moscow International Symposium on Magnetism (MISM). Moscow. 2011. Published by «Изд-во Физ. фак. МГУ». Moscow. P. 782.
94. *Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Несимметричное возбуждение прецессии намагниченности второго порядка при компенсационном воздействии постоянного поля // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ. 2011. С. 206.
95. *Власов В. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Нелинейная прецессия положения равновесия вектора намагниченности в анизотропной среде // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ. 2011. С. 217.
96. *Власов В. С., Кирушев М. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Прецессия намагниченности второго порядка в анизотропной среде в условиях ориентационного перехода // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — Москва: НИУ МЭИ. 2012. С. 230.
97. *Власов В. С., Кирушев М. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Особенности временных характеристик прецессии положения равновесия в анизотропной ферритовой пластине // Сборник трудов XXII Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ)». — Астрахань: Изд. дом «Астраханский университет». 2012. С. 214.
98. *Власов В. С., Кирушев М. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Прецессия второго порядка в ферритовом слое с магнитоупругими свойствами // Сборник трудов XXII Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ)». — Астрахань: Изд. дом «Астраханский университет». 2012. С. 223.

99. Власов В. С., Кирушев М. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Прецессия намагниченности второго порядка в среде с одноосной магнитной анизотропией // Сборник трудов XXII Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ)». — Астрахань: Изд. дом «Астраханский университет». 2012. С. 257.
100. Власов В. С., Кирушев М. С., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Прецессия намагниченности второго порядка в среде с кубической анизотропией // Сборник трудов XXII Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ)». — Астрахань: Изд. дом «Астраханский университет». 2012. С. 260.
101. Vlasov V. S., Kirushev M. S., Kotov L. N., Shaurov V. G., Shcheglov V. I. Nonlinear second order magnetization precession in anisotropy medium // Book of Abstracts of Moscow International Symposium on Spin Waves 2013 (SW-2013). Saint Petersburg. Russia. Published by «Изд. ФТИ им. Иоффе». Moscow. P. 168.
102. Vlasov V. S., Kirushev M. S., Pleshev D. A., Kotov L. N., Shcheglov V. I., Shaurov V. G., Varser E. V. Investigation of regimes of nonlinear magnetoelastic oscillations in the ferrite layer // Book of Abstracts of Moscow International Symposium on Spin Waves 2013 (SW-2013). Saint Petersburg. Russia. Published by «Изд. ФТИ им. Иоффе». Moscow. P. 170.
103. Vlasov V. S., Kirushev M. S., Kotov L. N., Shcheglov V. I., Shaurov V. G. Investigation of regimes of second order magnetization precession in anisotropy medium // Abstracts of V Euro-Asian Symposium «Trends in MAGnetism. Nanomagnetism» (EASTMAG-2013). — Russia. Vladivostok. 2013. P. 101.
104. Kirushev M. S., Vlasov V. S., Pleshev D. A., Kotov L. N., Shaurov V. G., Shcheglov V. I. Second order precession in the plate with cubic anisotropy and magnetoelastic properties // Book of Abstracts of Moscow International Symposium on Magnetism (MISM). — Moscow. Published by «Изд-во Физ. фак. МГУ». P. 571.
105. Kirushev M. S., Vlasov V. S., Pleshev D. A., Asadullin F. F., Kotov L. N., Shaurov V. G., Shcheglov V. I. Second order precession in the plate with cubic anisotropy and magnetoelastic properties // Solid State Phenomena. Vols. 233–234. 2015. P. 73.
106. Власов В. С., Кирушев М. С., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Стационарные режимы прецессии намагниченности второго порядка в среде с магнитоупругими свойствами // Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы». — Москва: ИНФРА-М. 2015. С. 217.
107. Лакс Б., Баттон К. Сверхвысокочастотные ферриты и ферримангнетики. — М.: Мир. 1965.
108. Яковлев Ю. М., Генделев С. Н. Монокристаллы ферритов в радиоэлектронике. — М.: Сов. радио. 1975.
109. Семенов А. А. Теория электромагнитных волн. — М.: Изд. МГУ. 1968.
110. Суху Р. Магнитные тонкие пленки. — М.: Мир. 1967.
111. Саланский Н. М., Ерухимов М. Ш. Физические свойства и применение магнитных пленок. — Новосибирск: Наука. 1975.
112. ЛеКроу Р., Спенсер Е., Портер К. Ширина кривой ферромагнитного резонанса в монокристаллах иттриевого феррита со структурой грана-

- та // В кн.: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Сб. статей под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ, 1961. С. 433.
113. *Диллон Дж., Нильсен Дж.* Влияние редкоземельных примесей на ферромагнитный резонанс в иттриевом гранате // В кн.: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Сб. статей под ред. А. Г. Гуревича. — М.: ИЛ, 1961. С. 442.
114. *Уокер Л.* Магнитостатические типы прецессии при ферромагнитном резонансе // В кн.: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. — М.: ИЛ, 1961. С. 470.
115. *Eshbach J.R.* Spin-wave propagation and the magnetoelastic interaction in yttrium iron garnet // JAP. 1963. V. 34. № 4. P.1298.
116. *Eggers F.G., Strauss W.* A UHF delay line using single-crystal yttrium iron garnet // JAP. 1963. V. 34. № 4. P.1180.
117. *Rodrigue G.P.* Microwave solid-state delay lines // Proc. IEEE. 1965. V. 53. № 10. P. 1428. — Перевод: Родриг. Твердотельные СВЧ линии задержки // ТИИЭР. 1965. Т. 53. № 10. С. 1613.
118. *Schlömann E., Joseph R.I., Kohane T.* Generation of spin waves in nonuniform magnetic fields, with application to magnetic delay line // Proc. IEEE. 1965. V. 53. № 10. P. 1495. — Перевод: Шлёман, Джозеф, Кохейн. Возбуждение спиновых волн в неоднородных магнитных полях и их применение в магнитных линиях задержки // ТИИЭР. 1965. Т. 53. № 10. С. 1685.
119. *Damon R.W., Eshbach J.R.* Magnetostatic modes of a ferromagnet slab // J. Phys. Chem. Solids. 1961. V. 19. № 3/4. P. 308.
120. *Schlömann E.* Generation of spin waves in nonuniform magnetic fields. I. Conversion of electromagnetic power into spin-wave power and vice versa // JAP. 1964. V. 35. № 1. P.159.
121. *Schlömann E., Joseph R.I.* Generation of spin waves in nonuniform dc magnetic fields. II. Calculation of the coupling length // JAP. 1964. V. 35. № 1. P. 167.
122. *Schlömann E., Joseph R.I.* Generation of spin waves in nonuniform magnetic fields. III. Magneto-elastic interaction // JAP. 1964. V. 35. № 8. P. 2382.
123. *Курушин Е.П., Нефедов Е.И.* Применение тонких монокристаллических пленок ферритов в устройствах СВЧ-микроэлектроники // Микроэлектроника. 1977. Т. 6. № 6. С. 549.
124. *Rodrigue G.P.* A generation of microwave ferrite devices // Proc. IEEE. 1988. V. 76. № 2. P. 121. Перевод: Родриг Г.П. Этапы развития ферритовой аппаратуры диапазона СВЧ // ТИИЭР. 1988. Т. 76. № 2. С. 29.
125. *Glass H.L.* Ferrite films for microwave and millimeter wave devices // Proc. IEEE. 1988. V. 76. № 2. P. 151. Перевод: Гласс Х.Л. Ферритовые пленки для СВЧ-устройств // ТИИЭР. 1988. Т. 76. № 2. С. 64.
126. *Adam J.D.* Analog signal processing with microwave magnetics // Proc. IEEE. 1988. V.76. № 2. P.159. Перевод: Адам Дж.Д. Аналоговая обработка сигналов с помощью СВЧ-ферритов // ТИИЭР. 1988. Т. 76. № 2. С. 73.
127. *Ishak W.S.* Magnetostatic wave technology: a review // Proc. IEEE. 1988. V. 76. № 2. P. 171. Перевод: Исхак В.С. Применение магнитостатических волн: обзор // ТИИЭР. 1988. Т. 76. № 2. С. 86.

128. *Schloemann E. F.* Circulators for microwave millimeter wave integrated circuits // Proc. IEEE. 1988. V. 76. № 2. P. 188. Перевод: Шлеман Э.Ф. Циркуляторы для интегральных СВЧ-схем // ТИИЭР. 1988. Т. 76. № 2. С. 105.
129. *Adam J. D., Davis L. E., Dionne G. F., Schloemann E. F., Stitzer S. N.* Ferrite devices and materials // IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques. 2002. V. 50. № 3. P. 721.
130. *Вашковский А. В., Стальмахов В. С., Шараевский Ю. П.* Магнито-статические волны в электронике сверхвысоких частот — Саратов: Изд. Саратовского университета, 1993.
131. *Вашковский А. В., Локк Э. Г.* Влияние диэлектрической подложки и магнитных потерь на дисперсию и свойства поверхностной магнитостатической волны // РЭ. 2001. Т. 46. № 6. С. 729.
132. *Вашковский А. В., Локк Э. Г.* Поверхностные магнитостатические волны в структуре феррит-диэлектрик, окруженной полупространствами с отрицательной диэлектрической проницаемостью // РЭ. 2002. Т. 47. № 1. С. 97.
133. *Вашковский А. В., Локк Э. Г.* Прямые и обратные неколлинеарные волны в магнитных пленках // УФН. 2006. Т. 176. № 5. С. 557.
134. *Вашковский А. В., Локк Э. Г.* Свойства обратных электромагнитных волн и возникновение отрицательного отражения в ферритовых пленках // УФН. 2006. Т. 176. № 4. С. 403.
135. *Вашковский А. В., Локк Э. Г.* О свойствах обратной магнитостатической волны // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». М.: НИУ МЭИ. 2011. С. 75.
136. *Вашковский А. В., Локк Э. Г.* О взаимосвязи энергетических и дисперсионных характеристик магнитостатических волн в ферритовых структурах // УФН. 2011. Т. 181. № 3. С. 293.
137. *Вашковский А. В., Локк Э. Г.* О физических свойствах обратной магнитостатической волны при ее описании на основе уравнений Максвелла // РЭ. 2012. Т. 57. № 5. С. 541.
138. *Вашковский А. В., Локк Э. Г.* Дисперсионные уравнения для магнитостатических волн в ферритовых структурах с проводящей плоскостью и «магнитной стенкой» на основе уравнений Максвелла // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — М.: НИУ МЭИ. 2012. С. 177.
139. *Локк Э. Г.* Спиновые волны в структуре диэлектрик–феррит–диэлектрик с «магнитными стенками» или идеальными проводниками (на основе уравнений Максвелла) // РЭ. 2014. Т. 59. № 7. С. 711.
140. *Локк Э. Г.* О конфигурации линий высокочастотного поля поверхностной спиновой волны // Сборник трудов XXII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — М.: НИУ МЭИ. 2014. С. 87.
141. *Локк Э. Г.* Векторные линии поверхностной спиновой волны в касательно намагниченных ферритовых структурах с металлическим экраном и магнитной стенкой // Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы». — М.: ИНФРА-М. 2015. С. 96.

142. Локк Э.Г. Структура высокочастотных полей поверхностной спиновой волны в касательно намагниченной ферритовой пластине // РЭ. 2015. Т. 60. № 12. С. 1149.
143. Локк Э.Г. Изочастотные зависимости электромагнитных волн в неограниченной ферритовой среде // Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы». — М.: ИНФРА-М, 2015. С. 103.
144. Локк Э.Г. Магнитостатические волны в ферритовых пленках и структурах на их основе — Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. М. ИРЭ РАН. 2007.
145. Auld В.А. Geometrical optics of magnetoelastic wave propagation in a nonuniform magnetic field // Bell Syst. Tech. J. 1965. V. 44. № 3. P. 495.
146. Беспятых Ю.И., Зубков В.И., Тарасенко В.В. Распространение поверхностных магнитостатических волн в ферромагнитной пластине // ЖТФ. 1980. Т. 50. № 1. С. 140.
147. Васьковский А.В., Зубков В.И., Локк Э.Г., Щеглов В.И. Влияние неоднородности постоянного магнитного поля на траектории поверхностных магнитостатических волн // ПЖТФ. 1989. Т. 15. № 4. С. 1.
148. Васьковский А.В., Зубков В.И., Локк Э.Г., Щеглов В.И. Траектории поверхностных магнитостатических волн в неоднородно намагниченных ферритовых пленках // ПЖТФ. 1989. Т. 15. № 4. С. 5.
149. Васьковский А.В., Зубков В.И., Локк Э.Г., Щеглов В.И. Распространение поверхностных магнитостатических волн в неоднородном постоянном магнитном поле типа протяженной ямы // ЖТФ. 1990. Т. 60. № 7. С. 138.
150. Зубков В.И., Локк Э.Г., Щеглов В.И. Распространение поверхностных магнитостатических волн в неоднородном постоянном магнитном поле с профилем типа вала // РЭ. 1990. Т. 35. № 8. С. 1617.
151. Vashkovsky A. V., Lock E. H., Shcheglov V. I., Zubkov V. I. Passage of surface magnetostatic waves through magnetic «valley» and «ridge» // IEEE Trans. on Magn. 1990. V. 26. № 5. P. 1480.
152. Васьковский А.В., Зубков В.И., Локк Э.Г., Щеглов В.И. Поверхностные магнитостатические волны в линейно неоднородных магнитных полях // РЭ. 1991. Т. 36. № 1. С. 18.
153. Васьковский А.В., Зубков В.И., Локк Э.Г., Щеглов В.И. Распространение поверхностных магнитостатических волн в поперечно неоднородных полях подмагничивания // РЭ. 1993. Т. 38. № 5. С. 818.
154. Васьковский А.В., Зубков В.И., Локк Э.Г., Щеглов В.И. Поверхностные магнитостатические волны в неоднородном подмагничивающем поле типа «долины» // РЭ. 1994. Т. 39. № 2. С. 217.
155. Васьковский А.В., Зубков В.И., Локк Э.Г., Щеглов В.И. Поверхностные магнитостатические волны в неоднородном подмагничивающем поле типа «вала» // РЭ. 1995. Т. 40. № 2. С. 313.
156. Васьковский А.В., Зубков В.И., Локк Э.Г., Щеглов В.И. Траектории лучей поверхностной магнитостатической волны в монотонных неоднородных магнитных полях // РЭ. 1995. Т. 40. № 6. С. 950.

157. *Вашковский А. В., Локк Э. Г.* Диаграммы направленности излучения, возникающего в результате преобразования поверхностных магнитостатических волн в электромагнитные // РЭ. 1995. Т. 40. № 7. С. 1030.
158. *Вашковский А. В., Локк Э. Г.* О параметрах диаграмм излучения, возникающего при преобразовании поверхностной магнитостатической волны в электромагнитную // РЭ. 2004. Т. 49. № 8. С. 966.
159. *Вашковский А. В., Локк Э. Г.* Влияние неоднородности магнитного поля на параметры излучения, возникающего при преобразовании магнитостатической волны в электромагнитную // Сборник трудов XII Международной конференции по спиновой электронике и гировекторной электродинамике. Москва–Фирсановка. — М.: Изд. уч.-научн. центра № 1 МЭИ (ТУ). 2003. С. 155.
160. *Вашковский А. В., Локк Э. Г.* О диаграммах излучения, возникающих при преобразовании магнитостатических волн в электромагнитные волны // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ. 2012. С. 181.
161. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Излучение электромагнитных волн, обусловленное ускорением магнитостатических волн в неоднородно намагниченной ферритовой пленке // РЭ. 2001. Т. 46. № 4. С. 433.
162. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Пространственное распределение излучения электромагнитных волн, сопровождающего распространение поверхностных магнитостатических волн в ферритовой пленке, намагниченной поперечно неоднородным полем // ПЖТФ. 2000. Т. 26. № 13. С. 106.
163. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Характеристики электромагнитного излучения, возникающего при произвольном направлении распространения поверхностных магнитостатических волн в поперечном возрастающем магнитном поле // РЭ. 2009. Т. 54. № 9. С. 1064.
164. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Характеристики излучения, возникающего при преобразовании обратных объемных магнитостатических волн в электромагнитные // ПЖТФ. 2008. Т. 34. № 22. С. 44.
165. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Направленность излучения электромагнитных волн, сопровождающего распространение магнитостатической волны в неоднородно намагниченной ферритовой пленке // XVII международная школа-семинар «Новые магнитные материалы микроэлектроники». Сборник трудов. — М.: Изд. МГУ. 2000. С. 379.
166. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Излучение электромагнитных волн, возникающее при распространении магнитостатических волн в ферритовой пленке, намагниченной поперечно неоднородным полем // IX Международная конференция по спинволновой электронике. Сборник трудов. Москва. 2000. С. 177.
167. *Shcheglov V. I., Zubkov V. I.* The spatial diagram of electromagnetic waves radiation from nonuniform magnetized ferrite film having magnetostatic waves // IX Международная конференция по спинволновой электронике. Сборник трудов. Приложение. Москва. 2000. С. 464.
168. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Пространственное распределение излучения электромагнитных волн при распространении магнитостатических волн в неоднородно намагниченной ферритовой пластине // Вторая объединен-

- ная конференция по магнитоэлектронике. Тезисы докладов. Екатеринбург. Россия. 2000. С. 30.
169. *Zubkov V.I., Shcheglov V.I.* The spatial diagram of electromagnetic waves radiation from nonuniform magnetized ferrite film having magnetostatic waves // XV International Conference on Microwave Ferrites (Gyromagnetic Electronics and Electrodynamics). Conference Proceedings. Poland, Rokosovo. 2000. P. 22.
170. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Пространственные характеристики диаграммы направленности излучения электромагнитных волн из ферритовой пленки, намагниченной неоднородным полем // Байкальская международная научно-практическая конференция «Магнитные материалы». Тезисы докладов. Иркутск. 2001. С. 50.
171. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Диаграмма направленности излучения электромагнитных волн из неоднородно намагниченной ферритовой пленки с магнитостатическими волнами // Международная конференция «Физика и технические применения волновых процессов», Тезисы докладов. Том 2. Самара. 2001. С. 16.
172. *Shcheglov V.I., Zubkov V.I.* The electromagnetic waves radiation by the accelerated motion of magnetostatic waves propagating in nonuniform magnetized ferrite film // International Symposium EASTMAG-2001. Abstract Book. Ekaterinburg. Russia. 2001. P. 386.
173. *Shcheglov V.I., Zubkov V.I.* The Electromagnetic Waves Radiation by the Propagation of Electromagnetic Waves in Nonuniform Magnetized Ferrite Film by Arbitrary Location Point of Observation // Book of Abstracts of «Moscow International Symposium on Magnetism (MISM)». Moscow: «Editorial URSS». 2002. P. 202.
174. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Диаграмма направленности излучения электромагнитных волн, сопровождающего распространение магнитостатических волн в неоднородно намагниченной ферритовой пластине // 18-я Международная Крымская конференция «СВЧ техника и телекоммуникационные технологии (КрыМиКо-2008)». Тезисы докладов. Севастополь. Украина. 2008. С. 453.
175. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Диаграмма направленности электромагнитного излучения, обусловленная преобразованием неколлинеарных магнитостатических волн в неоднородно намагниченном феррите // Сборник трудов XVI Международной конференции «Радиолокация и радиосвязь». — Москва–Фирсановка: МЭИ. 2008. С. 331.
176. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Диаграмма направленности СВЧ излучения, возникающего при распространении неколлинеарных магнитостатических волн в неоднородно намагниченных ферритовых пленках // Сборник материалов XIV Международной зимней школы-семинара по электронике сверхвысоких частот и радиофизике. — Саратов: РАТА. 2009. С. 46.
177. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Диаграмма направленности излучения, возникающего при распространении неколлинеарных магнитостатических волн в неоднородном поле // Сборник трудов XXI Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ)». — М.: Изд. МГУ. 2009. С. 951.

178. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Электромагнитное излучение, возникающее при распространения поверхностных магнитостатических волн в ферритовой пленке, намагниченной пространственно-периодическим полем // Сборник трудов XVIII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — Москва–Фирсановка: МЭИ-ПЛАНТИ. 2010. С. 110.
179. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Диаграмма направленности излучения электромагнитных волн, сопровождающего распространение магнитостатических волн в поле с периодической неоднородностью // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ. 2011. С. 231.
180. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Диаграмма направленности СВЧ излучения, возникающего при распространении магнитостатической волны в периодически неоднородном поле // Сборник материалов XV Международной зимней школы-семинара по электронике сверхвысоких частот и радиофизике. — Саратов: Изд. СГУ. 2012. С. 42.
181. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Формирование диаграммы направленности излучения электромагнитных волн из феррита при распространении магнитостатической волны в условиях нерегулярной квазипериодической неоднородности подмагничивающего поля // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». М.: НИУ МЭИ. 2012. С. 274.
182. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Преобразование магнитостатических волн в электромагнитные в среде с периодической неоднородностью // Сборник трудов XXII Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ)». — Астрахань: Изд. дом «Астраханский университет». 2012. С. 274.
183. *Shcheglov V.I., Zubkov V.I.* Spatial diagram of microwave radiation by magnetostatic surface waves propagation in nonuniform magnetized ferrite film // Book of Abstracts of Moscow International Symposium on Spin Waves 2013 (SW-2013). Saint Petersburg, Russia. Published by «Изд. ФТИ им. Иоффе». P. 130.
184. *Щеглов В.И.* Диаграмма направленности излучения электромагнитных волн из феррита при распространении магнитостатических волн в неоднородно намагниченной многослойной структуре // Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — М.: НИУ МЭИ. 2013. С. 216.
185. *Вашковский А.В., Локк Э.Г.* О механизме преобразования поверхностной магнитостатической волны в электромагнитную // РЭ. 2009. Т. 54. № 4. С. 476.
186. *Шевченко В.В.* Плавные переходы в открытых волноводах. — М.: Наука. 1969.
187. *Вызулин С.А., Розенсон А.Э., Шех С.А.* О спектре поверхностных магнитостатических волн в ферритовой пленке с потерями // РЭ. 1991. Т. 36. № 1. С. 164.
188. *Вызулин С.А.* Обобщенные плоские волны в задачах электродинамики магнитоанізотропных сред — Диссертация на соискание уч. ст. д.ф.-м.н. Краснодар. 2000.

189. *Annenkov A. Yu., Gerus S. V.* // Book of Abstracts of Moscow International Symposium on Magnetism (MISM). 2014. Published by «Изд-во Физ. фак. МГУ». Moscow. P. 863.
190. *Анненков А. Ю., Герус С. В.* Индикатрисы поверхностных магнитостатических волн // Сборник трудов XXII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы», Москва, МЭИ: «НИУ МЭИ». 2014. С. 99.
191. *Анненков А. Ю., Герус С. В.* Дисперсионные характеристики поверхностных магнитостатических волн с диссипацией // Изв. РАН. Серия физическая. 2017. Т. 81. № 8. С. 1110.
192. *Анненков А. Ю., Герус С. В.* Влияние учета потерь на групповую скорость поверхностных спиновых волн // Сборник трудов XXV Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — М.: НИУ МЭИ. 2017. С. 358.
193. *Ползикова Н. И., Раевский А. О.* Особенности законов дисперсии поверхностных спиновых волн в структурах, содержащих сверхпроводник // ФТТ. 1996. Т. 38. № 10. С. 2937.
194. *Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Влияние диссипации на свойства поверхностных магнитостатических волн в касательно намагниченной пластине феррита // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2014. № 7. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jul14/8/text.pdf>.
195. *Келлер Ю. И., Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Поверхностные магнитостатические волны в пластине феррита с диссипацией. Часть 1. Дисперсионные соотношения // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2016. № 2. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/feb16/2/text.pdf>.
196. *Келлер Ю. И., Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Поверхностные магнитостатические волны в пластине феррита с диссипацией. Часть 2. Распространение волны перпендикулярно направлению поля // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2016. № 3. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/mar16/1/text.pdf>.
197. *Келлер Ю. И., Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Поверхностные магнитостатические волны в пластине феррита с диссипацией. Часть 3. Распространение волны в произвольном направлении относительно поля // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2016. № 3. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/mar16/2/text.pdf>.
198. *Белов К. П., Звездин А. К., Кадомцева А. М., Левитин Р. З.* Ориентационные переходы в редкоземельных магнетиках. — М.: Наука. 1979.
199. *Кадомцева А. М.* Ориентационные фазовые переходы // Энциклопедия науки и техники (электронный ресурс). www.femto.com.ua/articles/part-2/2661.html
200. *Белов К. П., Звездин А. К., Кадомцева А. М., Левитин Р. З.* Переходы спиновой переориентации в редкоземельных магнетиках // УФН. 1976. Т. 110. № 3. С. 447.
201. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. Ч. 1. (Теоретическая физика. Т. 5). — М.: Наука. 1976.
202. *Ландау Л. Д.* К теории фазовых переходов. I // Собрание трудов. Т. 1. — М.: Наука. 1969. С. 234.

203. *Ландау Л. Д.* К теории фазовых переходов. II // Собрание трудов. Т. 1. — М.: Наука. 1969. С. 253.
204. *Уайт Р., Джебелл Т.* Дальний порядок в твердых телах. — М.: Мир. 1982.
205. *Паташинский А. З., Покровский В. Л.* Флуктуационная теория фазовых переходов. — М.: Наука. 1982.
206. *Druyvesteyn W. F., Dorleijn J. W. F., Rijniere R. J.* Analysis of a method for measuring the magnetocrystalline anisotropy of bubble materials // *J. Appl. Phys.* 1973. V. 44. № 5. P. 2379.
207. *Shumate Jr. P. W.* Extension of the analysis for an optical magnetometer to include cubic anisotropy in detail // *J. Appl. Phys.* 1973. V. 44. № 7. P. 3323.
208. *Shimada J., Kojima H., Sakai K.* Determination of the anisotropy field of garnet bubble materials from domain observation // *J. Appl. Phys.* 1974. V. 45. № 10. P. 4598.
209. *Malozemoff A. P., DeLuca J. C.* Effect of misorientation on growth anisotropy in [111]-oriented garnet films // *J. Appl. Phys.* 1974. V. 45. № 10. P. 4586.
210. *Hagedorn F. B., Hewitt B. S.* Growth-induced magnetic anisotropy in variously oriented epitaxial films on Sm-YIGG // *J. Appl. Phys.* 1974. V. 45. № 2. P. 925.
211. *Hubert A., Malozemoff A. P., DeLuca J. C.* Effect of cubic, tilted uniaxial and orthorhombic anisotropy on homogeneous nucleation in a garnet bubble film // *J. Appl. Phys.* 1974. V. 45. № 8. P. 3562.
212. *Johansen T. R., Norman D. J., Torok E. J.* Variation of stripe-domain spacing in a Faraday effect light deflector // *J. Appl. Phys.* 1971. V. 42. № 4. P. 1715.
213. *Тарасенко В. В., Ченский Е. В., Дикштейн И. Е.* Теория неоднородных магнитных состояний в ферромагнетиках в окрестности фазовых переходов второго рода // *ЖЭТФ.* 1976. Т. 70. № 6. С. 2178.
214. *Дикштейн И. Е., Лисовский Ф. В., Мансветова Е. Г., Тарасенко В. В., Шаповалов В. И., Щеглов В. И.* Доменная структура одноосных ферромагнетиков с точкой компенсации в сильных магнитных полях // *ЖЭТФ.* 1980. Т. 79. № 2(8). С. 509.
215. *Пастушенков Ю. Г., Супонев Н. П., Скоков К. П., Ляхова М. Б., Семенова Л. В.* Магнитокристаллическая анизотропия, доменная структура и ориентационные фазовые переходы в интерметаллидах $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ и $\text{R}(\text{Fe},\text{Co})_{11}\text{Ti}$ ($\text{R} = \text{Tb}, \text{Dy}, \text{Er}, \text{Ho}$) // *Вестник ТвГУ, Серия «Физика».* 2004. № 4(6). С. 25.
216. *Шутый А. М., Семенов Д. И.* Динамическое перемагничивание и бистабильные состояния в антиферромагнитных многослойных структурах // *ФТТ.* 2004. Т. 46. № 2. С. 271.
217. *Шутый А. М.* Управление ориентационными переходами в скрещенных дипольных решетках // *ЖТФ.* 2015. Т. 85. № 7. С. 1.
218. *Власов В. С., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Ударное возбуждение гиперзвука при перемагничивании ферритовой пластины // *Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы».* М.: НИУ МЭИ. 2013. С. 177.

219. Козлов В.И. Исследование неоднородности и анизотропии магнитных пленок с помощью гиромагнитных эффектов. Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. Москва. 1997.
220. Sparks M., Tittmann B.R., Mee J.F., Newkirk C. Ferromagnetic resonance in epitaxial garnet thin films // JAP. 1969. V. 40. №3. P. 1518.
221. Laulicht I., Suss J.T., Barak J. The temperature dependence of the ferromagnetic and paramagnetic resonance spectra in thin yttrium-iron garnet films // JAP. 1991. V. 70. №4. P. 2251.
222. Chen H., De Gasperis P., Marcelli R., Pardavi-Horvath M., McMichael R., Wigen P.E. Wide-band linewidth measurements in yttrium iron garnet films // JAP. 1990. V. 67. №9. P. 5530.
223. Помялов А.В., Зильберман П.Е. Магнитные резонансы в малых тонкопленочных образцах железиттриевого граната // РЭ. 1986. Т. 31. №1. С. 94.
224. Hansen P., Krumme J.P. Determination of the local variation of the magnetic properties of liquid-phase epitaxial iron garnet films // JAP. 1973. V. 44. №6. P. 2847.
225. Телеснин Р.В., Козлов В.И., Дудоров В.Н. Ферромагнитный резонанс в эпитаксиальных пленках $Y_3Fe_{5-x}Ga_xO_{12}$ // ФТТ. 1974. Т. 16. №11. С. 3532.
226. Algra H.A., Robertson J.M. A FMR study on horizontally dipped LPE grown (La,Ga):YIG films // JAP. 1979. V. 50. №3. P. 2173.
227. Hsia L.C., Wigen P.E., De Gasperis P., Borghese C. Enhancement of uniaxial anisotropy constant by introducing oxygen vacancies in Ca-doped YIG // JAP. 1981. V. 52. №3. P. 2261.
228. Tsutaoka T., Ueshima M., Tokunaga T., Nakamura T., Hatakeyama K. Frequency dispersion and temperature variation of complex permeability of Ni-Zn ferrite composite materials // JAP. 1995. V. 78. №6. P. 3983.
229. Аваева И.Г., Лисовский Ф.В., Щеглов В.И. О наклоне оси магнитной анизотропии в эпитаксиальных пленках смешанных ферритов-гранатов // ФТТ. 1975. Т. 17. №5. С. 2102.
230. Vobeck A.H. Properties and device applications of magnetic domains in orthoferrites // Bell Syst. Tech. J. 1967. V. 46. №8. P. 1901.
231. Kooy C., Enz U. Experimental and theoretical study of the domain configuration in thin layers of Ba Fe₁₂O₁₉ // Phil. Res. Rep. 1960. V. 15. №1. P. 7.
232. Thiele A.A. Device implications of the theory of cylindrical magnetic domains // Bell Syst. Tech. J. 1969. V. 50. №3. P. 725.
233. Лисовский Ф.В. Физика цилиндрических магнитных доменов. — М.: Сов. Радио. 1979.
234. Хуберт А. Теория доменных стенок в упорядоченных средах. — М.: Мир. 1977.
235. Малоземов А., Слонзуски Дж. Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами. — М.: Мир. 1982.
236. О'Делл Т. Ферромагнитодинамика. Динамика ЦМД, доменов и доменных стенок. — М.: Мир. 1983.

237. Аваева И. Г., Копылов Ю. Л., Кравченко В. Б., Лисовский Ф. В., Соболев А. Т., Щеглов В. И. // Эпитаксиальные пленки смешанных ферритов-гранатов для ЦМД применений. Микроэлектроника. 1975. Т. 4. № 4. С. 325.
238. Аваева И. Г., Кравченко В. Б., Лисовский Ф. В., Щеглов В. И. Невзаимные эффекты при движении доменных границ в неоднородном магнитном поле // ФТТ. 1976. Т. 18. № 6. С. 1780.
239. Туров Е. А. Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов. — М.: Изд. АН СССР. 1963.
240. Гуляев Ю. В., Дикштейн И. Е., Шавров В. Г. Поверхностные магнитоакустические волны в магнитных кристаллах в области ориентационных фазовых переходов // УФН. 1997. Т. 167. № 7. С. 735.
241. Гуляев Ю. В., Тарасенко С. В., Шавров В. Г. С спин-волновая акустика антиферромагнитных структур как магнитоакустических метаматериалов // УФН. 2011. Т. 181. № 6. С. 595.
242. Туров Е. А., Шавров В. Г. Об энергетической щели для спиновых волн в ферро- и анти ферромагнетиках, связанной с магнитоупругой энергией // ФТТ. 1965. Т. 7. № 1. С. 217.
243. Боровик-Романов А. С., Рудашевский Е. Г. О влиянии спонтанной стрикции на антиферромагнитный резонанс в гематите // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. № 6(12). С. 2095.
244. Щеглов В. И. Зависимость скорости звука от магнитного поля в ферро- и антиферромагнетиках // ФТТ. 1972. Т. 14. № 7. С. 2180.
245. Щеглов В. И. Способ плавной обратимой перестройки частоты упругого резонанса колебаний твердого тела // Авторское свидетельство СССР № 386262, М. кл. (3) G 01 h 13/00. МКИ: C01h13/00; УДК 534.63. Приоритет от 09.12.1970. Заявка № 1603337.18-10. Публикация: Оф. бюлл. «Открытия, изобретения». 1973. № 26. С. 141.
246. Seavey M. H. Acoustic resonance in the easy-plane weak ferromagnets α -Fe₂O₃ and FeVO₃ // Sol. St. Comm. 1972. V. 10. № 2. P. 219.
247. Максименков П. П., Ожогин В. И. Исследование магнитоупругого взаимодействия в гематите с помощью антиферромагнитного резонанса // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. № (8). С. 657.
248. Дикштейн И. Е., Тарасенко В. В., Шавров В. Г. Влияние давления на магнитоакустический резонанс в одноосных антиферромагнетиках // ЖЭТФ. 1974. Т. 67. № 2. С. 816.
249. Дикштейн И. Е., Тарасенко В. В., Шавров В. Г. Магнитоупругие волны в ортоферритах // ФТТ. 1977. Т. 19. № 4. С. 1107.
250. Герус С. В., Тарасенко В. В. Волны Рэлея в магнитных кристаллах с анизотропией типа «легкая плоскость» и их усиление // ФТТ. 1975. Т. 17. № 8. С. 2247.
251. Дикштейн И. Е., Тарасенко В. В. Параметрическое возбуждение звука в ферро-, ферри- и антиферромагнетиках в окрестности точек фазовых переходов // ФТТ. 1978. Т. 20. № 10. С. 2942.
252. Звездин А. К., Котов В. А. Магнитооптика тонких пленок. — М.: Наука. 1988.
253. Рандошкин В. В., Червоненкис А. Я. Прикладная магнитооптика. — М.: Энергоатомиздат. 1990.

254. Балбашов А. М., Червоненкис А. Я. Магнитные материалы для микроэлектроники. — М.: Энергия. 1979.
255. Muller M. W. Distribution of the magnetization in a ferromagnet // Phys. Rev. 1961. V. 122. № 5. P. 1485.
256. Dorleijn J. W., Druyvesteyn W. F., Bartles G., Tolksdorf W. Magnetic bubbles and stripe domains subjected to in-plane fields. I. Uniaxial anisotropy // Phil. Res. Rep. 1973. V. 28. № 2. P. 133.
257. Dorleijn J. W., Druyvesteyn W. F., Bartles G., Tolksdorf W. Magnetic bubbles and stripe domains subjected to in-plane fields. II. Contribution of the cubic anisotropy // Phil. Res. Rep. 1973. V. 28. № 2. P. 152.
258. Hubert A., Schafer R. Magnetic domains: the analysis of magnetic microstructures. — Berlin Heidelberg: Springer. 1998.
259. Звездин А. К., Сайко Г. В. Цилиндрические магнитные домены. Физическая энциклопедия. Т. 5. С. 434. — М.: Большая Российская энциклопедия. 1998.
260. Дерюгин А. А., Цыркин В. В., Красовский В. Е. Применение интегральных микросхем памяти: Справочник. — М. Радио и связь. 1994.
261. Раев В. К. Разработка основ теории и принципов проектирования накопителей информации на цилиндрических магнитных доменах. — Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. Москва. 1989.
262. Раев В. К., Ходенков Г. Е. Цилиндрические магнитные домены в элементах вычислительной техники. — М.: Энергоиздат. 1981.
263. Розенблат М. А. Внешние запоминающие устройства ЭВМ // Зарубежная электронная техника. — М.: ЦНИИ «Электроника». 1988. № 8. С. 50.
264. Бобек Э., Делла-Торре Э. Цилиндрические магнитные домены. — М.: Энергия. 1978.
265. Элементы и устройства на цилиндрических магнитных доменах. Справочник под ред. Евтихиева Н. Н., Наумова Б. Н. — М.: Радио и связь. 1978.
266. Эшенфельдер А. Физика и техника цилиндрических магнитных доменов. — М.: Мир. 1983.
267. Розенблат М. А. Магнитные элементы автоматики и вычислительной техники. — М.: Наука. 1974.
268. Дудоров В. Н., Рандошкин В. В., Телеснин Р. В. Синтез и физические свойства монокристаллических пленок редкоземельных ферритов-гранатов // УФН. 1977. Т. 122. № 2. С. 253.
269. Thiele A. A. The theory of cylindrical magnetic domains // Bell Syst. Tech. J. 1969. V. 48. № 10. P. 3287.
270. Thiele A. Theory of the static stability of cylindrical domains in uniaxial platelets // J. Appl. Phys. 1970. V. 41. № 3. P. 1139.
271. Cape J. A., Lehman G. W. Magnetic bubble domain interactions // Sol. St. Comm. 1970. V. 8. № 1. P. 1303.
272. Druyvesteyn W. F., Dorleijn J. W. F. Calculations of some periodic magnetic domain structures: consequences for bubble devices // Phil. Res. Rep. 1971. V. 26. № 1. P. 11.
273. Voegeli O., Calhoun B. A., Rosier L. L., Slonczewski J. C. The use of bubble lattices for information storage // AIP Conf. Proc. 1975. V. 25. P. 617.

274. Барьяхтар В. Г., Ганн В. В., Горобец Ю. Н., Смоленский Г. А., Филиппов Б. Н. Цилиндрические магнитные домены // УФН. 1977. Т. 121. № 4. С. 593.
275. Барьяхтар В. Г., Иванов Б. А. В мире магнитных доменов. — Киев: Наукова Думка. 1986.
276. Барьяхтар В. Г., Горобец Ю. И. Цилиндрические магнитные домены и их решетки. — Киев: Наукова Думка. 1986.
277. Ганн В. В., Горобец Ю. И. Колебания решеток цилиндрических магнитных доменов // ФТТ. 1975. Т. 17. № 5. С. 1305.
278. Барьяхтар В. Г., Ганн В. В., Горобец Ю. И. Волны в решетке цилиндрических доменов // ФТТ. 1976. Т. 18. № 7. С. 1990.
279. Дедух Л. М., Никитенко В. И., Полянский А. А., Успенская Л. С. Прямое исследование влияния динамического изменения структуры блоховской стенки на ее подвижность // ПЖЭТФ. 1977. Т. 26. № 9. С. 452.
280. Никитенко В. И., Дедух Л. М., Горнаков В. С., Кабанов Ю. П. Резонансное генерирование блоховских линий // ПЖЭТФ. 1980. Т. 32. № 6. С. 402.
281. Дедух Л. М., Никитенко В. И., Сонин Э. Б. Динамика блоховских линий в доменной границе // УФН. 1985. Т. 145. № 1. С. 158.
282. Tabor W. J., Vobeck A. H., Vella-Coleiro G. P., Rosencwaig A. A new type of cylindrical magnetic domains (bubble isomers) // Bell. Syst. Tech. J. 1972. V. 51. № 6. P. 1427.
283. Malozemoff A. P. Interacting Bloch-lines: a new mechanism for wall energy in bubble domain materials // Appl. Phys. Lett. 1972. V. 21. № 4. P. 149.
284. Rosencwaig A., Tabor W. J., Nelson T. J. New domain wall configuration for magnetic bubbles // Phys. Rev. Lett. 1972. V. 29. № 14. P. 946.
285. Slonczewski J. C., Malozemoff A. P., Voegeli O. Statics and dynamics of bubble containing Bloch lines // AIP Conf. Proc. 1973. V. 10. P. 458.
286. Vella-Coleiro G. P., Rosencwaig A., Tabor W. J. Dynamic properties of «hard» magnetic bubbles // Phys. Rev. Lett. 1972. V. 29. № 14. P. 949.
287. Tabor W. J., Vobeck A. H., Vella-Coleiro G. P., Rosencwaig A. A new type of cylindrical magnetic domains (hard bubbles) // AIP Conf. Proc. 1973. V. 10. P. 442.
288. Аваева И. Г., Лисовский Ф. В., Щеглов В. И. Влияние поля в плоскости на динамику доменных границ в пленках ферритов-гранатов // Микроэлектроника. 1979. Т. 8. № 3. С. 282.
289. Лисовский Ф. В., Чижик Е. С., Щеглов В. И. Вынужденные колебания плоской уединенной доменной границы в неоднородном магнитном поле // ФТТ. 1985. Т. 27. № 6. С. 1730.
290. Лисовский Ф. В., Чижик Е. С., Щеглов В. И. Магнитооптическое исследование амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик колебаний плоской доменной границы в пленках ферритов-гранатов // РЭ. 1987. Т. 32. № 3. С. 650.
291. Shaw R. W., Moody J. W., Sandfort R. M. Dynamic properties of high-mobility garnet films in the presence of in-plane magnetic fields // J. Appl. Phys. 1974. V. 45. № 6. P. 2672.
292. De Leeuw F. H. Influence of an in-plane magnetic field on the domain-wall velocity in Ga:YIG films // IEEE Trans. on Magn. 1973. V. 9. № 4. P. 614.

293. *Wolfe R., North J. C.* Suppression of hard bubbles in magnetic garnet films by ion implantation // *Bell. Syst. Tech. J.* 1972. V. 51. № 6. P. 1436.
294. *Лисовский Ф. В., Щеглов В. И., Юрченко С. Е.* Некоторые особенности динамики ЦМД // *Микроэлектроника.* 1977. Т. 6. № 4. С. 316.
295. *Lin Y. S., Keefe G. E.* Suppression of hard bubbles by a thin permalloy layer // *Appl. Phys. Lett.* 1973. V. 22. № 12. P. 603.
296. *Bobeck A. H., Blank S. I., Levinstein H. J.* Multilayer epitaxial garnet films for magnetic bubble devices — hard bubble suppression // *Bell. Syst. Tech. J.* 1972. V. 51. № 6. P. 1431.
297. *Rosencwaig A.* The effect of a second magnetic layer on hard bubbles // *Bell. Syst. Tech. J.* 1972. V. 51. № 6. P. 1440.
298. *Schlömann E.* Domain walls in bubble films. I. General theory of static properties // *J. Appl. Phys.* 1973. V. 44. № 3. P. 1837.
299. *Schlömann E.* Domain walls in bubble films. II. Static properties of thick films // *J. Appl. Phys.* 1973. V. 44. № 3. P. 1850.
300. *Ахизер А. И., Боровик А. Е.* К теории спиновых волн конечной амплитуды // *ЖЭТФ.* 1967. Т. 52. № 2. С. 508.
301. *Ахизер А. И., Боровик А. Е.* О нелинейных спиновых волнах в ферромагнетиках и антиферромагнетиках // *ЖЭТФ.* 1967. Т. 52. № 5. С. 1332.
302. *Shryer N. L., Walker L. R.* The motion of 180° domain walls in uniform dc magnetic fields // *J. Appl. Phys.* 1974. V. 45. № 12. P. 5406.
303. *Slonczewski J. C.* Theory of domain-wall motion in magnetic films and platelets // *J. Appl. Phys.* 1973. V. 44. № 4. P. 1759.
304. *Slonczewski J. C.* Theory of Bloch-line and Bloch-wall motion // *J. Appl. Phys.* 1974. V. 45. № 6. P. 2705.
305. *Hagedorn F. B.* Dynamic conversion during magnetic bubble domain wall motion // *J. Appl. Phys.* 1974. V. 45. № 7. P. 3129.
306. *Недлин Г. М., Шаниро Р. Х.* Движение доменных стенок в магнитных пленках // *ФТТ.* 1975. Т. 17. № 7. С. 2076.
307. *Гуревич В. А.* Динамика блоховской доменной границы // *ФТТ.* 1977. Т. 19. № 10. С. 2893.
308. *Гуревич В. А.* Динамика скрученной доменной границы // *ФТТ.* 1977. Т. 19. № 10. С. 2902.
309. *Ju K., Humphrey F. B.* Gradient propagation, overshoot and creep in magnetic bubble garnet materials // *J. Appl. Phys.* 1977. V. 48. № 11. P. 4656.
310. *Vella-Coleiro G. P.* Overshoot in the translational motion of magnetic bubble domains // *J. Appl. Phys.* 1976. V. 47. № 7. P. 3287.
311. *De Luca J. C., Malozemoff A. P.* The effect of in-plane fields on ballistic overshoot in the gradient propagation of magnetic bubble domains // *AIP Conf. Proc.* 1976. V. 34. P. 151.
312. *Malozemoff A. P.* Theory of saturation velocity and ballistic overshoot for interpreting domain wall oscillation // *JMMM.* 1976. V. 3. № 3. P. 234.
313. *Клепарский В. Г., Рандошкин В. В.* Исследование «баллистического» движения цилиндрических магнитных доменов методом многократной высокоскоростной фотографии // *ФТТ.* 1977. Т. 19. № 11. С. 3250.

314. *Иванов Л. П., Логгинов А. С., Рандошкин В. В., Телеснин Р. В.* Динамика доменных структур в пленках ферритов-гранатов // ПЖЭТФ. 1976. Т. 23. № 11. С. 627.
315. *Иванов Л. П., Логгинов А. С., Рандошкин В. В., Телеснин Р. В.* О движении цилиндрических магнитных доменов в неоднородном импульсном магнитном поле // ФТТ. 1977. Т. 19. № 6. С. 1874.
316. *Барьяхтар В. Г., Иванов Б. А., Сукстанский А. Л.* О предельной скорости движения доменных границ в магнетиках // ФТТ. 1978. Т. 20. № 7. С. 2177.
317. *Ходенков Г. Е.* Свойства доменных границ и ЦМД в магнитных пленках с одноосной перпендикулярной анизотропией // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Москва. 1987.
318. *Шамсутдинов М. А., Шамсутдинов Д. М., Екомасов Е. Г.* Динамика доменных стенок в орторомбических антиферромагнетиках вблизи предельной скорости // ФММ. 2003. Т. 96. № 4. С. 16.
319. *Четкин М. В., Шалыгин А. Н., Де ла Кампа А.* Скорость движения прямолинейной доменной границы в ортоферритах // ФТТ. 1977. Т. 19. № 11. С. 3470.
320. *Четкин М. В., Шалыгин А. Н., Де ла Кампа А.* О предельной скорости движения доменной границы в слабых ферромагнетиках // ПЖЭТФ. 1978. Т. 27. № 3. С. 168.
321. *Четкин М. В., Ахуткина А. М., Шалыгин А. Н.* С сверхпредельные скорости доменных границ в ортоферритах // ПЖЭТФ. 1978. Т. 28. № 11. С. 700.
322. *Четкин М. В., Шалыгин А. Н., Де ла Кампа А.* Скорость доменных границ в слабых ферромагнетиках // ЖЭТФ. 1978. Т. 75. № 6(12). С. 2345.
323. *Konishi S., Miyama T., Ikeda K.* Domain wall velocity in orthoferrites // Appl. Phys. Lett. 1975. V. 27. № 4. P. 258.
324. *Барьяхтар В. Г., Иванов Б. А., Сукстанский А. Л.* Фононное торможение доменной границы в редкоземельном ортоферрите // ЖЭТФ. 1978. Т. 75. № 6(12). С. 2183.
325. *Tsang C. H., White R. L., White R. M.* Domain wall mobilities in YFeO_3 // J. Appl. Phys. 1978. V. 49. № 3. P. 1838.
326. *Tsang C. H., White R. L., White R. M.* Transit-time measurements of domain wall mobilities in YFeO_3 // J. Appl. Phys. 1978. V. 49. № 12. P. 6052.
327. *Tsang C. H., White R. L., White R. M.* Spin-wave damping of domain walls in YFeO_3 // J. Appl. Phys. 1978. V. 49. № 12. P. 6063.
328. *Четкин М. В., Курбатова Ю. Н., Шапаева Т. Б.* Исследование высокоскоростной динамики доменных границ в пленках ферритов-гранатов в больших плоскостных полях // Сборник трудов XXI Международной школы-семинара «Новое в магнетизме и магнитных материалах». — М: Изд-во Физ. фак. МГУ. 2009. С. 144.
329. *Четкин М. В., Курбатова Ю. Н., Шапаева Т. Б., Борщевский О. А.* Гироскопическая квазирелятивистская динамика антиферромагнитного вихря на квазирелятивистской доменной границе ортоферрита иттрия // Сборник трудов XIX Международной школы-семинара «Новые магнитные материалы микроэлектроники». — М: Изд-во Физ. фак. МГУ. 2004. С. 84.

330. *Четкин М. В., Курбатова Ю. Н., Шапаева Т. Б., Борщеговский О. А.* Динамика антиферромагнитных вихрей в доменных границах ортоферрита иттрия // Сборник трудов XX Международной школы-семинара «Новые магнитные материалы микроэлектроники». М.: Изд-во Физ.фак. МГУ. 2006. С. 57.
331. *Рандошкин В. В.* Динамика доменных стенок в висмутсодержащих монокристаллических пленках феррит-гранатов // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. МГУ. 2003.
332. *Дурасова Ю. А., Иванов Л. П., Клепарский В. Г., Логгинов А. С., Рандошкин В. В., Телеснин Р. В.* Исследование начальной стадии перемагничивания в пленках ферритов-гранатов // ФТТ. 1980. Т. 22. № 5. С. 1522.
333. *Иванов Л. П., Логгинов А. С., Непокойчицкий Г. А.* Экспериментальное обнаружение нового механизма движения доменных границ в пленках ферритов-гранатов // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1982. Т. 25. № 1. С. 88.
334. *Иванов Л. П., Логгинов А. С., Непокойчицкий Г. А.* Экспериментальное обнаружение магнитных возмущений, генерируемых доменной границей // Препринт физфака МГУ. № 4. М. 1982.
335. *Иванов Л. П., Логгинов А. С., Непокойчицкий Г. А.* Экспериментальное обнаружение нового механизма движения доменных границ в ортоферритах // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 9. № 14. С. 865.
336. *Иванов Л. П., Логгинов А. С., Непокойчицкий Г. А.* Экспериментальное обнаружение нового механизма движения доменных границ в сильных магнитных полях // ЖЭТФ. 1983. Т. 84. № 3. С. 1006.
337. *Иванов Л. П., Логгинов А. С., Непокойчицкий Г. А., Никитин Н. И.* Влияние магнитной анизотропии на процессы импульсного перемагничивания пленок ферритов-гранатов // ФТТ. 1983. Т. 25. № 3. С. 839.
338. *Лисовский Ф. В., Мансветова Е. Г., Николаева Е. П.* Формирование устойчивых доменных структур с симметрией, описываемой пространственными группами $P6mm$, $C2mm$, $P2ab$, в процессах самоорганизации магнитного момента в пленках // Сборник трудов XIII Всесоюзной школы-семинара «Новые магнитные материалы микроэлектроники (НМММ-1992)». Астрахань. 1992. Изд-во МГУ. С. 148.
339. *Лисовский Ф. В., Мансветова Е. Г., Николаева Е. П., Николаев А. В.* Динамическая самоорганизация и симметрия распределений магнитного момента в тонких пленках // ЖЭТФ. 1993. Т. 103. № 1. С. 213.
340. *Лисовский Ф. В., Мансветова Е. Г., Пак Ч. М.* Сценарии упорядочения и структура самоорганизующихся двумерных массивов доменов в тонких магнитных пленках // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. № 3. С. 1031.
341. *Hu J., Westervelt R. M.* Collective transport in two-dimensional magnetic bubble arrays // Phys. Rev. B. 1995. V. 51. № 23. P. 17279.
342. *Логгунов М. В., Герасимов М. В.* Формирование двумерных решеток доменов в гармоническом магнитном поле // Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 74. № 10. С. 551.
343. *Логгунов М. В., Герасимов М. В.* Формирование двумерных решеток доменов в импульсном и гармоническом магнитных полях // Сборник трудов XVIII Международной конференции «Новые магнитные материалы микроэлектроники (НМММ-2002)». М.: Изд-во МГУ. 2002. 474.

344. *Кандаурова Г. С.* Новые явления в низкочастотной динамике коллектива магнитных доменов // УФН. 2002. Т. 172. № 10. С. 1165.
345. *Осадченко В. Х., Кандаурова Г. С., Пашко А. Г., Шинкоренко А. А.* Упорядоченные динамические доменные структуры пленки феррита-граната в переменных полях инфразвуковых частот // Сборник трудов XIX Международной школы-семинара «Новые магнитные материалы микроэлектроники». М: Изд-во Физ. фак. МГУ. 2004. С. 106.
346. *Осадченко В. Х., Кандаурова Г. С., Пашко А. Г.* Вихревые динамические доменные структуры // Сборник трудов XIX Международной школы-семинара «Новые магнитные материалы микроэлектроники (НМММ-2004)». М: Изд-во Физ. фак. МГУ. 2004. С. 141.
347. *Осадченко В. Х., Кандаурова Г. С., Пашко А. Г.* Время формирования системы динамических спиральных доменов в пленке феррита-граната // Сборник трудов XX Международной школы-семинара «Новые магнитные материалы микроэлектроники (НМММ-2004)». М: Изд-во Физ. фак. МГУ. 2006. С. 467.
348. *Осадченко В. Х., Пашко А. Г.* Зависимость от температуры времени жизни динамических спиральных доменов в пленке феррита-граната // Сборник трудов XX Международной школы-семинара «Новые магнитные материалы микроэлектроники (НМММ-2006)». М: Изд-во Физ. фак. МГУ. 2006. С. 469.
349. *Кандаурова Г. С., Лобашева Н. А.* Разнообразие форм спиральных динамических доменов в пленках ферритов-гранатов // Сборник трудов XX Международной школы-семинара «Новые магнитные материалы микроэлектроники (НМММ-2006)». М: Изд-во Физ. фак. МГУ. 2006. С. 498.
350. *Лисовский Ф. В., Чижик Е. С., Щеглов В. И.* Магнитооптическое исследование амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик колебаний плоской доменной границы в пленках ферритов-гранатов // РЭ. 1987. Т. 32. № 3. С. 650.
351. *Ильяшенко Е. И., Лисовский Ф. В., Щеглов В. И., Юрченко С. Е.* О влиянии наклона оси легкого намагничивания на подвижность доменных границ в тонких пленках ферритов-гранатов // ФТТ. 1977. Т. 19. № 3. С. 898.
352. *Аваева И. Г., Лисовский Ф. В., Щеглов В. И.* Низкочастотные спектры возбуждения и подвижность доменных границ в тонких пленках ферритов-гранатов // ФТТ. 1978. Т. 20. № 7. С. 2051.
353. *Shumate P. W.* Magneto-optic-measurement techniques for magnetic-bubble materials // IEEE Trans. on Magn. 1971. V. 7. № 3. P. 586.
354. *Thiele A. A.* Excitation spectrum of magnetic domain walls // Phys. Rev. B. 1973. V. 7. № 1. P. 391.
355. *De Leeuw F. H., Robertson J. M.* Observation and analysis of magnetic domain wall oscillations in Ga:YIG films // J. Appl. Phys. 1975. V. 46. № 7. P. 3182.
356. Ферромагнитный резонанс и поведение ферромагнетиков в переменных магнитных полях. Сб. статей: Пер. с англ. Под ред. С. В. Вонсовского. — М.: ИЛ. 1952.
357. *Becker R.* // J. Phys. Rad. 1951. V. 12. № 3. P. 332. Эта статья опубликована в труднодоступном издании. Имеется перевод на русский язык в [356].

358. *Döring W.* // *Zs. f. Naturforsch.* 1948. Bd.3a. №7. S.373. Эта статья опубликована в труднодоступном издании. Имеется перевод на русский язык в [356].
359. *Щеглов В.И.* Возбуждение асинхронных колебаний доменной структуры железо-иттриевого граната высокочастотным магнитным полем // ПЖТФ. 1980. Т. 6. №6. С. 327.
360. *Winter J.M.* Bloch-wall excitation. Applications to nuclear resonance in Bloch-wall // *Phys. Rev.* 1961. V. 124. №2. P. 452.
361. *Туров Е.А., Петров М.П.* Ядерный магнитный резонанс в ферро- и антиферромагнетиках. — М.: Наука. 1969.
362. *Крафтмахер Г.А., Мериакри В.В., Червоненкис А.Я., Щеглов В.И.* Естественный связанный с доменными стенками резонанс в ортоферритах на субмиллиметровых волнах // ЖЭТФ. 1972. Т. 63. № 10. С. 1353.
363. *Киров С.А., Пильщиков А.И., Сырьев Н.Е.* Магнитостатические типы колебаний в образце с доменной структурой // ФТТ. 1974. Т. 16. № 11. С. 3051.
364. *Киров С.А., Пильщиков А.И., Сырьев Н.Е.* Спектры магнитостатических колебаний образца с доменной структурой // ФТТ. 1975. Т. 17. № 9. С. 2646.
365. *Вызулин С.А., Киров С.А., Сырьев Н.Е.* Магнитостатические колебания в эллипсоиде с доменной структурой // ФТТ. 1979. Т. 21. № 12. С. 3737.
366. *Вызулин С.А., Киров С.А., Сырьев Н.Е.* Спектр магнитостатических колебаний эллипсоида с доменной структурой // Вестник МГУ. Серия 3: Физика, астрономия. 1981. Т. 22. № 3. С. 49.
367. *Вызулин С.А., Киров С.А., Сырьев Н.Е.* Влияние доменной структуры на спектр магнитостатических колебаний ферритовой пластинки // Вестник МГУ. Серия 3: Физика, астрономия. 1983. Т. 24. № 1. С. 92.
368. *Вызулин С.А., Киров С.А., Сырьев Н.Е.* Магнитостатические волны в ферритовой пластинке с доменной структурой // Вестник МГУ. Серия 3: Физика, астрономия. 1984. Т. 25. № 4. С. 70.
369. *Вызулин С.А., Киров С.А., Сырьев Н.Е.* Волны смещений доменных границ в ферритовой пластине // РЭ. 1985. Т. 30. № 1. С. 179.
370. *Пильщиков А.И.* Нестабильность спиновых волн в образце с доменной структурой // ЖЭТФ. 1974. Т. 66. № 2. С. 679.
371. *Dötsch H., Schmitt H.J., Muller J.* Detection and generation of magnetic bubble domains using ferromagnetic resonance // *Appl. Phys. Lett.* 1973. V. 23. № 11. P. 639.
372. *Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Кармазин С.В.* Наблюдение бегущих магнитостатических волн в пленках ЖИГ при неполном насыщении // ПЖТФ. 1983. Т. 9. № 3. С. 11.
373. *Kostenko V.I., Sigal M.A.* Magnetostatic waves in a thin uniaxial platelet with stripe domain magnetized along easy axis // *Phys. Stat. Sol. (b).* 1992. V. 170. № 3. P. 569.
374. *Галкин О.Л., Зильберман П.Е., Кармазин С.В.* Статистическая намагнитченность и магнитостатические волны в ферромагнитных пленках с малой одноосной анизотропией при неполном насыщении в нормальном поле // РЭ. 1985. Т. 30. № 4. С. 735.

375. Charap S.H., Artman J.O. Magnetostatic modes of stripe domain structures // JAP. 1978. V.49. №3. P. 1585.
376. Бегинин Е.Н. Возбуждение электромагнитных волн в слоистых структурах на основе сильноанизотропных ферритов в моно- и многодоменном режиме // I Объед. конф. по магнитоэлектронике. Тез. докл. 1995. — М.: ИРЭ РАН. С.167.
377. Казаков Г.Т., Сухарев А.Г., Филимонов Ю.А. Резонансное взаимодействие магнитостатических волн (МСВ) в пленках Ga,Sc:ЖИГ с полосовой доменной структурой (ПДС) // V Всес. шк.-сем. «Спинволновая электроника СВЧ». Тез. докл. Звенигород: ИРЭ РАН. 1991. С.83.
378. Зильберман П.Е., Казаков Г.Т., Тихонов В.В. Магнитостатические и быстрые магнитоупругие волны в пленках железо-иттриевого граната с нерегулярной доменной структурой // РЭ. 1987. Т. 32. №4. С. 710.
379. Зильберман П.Е., Казаков Г.Т., Куликов В.М., Тихонов В.В. Влияние слабых подмагничивающих полей на распространение магнитостатических волн в пленках железоиттриевого граната субмикронной толщины // РЭ. 1988. Т. 33. №2. С. 347.
380. Зильберман П.Е., Куликов В.М., Тихонов В.В., Шейн И.В. Магнитостатические волны в пленках железоиттриевого граната при слабом подмагничивании // РЭ. 1990. Т. 35. №5. С. 986.
381. Шамсутдинов М.А., Фарзтдинов М.М., Екомасов Е.Г. Динамический скос магнитных подрешеток в магнитном поле и спиновые волны в редкоземельных ортоферритах с доменной структурой // ФТТ. 1990. Т. 32. №4. С. 1133.
382. Зильберман П.Е., Куликов В.М., Тихонов В.В., Шейн И.В. Нелинейные эффекты при распространении поверхностных магнитостатических волн в пленках железо-иттриевого граната в слабых магнитных полях // ЖЭТФ. 1991. Т. 99. №5. С. 1566.
383. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. — М.: Наука-Физматлит. 2000.
384. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. — М.: ФИЗМАТЛИТ. 2003.
385. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир. 1977.
386. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. — М.: Наука. 1988.
387. Буллаф Р., Кодри Ф. (ред.). Солитоны. Пер. с англ. / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. — М.: Мир. 1983.
388. Буллаф Р., Кодри Ф. Солитон и его история // В кн. Солитоны. Пер. с англ. / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. — М.: Мир. 1983. С. 11–77.
389. Математическая энциклопедия. Т.5. — М.: Советская энциклопедия. 1985. С. 74–75. Статья «Солитон».
390. Тода М. Нелинейная решетка (цепочка Тоды) // В кн. Солитоны. Пер. с англ. / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. — М.: Мир. 1983. С. 163–174.
391. Левич В.Г., Вдовин Ю.А., Мямлин В.А. Курс теоретической физики. Т. 2. — М.: Наука. 1971.
392. Математическая энциклопедия. Т.4. — М.: Советская энциклопедия. 1984. С. 1191–1192. Статья «Синус Гордона уравнение».

393. Математическая энциклопедия. Т. 5. — М.: Советская энциклопедия. 1985. С. 666. Статья «Фреше пространство».
394. *Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H.* Method for solving the sine-Gordon equation // *Phys. Rev. Lett.* 1973. V. 30. № 25. P. 1262.
395. *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Существенно нелинейная одномерная модель классической теории поля // *Теоретич. и матем. физика.* 1974. Т. 21. № 2. С. 160.
396. *Лэм Дж. (мл.), Маклафлин Д.* Аспекты солитонной физики // В кн. *Солитоны.* Пер. с англ. / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. — М.: Мир. 1983. С. 78.
397. *Буллаф Р., Кодри Ф., Гиббс Г.* Двойное уравнение sine-Gordon: система, имеющая физические приложения // В кн. *Солитоны.* Пер. с англ. / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. — М.: Мир. 1983. С. 122.
398. Математическая энциклопедия. Т. 2. — М.: Советская энциклопедия. 1979. С. 874–875. Статья «Клейна–Гордона уравнение».
399. *Давыдов А. С.* Квантовая механика. — М.: Гос. издат. физ.-мат. лит. 1963.
400. *Швебер С.* Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. — М.: ИЛ. 1963.
401. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука. 1976.
402. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука. 1973.
403. Математическая энциклопедия. Т. 5. — М.: Советская энциклопедия. 1985. С. 911–915. Статья «Штурма–Лиувилля обратная задача».
404. Физическая энциклопедия. Т. 3. — М.: Большая Российская энциклопедия. 1992. С. 388–389. Статья «Обратной задачи рассеяния метод».
405. *Васильева А. Б., Тихонов Н. А.* Интегральные уравнения. — М.: ФИЗМАТЛИТ. 2002.
406. *Ньюэлл А.* Солитоны в математике и физике. — М.: Мир. 1989.
407. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Мир. 1987.
408. *Ньюэлл А.* Обратное преобразование рассеяния // В кн. *Солитоны.* Пер. с англ. / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. — М.: Мир. 1983. С. 193.
409. *Захаров В. Е.* Метод обратной задачи рассеяния // В кн. *Солитоны.* Пер. с англ. / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. — М.: Мир. 1983. С. 270.
410. *Вадаи М.* Обобщенная матричная форма метода обратной задачи рассеяния // В кн. *Солитоны.* Пер. с англ. / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. — М.: Мир. 1983. С. 310.
411. *Калоджеро Ф., Дегасперис А.* Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений. — М.: Мир. 1985.
412. *Lamb G. L., Jr.* Coherent optical pulse propagation as an inverse problem // *Phys. Rev.* 1974. V. A9. P. 422.
413. *Захаров В. Е., Тахтаджян В. Е., Фаддеев Л. Д.* Полное описание решений «sin-Gordon» уравнения // *ДАН.* 1974. № 6. С. 219.
414. *Корн Г., Корн Т.* // *Справочник по математике для научных работников и инженеров.* М.: Наука. 1973.

415. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука. 1965.
416. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — М., Л.: ОГИЗ. Гос. изд. техн.-теор. лит. 1945.
417. *Мэтьюз Дж., Уокер Р. Л.* Математические методы физики. — М.: Атомиздат. 1972.
418. *Стрелков С. П.* Механика. — М.: Наука. 1965.
419. Физическая энциклопедия. — М.: Советская энциклопедия. 1988. Т. 1. С. 39. Статья «Активная среда».
420. Физическая энциклопедия. — М.: Советская энциклопедия. 1990. Т. 2. С. 140. Статья «Инверсия населенностей».
421. Физическая энциклопедия. — М.: Советская энциклопедия. 1990. Т. 2. С. 319. Статья «Квантовая электроника».
422. Физическая энциклопедия. — М.: Советская энциклопедия. 1990. Т. 2. С. 546. Статья «Лазер».
423. *Калашиников С. Г.* Электричество. — М.: Наука. 1964.
424. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Т. 3. Электричество. — М.: Наука. 1977.
425. *Левич В. Г.* Курс теоретической физики. Т. 1. — М.: Наука. 1969.
426. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. — М.: Сов. радио. 1957.
427. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Распространение волн через тонкие слои и пленки. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2010.
428. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть первая. Прямой метод. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2011.
429. *Сул Г.* Источник и использование нестабильностей при ферромагнитном резонансе // В сб.: «Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах (сборник статей, перевод с английского под ред. А. Г. Гуревича)». — М.: ИЛ. 1961. С. 109. (Перевод статьи: Suhl H // J. Appl. Phys. 1958. V. 29. № 3. P. 416).
430. *Стрелков С. П.* Введение в теорию колебаний. — М.: Наука. 1964.
431. *Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н.* Основы теории колебаний. — М.: Наука. 1978.
432. *Каплан А. Е., Кравцов Ю. А., Рылов В. А.* Параметрические генераторы и делители частоты. — М.: Советское радио. 1966.
433. *Сул Г.* Теория ферромагнитного резонанса при больших уровнях высокочастотной мощности // В сб. «Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах (сборник статей, перевод с английского под ред. А. Г. Гуревича)». — М.: ИЛ. 1961. С. 163. (Перевод статьи: Suhl H // J. Phys. Chem. Sol., 1957, V. 1. № 4. P. 209).
434. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. — М.: Радио и связь. 1988.
435. *Никольский В. В., Никольская Т. И.* Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Наука. 1989.
436. *Красюк Н. П., Дымович Н. Д.* Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Высшая школа. 1974.

437. *Ионкин П. А., Мельников Н. А., Даревский А. И., Кухаркин Е. С.* Теоретические основы электротехники. Часть 1. Основы теории цепей. — М.: Высшая школа. 1965.
438. *Даревский А. И., Кухаркин Е. С.* Теоретические основы электротехники. Часть 2. Основы теории электромагнитного поля. — М.: Высшая школа. 1965.
439. *Чертов А. Г.* Единицы физических величин. — М.: Высшая школа. 1977.
440. *Сена Л. А.* Единицы физических величин и их размерности. — М.: Наука. 1977.
441. *Келлер Ю. И., Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Дисперсионные свойства электромагнитных волн в касательно намагниченной ферритовой пластине // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2018. № 4. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr18/7/text.pdf>.
442. *Локк Э. Г.* Свойства изочастотных зависимостей и законы геометрической оптики // УФН. 2008. Т. 178. № 4. С. 397.
443. *Ландсберг Г. С.* Оптика. — М.: Наука, 1976.
444. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Кирпичёва О. А., Голубев Е. А., Калинин Ю. Е., Ситников А. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Механизм динамической проводимости аморфных наногранулированных пленок «металл-диэлектрик» в диапазоне сверхвысоких частот // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2014, № 4. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr14/12/text.pdf>.
445. *Суздальев И. П.* Нанотехнология. Физико-химия нанокластеров, наноструктур и наноматериалов. — М.: КомКнига. 2006.
446. *Рит М.* Наноконструирование в науке и технике. Введение в мир нанорасчета. — Москва-Ижевск. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2005.
447. *Ignatov Yu. A., Scheglov V. I., Klimov A. A., Nikitov S. A.* Propagation of magnetostatic waves in ferromagnetic films with variable thickness // International conference «Functional Materials» (ICFM-2009). Parteni., Crimea. Ukraine. Book of Abstracts. Simferopol: TNU. 2009. P. 294.
448. *Игнатов Ю. А., Климов А. А., Никитов С. А., Щеглов В. И.* Распространение поверхностных магнитостатических волн в одномерном магнитном кристалле переменной толщины // ФТТ. 2010. Т. 52. № 10. С. 1950.
449. *Ольховский И. И.* Курс теоретической механики для физиков. — М.: Наука. 1970.
450. *Шилов Г. Е.* Введение в теорию линейных пространств. — М.-Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит. 1952.
451. *Сушкевич А. К.* Основы высшей алгебры. — М.-Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит. 1941.
452. *Ефимов Н. В.* Краткий курс аналитической геометрии. — М.-Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит. 1952.
453. *Делоне Б. Н., Райков Д. А.* Аналитическая геометрия. Том 1. — М.: ОГИЗ Гостехиздат. 1948.
454. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. — М.: Наука. 1965.

455. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. — М., Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит. 1951.
456. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. — М.: Физматгиз. 1963.
457. *Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З.* Численные методы анализа. — М.: Физматгиз. 1963.
458. *Антонов Л. И., Осипов С. Г., Хапаев М. М.* Расчет доменной стенки методом установления // ФММ. 1983. Т. 55. № 5. С. 917.
459. *Антонов Л. И., Терновский В. В., Хапаев М. М.* О расчете периодических доменных структур в ферромагнитных материалах // ФММ. 1989. Т. 67. № 1. С. 57.
460. *Антонов Л. И., Мухина Е. А., Лукашева Е. В.* Магнитное поле двумерного периодического распределения намагниченности // ФММ. 1994. Т. 78. № 4. С. 5.
461. *Лукашева Е. В.* Двумерная микромагнитная структура намагниченности одноосных магнитных пленок. Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. Москва. 1995.
462. *Антонов Л. И., Лукашева Е. В., Миронова Г. А., Скачков Д. Г.* Динамическое установление равновесного периода в структуре намагниченности ферромагнитных пленок // ФММ. 2000. Т. 90. № 3. С. 5.
463. *Антонов Л. И., Лукашева Е. В., Миронова Г. А., Скачков Д. Г.* Динамическое установление распределения намагниченности в ферромагнитных пленках // Сборник трудов XVII Международной конференции «Новые магнитные материалы микроэлектроники (НМММ-2000)». Москва. 2000. Изд-во МГУ. С. 507.
464. *Антонов Л. И., Лукашева Е. В., Миронова Г. А., Скачков Д. Г.* Магнитное поле периодической структуры намагниченности в тонкой магнитной пленке // Сборник трудов XVII Международной конференции «Новые магнитные материалы микроэлектроники (НМММ-2000)». Москва. 2000. Изд-во МГУ. С. 510.
465. *Антонов Л. И., Лукашева Е. В., Миронова Г. А., Скачков Д. Г.* Структурные неоднородности намагниченности в доменных стенках // Сборник трудов XVII Международной конференции «Новые магнитные материалы микроэлектроники (НМММ-2000)». Москва. 2000. Изд-во МГУ. С. 514.
466. *Антонов Л. И., Лукашева Е. В., Попкова М. В.* Идеальная кривая намагничивания тонкой одноосной ферромагнитной пленки // Сборник трудов XVIII Международной конференции «Новые магнитные материалы микроэлектроники (НМММ-2002)». Москва. 2002. Изд-во МГУ. С. 147.
467. *Антонов Л. И., Миронова Г. А., Лукашева Е. В., Скачков Д. Г., Паршина Ю. В.* Горизонтальные блоховские линии в доменной стенке тонкой ферромагнитной пленки // Сборник трудов XVIII Международной конференции «Новые магнитные материалы микроэлектроники (НМММ-2002)». Москва. 2002. Изд-во МГУ. С. 410.
468. *Лукашева Е. В., Попкова М. В., Синило П. В.* Эволюция доменной структуры тонких магнитных пленок в процессе идеального намагничивания // Сборник трудов XVII Международной конференции «Новые магнитные материалы микроэлектроники (НМММ-2006)». Москва. 2006. Изд-во МГУ. С. 510.

469. Антонов Л. И., Жукарев А. С., Поляков П. А., Скачков Д. Г. Поле вектора намагниченности одноосной ферромагнитной пленки // ЖТФ. 2004. Т. 74. № 3. С. 83.
470. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М.: Мир. 1988.
471. Вашковский А. В., Локк Э. Г., Щеглов В. И. Распространение безобменных спиновых волн в ферритовых пленках с доменной структурой. Письма в ЖЭТФ. 1996. Т. 63. № 7. С. 544.
472. Зубков В. И., Локк Э. Г., Щеглов В. И. Распространение ПМСВ в ненасыщенных ферритовых пленках с полосовой доменной структурой // Электродинамика и техника СВЧ и КВЧ. 1996. Т. 4. № 2(14). С. 106.
473. Зубков В. И., Локк Э. Г., Щеглов В. И. Распространение объемных МСВ в ненасыщенных ферритовых пленках с полосовой доменной структурой // Электродинамика и техника СВЧ и КВЧ. 1996. Т. 4. № 2(14). С. 108.
474. Вашковский А. В., Локк Э. Г., Щеглов В. И. Распространение магнитостатических волн в ненасыщенных ферритовых пленках с полосовой доменной структурой // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. № 3. С. 1016.
475. Вашковский А. В., Локк Э. Г., Щеглов В. И. Гистерезис характеристик магнитостатических волн в ферритовых пленках с полосовыми доменами, векторы намагниченности которых ориентированы вблизи плоскости пленки // ЖЭТФ. 1998. Т. 114. № 4(10). С. 1430.
476. Вашковский А. В., Локк Э. Г., Щеглов В. И. Безобменные спиновые волны в пленках железиттриевого граната с полосовыми доменами, намагниченность внутри которых ориентирована вблизи плоскости пленки // Микроэлектроника. 1998. Т. 27. № 5. С. 393.
477. Вашковский А. В., Локк Э. Г., Щеглов В. И. Влияние наведенной одноосной анизотропии на доменную структуру и фазовые переходы пленок железиттриевого граната // ФТТ. 1999. Т. 41. № 11. С. 2034.
478. Вашковский А. В., Зубков В. И., Локк Э. Г., Щеглов В. И. Распространение поверхностных магнитостатических волн в ненасыщенных ферритовых пленках // Первая объединенная конференция по магнитоэлектронике. Тезисы докладов. Москва: ИРЭ РАН. 1995. С. 153.
479. Вашковский А. В., Зубков В. И., Локк Э. Г., Щеглов В. И. Распространение объемных магнитостатических волн в ненасыщенных ферритовых пленках // Первая объединенная конференция по магнитоэлектронике. Тезисы докладов. Москва: ИРЭ РАН. 1995. С. 155.
480. *Vashkovsky A. V., Lock E. H., Shcheglov V. I., Zubkov V. I.* Propagation of magnetostatic surface waves in nonsaturated ferrite films // XIII-th International Conference on Microwave Ferrites (Gyromagnetic Electronics and Electrodynamics). Conference Proceedings. Romania, Busteni. 1996. P. 140.
481. *Vashkovsky A. V., Lock E. H., Shcheglov V. I., Zubkov V. I.* Propagation of magnetostatic volume waves in nonsaturated ferrite films // XIII-th International Conference on Microwave Ferrites (Gyromagnetic Electronics and Electrodynamics). Conference Proceedings. Romania, Busteni. 1996. P. 147.
482. Зубков В. И., Локк Э. Г., Щеглов В. И. Распространение магнитостатических волн в ненасыщенных ферритовых пленках с полосовой доменной структурой // XV Всероссийская школа-семинар «Новые магнитные

- материалы микроэлектроники (НМММ-1996)». Тезисы докладов. — М.: МГУ. 1996. С. 267.
483. *Vashkovsky A. V., Lock E. H., Shcheglov V. I., Zubkov V. I.* Propagation of magnetostatic surface waves in ferrite films with a strip domain structure // Гиромангнитная бестоковая электроника (тезисы докладов V и VI Международных конференций по гиромангнитной бестоковой электронике). — М.: МЭИ. 1997. С. 33.
484. *Vashkovsky A. V., Lock E. H., Shcheglov V. I., Zubkov V. I.* Propagation of magnetostatic volume waves in ferrite films with a strip domain structure // Гиромангнитная бестоковая электроника (тезисы докладов V и VI Международных конференций по гиромангнитной бестоковой электронике). — М.: МЭИ. 1997. С. 40.
485. *Вашковский А. В., Локк Э. Г., Щеглов В. И.* Гистерезис характеристик магнитостатических волн в пленках железоиттриевого граната с доменной структурой // XVI международная школа-семинар «Новые магнитные материалы микроэлектроники (НМММ-1998)». Тезисы докладов. Ч. 1. М.: МГУ. 1998. С. 75.
486. *Vashkovsky A. V., Lock E. H., Shcheglov V. I., Zubkov V. I.* Propagation of magnetostatic waves in ferrite film with domain structure // Proc. XIV Int. Conf. on Microwave Ferrites (Gyromagnetic Electronics and Electrodynamics). Hungary. Eger. 1998. V. 1. P. 140.
487. *Вашковский А. В., Локк Э. Г., Щеглов В. И.* Роль наведенной одноосной анизотропии в формировании доменной структуры пленок железоиттриевого граната // Труды VIII Международной конференции по спинволновой электронике. Москва. 1999. С. 99.
488. *Вашковский А. В., Локк Э. Г., Щеглов В. И.* Магнонный кристалл на основе ферритовой пленки с доменной структурой // Сборник трудов XVI Международной конференции «Радиолокация и радиосвязь». — Москва-Фирсановка. МЭИ. 2008. С. 184.
489. *Щеглов В. И.* Дисперсия магнитостатических волн в анизотропной касательно намагниченной ферритовой пластине // XVI международная школа-семинар «Новые магнитные материалы микроэлектроники». Тезисы докладов. Ч. 1. — Москва. 1996. С. 127.
490. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Дисперсия магнитостатических волн в касательно намагниченной ферритовой пластине с нормальной одноосной анизотропией // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. № 22. С. 73.
491. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Ферромагнитный резонанс в касательно намагниченной ферритовой пластине с нормальной одноосной анизотропией при наличии доменной структуры // РЭ. 2000. Т. 45. № 10. С. 1263.
492. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Магнитостатические волны в касательно намагниченной ферритовой пластине с нормальной одноосной анизотропией в условиях ориентационного перехода // РЭ. 2012. Т. 57. № 5. С. 565.
493. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Частотно-полевые области существования и дисперсия магнитостатических волн, распространяющихся в касательно намагниченной ферритовой пластине с нормальной одноосной анизотропией // Электродинамика и техника СВЧ и КВЧ. 1999. Т. 7. № 3(24). С. 7.

494. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Дисперсия магнитостатических волн в касательно намагниченной ферритовой пластине с осью анизотропии, перпендикулярной ее плоскости // РЭ. 2000. Т. 45. № 4. С. 471.
495. *Shcheglov V.I., Zubkov V.I.* The dispersion of nonexchange magneto-static waves propagating in conditions of spin-reorientation phase transition by the in-plane magnetization of the ferrite plate with normal uniaxial anisotropy // Moscow Intern. Symp. on Magn. (MISM-1999). Book of Abstracts. Moscow. 1999. P. 202.
496. *Shcheglov V.I., Zubkov V.I.* The dispersion of magnetostatic waves propagating on in-plane magnetized ferrite slab having the normal uniaxial anisotropy // The Conference «10-th Microcoll». Proceedings book. Budapest. Hungary. 1999. Program. P. 12.
497. *Shcheglov V.I., Zubkov V.I.* The dispersion of magnetostatic waves in ferrite film with normal uniaxial anisotropy near the spin-reorientation phase transition // Special International Colloquium AMPERE — Molecular Dynamics and Phase Transitions. Extension Abstracts. Vilnius. Lithuania. 1999. P. 74.
498. *Shcheglov V.I., Zubkov V.I.* The ferromagnetic resonance by the spin-reorientation phase transition in ferrite slab with domain structure // Special International Colloquium AMPERE — Molecular Dynamics and Phase Transitions. Extension Abstracts. Vilnius. Lithuania. 1999. P. 75.
499. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Ферромагнитный резонанс при ориентационном фазовом переходе в ферритовой пластине с доменами // Труды VIII Международной конференции по спинволновой электронике. Москва. 1999. С. 125.
500. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Модель локальных эффективных полей для ферромагнитного резонанса в ферритовой пленке с доменами // XVII международная школа-семинар «Новые магнитные материалы микроэлектроники (НМММ-2000)» Сборник трудов. Москва. 2000. С. 376.
501. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Частотная щель в модели локальных эффективных полей для ферромагнитного резонанса в ферритовой пленке с доменами при ориентационном фазовом переходе // Международная конференция «Фазовые переходы и нелинейные явления в конденсированных средах». IV Международный семинар «Физика магнитных фазовых переходов». Сборник «Материалы конференции». Махачкала. 2000. С. 45.
502. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Измерение параметров пленок железиттриевого граната в ненасыщенном состоянии методом ферромагнитного резонанса // 7-ая Всероссийская научно-техническая конференция «Состояние и проблемы измерений». Тезисы докладов. Москва. 2000. С. 115.
503. *Shcheglov V.I., Zubkov V.I.* The ferromagnetic resonance by longitudinal magnetization of uniaxial ferrite film with domain structure // IX Международная конференция по спинволновой электронике. Сборник трудов. Москва. 2000. Приложение. С. 466.
504. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Использование ферромагнитного резонанса в ненасыщенных пленках железиттриевого граната для определения их магнитных параметров // Вторая объединенная конференция по магнитоэлектронике (международная). Тезисы докладов. Екатеринбург. 2000. С. 32.

505. Локк Э.Г., Щеглов В.И. Измерение магнитных параметров пленок железиттриевого граната методами ферромагнитного резонанса и магнитооптики // Вторая объединенная конференция по магнитоэлектронике (международная). Тезисы докладов. Екатеринбург. 2000. С. 34.
506. Зубков В.И., Щеглов В.И. Ферромагнитный резонанс при ориентационном фазовом переходе в ненасыщенной ферритовой пленке // Вторая объединенная конференция по магнитоэлектронике (международная). Тезисы докладов. Екатеринбург. 2000. С. 36.
507. Zubkov V.I., Shcheglov V.I. The ferromagnetic resonance by longitudinal magnetization of uniaxial ferrite film with domain structure // XV International Conference on Microwave Ferrites (Gyromagnetic Electronics and Electrodynamics). Conference Proceedings. Poland. Rokosovo. 2000. P. 24.
508. Зубков В.И., Щеглов В.И. Ферромагнитный резонанс при касательном намагничивании ферритовой пленки с доменами // Международная конференция «Физика и технические применения волновых процессов». Тезисы докладов. Том 2. Самара. 2001. С. 29.
509. Щеглов В.И. Магнитостатические волны при ориентационном переходе в анизотропной ферритовой пластине // Сборник трудов XXI Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ-2009)». Москва: МГУ. 2009. С. 945.
510. Зубков В.И., Щеглов В.И. Магнитостатические волны в одноосной ферритовой пластине в условиях ориентационного перехода // Сборник трудов IX Международного семинара «Магнитные фазовые переходы». Махачкала. Издание Института физики Дагестанского научного центра РАН. 2009. С. 75.
511. Зубков В.И., Щеглов В.И. Магнитостатические волны в ферритовой пластине с одноосной анизотропией в условиях ориентационного перехода // XII Всероссийская школа-семинар «Волновые явления в неоднородных средах (Волны-2010)». Тезисы докладов (электронный сборник на CD). Звенигород. Издание Физического факультета МГУ. 2010. Секция 8. С. 24.
512. Щеглов В.И. Электромагнитные волны в магнитной среде с одноосной анизотропией в условиях ориентационного перехода // Сборник трудов XVIII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». М.: ПЛАНТИ. 2010. С. 173.
513. Щеглов В.И. Дисперсия электромагнитной волны в анизотропной магнитной среде в условиях ориентационного перехода // Сборник трудов X Международного семинара «Магнитные фазовые переходы». Махачкала. Издание Института физики Дагестанского научного центра РАН. 2010. С. 107.
514. Щеглов В.И. Электромагнитные волны в магнитоодноосной среде в условиях ориентационного перехода // XIII Всероссийская школа-семинар «Волновые явления в неоднородных средах (Волны-2011)». Тезисы докладов (электронный сборник на CD). Звенигород. Издание Физического факультета МГУ. 2011. Секция 2 (Электродинамика). С. 2.
515. Shcheglov V.I., Zubkov V.I. Magnetostatic wave dispersion in magnetic film by orientation transition // Book of Abstracts of Moscow International

- Symposium on Magnetism (MISM-2011). Book of Abstracts. Published by «Изд-во Физ. фак. МГУ». Moscow. 2011. P. 784.
516. *Щеглов В.И.* Некоторые свойства дифракции света на доменной структуре // ФТТ. 1973. Т. 15. № 4. С. 1046.
517. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика (Теоретическая физика. Т. 1). — М.: Наука. 1965.
518. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Магнитостатические волны в ферритовой пластине в условиях ориентационного перехода // Сборник трудов XII Международной конференции «Магнетизм, дальнее и ближнее спин-спиновое взаимодействие». Москва–Фирсановка: Изд. МЭИ. 2009. С. 80.
519. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля (Теоретическая физика. Т. 2). — М.: Наука. 1967.
520. *Малугин В.А.* Математика для экономистов: Линейная алгебра. Курс лекций. — М.: Эксмо. 2006.
521. *Малугин В.А.* Математика для экономистов: Линейная алгебра. Задачи и упражнения. — М.: Эксмо. 2006.
522. *Дикштейн И.Е., Щеглов В.И.* Восприимчивость композиционной среды, состоящей из анизотропных сферических ферритовых частиц // Сборник трудов XVII международной школы-семинара «Новые магнитные материалы микроэлектроники (НМММ-2000)». Москва. 2000. С. 21.
523. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Магнитная восприимчивость композиционной среды с изменяемыми параметрами, состоящей из произвольно ориентированных анизотропных ферритовых частиц // РЭ. 2010. Т. 55. № 4. С. 488.
524. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Магнитная восприимчивость композиционной среды, состоящей из анизотропных ферритовых частиц с различным упорядочением ориентации осей анизотропии // РЭ. 2013. Т. 58. № 2. С. 143.
525. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Отражение электромагнитных волн от композиционной среды, содержащей ферритовые элементы в условиях ориентационного перехода // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ. 2011. С. 245.
526. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Отражение и прохождение электромагнитных волн при падении на трехслойную композиционную структуру, содержащую гиромангнитные элементы // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ. 2012. С. 260.
527. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Отражение электромагнитных волн от композиционной решетки из анизотропных ферритовых сфер // Сборник трудов XXII Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ-2012)». Астрахань: АГУ. Изд. дом «Астраханский университет». 2012. С. 277.
528. *Дикштейн И.Е., Щеглов В.И.* Высокочастотная восприимчивость композиционной среды, выполненной на основе анизотропных сферических ферритовых частиц // Международная конференция «Физика и технические применения волновых процессов». Тезисы докладов. Том 2. Самара. 2001. С. 14.

529. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Восприимчивость композиционной среды из анизотропных ферритовых сфер в условиях ориентационного перехода // Сборник трудов VIII международного семинара «Магнитные фазовые переходы». Махачкала: Институт физики ДагНЦ РАН. 2007. С. 63.
530. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Композиционная среда, содержащая анизотропные ферритовые частицы в немагнитной матрице // Тезисы докладов 18-й Международной Крымской конференции «СВЧ техника и телекоммуникационные технологии (КрыМиКо-2008)». Севастополь. Украина. 2008. С. 567.
531. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Динамическая восприимчивость композиционной среды, состоящей из произвольно ориентированных анизотропных ферритовых частиц // Сборник трудов XVI Международной конференции «Радиолокация и радиосвязь». Москва–Фирсановка: МЭИ. 2008. С. 304.
532. *Щеглов В.И.* Магнитная восприимчивость композиционной среды из анизотропных ферритовых частиц // Сборник трудов XXI Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ-2009)». Москва: Изд-во МГУ. 2009. С. 948.
533. *Shcheglov V.I., Zubkov V.I.* Magnetic susceptibility of composite medium consisted of uniaxial ferrite particles embedded in nonmagnetic insulating matrix // International conference «Progress In Electromagnetics Research Symposium (PIERS)». Moscow. 2009. Book of Abstracts. P. 896.
534. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Магнитная восприимчивость композиционной среды, состоящей из произвольно ориентированных анизотропных ферритовых частиц // Сборник трудов IX Международного семинара «Магнитные фазовые переходы». Махачкала. 2009. Институт физики ДагНЦ РАН. 2009. С. 63.
535. *Shcheglov V.I., Zubkov V.I.* The microwave susceptibility of composite medium consisting of ferrite particles with uniaxial anisotropy // International conference «Functional Materials (ICFM-2009)». Partenit. Crimea. Ukraine. Book of Abstracts. Simferopol: TNU. 2009. P. 299.
536. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Формирование заданных свойств магнитной восприимчивости композиционной среды, состоящей из анизотропных ферритовых частиц // Сборник трудов XVIII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва–Фирсановка: МЭИ. Изд. «ПЛАНТИ». 2010. С. 133.
537. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Магнитная восприимчивость композиционной среды, состоящей из частично упорядоченных анизотропных ферритовых частиц в условиях ориентационного перехода // Сборник трудов X Международного семинара «Магнитные фазовые переходы». Махачкала. Институт физики ДагНЦ РАН. 2010. С. 169.
538. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Магнитная восприимчивость композиционной среды, состоящей из анизотропных ферритовых частиц // XIII Всероссийская школа-семинар «Волновые явления в неоднородных средах (Волны-2011)». Тезисы докладов (электронный сборник на CD). Звенигород: Физ. фак. МГУ. 2011. Секция 2 (Электродинамика). С. 7.
539. *Shcheglov V.I., Zubkov V.I.* Magnetic susceptibility of composite medium consisted of uniaxial ferrite particles // Book of Abstracts of «Moscow

- International Symposium on Magnetism (MISM-2011)». Moscow: «Изд-во Физ. фак. МГУ». 2011. P. 783.
540. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Отражение электромагнитных волн от композиционной среды, содержащей анизотропные ферритовые элементы // Сборник материалов «XV Международной зимней школы-семинара по электронике сверхвысоких частот и радиофизике». Саратов: СГУ. 2012. С. 56.
541. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Тензор магнитной восприимчивости композиционной среды из анизотропных ферритовых частиц // «XXXIV Международная зимняя школа физиков-теоретиков (Коуровка 2012)». Тезисы докладов. Екатеринбург: ИФМ УрО РАН. 2012. С. 139.
542. *Shcheglov V.I., Zubkov V.I.* Electromagnetic waves propagation in multilayer composite structure consist of anisotropic ferrite elements // Book of Abstracts of «Moscow International Symposium on Spin Waves 2013 (SW-2013)». Saint Petersburg, Russia. Published by «Изд. ФТИ им. Иоффе». 2013. P.131.
543. *Антонец И.В., Щеглов В.И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть вторая. Метод матрицы. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2012.
544. *Антонец И.В., Щеглов В.И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть третья. Метод импеданса. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2012.
545. *Антонец И.В., Щеглов В.И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть четвертая. Специфические методы. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2013.
546. *Антонец И.В., Щеглов В.И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть пятая. Алгоритмические методы. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2011.
547. *Антонец И.В., Щеглов В.И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть шестая. Метод исключения. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2015.
548. *Антонец И.В., Щеглов В.И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть седьмая. Баланс энергий. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2015.
549. *Антонец И.В., Щеглов В.И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть восьмая. Периодические неоднородности. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2017.
550. *Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Эквивалентность скалярного одномерного и векторного электродинамического подходов к задаче о падении волны на пластину, решаемой методами прямым и усреднения // РЭ. 2010. Т. 55. № 2. С. 133.
551. *Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Алгоритм определения амплитуд внешних и внутренних волн при встречном падении двух одномерных волн на многослойную структуру // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ. 2011. С. 154.
552. *Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Алгоритм определения амплитуд отраженных и проходящих волн при симметричном

- падении двух встречных волн на многослойную неоднородную структуру // РЭ. 2012. Т. 57. № 1. С. 67.
553. Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Алгоритм определения амплитуд внешних и внутренних волн при падении встречных волн на многослойную структуру со ступенчатой неоднородностью // РЭ. 2013. Т. 58. № 1. С. 16.
554. Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Применение метода исключения для анализа распространения волн в многослойных средах со случайным распределением параметров слоев // РЭ. 2013. Т. 58. № 12. С. 1149.
555. Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Два простых алгоритма определения амплитуд внешних и внутренних колебаний при распространении встречных волн в многослойной неоднородной структуре // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2013. № 1. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jan13/11/text.pdf>.
556. Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Метод исключения для расчета распространения волн через среды со ступенчатыми неоднородностями // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2013. № 4. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr13/6/text.pdf>.
557. Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Применение метода исключения для расчета распространения волн через среды со ступенчатыми неоднородностями специального вида // Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ. 2013. С. 130.
558. Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Исследование методом исключения отражения и прохождения волн при распространении через многослойные среды с барьерными и периодическими неоднородностями // Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ. 2013. С. 145.
559. Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Исследование методом исключения распространения волн через многослойную среду с барьерными неоднородностями // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. № 1. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jan15/22/text.pdf>.
560. Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Пространственное распределение амплитуд внешних и внутренних волн в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью. Часть 1. Одномерная волна // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. № 2. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/feb15/1/text.pdf>.
561. Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Пространственное распределение амплитуд внешних и внутренних волн в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью. Часть 2. Электромагнитная волна // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. № 2. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/feb15/2/text.pdf>.
562. Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Пространственное распределение амплитуд внешних и внутренних волн в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью. Часть 3. Электромагнитная волна в магнитной среде // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. № 3. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/mar15/13/text.pdf>.

563. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Пространственное распределение амплитуд внешних и внутренних волн в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью. Часть 4. Волна в диссипативной среде // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. № 3. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/mar15/14/text.pdf>.
564. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Вторичная модуляция коэффициентов отражения и прохождения волны через ограниченную периодическую структуру // Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: ИНФРА-М. 2015. С. 132.
565. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Невзаимное распространение электромагнитных волн в многослойной структуре с магнитными элементами // Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: ИНФРА-М. 2015. С. 145.
566. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Пространственное распределение амплитуд электромагнитных волн, распространяющихся в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью // РЭ. 2017. Т. 62. № 12. С. 1224.
567. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Часть II. — М.: Наука. 1972.
568. *Будак Б. М., Фомин С. В.* Кратные интегралы и ряды. — М.: Наука. 1965.
569. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Электромагнитные волны, распространяющиеся в произвольном направлении в безграничной бигиротропной среде, обладающей круговой цилиндрической симметрией // РЭ. 2003. Т. 48. № 10. С. 1186.
570. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М.: Наука. 1970.

Научное издание

ШАВРОВ Владимир Григорьевич

ЩЕГЛОВ Владимир Игнатьевич

**ДИНАМИКА НАМАГНИЧЕННОСТИ
В УСЛОВИЯХ ИЗМЕНЕНИЯ ЕЁ ОРИЕНТАЦИИ**

Редактор *Е.С. Артоболевская*

Оригинал-макет: *Д.П. Вакуленко*

Оформление переплета: *А.В. Андросов*

Подписано в печать 17.01.2019. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 29,5. Уч.-изд. л. 36,0. Тираж 300 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерпериодика»

117342, г. Москва, ул. Бутлерова, д. 17Б

E-mail: porsova@fml.ru, sale@fml.ru

Сайт: <http://www.fml.ru>

Интернет-магазин: <http://www.fmlib.ru>

Отпечатано с электронных носителей издательства

в АО «Первая Образцовая типография»

Филиал «Чеховский Печатный Двор»

142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1

Сайт: www.chpd.ru. E-mail: sales@chpd.ru, тел.: 8 (499) 270-73-59

