

И. В. АНТОНЕЦ  
В. Г. ШАВРОВ  
В. И. ЩЕГЛОВ

# ВОЛНЫ В МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУРАХ

ЧАСТЬ 3

## МЕТОДЫ РАСЧЕТА: АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ, БАЛАНСА ЭНЕРГИЙ, КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ



ВОЛНЫ В МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУРАХ  
МЕТОДЫ РАСЧЕТА: АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ, БАЛАНСА ЭНЕРГИЙ, КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

ЧАСТЬ 3



**Игорь Викторович Антонец,**  
кандидат физико-математических наук,  
доцент Сыктывкарского  
государственного университета  
имени Питирима Сорокина



**Владимир Григорьевич Шавров,**  
доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий лабораторией  
магнитных явлений в микроэлектронике  
Института радиотехники и электроники  
имени В. А. Котельникова РАН



**Владимир Игнатьевич Щеглов,**  
кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник  
Института радиотехники и электроники  
имени В. А. Котельникова РАН



И. В. АНТОНЕЦ  
В. Г. ШАВРОВ  
В. И. ЩЕГЛОВ

# ВОЛНЫ В МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУРАХ

ЧАСТЬ 3

## МЕТОДЫ РАСЧЕТА: АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ, БАЛАНСА ЭНЕРГИЙ, КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

*Рекомендовано Федеральным учебно-методическим объединением в системе высшего образования по укрупненной группе специальностей и направлений подготовки 03.00.00 «Физика и астрономия» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки уровня магистратуры «Прикладные математика и физика» (03.04.01), «Физика» (03.04.02), «Радиофизика» (03.04.03), специалитета по специальности «Фундаментальная и прикладная физика» (03.05.02)*



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2024

УДК 537.874; 537.624

ББК 22.33

В 67

Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. **Волны в многослойных структурах. Часть 3. Методы расчета: алгоритмический, баланса энергий, конечных разностей.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2024. — 448 с. — ISBN 978-5-9221-1992-4.

Издание посвящено изложению основ методов расчета распространения одномерных и электромагнитных волн через многослойные структуры. Методами алгоритмическим, баланса энергий и конечно-разностным определены параметры распространяющихся волн, а также коэффициенты отражения и прохождения по энергии. Основное внимание уделено методу алгоритмическому, имеющему достаточно универсальный характер и допускающему простую машинную реализацию для структур с произвольным числом слоев. Выполнено подробное рассмотрение баланса и потоков энергии распространяющихся волн в применении к средам с комплексными параметрами, в том числе с учетом интерференционного потока. Приведена схема применения метода конечных разностей во временной области для расчета распространения волн в слоистых структурах. Решены некоторые задачи прикладного характера. Приведено множество примеров, и даны методические рекомендации, предназначенные для самостоятельной работы учащихся.

Книга предназначена специалистам, работающим в области физики волновых процессов, электродинамики, магнитных явлений, акустикам, инженерам и конструкторам СВЧ-, оптической и акустической аппаратуры, а также студентам и аспирантам соответствующих специальностей.

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор  
*А. К. Звездин* (главный научный сотрудник ИОФ им. А.М. Прохорова РАН);

доктор физико-математических наук, профессор  
*В. Н. Прудников* (физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова)

ISBN 978-5-9221-1992-4

© ФИЗМАТЛИТ, 2024

© И.В. Антонец, В.Г. Шавров,  
В.И. Щеглов, 2024

Научное издание

*АНТОНЕЦ Игорь Викторович*  
*ШАВРОВ Владимир Григорьевич*  
*ЩЕГЛОВ Владимир Игнатьевич*

**ВОЛНЫ В МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУРАХ**  
**Часть 3**  
**МЕТОДЫ РАСЧЕТА: АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ, БАЛАНСА ЭНЕРГИЙ,**  
**КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ**

Редактор *Е.С. Артоболевская*  
Оригинал-макет: *Д.П. Вакуленко*  
Оформление переплета: *В.Ф. Киселев*

Подписано в печать 03.07.2024. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 28. Уч.-изд. л. 30,8. Тираж 300 экз.  
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
117342, г. Москва, ул. Бутлерова, д. 17 Б  
E-mail: [porsova@fml.ru](mailto:porsova@fml.ru), [sale@fml.ru](mailto:sale@fml.ru)  
Сайт: <http://www.fml.ru>  
Интернет-магазин: <http://www.fmlib.ru>

Отпечатано с электронных носителей издательства  
в АО «Первая Образцовая типография»  
Филиал «Чеховский Печатный Двор»  
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1  
Сайт: [www.chpd.ru](http://www.chpd.ru). E-mail: [sales@chpd.ru](mailto:sales@chpd.ru), тел.: 8 (499) 270-73-59

ISBN 978-5-9221-1992-4



9 785922 119924

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |    |
|---|----|
| <b>Введение</b> . . . . .   | 13 |
| <b>Глава 1. Основные методы расчета распространения волн через многослойные структуры</b> . . . . . | 19 |
| 1.1. Общий обзор различных методов расчета. . . . .   | 19 |
| 1.1.1. Метод прямой . . . . .   | 19 |
| 1.1.2. Метод усреднения . . . . .   | 20 |
| 1.1.3. Метод характеристической матрицы . . . . .   | 21 |
| 1.1.4. Метод импеданса . . . . .  | 21 |
| 1.1.5. Метод исключения . . . . .   | 22 |
| 1.1.6. Метод пошагового алгоритма . . . . .   | 22 |
| 1.1.7. Метод переотражений . . . . .  | 23 |
| 1.2. Сравнительные характеристики различных методов расчета . . . . .                               | 23 |
| 1.2.1. Метод прямой (параллельный) . . . . .  | 23 |
| 1.2.2. Метод усреднения (параллельный) . . . . .  | 24 |
| 1.2.3. Метод матрицы (последовательный) . . . . .   | 24 |
| 1.2.4. Метод импеданса (последовательный) . . . . .   | 24 |
| 1.2.5. Метод исключения (последовательный) . . . . .  | 25 |
| 1.2.6. Метод пошагового алгоритма (последовательный) . . . . .                                      | 25 |
| 1.2.7. Метод переотражений (параллельный) . . . . .   | 26 |
| Выводы по главе 1 . . . . .   | 26 |
| <b>Глава 2. Укороченный метод пошагового алгоритма</b> . . . . .                                    | 27 |
| 2.1. Получение амплитуд распространяющихся волн прямым методом . . . . .                            | 27 |
| 2.1.1. Две среды, разделенные одной границей . . . . .  | 28 |
| 2.1.2. Три среды, разделенные двумя границами . . . . .   | 29 |
| 2.1.3. Четыре среды, разделенные тремя границами . . . . .  | 31 |
| 2.1.4. Пять сред, разделенные четырьмя границами . . . . .  | 33 |
| 2.2. Последовательное вычисление детерминантов . . . . .  | 35 |
| 2.2.1. Нулевые детерминанты . . . . .   | 35 |
| 2.2.2. Первые детерминанты . . . . .  | 37 |
| 2.3. Математический аппарат укороченного алгоритма . . . . .  | 40 |
| 2.3.1. Геометрия задачи . . . . .   | 40 |
| 2.3.2. Решение прямым методом . . . . .   | 41 |
| 2.3.3. Последовательные действия алгоритма . . . . .  | 42 |
| 2.3.4. Решения для трех, четырех и пяти сред . . . . .  | 43 |
| 2.4. Схема реализации алгоритма на ЭВМ . . . . .  | 45 |

|  |           |
|--|-----------|
| 2.5. Применение укороченного алгоритма для вычисления амплитуд внешних волн . . . . .                        | 46        |
| 2.5.1. Линейно-ступенчатое измерение волнового числа . . . . .   | 46        |
| 2.5.2. Интерференционное отражение падающей волны при воздействии встречной волны . . . . .                  | 49        |
| 2.5.3. Изменение фазы встречной волны . . . . .  | 49        |
| 2.5.4. Изменение параметров структуры . . . . .  | 50        |
| 2.6. Применение алгоритма для исследования свойств неоднородной среды. . . . .                               | 53        |
| 2.6.1. Общий характер зависимостей амплитуд внешних волн от числа слоев структуры . . . . .                  | 53        |
| 2.6.2. Критическое число ступенек при различном интервале волнового числа . . . . .                          | 55        |
| 2.6.3. Параметры отражения при малом изменении длины волны . . . . .   | 57        |
| 2.6.4. Осцилляции отражения при малой длине волны . . . . .  | 58        |
| 2.6.5. Соотношение между числом ступенек и точностью приближения . . . . .                                   | 60        |
| 2.7. Критерий выбора оптимального числа ступенек при ступенчатом приближении неоднородной среды . . . . .    | 63        |
| 2.8. Обобщение на случай электромагнитных волн . . . . .   | 64        |
| Выводы по главе 2 . . . . .  | 65        |
| <b>Глава 3. Полный метод пошагового алгоритма . . . . .</b>  | <b>67</b> |
| 3.1. Математический аппарат полного алгоритма . . . . .  | 67        |
| 3.1.1. Общая схема полного алгоритма . . . . .   | 68        |
| 3.1.2. Схема пошагового получения детерминантов . . . . .  | 68        |
| 3.1.3. Детерминанты для трех, четырех и пяти сред . . . . .  | 71        |
| 3.2. Схема реализации алгоритма на ЭВМ. . . . .  | 74        |
| 3.3. Применение алгоритма для исследования волн в структуре с линейным изменением волнового числа. . . . .   | 74        |
| 3.3.1. Линейное нарастание волнового числа . . . . .   | 74        |
| 3.3.2. Роль степени нарастания волнового числа . . . . .   | 78        |
| 3.3.3. Линейное убывание волнового числа . . . . .   | 80        |
| 3.3.4. Влияние падения волны встречного направления . . . . .  | 82        |
| 3.4. Локальная неоднородность структуры . . . . .  | 86        |
| 3.5. Роль потерь энергии в структуре . . . . .   | 89        |
| 3.6. Роль геометрической длины структуры . . . . .   | 91        |
| 3.7. Распространение волн через многослойные структуры с неоднородностью степенного вида . . . . .           | 93        |
| 3.7.1. Поворот графика функции относительно оси симметрии второго порядка . . . . .                          | 93        |
| 3.7.2. Поворот графика степенной функции . . . . .   | 95        |
| 3.7.3. Построение ступенчатой зависимости волнового числа от координаты . . . . .                            | 96        |
| 3.7.4. Отражение и прохождение волн через многослойные структуры с неоднородностью степенного вида . . . . . | 98        |
| Выводы по главе 3 . . . . .  | 100       |

|   |            |
|---|------------|
| <b>Глава 4. Применение метода алгоритма для расчета распространения одномерных волн через периодические структуры. . . . .</b>        | <b>104</b> |
| 4.1. Общая геометрия структуры с периодической неоднородностью . . . . .  | 104        |
| 4.2. Амплитуды волн в крайних слоях структуры . . . . .   | 106        |
| 4.2.1. Общая геометрия структуры . . . . .  | 106        |
| 4.2.2. Изменение среднего волнового числа . . . . .   | 106        |
| 4.2.3. Амплитуды волн внутри полос непропускания . . . . .  | 106        |
| 4.3. Амплитуды волн в различных слоях структуры. . . . .  | 108        |
| 4.3.1. Изменение номера слоя структуры . . . . .  | 108        |
| 4.3.2. Изменение среднего волнового числа . . . . .   | 110        |
| 4.4. Неоднородность пилообразного вида . . . . .  | 112        |
| 4.4.1. Общая геометрия пилообразной неоднородности . . . . .  | 112        |
| 4.4.2. Амплитуды волн в различных слоях структуры . . . . .   | 114        |
| 4.4.3. Сопоставление со случаем меандровой неоднородности . . . . .   | 114        |
| 4.5. Пространственная модуляция амплитуды . . . . .   | 115        |
| 4.5.1. Условия существования пространственной модуляции . . . . .   | 115        |
| 4.5.2. Основные режимы пространственной модуляции . . . . .   | 116        |
| 4.5.3. Интервалы существования различных режимов . . . . .  | 123        |
| 4.5.4. Динамика переходов между режимами . . . . .  | 124        |
| 4.5.5. Структура областей существования режимов по волновому числу . . . . .  | 127        |
| 4.6. Отражающие свойства структуры . . . . .  | 127        |
| 4.7. Пропускающие свойства структуры. . . . .   | 130        |
| 4.7.1. Замечание о частотных свойствах структур с периодическими неоднородностями . . . . .   | 130        |
| Выводы по главе 4 . . . . .   | 132        |
| <b>Глава 5. Применение метода алгоритма для расчета распространения электромагнитных волн через периодические структуры . . . . .</b> | <b>134</b> |
| 5.1. Геометрия задачи. . . . .  | 134        |
| 5.2. Обобщение постановки задачи на случай электромагнитных волн . . . . .  | 135        |
| 5.2.1. Введение электродинамических параметров . . . . .  | 135        |
| 5.2.2. Электродинамические параметры в случае проводящей среды . . . . .  | 136        |
| 5.2.3. Индексация волн прямого и обратного направлений . . . . .  | 137        |
| 5.2.4. Особенности геометрии задачи для случая электромагнитных волн . . . . .  | 138        |
| 5.3. Схема расчета методом пошагового алгоритма . . . . .   | 139        |
| 5.3.1. Общая схема пошагового алгоритма . . . . .   | 139        |
| 5.3.2. Аналитическая реализация алгоритма . . . . .   | 140        |
| 5.4. Амплитуды волн в крайних слоях структуры . . . . .   | 142        |
| 5.5. Изменение числа барьеров. . . . .  | 145        |
| 5.5.1. Минимальные значения амплитуды . . . . .   | 145        |
| 5.5.2. Максимальные значения амплитуды . . . . .  | 148        |

|  |            |
|--|------------|
| 5.6. Распределение амплитуд в слоях при большой вариации параметров . . . . .  | 149        |
| 5.6.1. Переход между распределениями амплитуды . . . . .   | 152        |
| 5.7. Слабая и сильная неоднородности. . . . .  | 155        |
| 5.8. Изменение соотношения проницаемостей слоев. . . . .   | 158        |
| Выводы по главе 5 . . . . .  | 159        |
| <b>Глава 6. Применение метода алгоритма для расчета распространения электромагнитных волн в среде с магнитными периодическими неоднородностями . . . . .</b> | <b>162</b> |
| 6.1. Геометрия задачи . . . . .  | 162        |
| 6.2. Электромагнитные волны в магнитной среде . . . . .  | 163        |
| 6.3. Скалярная магнитная проницаемость . . . . .   | 163        |
| 6.3.1. Частотные характеристики при малой проницаемости . . . . .  | 163        |
| 6.3.2. Распределение амплитуд в слоях при большой вариации параметров . . . . .  | 164        |
| 6.4. Тензорная магнитная проницаемость . . . . .   | 167        |
| 6.4.1. Волна в среде с тензорными параметрами . . . . .  | 167        |
| 6.4.2. Ориентация волнового вектора по нормали к оси гиротропии . . . . .  | 169        |
| 6.4.3. Поля гиромангнитной волны . . . . .   | 170        |
| 6.4.4. Полярная система координат . . . . .  | 171        |
| 6.4.5. Импедансы и адмиттансы . . . . .  | 172        |
| 6.5. Падение гиромангнитной волны на границу раздела двух сред . . . . .   | 173        |
| 6.6. Тензор магнитной проницаемости . . . . .  | 176        |
| 6.6.1. Характерные частоты . . . . .   | 178        |
| 6.6.2. Параметр расходимости . . . . .   | 179        |
| 6.6.3. Три интервала параметра затухания . . . . .   | 179        |
| 6.6.4. Затухание слабое . . . . .  | 180        |
| 6.6.5. Затухание среднее . . . . .   | 182        |
| 6.6.6. Затухание сильное . . . . .   | 184        |
| 6.7. Распределение амплитуд . . . . .  | 186        |
| 6.8. Баланс потоков энергии . . . . .  | 188        |
| 6.9. Отражение и прохождение в широком диапазоне частот . . . . .  | 191        |
| Выводы по главе 6 . . . . .  | 194        |
| <b>Глава 7. Применение метода алгоритма для расчета распространения волн в среде с периодическими неоднородностями, обладающими диссипацией . . . . .</b>    | <b>197</b> |
| 7.1. Геометрия задачи . . . . .  | 197        |
| 7.2. Распределение амплитуд для одномерной волны . . . . .   | 198        |
| 7.2.1. Роль комплексного характера волнового числа . . . . .   | 201        |
| 7.2.2. Отражающие и пропускающие свойства структуры для одномерной волны . . . . .   | 202        |

|  |            |
|--|------------|
| 7.3. Электромагнитная волна в проводящей среде . . . . .                                       | 204        |
| 7.3.1. Волновое число и адмиттанс в присутствии проводимости . . . . .                         | 206        |
| 7.3.2. Характер проникновения волны в металл . . . . .   | 209        |
| 7.4. Распределение амплитуд для электромагнитной волны . . . . .                               | 209        |
| 7.4.1. Сочетание различных видов распределений . . . . .                                       | 214        |
| 7.5. Сравнение эффективности диссипации . . . . .  | 215        |
| 7.6. Отражающие и пропускающие свойства структуры для электромагнитной волны . . . . .         | 218        |
| 7.6.1. Диссипативный резонанс . . . . .  | 222        |
| 7.6.2. Аномалия баланса потоков энергии . . . . .  | 222        |
| 7.7. Особенности случая металлической проводимости . . . . .                                   | 224        |
| 7.7.1. Распределение амплитуд при металлической проводимости . . . . .                         | 224        |
| 7.7.2. Отражающие и пропускающие свойства структуры при металлической проводимости . . . . .   | 227        |
| Выводы по главе 7 . . . . .  | 230        |
| <b>Глава 8. Некоторые общие свойства одномерных и электромагнитных волн . . . . .</b>          | <b>233</b> |
| 8.1. Волновые уравнения для проводящей среды . . . . .   | 233        |
| 8.1.1. Гармоническая зависимость от времени . . . . .  | 235        |
| 8.1.2. Замечание о комплексных волновых числах . . . . .                                       | 236        |
| 8.1.3. Комплексное волновое число при гармонической зависимости от времени . . . . .           | 238        |
| 8.1.4. Разделение переменных . . . . .   | 238        |
| 8.2. Одномерная волна в среде с затуханием . . . . .   | 239        |
| 8.2.1. Амплитуда волны спадает в пространстве . . . . .  | 240        |
| 8.2.2. Амплитуда волны спадает во времени . . . . .  | 241        |
| 8.2.3. Физическая реализация полученных решений . . . . .                                      | 242        |
| 8.3. Возможные виды решения для волны, спадающей в пространстве . . . . .                      | 243        |
| 8.3.1. Экспоненциальное решение . . . . .  | 243        |
| 8.3.2. Тригонометрическое решение . . . . .  | 245        |
| 8.4. Распространение электромагнитной волны через границу, разделяющую две среды . . . . .     | 246        |
| 8.4.1. Общая геометрия задачи . . . . .  | 247        |
| 8.4.2. Решения волновых уравнений . . . . .  | 247        |
| 8.4.3. Коэффициенты отражения и прохождения по полям . . . . .                                 | 250        |
| 8.4.4. Коэффициенты отражения и прохождения по энергиям . . . . .                              | 251        |
| 8.5. Распространение электромагнитной волны через две границы, разделяющие три среды . . . . . | 252        |
| 8.5.1. Общая геометрия задачи . . . . .  | 252        |
| 8.5.2. Решения волновых уравнений . . . . .  | 253        |
| 8.5.3. Поля распространяющихся волн . . . . .  | 254        |
| 8.5.4. Коэффициенты отражения и прохождения по электрическому полю . . . . .                   | 255        |
| Выводы по главе 8 . . . . .  | 256        |

|  |     |
|--|-----|
| <b>Глава 9. Общие энергетические характеристики распространяющихся волн</b> . . . . .  | 258 |
| 9.1. Общие определения энергетических характеристик распространяющейся волны . . . . .   | 258 |
| 9.1.1. Объемная плотность энергии волны . . . . .  | 258 |
| 9.1.2. Поток энергии волны . . . . .   | 259 |
| 9.1.3. Плотность потока энергии волны . . . . .  | 261 |
| 9.1.4. Вектор Умова–Пойнтинга . . . . .  | 262 |
| 9.2. Энергетические характеристики волны в струне . . . . .  | 262 |
| 9.3. Энергетические параметры электромагнитной волны . . . . .   | 265 |
| 9.3.1. Общие соотношения для электромагнитной волны . . . . .  | 265 |
| 9.3.2. Объемная плотность энергии волны . . . . .  | 266 |
| 9.3.3. Усредненная по времени объемная плотность энергии волны . . . . .   | 267 |
| 9.3.4. Поток энергии волны . . . . .   | 268 |
| 9.3.5. Плотность потока энергии волны . . . . .  | 268 |
| 9.3.6. Усредненная по времени плотность потока энергии волны . . . . .   | 269 |
| 9.4. Вектор Пойнтинга для электромагнитной волны . . . . .   | 270 |
| 9.4.1. Получение выражения для вектора Пойнтинга из уравнений электродинамики . . . . .  | 270 |
| 9.4.2. Соотношение полученного выражения для вектора Пойнтинга с его общим определением . . . . .                                    | 273 |
| 9.4.3. Усредненный по времени вектор Пойнтинга . . . . .   | 274 |
| 9.4.4. Вектор Пойнтинга при экспоненциальном решении . . . . .   | 274 |
| 9.5. Общие свойства плотности потока энергии распространяющихся волн . . . . .   | 276 |
| 9.5.1. Замечание о размерности . . . . .   | 278 |
| 9.6. Общие правила работы с потоками энергии электромагнитной волны . . . . .  | 279 |
| 9.6.1. Некоторые дополнительные замечания . . . . .  | 281 |
| Выводы по главе 9 . . . . .  | 281 |
| <b>Глава 10. Энергетические характеристики распространения волны через границы раздела сред с комплексными параметрами</b> . . . . . | 285 |
| 10.1. Общий обзор работ по энергетическим характеристикам волн в многослойных структурах . . . . .                                   | 285 |
| 10.2. Энергетические параметры — традиционные формы определения . . . . .  | 288 |
| 10.2.1. Одна граница раздела сред . . . . .  | 288 |
| 10.2.2. Две границы раздела сред . . . . .   | 293 |
| 10.3. Баланс энергии на границах раздела сред . . . . .  | 294 |
| 10.3.1. Баланс на одной границе раздела сред . . . . .   | 295 |
| 10.3.2. Баланс на двух границах раздела сред . . . . .   | 295 |
| 10.4. Энергетические коэффициенты, характеризующие распространение одномерной волны через две границы раздела трех сред . . . . .    | 300 |
| 10.4.1. Геометрия задачи и амплитуда распространяющихся волн . . . . .   | 300 |

|   |     |
|---|-----|
| 10.4.2. Потоки энергии распространяющихся волн . . . . .  | 302 |
| 10.4.3. Энергетические коэффициенты (аналитические выражения) . . . . .   | 303 |
| 10.4.4. Совпадение конечных точек структуры с границами раздела сред . . . . .  | 305 |
| 10.4.5. Энергетические коэффициенты при различных параметрах сред . . . . .   | 305 |
| 10.4.6. Влияние диссипации во второй среде . . . . .  | 307 |
| 10.4.7. Произвольные начальная и конечная точки распространения волн . . . . .  | 309 |
| 10.5. Основные правила работы с потоками энергии волн, распространяющихся в слоистой среде . . . . .  | 311 |
| 10.5.1. Общая постановка задачи . . . . .   | 311 |
| 10.5.2. Нахождение амплитуд волн . . . . .  | 311 |
| 10.5.3. Нахождение потоков энергии . . . . .  | 312 |
| 10.5.4. Баланс энергии на точечной границе . . . . .  | 312 |
| 10.5.5. Баланс энергии на участке, ограниченном двумя точечными границами . . . . .   | 312 |
| 10.5.6. Баланс энергии на структуре, содержащей несколько однородных участков, разделенных точечными границами . . . . .                              | 313 |
| Выводы по главе 10 . . . . .  | 313 |
| <b>Глава 11. Энергетические характеристики распространения встречных волн через многослойную структуру</b> . . . . .                                  | 315 |
| 11.1. Баланс потоков энергии для встречных волн в структуре с произвольным числом слоев . . . . .   | 315 |
| 11.1.1. Геометрия и постановка задачи . . . . .   | 316 |
| 11.1.2. Балансы потоков энергии на границах внутри многослойной структуры . . . . .   | 317 |
| 11.1.3. Балансы потоков энергии на многослойной структуре в целом . . . . .   | 319 |
| 11.2. Энергетические коэффициенты выхода при падении встречных волн на многослойную структуру . . . . .   | 321 |
| 11.2.1. Общая постановка задачи . . . . .   | 321 |
| 11.2.2. Коэффициенты выхода для трех сред . . . . .   | 322 |
| 11.2.3. Коэффициенты выхода для произвольного числа сред . . . . .  | 325 |
| 11.2.4. Интерпретация зависимости коэффициентов от толщины сред . . . . .   | 327 |
| Выводы по главе 11 . . . . .  | 333 |
| <b>Глава 12. Энергетические характеристики распространения электромагнитной волны через границы раздела сред с комплексными параметрами</b> . . . . . | 334 |
| 12.1. Общее состояние работ по распространению волн в проводящей среде . . . . .  | 334 |
| 12.2. Геометрия задачи . . . . .  | 335 |
| 12.3. Амплитудные параметры распространяющихся волн . . . . .   | 337 |



|   |            |
|---|------------|
| 12.4. Традиционные энергетические параметры распространяющихся волн . . . . .   | 338        |
| 12.5. Традиционные энергетические характеристики при изменении параметров сред . . . . .                                  | 339        |
| 12.5.1. Диэлектрическая пластина между двух диэлектрических сред . . . . .  | 339        |
| 12.5.2. Диэлектрическая пластина между двух проводящих сред . . . . .   | 339        |
| 12.6. Комплексные энергетические параметры распространяющихся волн . . . . .  | 340        |
| 12.7. Энергетические характеристики при изменении параметров сред . . . . .   | 342        |
| 12.7.1. Диэлектрическая пластина между двух диэлектрических сред . . . . .  | 342        |
| 12.7.2. Диэлектрическая пластина между двух проводящих сред . . . . .   | 343        |
| 12.7.3. Проводящая пластина между двух проводящих сред . . . . .  | 344        |
| 12.8. Замечание о возможном развитии исследований . . . . .   | 345        |
| Выводы по главе 12 . . . . .  | 346        |
| <b>Глава 13. Интерференционный поток энергии распространяющихся волн . . . . .</b>  | <b>348</b> |
| 13.1. История понятия интерференционного потока . . . . .   | 348        |
| 13.2. Общие положения о потоке энергии . . . . .  | 349        |
| 13.2.1. Поток энергии в непоглощающей среде . . . . .   | 349        |
| 13.2.2. Поток энергии в поглощающей среде . . . . .   | 349        |
| 13.2.3. Баланс энергии для непоглощающих сред . . . . .   | 350        |
| 13.2.4. Баланс энергии для поглощающих сред . . . . .   | 351        |
| 13.3. Механизмы формирования интерференционного потока . . . . .  | 351        |
| 13.3.1. Механизм стоячих волн . . . . .   | 351        |
| 13.3.2. Механизм фиктивного слоя . . . . .  | 353        |
| 13.3.3. Дополнительное замечание . . . . .  | 355        |
| 13.4. Потоки энергии при интерференции независимых волн . . . . .   | 355        |
| 13.4.1. Замечание о дальнейшем изложении . . . . .  | 356        |
| 13.5. Общая схема формирования интерференционного потока . . . . .  | 356        |
| 13.5.1. Традиционное определение интерференционного потока . . . . .  | 357        |
| 13.5.2. Неадекватность традиционного представления реальной картине распространения волн . . . . .                        | 358        |
| 13.5.3. Определение потока энергии для одномерной задачи . . . . .  | 358        |
| 13.5.4. Образование интерференционного потока в области перекрытия двух волновых пучков . . . . .                         | 359        |
| 13.5.5. Корректное рассмотрение потока энергии в области перекрытия . . . . .   | 361        |
| 13.5.6. Независимость потоков энергии в области перекрытия и некорректность понятия «интерференционного потока» . . . . . | 363        |
| 13.5.7. Потоки энергии электромагнитных волн . . . . .  | 363        |
| 13.6. Законы сохранения в задаче о падении волны на границу раздела сред . . . . .  | 363        |

|   |            |
|---|------------|
| 13.7. Механическая аналогия задачи о падении волны на границу. . . . .  | 365        |
| 13.7.1. Математический аппарат обеих задач . . . . .  | 366        |
| 13.7.2. Эквивалентность и различие законов сохранения для обеих задач . . . . .   | 367        |
| 13.7.3. Качественная картина превышения в задаче о распространении волн . . . . .   | 368        |
| 13.7.4. Качественная картина превышения в задаче о соударении шаров . . . . .   | 369        |
| Выводы по главе 13 . . . . .  | 369        |
| <b>Глава 14. Применение метода конечных разностей для расчета распространения волн в многослойной структуре . . . . .</b> | <b>373</b> |
| 14.1. Уравнения электродинамики в конечных разностях . . . . .  | 373        |
| 14.1.1. Волновые уравнения для полей . . . . .  | 375        |
| 14.1.2. Замечание о представлении производных в виде конечных разностей . . . . .   | 376        |
| 14.1.3. Последовательные выражения для электрического и магнитного полей . . . . .  | 377        |
| 14.2. Сетка и шаблон для одномерной задачи . . . . .  | 378        |
| 14.2.1. Сравнение шаблона с разностными уравнениями . . . . .   | 382        |
| 14.3. Число Куранта и импеданс . . . . .  | 383        |
| 14.4. Полные конечно-разностные представления полей . . . . .   | 384        |
| 14.4.1. Замечание о других возможных вариантах шаблона . . . . .  | 384        |
| 14.5. Представление задачи Даламбера в конечных разностях. . . . .  | 386        |
| 14.6. Схема машинного расчета задачи Даламбера . . . . .  | 388        |
| 14.7. Графическое представление решения задачи Даламбера . . . . .  | 390        |
| 14.7.1. Схема представления импульса . . . . .  | 390        |
| 14.7.2. Иллюстрация развития во времени решения задачи Даламбера . . . . .  | 391        |
| 14.7.3. Подавление отражения от края сетки . . . . .  | 394        |
| 14.8. Формирование вторичного поля от импульсов различной формы . . . . .   | 394        |
| 14.8.1. Импульс в виде равнобедренного треугольника . . . . .   | 395        |
| 14.8.2. Импульс произвольной формы . . . . .  | 397        |
| 14.8.3. Единичный импульс . . . . .   | 399        |
| 14.9. Качественная картина задания единичного импульса . . . . .  | 400        |
| 14.10. Компенсация вторичных импульсов магнитным полем . . . . .  | 402        |
| 14.10.1. Единое расположение импульсов . . . . .  | 402        |
| 14.10.2. Упреждающее расположение магнитного импульса . . . . .   | 402        |
| 14.10.3. Заключительное замечание . . . . .   | 403        |
| 14.11. Интерпретация компенсации вторичных импульсов на сетке . . . . .   | 405        |
| 14.11.1. Отсутствие компенсации . . . . .   | 405        |
| 14.11.2. Компенсация при едином расположении импульсов . . . . .  | 406        |
| 14.11.3. Компенсация при упреждающем расположении магнитного импульса . . . . .   | 407        |

|   |     |
|---|-----|
| 14.12. Универсальный характер компенсации . . . . .                                 | 408 |
| 14.12.1. Развитие вторичных импульсов без компенсации . . . . .                     | 409 |
| 14.12.2. Введение компенсирующих импульсов . . . . .                                | 410 |
| 14.13. Некоторые дополнительные свойства пилообразных структур . . . . .            | 411 |
| 14.13.1. Распространение волн в обе стороны . . . . .                               | 412 |
| 14.13.2. Аддитивность пилообразных структур . . . . .                               | 413 |
| 14.14. Представление задачи Даламбера на плоскости координата–<br>время . . . . .   | 414 |
| 14.14.1. Схема машинного расчета водопада . . . . .                                 | 414 |
| 14.14.2. Водопад для задачи Даламбера без компенсации . . . . .                     | 415 |
| 14.15. Водопад для единичного импульса . . . . .                                    | 417 |
| 14.15.1. Отсутствие компенсации . . . . .   | 417 |
| 14.15.2. Введение компенсации . . . . .   | 419 |
| 14.15.3. Единое расположение импульсов . . . . .                                    | 419 |
| 14.15.4. Упреждающее расположение магнитного импульса . . . . .                     | 419 |
| 14.15.5. Формирование двух расходящихся лучей . . . . .                             | 420 |
| 14.16. Распространение волны через одну границу, разделяющую две<br>среды . . . . . | 422 |
| 14.16.1. Коэффициенты отражения и прохождения . . . . .                             | 424 |
| 14.16.2. Формирование дополнительных лучей . . . . .                                | 425 |
| 14.16.3. Заключительное замечание . . . . .   | 426 |
| Выводы по главе 14 . . . . .  | 427 |
| <b>Литература</b> . . . . .   | 431 |

## Введение

Настоящая монография посвящена вопросу распространения волн в многослойных структурах и является третьей частью, продолжением и развитием двух монографий: Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И. «Волны в многослойных структурах. Часть 1. Методы расчета: прямой, усреднения, матрицы» [1], Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И. «Волны в многослойных структурах. Часть 2. Методы расчета: импеданса, исключения, переотражений» [2].

Основной объем данной монографии, главы 1–13, написан совместно И. В. Антонцом и В. И. Щегловым, глава 14 написана В. И. Щегловым при деятельном участии П. А. Макарова, общее руководство осуществлялось В. Г. Шавровым.

Исследование распространения волн различной природы через слоистые и неоднородные среды и структуры издавна привлекает внимание исследователей [3–15]. До недавнего времени в большинстве решенных задач рассматривались электромагнитные и акустические волны, законы распространения которых в различных средах имеют много общего [5]. В оптике весьма подробно были исследованы два вида сред — диэлектрики, у которых проводимость полностью отсутствует, и металлы, проводимость которых весьма велика [4, 6–8, 10]. В диапазоне СВЧ, наряду с диэлектриками, значительное внимание до сих пор уделяется гиротропным средам — ферритам, по существу представляющим собой также диэлектрики, гиротропные свойства которых проявляют резонансный характер [16–27]. В последнее время расширяются работы по фотонным, фононным и магнонным кристаллам, близким к диэлектрикам с сильно выраженными резонансными свойствами [28–30], по биизотропным, бианизотропным и киральным диэлектрическим средам [31], по аперриодическим тонкослойным структурам [32, 33], в том числе с учетом нестационарного характера распространения волн [34–38]. Значительное внимание привлекает распространение обратных волн [39–49]. Особую группу сред составляют тонкие (нано-размерные) металлические пленки, проводимость которых меняется в зависимости от толщины за счет явления перколяции [50–54].

Важнейшей задачей в исследовании многослойных структур является расчет амплитуд распространяющихся, проходящих и отраженных волн, а также получение коэффициентов отражения и прохождения по энергии, характеризующие структуру в целом [3, стр. 85–87; 1, стр. 74–198, главы 2–4]. Наиболее последовательным здесь является прямой метод, состоящий в решении волнового уравнения в отдельных слоях структуры с последующим сшиванием на границах

[1, стр. 199–251]. Некоторым недостатком прямого метода является нарастание сложности вычислений при увеличении числа слоев, происходящее в геометрической прогрессии, что ограничивает применение метода к структурам, содержащим более пяти слоев [1, стр. 259].

Для более сложных структур используются методы последовательных вычислений, позволяющие при расчете переходить последовательно от одного слоя к другому при сравнительной простоте вычислений на каждом промежуточном этапе. Наибольшее распространение здесь имеют метод матрицы [4, стр. 81–85; 1, стр. 252–410] и метод импеданса [2, 5, 9]. Метод матрицы, кроме оптики [4, стр. 81–85; 32, 33], широко используется в электродинамике, в том числе при расчете элементов волноводной техники СВЧ-диапазона [16, стр. 440–468]. Метод импеданса, наряду с применением в электротехнике [54, стр. 210–237], подробно развит для задач акустики [5, 9].

В то же время, несмотря на огромное многообразие перечисленных задач и многих других, здесь не упомянутых, математическое содержание большинства из них является сходным, то есть состоит в применении одних и тех же математических приемов при решении весьма похожих уравнений с близкими по виду граничными условиями. Наиболее широким классом здесь, по-видимому, являются задачи электродинамики, касающиеся распространения электромагнитных волн.

В этом плане одной из целей настоящей монографии является демонстрация возможности сведения подобных задач, в первую очередь касающихся электродинамики, к более простым задачам о распространении через слои структуры одномерных волн, простейшим примером которых являются волны в струне [55, стр. 23–27; 56, стр. 9–13]. Другая цель — рассмотрение различных методов решения таких задач и сравнение их, в том числе применительно к ряду неоднородностей характерных видов.

В значительной части монография представляет собой развернутую компиляцию из более ранних монографий авторов [57–65] в совокупности с дополняющими их статьями [66–107] и многочисленными разработками авторов, не нашедшими места в вышедших публикациях.

Монографии [57–65] издавались последовательно в течение 2010–2017 годов, в хронологической согласованности с работами авторов. Дополняющие монографии статьи [66–107] также публиковались в разное время. По этой причине порядок и очередность изложения материала, в том числе хронологическая последовательность выхода публикаций, не являются оптимальными. Поэтому в настоящей монографии порядок изложения будет диктоваться не хронологическими рамками, а логикой и последовательностью развития самого материала.

Ввиду довольно значительного объема имеющегося в распоряжении авторов материала они сочли целесообразным разделить его на несколько частей. Все части объединены общей тематикой, посвященной методам расчета распространения волн через многослойные среды, а также решению некоторых характерных задач. Первая часть [1]

содержит описание классических методов расчета, таких как прямой, усреднения и матрицы. Вторая часть [2], являющаяся продолжением первой, посвящена описанию классического метода импеданса, ранее предложенного авторами метода исключения и исторически первого метода переотражений. Все методы изложены в определенном авторском преломлении, объединенном единством подхода на основе модели распространения одномерных волн. Приведен ряд примеров решения конкретных задач.

Настоящая монография, являющаяся продолжением первых двух, посвящена описанию предложенного авторами метода пошагового алгоритма, позволяющего значительно упростить и свести к стандартным действиям расчеты амплитуд распространяющихся волн, а также баланса энергии волн в процессе их распространения и некоторым другим вопросам, полезным для расчета волн в многослойных структурах. Как и ранее, приведен ряд примеров решения конкретных задач.

Настоящее издание содержит четырнадцать глав. Первые семь глав посвящены методу пошагового алгоритма, восьмая глава — некоторым общим свойствам одномерных и электромагнитных волн, главы с девятой по тринадцатую — энергетическим характеристикам распространяющихся волн. Последняя, четырнадцатая глава посвящена методу конечных разностей. Кратко перечислим рассматриваемые вопросы по главам.

**ПЕРВАЯ ГЛАВА** является вводной для дальнейшего изложения, обобщающей материал, освещенный в первых двух частях настоящей монографии [1, 2]. Приведен краткий обзор наиболее употребительных методов расчета распространения волн через многослойные среды, отмечены некоторые их недостатки и достоинства.

**ВТОРАЯ ГЛАВА** посвящена описанию математического аппарата и практического применения укороченного метода пошагового алгоритма. Получены рекуррентные формулы для вычисления амплитуд выходящих из структуры отраженных и проходящих волн обоих направлений. Приведены примеры решения некоторых задач с применением алгоритма.

**ТРЕТЬЯ ГЛАВА** посвящена описанию математического аппарата и практического применения полного метода пошагового алгоритма. Получены рекуррентные формулы для вычисления амплитуд волн отраженных, проходящих и распространяющихся внутри структуры. Приведена блок-схема последовательного выполнения операций метода в виде, удобном для машинной реализации. Приведены примеры решения некоторых задач с применением полного алгоритма.

**ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА** посвящена применению метода полного пошагового алгоритма для расчета распространения одномерных волн через структуры, содержащие периодические неоднородности меандрового и пилообразного видов. Приведены примеры распределения амплитуд волн во внутренних слоях структуры. Выявлены различные режимы распространения, отличающиеся характером пространственной модуляции амплитуды.

ПЯТАЯ ГЛАВА посвящена применению метода полного пошагового алгоритма для расчета распространения электромагнитных волн через структуры, содержащие периодические неоднородности меандрового вида. Получены частотные зависимости амплитуд волн прямого и обратного направлений в широком интервале изменения проницаемостей слоев.

ШЕСТАЯ ГЛАВА посвящена применению метода пошагового алгоритма для расчета распространения электромагнитных волн в многослойной структуре с периодическими неоднородностями, обладающими магнитодиэлектрическими свойствами. В широком диапазоне частот рассмотрены амплитуды волн обоих направлений, выраженные через адмиттансы сред. Выявлены допустимые частотные области распространения гиromaгнитных волн.

СЕДЬМАЯ ГЛАВА посвящена применению метода пошагового алгоритма для расчета распространения одномерных и электромагнитных волн в многослойной структуре с периодической неоднородностью, обладающей диссипацией. Выполнено сравнение эффективности механизмов диссипации для одномерной и электромагнитной волны. Обнаружен обусловленный проводимостью диссипативный резонанс.

ВОСЬМАЯ ГЛАВА посвящена краткому обзору некоторых наиболее общих свойств одномерных и электромагнитных волн в многослойных структурах. Материал главы является вспомогательным, необходимым для создания фундамента рассматриваемых далее процессов баланса и переноса энергии волнами в обоих направлениях.

ДЕВЯТАЯ ГЛАВА посвящена описанию общих энергетических характеристик распространяющихся волн, в том числе вектора Умова–Пойнтинга. Приведены общие рекомендации для работы с потоками энергии распространяющихся волн и отмечены некоторые случаи, требующие подробного рассмотрения.

ДЕСЯТАЯ ГЛАВА посвящена рассмотрению методов работы с волнами в средах с комплексными параметрами и призвана дать некоторые рекомендации для корректного вычисления энергетических параметров отражения, прохождения и поглощения, а также баланса энергии на границах раздела сред. Введены определения и рассмотрены свойства комплексных энергетических параметров одномерной волны: коэффициентов отражения, прохождения, локализации, реактивности и поглощения.

ОДИННАДЦАТАЯ ГЛАВА посвящена рассмотрению энергетических характеристик распространения встречных волн через многослойную структуру с произвольным числом слоев. Найдены входящий, уходящий и локализованный потоки энергии а также их баланс относительно многослойной структуры в целом. Введено понятие об энергетических коэффициентах выхода.

ДВЕНАДЦАТАЯ ГЛАВА посвящена обобщению развитых в предыдущих главах положений об энергетических характеристиках распространяющихся волн в средах с комплексными параметрами на случай электромагнитных волн. Предложены определения комплексных

энергетических коэффициентов отражения, прохождения, локализации, реактивности и поглощения.

ТРИНАДЦАТАЯ ГЛАВА посвящена рассмотрению широко распространенного понятия «интерференционного потока». Обсуждена искусственность некоторых определений и дана интерпретация на основе комплексного представления энергетических характеристик распространяющейся волны.

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ГЛАВА посвящена краткому описанию основных принципов и некоторых приемов использования метода конечных разностей для расчета распространения волн через неоднородные среды. Решена задача о прохождении волны через две среды, разделенные одной границей, и приведены рекомендации для обобщения метода на случай многослойных структур.

Определенный опыт работы авторов со студентами и начинающими исследователями показывает, что при первоначальном ознакомлении с предметом заметные трудности вызывает освоение математического аппарата, значительная часть которого рассеяна в статьях, не всегда легко стыкующихся друг с другом. С целью преодоления подобного положения в начальных главах монографии приведены некоторые общие приемы работы с волновыми процессами, полезные для дальнейшего изложения. Более сложные методы расчета рассматриваются в соответствующих главах также с достаточной степенью подробности. Решены некоторые задачи прикладного характера. Приведено множество примеров, и даны методические рекомендации, предназначенные для самостоятельной работы учащихся. Для удобства пользования монография снабжена подробным оглавлением и в конце каждой главы приведены краткие выводы.

В работах, предшествовавших написанию настоящей монографии, в первую очередь [57–107], кроме основных авторов, принимали участие многочисленные соавторы. Важнейшую роль сыграло создание благоприятной атмосферы, способствующей успешному выполнению исследований. Прежде всего следует отметить коллектив кафедры радиопизики Сыктывкарского государственного университета, возглавляемой Л. Н. Котовым.

Первичные экспериментальные исследования распространения электромагнитных волн через тонкие пленки проводились при участии С. В. Некипелова, К. Бажукова, М. Баженова, Д. С. Безносикова, О. А. Кирпичевой, Ю. Е. Калинина, А. В. Ситникова, Е. А. Голубева.

Важную роль в обсуждении работы на всех ее этапах играли многочисленные дискуссии с В. С. Власовым, Д. С. Плешевым, А. П. Ивановым, Ф. Ф. Асадуллиным.

Другой организацией, где проводились исследования, являлся Институт радиотехники и электроники РАН, в частности лаборатория магнитных исследований, возглавляемая одним из соавторов настоящей монографии В. Г. Шавровым.

Предшествовавшие работе многочисленные исследования магнитных свойств тонких пленок проводились совместно с В.И. Зубковым и Э.Г. Локком при активном участии А.В. Вашковского.

В публикациях в «Журнале радиотехники и электроники РАН» важнейшая роль принадлежала заведующему редакции А.О. Раевскому и редактору И.М. Столяровой.

За весьма оперативные многочисленные публикации в электронном «Журнале радиоэлектроники» авторы считают приятнейшим долгом поблагодарить заведующего редакцией В.А. Черепенина и главного редактора Е.В. Корженевскую, а также ученого секретаря редакции Д.Д. Кузнецова и технического секретаря М.С. Быбик.

Важнейшая роль в создании благоприятных условий для работы, постоянное к ней внимание и неоднократное оказание административной и научной помощи принадлежит академику РАН Ю.В. Гуляеву.

Непосредственное выполнение работы, в том числе написание настоящей монографии, оказалось возможным благодаря помощи академика РАН С.А. Никитова.

Практически все работы были выполнены с деятельным участием многочисленного технического персонала, без помощи которого выполнение приведенного труда было бы совершенно невозможным.

Всем перечисленным участникам и соавторам работ авторы выражают огромную признательность, отдают низкий поклон и приносят глубочайшую благодарность. Величайшее спасибо Вам, дорогие соратники, друзья и помощники!

## Глава 1

# ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ЧЕРЕЗ МНОГОСЛОЙНЫЕ СТРУКТУРЫ

Данная глава является вводной для дальнейшего изложения и в то же время обобщающей материал, освещенный в первых двух частях настоящей монографии [1, 2]. В качестве обобщения приведен краткий обзор наиболее употребительных методов расчета распространения волн через многослойные среды. Приведены их сравнительные характеристики, отмечены некоторые достоинства и недостатки.

В главе частично использован материал монографий [1, 2], а также монографий [57–65]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

### 1.1. Общий обзор различных методов расчета

Распространение волн различной природы в неоднородных средах отличается большим разнообразием. В ряде случаев неоднородную среду с определенным приближением можно представить в виде структуры, состоящей из следующих друг за другом слоев, каждый из которых является однородным, а волноведущие параметры слоев различаются, следуя параметрам исходной неоднородной структуры. В этом случае для изучения распространения волн можно использовать модель слоистой структуры, состоящей из последовательно примыкающих друг к другу однородных слоев с определенными параметрами. В наиболее простом случае слои можно считать плоскопараллельными и бесконечно протяженными вдоль плоскости. Для решения задач о распространении волн в таких структурах разработано множество методов. Приведем краткую сводку основных из них с перечислением некоторых достоинств и недостатков, а также обсудим их рассмотрение в работах авторов настоящей монографии.

#### 1.1.1. Метод прямой

Этот метод является наиболее последовательным и широко применяется для расчета распространения волн в структурах с небольшим числом слоев. Реализация метода состоит в независимом решении волновых уравнений в каждом слое по отдельности с последующим

сшиванием полученных решений на границах раздела слоев. Для одномерной волны граничные условия состоят в равенстве волновых функций и их первых производных по координате на границе раздела. Для электромагнитной волны приравниваются касательные составляющие электрического и магнитного полей. Метод приводит к системе линейных алгебраических уравнений для амплитуд волн, порядок которой равен удвоенному числу границ раздела сред. Например, в случае двух границ приходится решать систему четвертого порядка, в случае трех границ — шестого порядка, четырех — восьмого и так далее. Метод применим при любых параметрах и толщинах слоев, в том числе для многослойных структур, однако при увеличении числа слоев больше двух резко растет громоздкость вычислений. В случае наклонного падения волны на плоскость раздела сред задача дополнительно усложняется [7, 67].

Прямой метод подробно рассмотрен в первой части настоящей монографии [1, глава 5, стр. 199–251]. Некоторые задачи для одномерных и электромагнитных волн, решаемые этим методом, рассмотрены там же [1, главы 2–5, стр. 74–198]. Прямой метод позволяет рассмотреть отражение и прохождение волн на основе векторной модели [87, 102, 1, стр. 93–106]. Многочисленные примеры применения прямого метода для решения практических задач приведены в монографии [58, главы 2–5].

### 1.1.2. Метод усреднения

Метод усреднения применим в тех случаях, когда по толщине слоя укладывается меньше половины длины распространяющейся волны. Основу метода составляет замена неоднородного, как правило, синусоидального распределения волны по толщине слоя линейным. При этом амплитуды волны внутри слоя заменяются средним арифметическим от их значений на поверхностях, в результате чего вместо четырех остаются всего два граничных условия и задача сводится к системе двух линейных уравнений.

Метод усреднения, приводящий к более простым вычислениям по сравнению с прямым, впервые был применен Друде в конце 19 века в работе об отражении света от металла под углом Брюстера. Этот же метод со ссылкой на Друде подробно описал Розенберг [10] в 1958 году. На рубеже 20-го и 21-го веков метод усреднения применялся для расчета волноводов с ферритовым заполнением [108]. В дальнейшем этот метод получил развитие для различных слоев [31, 65, 109–113], а в обзоре [109] был дан подробный анализ применимости метода усреднения к различным ситуациям и сравнение его с точным решением.

Метод усреднения подробно рассмотрен в монографии [61, глава 1], а также в первой части настоящей монографии [1, глава 3]. Многочисленные примеры применения метода усреднения и сравнение его с прямым методом приведены в монографии [57, главы 3–6].

### 1.1.3. Метод характеристической матрицы

Стремление избежать необходимости раскрытия определителей высоких порядков породило различные методы последовательных вычислений. Одним из таких методов является метод характеристической матрицы [4, 114, 115]. Суть метода характеристической матрицы [4] состоит в перемножении матриц отдельных слоев. То есть каждая матрица соответствует отдельному слою. Компоненты матрицы получаются из обычных граничных условий, тех же, что при прямом методе. Для каждого последующего слоя произведение увеличивается на одну матрицу. Количество матриц и, соответственно, число их перемножений растет пропорционально количеству слоев.

Метод матрицы широко используется в оптике [4], где толщина слоя обычно значительно превышает длину волны света. Тем не менее, начиная уже с двухслойной структуры, сложность вычислений значительно возрастает. Трудности расчетов резко растут при учете проводимости слоя. По существу, более или менее удобно решаются лишь задачи для диэлектриков и металлов, то есть для двух крайних случаев нулевой или очень большой проводимости, а промежуточный случай приводит к весьма сложным комплексным выражениям [7, 68].

Метод матрицы рассмотрен в монографии [59, главы 1–5], а также в первой части настоящей монографии [1, главы 6–9].

### 1.1.4. Метод импеданса

Достаточно часто анализ отражения электромагнитных волн от поверхности раздела двух сред проводится на основе нахождения импеданса, характеризующего электромагнитные свойства среды [116–124]. В частности, для характеристики свойств металла в высокочастотном поле вводится поверхностное сопротивление — импеданс. Он определяется как отношение электрического поля на поверхности металла к плотности тока проводимости, проинтегрированного по толщине металла [125]. Импеданс можно представить в комплексной форме, где действительная и мнимая части определяются по изменению амплитуды и фазы волны, отраженной от поверхности [116, 117, 125]. Однако этот подход дает корректный результат только для полубесконечных сред и не всегда может быть использован для рассмотрения тонких ограниченных структур.

Метод импеданса широко используется не только для электромагнитных, но также и для акустических волн [5, 9].

В общем случае импеданс является характеристикой материала среды без учета граничных условий, причем для одной волны зависит только от волнового числа этой волны, а для двух волн, распространяющихся во встречных направлениях — также и от соотношения амплитуд этих волн.

В случае многослойной структуры импедансы рассчитываются отдельно для каждого слоя, после чего сшиваются с использованием граничных условий равенства амплитуд и импедансов на каждой границе.

Упрощение по сравнению с прямым методом достигается путем последовательного вычисления импедансов шаг за шагом от слоя к слою. То есть сначала вычисляется суммарный импеданс первого и второго слоев, после чего к полученному решению добавляется третий слой, затем четвертый и так далее.

Метод импеданса подробно рассмотрен в монографии [60, главы 1–5], а также во второй части настоящей монографии [2, главы 1–9].

### 1.1.5. Метод исключения

Этот метод является весьма специфическим, но и довольно общим [61, глава 2; 2, главы 10–13]. Реализация метода состоит в представлении структуры в виде следующих друг за другом единичных ячеек, включающих в себя одну среду и одну границу, так что граничные условия учитываются внутри ячейки. Далее ячейки сшиваются простым прикладыванием друг у другу, так что специфика разделов между соседствующими слоями исключается, что и дает название методу. Метод является достаточно универсальным, применимым как для одномерных, так и для электромагнитных волн, причем прохождение структуры из конца в конец осуществляется один раз в едином цикле.

Многочисленные примеры применения метода для решения прикладных задач приведены в [63, главы 1–3]. Важным достоинством метода является решение с его помощью задачи о распространении волн через структуру со случайными неоднородностями [63, глава 4; 2, глава 13].

### 1.1.6. Метод пошагового алгоритма

Этот метод является развитием и обобщением прямого метода и может применяться для расчета распространения волн в структурах с произвольным числом слоев. Общая постановка задачи и граничные условия — те же, что при прямом методе. Наиболее удобно применять метод для одномерных волн, однако обобщение на электромагнитные волны также вполне возможно [62, главы 1–5].

Метод основан на повторяемости структуры аналитических выражений для детерминантов, определяющих амплитуды распространяющихся волн при использовании прямого метода. При этом детерминанты при последовательном увеличении количества слоев структуры как бы «вкладываются» друг в друга, образуя повторяющуюся «лестницу».

Метод позволяет получать «многоэтажные» аналитические выражения весьма простым способом, состоящим в увеличении индексов волновых чисел слоев структуры на единицу. Такое «пошаговое» формирование аналитических выражений для детерминантов допускает простую машинную алгоритмизацию.

Основная методология пошагового алгоритма рассмотрена в монографии [62], а также в статьях [79, 83, 90, 126]. Метод особенно удобен для расчета распределения амплитуд волн в структурах с периодическими неоднородностями [25, стр. 144–174; 65, главы 1–3]. Более

подробно метод пошагового алгоритма рассмотрен далее в рамках настоящей монографии.

### 1.1.7. Метод переотражений

Этот метод является исторически первым и широко применяется в оптике [4]. В качестве граничных условий метод использует известные заранее коэффициенты отражения и прохождения волн на границах сред. Метод особенно удобен для случая трех сред, то есть когда один слой окружен двумя средами, причем известны коэффициенты отражения и прохождения на обеих границах центрального слоя. Именно такое удобство и породило многочисленные применения метода для расчета интерференционных приборов различного вида [4, 6], когда в качестве центрального слоя используется оптическое стекло, а роль окружающего сред играет воздух.

Определенным недостатком метода является сложность обобщения на число сред более трех, то есть хотя бы на два центральных слоя. Полный расчет становится довольно громоздким и требует значительных усилий.

Метод переотражений рассмотрен в монографиях [2, глава 14; 61, стр. 86–109].

## 1.2. Сравнительные характеристики различных методов расчета

Рассматриваются методы расчета распространения волн в многослойных структурах. Все методы приведены в применении к распространению одномерных волн. Допустимо обобщение на случай электромагнитных волн продольной и поперечной поляризации при нормальном и наклонном падении путем соответствующих замен параметров (волновых чисел, импедансов, полей, углов падения волн). Приводятся краткие характеристики методов, их достоинства, недостатки и возможность численной реализации.

### 1.2.1. Метод прямой (параллельный)

Предполагает заданными волновые числа и толщины всех сред.

*Достоинства:* наибольшая универсальность, простота идеологии, возможность получения амплитуд волн во всех средах, коэффициентов отражения и прохождения относительно структуры в целом, возможность рассмотрения встречных волн, пригодность при любом соотношении между длинами волн и толщинами сред.

*Недостатки:* возрастание объема аналитических вычислений в геометрической прогрессии при увеличении числа сред, практическая непригодность при числе сред более пяти.

*Численное решение:* объем программирования растет по мере увеличения числа сред в геометрической прогрессии.

### 1.2.2. Метод усреднения (параллельный)

Предполагает заданными волновые числа и толщины всех сред.

*Достоинства:* универсальность, возможность получения амплитуд волн во всех средах, коэффициентов отражения и прохождения относительно структуры в целом, получение более простых конечных аналитических выражений, чем прямой метод.

*Недостатки:* сложность аналитической идеологии, непригодность при числе внутренних слоев более двух (при двух внешних средах), возможность применения только к достаточно тонким слоям, толщина которых намного меньше длины волны.

*Численное решение:* объем программирования меньше, чем при прямом методе, однако при увеличении числа сред также растет.

### 1.2.3. Метод матрицы (последовательный)

Предполагает заданными волновые числа и толщины всех сред.

*Достоинства:* относительная простота и однообразие аналитической идеологии, позволяющей получать матрицы слоев рекуррентным методом, возможность получения коэффициентов отражения и прохождения путем последовательного перехода от конца структуры к ее началу, возможность рассмотрения встречных волн, пригодность при любом соотношении между длинами волн и толщинами сред.

*Недостатки:* отсутствие возможности определения амплитуд волн в промежуточных слоях структуры.

*Численное решение:* объем программирования невелик, рекуррентные соотношения получаются в цикле с использованием простых подпрограмм.

### 1.2.4. Метод импеданса (последовательный)

Предполагает заданными волновые числа и толщины всех сред.

Имеет два варианта — пересчет импедансов и пересчет амплитуд.

#### Метод пересчета импедансов:

*Достоинства:* относительная простота и однообразие аналитической идеологии, позволяющей получать импедансы волн в слоях рекуррентным методом, возможность получения коэффициента отражения, пригодность при любом соотношении между длинами волн и толщинами сред.

*Недостатки:* отсутствие возможности получения коэффициента прохождения, отсутствие возможности получения амплитуд волн в промежуточных слоях структуры, отсутствие возможности рассмотрения распространения встречных волн.

*Численное решение:* объем программирования невелик, рекуррентные соотношения получаются в цикле с использованием простых подпрограмм.

#### Метод пересчета амплитуд:

*Достоинства:* относительная простота и однообразие аналитической идеологии, позволяющей получать амплитуды волн в слоях рекур-

рентным методом, возможность получения коэффициентов отражения и прохождения, пригодность при любом соотношении между длинами волн и толщинами сред.

*Недостатки:* отсутствие возможности определения амплитуд волн в промежуточных слоях структуры, отсутствие возможности рассмотрения распространения встречных волн,

*Численное решение:* объем программирования невелик, рекуррентные соотношения получаются в цикле с использованием простых подпрограмм.

### 1.2.5. Метод исключения (последовательный)

Предполагает заданными волновые числа и толщины всех сред.

*Достоинства:* однообразие аналитической идеологии, позволяющей получать амплитуды волн в последовательных ячейках (среда плюс одна граница) рекуррентным методом, возможность получения коэффициентов отражения и прохождения, возможность рассмотрения распространения встречных волн, пригодность при любом соотношении между длинами волн и толщинами сред.

*Недостатки:* некоторая сложность аналитической идеологии, требующая отдельного рассмотрения прямого и обратного прохождения по структуре.

*Численное решение:* объем программирования невелик, рекуррентные соотношения получаются в цикле с использованием простых подпрограмм.

### 1.2.6. Метод пошагового алгоритма (последовательный)

Предполагает заданными волновые числа и толщины всех сред.

Имеет два варианта — укороченный и полный.

#### Укороченный метод пошагового алгоритма.

*Достоинства:* простота и однообразие аналитической идеологии, возможность получения простых аналитических выражений рекуррентного типа для произвольного числа сред, возможность получения амплитуд волн, выходящих из структуры, коэффициентов отражения и прохождения, возможность рассмотрения распространения встречных волн.

*Недостаток:* отсутствие возможности получения амплитуд волн внутри слоев.

*Численное решение:* объем программирования невелик, рекуррентные соотношения получаются в цикле с использованием простых подпрограмм.

#### Полный метод пошагового алгоритма.

*Достоинства:* универсальность такая же, как при прямом методе, простота и однообразие аналитической идеологии, возможность получения простых аналитических выражений рекуррентного типа для произвольного числа сред, возможность получения амплитуд волн в отдельных слоях структуры, коэффициентов отражения и прохождения



относительно структуры в целом, возможность рассмотрения встречных волн.

*Недостаток:* некоторое усложнение (около двух раз) по сравнению с укороченным методом.

*Численное решение:* объем программирования невелик, рекуррентные соотношения получаются в цикле с использованием простых подпрограмм.

### 1.2.7. Метод переотражений (параллельный)

Предполагает заданными локальные коэффициенты отражения и прохождения на границах между средами, а также толщины всех сред.

*Достоинства:* возможность использования локальных коэффициентов отражения и прохождения вместо волновых чисел, возможность получения коэффициентов отражения и прохождения относительно структуры в целом, возможность учета многократных переотражений с помощью аппарата геометрической прогрессии.

*Недостатки:* относительная сложность аналитической идеологии, отсутствие возможности получения амплитуд волн в промежуточных слоях структуры, сложность применения при увеличении числа внутренних слоев больше двух.

*Численное решение:* объем программирования невелик, возможен расчет в цикле с использованием простых подпрограмм.

## Выводы по главе 1

Глава посвящена краткому описанию некоторых наиболее употребительных методов расчета распространения волн в многослойных структурах.

1. Приведен общий обзор различных методов расчета. В качестве рассматриваемых выбраны методы: прямой, усреднения, матрицы, импеданса, исключения, пошагового алгоритма, переотражений. Описаны краткие схемы реализации методов, отмечены особенности идеологии. Приведены области применения и отмечены некоторые прикладные возможности.

2. Выполнен сравнительный анализ различных методов. По каждому методу отмечены достоинства и недостатки, а также рассмотрена возможность машинной реализации.

## Глава 2

### УКОРОЧЕННЫЙ МЕТОД ПОШАГОВОГО АЛГОРИТМА

Глава посвящена описанию математического аппарата и практического применения укороченного метода пошагового алгоритма. В качестве вспомогательного вступления приведено решение задач о распространении волн через многослойные структуры прямым методом. Продемонстрирована циклическая повторяемость полученных выражений для амплитуд распространяющихся волн. На основе такой повторяемости получены рекуррентные формулы для вычисления амплитуд выходящих из структуры отраженных и проходящих волн обоих направлений. Приведены примеры решения некоторых задач с применением алгоритма.

В главе частично использованы материалы монографий [1, стр. 199–214; 57; 58; 62, стр. 14–41], а также статей [79,82,83,88,90]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

### 2.1. Получение амплитуд распространяющихся волн прямым методом

Метод пошагового алгоритма является последовательным методом в том отношении, что для получения амплитуд распространяющихся волн надо пройти по шагам всю структуру по слоям от начала к концу, причем амплитуды волн прямого и обратного (встречного) направлений могут быть получены за один проход в прямом направлении.

Метод является обобщением прямого метода [1, стр. 199–251], так что позволяет получить те же выражения для амплитуд волн, что и прямой метод, однако со значительно меньшими усилиями.

Ввиду отсутствия необходимости вычисления определителей высоких порядков, как того требует прямой метод, использование пошагового алгоритма допустимо для структур с произвольным, в том числе достаточно большим числом слоев.

Поскольку метод является обобщением прямого метода, следуя [1, стр. 200–213], приведем вкратце вычисление прямым методом амплитуд распространяющихся волн обоих направлений для структуры с количеством слоев от двух до пяти. Далее будет показано, как на основании этих решений получаются формулы пошагового алгоритма.

### 2.1.1. Две среды, разделенные одной границей

Рассмотрим симметричную задачу о распространении двух волн противоположных направлений через структуру из двух сред, разделенных одной границей, схема которой показана на рис. 2.1.

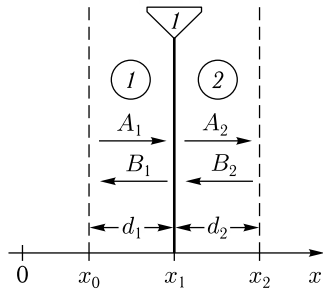


Рис. 2.1. Геометрия симметричной задачи о распространении двух встречных волн через структуру из двух сред, разделенных одной границей

Амплитуды волн, распространяющихся в отрицательном направлении той же оси, обозначены буквами  $B_1$  и  $B_2$ . Амплитуды  $A_1$  и  $B_2$  заданы, то есть на структуру падают две встречные волны: одна слева направо из точки с координатой  $x_0$ , имеющая амплитуду  $A_{10}$ , другая справа налево из точки с координатой  $x_2$ , имеющая амплитуду  $B_{20}$  и сдвиг по фазе относительно первой волны на угол  $\varphi$ .

Таким образом,

$$A_1 = A_{10}, \quad (2.1)$$

$$B_2 = B_{20}e^{i\varphi}. \quad (2.2)$$

Амплитуды и фазы двух других волн определяются амплитудами и соотношением фаз этих волн в сочетании с параметрами сред.

Решения волновых уравнений в обеих областях, нормированные относительно точек исхода соответствующих волн [1, стр. 112–117], имеют вид:

$$U_1 = A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + B_1 e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (2.3)$$

$$U_2 = A_2 e^{-ik_2(x-x_1)} + B_2 e^{ik_2(x-x_2)}. \quad (2.4)$$

Производные решений имеют вид:

$$\frac{dU_1}{dx} = -iA_1 k_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + iB_1 k_1 e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (2.5)$$

$$\frac{dU_2}{dx} = -iA_2 k_2 e^{-ik_2(x-x_1)} + iB_2 k_2 e^{ik_2(x-x_2)}. \quad (2.6)$$

Граничные условия при  $x = x_1$  имеют вид:

$$U_1|_{x=x_1} = U_2|_{x=x_1}; \quad (2.7)$$

$$\left. \frac{dU_1}{dx} \right|_{x=x_1} = \left. \frac{dU_2}{dx} \right|_{x=x_1}. \quad (2.8)$$

Для упрощения дальнейшей записи введем обозначения:

$$e_1 = e^{-ik_1(x_1-x_0)}; \quad (2.9)$$

$$e_2 = e^{-ik_2(x_2-x_1)}; \quad (2.10)$$

а также

$$e_0 = e^{i\varphi}. \quad (2.11)$$

Подставляя решение и производные в граничные условия и учитывая (2.9)–(2.10), получаем систему для определения неизвестных амплитуд  $B_1$  и  $A_2$  (левая часть) через заданные амплитуды  $A_1$  и  $B_2$  (правая часть):

$$B_1 - A_2 = -A_1 e_1 + B_2 e_2; \quad (2.12)$$

$$B_1 k_1 + A_2 k_2 = A_1 k_1 e_1 + B_2 k_2 e_2. \quad (2.13)$$

Решая эту систему по правилу Крамера [127, стр. 45, раздел 1.9-2; 128, стр. 54–56] и учитывая обозначения (2.1), (2.2) и (2.11), получаем детерминанты:

$$D_0 = k_1 + k_2; \quad (2.14)$$

$$D_{B_1} = (A_{10})(k_1 - k_2)e_1 + (B_{20}e_0)2k_2 e_2; \quad (2.15)$$

$$D_{A_2} = (A_{10})2k_1 e_1 - (B_{20}e_0)(k_1 - k_2)e_2. \quad (2.16)$$

При этом искомые амплитуды волн  $B_1$  и  $A_2$  принимают вид:

$$B_1 = D_{B_1}/D_0; \quad A_2 = D_{A_2}/D_0. \quad (2.17)$$

### 2.1.2. Три среды, разделенные двумя границами

Расширим теперь предыдущую задачу добавлением еще одной среды, то есть рассмотрим распространение двух волн противоположных направлений через структуру из трех сред 1–3, разделенных двумя границами 1–2. Схема такой задачи показана на рис. 2.2.

Параметры всех сред могут различаться, волновые числа  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  могут быть действительными или комплексными. Амплитуды волн, распространяющихся в положительном направлении оси  $Ox$ , обозначены буквами  $A_j$ , где  $j$  — номер среды. Амплитуды волн, распространяющихся в отрицательном направлении той же оси, обозначены буквами  $B_j$ . Амплитуды волн  $A_1$  и  $B_3$  являются заданными, то есть на структуру падают две встречные волны: одна слева направо из точки с координатой  $x_0$ , имеющая амплитуду  $A_{10}$ , другая справа налево из точки с координатой  $x_3$ , имеющая амплитуду  $B_{30}$  и сдвиг фазы  $\varphi$  относительно первой волны.

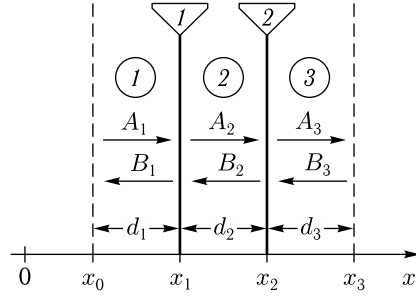


Рис. 2.2. Геометрия симметричной задачи о распространении двух встречных волн через структуру из трех сред, разделенных двумя границами. Обозначения — те же, что на рис. 2.1

Таким образом

$$A_1 = A_{10}, \quad (2.18)$$

$$B_3 = B_{30}e^{i\varphi}. \quad (2.19)$$

Амплитуды и фазы всех остальных волн определяются амплитудами и соотношением фаз этих двух волн в сочетании с параметрами сред.

Решения волновых уравнений в различных областях, нормированные относительно точек исхода соответствующих волн, имеют вид:

$$U_j = A_j e^{-ik_j(x-x_{j-1})} + B_j e^{ik_j(x-x_j)}, \quad (2.20)$$

где  $j = 1, 2, 3$  — номер среды.

Производные решений имеют вид:

$$\frac{dU_j}{dx} = -iA_j k_j e^{-ik_j(x-x_{j-1})} + iB_j k_j e^{ik_j(x-x_j)}. \quad (2.21)$$

Граничные условия при  $x = x_1$  и  $x = x_2$  имеют вид:

$$U_1|_{x=x_1} = U_2|_{x=x_1}; \quad (2.22)$$

$$U_2|_{x=x_2} = U_3|_{x=x_2}; \quad (2.23)$$

$$\frac{dU_1}{dx}|_{x=x_1} = \frac{dU_2}{dx}|_{x=x_1}; \quad (2.24)$$

$$\frac{dU_2}{dx}|_{x=x_2} = \frac{dU_3}{dx}|_{x=x_2}. \quad (2.25)$$

Для упрощения дальнейшей записи введем обозначения:

$$e_j = e^{-ik_j(x_j-x_{j-1})}, \quad (2.26)$$

а также

$$e_0 = e^{i\varphi}. \quad (2.27)$$

Подставляя решение и производные в граничные условия и учитывая (2.26)–(2.29), получаем систему уравнений для определения неизвестных  $B_1, A_2, B_2, A_3$  через заданные  $B_3, A_1$ :

$$B_1 - A_1 - B_2 e_2 = -A_1 e_1; \quad (2.28)$$

$$A_2 e_2 + B_2 - A_3 = B_3 e_3; \quad (2.29)$$

$$B_1 k_1 + A_2 k_2 - B_2 k_2 e_2 = A_1 k_1 e_1; \quad (2.30)$$

$$-A_2 k_2 e_2 + B_2 k_2 + A_3 k_3 = B_3 k_3 e_3. \quad (2.31)$$

Решая эту систему уравнений по правилу Крамера, получаем детерминанты (все детерминанты имеют знак минус, который при вычислении амплитуд сокращается, поэтому здесь они записаны без этого знака):

$$D_0 = (k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2; \quad (2.32)$$

$$D_{B1} = (A_{10})[(k_1 - k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e_2^2]e_1 + (B_{30}e_0)4k_2 k_3 e_2 e_3; \quad (2.33)$$

$$D_{A2} = (A_{10})2k_1(k_2 + k_3)e_1 - (B_{30}e_0)2(k_1 - k_2)k_3 e_3; \quad (2.34)$$

$$D_{B2} = (A_{10})2k_1(k_2 - k_3)e_1 + (B_{30}e_0)2(k_1 + k_2)k_3 e_3; \quad (2.35)$$

$$D_{A3} = (A_{10})4k_1 k_2 e_1 e_2 - (B_{30}e_0)[(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e_2^2]e_3. \quad (2.36)$$

Во всех случаях амплитуды волн  $B_1, A_2, B_2, A_3$  имеют вид:

$$B_1 = D_{B1}/D_0; \quad A_2 = D_{A2}/D_0; \quad B_2 = D_{B2}/D_0; \quad A_3 = D_{A3}/D_0. \quad (2.37)$$

### 2.1.3. Четыре среды, разделенные тремя границами

Расширим предыдущую задачу на еще одну среду, то есть теперь рассмотрим четыре среды, разделенные тремя границами. Схема задачи показана на рис. 2.3.

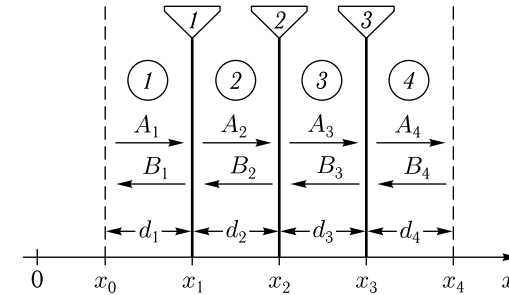


Рис. 2.3. Геометрия симметричной задачи о распространении двух встречных волн через структуру из четырех сред, разделенных тремя границами. Обозначения — те же, что на предыдущих рисунках

Параметры всех сред могут различаться, волновые числа  $k_1, k_2, k_3, k_4$  могут быть действительными или комплексными. Амплитуды волн, распространяющихся в положительном направлении оси  $Ox$ , обозначены буквами  $A_i$ , в отрицательном —  $B_i$ , где  $i$  — номер среды. Амплитуды волн  $A_1$  и  $B_4$  являются заданными, то есть на структуру падают две встречные волны: одна — слева направо из точки с координатой  $x_0$ , имеющая амплитуду  $A_{10}$ , другая — справа налево из точки с координатой  $x_4$ , имеющая амплитуду  $B_{40}$  и сдвиг фазы  $\varphi$  относительно первой волны.

Таким образом,

$$A_1 = A_{10}; \quad (2.38)$$

$$B_4 = B_{40}e^{i\varphi}. \quad (2.39)$$

Амплитуды и фазы всех остальных волн определяются амплитудами и соотношением фаз этих двух волн в сочетании с параметрами сред.

Решения волновых уравнений в областях 1–4, нормированные относительно точек исхода соответствующих волн, имеют вид:

$$U_j = A_j e^{-ik_j(x-x_{j-1})} + B_j e^{ik_j(x-x_j)}, \quad (2.40)$$

где  $j = 1, 2, 3, 4$  — номер среды.

Производные решений имеют вид, аналогичный (2.21) с учетом увеличения числа сред, граничные условия также имеют вид, аналогичный (2.25)

Для упрощения дальнейшей записи введем обозначения:

$$e_j = e^{-ik_j(x_j-x_{j-1})}, \quad (2.41)$$

а также

$$e_0 = e^{i\varphi}. \quad (2.42)$$

Подставляя решение и производные в граничные условия и учитывая (2.38), (2.39), (2.41), получаем систему для определения неизвестных  $B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4$  через заданные  $A_1$  и  $B_4$ , решая которую находим детерминанты:

$$D_0 = (k_1 + k_2)[(k_2 + k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 - k_3)(k_3 - k_4)e_3^2] + (k_1 - k_2)[(k_2 - k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 + k_3)(k_3 - k_4)e_3^2]e_2^2; \quad (2.43)$$

$$D_{B1} = (A_{10})\{(k_1 - k_2)[(k_2 + k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 - k_3)(k_3 - k_4)e_3^2] + (k_1 + k_2)[(k_2 - k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 + k_3)(k_3 - k_4)e_3^2]e_2^2\}e_1 + (B_{40}e_0)8k_2k_3k_4e_2e_3e_4; \quad (2.44)$$

$$D_{A2} = (A_{10})2k_1[(k_2 + k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 - k_3)(k_3 - k_4)e_3^2]e_1 - (B_{40}e_0)4(k_1 - k_2)k_3k_4e_2e_3e_4; \quad (2.45)$$

$$D_{B2} = (A_{10})2k_1[(k_2 - k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 + k_3)(k_3 - k_4)e_3^2]e_1e_2 + (B_{40}e_0)4(k_1 + k_2)k_3k_4e_3e_4; \quad (2.46)$$

$$D_{A3} = (A_{10})4k_1k_2(k_3 + k_4)e_1e_2 - (B_{40}e_0)2[(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e_2^2]k_4e_3e_4; \quad (2.47)$$

$$D_{B3} = (A_{10})4k_1k_2(k_3 - k_4)e_1e_2e_3 + (B_{40}e_0)2[(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2]k_4e_4; \quad (2.48)$$

$$D_{A4} = (A_{10})8k_1k_2k_3e_1e_2e_3 - (B_{40}e_0)\{[(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2](k_3 - k_4) + [(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e_2^2](k_3 + k_4)e_3^2\}e_4. \quad (2.49)$$

С учетом этих детерминантов амплитуды волн  $B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4$  имеют вид:

$$B_1 = D_{B1}/D_0; \quad A_2 = D_{A2}/D_0; \quad B_2 = D_{B2}/D_0; \quad A_3 = D_{A3}/D_0; \quad B_3 = D_{B3}/D_0; \quad A_4 = D_{A4}/D_0. \quad (2.50)$$

#### 2.1.4. Пять сред, разделенные четырьмя границами

Еще раз усложним предыдущую задачу добавлением еще одной среды, то есть теперь рассмотрим пять сред, разделенных четырьмя границами. Схема задачи показана на рис. 2.4.

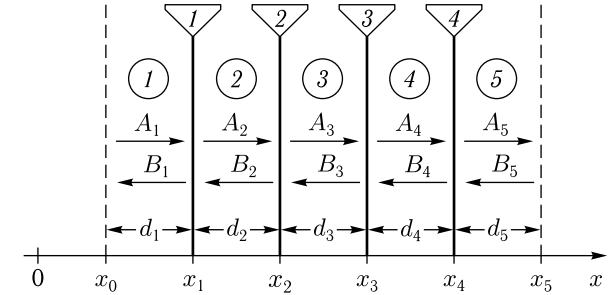


Рис. 2.4. Геометрия симметричной задачи о распространении двух встречных волн через структуру из пяти сред, разделенных четырьмя границами. Обозначения — те же, что на предыдущих рисунках

Параметры всех сред могут различаться, волновые числа, обозначаемые  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$ , могут быть действительными или комплексными. Амплитуды волн, распространяющихся в положительном направлении оси  $Ox$ , обозначены буквами  $A_i$ , в отрицательном —  $B_i$ , где  $i$  — номер среды. Амплитуды волн  $A_1$  и  $B_5$  являются заданными, то есть на структуру падают две встречные волны: одна — слева направо из точки с координатой  $x_0$ , имеющая амплитуду  $A_{10}$ , другая — справа налево из точки с координатой  $x_5$ , имеющая амплитуду  $B_{50}$  и сдвиг по фазе относительно первой волны на угол  $\varphi$ .

Таким образом,

$$A_1 = A_{10}; \quad (2.51)$$

$$B_5 = B_{50}e^{i\varphi}. \quad (2.52)$$

Решения волновых уравнений в областях 1–5, нормированные относительно точек исхода соответствующих волн, имеют вид:

$$U_j = A_j e^{-ik_j(x-x_{j-1})} + B_j e^{ik_j(x-x_j)}, \quad (2.53)$$

где  $j = 1, 2, 3, 4, 5$  — номер среды.

Для упрощения дальнейшей записи введем обозначения:

$$e_j = e^{-ik_j(x_j-x_{j-1})}, \quad (2.54)$$

а также

$$e_0 = e^{i\varphi}. \quad (2.55)$$

Введем также вспомогательные обозначения для амплитуд падающих волн:

$$A = A_1 e_1 = A_{10} e_1; \quad (2.56)$$

$$B = B_5 e_5 = B_{50} e_0 e_5. \quad (2.57)$$

Подставляя решение и производные в граничные условия и учитывая (2.54)–(2.57), получаем систему уравнений для определения неизвестных  $B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, A_5$  через заданные  $A_1$  и  $B_5$ , решая которую находим детерминанты:

$$\begin{aligned} D_0 = & (k_1 + k_2) \{ (k_2 + k_3) [(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] + \\ & + (k_2 - k_3) [(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] e_3^2 \} + \\ & + (k_1 - k_2) \{ (k_2 - k_3) [(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] + \\ & + (k_2 + k_3) [(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] e_3^2 \} e_2^2; \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} D_{B1} = & (A_{10}) \{ (k_1 - k_2) \times \\ & \times \{ (k_2 + k_3) [(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] + \\ & + (k_2 - k_3) [(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] e_3^2 \} + \\ & + (k_1 + k_2) \{ (k_2 - k_3) [(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] + \\ & + (k_2 + k_3) [(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] e_3^2 \} e_2^2 \} e_1 + \\ & + (B_{50} e_0) 16 k_2 k_3 k_4 k_5 e_2 e_3 e_4 e_5; \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} D_{A2} = & (A_{10}) 2k_1 \{ (k_2 + k_3) [(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] + \\ & + (k_2 - k_3) [(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] e_3^2 \} e_1 - \\ & - (B_{50} e_0) 8(k_1 - k_2) k_3 k_4 k_5 e_2 e_3 e_4 e_5; \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} D_{B2} = & (A_{10}) 2k_1 \{ (k_2 - k_3) [(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] + \\ & + (k_2 + k_3) [(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] e_3^2 \} e_1 e_2 + \\ & + (B_{50} e_0) 8(k_1 + k_2) k_3 k_4 k_5 e_2 e_3 e_4 e_5; \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} D_{A3} = & (A_{10}) 4k_1 k_2 [(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] e_1 e_2 - \\ & - (B_{50} e_0) 4[(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2] k_4 k_5 e_3 e_4 e_5; \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} D_{B3} = & (A_{10}) 4k_1 k_2 [(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] e_1 e_2 e_3 + \\ & + (B_{50} e_0) 4[(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2] k_4 k_5 e_4 e_5; \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} D_{A4} = & (A_{10}) 8k_1 k_2 k_3 (k_4 + k_5) e_1 e_2 e_3 - \\ & - (B_{50} e_0) 2 \{ [(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2] (k_3 - k_4) + \\ & + [(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e_2^2] (k_3 + k_4) e_3^2 \} k_5 e_4 e_5; \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} D_{B4} = & (A_{10}) 8k_1 k_2 k_3 (k_4 - k_5) e_1 e_2 e_3 e_4 + \\ & + (B_{50} e_0) 2 \{ [(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2] (k_3 + k_4) + \\ & + [(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e_2^2] (k_3 - k_4) e_3^2 \} k_5 e_5; \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} D_{A5} = & (A_{10}) 16k_1 k_2 k_3 k_4 e_1 e_2 e_3 e_4 - \\ & - (B_{50} e_0) \{ \{ [(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2] (k_3 + k_4) + \\ & + [(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e_2^2] (k_3 - k_4) e_3^2 \} (k_4 - k_5) + \\ & + \{ [(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2] (k_3 - k_4) + \\ & + [(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e_2^2] (k_3 + k_4) e_3^2 \} (k_4 + k_5) e_4^2 \} e_5. \end{aligned} \quad (2.66)$$

При этом амплитуды волн определяются выражениями:

$$\begin{aligned} B_1 = D_{B1}/D_0; \quad A_2 = D_{A2}/D_0; \quad B_2 = D_{B2}/D_0; \quad A_3 = D_{A3}/D_0. \\ B_3 = D_{B3}/D_0; \quad A_4 = D_{A4}/D_0; \quad B_4 = D_{B4}/D_0; \quad A_5 = D_{A5}/D_0. \end{aligned} \quad (2.67)$$

## 2.2. Последовательное вычисление детерминантов

Из рассмотрения формул для полученных детерминантов можно видеть, что все они имеют довольно однообразную структуру, переходящую друг за другом последовательно со ступенчатым усложнением.

### 2.2.1. Нулевые детерминанты

Проследим такое усложнение на примере нулевых детерминантов, представленных формулами (2.14), (2.32), (2.43), (2.58). Запишем здесь эти детерминанты еще раз, чтобы можно было проследить структуру более подробно. Обозначим их далее нижним индексом, соответствующим количеству сред. Так,  $D_0$  для структуры из двух слоев будет

теперь обозначаться как  $D_2$ , для структуры из трех слоев как  $D_3$  и так далее. Итак, получаем:

$$D_2 = k_1 + k_2; \quad (2.68)$$

$$D_3 = (k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2; \quad (2.69)$$

$$D_4 = (k_1 + k_2)[(k_2 + k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 - k_3)(k_3 - k_4)e_3^2] + \\ + (k_1 - k_2)[(k_2 - k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 + k_3)(k_3 - k_4)e_3^2]e_2^2; \quad (2.70)$$

$$D_5 = (k_1 + k_2)\{(k_2 + k_3)[(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] + \\ + (k_2 - k_3)[(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2]e_3^2\} + \\ + (k_1 - k_2)\{(k_2 - k_3)[(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] + \\ + (k_2 + k_3)[(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2]e_3^2\}e_2^2. \quad (2.71)$$

Отметим сразу некоторые общие свойства. Так, все детерминанты представляют собой произведения «элементарных» сомножителей вида  $(k_j + k_{j+1})$  и  $(k_j - k_{j+1})$ , где  $j$  — номер среды. Везде перед всеми такими сомножителями знак плюс. Минус может присутствовать только внутри некоторых из элементарных сомножителей. Все детерминанты состоят из двух слагаемых, первое из которых начинается сомножителем  $(k_1 + k_2)$ , а второе — сомножителем  $(k_1 - k_2)$ .

Для удобства сравнения упростим обозначения волновых чисел. Будем их обозначать просто цифрами, соответствующими индексу, то есть, например,  $k_1$  будет теперь обозначаться как 1,  $k_2$  как 2 и так далее. При такой записи детерминанты (2.68)–(2.71) принимают вид:

$$D_2 = 1 + 2; \quad (2.72)$$

$$D_3 = (1 + 2)(2 + 3) + (1 - 2)(2 - 3)e_2^2; \quad (2.73)$$

$$D_4 = (1 + 2)[(2 + 3)(3 + 4) + (2 - 3)(3 - 4)e_3^2] + \\ + (1 - 2)[(2 - 3)(3 + 4) + (2 + 3)(3 - 4)e_3^2]e_2^2; \quad (2.74)$$

$$D_5 = (1 + 2)\{(2 + 3)[(3 + 4)(4 + 5) + (3 - 4)(4 - 5)e_4^2] + \\ + (2 - 3)[(3 - 4)(4 + 5) + (3 + 4)(4 - 5)e_4^2]e_3^2\} + \\ + (1 - 2)\{(2 - 3)[(3 + 4)(4 + 5) + (3 - 4)(4 - 5)e_4^2] + \\ + (2 + 3)[(3 - 4)(4 + 5) + (3 + 4)(4 - 5)e_4^2]e_3^2\}e_2^2. \quad (2.75)$$

Здесь детерминанты записаны друг под другом с соответствующим сдвигом по строке, что сделано для удобства сравнения сходных формульных конструкций.

Можно видеть, что для детерминантов  $D_3$ ,  $D_4$ ,  $D_5$  четко прослеживаются все отмеченные выше свойства. Так, все они состоят из двух слагаемых, первое из которых начинается с элементарной комбинации

$(1 + 2)$ , а второе с комбинации  $(1 - 2)$ . Второе слагаемое в качестве дополнительного множителя всегда содержит экспоненту  $e_2^2$ .

Везде перед любыми слагаемыми присутствует знак плюс, а минус встречается только внутри элементарных комбинаций.

Теперь проследим последовательную трансформацию детерминантов.

Так, первое слагаемое при комбинации  $(1 + 2)$  содержит конструкцию, представляющую собой предыдущий детерминант с увеличением всех индексов на единицу. Индекс экспоненты также увеличивается на единицу. То есть здесь предыдущий детерминант как бы «вкладывается» в последующий.

Второе слагаемое при комбинации  $(1 - 2)$  содержит конструкцию, представляющую собой тот же предыдущий детерминант с увеличением индексов на единицу, в том числе индекса экспоненты. Однако теперь, в отличие от предыдущего вложения, внутри вложенного детерминанта внутренние знаки первой комбинации, входящей в первое и второе слагаемые, изменены на обратные.

Такое вложение удобно проследить при переходе от детерминанта  $D_3$  к детерминанту  $D_4$ . Так, первая строка детерминанта  $D_4$  при коэффициенте  $(1 + 2)$  представляет собой вложенный в эту строку просто детерминант  $D_3$ , в котором все индексные числа увеличены на единицу. Вторая строка того же детерминанта  $D_4$  при коэффициенте  $(1 - 2)$  также содержит в качестве вложения детерминант  $D_3$  с увеличенными индексами, но теперь в первых сомножителях его слагаемых знаки изменены на противоположные. Так, в первом слагаемом вместо  $(2 + 3)$  теперь присутствует  $(2 - 3)$ , а во втором слагаемом вместо  $(2 - 3)$  теперь присутствует  $(2 + 3)$ . Такое же изменение можно проследить при переходе от детерминанта  $D_4$  к детерминанту  $D_5$ .

Действуя таким же порядком, можно из детерминанта  $D_5$  получить детерминант  $D_6$ , из детерминанта  $D_6$  — детерминант  $D_7$  и так далее.

**Замечание.** Из описанной схемы несколько выпадает детерминант  $D_2$ , однако он представляет интерес только для структуры из двух сред, а для многослойной существенного значения не имеет. В случае же крайней необходимости этот детерминант всегда можно без труда найти прямым методом.

### 2.2.2. Первые детерминанты

Из рассмотрения полученных в разделе 2.1 детерминантов можно видеть, что не только нулевые, но и все остальные имеют последовательно «вкладываемую» друг в друга» структуру. Проследим такое «вложение» на примере первого детерминанта, определяющего амплитуду  $B_1$ .

Эта амплитуда при падении волны в положительном направлении соответствует отражению волны от структуры, а при падении волны в обратном (встречном) направлении соответствует прохождению волны через структуру. В соответствии с этим детерминант амплитуды  $B_1$

содержит два слагаемых: первое с коэффициентом  $A_{10}$  и второе с коэффициентом  $B_{N0}e_0$ , где  $N$  — число сред структуры.

Приведем здесь выражения для детерминантов  $D_{B1}$ , в разделе 2.1 представленных формулами (2.15), (2.33), (2.44), (2.59). Для удобства обращения добавим к нижнему индексу число, определяющее количество сред структуры. Итак, эти детерминанты имеют вид:

$$D_{B1-2} = (A_{10})(k_1 - k_2)e_1 + (B_{20}e_0)2k_2e_2; \quad (2.76)$$

$$D_{B1-3} = (A_{10})[(k_1 - k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e_2^2]e_1 + (B_{30}e_0)4k_2k_3e_2e_3; \quad (2.77)$$

$$D_{B1-4} = (A_{10})\{(k_1 - k_2)[(k_2 + k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 - k_3)(k_3 - k_4)e_3^2] + (k_1 + k_2)[(k_2 - k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 + k_3)(k_3 - k_4)e_3^2]e_2^2\}e_1 + (B_{40}e_0)8k_2k_3k_4e_2e_3e_4; \quad (2.78)$$

$$D_{B1-5} = (A_{10})\{(k_1 - k_2) \times \{(k_2 + k_3)[(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] + (k_2 - k_3)[(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2]e_3^2\} + (k_1 + k_2)\{(k_2 - k_3)[(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] + (k_2 + k_3)[(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2]e_3^2\}e_2^2\}e_1 + (B_{50}e_0)16k_2k_3k_4k_5e_2e_3e_4e_5. \quad (2.79)$$

Отметим некоторые общие свойства. Так, первые слагаемые всех детерминантов при коэффициенте  $(A_{10})$  представляют собой произведения «элементарных» сомножителей вида  $(k_j + k_{j+1})$  и  $(k_j - k_{j+1})$ , где  $j$  — номер среды. Везде перед всеми такими сомножителями знак плюс.

Вторые слагаемые при коэффициенте  $(B_{N0}e_0)$  представляют собой произведения волновых чисел всех сред структуры, кроме первой, на произведения экспонент для тех же сред с общим коэффициентом, равным  $2^N$ , где  $N$  — то же количество сред. Эти слагаемые входят всегда также с плюсом.

Единообразие структуры вторых слагаемых очевидно, поэтому не будем на ней останавливаться, а рассмотрим более подробно структуру слагаемых при коэффициенте  $(A_{10})$ .

Подобно принятому в разделе 2.2.1 порядку, упростим обозначения волновых чисел. Будем их обозначать цифрами, соответствующими индексу, то есть, например,  $k_1$  будет теперь обозначаться как 1,  $k_2$  как 2 и так далее. При таких обозначениях детерминанты (2.76)–(2.79) принимают вид:

$$D_{B1-2} = (A_{10})(1 - 2)e_1 + (B_{20}e_0)2(2)k_2e_2; \quad (2.80)$$

$$D_{B1-3} = (A_{10})[(1 - 2)(2 + 3) + (1 + 2)(2 - 3)e_2^2]e_1 + (B_{30}e_0)4(2)(3)e_2e_3; \quad (2.81)$$

$$D_{B1-4} = (A_{10})\{(1 - 2)[(2 + 3)(3 + 4) + (2 - 3)(3 - 4)e_3^2] + (1 + 2)[(2 - 3)(3 + 4) + (2 + 3)(3 - 4)e_3^2]e_2^2\}e_1 + (B_{40}e_0)8(2)(3)(4)e_2e_3e_4; \quad (2.82)$$

$$D_{B1-5} = (A_{10})\{(1 - 2)\{(2 + 3)[(3 + 4)(4 + 5) + (3 - 4)(4 - 5)e_4^2] + (2 - 3)[(3 - 4)(4 + 5) + (3 + 4)(4 - 5)e_4^2]e_3^2\} + (1 + 2)\{(2 - 3)[(3 + 4)(4 + 5) + (3 - 4)(4 - 5)e_4^2] + (2 + 3)[(3 - 4)(4 + 5) + (3 + 4)(4 - 5)e_4^2]e_3^2\}e_2^2\}e_1 + (B_{50}e_0)16(2)(3)(4)(5)e_2e_3e_4e_5. \quad (2.83)$$

Как и в случае нулевых детерминантов, первое выражение несколько выпадает из общего ряда, поэтому рассмотрим только выражения (2.81)–(2.83).

Из сравнения первых слагаемых этих выражений, то есть при коэффициенте  $(A_{10})$ , можно видеть, что их структура во многом подобна структуре нулевых детерминантов (2.72)–(2.75), рассмотренных в разделе 2.2.1.

Особенно удобно это проследить на примере выражений (2.81) и (2.82), то есть когда имеет место «вложение» (2.81) в (2.82).

Так, слагаемые при  $(A_{10})$  в обоих этих выражениях в свою очередь состоят из двух слагаемых, первое из которых начинается с сомножителя  $(1 - 2)$ , а второе — с сомножителя  $(1 + 2)$ . Далее, сомножитель  $(1 + 2)$  умножается на выражение, представляющее собой предыдущий детерминант (без  $B_{N0}$ ) с увеличением всех индексов на единицу, а сомножитель  $(1 - 2)$  умножается на такое же выражение с инверсией знаков первых сомножителей первых слагаемых. То есть здесь предыдущее выражение вкладывается во второе слагаемое, а инвертированное такое же выражение вкладывается в первое слагаемое. Такая же процедура вложения повторяется и далее, то есть (2.82) «вкладывается» в (2.83).

Структура вторых слагаемых в выражениях (2.80)–(2.83) не имеет аналога в выражениях (2.72)–(2.75) для нулевых детерминантов, однако здесь она является довольно простой и также имеет четкую повторяемость.

Так, все эти слагаемые представляют собой произведения амплитудного множителя на число два в определенной степени, волновые числа и экспоненциальные множители. Степень числа два на единицу меньше количества слоев структуры, волновые числа присутствуют в порядке от второго до последнего в данной структуре, а экспоненциальные множители — в том же порядке. Структуру этого слагаемого для произвольного числа слоев можно представить в виде:

$$(D_{B1-j})^{(2)} = (B_{j0}e_0)2^{j-1} \prod_{n=2}^j k_n e_n, \quad (2.84)$$

где  $j$  — количество сред, а индекс «2» сверху обозначения детерминанта означает, что здесь записано только второе слагаемое.

Таким образом, как и в случае нулевого детерминанта (раздел 2.2.1) первые детерминанты имеют четко определенную повторяющуюся структуру иерархического типа. Контрольная проверка показывает, что подобные правила вложения предыдущих детерминантов в последующие имеют место при любом числе слоев структуры. Более подробную проверку такого положения для случая пяти слоев авторы настоящей монографии рекомендуют провести любознательному читателю в качестве полезного упражнения.

**Замечание.** Сделанный здесь вывод об иерархической повторяемости структуры детерминантов проверен только для числа слоев, не превосходящего пяти. С математической стороны такое утверждение не является точным и требует определенного доказательства, например, методом математической индукции [129]. Авторами настоящей монографии такое доказательство не проводилось, однако проверка описанных далее алгоритмов путем сравнения с результатами, получаемыми другими методами, показала достаточное совпадение. Поэтому авторы сочли возможным считать получаемые с помощью алгоритмов результаты вполне достоверными. Более подробную проверку, в том числе доказательство, авторы осмеливаются предложить любознательному читателю.

### 2.3. Математический аппарат укороченного алгоритма

Рассмотренная в разделах 2.2.1, 2.2.2 иерархически повторяющаяся структура получаемых прямым методом аналитических выражений для амплитуд волн в структуре, параметры которой меняются по ступенчатому закону, позволяет создать весьма простой алгоритм расчета, основанный на последовательных вычислениях. Настоящий раздел посвящен описанию математического аппарата такого алгоритма для произвольного числа сред.

#### 2.3.1. Геометрия задачи

Рассмотрим падение двух встречных одномерных волн на многослойную неоднородную структуру, схематически показанную на рис. 2.5.

Структура состоит из  $N$  слоев (номера в кругах), разделенных  $N - 1$  границами (номера в треугольниках). Амплитуды волн, распространяющихся в положительном направлении оси  $Ox$ , обозначены буквами  $A_n$ , в отрицательном —  $B_n$ , волновые числа —  $k_n$ , где  $n$  — номер среды.

Амплитуды волн  $A_1$  и  $B_N$  заданы: на структуру падают две встречные волны: одна  $A_1 = A_0$  — слева направо из точки  $x_0$ , другая  $B_N = B_0 e^{i\varphi}$  — справа налево из точки с координатой  $x_N$ , где  $\varphi$  — фаза волны  $B_N$  относительно волны  $A_1$ .

На краях структуры при  $x_0$  и  $x_N$  отражения и дальнейшего распространения волны за эти пределы нет (показано штрихами), что в терминологии длинных линий эквивалентно подключению согласованной нагрузки [130, стр. 221, пункт 3].

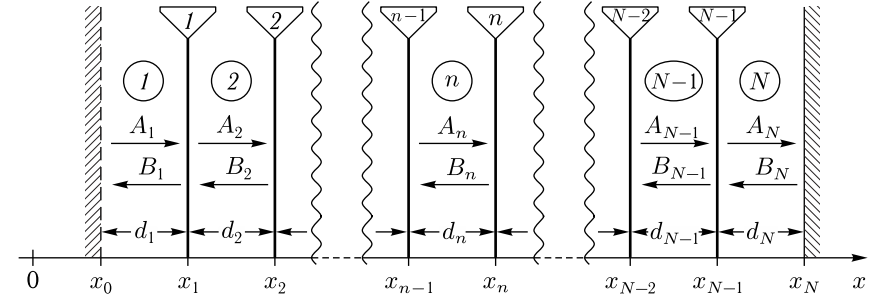


Рис. 2.5. Геометрия симметричной задачи о распространении волн обоих направлений через структуру из произвольного числа сред

Параметры структуры в пределах каждого слоя предполагаются однородными, однако для различных слоев могут быть отличными друг от друга.

В простейшем классическом, традиционном, например, для оптики случае первый и последний слои представляют собой свободное пространство [4, 6, 7]. Здесь мы не вводим такого ограничения и рассматриваем эти слои наравне с другими. Единственное отличие этих слоев от остальных состоит в том, что амплитуды волн  $A_0$  и  $B_0$  считаются в точках  $x_0$  и  $x_N$  заданными заранее, а волны с амплитудами  $B_1$  и  $A_N$ , распространяющиеся к внешним границам структуры (при  $x_0$  и  $x_N$ ), от этих границ отражения не испытывают.

#### 2.3.2. Решение прямым методом

Для общности изложения приведем схему решения задачи для произвольного числа сред прямым методом.

Решения волновых уравнений в слоях  $1, \dots, N$ , имеют вид:

$$U_n = A_n e^{-ik_n(x-x_{n-1})} + B_n e^{ik_n(x-x_n)}, \quad (2.85)$$

где  $n$  — номер соответствующего слоя.

Граничные условия, задаваемые при  $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ , имеют вид:

$$U_n|_{x=x_n} = U_{n+1}|_{x=x_n}; \quad \frac{dU_n}{dx}|_{x=x_n} = \frac{dU_{n+1}}{dx}|_{x=x_n}. \quad (2.86)$$

Для упрощения дальнейшей записи введем обозначения:

$$e_n = e^{-ik_n(x_n-x_{n-1})}; \quad e_0 = e^{-i\varphi}. \quad (2.87)$$

Подставляя (2.85) в (2.86) и учитывая (2.87), получаем систему  $2N - 2$  линейных алгебраических уравнений для амплитуд  $A_2, \dots, A_N, B_1, \dots, B_{N-1}$ , выраженных через амплитуды  $A_{10}$  и  $B_{N0}$ . Решая методом Крамера [127, стр. 45, раздел 1.9-2; 128, стр. 54-56], находим детерминанты:  $D_0, D_{B_1}, D_{A_2}, \dots, D_{B_N}, D_{A_N}$ , из которых получаем амплитуды волн в виде:

$$A_n = D_{A_n}/D_0; \quad B_n = D_{B_n}/D_0. \quad (2.88)$$



Примеры получения таких амплитуд для структур с числом слоев от двух до пяти приведены в разделе 2.1.

Будем называть волны в слоях 1 и  $N$  внешними, а волны в остальных слоях — внутренними. Рассмотрим здесь только внешние волны, для чего достаточно будет найти детерминанты  $D_0$ ,  $D_{B_1}$  и  $D_{A_N}$ , выраженные через  $A_{10}$  и  $B_{N_0}$ .

### 2.3.3. Последовательные действия алгоритма

Описанная в разделах 2.2.1, 2.2.2 иерархическая структура детерминантов, определяющих амплитуды распространяющихся волн, позволяет сформулировать последовательный алгоритм получения аналитических выражений для таких детерминантов, которые, в свою очередь, определяют амплитуды распространяющихся волн. Приведем далее порядок необходимых для этого действий. На данном этапе ограничимся получением амплитуд только для внешних, то есть выходящих из структуры волн  $B_1^{(N)}$  и  $A_N^{(N)}$  при падении на нее волн обоих направлений с амплитудами  $A_{10}$  и  $B_{N_0}$ .

Рассмотрим последовательные шаги алгоритма получения детерминантов. Введем обозначения:

$$P_2 = k_1 + k_2; \quad (2.89)$$

$$Q_2 = k_1 - k_2; \quad (2.90)$$

$$R_2 = k_1 - k_2; \quad (2.91)$$

$$S_2 = k_1 + k_2; \quad (2.92)$$

$$T_2 = 2k_2e_2. \quad (2.93)$$

С использованием (2.89)–(2.93) формируем выражения:

$$P_3 = P_2(k_2 + k_3) + Q_2(k_2 - k_3)e_2^2; \quad (2.94)$$

$$Q_3 = P_2(k_2 - k_3) + Q_2(k_2 + k_3)e_2^2; \quad (2.95)$$

$$R_3 = R_2(k_2 + k_3) + S_2(k_2 - k_3)e_2^2; \quad (2.96)$$

$$S_3 = R_2(k_2 - k_3) + S_2(k_2 + k_3)e_2^2; \quad (2.97)$$

$$T_3 = T_2 2k_3e_3. \quad (2.98)$$

Увеличивая номера индексов на единицу, получаем следующую группу подобных выражений и так далее. Формулы для получения последующих выражений из предыдущих при произвольном номере  $B_0$  имеют вид:

$$P_{n+1} = P_n(k_n + k_{n+1}) + Q_n(k_n - k_{n+1})e_n^2; \quad (2.99)$$

$$Q_{n+1} = P_n(k_n - k_{n+1}) + Q_n(k_n + k_{n+1})e_n^2; \quad (2.100)$$

$$R_{n+1} = R_n(k_n + k_{n+1}) + S_n(k_n - k_{n+1})e_n^2; \quad (2.101)$$

$$S_{n+1} = R_n(k_n - k_{n+1}) + S_n(k_n + k_{n+1})e_n^2; \quad (2.102)$$

$$T_{n+1} = T_n 2k_{n+1}e_{n+1}. \quad (2.103)$$

Процесс заканчивается при достижении  $n$  значения  $N - 1$ . При этом

$$D_0^{(N)} = P_N; \quad (2.104)$$

$$D_{B_1}^{(N)} = A_{10}R_Ne_1 + B_{N_0}e_0T_N; \quad (2.105)$$

$$D_{A_N}^{(N)} = A_{10}T_N \frac{k_1e_1}{k_Ne_N} - B_{N_0}e_0Q_Ne_N. \quad (2.106)$$

Таким образом, получены детерминанты, определяемые амплитудами входящих в структуру волн  $A_{10}$  и  $B_{N_0}$ .

Из выражений (2.104)–(2.106) получаем амплитуды выходящих из структуры внешних волн:

$$B_1^{(N)} = D_{B_1}^{(N)} / D_0^{(N)}; \quad A_N^{(N)} = D_{A_N}^{(N)} / D_0^{(N)}. \quad (2.107)$$

Здесь волна с амплитудой  $B_1^{(N)}$  относительно волны  $A_{10}$  является отраженной, а относительно волны  $B_{N_0}$  — проходящей, а волна с амплитудой  $A_N^{(N)}$  относительно волны  $A_{10}$  является проходящей, а относительно волны  $B_{N_0}$  — отраженной.

### 2.3.4. Решения для трех, четырех и пяти сред

Приведем теперь в качестве примеров решения для структур, состоящих из трех, четырех и пяти сред.

Например, для случая трех сред  $N = 3$ , где решение прямым методом требует раскрытия трех определителей четвертого порядка (раздел 2.1.2), получаемые по приведенной схеме детерминанты, имеют вид:

$$D_0^{(3)} = (k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2; \quad (2.108)$$

$$D_{B_1}^{(3)} = (A_{10})[(k_1 - k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e_2^2]e_1 + (B_{30}e_0)4k_2k_3e_2e_3; \quad (2.109)$$

$$D_{A_3}^{(3)} = (A_{10})4k_1k_2e_1e_2 - (B_{30}e_0)[(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e_2^2]e_3. \quad (2.110)$$

Легко убедиться, что эти выражения совпадают с полученными прямым методом выражениями (2.32), (2.33), (2.36), (раздел 2.1.2), однако объем вычислений здесь резко уменьшается.

Для случая четырех сред  $N = 4$ , при прямом методе, требующем раскрытия трех определителей шестого порядка, детерминанты имеют вид:

$$D_0^{(4)} = (k_1 + k_2)[(k_2 + k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 - k_3)(k_3 - k_4)e_3^2] + (k_1 - k_2)[(k_2 - k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 + k_3)(k_3 - k_4)e_3^2]e_2^2; \quad (2.111)$$

$$D_{B_1}^{(4)} = (A_{10})\{(k_1 - k_2)[(k_2 + k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 - k_3)(k_3 - k_4)e_3^2] + (k_1 + k_2)[(k_2 - k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 + k_3)(k_3 - k_4)e_3^2]e_2^2\}e_1 + (B_{40}e_0)8k_2k_3k_4e_2e_3e_4; \quad (2.112)$$

$$D_{A4}^{(4)} = (A_{10})8k_1k_2k_3e_1e_2e_3 - \\ - (B_{40}e_0)\{(k_1+k_2)(k_2+k_3) + (k_1-k_2)(k_2-k_3)e_2^2\}(k_3-k_4) + \\ + [(k_1+k_2)(k_2-k_3) + (k_1-k_2)(k_2+k_3)e_2^2](k_3+k_4)e_3^2\}e_4. \quad (2.113)$$

Эти выражения совпадают с полученными прямым методом выражениями (2.43), (2.44), (2.49), (раздел 2.1.3), причем объем вычислений здесь резко уменьшается.

Наконец, для случая пяти сред  $N = 5$ , где порядок определителей при прямом методе возрастает до восьмого, получаемые здесь детерминанты имеют вид:

$$D_0^{(5)} = (k_1+k_2)\{(k_2+k_3)[(k_3+k_4)(k_4+k_5) + (k_3-k_4)(k_4-k_5)e_4^2] + \\ + (k_2-k_3)[(k_3-k_4)(k_4+k_5) + (k_3+k_4)(k_4-k_5)e_4^2]e_3^2\} + \\ + (k_1-k_2)\{(k_2-k_3)[(k_3+k_4)(k_4+k_5) + (k_3-k_4)(k_4-k_5)e_4^2] + \\ + (k_2+k_3)[(k_3-k_4)(k_4+k_5) + (k_3+k_4)(k_4-k_5)e_4^2]e_3^2\}e_2^2; \quad (2.114)$$

$$D_{B1}^{(5)} = (A_{10})\langle(k_1-k_2) \times \\ \times \{(k_2+k_3)[(k_3+k_4)(k_4+k_5) + (k_3-k_4)(k_4-k_5)e_4^2] + \\ + (k_2-k_3)[(k_3-k_4)(k_4+k_5) + (k_3+k_4)(k_4-k_5)e_4^2]e_3^2\} + \\ + (k_1+k_2)\{(k_2-k_3)[(k_3+k_4)(k_4+k_5) + (k_3-k_4)(k_4-k_5)e_4^2] + \\ + (k_2+k_3)[(k_3-k_4)(k_4+k_5) + (k_3+k_4)(k_4-k_5)e_4^2]e_3^2\}e_2^2\}e_1 + \\ + (B_{50}e_0)16k_2k_3k_4k_5e_2e_3e_4e_5; \quad (2.115)$$

$$D_{A5}^{(5)} = (A_{10})16k_1k_2k_3k_4e_1e_2e_3e_4 - \\ - (B_{50}e_0)\langle\{[(k_1+k_2)(k_2+k_3) + (k_1-k_2)(k_2-k_3)e_2^2](k_3+k_4) + \\ + [(k_1+k_2)(k_2-k_3) + (k_1-k_2)(k_2+k_3)e_2^2](k_3-k_4)e_3^2\}(k_4-k_5) + \\ + \{[(k_1+k_2)(k_2+k_3) + (k_1-k_2)(k_2-k_3)e_2^2](k_3-k_4) + \\ + [(k_1+k_2)(k_2-k_3) + (k_1-k_2)(k_2+k_3)e_2^2](k_3+k_4)e_3^2\}(k_4+k_5)e_4^2\}e_5. \quad (2.116)$$

Эти выражения совпадают с полученными прямым методом выражениями (2.58), (2.59), (2.66), (раздел 2.1.4), причем объем вычислений здесь резко уменьшается.

Для числа сред, большего пяти, решение прямым методом становится крайне громоздким, а для  $N$  слоев требует раскрытия определителей порядка  $2N - 2$ , причем объем вычислений растет как факториал от  $2N - 2$ , что, особенно при аналитическом расчете, создает все возрастающие трудности.

В рамках приведенного здесь алгоритма прибавление одного дополнительного слоя увеличивает объем записи всего в два раза, причем происходит простое автоматическое дублирование предыдущей записи

с увеличением номеров индексов на единицу, что технически значительно проще раскрытия определителей высоких порядков.

Таким образом, можно заключить, что использование предложенного алгоритма позволяет последовательно получать детерминанты весьма высоких порядков при минимальных вычислительных затратах.

## 2.4. Схема реализации алгоритма на ЭВМ

Для тех случаев, когда точное аналитическое решение не требуется или затруднено ввиду громоздкости вычислений, предложенный алгоритм легко может быть реализован в численном виде. Такая реализация особенно предпочтительна для задач, в которых плавная неоднородность среды приближается ступенчатой, причем число ступенек выбирается достаточно большим (десятки и сотни). Для подобных случаев возможный вариант блок-схемы программы для ЭВМ представлен на рис. 2.6.

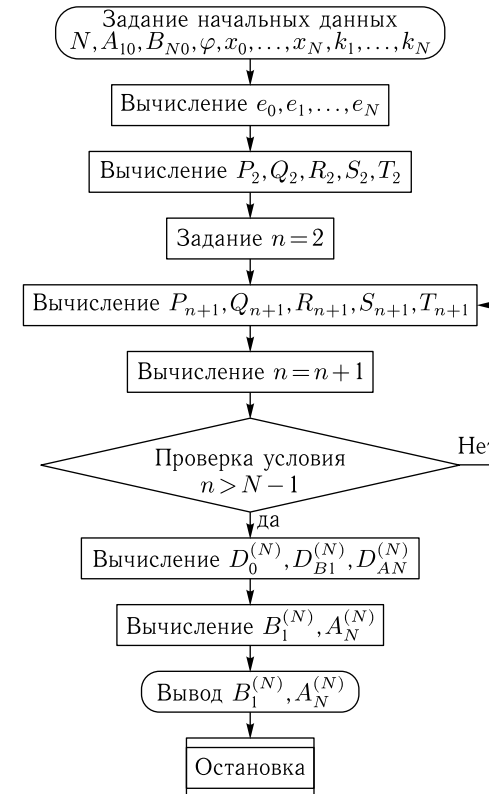


Рис. 2.6. Блок-схема алгоритма вычисления амплитуд внешних волн

Здесь, если начальные значения координат разбиения структуры на слои  $x_0, x_1, \dots, x_N$ , а также волновые числа внутри слоев  $k_1, k_2, \dots, k_N$  заданы, программа содержит всего один цикл, повторяемый  $N - 2$  раз. При этом вычисление  $P_{n+1}, Q_{n+1}, R_{n+1}, S_{n+1}, T_{n+1}$  или даже весь цикл можно выполнить с помощью единственной подпрограммы, что приводит к дополнительному упрощению.

## 2.5. Применение укороченного алгоритма для вычисления амплитуд внешних волн

Применим теперь описанный алгоритм к решению задачи о падении двух встречных волн на многослойную ступенчато-неоднородную структуру.

### 2.5.1. Линейно-ступенчатое измерение волнового числа

Пусть структура имеет полную длину  $L = 16$  см и содержит 16 слоев одинаковой толщины  $d = 1$  см. Каждый слой является однородным, границы между слоями — резкие, то есть волновое число в структуре меняется ступенчатым образом: в пределах каждого слоя остается постоянным, а на границах между слоями скачкообразно меняется.

Рассмотрим два случая:

1) волновое число по координате линейно возрастает

$$k_n = 1 + 0,5(x_n - 1); \quad (2.117)$$

2) волновое число по координате линейно убывает

$$k_n = 8,5 - 0,5(x_n - 1); \quad (2.118)$$

где  $n$  — номер слоя, координата  $x_n$  измерена в см, волновое число  $k_n$  — в  $\text{см}^{-1}$ .

Зависимость волнового числа от координаты для этих двух случаев показана на рис. 2.7. При этом рис. 2.7, а соответствует возрастанию волнового числа по формуле (2.117), рис. 2.7, б — убыванию волнового числа по формуле (2.118).

На структуру падают две встречных волны. Со стороны среды 1 падает волна прямого направления с амплитудой  $A_0$ . Со стороны среды 16 падает волна обратного направления с амплитудой  $B_0$ . В среде 1 распространяется волна обратного направления с амплитудой  $B_1$ . В среде 16 распространяется волна прямого направления с амплитудой  $A_{16}$ . Все амплитуды нормируются на  $A_0$ , поэтому для простоты будем считать  $A_0 = 1$ .

Положим амплитуду  $A_{10} = 1$  постоянной и будем менять амплитуду падающей волны обратного направления  $B_{N0}$ . Что происходит при этом с амплитудами волн  $B_1$  и  $A_{16}$ , выходящих из структуры в обоих направлениях, показано на рис. 2.8, где приведены зависимости

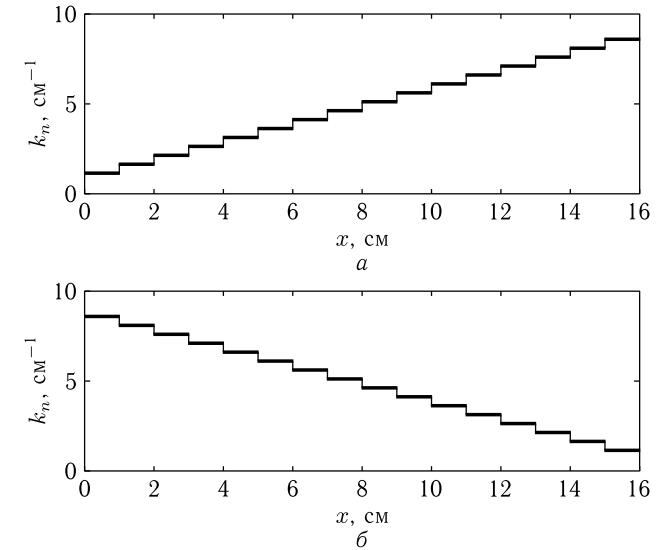


Рис. 2.7. Ступенчатые зависимости волнового числа от координаты, построенные по формулам (2.117) (а) и (2.118) (б)

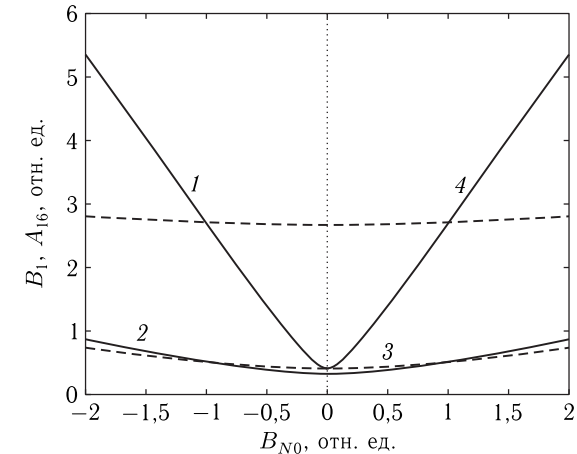


Рис. 2.8. Зависимости амплитуд выходящих из структуры волн обоих направлений от амплитуды падающей волны встречного направления. 1, 2 — возрастание волнового числа (2.117); 3, 4 — убывание волнового числа (2.118).

Кривые 1 и 3 соответствуют амплитуде  $n$ , кривые 2 и 4 — амплитуде  $A_{16}$

этих амплитуд от амплитуды  $B_{N0}$ . Кривые 1 и 2 (сплошные линии) соответствуют возрастанию волнового числа (2.117), кривые 3 и 4 (пунктирные линии) — его убыванию (2.118). Кривые 1 и 3 соответствуют амплитуде  $B_1$ , кривые 2 и 4 — амплитуде  $A_{16}$ . Амплитуда падающей

волны  $B_{N_0}$  меняется от  $-2$  до  $+2$ , причем знак плюс соответствует синфазности волн  $B_{N_0}$  и  $A_{10}$ , знак минус — их противофазности.

Из рисунка видно, что в обоих случаях изменения волнового числа зависимости амплитуд выходящих волн от амплитуды волны обратного направления имеют V-образный характер с минимумом вблизи  $B_{N_0} = 0$ , а при увеличении  $B_{N_0}$  с тем или иным знаком возрастают по закону, близкому к линейному. Минимум кривой 1 приходится на  $B_{N_0} = 0,001$ , минимум кривой 2 — на  $B_{N_0} = -0,004$ . Минимумы кривых 3 и 4 приходятся на  $B_{N_0} = -0,007$  и  $B_{N_0} = -0,034$  соответственно.

Таким образом, приведенные на рис. 2.8 кривые не являются относительно вертикальной оси полностью симметричными. Для выявления степени их несимметричности в следующей таблице приведены численные значения амплитуд выходящих из структуры волн в обратном  $B_1^{(\pm)}$  и прямом  $A_{16}^{(\pm)}$  направлениях, при различных значениях амплитуды падающей волны встречного направления  $B_{N_0}$ . Верхний индекс «+» соответствует нарастанию плотности среды по мере увеличения координаты  $x$ , индекс «-» соответствует убыванию плотности среды по мере увеличения  $x$ . Законы нарастания и убывания плотности среды определяются формулами (2.117) и (2.118). Нижний индекс соответствует номеру слоя. Как и ранее, все амплитуды нормированы на  $A_{10}$ , где  $A_{10} = 1$ .

Таблица. Амплитуды выходящих из структуры волн в обоих направлениях

| $B_{N_0}$ | $B_1^{(+)}$ | $B_1^{(-)}$ | $A_{16}^{(+)}$ | $A_{16}^{(-)}$ |
|-----------|-------------|-------------|----------------|----------------|
| -2        | 5,3532      | 0,7444      | 0,8639         | 2,7911         |
| -1        | 2,7003      | 0,5097      | 0,5097         | 2,7003         |
| 0         | 0,4032      | 0,4032      | 0,3139         | 2,6680         |
| 1         | 2,6962      | 0,5122      | 0,5122         | 2,6962         |
| 2         | 5,3491      | 0,7478      | 0,8668         | 2,7833         |

Из таблицы видно, что изменение фазы падающей волны встречного направления на противоположную (то есть переход от  $B_{N_0} = -1, -2$  к  $B_{N_0} = +1, +2$ ) меняет амплитуды выходящих волн на величину порядка 0,5 %, что количественно отражает хотя и невысокую, но ненулевую степень несимметричности кривых, приведенных на рис. 2.8.

Можно полагать, что наличие минимумов и близкий к линейному рост амплитуд  $B_1$  и  $A_{16}$  при достаточном увеличении абсолютной величины  $B_{N_0}$  обусловлены стремлением к пропорциональности амплитуд обеих выходящих волн амплитуде той падающей волны, амплитуда которой значительно превышает амплитуду другой. Некоторые сдвиги минимумов кривых по горизонтальной оси относительно друг друга, по-видимому, обусловлены фазовыми соотношениями между потоками энергии волн прямого и обратного направлений.

### 2.5.2. Интерференционное отражение падающей волны при воздействии встречной волны

В предыдущем разделе показано, что параметры отраженной волны в первой среде зависят от параметров встречной волны, входящей в последнюю среду структуры. Рассмотрим такую зависимость более подробно. Геометрию задачи оставляем прежней, показанной на рис. 2.5.

Как можно видеть из (2.107) с учетом (2.104), (2.105), а также (2.99), (2.101), (2.103), амплитуда волны, отраженной в первую среду, определяется выражением

$$B_1^{(N)} = \frac{A_{10}R_N + B_{N_0}e^{i\varphi}2^{N-1} \prod_{i=2}^N k_i \prod_{i=2}^{N-1} e_i}{P_N}, \quad (2.119)$$

где

$$R_N = R_{N-1}(k_{N-1} + k_N) + S_{N-1}(k_{N-1} - k_N)e_{(N-1)}^2, \quad (2.120)$$

$$P_N = P_{N-1}(k_{N-1} + k_N) + Q_{N-1}(k_{N-1} - k_N)e_{(N-1)}^2, \quad (2.121)$$

а величины  $P_{N-1}$ ,  $Q_{N-1}$ ,  $R_{N-1}$ ,  $S_{N-1}$  определяются на предыдущем шаге алгоритма по формулам, подобным (2.120) и (2.121), причем

$$e_n = e^{-ik_n(x_n - x_{n-1})}, \quad (2.122)$$

где  $n$  — номер среды.

Из (2.119) видно, что амплитуда волны, отраженной в первую среду  $B_1^{(N)}$  определяется не только амплитудой прямой волны  $A_{10}$ , но и амплитудой  $B_{N_0}$  и фазой  $\varphi$  встречной волны. В дальнейших расчетах будем полагать, что амплитуды  $B_{N_0}$  и  $B_1^{(N)}$  берутся по отношению к амплитуде прямой волны  $A_{10}$ .

Рассмотрим далее возможность управления амплитудой отраженной волны путем изменения амплитуды встречной волны. При этом будем различать два случая: первый, когда волноведущие параметры структуры жестко заданы, а фаза встречной волны может меняться, и второй, когда фаза встречной волны жестко задана, а параметры структуры могут меняться.

В качестве численного примера положим полную длину структуры равной 25 см, волновое число в первой среде равным  $k_1 = 0,02 \text{ см}^{-1}$ , волновое число в последней среде равным  $k_N = 0,18 \text{ см}^{-1}$ .

### 2.5.3. Изменение фазы встречной волны

Рассмотрим сначала поведение амплитуды отраженной волны при изменении фазы встречной волны. Можно полагать, что в этом случае при любой конфигурации параметров структуры можно подобрать фазу встречной волны таким образом, чтобы волна, возбуждаемая в первой среде встречной волной, была в противофазе с волной, возбуждаемой в той же среде отраженной прямой волной. Поэтому рассмотрим

наиболее простую конфигурацию структуры — два однородных слоя ( $N = 2$ ), разделенных одной границей.

Зависимости амплитуды волны, отраженной в первую среду  $B_1^{(N)}$ , от амплитуды встречной волны  $B_{N0}$  при различных фазах  $\varphi$  показаны на рис. 2.9.

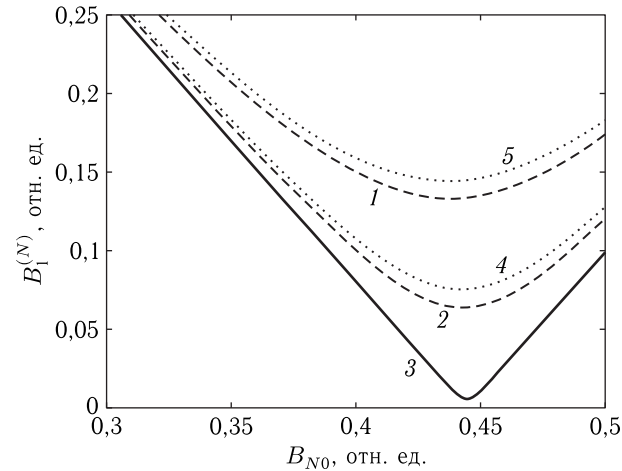


Рис. 2.9. Зависимости амплитуды отраженной волны от амплитуды встречной при: 1 —  $\varphi = 105^\circ$ ; 2 —  $\varphi = 110^\circ$ ; 3 —  $\varphi = 115^\circ$ ; 4 —  $\varphi = 120^\circ$ ; 5 —  $\varphi = 125^\circ$

Из рисунка видно, что амплитуда волны, отраженной в первую среду, сильно зависит от амплитуды встречной волны. Такая зависимость обусловлена интерференцией между двумя волнами, создаваемыми в первой среде: прямой волной (за счет отражения) и встречной волной (за счет прохождения). Видно, что зависимость суммарной волны, отраженной в первую среду, имеет минимум, глубина которого определяется разностью фаз между прямой и встречной волнами. Наиболее глубокий минимум имеет кривая 3, соответствующая разности фаз  $\varphi = 115^\circ$ . При этом амплитуда встречной волны равна  $B_{N0} = 0,44450$  отн. ед., амплитуда отраженной:  $B_1^{(N)} = 0,00570$  отн. ед. Положение минимума по амплитуде встречной волны при изменении фазы на  $\pm 10\%$  с точностью до 2% не меняется. Глубина минимума при этом увеличивается в 25 раз (возрастает до 0,15).

#### 2.5.4. Изменение параметров структуры

Рассмотрим теперь, как сказывается на амплитуде отраженной волны изменение параметров ступенчато-неоднородной структуры при неизменной фазе встречной волны ( $\varphi = 0$ ). Поскольку в этом случае возможность противофазности прямой и встречной волн в первой среде заранее не очевидна, рассмотрим более сложную структуру, содержащую

10 слоев ( $N = 10$ ). Для простоты положим зависимость волнового числа от координаты в виде степенной функции

$$k(x) = \frac{k_1 - k_{10}}{x_A^m - x_B^m} \cdot x^m + \frac{x_A^m k_{10} - x_B^m k_1}{x_A^m - x_B^m}, \quad (2.123)$$

где  $k_1$  и  $k_{10}$  — волновые числа в первом и последнем слоях структуры,  $x_A$  и  $x_B$  — координаты середин первого и последнего слоев структуры, определяемые по формулам:

$$x_A = \frac{x_0 + x_1}{2}, \quad (2.124)$$

$$x_B = \frac{x_9 + x_{10}}{2}. \quad (2.125)$$

Легко видеть, что в таком представлении зависимость волнового числа от координаты, проходя через начальное и конечное значения волнового числа в серединах первого и последнего слоев структуры, при  $m > 1$  является плавной кривой с выпуклостью вниз. При этом необходимый для поставленной задачи ступенчатый вид зависимости  $k(x)$  обеспечивается тем, что значения волнового числа для каждого слоя структуры берутся в середине этого слоя.

Получаемые ступенчатые зависимости волнового числа от координаты при некоторых показателях степени иллюстрируются рис. 2.10. Кривые 1–3 соответствуют изменению показателя  $m$  от 3 до 5. Такой выбор интервала изменения  $m$  обусловлен задачей минимизации отражения и поясняется далее. Кривая 4 соответствует линейной зависимости волнового числа от координаты, то есть  $m = 1$ , и приведена для сравнения.

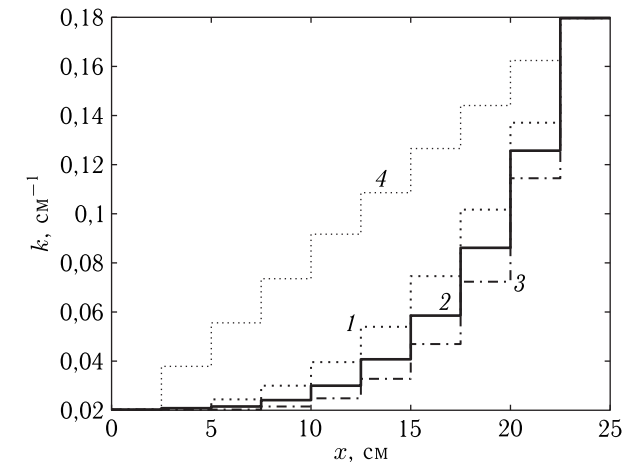


Рис. 2.10. Ступенчатые степенные зависимости волнового числа от координаты при показателях степени: 1 —  $m = 3$ ; 2 —  $m = 4$ ; 3 —  $m = 5$ ; 4 —  $m = 1$

Используем теперь приведенные на рис. 2.10 ступенчатые зависимости волнового числа от координаты для расчета амплитуды отраженной волны. Соответствующие зависимости амплитуды отраженной волны  $B_1$  от амплитуды встречной волны  $B_{N0}$  при различных значениях  $m$  показаны на рис. 2.11.

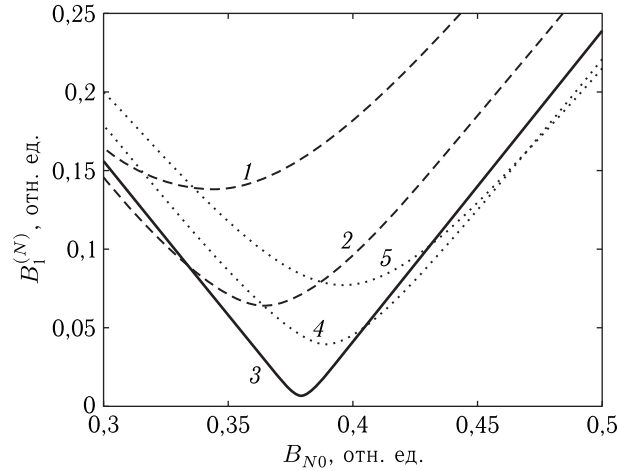


Рис. 2.11. Зависимости амплитуды отраженной волны от амплитуды встречной волны при: 1 —  $m = 3,0$ ; 2 —  $m = 3,5$ ; 3 —  $m = 4,0$ ; 4 —  $m = 4,5$ ; 5 —  $m = 5,0$

Из рисунка видно, что амплитуда волны, отраженной в первую среду, сильно зависит от амплитуды встречной волны. Такая зависимость обусловлена интерференцией между двумя волнами, создаваемыми в первой среде: прямой волной (за счет отражения) и встречной волной (за счет прохождения). Видно, что зависимость суммарной волны, отраженной в первую среду, имеет минимум, глубина которого определяется показателем степени  $m$  зависимости волнового числа от координаты. Наиболее глубокий минимум имеет кривая 3, соответствующая показателю степени  $m = 4,0$ . На рис. 3 зависимость волнового числа от координаты для этого случая представлена утолщенной кривой 2. При такой конфигурации амплитуда встречной волны равна  $B_{N0} = 0,37930$  отн. ед., амплитуда отраженной:  $B_1^{(N)} = 0,00626$  отн. ед. Положение минимума по амплитуде встречной волны при изменении показателя от 3,0 до 5,0 меняется от 0,35 до 0,39, глубина минимума на краях этого интервала составляет 0,14 и 0,08 отн. ед., что превышает его значение при  $m = 4,0$  в 22 и 12 раз соответственно.

Таким образом, при неизменной фазе встречной волны амплитуда волны, отраженной в первую среду, за счет выбора надлежащей конфигурации ступенчато-неоднородной структуры может быть сделана того же порядка малости, что и при изменении фазы.

## 2.6. Применение алгоритма для исследования свойств неоднородной среды

Проиллюстрируем теперь работу алгоритма на частном примере, в качестве которого обратимся к задаче о распространении волны в среде с линейной неоднородностью, меняющейся по ступенчатому закону.

Пусть неоднородная среда, занимая пространство между координатами  $x_0$  и  $x_N$ , имеет полную протяженность  $L = x_N - x_0$ , причем волновое число внутри среды зависит от координаты по линейному закону:

$$k = k_1 + \frac{k_N - k_1}{x_N} x, \quad (2.126)$$

где  $k_1$  и  $k_N$  — значения волновых чисел при  $x_0$  и  $x_N$  соответственно.

Предположим, что по отношению к распространению волн такую среду можно приближенно представить в виде слоистой структуры длиной  $L$ , заключенной в пределах от  $x_0$  до  $x_N$ , состоящей из  $N$  слоев, имеющих одинаковую толщину, равную  $d(N) = L/N$ .

Пусть волновое число в такой структуре меняется ступенчатым образом так, что для слоя с номером  $n$ , где  $1 \leq n \leq N$ , то есть при  $x_{n-1} < x < x_n$ , волновое число сохраняется постоянным, равным

$$k_n = n \cdot (k_N - k_1)/N, \quad (2.127)$$

где  $k_1$  и  $k_N$  — значения волновых чисел в крайних слоях структуры. При этом длины всех ступенек изменения волнового числа одинаковы и равны  $d(N) = L/N$ , а высоты также одинаковы и составляют  $\Delta k(N) = (k_N - k_1)/N$ .

Можно полагать, что при достаточно малой длине ступенек, то есть при достаточно дробном разбиении среды на части, волноведущие свойства ступенчатой среды приблизятся к таким же свойствам среды с плавным изменением параметров. Предметом дальнейшего рассмотрения будет выявление особенностей и установление корректности такого приближения.

### 2.6.1. Общий характер зависимостей амплитуд внешних волн от числа слоев структуры

Рассмотрим структуру длиной  $L$ , состоящую из  $N$  слоев, где  $2 \leq N \leq 25$ . Для перехода к безразмерным величинам будем далее рассматривать волновое число и длину волны, нормированные на длину структуры, то есть вместо  $k$  и  $\lambda$  будем использовать величины  $kL$  и  $\lambda/L$ . Для простоты положим  $B_0 = 0$ , то есть ограничимся случаем падения только прямой волны с амплитудой  $A_0$ . Будем менять число слоев  $N$  и рассмотрим поведение амплитуд внешних волн при таком изменении.

Получаемые результаты иллюстрируются рис. 2.12, где показаны зависимости модулей относительной амплитуды отраженной (а) и проходящей (б) волн от количества ступенек структуры. На врезке

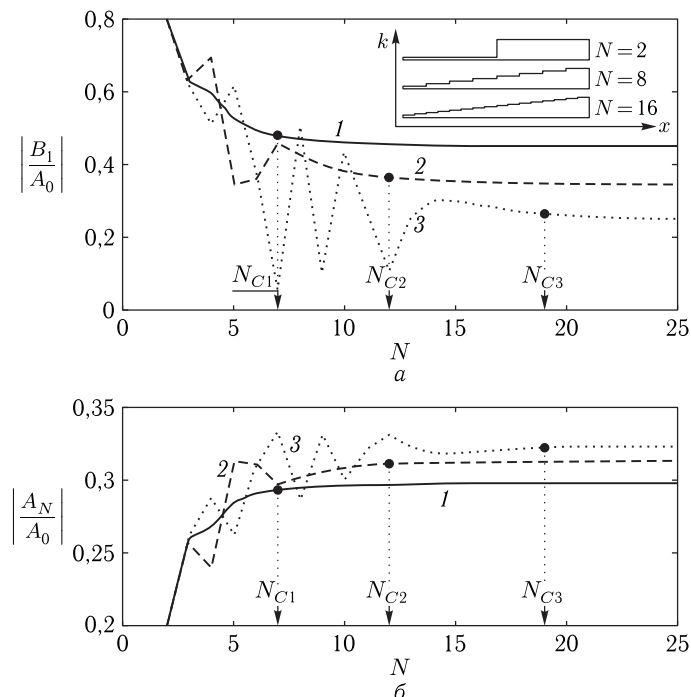


Рис. 2.12. Зависимости модулей относительной амплитуды отраженной (а) и проходящей (б) волн от количества ступенек структуры

показана схема зависимости волнового числа  $k$  от координаты  $x$  при различном числе ступенек (2, 8 и 16).

Номера кривых на рисунке соответствуют следующим интервалам изменения волновых чисел и длин волн между крайними ступеньками структуры (где длина структуры  $L$  постоянна, а длина волны меняется):

- 1 —  $1,25 \leq kL \leq 11,25$  ( $0,56 \leq \lambda/L \leq 5,02$ );
- 2 —  $2,50 \leq kL \leq 22,50$  ( $0,28 \leq \lambda/L \leq 2,51$ );
- 3 —  $5,00 \leq kL \leq 45,00$  ( $0,14 \leq \lambda/L \leq 1,25$ ).

В случае 1 длина волны больше длины структуры, в случае 2 — обе величины одного порядка, в случае 3 — длина волны меньше длины структуры.

Из рисунка видно, что при малом  $N$  зависимости амплитуд отраженной и проходящей волн от числа ступенек испытывают резкие осцилляции. При увеличении числа ступенек осцилляции прекращаются и обе зависимости выходят на плавный, стремящийся к горизонтальной линии участок. По-видимому, следует считать, что такая горизонтальная линия соответствует амплитудам отраженной и проходящей волн при плавном изменении параметров среды в целом. Таким образом, правомерность приближения плавно неоднородной среды ступенчатой

слоистой структурой можно оценить по выходу рассматриваемых зависимостей на плавный горизонтальный участок.

Критическое значение числа ступенек, соответствующее переходу от осцилляций к плавному участку, на рис. 2.12 обозначено через  $N_{C1,2,3}$  (где цифра индекса соответствует интервалу волновых чисел на крайних ступеньках структуры) и показано жирными точками. Видно, что критическое значение числа ступенек для каждого интервала волновых чисел не зависит от того, какая волна рассматривается — отраженная или проходящая. Это обстоятельство позволит дальше, чтобы не усложнять рассмотрение, ограничиться только отраженной волной.

Из рис. 2.12 также видно, что критическое число ступенек зависит от интервала изменения волнового числа, причем при сдвиге этого интервала в сторону больших волновых чисел; то есть при укорочении длины волны критическое число ступенек увеличивается.

### 2.6.2. Критическое число ступенек при различном интервале волнового числа

Рассмотрим теперь, как критическое число ступенек зависит от границ интервала изменения волнового числа между крайними ступеньками структуры. Для удобства сопоставления между параметрами интервала и линейными параметрами структуры перейдем далее от интервала волновых чисел к эквивалентному интервалу длин волн. Будем менять нижнюю и верхнюю границы этого интервала по очереди.

Получаемые результаты иллюстрируются рис. 2.13 и рис. 2.14, где показаны зависимости модулей относительной амплитуды отраженной волны от количества ступенек структуры при различных перепадах длин волн между крайними слоями структуры. Рис. 2.13 соответствует изменению верхней границы интервала длин волн при сохранении неизменной нижней. Рис. 2.14 соответствует изменению нижней границы интервала при сохранении верхней. Жирными точками обозначены начала плавных участков кривых.

На обоих рисунках отдельные кривые располагаются тем выше, чем больше перепад между крайними значениями длин волн (то есть чем больше перепад, тем сильнее отражение).

Из рис. 2.13 видно, что при неизменной минимальной длине волны плавные участки всех кривых начинаются при одном и том же критическом числе ступенек, в данном примере равном 6–7.

Из рис. 2.14 видно, что при неизменной максимальной длине волны плавные участки кривых соответствуют различным значениям критического числа ступенек (в данном примере от 3 до 20), тем меньшим, чем больше минимальная длина волны приближается к максимальной.

Из сопоставления рис. 2.13 и рис. 2.14 можно сделать вывод, что критическое число ступенек  $N_C$ , соответствующее переходу от осцилляций к плавному участку, определяется только нижней границей интервала значений длин волн на концах структуры и от верхней границы того же интервала не зависит.

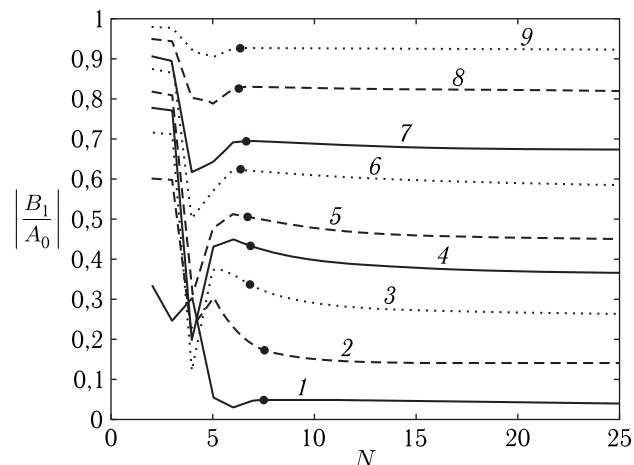


Рис. 2.13. Зависимости модулей относительной амплитуды отраженной волны от количества ступенек структуры при различных перепадах длин волн между крайними слоями структуры. Минимальная длина волны для всех кривых одинакова и равна  $\lambda_{\min}/L = 0,40$ . Номера кривых соответствуют следующим максимальным значениям длин волн:  $\lambda_{\max}/L$ : 1 — 0,8; 2 — 1,6; 3 — 2,4; 4 — 3,2; 5 — 4,0; 6 — 6,0; 7 — 8,0; 8 — 16,0; 9 — 40,0

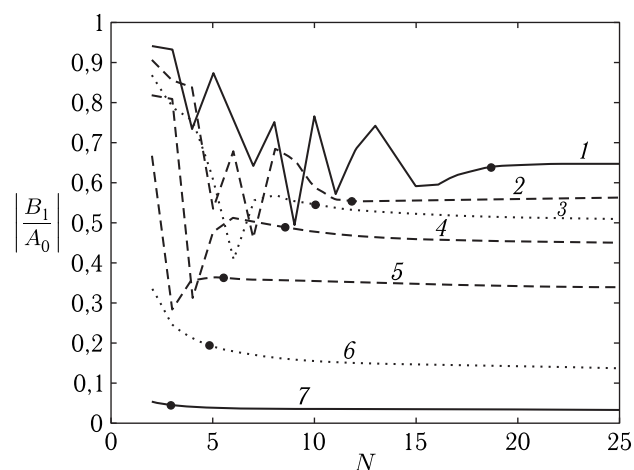


Рис. 2.14. Зависимости модулей относительной амплитуды отраженной волны от количества ступенек структуры при различных перепадах длин волн между крайними слоями структуры. Максимальная длина волны для всех кривых одинакова и равна  $\lambda_{\max}/L = 4,00$ . Номера кривых соответствуют следующим минимальным значениям длин волн  $\lambda_{\min}/L$ : 1 — 0,12; 2 — 0,20; 3 — 0,28; 4 — 0,40; 5 — 0,80; 6 — 2,00; 7 — 3,60

Из рис. 2.13 и рис. 2.14 видно, что характер перехода к плавному участку у различных кривых различен. Так, например, на рис. 2.14 кривые 1, 2, 5 при подходе к асимптоте возрастают, а кривые 3, 4, 6, 7 — убывают.

### 2.6.3. Параметры отражения при малом изменении длины волны

Из проведенного рассмотрения можно видеть, что какая-либо кратность между длиной волны и линейными параметрами структуры (полной длиной, длиной ступеньки или группы ступенек) из рис. 2.13 и рис. 2.14 не прослеживается. Такое обстоятельство, очевидно, вызвано слишком большим интервалом изменения длины волны на концах структуры (до 100 раз). Чтобы более тонко выявить перечисленные обстоятельства, далее исследуются параметры отражения от структуры при малом интервале изменения длины волны.

На рис. 2.15 показаны зависимости модулей относительной амплитуды отраженной волны от количества ступенек структуры для различных длин волн при малом перепаде по длине волны между крайними слоями структуры. Кривые построены для различных значений минимальной длины волны  $\lambda_{\min}/L$ , при этом максимальные значения длин волн равны:  $\lambda_{\max} = 1,01 \cdot \lambda_{\min}$ , то есть полный перепад составляет  $\Delta\lambda = 0,01 \cdot \lambda_{\min}$ . Ввиду малости перепада не будем далее выделять минимальную длину волны  $\lambda_{\min}$ , а будем говорить просто о длине волны  $\lambda$ , как средней в пределах интервала.

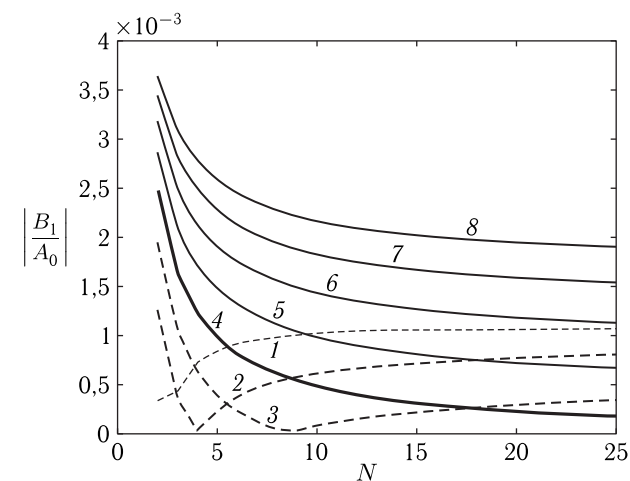


Рис. 2.15. Зависимости модулей относительной амплитуды отраженной волны от количества ступенек структуры для различных длин волн при малом перепаде между крайними слоями структуры. Номера кривых соответствуют следующим минимальным значениям длин волн  $\lambda_{\min}/L$ : 1 — 1,4; 2 — 1,6; 3 — 1,8; 4 — 2,0; 5 — 2,2; 6 — 2,4; 7 — 2,6; 8 — 2,8



Из рис. 2.15 видно, что кривые 1–3 испытывают осцилляции и имеют минимумы при  $N = 2, 4$  и  $9$  соответственно, после чего, плавно возрастая, стремятся к горизонтальным асимптотам снизу. Кривые 4–8 осцилляций и экстремумов не имеют и плавно спадают, стремясь к горизонтальным асимптотам сверху.

Можно видеть, что при увеличении длины волны качественное изменение характера кривых происходит, начиная с кривой 4, длина волны для которой минимальная равна удвоенной длине структуры в целом. При этом критической ситуацией является укладывание по длине структуры половины длины волны, то есть выполнение условия

$$\lambda/2 = L. \quad (2.128)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что в случае, когда длина волны больше определяемой условием (2.121), зависимость  $|B_1(N)/A_0|$  является плавной, а если меньше — осциллирующей.

#### 2.6.4. Осцилляции отражения при малой длине волны

Обратимся теперь к причине образования осциллирующего характера зависимости амплитуды отраженной волны от числа ступенек в случае, когда длина волны меньше определяемой условием (2.121). Для этого рассмотрим, как зависит критическое значение числа ступенек  $N_C$ , соответствующее выходу кривых  $|B_1(N)/A_0|$  на плавный участок, от длины волны света, падающего на структуру. Такая зависимость иллюстрируется рис. 2.16, при построении которого длина

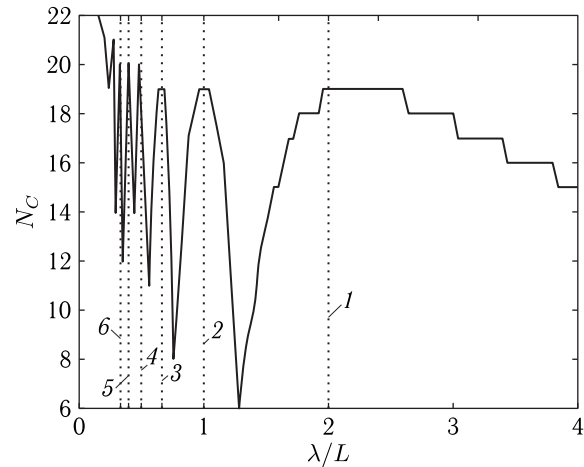


Рис. 2.16. Зависимости критического числа ступенек от длины волны при малом перепаде между крайними слоями структуры. Номера вертикальных линий соответствуют минимальным длинам волн  $\lambda_{\min}/L$ : 1 — 2,0; 2 — 1,0; 3 — 0,67; 4 — 0,50; 5 — 0,40; 6 — 0,33

волны менялась в пределах  $0,05 \leq \lambda/L \leq 4,00$ , а перепад длин волн между крайними слоями структуры равнялся  $\Delta\lambda = 0,01 \cdot \lambda$ .

Критическое число ступенек определялось по равенству 0,0001 модуля изменения величины  $|B_1(N)/A_0|$  при изменении числа ступенек на единицу, то есть при выполнении условия

$$\left| \frac{\Delta|B_1(N)/A_0|}{\Delta N} \right|_{\Delta N=1} = 0,0001. \quad (2.129)$$

Здесь назначение внешнего модуля состоит в том, чтобы обеспечить положительность левой части равенства вне зависимости от того, как кривая  $|B_1(N)/A_0|$  стремится к горизонтали — сверху или снизу.

Отметим, что ступенчатый вид зависимости  $N_C(\lambda)$ , особенно проявляющийся в правой ее части, обусловлен дискретным характером слоистой структуры.

Вертикальные точечные линии соответствуют  $\lambda = 2L/n$ , где  $L$  — полная длина структуры ( $N = 25$ ),  $n = 1, 2, \dots, 6$  — целое число, соответствующее номеру линии.

Из рисунка видно, что на эти линии приходятся максимумы зависимости  $N_C(\lambda)$ . Это означает, что критическое число ступенек максимально тогда, когда на длине структуры укладывается целое число полуволн. Укладывание целого числа полуволн по длине структуры соответствует возбуждению в структуре мод, образованных стоячими волнами с узлами на концах структуры.

Это означает, что показанные на рисунке вертикальные линии соответствуют: 1 — первой моде ( $\lambda = 2L$  — укладывается одна полуволна); 2 — второй моде ( $\lambda = L$  — две полуволны); 3 — третьей моде ( $\lambda = 2L/3$  — три полуволны); 4 — четвертой моде ( $\lambda = L/2$  — четыре полуволны); 5 — пятой моде ( $\lambda = 2L/5$  — пять полуволн); 6 — шестой моде ( $\lambda = L/3$  — шесть полуволн).

Таким образом, при возбуждении мод выполняется соотношение

$$\lambda = 2L/m, \quad (2.130)$$

где номер моды  $m$  — целое число.

Рассмотрим теперь противоположную ситуацию, то есть случай, когда длина волны больше определяемой условием (2.128). При этом, как видно из рис. 2.15, зависимости амплитуды от числа ступенек (кривые 4–8) стремятся к горизонтальным асимптотам плавно и всегда сверху. Однако из того же рисунка видно, что зависимости  $|B_1(N)/A_0|$  далеко не сразу приближаются к горизонтали, а имеют при небольших  $N$  значительный спадающий участок.

Если отвлечься от дискретности слоистой структуры и условно положить зависимость амплитуды отраженной волны от числа ступенек  $|B_1(N)/A_0|$  непрерывной, то можно ввести в рассмотрение производную этой зависимости по числу  $N$ :

$$W_B = \frac{d|B_1(N)/A_0|}{dN}, \quad (2.131)$$

модуль которой, как видно из рис. 2.15, при увеличении  $N$  стремится к нулю.

Из того же рисунка можно видеть, что характер стремления этого модуля к нулю для разных зависимостей различен, например кривая 4 при  $N = 25$  идет круче кривой 8 при том же значении  $N$ .

### 2.6.5. Соотношение между числом ступенек и точностью приближения

Более подробно такое различие иллюстрируется рис. 2.17 и рис. 2.18, где на рис. 2.17 показаны зависимости амплитуды отраженной волны от количества ступенек структуры  $|B_1(N)/A_0|$  для разных длин волн, а на рис. 2.18 — зависимости модулей производных от тех же зависимостей по числу ступенек  $|W_B(N)|$  для тех же длин волн.

На обоих рисунках сплошные кривые 1–5 соответствуют амplitудам, а пунктирные 6–8 — фиксированным значениям модулей производных. Перепад длин волн по-прежнему равен  $0,01 \cdot \lambda$ . Точки соответствуют пересечениям кривых 1–5 и 6–8.

Из рис. 2.17 видно, что все зависимости для амплитуд (1–5) при  $N = 2$  начинаются в одной и той же точке, соответствующей относительной амплитуде отраженной волны  $5 \cdot 10^{-3}$ , причем по мере увеличения длины волны эти зависимости все более выпрямляются, приближаясь к горизонталям. Точки, соответствующие одним и тем же значениям модулей производных, по мере увеличения длины волны смещаются в сторону меньших значений числа ступенек.

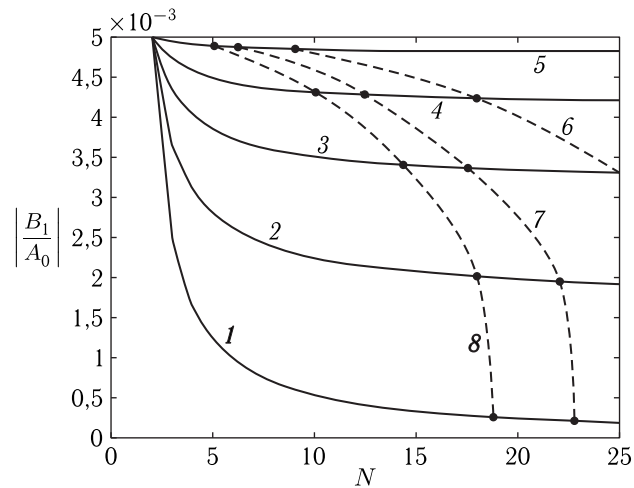


Рис. 2.17. Зависимости модулей относительной амплитуды отраженной волны от количества ступенек структуры (сплошные линии) и геометрические места точек, соответствующих фиксированным значениям производных этих зависимостей (пунктирные линии) для различных длин волн

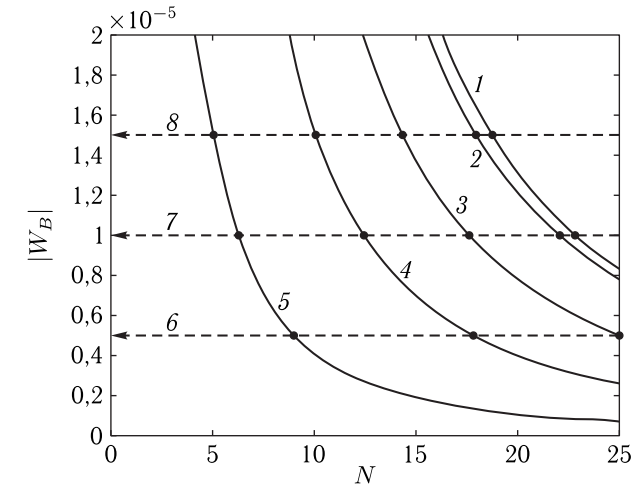


Рис. 2.18. Зависимости модулей производных относительной амплитуды отраженной волны по числу ступенек от количества ступенек структуры (сплошные линии) для различных длин волн. Пунктиром показаны уровни отсчета фиксированных значений этих производных. Номера кривых 1–5 соответствуют следующим значениям длин волн  $\lambda/L$ : 1 — 2,0; 2 — 2,8; 3 — 4,0; 4 — 6,0; 5 — 12,0. Номера кривых 6–8 соответствуют следующим значениям модулей производных кривых 1–5: 6 —  $0,5 \cdot 10^{-5}$ ; 7 —  $1,0 \cdot 10^{-5}$ ; 8 —  $1,5 \cdot 10^{-5}$

Из рис. 2.18 видно, что по мере увеличения числа ступенек модули производных уменьшаются, то есть точность приближения возрастает. С другой стороны, по мере увеличения длины волны (от кривой 1 до кривой 5) зависимости модулей производных от числа ступенек смещаются ниже и левее, что при заданных значениях  $|W_B|$  приводит к уменьшению количества ступенек, требуемых для достижения заданной точности.

Таким образом, из рассмотрения рис. 2.17 и рис. 2.18 следует, что чем длиннее волна и чем больше число ступенек, тем приближение плавной неоднородности ступенчатой выполняется лучше.

Более точно значение критического числа ступенек  $N_C$  позволяет определить рис. 2.19, где показаны зависимости  $N_C$  от отношения длины волны к длине структуры. Этот рисунок построен с частичным использованием точек, приведенных на рис. 2.17 и рис. 2.18. Все исходные параметры построения — те же.

Непрерывные кривые на рис. 2.19 построены с помощью эмпирической формулы

$$N_C = \frac{60}{\lambda/L} + A, \quad (2.132)$$

где для кривой 1 —  $A = 7$ ; для кривой 2 —  $A = 2$ ; для кривой 3 —  $A = 0$ .

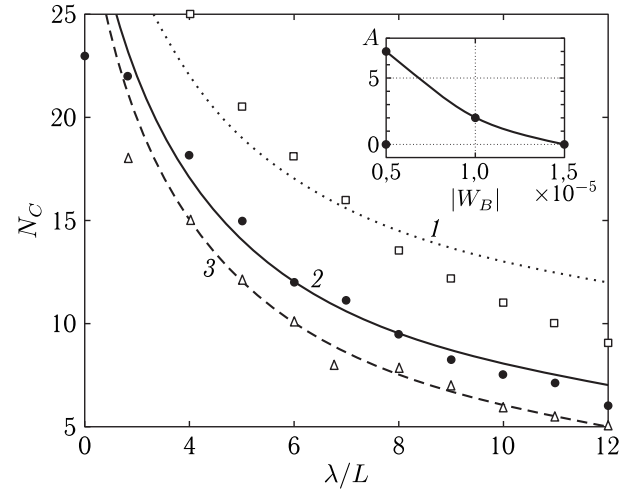


Рис. 2.19. Зависимости критического числа ступенек от отношения длины волны к длине структуры. Номера точек на кривых 1–3 соответствуют следующим значениям модулей производных: 1 –  $0,5 \cdot 10^{-5}$ ; 2 –  $1,0 \cdot 10^{-5}$ ; 3 –  $1,5 \cdot 10^{-5}$ . На врезке — зависимость параметра  $A$ , входящего в эмпирическую формулу (2.132), от заданного значения модуля производной  $|W_B|$

Зависимость параметра  $A$  от заданного значения производной  $W_B$  показана на врезке в рис. 2.19. Видно, что по мере уменьшения точности (увеличения модуля производной) параметр  $A$  уменьшается и при  $|W_B| = 1,5 \cdot 10^{-5}$ , проходя через нуль, меняет знак.

Из рисунка видно, что чем длиннее волна, тем меньшее количество ступенек становится достаточным для заданной точности приближения плавной неоднородности ступенчатой. Использование же эмпирической формулы позволяет заранее, исходя из заданной точности, определять требуемое число ступенек.

**Замечание.** Отметим, что проведенное здесь рассмотрение относится к случаю малого интервала длин волн между крайними значениями на концах структуры. При этом можно видеть, что при уменьшении длины волны ниже предела, даваемого соотношением (2.128), производная  $W_B(N)$  меняет знак, как видно, например, из кривых 1–3 на рис. 2.15, причем критическое значение числа ступенек, определяемое из равенства модуля производной заданному малому числу (2.129), также уменьшается, как это видно из рис. 2.16, например в области  $1 < \lambda/L < 2$ . Однако при этом начинаются осцилляции зависимости амплитуды от числа ступенек, тем более выраженные, чем шире интервал длин волн между крайними значениями на концах структуры, что делает определение критического значения числа ступенек затруднительным.

## 2.7. Критерий выбора оптимального числа ступенек при ступенчатом приближении неоднородной среды

Из проведенного рассмотрения видно, что при решении задачи о приближении плавной неоднородности среды ступенчатой выбор параметров такого приближения весьма критичен: при неправильном выборе амплитуды отраженной и проходящей волн могут принимать значения, весьма сильно (до нескольких раз) отличающиеся от таковых для непрерывной среды.

Рассмотрим теперь, насколько адекватно ступенчатое приближение отражает реальное поведение среды с плавно меняющимися параметрами.

Вообще говоря, в качестве критерия точности приближения следовало бы избрать отношение отклонения получаемого решения от точного, найденного аналитическими методами. Однако на сегодняшний день точное решение задачи для плавной неоднородности известно только лишь для некоторых частных случаев [4, 9, 131], тогда как для практики требуется рассмотрение неоднородности произвольного характера.

Такое обстоятельство вынуждает избрать другой критерий, позволяющий ограничить требуемое число ступенек разумными пределами.

Прежде всего отметим, что, в соответствии с (2.128), необходимым условием возможности использования ступенчатого приближения является превышение минимальной длины волны над удвоенной длиной структуры в целом:

$$\lambda_{\min} > 2L. \quad (2.133)$$

Если минимальная длина волны не удовлетворяет этому условию, то использование приближения плавной неоднородности ступенчатой недопустимо. При выполнении условия (2.133) и заданном числе ступенек приближение будет выполняться тем точнее, чем больше минимальная длина волны превышает удвоенную длину структуры.

С другой стороны, представляет интерес вопрос: при условии, что минимальная длина волны задана, то каково должно быть минимальное число ступенек структуры, чтобы обеспечить приближение с желаемой точностью?

Ответ на этот вопрос можно получить из анализа зависимости модуля производной (2.131) от числа ступенек типа показанной на рис. 2.18. В этом случае минимальное необходимое число ступенек  $N_{\min}$  будет определяться равенством:

$$|W_B|_{N=N_{\min}} = \left| \frac{dB_1(N)/A_0}{dN} \right|_{N=N_{\min}} = \varepsilon, \quad (2.134)$$

где  $\varepsilon$  — наперед заданное достаточно малое число, отражающее желаемую точность приближения.

Таким образом, выражение (2.134) можно рассматривать как уравнение для определения  $N_{\min}$ . Очевидно, стремление  $\varepsilon$  к нулю соответствует асимптотическому приближению зависимости  $B_1(N)$  к точному

значению, достижимому только при  $N \rightarrow \infty$ . Поскольку явный вид зависимости  $W_B(N)$  не известен, то с практической целью можно воспользоваться эмпирической формулой (2.132). При этом необходимое значение параметра  $A$  можно найти из кривой, приведенной на врезке рис. 2.19, где по горизонтали отложено значение производной, отражающее желаемую точность приближения.

Таким образом, выбор критерия (2.134) позволяет более ограничить расчеты разумным значением числа ступенек, чем избежать излишней вычислительной работы.

## 2.8. Обобщение на случай электромагнитных волн

Итак, основным результатом настоящей главы является получение алгоритма, позволяющего с минимальными вычислительными затратами исследовать отражение и прохождение волн различной природы через многослойные структуры со сложным профилем неоднородности.

Рассмотрение проведено на основе одномерной волны, однако не представляет труда обобщить предложенный алгоритм на случай волн другой природы, в частности электромагнитных, например так, как это сделано в работе [75].

Так, для случая нормального падения достаточно во всех выражениях, кроме показателей экспонент, заменить волновые числа величинами, обратными соответствующим импедансам:

$$k_n \rightarrow 1/Z_n, \quad (2.135)$$

где  $Z_n = Z_0 \sqrt{\mu_n/\varepsilon_n}$ ,  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$  — импеданс свободного пространства, а  $\mu_n$  и  $\varepsilon_n$  — магнитная и диэлектрическая проницаемости  $n$ -го слоя,  $\mu_0$  и  $\varepsilon_0$  — магнитная и диэлектрическая постоянные в системе СИ.

В случае наклонного падения волны с продольной (вертикальной) поляризацией надо произвести замену:

$$k_n \rightarrow 1/Z_n \cos \theta_n, \quad (2.136)$$

в случае поперечной (горизонтальной) поляризации замену:

$$k_n \rightarrow \cos \theta_n / Z_n, \quad (2.137)$$

а также заменить экспоненту:

$$\exp(ik_n x) \rightarrow \exp(ik_n x \cos \theta_n), \quad (2.138)$$

где  $\theta_n$  — угол распространения (преломления) волны в  $n$ -м слое.

При этом все выражения хода алгоритма (2.89)–(2.107) остаются без каких-либо изменений.

## Выводы по главе 2

Данная глава посвящена описанию математического аппарата метода пошагового алгоритма расчета распространения волн в многослойных структурах в укороченном варианте. В качестве примеров приведены решения некоторых задач для произвольного числа сред. Получен критерий применимости ступенчатого приближения неоднородной структуры.

Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. В рамках задачи о распространении волн прямого и встречного направлений прямым методом получены детерминанты, определяющие амплитуды выходящих из структуры волн для структур, содержащих от двух до пяти слоев. Выполнен анализ структуры следующих по числу слоев выражений для детерминантов, отмечены условия повторяемости входящих в них сомножителей. Установлено, что по мере увеличения числа слоев детерминанты усложняются иерархическим образом, состоящим во вложении выражений предыдущих детерминантов в выражения для последующих, включающим в себя четко детерминированное чередование знаков внутри сомножителей.

2. На основании анализа структуры детерминантов со второго до пятого порядков предложена схема алгоритма пошагового расчета амплитуд выходящих из структуры волн при входе в структуру волн обоих направлений. Для следующих друг за другом шагов алгоритма приведены правила получения последующих выражений из предыдущих с использованием рекуррентных формул, состоящих в увеличении на каждом шаге порядковых индексов слагаемых на единицу. Показана возможность и приведена блок-схема реализации алгоритма для численного расчета амплитуд волн в структуре с произвольным числом слоев. Приведены полученные таким способом детерминанты, установлено их тождество с получаемыми прямым методом.

3. Полученный алгоритм применен для расчета амплитуд выходящих из структуры волн при падении встречных волн обоих направлений. Распределение волнового числа по слоям структуры положено линейным, причем рассмотрены два случая — линейного возрастания и линейного убывания волнового числа при условии замены плавного изменения ступенчатым. Исследованы зависимости амплитуд выходящих из структуры волн обоих направлений от амплитуды падающей волны обратного направления для случаев как возрастания, так и убывания волнового числа. Показано, что в обоих случаях зависимости имеют V-образный характер с минимумом вблизи нулевого значения амплитуды падающей волны. Обнаружен небольшой сдвиг минимумов кривых по горизонтальной оси относительно друг друга, для объяснения которого предложены фазовые соотношения между потоками энергии волн прямого и обратного направлений.

4. Рассмотрено распространение встречных волн через многослойную ступенчато-неоднородную структуру с использованием алгоритма

последовательных вычислений. Показано, что прямая и встречная волны в совокупности создают в первой среде отраженную волну, амплитуда которой определяется интерференцией между этими волнами. Исследованы зависимости амплитуды волны, отраженной в первую среду, от амплитуды встречной волны при различных ее фазах. Показано, что эти зависимости имеют минимум, положение которого по амплитуде встречной волны от ее фазы не зависит, а глубина определяется разностью фаз между прямой и встречной волнами.

5. Рассмотрено поведение амплитуды отраженной волны в структуре, волновое число в которой зависит от координаты по ступенчатому степенному закону. Показано, что при этом зависимость амплитуды отраженной волны от амплитуды встречной имеет минимум, глубина которого определяется показателем степени закона изменения волнового числа. В обоих случаях возбуждение встречной волны позволяет уменьшить амплитуду отраженной волны до величины, не превышающей 0,006 от амплитуды прямой волны, падающей на структуру.

6. Работа предложенного алгоритма продемонстрирована на примере задачи о распространении волн в неоднородной структуре с линейным изменением волнового числа по ее длине. В рамках ступенчатого приближения рассмотрены случаи малого и большого соотношений между длиной волны и длиной структуры в целом, в связи с изменением числа ступенек структуры. Показано, что зависимости амплитуд отраженной и проходящей волн от числа слоев при малом числе ступенек имеют осциллирующий характер, а при большом могут принимать стационарные значения, то есть использование большого числа ступенек в качестве приближения является предпочтительным.

7. Получен критерий применимости ступенчатого приближения для изучения распространения волн через неоднородные среды с плавно меняющимися параметрами. Показано, что ступенчатое приближение применимо к плавно меняющейся среде только в случае, когда минимальная длина волны в структуре превышает полную длину структуры не менее чем в два раза. Выявлены условия, необходимые для оптимального приближения структуры среды минимальным количеством ступенек, предложена эмпирическая формула, позволяющая по заданной точности приближения определить необходимое число ступенек.

8. В соответствии с общностью волновых процессов различной природы, показана возможность применения алгоритма к задачам о распространении электромагнитных волн для случаев нормального и наклонного падения.

## Глава 3

### ПОЛНЫЙ МЕТОД ПОШАГОВОГО АЛГОРИТМА

Глава посвящена описанию математического аппарата и практического применения полного метода пошагового алгоритма. Описанный в предыдущей главе укороченный метод позволяет найти амплитуды только выходящих из структуры волн, то есть волн отраженных и проходящих. Рассматриваемый далее полный алгоритм позволяет определить волны обоих направлений во всех слоях структуры. Получены рекуррентные формулы для вычисления амплитуд таких волн. Приведена блок-схема последовательного выполнения операций метода в виде, удобном для машинной реализации. Приведены примеры решения некоторых задач с применением полного алгоритма.

В главе частично использованы материалы монографий [1, стр. 199–214; 57; 58; 62, стр. 14–41], а также статей [79, 83, 88, 90]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

#### 3.1. Математический аппарат полного алгоритма

В предыдущей главе описано исследование распространения волн в многослойных структурах с помощью пошагового алгоритма. Приведенная там схема позволяет получить только амплитуды внешних волн, выходящих из структуры в обе стороны. В то же время для ряда задач представляет интерес найти амплитуды не только внешних, но и всех внутренних волн, распространяющихся во внутренних слоях структуры. Для такой цели служит полный алгоритм пошагового характера, описываемый далее. Отличие от первого алгоритма состоит в прохождении структуры дважды в прямом и обратном направлениях. Число шагов и соответствующих процедур удваивается, чем достигается исчерпывающее определение амплитуд волн во всех слоях структуры. По этому такой алгоритм именуется полным, а описанный в предыдущей главе — укороченным. Построение алгоритма, как и в предыдущем случае, основано на иерархической повторяемости структуры детерминантов, определяющих амплитуды волн. Проследить такую повторяемость наиболее удобно по амплитудам волн, полученных прямым методом (разделы 2.1, 2.2). Выполнить такую проверку авторы рекомендуют любознательному читателю в качестве полезного упражнения. Здесь же перейдем непосредственно к описанию схемы полного алгоритма.

### 3.1.1. Общая схема полного алгоритма

Будем рассматривать задачу в той же геометрии, что и для укороченного алгоритма, схема которой приведена на рис. 2.5 (раздел 2.3.1). Все обозначения примем теми же самыми (раздел 2.3.2).

Рассмотрим схему получения детерминантов для произвольного числа  $N$  слоев. Алгоритм содержит два этапа, состоящих в последовательном прохождении по слоям структуры от одного конца структуры к другому и обратно.

На первом этапе сначала с помощью простых правил задаются некоторые вспомогательные величины, определяемые параметрами первого слоя. Эти величины считаются величинами первого слоя. Из них на основе параметров первого и второго слоев формируются новые величины, принадлежащие второму слою. Из величин второго слоя с помощью параметров второго и третьего слоев формируются величины третьего слоя. Затем таким же образом из величин третьего слоя формируются величины четвертого слоя и так далее до тех пор, пока все слои структуры не будут исчерпаны. Формирование последующих величин из предыдущих происходит с помощью формальной процедуры, состоящей в увеличении порядковых индексов всех предыдущих величин на единицу.

При исчерпании всех слоев структуры первый этап заканчивается и происходит переход ко второму. Второй этап начинается с формирования вспомогательных величин, определяемых параметрами последнего слоя структуры. Далее из этих величин с использованием параметров последнего и предпоследнего слоев формируются подобные величины для предпоследнего слоя. Затем таким же образом формируются величины для всех предыдущих слоев вплоть до первого. Процедура формирования последующих величин из предыдущих состоит в уменьшении порядковых индексов всех предыдущих величин на единицу.

Таким образом, на первом этапе происходит переход от начала структуры к ее концу, а на втором — обратный ход от конца структуры к ее началу.

Из всех величин, получаемых на обоих этапах, с помощью простых правил суммирования формируются детерминанты, определяющие амплитуды волн внутри слоев.

### 3.1.2. Схема пошагового получения детерминантов

Рассмотрим теперь алгоритм получения детерминантов, соответствующих амплитудам всех, как внешних, так и внутренних волн, распространяющихся в структуре в обоих направлениях. В основном будем следовать работам [62, 79, 88]. Дадим здесь наиболее удобный вариант, не содержащий громоздких многократных произведений.

Как и ранее (раздел 2.3.1), будем считать, что на структуру падают две волны обоих направлений с амплитудами  $A_{10}$  и  $B_{N0}$ , причем фаза

волны  $B_{N0}$  сдвинута относительно фазы волны  $A_{10}$  на угол  $\varphi$ , так что начальные амплитуды волн в слоях  $I$  и  $N$  равны:

$$A_1 = A_{10}; \quad (3.1)$$

$$B_N = B_{N0}e^{i\varphi}. \quad (3.2)$$

Подобно (2.87) (раздел 2.3.2) будем использовать обозначения:

$$e_n = e^{-ik_n(x_n - x_{n-1})}, \quad (3.3)$$

где  $n$  — номер слоя, а также

$$e_0 = e^{i\varphi}. \quad (3.4)$$

Приведем теперь последовательность действий алгоритма.

#### ЭТАП № 1.

Введем обозначение

$$T_0 = 1 \quad (3.5)$$

и положим начальную тройку основных обозначений:

$$P_1 = 1; \quad (3.6)$$

$$Q_1 = 0; \quad (3.7)$$

$$T_1 = T_0 2k_1 e_1. \quad (3.8)$$

С использованием (3.6)–(3.8) формируем новую тройку выражений:

$$P_2 = P_1(k_1 + k_2) + Q_1(k_1 - k_2)e_1^2; \quad (3.9)$$

$$Q_2 = P_1(k_1 - k_2) + Q_1(k_1 + k_2)e_1^2; \quad (3.10)$$

$$T_2 = T_1 2k_2 e_2. \quad (3.11)$$

Увеличивая порядковые номера индексов на единицу, получаем следующую тройку подобных выражений и так далее, вплоть до  $P_N$ ,  $Q_N$ ,  $T_N$ .

Общие формулы при произвольном  $n$  имеют вид:

$$P_{n+1} = P_n(k_n + k_{n+1}) + Q_n(k_n - k_{n+1})e_n^2; \quad (3.12)$$

$$Q_{n+1} = P_n(k_n - k_{n+1}) + Q_n(k_n + k_{n+1})e_n^2; \quad (3.13)$$

$$T_{n+1} = T_n 2k_{n+1} e_{n+1}. \quad (3.14)$$

Процесс заканчивается при достижении  $n$  значения  $N - 1$ . При этом получаем:

$$P_N = P_{N-1}(k_{N-1} + k_N) + Q_{N-1}(k_{N-1} - k_N)e_{(N-1)}^2; \quad (3.15)$$

$$Q_N = P_{N-1}(k_{N-1} - k_N) + Q_{N-1}(k_{N-1} + k_N)e_{(N-1)}^2; \quad (3.16)$$

$$T_N = T_{N-1} 2k_N e_N. \quad (3.17)$$

#### ЭТАП № 2.

Введем обозначение

$$U_{N+1} = 1 \quad (3.18)$$

и положим другую начальную тройку обозначений:

$$R_N = 1; \quad (3.19)$$

$$S_N = 0; \quad (3.20)$$

$$U_N = U_{N+1}2k_N e_N. \quad (3.21)$$

С использованием (3.19)–(3.21) формируем тройку выражений:

$$R_{N-1} = (k_{N-1} + k_N)R_N + (k_{N-1} - k_N)S_N e_N^2, \quad (3.22)$$

$$S_{N-1} = (k_{N-1} - k_N)R_N + (k_{N-1} + k_N)S_N e_N^2, \quad (3.23)$$

$$U_{N-1} = U_N 2k_{N-1} e_{N-1}. \quad (3.24)$$

Далее, уменьшая порядковые номера индексов на единицу, получаем следующую тройку подобных выражений и так далее, вплоть до  $P_1$ ,  $Q_1$ ,  $U_1$ . Общие формулы для получения последующих выражений из предыдущих при произвольном номере  $n$  имеют вид:

$$R_{n-1} = (k_{n-1} + k_n)R_n + (k_{n-1} - k_n)S_n e_n^2, \quad (3.25)$$

$$S_{n-1} = (k_{n-1} - k_n)R_n + (k_{n-1} + k_n)S_n e_n^2, \quad (3.26)$$

$$U_{n-1} = U_n 2k_{n-1} e_{n-1}. \quad (3.27)$$

Процесс заканчивается при достижении  $n$  значения 1:

$$R_1 = (k_1 + k_2)R_2 + (k_1 - k_2)S_2 e_2^2, \quad (3.28)$$

$$S_1 = (k_1 - k_2)R_2 + (k_1 + k_2)S_2 e_2^2, \quad (3.29)$$

$$U_1 = U_2 2k_1 e_1. \quad (3.30)$$

### ПОЛУЧЕНИЕ ДЕТЕРМИНАНТОВ.

Результатом прохождения обоих этапов являются два набора величин: после первого этапа —  $P_n$ ,  $Q_n$ ,  $T_n$ , после второго этапа —  $R_n$ ,  $S_n$ ,  $U_n$ , где  $n$ , будучи номером слоя, меняется от 1 до  $N$ . Использование этих наборов позволяет получить **детерминанты**:

$$D_0 = R_1 - Q_1; \quad (3.31)$$

$$D_{B1} = (A_{10})S_1 T_0 e_1 + (B_{N0}e_0)P_1 U_2; \quad (3.32)$$

$$D_{A2} = (A_{10})R_2 T_1 - (B_{N0}e_0)Q_2 U_3 e_2; \quad (3.33)$$

$$D_{B2} = (A_{10})S_2 T_1 e_2 + (B_{N0}e_0)P_2 U_3; \quad (3.34)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$D_{A_n} = (A_{10})R_n T_{n-1} - (B_{N0}e_0)Q_n U_{n+1} e_n; \quad (3.35)$$

$$D_{B_n} = (A_{10})S_n T_{n-1} e_n + (B_{N0}e_0)P_n U_{n+1}; \quad (3.36)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$D_{A_N} = (A_{10})R_N T_{N-1} - (B_{N0}e_0)Q_N U_{N+1} e_N; \quad (3.37)$$

$$D_0 = S_N + P_N. \quad (3.38)$$

Здесь индексы детерминантов соответствуют номерам слоев, а выражения (3.31) и (3.38) равны друг другу.

Найденные детерминанты (3.31)–(3.38) позволяют определить амплитуды всех внутренних волн структуры через  $A_0$  и  $B_0$  с помощью формул вида (2.85) (раздел 2.3.2), задающих амплитуды волн в точках их исхода. При этом амплитуды внешних волн равны:

$$A_{NT} = D_{AN}/D_0, \quad B_{1T} = D_{B1}/D_0. \quad (3.39)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что эти амплитуды с точностью до обозначений совпадают с выражениями (2.107) (раздел 2.3.3), полученными с помощью укороченного алгоритма. Любопытному читателю авторы рекомендуют проделать подобную проверку хотя бы для небольшого числа слоев в качестве полезного упражнения.

Таким образом, в рамках приведенного здесь алгоритма прибавление одного дополнительного слоя увеличивает объем записи всего в два раза, причем происходит простое автоматическое дублирование предыдущей записи с увеличением или уменьшением номеров индексов на единицу, что технически весьма просто.

Таким образом, можно заключить, что использование предложенного алгоритма позволяет последовательно получать детерминанты весьма высоких порядков при минимальных вычислительных затратах.

### 3.1.3. Детерминанты для трех, четырех и пяти сред

Приведем теперь в качестве примеров решения для структур, состоящих из трех, четырех и пяти сред.

Например, для случая трех сред  $N = 3$ , где решение прямым методом требует раскрытия пяти определителей четвертого порядка (раздел 2.1.2), получаемые по приведенной схеме детерминанты имеют вид:

$$D_0 = (k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2; \quad (3.40)$$

$$D_{B1} = (A_{10})[(k_1 - k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e_2^2]e_1 + (B_{30}e_0)4k_2 k_3 e_2 e_3; \quad (3.41)$$

$$D_{A2} = (A_{10})2k_1(k_2 + k_3)e_1 - (B_{30}e_0)2(k_1 - k_2)k_3 e_3; \quad (3.42)$$

$$D_{B2} = (A_{10})2k_1(k_2 - k_3)e_1 + (B_{30}e_0)2(k_1 + k_2)k_3 e_3; \quad (3.43)$$

$$D_{A3} = (A_{10})4k_1 k_2 e_1 e_2 - (B_{30}e_0)[(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e_2^2]e_3. \quad (3.44)$$

Амплитуды волн  $B_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $A_3$  имеют вид:

$$B_1 = D_{B1}/D_0; \quad A_2 = D_{A2}/D_0; \quad B_2 = D_{B2}/D_0; \quad A_3 = D_{A3}/D_0. \quad (3.45)$$

Легко убедиться, что эти выражения совпадают с полученными прямым методом формулами (2.32)–(2.36) (раздел 2.1.2), а также

[1, стр. 199–251; 57; 58], однако объем вычислений здесь резко уменьшается.

Для структуры из четырех слоев  $N = 4$ , требующей раскрытия семи определителей шестого порядка, детерминанты имеют вид:

$$D_0 = (k_1 + k_2)[(k_2 + k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 - k_3)(k_3 - k_4)e_3^2] + (k_1 - k_2)[(k_2 - k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 + k_3)(k_3 - k_4)e_3^2]e_2^2; \quad (3.46)$$

$$D_{B1} = (A_{10})\{(k_1 - k_2)[(k_2 + k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 - k_3)(k_3 - k_4)e_3^2] + (k_1 + k_2)[(k_2 - k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 + k_3)(k_3 - k_4)e_3^2]e_2^2\}e_1 + (B_{40}e_0)8k_2k_3k_4e_2e_3e_4; \quad (3.47)$$

$$D_{A2} = (A_{10})2k_1[(k_2 + k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 - k_3)(k_3 - k_4)e_3^2]e_1 - (B_{40}e_0)4(k_1 - k_2)k_3k_4e_2e_3e_4; \quad (3.48)$$

$$D_{B2} = (A_{10})2k_1[(k_2 - k_3)(k_3 + k_4) + (k_2 + k_3)(k_3 - k_4)e_3^2]e_1e_2 + (B_{40}e_0)4(k_1 + k_2)k_3k_4e_3e_4; \quad (3.49)$$

$$D_{A3} = (A_{10})4k_1k_2(k_3 + k_4)e_1e_2 - (B_{40}e_0)2[(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e_2^2]k_4e_3e_4; \quad (3.50)$$

$$D_{B3} = (A_{10})4k_1k_2(k_3 - k_4)e_1e_2e_3 + (B_{40}e_0)2[(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2]k_4e_4; \quad (3.51)$$

$$D_{A4} = (A_{10})8k_1k_2k_3e_1e_2e_3 - (B_{40}e_0)\{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2\}(k_3 - k_4) + [(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e_2^2](k_3 + k_4)e_3^2\}e_4. \quad (3.52)$$

С учетом этих детерминантов амплитуды волн  $B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4$  имеют вид:

$$\begin{aligned} B_1 &= D_{B1}/D_0; & A_2 &= D_{A2}/D_0; & B_2 &= D_{B2}/D_0; \\ B_3 &= D_{B3}/D_0; & A_3 &= D_{A3}/D_0; & A_4 &= D_{A4}/D_0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Наконец, для случая пяти слоев  $N = 5$ , где при прямом методе требуется раскрытие девяти определителей восьмого порядка, получаемые с помощью алгоритма детерминанты имеют вид:

$$D_0 = (k_1 + k_2)\{(k_2 + k_3)[(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] + (k_2 - k_3)[(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2]e_3^2\} + (k_1 - k_2)\{(k_2 - k_3)[(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] + (k_2 + k_3)[(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2]e_3^2\}e_2^2; \quad (3.54)$$

$$D_{B1} = (A_{10})\{(k_1 - k_2)\{(k_2 + k_3) \times [(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] +$$

$$\begin{aligned} &+ (k_2 - k_3)[(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2]e_3^2\} + \\ &+ (k_1 + k_2)\{(k_2 - k_3)[(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] + \\ &+ (k_2 + k_3)[(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2]e_3^2\}e_2^2\}e_1 + \\ &+ (B_{50}e_0)16k_2k_3k_4k_5e_2e_3e_4e_5; \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$D_{A_2} = (A_{10})2k_1\{(k_2 + k_3)[(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] + (k_2 - k_3)[(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2]e_3^2\}e_1 - (B_{50}e_0)8(k_1 - k_2)k_3k_4k_5e_2e_3e_4e_5; \quad (3.56)$$

$$D_{B2} = (A_{10})2k_1\{(k_2 - k_3)[(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2] + (k_2 + k_3)[(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2]e_3^2\}e_1e_2 + (B_{50}e_0)8(k_1 + k_2)k_3k_4k_5e_2e_3e_4e_5; \quad (3.57)$$

$$D_{A3} = (A_{10})4k_1k_2[(k_3 + k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 - k_4)(k_4 - k_5)e_4^2]e_1e_2 - (B_{50}e_0)4[(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2]k_4k_5e_3e_4e_5; \quad (3.58)$$

$$D_{B3} = (A_{10})4k_1k_2[(k_3 - k_4)(k_4 + k_5) + (k_3 + k_4)(k_4 - k_5)e_4^2]e_1e_2e_3 + (B_{50}e_0)4[(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2]k_4k_5e_4e_5; \quad (3.59)$$

$$D_{A4} = (A_{10})8k_1k_2k_3(k_4 + k_5)e_1e_2e_3 - (B_{50}e_0)2\{[(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2](k_3 - k_4) + [(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e_2^2](k_3 + k_4)e_3^2\}k_5e_4e_5; \quad (3.60)$$

$$D_{B4} = (A_{10})8k_1k_2k_3(k_4 - k_5)e_1e_2e_3e_4 + (B_{50}e_0)2\{[(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2](k_3 + k_4) + [(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e_2^2](k_3 - k_4)e_3^2\}k_5e_5; \quad (3.61)$$

$$D_{A5} = (A_{10})16k_1k_2k_3k_4e_1e_2e_3e_4 - (B_{50}e_0)\{[(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2](k_3 + k_4) + [(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e_2^2](k_3 - k_4)e_3^2\}(k_4 - k_5) + \{[(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2](k_3 - k_4) + [(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e_2^2](k_3 + k_4)e_3^2\}(k_4 + k_5)e_4^2\}e_5. \quad (3.62)$$

При этом амплитуды волн определяются выражениями:

$$\begin{aligned} B_1 &= D_{B1}/D_0; & A_2 &= D_{A2}/D_0; & B_2 &= D_{B2}/D_0; & A_3 &= D_{A3}/D_0; \\ B_3 &= D_{B3}/D_0; & A_4 &= D_{A4}/D_0; & B_4 &= D_{B4}/D_0; & A_5 &= D_{A5}/D_0. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Для числа слоев, большего пяти, решение прямым методом становится крайне громоздким, а для  $N$  слоев требует раскрытия  $2N - 1$



определителей порядка, причем объем вычислений растет как факториал от  $2N$ . То есть применение описанных алгоритмов при числе слоев более пяти становится весьма целесообразным.

### 3.2. Схема реализации алгоритма на ЭВМ

Полный алгоритм так же, как и укороченный (раздел 2.4), легко реализуется в численном виде. Возможная блок-схема программы приведена на рис. 3.1.

Можно видеть, что программа содержит всего два цикла, повторяемые  $N - 2$  раз. Таким образом, предложенный полный алгоритм позволяет получать как аналитические выражения, так и численные значения для детерминантов весьма высоких порядков при минимальных затратах времени, бумаги, труда и вычислительных ресурсов. Проверку такого положения любознательный читатель может провести хотя бы на примере структуры из шести слоев, а если у него достанет желания и времени, то и более.

### 3.3. Применение алгоритма для исследования волн в структуре с линейным изменением волнового числа

Проиллюстрируем теперь работу алгоритма на некоторых численных примерах, касающихся распространения волн в среде с неоднородностью, меняющейся по ступенчатому закону. Общую геометрию задачи будем считать той же, что была представлена ранее на рис. 2.5 в разделе 2.3.1. Положим, что неоднородная среда (далее — структура), занимая пространство между координатами  $x_0$  и  $x_N$ , имеет полную протяженность:

$$L_N = x_N - x_0. \quad (3.64)$$

Пусть структура имеет 16 слоев ( $N = 16$ ) одинаковой толщины:

$$d = L_N/N = L_{16}/16, \quad (3.65)$$

причем внутри каждого слоя волновое число сохраняется постоянным, а на границах раздела между слоями скачкообразно меняется. Ограничимся далее частным случаем падения на структуру только одной волны прямого направления с амплитудой  $A_0 = 1$ . То есть будем считать  $B_0 = 0$ , а также амплитуды всех волн обоих направлений будем нормировать на  $A_0$ .

#### 3.3.1. Линейное нарастание волнового числа

Сначала предположим, что волновое число внутри среды от слоя к слою линейно возрастает, меняясь по закону:

$$k_n(\text{см}^{-1}) = 1,00 + 0,01(n - 1), \quad (3.66)$$

где  $n$  — номер слоя. Таким образом,  $k_0 = 1,00 \text{ см}^{-1}$ ,  $k_N = k_{16} = 1,15 \text{ см}^{-1}$ . Полагая частоту равной  $f = 4,7746 \text{ ГГц}$ , получаем

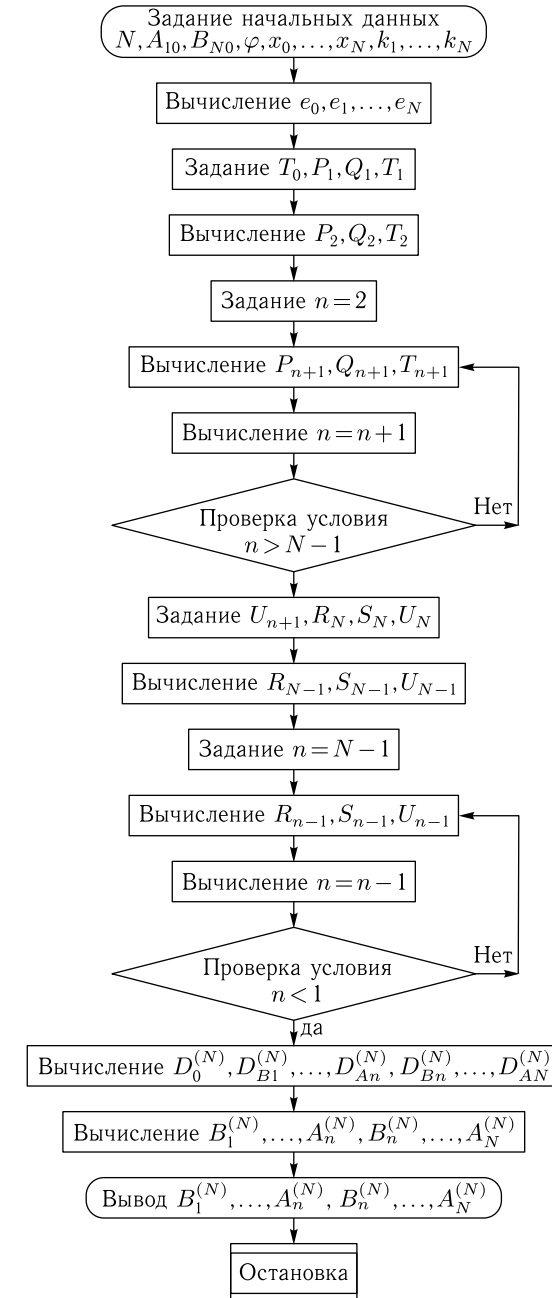


Рис. 3.1. Блок-схема полного алгоритма вычисления амплитуд волн

длину волны в первом слое равной  $\lambda_0 = 6,2832$  см и в последнем  $\lambda_{16} = 5,4636$  см. Таким образом, по мере распространения волны в положительном направлении оси  $Ox$ , ее длина уменьшается, то есть волна распространяется из менее плотной среды в более плотную.

Наблюдаемые явления иллюстрируются рис. 3.2, *а-в*, где для различных слоев структуры (цифры в кругах) показаны значения волнового числа  $k_n$  (*а*) и амплитуды волн прямого  $A_n$  (*б*) и обратного  $B_n$  (*в*) направлений. Кривые 1–3 соответствуют различным значениям полной длины структуры.

На рис. 3.2, *б* полужирной горизонтальной линией при  $n = 1$  показана амплитуда волны прямого направления в начальном слое структуры ( $A_0 = 1$ ), а на рис. 3.2, *в* такой же линией при  $n = 16$  показана амплитуда волны обратного направления в конечном слое структуры ( $B_N = 0$ ).

Из рисунка видно, что амплитуды волн прямого направления  $A_n$  по мере увеличения номера слоя монотонно уменьшаются по закону, близкому к линейному. При заданных параметрах такое уменьшение от полной длины структуры не зависит с точностью не менее 0,1%. Амплитуды волн обратного направления по мере увеличения номера слоя сильно меняются. Характерным параметром здесь является средняя длина волны в структуре

$$\lambda_S = \frac{\lambda_0 + \lambda_N}{2}, \quad (3.67)$$

при заданных параметрах равная  $\lambda_S = 5,8734$  см. Так, видно, что когда полная длина структуры  $L_N$  значительно меньше половины средней длины волны  $L_N \ll \lambda_S/2$ , амплитуды волн обратного направления  $B_n$  по мере уменьшения номера слоя плавно нарастают (кривая 1 на рис. 3.2, *в*). Когда полная длина структуры  $L_N$  того же порядка, что и половина средней длины волны ( $L_N \sim \lambda_S/2 = 2,9367$  см), амплитуды волн обратного направления по мере уменьшения номера слоя сначала плавно нарастают приблизительно до середины структуры (при  $n = 9$ ), после чего плавно убывают до малых значений (при  $n = 1$ ) до величины порядка 20% от максимума на середине структуры (кривая 2 на рис. 3.2, *в*). Когда полная длина структуры значительно превышает половину средней длины волны  $L_N \gg \lambda_S/2$ , амплитуды волн обратного направления по мере уменьшения номера слоя испытывают осцилляции с периодом меньшим полной длины структуры и разбросом амплитуд от максимума до минимума приблизительно в 3–4 раза (кривая 3 на рис. 3.2, *в*).

Таким образом, по отношению к распределению амплитуд волн обратного направления структура ведет себя подобно струне с закрепленными концами, что очевидно, связано с интерференционными явлениями между волнами прямого и обратного направлений.

Дополнительное исследование показывает, что период осцилляций с увеличением полной длины структуры уменьшается до величины,

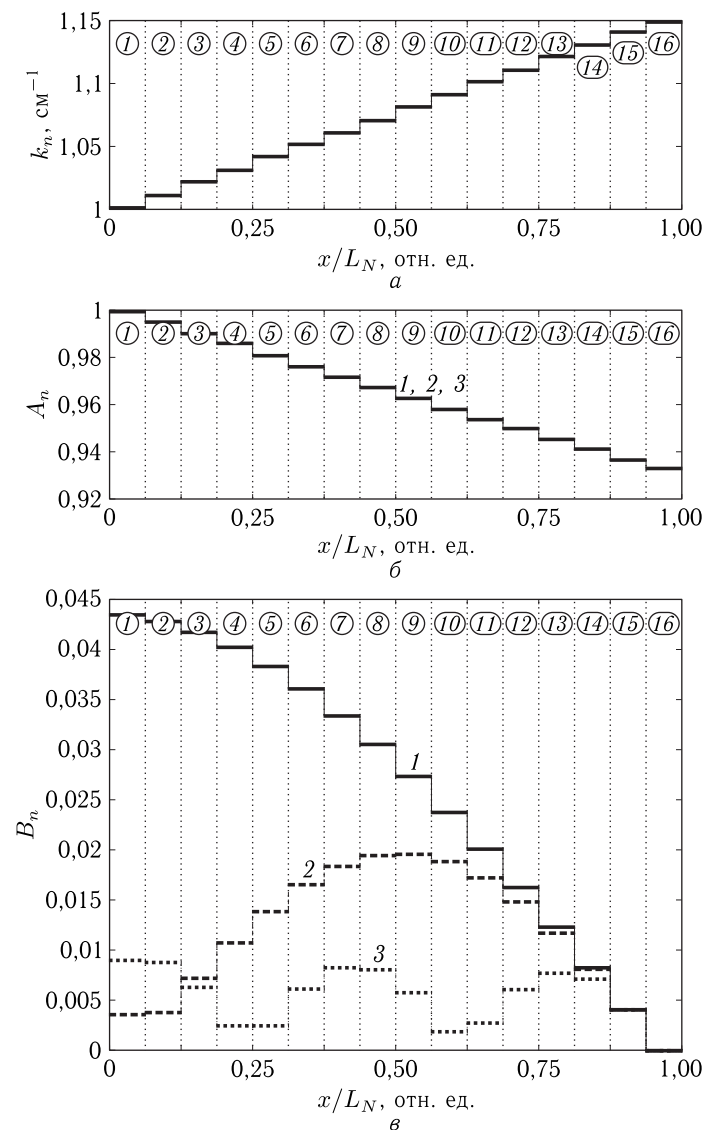


Рис. 3.2. Зависимости волнового числа (*а*) и амплитуды волн прямого (*б*) и обратного (*в*) направлений от нормированной координаты при различной полной длине структуры. 1 —  $L_N = 1,6$  см; 2 —  $L_N = 3,2$  см; 3 —  $L_N = 8,0$  см

близкой к толщине одного слоя, после чего характер осцилляций приобретает вид нерегулярных скачков с сильными перепадами от одного слоя к другому.

Описанная аналогия распределения амплитуд волн обратного направления с модами струны с закрепленными концами хорошо выполняется только при достаточно плавном изменении волнового числа по слоям, то есть когда максимальный перепад длин волн в пределах структуры составляет малую часть от половины средней длины волны, при выполнении условия:

$$\lambda_{\max} - \lambda_{\min} \ll \lambda_S/2, \quad (3.68)$$

где  $\lambda_{\max}$  и  $\lambda_{\min}$  — максимальная и минимальная длина волны в структуре. В противном случае регулярность осцилляций нарушается.

### 3.3.2. Роль степени нарастания волнового числа

Иллюстрацией такому положению является рис. 3.3, *a–в*, где показаны амплитуды волн обратного направления  $B_n$  в отдельных слоях структуры при различных степенях линейного возрастания волнового числа.

Во всех случаях волна распространяется из менее плотной среды в более плотную, однако степень увеличения плотности среды в первом случае — малая, во втором — средняя, в третьем — большая.

Рис. 3.3, *a* соответствует закону изменения волнового числа вида (3.66) (кривая 3 на рис. 3.2, *в*) и здесь приведен для сравнения. При этом  $\lambda_S/2 = 2,9367$  см, то есть  $\lambda_0 - \lambda_{16} = 0,8196$  см  $\ll \lambda_S/2k_1$ , и условие (3.68) выполняется.

Рис. 3.3, *б* соответствует закону изменения волнового числа вида:

$$k_n(\text{см}^{-1}) = 1,00 + 0,05(n - 1), \quad (3.69)$$

где  $n$  — номер слоя. Таким образом,  $k_0 = 1,00$  см<sup>-1</sup>,  $k_N = k_{16} = 1,75$  см<sup>-1</sup>. При той же частоте  $f = 4,7746$  ГГц получаем  $\lambda_0 = 6,2832$  см,  $\lambda_{16} = 3,5904$  см,  $\lambda_S = 4,9368$  см,  $\lambda_S/2 = 2,4684$  см.  $\lambda_0 - \lambda_{16} = 2,6928$  см  $\approx \lambda_S/2$ , то есть условие (3.68) находится на грани выполнения.

Рис. 3.3, *в* соответствует закону изменения волнового числа вида:

$$k_n(\text{см}^{-1}) = 1,00 + 0,25(n - 1), \quad (3.70)$$

где  $n$  — номер слоя. Таким образом,  $k_0 = 1,00$  см<sup>-1</sup>,  $k_N = k_{16} = 4,75$  см<sup>-1</sup>. При той же частоте получаем  $\lambda_0 = 6,2832$  см,  $\lambda_{16} = 1,3228$  см,  $\lambda_S = 3,8030$  см,  $\lambda_S/2 = 1,9015$  см.  $\lambda_0 - \lambda_{16} = 4,9604$  см  $\gg \lambda_S/2$ , то есть условие (3.68) резко не выполняется.

Расчет показывает, что амплитуды волн прямого направления по координате монотонно меняются по закону, близкому к линейному. При нарастании волнового числа эти амплитуды уменьшаются. Так, в случае (*a*) относительная амплитуда волны прямого направления при  $n = 16$  составляет 0,9325, в случае (*б*) — 0,7556, в случае (*в*) — 0,4567. Такое уменьшение от полной длины структуры при заданных параметрах не зависит с точностью не менее 0,1%. Амплитуды волн обратного направления по координате сильно меняются, так как во всех

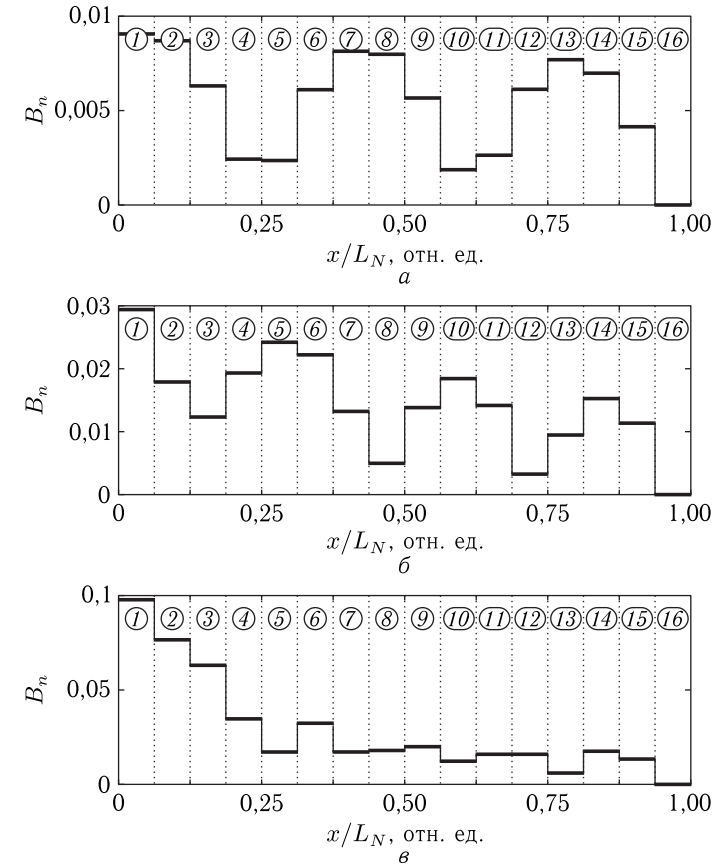


Рис. 3.3. Амплитуды волн обратного направления в различных слоях структуры при различных значениях степени нарастания волнового числа: *a* — изменение волнового числа на один слой:  $\Delta k = 0,01$  см<sup>-1</sup>, *б* —  $\Delta k = 0,05$  см<sup>-1</sup>, *в* —  $\Delta k = 0,25$  см<sup>-1</sup>. Полная длина структуры во всех случаях —  $L_N = 8,0$  см

трех рассматриваемых случаях полная длина структуры превышает половину длины волны приблизительно в 2,5 раза.

Из рисунка видно, что по мере увеличения степени нарастания волнового числа амплитуда волн обратного направления увеличивается, что обусловлено увеличением неоднородности структуры. Так, при  $n = 1$  в случае малой степени нарастания (*a*) она составляет  $B_1 = 0,0090$ , при средней степени нарастания (*б*) она составляет  $B_1 = 0,0295$ , при большой (*в*) —  $B_1 = 0,0971$ . При этом в первых двух случаях амплитуды волн обратного направления по мере уменьшения номера слоя испытывают осцилляции. Период этих осцилляций по мере

увеличения степени нарастания уменьшается. При малой степени нарастания (*а*) период составляет около 5,20 см, при средней (*б*) — 4,40 см, при большой (*в*) четкая периодичность сменяется нерегулярным скачкообразным ростом, причем скорость этого роста по мере уменьшения номера слоя увеличивается.

### 3.3.3. Линейное убывание волнового числа

Во всех рассмотренных случаях волновое число волны по мере ее проникновения в структуру увеличивалось, то есть волна распространялась от слоя с меньшей плотности к слою с большей плотностью. Сопоставим теперь этот случай со случаем распространения волны в сторону слоя с меньшей плотностью.

Наблюдаемые зависимости иллюстрируются рис. 3.4, где показаны амплитуды волн обратного направления в различных слоях структуры при проникновении падающей волны в структуру с линейным нарастанием (1) и убыванием (2) волнового числа по координате. Структура состоит из 16 слоев одинаковой толщины, при этом, как и ранее  $f = 4,7746$  ГГц,  $k_0 = 1$  см<sup>-1</sup>,  $\lambda_0 = 6,2832$  см. При нарастании волнового числа (1) длина волны в структуре по координате уменьшается, то есть плотность структуры увеличивается, при убывании (2) — длина волны увеличивается, то есть плотность структуры уменьшается. Половина средней длины волны  $\lambda_S/2$  в случае 1 составляет 2,9367 см, в случае 2 — 3,4188 см.

Расчет показывает, что амплитуды волн прямого направления по координате монотонно меняются по закону, близкому к линейному. При нарастании волнового числа эти амплитуды уменьшаются, а при убывании — увеличиваются. Так, в случае (*а*) относительная амплитуда волны прямого направления при  $n = 16$  при нарастании волнового числа (1) составляет 0,9316, при убывании (2) — 1,0828. В случае (*б*) та же амплитуда при нарастании волнового числа (1) составляет 0,9325, при убывании (2) — 1,0846. В случае (*в*) та же амплитуда при нарастании волнового числа (1) составляет 0,9325, при убывании (2) — 1,0846, что в пределах заданной точности совпадает со случаем (*б*). Видно, что в рассмотренных пределах зависимость этой амплитуды от полной длины структуры крайне мала и составляет не более 0,2%.

Наблюдаемое увеличение амплитуды волны прямого направления при убывании волнового числа обусловлено тем, что при заданном значении потока энергии волны, равного произведению волнового числа на квадрат амплитуды, при уменьшении волнового числа амплитуда должна увеличиваться. То есть при переходе волны из более плотной среды в менее плотную размах колебаний волны увеличивается. Как видим, при уменьшении волнового числа на 15% такое увеличение составляет около 8% и от полной длины структуры при заданных параметрах не зависит с точностью 0,2%.

Амплитуды волн обратного направления по координате сильно меняются в зависимости от соотношения между полной длиной струк-

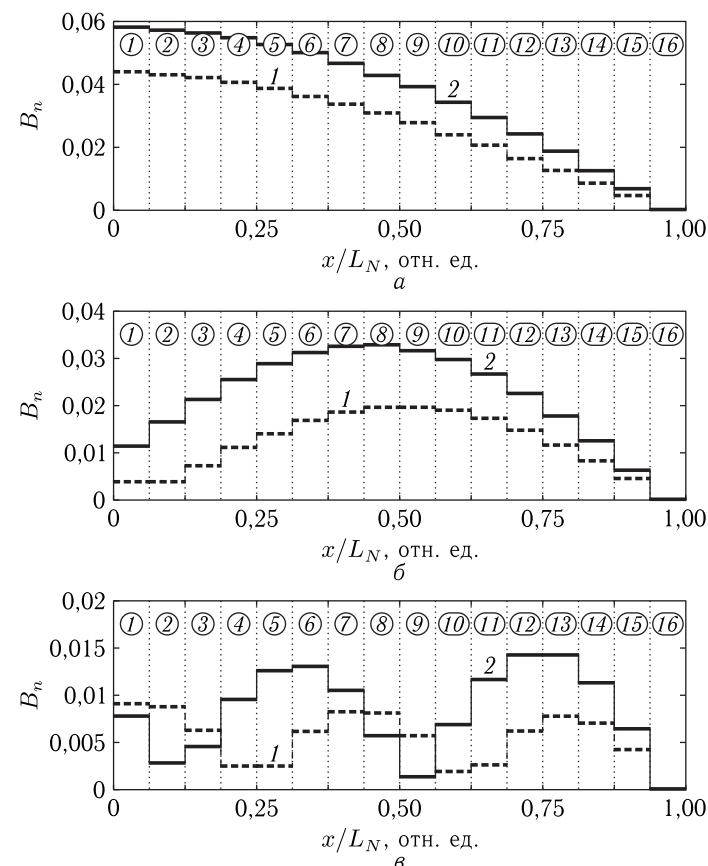


Рис. 3.4. Амплитуды волн обратного направления в различных слоях структуры при различных значениях ее полной длины  $L_N$ : *а* —  $L_N = 1,6$  см; *б* —  $L_N = 3,2$  см; *в* —  $L_N = 8,0$  см. Изменение волнового числа по слоям: 1 — линейное нарастание от  $1,00$  см<sup>-1</sup> до  $1,15$  см<sup>-1</sup> с шагом  $0,01$  см<sup>-1</sup>; 2 — линейное убывание от  $1,00$  см<sup>-1</sup> до  $0,85$  см<sup>-1</sup> с шагом  $0,01$  см<sup>-1</sup>

туры  $L_0$  и половиной средней длины волны  $\lambda_S/2$ . Поведение волн, соответствующих нарастанию волнового числа, весьма похоже на поведение волн, соответствующих его убыванию. Так, видно, что когда полная длина структуры значительно меньше половины средней длины волны (*а*), амплитуды волн обратного направления по мере уменьшения значения координаты плавно нарастают. Когда полная длина структуры близка к половине средней длины волны (*б*), амплитуды волн обратного направления по мере уменьшения значения координаты сначала плавно нарастают приблизительно до середины структуры, после чего плавно убывают до малых значений (порядка 20% от максимума на середине структуры). Когда полная длина

структуры значительно превышает половину средней длины волны ( $\vartheta$ ), амплитуды волн обратного направления по мере уменьшения значения координаты испытывают осцилляции с периодом, меньшим полной длины структуры и разбросом амплитуд от максимума до минимума приблизительно в 3–4 раза. Дополнительное исследование показывает, что период осцилляций с увеличением полной длины структуры до  $\sim(4-5)\lambda_0$  уменьшается до величины, близкой к толщине одного слоя, после чего характер осцилляций приобретает вид нерегулярных скачков с сильными перепадами от одного слоя к другому.

Отличие между случаями нарастания и убывания волнового числа состоит в том, что амплитуды волн при нарастании волнового числа всегда меньше аналогичных амплитуд при его убывании, причем эта разница с увеличением полной длины структуры  $L_0$  возрастает. Так, из рисунка видно, что при  $L_0 = 1,6$  см (*а*) она составляет около 30%, при  $L_0 = 3,2$  см (*б*) — около 50%, а при  $L_0 = 8,0$  см (*в*) достигает 100%. По-видимому, это связано с большим перепадом крайних значений волновых чисел в случае 2 по сравнению со случаем 1: отношение  $k_{\max}/k_{\min}$  в случае 2 составляет 1,18, а в случае 1 — 1,15, вследствие чего суммарное отражение в случае 2 увеличивается.

### 3.3.4. Влияние падения волны встречного направления

В предыдущих разделах рассматривалось распределение амплитуд внешних и внутренних волн при падении на структуру только одной волны прямого направления. Обратимся теперь к вопросу, какое влияние на распределение амплитуд волн оказывает падение волны встречного направления.

Рассмотрим те же две структуры, что и в главе 2 (раздел 2.5, рис. 2.7, формулы (2.117), (2.118)), то есть случаи, когда:

1) волновое число по координате линейно возрастает

$$k_n = 1 + 0,5(x_n - 1); \quad (3.71)$$

2) волновое число по координате линейно убывает

$$k_n = 8,5 - 0,5(x_n - 1), \quad (3.72)$$

где  $n$  — номер слоя, координата  $x_n$  измерена в см, волновое число  $k_n$  — в  $\text{см}^{-1}$ .

Ступенчатая зависимость волнового числа от координаты для этих двух случаев показана на рис. 3.5. При этом рис. 3.5, *а* соответствует возрастанию волнового числа по формуле (3.71), рис. 3.5, *б* — убыванию волнового числа по формуле (3.72).

На структуру падают две встречных волны. Со стороны среды 1 падает волна прямого направления с амплитудой  $A_0$ . Со стороны среды 16 падает волна обратного направления с амплитудой  $B_0$ . В среде 1 распространяется волна обратного направления с амплитудой  $B_1$ . В среде 16 распространяется волна прямого направления с амплитудой  $A_{16}$ . Все амплитуды нормируются на  $A_0$ , поэтому для простоты

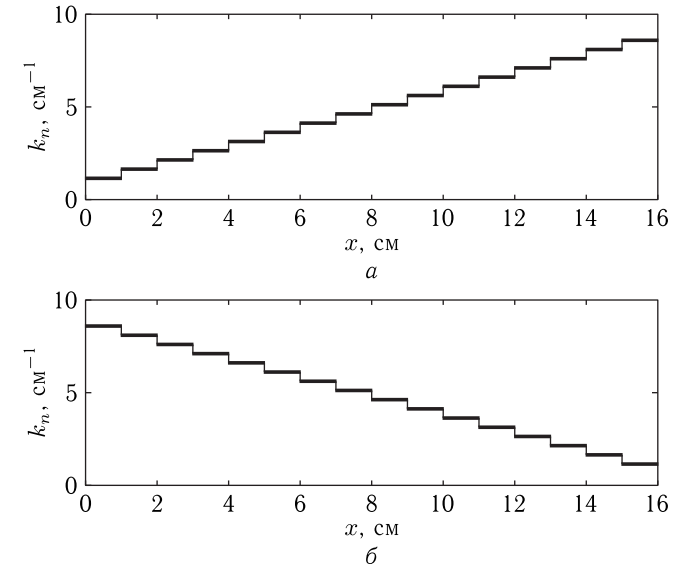


Рис. 3.5. Ступенчатые зависимости волнового числа от координаты, построенные по формулам (3.71) (*а*) и (3.72) (*б*)

будем считать  $A_0 = 1$ . Положим амплитуду  $A_0 = 1$  постоянной и будем менять амплитуду падающей волны обратного направления  $B_0$ .

Применим теперь полный описанный алгоритм для нахождения амплитуд не только внешних, как это было сделано в разделе 2.5, но и внутренних волн во всех слоях структуры.

На рис. 3.6 показано распределение амплитуд волн в различных слоях структуры в случае возрастания волнового числа по координате (3.71) для волн прямого (*а*) и обратного (*б*) направлений. Кривые 1–4 соответствуют различным значениям амплитуды встречной волны  $B_0$  от  $-1$  до 2 с шагом 1.

Из рисунка видно, что амплитуды внешних волн  $A_{16}$  и  $B_1$  при заданных значениях  $B_0$  соответствуют амплитудам тех же волн, приведенным кривыми 1 и 2 на рис. 2.8 (раздел 2.5).

Из рис. 3.6, *а* видно, что амплитуды волн прямого направления монотонно спадают с координатой только в случае  $B_0 = 0$  (кривая 2), то есть в отсутствие встречной волны, а во всех остальных случаях носят осциллирующий характер, что говорит о наличии интерференционных явлений. Амплитуды волн прямого направления при  $B_0 = -1$  и  $B_0 = 1$  (кривые 1 и 3), совпадая в крайних слоях структуры, во внутренних ее слоях сильно различаются между собой. Такое обстоятельство говорит о высокой критичности амплитуд внутренних волн к соотношению фаз волн, падающих с прямого и обратного направлений.

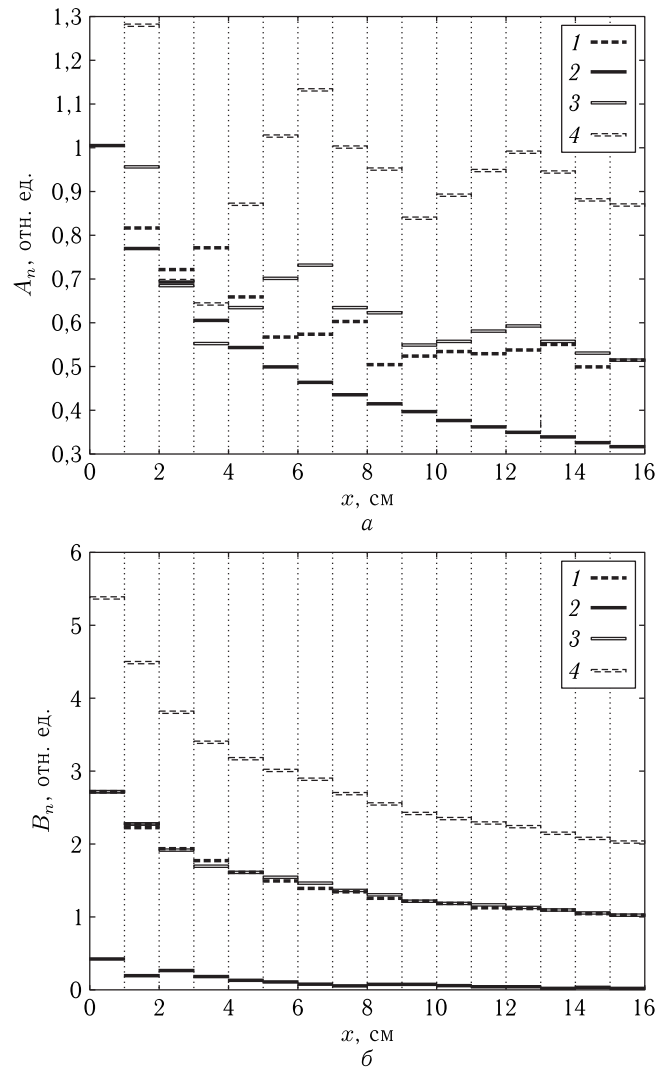


Рис. 3.6. Распределение амплитуд волн в различных слоях структуры для случая возрастания волнового числа по координате. *a* — амплитуды волн прямого направления, *b* — амплитуды волн обратного направления. 1 —  $B_0 = -1$ ; 2 —  $B_0 = 0$ ; 3 —  $B_0 = 1$ ; 4 —  $B_0 = 2$

Из рис. 3.6, *b* видно, что амплитуды волн обратного направления с увеличением значения координаты всегда плавно спадают подобно друг другу, причем кривые для  $B_0 = -1$  и  $B_0 = 1$  (1 и 3) практически совпадают между собой, что говорит о незначительности роли интер-

ференции в распространении этих волн. Увеличение амплитуд кривых при увеличении абсолютной величины  $B_0$  отражают рост амплитуды падающей волны встречного направления.

На рис. 3.7 показано распределение амплитуд волн в различных слоях структуры в случае убывания волнового числа по координате (2Ю)

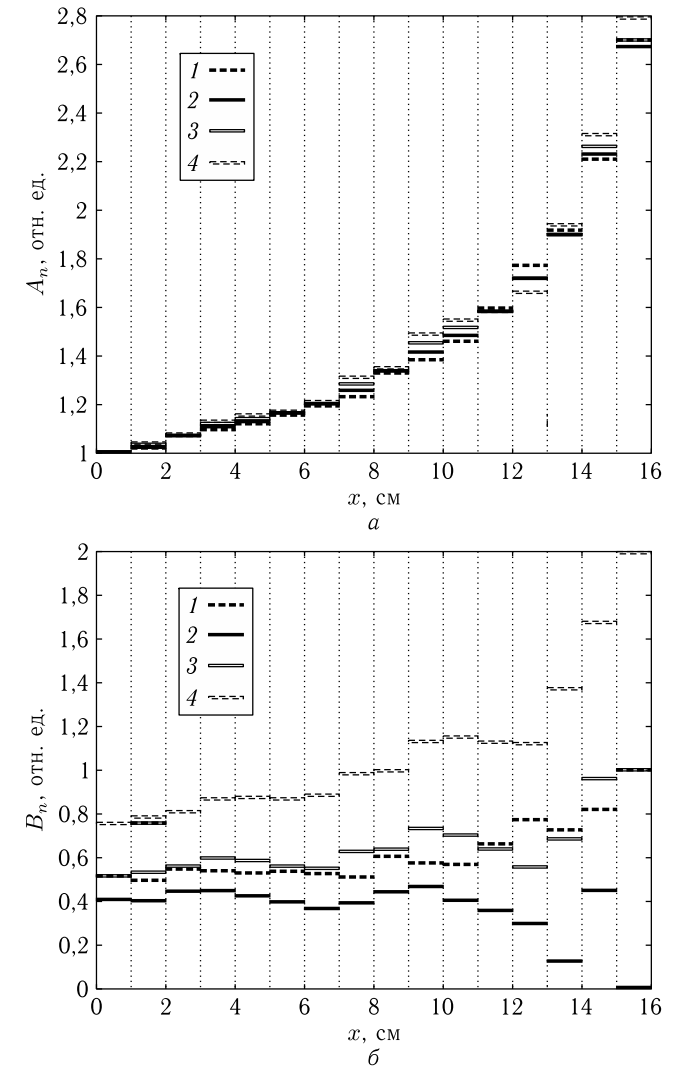


Рис. 3.7. Распределение амплитуд волн в различных слоях структуры для случая убывания волнового числа по координате. *a* — амплитуды волн прямого направления, *b* — амплитуды волн обратного направления. 1 —  $B_0 = -1$ ; 2 —  $B_0 = 0$ ; 3 —  $B_0 = 1$ ; 4 —  $B_0 = 2$

для волн прямого (а) и обратного (б) направлений. Кривые 1–4 соответствуют различным значениям амплитуды встречной волны  $B_0$  от  $-1$  до  $2$  с шагом  $1$ .

Из этого рисунка также видно, что амплитуды внешних волн  $A_{16}$  и  $B_1$  при заданных значениях  $B_0$  соответствуют амплитудам тех же волн, приведенным кривыми 3 и 4 на рис. 2.8 (раздел 2.5).

Из рис. 3.7, а видно, что все амплитуды волн прямого направления (1–4) монотонно нарастают приблизительно одинаково (различие не превышает 5%) при всех значениях амплитуды падающей волны обратного направления  $B_0$ . Нарастание связано с распространением волны из более плотной среды в менее плотную и обусловлено сохранением энергии. Близость кривых 1–4 друг к другу свидетельствует в пользу отсутствия интерференционных явлений и коррелирует с подобным спадом аналогичных кривых для волн противоположного направления, приведенных на рис. 3.6, б (в обоих случаях волна распространяется в сторону уменьшения плотности среды). Совпадение приведенных здесь кривых 1–4 друг с другом, по сравнению с разбросом кривых 1–4 на рис. 3.6, б, обусловлено неизменностью амплитуды падающей волны: здесь для всех кривых  $A_0 = 1$ , там для кривых 1–4 амплитуда  $B_0$  меняется от  $-1$  до  $2$ .

Из рис. 3.7, б видно, что амплитуды волн обратного направления при изменении координаты во всех случаях заметно осциллируют, что говорит о высокой роли интерференции в их формировании. Амплитуды волн обратного направления при  $B_0 = -1$  и  $B_0 = 1$  (кривые 1 и 3), совпадая в крайних слоях структуры, во внутренних ее слоях заметно (до 25%) различаются между собой, что свидетельствует в пользу высокой критичности амплитуд внутренних волн к соотношению фаз волн, падающих с прямого и обратного направлений. Размах осцилляций амплитуд волн обратного направления при убывании волнового числа (рис. 3.7, б) также коррелирует с размахом амплитуд прямого направления при нарастании волнового числа (рис. 3.6, а). Таким образом, можно видеть, что степени размаха кривых для волн прямого и обратного направлений при изменении знака изменения волнового числа как бы меняются местами. То есть кривые, соответствующие волнам, направление распространения которых совпадает с направлением увеличения плотности среды, испытывают значительно более сильный размах, чем волны противоположного направления, что говорит о значительно более сильной роли интерференционных явлений в этом случае.

### 3.4. Локальная неоднородность структуры

В качестве развития полученных закономерностей рассмотрим теперь случаи резкой локальной неоднородности структуры, проявляющейся в локальной неоднородности волнового числа. Два таких случая

иллюстрируются рис. 3.8 и рис. 3.9. Первый случай (рис. 3.8) соответствует локальному максимуму волнового числа, то есть локальному увеличению плотности среды, второй (рис. 3.9) — локальному минимуму волнового числа, то есть локальному уменьшению плотности среды. В обоих случаях структура содержит 16 слоев одинаковой толщины. Полная длина структуры:  $L_0 = 8$  см. Остальные параметры — те же.

В первом случае волновое число по слоям структуры имеет колоколообразный максимум, локализованный между 5 и 11 слоями (экстремум — при  $n = 8$ ). Во втором случае волновое число по слоям структуры имеет колоколообразный минимум, локализованный между 4 и 12 слоями (экстремум — при  $n = 8$ ). В обоих случаях в состав волнового числа в качестве слагаемого входит монотонный линейный рост его величины в соответствии с формулой (3.71).

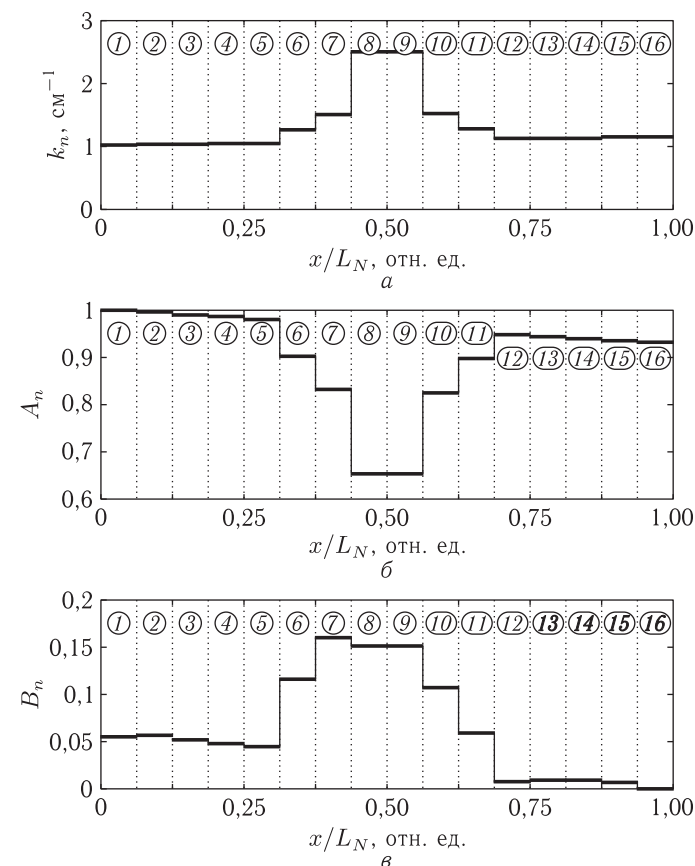


Рис. 3.8. Волновые числа (а) и амплитуды волн локального максимума волнового числа

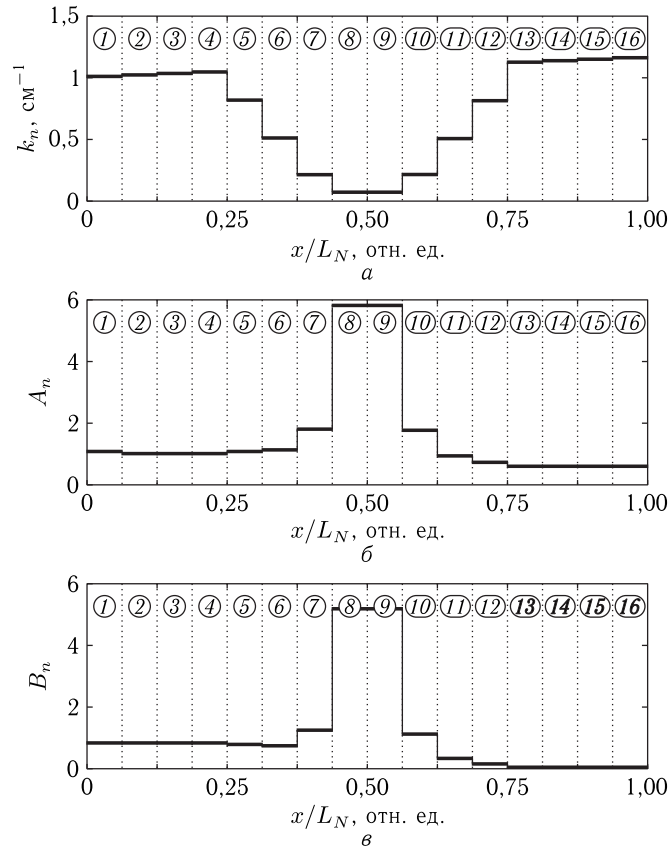


Рис. 3.9. Волновые числа (а) и амплитуды волн прямого (б) и обратного (в) направлений для различных слоев в случае локального минимума волнового числа

Из рис. 3.8 видно, что локальный максимум волнового числа (увеличение от  $1,08 \text{ см}^{-1}$  до  $2,50 \text{ см}^{-1}$ ) приводит к резкому уменьшению амплитуд волн прямого направления (по сравнению со случаем отсутствия максимума амплитуда  $A_n$  падает от  $0,967$  до  $0,649$ ) и возрастанию амплитуд волн обратного направления  $B_n$  (от  $0,035$  до  $0,151$ ).

Из рис. 3.9 видно, что локальный минимум волнового числа (уменьшение от  $1,08 \text{ см}^{-1}$  до  $0,05 \text{ см}^{-1}$ ) приводит к резкому увеличению амплитуд волн прямого направления  $A_n$  (амплитуда возрастает от  $0,967$  до  $5,814$ ), а также увеличению амплитуд волн обратного направления  $B_n$  (амплитуда также возрастает от  $0,035$  до  $5,193$ ).

Сравнительное рассмотрение показывает, что приведенные особенности находятся в полном соответствии с полученными ранее результатами по монотонному изменению волнового числа.

### 3.5. Роль потерь энергии в структуре

Во всех рассмотренных случаях волновое число является чисто действительным, то есть какие-либо потери энергии распространяющихся волн в структуре отсутствуют. Рассмотрим теперь случай среды с потерями, учитывать которые будем путем введения отрицательной мнимой части волнового числа. Случай распространения волн в такой среде иллюстрируется рис. 3.10, где показаны: мнимая часть волнового числа (а) и амплитуды волн прямого (б) и обратного (в) направлений в различных слоях структуры при различных значениях степени нарастания отрицательной мнимой части волнового числа. Структура имеет 16 слоев ( $N = 16$ ) одинаковой толщины. Полная длина структуры

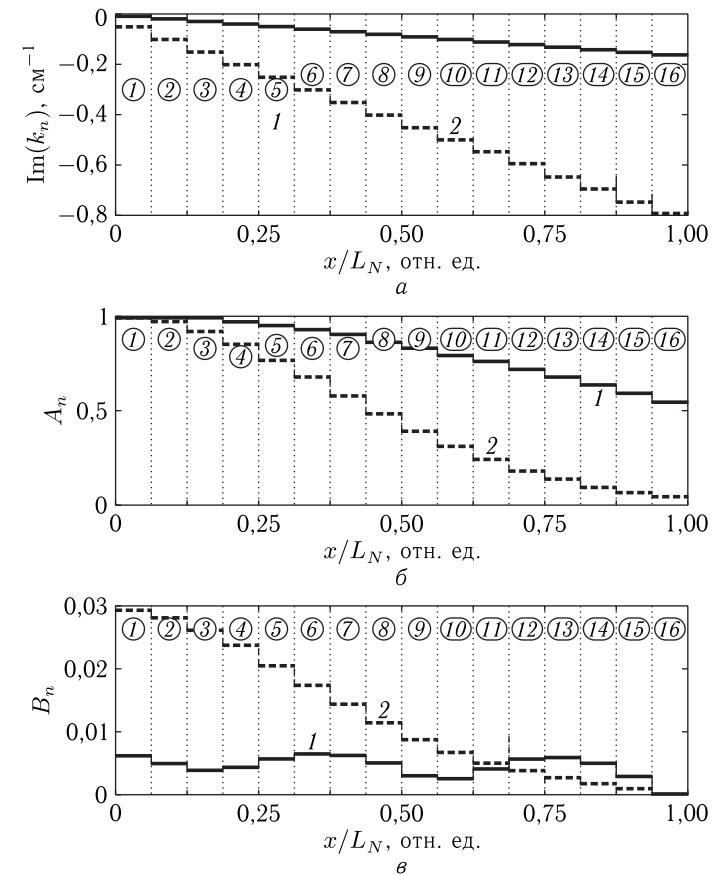


Рис. 3.10. Мнимая часть волнового числа (а) и амплитуды волн прямого (б) и обратного (в) направления в различных слоях структуры при слабом (1) и сильном (2) затухании



$L_0 = 8$  см, остальные параметры — те же:  $f = 4,7746$  ГГц,  $k_0 = 1$  см<sup>-1</sup>,  $\lambda_0 = 6,2832$  см. Ограничимся случаем падения одной волны прямого направления с амплитудой  $A_1$ , то есть положим  $B_0 = 0$ .

Будем полагать действительную часть волнового числа во всех слоях неизменной:  $\text{Re}(k_n) = k_0 = 1,00$  см<sup>-1</sup>, то есть будем считать, что плотность структуры на всем ее протяжении сохраняется постоянной. При этом предположим, что мнимая часть волнового числа по мере увеличения номера слоя структуры растет, то есть затухание волны по мере ее проникновения в структуру увеличивается.

Рассмотрим два случая: слабо нарастающего затухания, когда во всей структуре выполняется условие  $|\text{Im}(k_n)| \ll k_0$ , и сильно нарастающего, когда начиная с малых величин мнимая часть волнового числа достигает значения  $|\text{Im}(k_n)| \sim k_0$ . Случай особо сильного затухания, когда  $|\text{Im}(k_n)| \gg k_0$ , не рассматриваем, как не представляющий интереса, так как при этом падающая волна полностью затухает в первом же одном-двух слоях структуры.

Итак, пусть в случае слабого нарастания затухания отрицательная мнимая часть волнового числа  $\text{Im}(k_n)$  меняется от  $-0,01$  см<sup>-1</sup> до  $-0,16$  см<sup>-1</sup> с шагом  $-0,01$  см<sup>-1</sup>, а в случае сильного нарастания затухания  $\text{Im}(k_n)$  меняется от  $-0,05$  см<sup>-1</sup> до  $-0,80$  см<sup>-1</sup> с шагом  $-0,05$  см<sup>-1</sup>, как это показано на рис. 3.10, *а* сплошной (1) и пунктирной (2) линиями.

На рис. 3.10, *б* для этих же двух случаев показаны амплитуды волн прямого направления в различных слоях структуры. Видно, что в обоих случаях как малого (1), так и большого (2) нарастания затухания, амплитуды волн прямого направления по координате монотонно спадают тем быстрее, чем круче рост затухания в последовательных слоях структуры.

На рис. 3.10, *в* показаны амплитуды волн обратного направления в тех же условиях. Видно, что в обоих случаях малого (1) и большого (2) нарастания затухания, несмотря на постоянство плотности среды, амплитуды волн обратного направления по координате сильно меняются. При малом нарастании затухания (кривая 1) амплитуды волн обратного направления  $B_n$  не превышают 0,006 от исходной амплитуды падающей волны, причем по координате осциллируют с периодом, определяемым соотношением между полной длиной структуры  $L_N$  и исходной длиной волны  $\lambda_0$ , в единицах  $x/L_N$  составляющим около 0,45 (при увеличении отношения  $L_N/\lambda_0$  период в единицах  $x/L_N$  уменьшается). Можно полагать, что наблюдаемые осцилляции подобны таковым, связанным с интерференционными явлениями между волнами прямым и обратным направлениями, наблюдаемым в отсутствие затухания при плавном изменении действительного волнового числа по координате (например, кривая 3 на рис. 3.2, *в*).

При большом нарастании затухания (кривая 2) амплитуды волн обратного направления по мере приближения ко входному концу структуры монотонно возрастают без заметных осцилляций, достигая вели-

чины 0,03 от амплитуды исходной волны. Можно полагать, что в этом случае осцилляции полностью подавлены ростом затухания.

Таким образом, видно что, несмотря на сохранение плотности среды на постоянном уровне, увеличение затухания с координатой приводит к отражению падающей волны, проявляющемуся тем сильнее, чем нарастание затухания с координатой больше. При слабом росте затухания амплитуды волн обратного направления испытывают осцилляции, которые при сильном росте затухания полностью подавляются.

### 3.6. Роль геометрической длины структуры

Разобранные выше случаи относятся к распределению амплитуд волн в отдельных слоях структуры в зависимости от внутренних параметров этих слоев, проявляющихся в изменении волнового числа. Рассмотрим теперь, как ведут себя амплитуды при неизменных параметрах слоев, но при одновременном изменении их толщины с сохранением равенства толщин друг другу. Таким образом, как и прежде, будем считать, что структура состоит из 16 слоев, однако суммарная их толщина, то есть полная длина всей структуры  $L_N$ , меняется.

Ввиду наблюдаемого отсутствия интерференционных явлений для волн прямого направления, можно ожидать, что при изменении  $L_N$  основные изменения будут испытывать амплитуды волн обратного направления  $B_n$ . Это случай иллюстрируется рис. 3.11, где показаны зависимости амплитуд волн обратного направления в четвертом, восьмом, двенадцатом и шестнадцатом слоях —  $B_4, B_8, B_{12}, B_{16}$  — от нормированной на  $L_0 = 16$  см полной длины структуры  $L_N/L_0$ . Для сравнения на врезке показаны подобные зависимости для амплитуд волн прямого направления в тех же слоях:  $A_4, A_8, A_{12}, A_{16}$ . При этом, как и ранее,  $f = 4,7746$  ГГц,  $k_0 = 1$  см<sup>-1</sup>,  $\lambda_0 = 6,2832$  см. Значение нормирующего множителя  $L_0$  выбрано из условия рассмотрения изменения  $L_N$  в интервале от  $\sim 0,01 \cdot \lambda_0$  до  $2,5 \cdot \lambda_0$  в удобном линейном масштабе. Волновое число по слоям линейно нарастает от 1,00 см<sup>-1</sup> до 1,15 см<sup>-1</sup> с шагом 0,01 см<sup>-1</sup>, то есть волна распространяется из менее плотной среды в более плотную.

Из рис. 3.11 видно, что максимальные амплитуды волн обоих направлений вблизи  $L_N/L_0 \sim 0$  с увеличением номера слоя  $n$  уменьшаются, что соответствует ослаблению падающей волны по мере ее проникновения в среду. Из врезки на рис. 3.11 видно, что при изменении полной длины структуры амплитуды волн прямого направления меняются мало. Более подробное исследование показывает, что эти амплитуды испытывают слабые осцилляции с амплитудой менее 0,1% от основной величины (на рисунке не видны). Период осцилляций  $D$  от номера слоя не зависит и в нормированных единицах составляет около  $D/L_0 \approx 0,21$ , то есть близок (с точностью  $\sim 7\%$ ) к половине

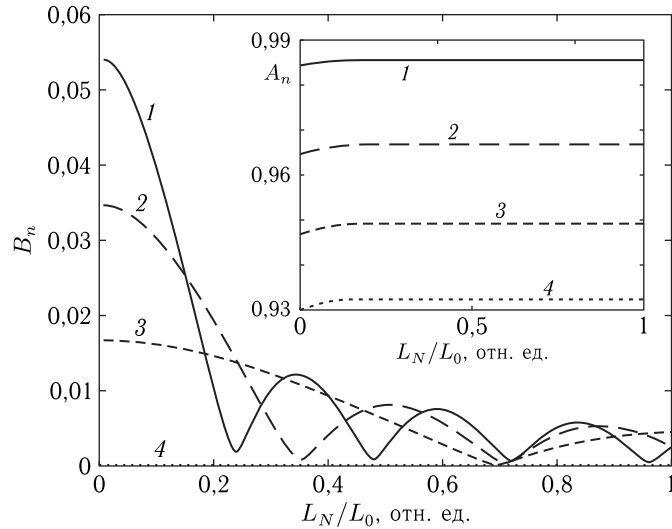


Рис. 3.11. Зависимости амплитуд волн обратного  $B_n$  и прямого  $A_n$  (врезка) направлений от нормированной полной длины структуры для различных слоев: 1 —  $n = 4$ ; 2 —  $n = 8$ ; 3 —  $n = 12$ ; 4 —  $n = 16$

длины волны, входящей в структуру:  $(\lambda_0/2)/L_0 = 0,1963$ . Из основной части рис. 3.11 видно, что при изменении полной длины структуры, амплитуды волн обратного направления сильно осциллируют с затухающей амплитудой. Так, для слоя №4 амплитуда первого после нулевого максимума при  $L_N/L_0 = 0,35$  составляет 0,22 от амплитуды нулевого максимума при  $L_N/L_0 = 0$ , амплитуда второго максимума при  $L_N/L_0 = 0,60$  составляет 0,13 от амплитуды нулевого максимума, амплитуда третьего максимума при  $L_N/L_0 = 0,84$  составляет 0,093 от амплитуды нулевого максимума. В точках минимумов осцилляций амплитуда волн составляет около 2% от амплитуды тех же волн в точках максимумов. Аналогичным образом ведут себя амплитуды максимумов и минимумов для других слоев. Период осцилляций  $D_n$  сильно зависит от номера слоя, и с увеличением этого номера значительно возрастает. Так, расстояние от нуля до первого минимума зависимости  $B_n(L_N/L_0)$  для слоя №4 составляет около 0,23, для слоя №8 — около 0,35, для слоя №12 — около 0,68. В абсолютных единицах эти расстояния соответствуют полной длине структуры  $L_N$ , равной 3,68 см, 5,60 см и 10,88 см. Можно видеть, что эти значения близки (с точностью  $\sim 15\%$ ) к величинам, кратным половине длины волны, входящей в структуру:  $1 \cdot (\lambda_0/2) = 3,14$  см,  $2 \cdot (\lambda_0/2) = 6,28$  см,  $3 \cdot (\lambda_0/2) = 9,42$  см соответственно, что также говорит об интерференционном характере наблюдаемых явлений.

### 3.7. Распространение волн через многослойные структуры с неоднородностью степенного вида

В предыдущих разделах 3.3–3.6 рассмотрены случаи линейного изменения волнового числа, в том числе сопровождаемого небольшими относительно полной длины структуры локальными неоднородностями.

Обратимся теперь к более сложной регулярной неоднородности значительной протяженности (по длине всей структуры), когда зависимость волнового числа от координаты имеет степенной характер. Для выявления основных закономерностей рассмотрим две степенные зависимости с выпуклостью вверх и вниз, переходящие друг в друга путем поворота вокруг оси симметрии второго порядка. Сначала рассмотрим необходимый математический аппарат для формирования таких зависимостей.

#### 3.7.1. Поворот графика функции относительно оси симметрии второго порядка

Сначала рассмотрим наиболее общий случай поворота вокруг оси симметрии графика произвольной функции.

Рассмотрим произвольную функцию  $y$  одной переменной  $x$ :

$$y = f(x). \quad (3.73)$$

Предположим, что на плоскости  $Oxy$  имеется график этой функции, проходящий через две точки  $A(x_A, y_A)$  и  $B(x_B, y_B)$ . Соединим эти точки отрезком прямой и найдем его середину — точку  $M(x_M, y_M)$ , координаты которой будут равны:

$$x_M = (x_A + x_B)/2, \quad (3.74)$$

$$y_M = (y_A + y_B)/2. \quad (3.75)$$

Поставим задачу построения другой функции  $u(x)$ , являющейся результатом поворота исходной функции на угол  $180^\circ$  вокруг этой точки. В силу осевой симметрии второго порядка очевидно, что при таком повороте точка  $A$  перейдет в точку  $B$ , а точка  $B$  — в точку  $A$ , то есть искомая кривая пройдет через те же точки  $A$  и  $B$ , что и исходная. Схема поворота иллюстрируется рис. 3.12, где утолщенной сплошной линией показана исходная функция, а утолщенной пунктирной — функция, полученная в результате поворота.

Введем вспомогательную систему координат  $Mx'y'$  с началом в точке  $M$  и осями  $Mx'$  и  $My'$ , параллельными и однонаправленными относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  исходной системы. В этой системе точки  $A$  и  $B$  имеют координаты  $x'_A, y'_A$  и  $x'_B, y'_B$ , а обе координаты точки  $M$  равны нулю. При этом, как видно из рисунка, выполняются соотношения:

$$x = x' + x_M; \quad (3.76)$$

$$y = y' + y_M. \quad (3.77)$$

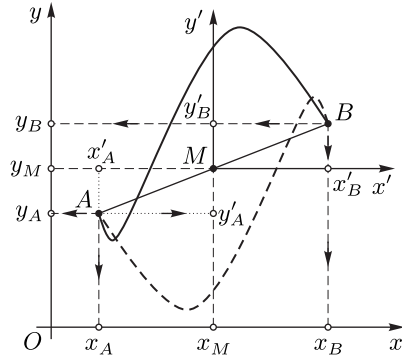


Рис. 3.12. Общая схема построения повернутой функции из исходной

а также

$$x' = x - x_M; \quad (3.78)$$

$$y' = y - y_M. \quad (3.79)$$

Подставляя (3.78)–(3.79) в (3.73), получаем:

$$y' + y_M = f(x' + x_M). \quad (3.80)$$

При повороте системы координат  $Mx'y'$  на  $180^\circ$  вокруг точки  $M$  направления осей  $Mx'$  и  $My'$  меняются на противоположные, то есть

$$x' \rightarrow -x'; \quad (3.81)$$

$$y' \rightarrow -y'. \quad (3.82)$$

Подставляя (3.81)–(3.82) в (3.80), получаем:

$$-y' + y_M = f(-x' + x_M). \quad (3.83)$$

Переходя обратно в систему  $Oxy$  с помощью соотношений (3.78)–(3.79), получаем:

$$-y + 2y_M = f(-x + 2x_M). \quad (3.84)$$

Из этого выражения находим

$$y = -f(-x + 2x_M) + 2y_M. \quad (3.85)$$

Это и есть искомая функция  $u(x)$ , являющаяся результатом поворота исходной функции на угол  $180^\circ$  вокруг точки  $M(x_M, y_M)$ .

Таким образом, исходя из произвольной функции  $f(x)$ , получаем пару функций, проходящих через две точки  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$  и являющихся поворотом одной функции относительно другой на угол  $180^\circ$  вокруг середины отрезка  $AB$  — точки  $M(x_M, y_M)$ :

$$y(x) = f(x); \quad (3.86)$$

$$u(x) = -f(-x + 2x_M) + 2y_M, \quad (3.87)$$

где  $x_M$  и  $y_M$  определяются соотношениями (3.74) и (3.75).

Подставляя (3.74)–(3.75) в (3.87), получаем пару функций в виде:

$$y(x) = f(x); \quad (3.88)$$

$$u(x) = -f[-x + (x_A + x_B)] + (y_A + y_B). \quad (3.89)$$

Заметим, что поворот вокруг начала координат на  $180^\circ$  можно осуществить также путем двух последовательных зеркальных отражений относительно осей  $Mx'$  и  $My'$ . При этом происходят как бы два последовательных поворота на углы, сумма которых равна  $180^\circ$ , в результате чего получаются соотношения (3.87) и (3.89).

### 3.7.2. Поворот графика степенной функции

Рассмотрим теперь частный случай, когда функция  $f(x)$  является степенной и имеет вид:

$$y(x) = ax^m + b, \quad (3.90)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $m$  — постоянные.

Предположим, что заданы значения функции  $y(x)$  в точках  $A(x_A, y_A)$  и  $B(x_B, y_B)$ , тогда координаты середины отрезка  $AB$ , точки  $M(x_M, y_M)$  — определяются формулами (3.74) и (3.75). При этом, в соответствии с формулой (3.87), получаем:

$$u(x) = -a \cdot (-x + 2x_M)^m - b + 2y_M. \quad (3.91)$$

Найдем параметры  $a$  и  $b$  из условия прохождения графика функции  $y(x)$  через точки  $A(x_A, y_A)$  и  $B(x_B, y_B)$ :

$$y|_{x=x_A} = y_A; \quad (3.92)$$

$$y|_{x=x_B} = y_B. \quad (3.93)$$

Подставляя (3.90) в (3.92)–(3.93), получаем систему уравнений для  $a$  и  $b$ :

$$a \cdot x_A^m + b = y_A; \quad (3.94)$$

$$a \cdot x_B^m + b = y_B. \quad (3.95)$$

Решая эту систему, получаем:

$$a = \frac{y_A - y_B}{x_A^m - x_B^m}; \quad (3.96)$$

$$b = \frac{x_A^m y_B - x_B^m y_A}{x_A^m - x_B^m}, \quad (3.97)$$

то есть (3.90) и (3.91) с учетом (3.96)–(3.97) принимают вид:

$$y(x) = \frac{y_A - y_B}{x_A^m - x_B^m} \cdot x^m + \frac{x_A^m y_B - x_B^m y_A}{x_A^m - x_B^m}; \quad (3.98)$$

$$u(x) = -\frac{y_A - y_B}{x_A^m - x_B^m} \cdot [-x + 2(x_A + x_B)]^m - \frac{x_A^m y_B - x_B^m y_A}{x_A^m - x_B^m} + 2(y_A + y_B). \quad (3.99)$$

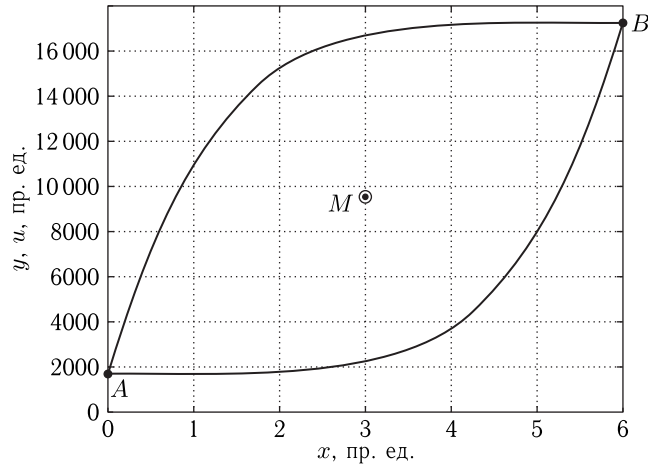


Рис. 3.13. Симметричные степенные функции  $y(x)$  верхняя и  $u(x)$  нижняя вида (3.98) и (3.99)

Иллюстрацией этих формул является рис. 3.13, где приведены построенные по ним зависимости  $y(x)$  и  $u(x)$  при  $m = 5$ . Обе кривые проходят через точки  $A(0; 1700)$ ,  $B(6; 17250)$  и имеют центральную симметрию второго порядка относительно середины отрезка  $AB$  — точки  $M(3; 9475)$ .

### 3.7.3. Построение ступенчатой зависимости волнового числа от координаты

Рассмотрим теперь, как с помощью степенных зависимостей (3.98) и (3.99) получить степенную зависимость волнового числа от координаты. Будем считать, что в основе искомых зависимостей лежат плавные степенные кривые вида:

$$k(x) = a \cdot x^m + b; \quad (3.100)$$

$$k(x) = -a \cdot (-x + 2k_M)^m - b + 2k_M, \quad (3.101)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $m$  — постоянные. Обе эти кривые проходят через точки  $A(x_A, k_A)$  и  $B(x_B, k_B)$ , причем одна является результатом поворота другой на  $180^\circ$  вокруг точки  $M(x_M, k_M)$ , лежащей на середине отрезка  $AB$ , то есть

$$x_M = (x_A + x_B)/2, \quad (3.102)$$

$$k_M = (k_A + k_B)/2. \quad (3.103)$$

Условие прохождения кривых через точки  $A$  и  $B$  дает:

$$a = \frac{k_A - k_B}{x_A^m - x_B^m}; \quad (3.104)$$

$$b = \frac{x_A^m k_B - x_B^m k_A}{x_A^m - x_B^m}, \quad (3.105)$$

то есть (3.100) и (3.101) с учетом (3.104)–(3.105) принимают вид:

$$k(x) = \frac{k_A - k_B}{x_A^m - x_B^m} \cdot x^m + \frac{x_A^m k_B - x_B^m k_A}{x_A^m - x_B^m}; \quad (3.106)$$

$$k(x) = -\frac{k_A - k_B}{x_A^m - x_B^m} \cdot [-x + (x_A + x_B)]^m - \frac{x_A^m k_B - x_B^m k_A}{x_A^m - x_B^m} + (k_A + k_B). \quad (3.107)$$

Ступенчатая зависимость волнового числа  $k$  от координаты  $x$  образуется таким образом, что волновое число в каждой среде определяется значением функции (3.106) или (3.107) при координате, соответствующей середине отрезка между границами этой среды.

В качестве иллюстрации приведенных зависимостей представлен рис. 3.14 для структуры из семи сред. Здесь цифрами 1–7 в кругах обозначены номера сред,  $x_0$ – $x_7$  — координаты границ между ними. Все среды имеют одинаковую протяженность по координате  $x$ , каждая из сред предполагается однородной. Параметры построения кривых 1 и 2:  $x_0 = 16$ ;  $x_7 = 73$ ;  $N = 7$ ;  $d = 8,1429$ ;  $x_A = 20,07143$ ;  $x_B = 68,92857$ ;  $k_A = 0,40$ ;  $k_B = 9,20$ ;  $a = 0,33627 \cdot 10^{-6}$ ;  $b = 0,33627$ ;  $m = 4$ .

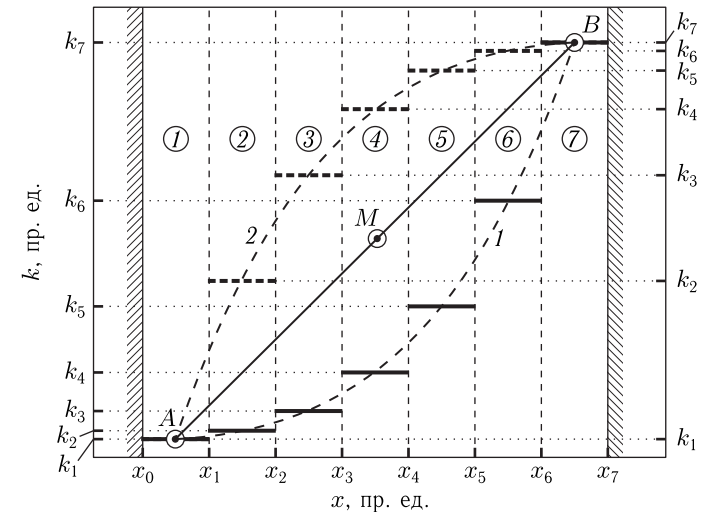


Рис. 3.14. Иллюстрация образования степенных зависимостей волнового числа от координаты

Координата точки  $A$ , соответствующей середине первой среды, равна:

$$x_A = \frac{x_0 + x_1}{2}, \quad (3.108)$$

при этом волновое число равно  $k_1$ .

Координата точки  $B$ , соответствующей середине последней седьмой среды, равна:

$$x_B = \frac{x_6 + x_7}{2}, \quad (3.109)$$

при этом волновое число равно  $k_7$ .

Волновые числа в остальных средах меняются в соответствии с зависимостями, описываемыми формулами (3.106) и (3.107). При этом волновое число в каждой среде соответствует значению функции (3.106) или (3.107) в центральной точке этой среды. Пунктирная кривая 1 соответствует степенной зависимости с выпуклостью вниз вида (3.106). Получающиеся при этом волновые числа показаны утолщенными сплошными линиями, их нумерация соответствует шкале на левой стороне рисунка. Пунктирная кривая 2 соответствует степенной зависимости с выпуклостью вверх вида (3.107). Получающиеся при этом волновые числа показаны утолщенными пунктирными линиями, их нумерация соответствует шкале на правой стороне рисунка.

Из рисунка видно, что кривые 1 и 2 проходят через точки  $A$ ,  $B$  и имеют центральную симметрию второго порядка относительно середины отрезка  $AB$  — точки  $M$ , причем пересекают середины горизонтальных ступенек, соответствующих значениям волнового числа в каждой из сред.

При вычислении волнового числа в качестве переменной  $x$  при подстановке в формулы (3.106) или (3.107) используется величина  $x_i - d_i/2$ , где  $i$  — номер среды, а  $d_i = x_i - x_{i-1}$  — длина участка соответствующей среды. Такой сдвиг на половину длины участка среды отвечает условию прохождения аналитической зависимости (3.106) или (3.107) через середину этого участка.

### 3.7.4. Отражение и прохождение волн через многослойные структуры с неоднородностью степенного вида

Рассмотрим теперь отражение и прохождение волн через многослойные структуры с неоднородностью степенного вида с помощью описанного выше алгоритма. Общая геометрия и основные обозначения остаются теми же, что приведены на рис. 2.5 (раздел 2.3.1). Для простоты рассмотрим случай падения одной волны единичной амплитуды с той стороны структуры, где волновое число имеет минимальное значение, то есть полагаем  $A_0 = 1$ ,  $B_0 = 0$ ,  $k_1 < k_N$ . В качестве основной задачи поставим вопрос, какой должна быть ступенчатая неоднородность, чтобы отражение было минимальным?

Для такой задачи предложенный алгоритм допускает простую машинную реализацию. Рассмотрим результат расчета для ступенчатой структуры из 25 слоев,  $N = 25$ , одинаковой толщины. Пусть начальная

и конечная точки структуры имеют координаты  $x_0 = 0$  и  $x_{25} = 25$ , при этом толщины слоев  $d_i = 1$  (везде единицы длины одни и те же). Начальное волновое число  $k_1 = 0,1$ , конечное —  $k_{25} = 0,9$  (величины, обратные единице длины).

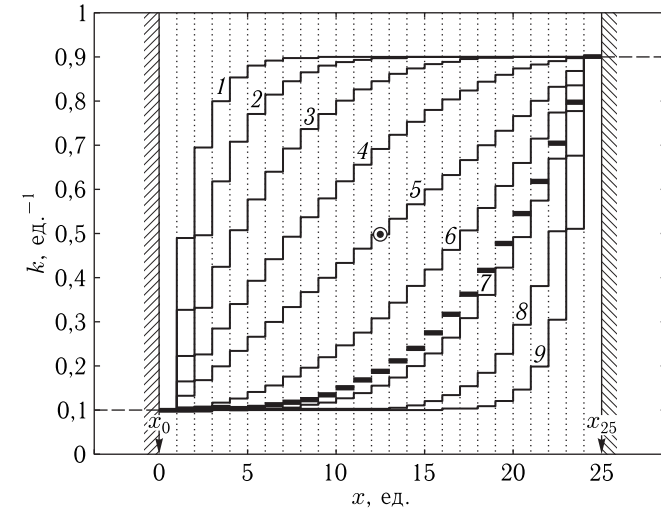


Рис. 3.15. Ступенчатые степенные зависимости волнового числа от координаты

Зависимости волнового числа от координаты схематически показаны на рис. 3.15. Здесь кривые 1–5, соответствующие выпуклости вверх, построены по формуле

$$k(x) = -a(-x + 2k_M)^m - b + 2k_M. \quad (3.110)$$

Кривые 5–9, соответствующие выпуклости вниз, — по формуле

$$k(x) = ax^m + b. \quad (3.111)$$

Кривая 5, для которой выпуклость отсутствует, может быть построена по любой из этих формул. Параметры построения следующие:  $a = 0,20837 \cdot 10^{-4}$ ;  $b = 1,00000$ ;  $k_M = 0,5$ . Показатели степени, соответствующие номерам кривых, следующие: 1, 9 —  $m = 16$ ; 2, 8 —  $m = 8$ ; 3, 7 —  $m = 4$ ; 4, 6 —  $m = 2$ ; 5 —  $m = 1$ . Точка  $M$  — центр симметрии системы кривых. Утолщенными горизонтальными линиями показаны ступеньки, соответствующие выпуклости вниз, построенные по формуле (3.111) при показателе степени  $m = 3,3$ .

Рассчитанные с помощью алгоритма модули амплитуд отраженной и проходящей волн для различных кривых приведены в таблице.

Из таблицы видно, что для зависимостей с выпуклостью вверх (1–5) отражение по мере увеличения показателя степени всегда увеличивается, при этом прохождение соответственно всегда уменьшается. Такое поведение отражает факт увеличения неоднородности,

Таблица. Параметры отраженной и проходящей волн

| Номер кривой         | Показатель степени | Отражение $ B_1(m) $ | Прохождение $ A_{25}(m) $ |
|----------------------|--------------------|----------------------|---------------------------|
| 1                    | 16                 | 0,69729              | 0,23893                   |
| 2                    | 8                  | 0,62969              | 0,28595                   |
| 3                    | 4                  | 0,54675              | 0,27910                   |
| 4                    | 2                  | 0,45106              | 0,29750                   |
| 5                    | 1                  | 0,34386              | 0,31301                   |
| 6                    | 2                  | 0,22128              | 0,32507                   |
| Утолщенные ступеньки | 3,3                | 0,16434              | 0,32880                   |
| 7                    | 4                  | 0,22052              | 0,32513                   |
| 8                    | 8                  | 0,25300              | 0,32249                   |
| 9                    | 16                 | 0,65913              | 0,25068                   |

то есть резкости перепада между крайними значениями волновых чисел для структуры в целом при увеличении показателя степени. Для зависимостей с выпуклостью вниз (6–9) по мере увеличения показателя степени отражение сначала несколько уменьшается (при переходе от кривой 6 к кривой 7), после чего также увеличивается (для кривых 7–9). При этом минимум отражения наблюдается между  $m = 2$  и  $m = 4$ . Более подробный расчет показывает, что абсолютный минимум отражения приходится на значение  $m = 3,3$ , зависимость волнового числа от координаты для которого на рис. 3.15 показана утолщенной ступенчатой линией.

Таким образом, можно сделать вывод, что отражение минимально тогда, когда изменение волнового числа сначала нарастает медленнее и ближе к концу — быстрее, то есть первая производная зависимости волнового числа от координаты по мере увеличения номера слоя монотонно увеличивается.

### Выводы по главе 3

Данная глава посвящена описанию математического аппарата и практического применения полного метода пошагового алгоритма расчета распространения волн в многослойных структурах. Получены рекуррентные формулы для вычисления амплитуд волн обоих направлений во всех слоях структуры. Приведены примеры решения некоторых задач с применением полного алгоритма.

Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. На основе анализа иерархической повторяемости структуры детерминантов, определяющих амплитуды волн, распространяющихся в многослойной структуре, которые получены прямым методом, пред-

ложен простой алгоритм получения аналитических выражений для амплитуд выходящих (отраженной и проходящей), а также всех внутренних волн в отдельных слоях многослойной структуры. Рассмотрен случай падения двух встречных одномерных волн при произвольном числе слоев. Получены аналитические выражения амплитуд волн для структур, состоящих из трех, четырех и пяти слоев, тождественные получаемым прямым методом.

2. Показана возможность численного решения задачи для произвольного числа  $N$  слоев, представлена блок-схема программы для ЭВМ, реализующей предложенный алгоритм на основе одного или двух вычислительных циклов, повторяемых  $N - 2$  раз.

3. Работа предложенного алгоритма продемонстрирована на примере численного решения задачи о распространении волн в ступенчато-неоднородной структуре с линейным возрастанием и убыванием волнового числа по ее длине. С помощью укороченного алгоритма показано, что при постоянной амплитуде падающей волны прямого направления  $A_0$  зависимости амплитуд выходящих из структуры волн обоих направлений  $B_1$  и  $A_N$  от амплитуды падающей волны обратного направления  $B_0$  в обоих случаях изменения волнового числа имеют V-образный характер с минимумом вблизи  $B_0 = 0$ , а при увеличении  $B_0$  с тем или иным знаком возрастают по закону, близкому к линейному. Отмечена небольшая асимметричность таких зависимостей, обусловленная интерференцией распространяющихся волн.

4. Показана возможность численного определения амплитуд внутренних волн в отдельных слоях той же структуры с помощью использования полного алгоритма. При неизменной амплитуде падающей волны прямого направления  $A_0$  исследованы зависимости амплитуд внутренних волн  $A_n$  и  $B_n$  при произвольном значении  $n$  от амплитуды падающей волны обратного направления  $B_0$ . Показано, что при увеличении волнового числа по координате амплитуды волн прямого направления в отсутствие встречной волны (при  $B_0 = 0$ ) монотонно спадают по координате, а при  $B_0 \neq 0$  носят осциллирующий характер. Амплитуды волн обратного направления при этом монотонно спадают. При уменьшении волнового числа по координате амплитуды волн прямого направления монотонно нарастают, а амплитуды волн обратного направления имеют осциллирующий характер. Показано, что координатные зависимости амплитуд, соответствующих волнам, направление распространения которых совпадает с направлением увеличения плотности среды (увеличения волнового числа), испытывают значительно более сильные осцилляции, чем волны противоположного направления. Наблюдаемый ход кривых интерпретирован на основе интерференционных явлений в сочетании с сохранением энергии распространяющейся волны.

5. Показано, что при линейном увеличении волнового числа по длине структуры амплитуды волн прямого направления по мере увеличения номера слоя монотонно уменьшаются, а амплитуды волн обратного направления в общем случае меняются осциллирующим образом.

Период этих осцилляций может быть как больше, так и меньше полной длины структуры в зависимости от ее соотношения с половиной средней длины волны в структуре. Выявлена аналогия распределения амплитуд волн обратного направления с модами колебаний струны с закрепленными концами. В случае когда полная длина структуры значительно превышает половину средней длины волны, характер осцилляций приобретает вид нерегулярных скачков с сильными перепадами от одного слоя к другому.

6. Выявлена роль степени нарастания волнового числа. Показано, что аналогия распределения амплитуд волн обратного направления с модами струны хорошо выполняется только при достаточно плавном изменении волнового числа по слоям, то есть когда максимальный перепад длин волн в пределах структуры составляет малую часть от половины средней длины волны. При нарушении этого условия четкая периодичность распределения амплитуд сменяется нерегулярным скачкообразным ростом, причем скорость этого роста по мере уменьшения номера слоя увеличивается.

7. Рассмотрен случай линейного убывания волнового числа по слоям структуры. Показано, что при этом амплитуды волн прямого направления монотонно увеличиваются, что связано с сохранением потока энергии при распространении волны в структуре. Амплитуды волн обратного направления испытывают осцилляции, подобные таковым при возрастании волнового числа.

8. Рассмотрены случаи локальной неоднородности структуры, состоящей в локальном колоколообразном максимуме и минимуме волнового числа. Показано, что в первом случае амплитуды волн прямого направления имеют колоколообразный минимум, а во втором — максимум, тогда как амплитуды волн обратного направления в обоих случаях имеют локальный максимум.

9. Рассмотрена роль потерь энергии в структуре, учитываемая путем введения отрицательной мнимой части волнового числа.

Показано, что даже при постоянстве действительной части волнового числа, увеличение затухания с номером слоя приводит к отражению падающей волны, проявляющемуся тем сильнее, чем нарастание затухания больше. При слабом росте затухания амплитуды волн обратного направления испытывают осцилляции, которые при сильном росте затухания полностью подавляются.

10. Рассмотрено поведение амплитуд волн обоих направлений во внутренних слоях структуры при изменении ее полной длины. Показано, что амплитуды волн прямого направления в каждом заданном слое при этом меняются мало, тогда как амплитуды волн обратного направления испытывают затухающие осцилляции, период которых сильно зависит от номера слоя, и с увеличением этого номера возрастает пропорционально кратности между полной длиной структуры и половиной длины волны, в нее входящей.

11. В качестве еще одного примера использования алгоритма рассмотрена многослойная структура с неоднородностью степенного вида. Предложено построение степенных зависимостей волнового числа от координаты симметричных относительно общего центра с выпуклостью вверх и вниз. Получены аналитические зависимости волнового числа от координаты для ступенчатых степенных зависимостей, симметричных относительно оси второго порядка, проходящей через геометрический центр структуры. На примере структуры, содержащей 25 слоев, показано, что при положительном показателе степени неоднородности минимальное отражение имеет место тогда, когда первая производная зависимости волнового числа от координаты по мере увеличения номера слоя монотонно увеличивается.

12. В соответствии с общностью волновых процессов различной природы показана возможность применения алгоритма к задачам о распространении электромагнитных волн в многослойной ступенчато-неоднородной структуре для случаев нормального и наклонного падения волны на плоскость структуры.

## Глава 4

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АЛГОРИТМА ДЛЯ РАСЧЕТА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Глава посвящена описанию применения метода полного пошагового алгоритма для расчета распространения одномерных волн через структуры, содержащие периодические неоднородности. Рассмотрены неоднородности меандрового и пилообразного вида. Приведены примеры распределения амплитуд волн во внутренних слоях структуры. Выявлены различные режимы распространения, отличающиеся характером пространственной модуляции амплитуды.

В главе частично использованы материалы монографий [65], [25, стр. 27–29], [56–63, 148–182], а также статей [68, 73, 76, 96–99, 103]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

### 4.1. Общая геометрия структуры с периодической неоднородностью

Рассмотрим распространение волны через ограниченную многослойную неоднородную структуру, вид и характер неоднородности в которой по длине структуры периодически повторяется. Предположим, что структура содержит неоднородность в виде одинаковых прямоугольных барьеров, с одинаковыми промежутками между ними. Такую структуру будем называть «меандровой». В случае равенства длины барьеров длине промежутков меандровую структуру будем называть «симметричной». В случае различия упомянутых длин — «несимметричной». Дальнейшее рассмотрение посвящено в первую очередь симметричной меандровой структуре, общая схема которой иллюстрируется рис. 4.1.

Число слоев может быть произвольным, главным требованием является лишь периодическое чередование их параметров. Для удобства изложения на рисунке показан частный случай 16 слоев. Структура содержит два вида сред, в одном из которых волновое число равно  $k_p$ , а в другом:  $k_s$ , причем  $k_p < k_s$ . Среднее значение волнового числа равно:

$$k_c = (k_p + k_s)/2, \quad (4.1)$$

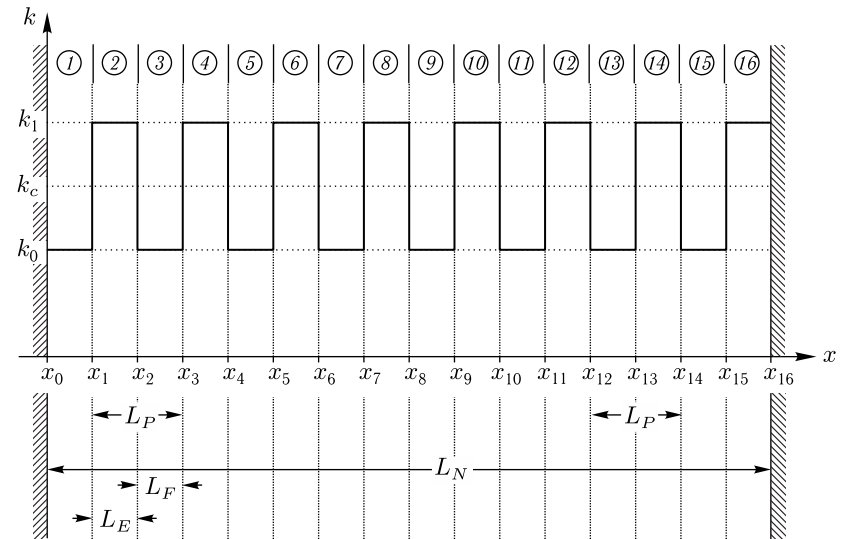


Рис. 4.1. Общая схема ограниченной многослойной структуры с периодической неоднородностью симметричного меандрового вида. Цифры в кругах — номера слоев (сред)

причем добавка к нему  $\Delta k_c$ , такова, что

$$k_p = k_c - \Delta k_c; \quad (4.2)$$

$$k_s = k_c + \Delta k_c. \quad (4.3)$$

Полная длина структуры равна  $L_N$ . Структура представляет собой совокупность одинаковых барьеров длиной  $L_E$ , разделенных промежутками длиной  $L_F$ . Период неоднородности структуры равен:

$$L_P = L_E + L_F. \quad (4.4)$$

Будем полагать, что отражение волн при координатах  $x_0$  и  $x_{16}$  отсутствует, причем в среде №1 распространяется в положительном направлении волна с амплитудой  $A_0$ , а в среде №16 — в отрицательном направлении волна с амплитудой  $B_{16}$ . Для упрощения записи экспонент введем обозначения:

$$e_n = \exp[-ik_n(x - x_{n-1})]. \quad (4.5)$$

При этом  $e_0 = \exp(i\varphi)$ , где  $\varphi$  — начальная фаза, обычно равная нулю.

Описанный в главе 3 метод полного пошагового алгоритма был применен для численного расчета амплитуд волн прямого и обратного направлений в структуре, схема которой показана на рис. 4.1. Перейдем к описанию результатов расчетов.



## 4.2. Амплитуды волн в крайних слоях структуры

Рассмотрим сначала амплитуды волн в крайних слоях структуры при изменении волнового числа.

### 4.2.1. Общая геометрия структуры

Пусть структура содержит 16 слоев (как принято на рис. 4.1). Полная длина структуры  $L_N = 8$  см, толщина одного слоя  $L_E = L_F = 0,5$  см, период неоднородности  $L_P = 1$  см. На структуру падает одна волна прямого направления с амплитудой  $A_1 = 1$  (при этом  $B_{16} = 0$ ). Рассмотрим изменение среднего волнового числа  $k_c$  в интервале от  $1 \text{ см}^{-1}$  до  $5 \text{ см}^{-1}$ , причем добавка к нему во всем интервале его изменения остается постоянной:  $\Delta k_c = 0,1 \text{ см}^{-1}$ .

### 4.2.2. Изменение среднего волнового числа

Рассмотрим, как ведут себя волны в крайних структурах при изменении среднего волнового числа. На рис. 4.2 показаны зависимости амплитуд волн обратного (*a*) и прямого (*б*) направлений от значения такого числа.

Из рисунка видно, что амплитуды волн как прямого, так и обратного направлений распространения имеют ярко выраженные особенности вблизи  $k_c = 3,14 \text{ см}^{-1}$ . При этом амплитуда волны обратного направления в среде № 1 —  $B_{01}$  (*a*) имеет максимум, что соответствует максимуму отражения падающей волны от структуры в целом, а амплитуда волны обратного направления в среде № 16 —  $A_{16}$  (*б*) имеет минимум, что соответствует минимуму прохождения падающей волны через структуру в целом.

Волновое число  $k_c = 3,14 \text{ см}^{-1}$  соответствует длине волны 2 см, что вдвое превышает период изменения параметров (волнового числа) структуры. То есть на величине периода укладывается одна половина длины волны. Такое соотношение соответствует хорошо известному условию прохождения волны через периодическую структуру, говорящему о наличии полос непропускания при равенстве между периодом структуры и целым числом распространяющихся в структуре полуволн [132]. Осцилляции по обе стороны от главного максимума, особенно ярко выраженные для амплитуды отраженной волны  $B_{01}$ , обусловлены интерференционными явлениями за счет конечности общего числа барьеров структуры. Дополнительный расчет показывает, что при увеличении количества барьеров амплитуды осцилляций уменьшаются, причем главный максимум сужается.

### 4.2.3. Амплитуды волн внутри полос непропускания

В общем случае число полос непропускания, чередующихся с полосами пропускания, может быть неопределенно велико. Поэтому представляет интерес оценить амплитуды волн внутри этих полос, что и сделано далее.

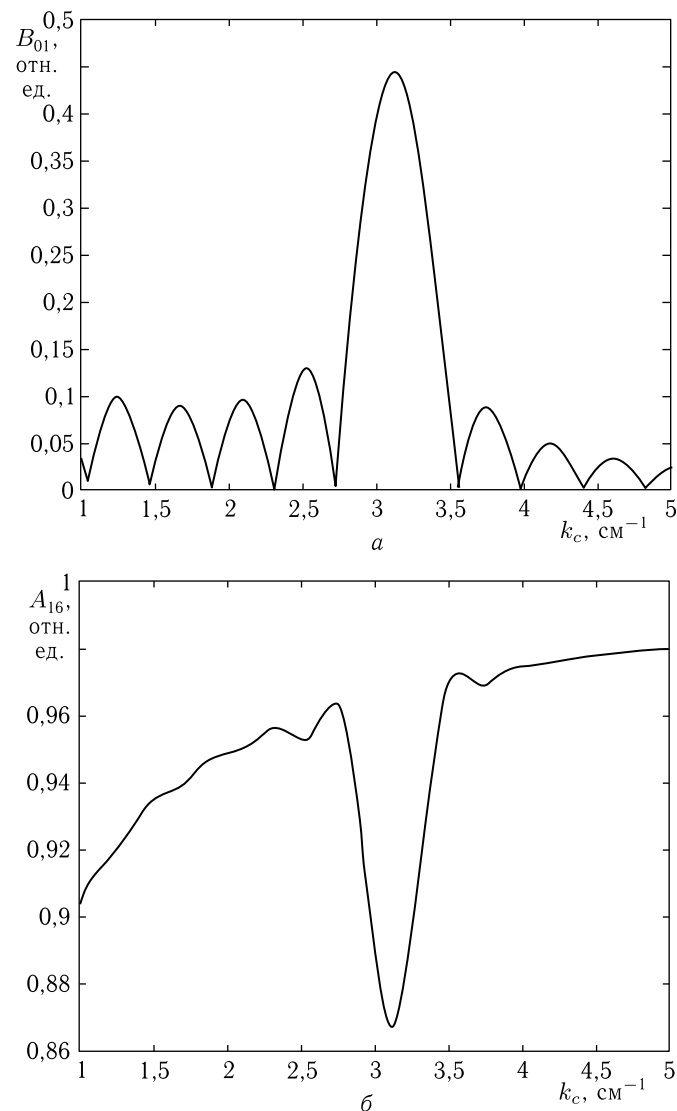


Рис. 4.2. Зависимости амплитуд волн в крайних слоях структуры от среднего волнового числа. *a* — волна обратного направления (отраженная) в слое № 1. *б* — волна прямого направления (проходящая) в слое № 16

Исследование зависимости амплитуды отраженных и проходящих волн от количества полуволн, укладывающихся на длине периода структуры, показало, что амплитуда отраженной волны  $B_{01}$  испытывает осцилляции, максимумы которых соответствуют нечетному числу

полуволн, а минимумы — четному. Однако при увеличении количества полуволн на периоде структуры различие между максимумами и минимумами осцилляций убывает.

Дополнительный расчет показывает, что при дальнейшем увеличении количества полуволн убывание между максимумами и минимумами сменяется нарастанием и затем снова убыванием. Так при  $n = 19$  и  $n = 20$  величина  $B_{01}$  составляет соответственно 0,272 и 0,382, а при  $n = 29$  и  $n = 30$  — 0,066 и 0,433. Более подробное исследование выявляет четкую периодичность таких изменений с периодом по волновому числу около  $30 \text{ см}^{-1}$ , причем величина периода с увеличением различия между волновыми числами в слоях структуры  $k_p$  и  $k_s$  уменьшается. Амплитуда проходящей волны  $A_{16}$  ведет себя подобным же образом, однако в противофазе с амплитудой  $B_{01}$ , что обусловлено энергетическим балансом системы в целом.

Подобную осцилляцию амплитуд отраженной и проходящей волн при изменении среднего волнового числа можно назвать «вторичной модуляцией», проявление которой в подобных структурах впервые было отмечено в работе [93]. Причина вторичной модуляции, по-видимому, связана с тем, что в структуре барьеры и промежутки между ними представляют собой ограниченные с двух сторон участки однородной среды, то есть обладают определенными резонансными свойствами. Поскольку имеются только два вида таких участков, то и резонансных частот получается всего две. Таким образом, волна распространяется через цепочку распределенных резонаторов, частоты которых чередуются. Такое распространение приводит к биению между этими частотами, в результате чего появляется разностная частота с периодом значительно большим, чем исходные. Этот период и проявляется в периодическом изменении амплитуды пиков отражения. При увеличении разности между частотами составляющих структуру резонаторов (то есть между значениями скоростей в них) частота биений увеличивается, в результате чего период вторичной модуляции уменьшается, как это и отмечено выше.

### 4.3. Амплитуды волн в различных слоях структуры

Рассмотрим теперь, что происходит с волнами прямого и обратного направлений при изменении координаты или номера слоя структуры, а также при изменении среднего волнового числа.

#### 4.3.1. Изменение номера слоя структуры

По мере распространения в прямом или обратном направлении волна последовательно проходит от одного слоя структуры к другому, причем амплитуды волн в различных слоях получаются различными.

Такое их поведение иллюстрируется рис. 4.3, где показаны зависимости волновых чисел ( $a$ ) и амплитуд волн прямого ( $b$ ) и обратного ( $s$ ) направлений от координаты в различных слоях структуры при раз-

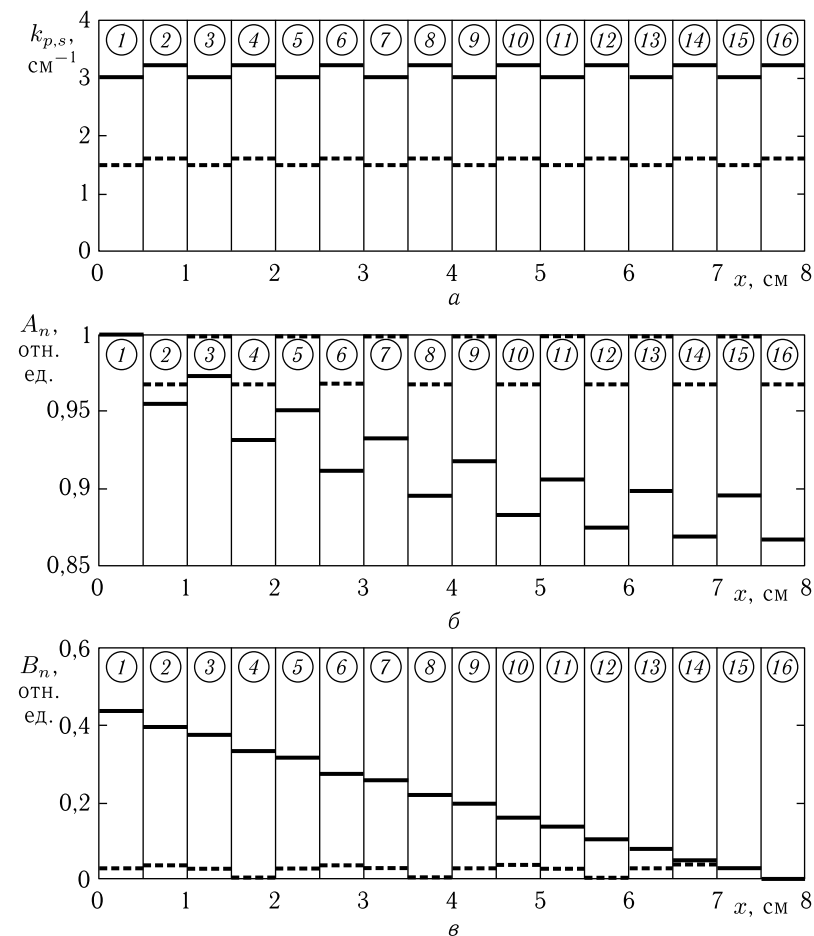


Рис. 4.3. Зависимости волновых чисел ( $a$ ) и амплитуд волн прямого ( $b$ ) и обратного ( $s$ ) направлений от координаты в различных слоях структуры. Утолщенные сплошные горизонтальные линии построены при среднем волновом числе  $k_c = 3,14 \text{ см}^{-1}$  ( $k_p = 3,04 \text{ см}^{-1}$ ,  $k_s = 3,24 \text{ см}^{-1}$ ); утолщенные пунктирные линии — при  $k_c = 1,57 \text{ см}^{-1}$  ( $k_p = 1,52 \text{ см}^{-1}$ ,  $k_s = 1,62 \text{ см}^{-1}$ )

личных значениях среднего волнового числа. Сплошные горизонтальные линии соответствуют волновому числу в середине первой полосы непропускания ( $k_c = 3,14 \text{ см}^{-1}$ ), пунктирные горизонтальные линии — волновому числу вдали от такой полосы ( $k_c = 1,57 \text{ см}^{-1}$ ).

Из рисунка видно, что в полосе непропускания амплитуды волн прямого направления ( $b$ ) по мере увеличения номера среды монотонно падают от 1,00 в среде № 1 до 0,87 в среде № 16, тогда как амплитуды тех же волн вне полосы непропускания, перемежаясь, осциллируют

между 1,00 и 0,97 с периодом, равным периоду структуры. Амплитуды волн обратного направления (в) в тех же условиях в полосе непропускания монотонно спадают от 0,46 в среде № 1 до 0,00 в среде № 16, тогда как вне полосы непропускания осциллируют между 0,00 и 0,11 с периодом, близким к удвоенному периоду структуры.

Такое поведение амплитуд волн обоих направлений соответствует постепенному просачиванию волны через структуру с убыванием энергии волны в полосе непропускания и сохранением ее энергии вне такой полосы.

Поведение амплитуд волн в других различных полосах непропускания и вне таких полос соответствует описанному при рассмотрении рис. 4.3, с тем отличием, что при увеличении номера полосы проявляется эффект вторичной модуляции, рассмотренный в предыдущем разделе. При этом монотонный характер спада и нарастания волн в полосе непропускания сохраняется, однако амплитуды волн обоих направлений в среде № 1 периодически осциллируют с периодом, равным периоду вторичной модуляции.

Период осцилляций зависимости  $B_n(x)$  (рис. 4.3, в, пунктирные линии), будучи первоначально близким к удвоенному периоду структуры, постепенно увеличивается, достигая, например, в десятой полосе непропускания величины порядка пяти–шести периодов структуры.

#### 4.3.2. Изменение среднего волнового числа

Рассмотрим теперь амплитуды волн в различных слоях структуры. Поведение амплитуд при изменении волнового числа для волн обратного (а) и прямого (б) направлений иллюстрируется рис. 4.4. Все параметры структуры — те же, что использовались при построении рис. 4.1, добавка к волновому числу также постоянна и равна  $\Delta k_c = 0,1 \text{ см}^{-1}$ .

Из рисунков видно, что зависимости для волн обоих направлений имеют экстремумы вблизи  $k_c = 3,14 \text{ см}^{-1}$ , что соответствует первой полосе непропускания. В окрестности волнового числа  $k_c = 6,28 \text{ см}^{-1}$ , соответствующего второй полосе непропускания, видимые экстремумы отсутствуют благодаря явлению вторичной модуляции, рассмотренному в предыдущем разделе.

Интенсивный максимум зависимости  $B_{01}$  от  $k_c$  по мере увеличения номера среды, то есть удаления от точки возбуждения, постепенно расплывается, амплитуда его падает, экстремальный характер рассасывается, переходя в монотонно спадающий, стремящийся к нулю по мере приближения к крайнему слою структуры (№ 16).

Зависимости для волн обратного направления чередуются: в слоях с четными номерами они имеют выпуклость вверх и возрастают по мере увеличения  $k_c$ , в слоях с нечетными номерами — осциллируют с крайне малой амплитудой (менее 10%) в окрестности единицы.

Такие два вида поведения обусловлены тем, что в слоях с нечетными номерами волновые числа те же, что в первой среде, а с нечетными — отличные от первых. То есть во всех нечетных средах волны

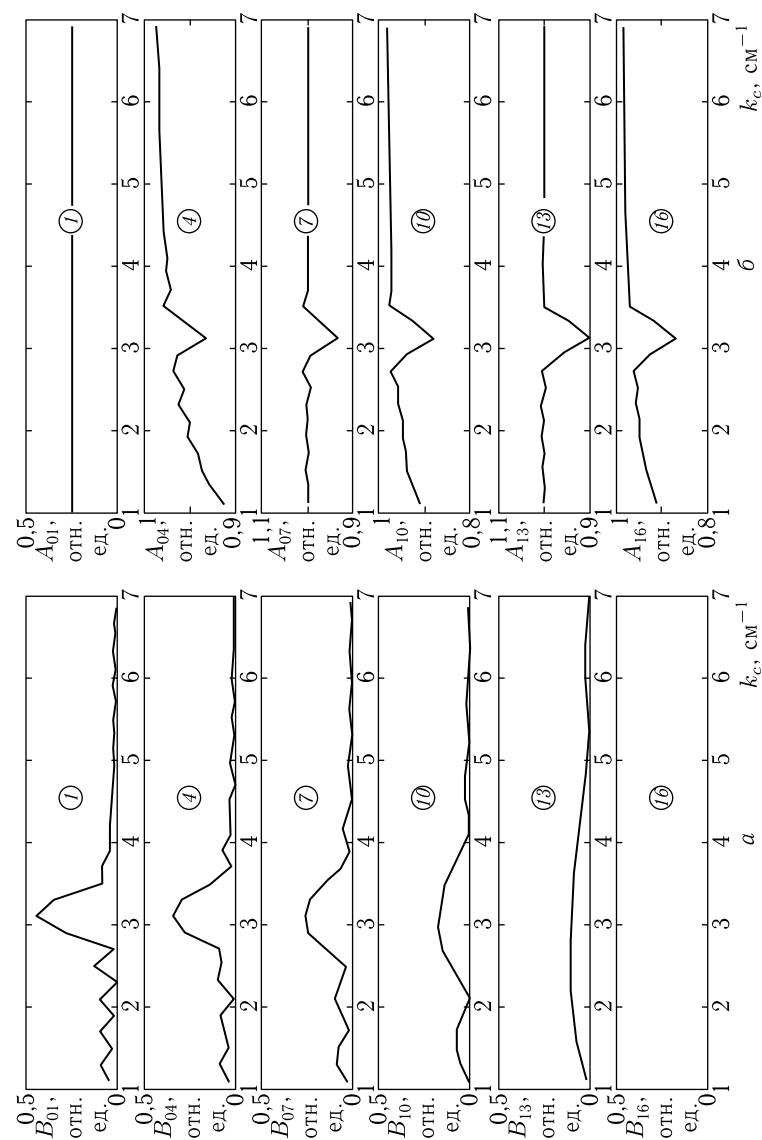


Рис. 4.4. Зависимости амплитуд волн обратного (а) и прямого (б) направлений в различных слоях структуры от среднего волнового числа. Цифры в кругах — номера слоев

находятся в тех же условиях, что и на входе в структуру, тогда как в нечетных — в условиях отличных. Поэтому в случае изменения условий параметры волны испытывают как бы скачок, тогда как при сохранении условий такой скачок отсутствует.

Некоторое превышение амплитуд волн над единицей в процессе осцилляций в нечетных средах отражает увеличение амплитуды волны при прохождении из более плотной среды в менее плотную, то есть от слоя с большим волновым числом к слою с меньшим.

#### 4.4. Неоднородность пилообразного вида

В качестве еще одного примера рассмотрим распространение волны через структуру с периодической неоднородностью пилообразного вида, иллюстрируемое рис. 4.5.

##### 4.4.1. Общая геометрия пилообразной неоднородности

На рис. 4.5, а для частного случая 16 слоев показана схема распределения волновых чисел, меняющихся по координате от слоя к слою по «пилообразному» закону, при котором каждый зубец «пилы» представлен в виде четырехступенчатой ломаной линии. Таким образом, структура содержит четыре вида сред с равноотстоящими друг от друга четырьмя волновыми числами  $k_0, k_1, k_2, k_3$ , где  $k_0 < k_1 < k_2 < k_3$ , причем  $k_1 - k_0 = k_2 - k_1 = k_3 - k_2 = \Delta k_c$ . Среднее волновое число определяется соотношением:

$$k_c = \frac{k_0 + k_1 + k_2 + k_3}{4}. \quad (4.6)$$

При этом волновые числа в первых четырех средах равны:

$$k_0 = k_c - 2\Delta k_c; \quad (4.7)$$

$$k_1 = k_c - \Delta k_c; \quad (4.8)$$

$$k_2 = k_c + \Delta k_c; \quad (4.9)$$

$$k_3 = k_c + 2\Delta k_c. \quad (4.10)$$

При номере слоев больше 3 все параметры сред периодически повторяются. Полная длина структуры равна  $L_N$ . В общем случае такую периодическую структуру можно рассматривать как совокупность одинаковых «треугольных» барьеров длиной  $L_P$ , внутри которых волновое число по координате  $x$  возрастает по ступенчато-прямолинейному закону (4.7)–(4.10).

На рис. 4.5 в пределах  $L_N = 8$  см помещаются четыре «зубца пилы», то есть четыре периода  $L_P = 2$  см. Дополнительное исследование показывает, что в такой структуре, аналогично меандровой, имеются полосы непропускания, соответствующие укладыванию половины

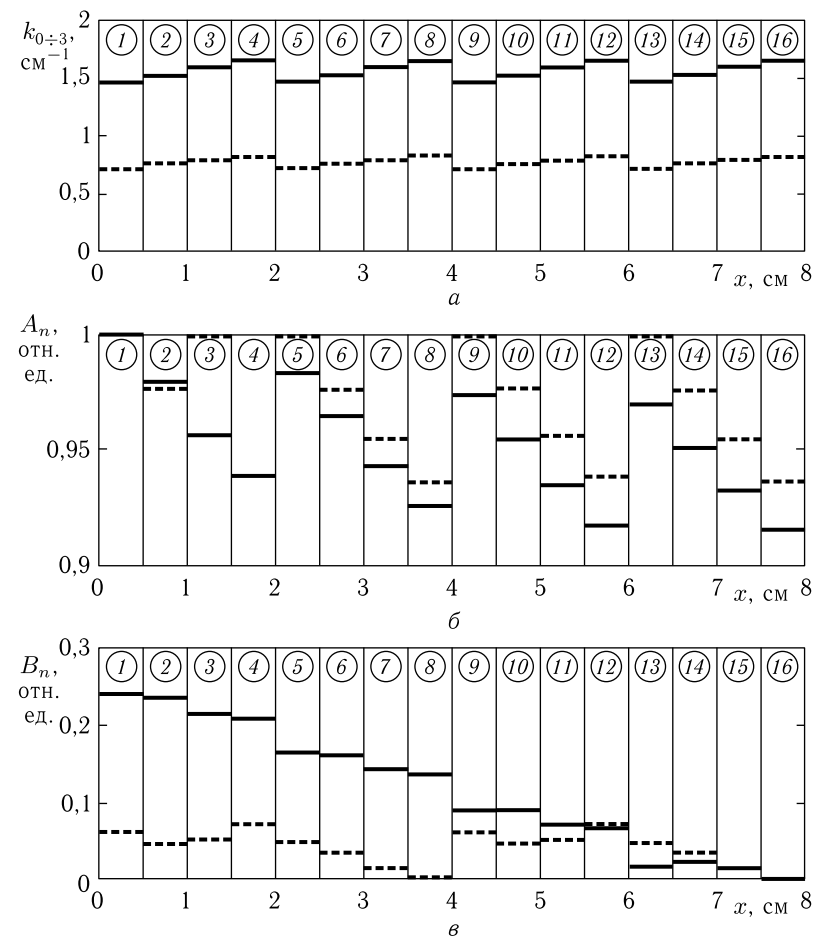


Рис. 4.5. Зависимости волновых чисел (а) и амплитуд волн прямого (б) и обратного (в) направлений от координаты в различных слоях структуры. Утолщенные сплошные горизонтальные линии построены при среднем волновом числе  $k_c = 1,57 \text{ см}^{-1}$  ( $k_0 = 4,48 \text{ см}^{-1}$ ,  $k_1 = 1,54 \text{ см}^{-1}$ ,  $k_2 = 1,60 \text{ см}^{-1}$ ,  $k_3 = 1,66 \text{ см}^{-1}$ ); утолщенные пунктирные горизонтальные линии — при  $k_c = 0,7850 \text{ см}^{-1}$  ( $k_0 = 0,7350 \text{ см}^{-1}$ ,  $k_1 = 0,7683 \text{ см}^{-1}$ ,  $k_2 = 0,8016 \text{ см}^{-1}$ ,  $k_3 = 0,8350 \text{ см}^{-1}$ )

длины волны на периоде структуры. При этом, учитывая, что период структуры равен  $L_P = 2$  см, получаем, что первая полоса непропускания соответствует  $k_c = 1,57 \text{ см}^{-1}$  (длина волны  $\lambda_c = 4$  см). Поэтому на рис. 4.5 представлены два вида зависимостей: первый — соответствующий первой полосе непропускания при  $k_c = 1,57 \text{ см}^{-1}$  (сплошные горизонтальные линии), второй — вне такой полосы при  $k_c = 0,7850 \text{ см}^{-1}$  (пунктирные горизонтальные линии).

#### 4.4.2. Амплитуды волн в различных слоях структуры

На рис. 4.5, кроме волновых чисел (*a*), показаны зависимости от координаты для амплитуд волн прямого (*б*) и обратного (*в*) направлений в различных слоях структуры.

Из рисунка видно, что в полосе непропускания амплитуды волн прямого направления (*б*) по мере увеличения номера среды на каждом периоде зависимости  $k_c(x)$  монотонно падают: на первом периоде от 1,00 в среде №1 до 0,94 в среде №4, после чего на границе между средами №4 и №5 резко возрастают до 0,982, на втором периоде опять падают от 0,982 в среде №5 до 0,925 в среде №8, затем на границе сред №8 и №9 возрастают до 0,975, после чего снова падают и так далее. Вне полосы непропускания амплитуды волн прямого направления на каждом периоде монотонно спадают от 1,00 в средах №№1, 5, 9, 13 до 0,938 в средах №№4, 8, 12, 16. То есть в общем в полосе непропускания амплитуды волн прямого направления имеют тенденцию к убыванию, тогда как вне полосы непропускания такая тенденция отсутствует.

В полосе непропускания амплитуды волн обратного направления (*в*) по мере увеличения номера среды монотонно спадают от 0,24 в среде №1 до 0,00 в среде №16. Амплитуды волн того же обратного направления вне полосы непропускания по мере увеличения номера среды осциллируют с размахом от 0,35 в средах №4 и №12 до 0,02 в средах №8 и №16, причем период осцилляций составляет около 4 см. Таким образом, в полосе непропускания амплитуды волн обратного направления имеют тенденцию к уменьшению, тогда как вне той же полосы такая тенденция отсутствует.

#### 4.4.3. Сопоставление со случаем меандровой неоднородности

Таким образом, из сопоставления рис. 4.5 с рис. 4.3 для меандровой неоднородности можно видеть, что в случае пилообразной неоднородности амплитуды волн прямого и обратного направлений в основном качественно ведут себя подобно аналогичным амплитудам волн в случае неоднородности типа меандра.

Явное количественное различие наблюдается в амплитудах. Так, в полосе непропускания для волн прямого направления в среде №16 амплитуда  $A_{16}$  в случае меандровой неоднородности составляет 0,87, тогда как в случае пилообразной — 0,915. В той же полосе для волн обратного направления в среде №1 амплитуда  $B_{01}$  в случае меандровой неоднородности составляет 0,46, тогда как в случае пилообразной — 0,24. Амплитуды осцилляций вне полосы непропускания для волн обратного направления в случае меандровой неоднородности составляет 0,11, тогда как в случае пилообразной — всего 0,08.

Таким образом, можно видеть, что при одной и той же величине добавки к среднему волновому числу ( $\Delta k_c = 0,318 \cdot k_c$ ) пилообразная неоднородность на амплитудах распространяющихся волн сказывается значительно слабее, чем меандровая (приблизительно в полтора–два раза).

Другим важнейшим различием можно считать изменение скорости нарастания осцилляций по координате *x*. Однако такое различие является вполне ожидаемым и связано с изменением величины периода пилообразной структуры по отношению к периоду меандровой. Действительно, поскольку период пилообразной структуры (рис. 4.5) по отношению к меандровой (рис. 4.3) увеличивается в два раза (с 1 см до 2 см), то и скорость изменения амплитуды, например волны прямого направления ( $A_2$  на рис. 4.3, *б* и  $A_4$  на рис. 4.5, *б*), уменьшается, хотя и несколько меньше, чем в два раза (то есть с  $0,05/1 = 0,05$  до  $0,06/2 = 0,03$ ). Скорость спада амплитуды волны обратного направления (от  $B_{01}$  до  $B_{16}$ ) также уменьшается почти в два раза (с  $0,46/8 = 0,0575$  на рис. 4.3, *в* до  $0,24/8 = 0,0300$  на рис. 4.5, *в*).

Дополнительное исследование показывает, что при уменьшении периода пилообразной неоднородности вплоть до периода меандровой эти численные различия сглаживаются и амплитуды волн обоих направлений при пилообразной неоднородности приближаются к амплитудам таких же волн при неоднородности меандровой. То есть тонкая структура «зубца» пилы проявляется тем слабее, чем ближе его длина приближается к длине барьера меандра. При увеличении периода пилообразной неоднородности вплоть до полной длины структуры в целом (то есть когда из всей пилы остается лишь один зубец) характер распространения волн обоих направлений приближается к таковому для случая линейной неоднородности.

При изменении наклона зубцов пилы с положительного на отрицательное (то есть с наклона вперед к наклону назад) распределение амплитуд в слоях для волн прямого направления практически не меняется (при приведенных выше параметрах — с точностью до четвертого–пятого знака), а для волн обратного направления, хотя и меняется, но крайне мало (не более чем на единицы или доли процента).

### 4.5. Пространственная модуляция амплитуды

Рассмотрим характер распределения амплитуд волн в слоях структуры при различной степени изменения параметров от слоя к слою.

#### 4.5.1. Условия существования пространственной модуляции

В предыдущих разделах было рассмотрено распределение амплитуд для сравнительно малого изменения волнового числа от слоя к слою. Так, для рис. 4.3 среднее волновое число составляет  $k_c = 3,14 \text{ см}^{-1}$ , а волновые числа в чередующихся слоях структуры равны  $k_p = 3,04 \text{ см}^{-1}$  и  $k_s = 3,24 \text{ см}^{-1}$ , то есть соотношение между ними  $k_s/k_p$  составляет всего 1,0658, то есть отклонение от среднего значения не превышает 3,2%.

Рассмотрим теперь, что происходит с амплитудами волн обоих направлений при более сильном изменении соотношения между волновыми числами двух видов сред, составляющих структуру.

Исследование показывает, что при увеличении такого соотношения распределение амплитуд волн в слоях структуры приобретает зависящий от координаты характер, то есть имеет место пространственная модуляция этой амплитуды.

На данном этапе ограничимся рассмотрением периодической структуры в виде симметричного меандра, то есть такой, которая состоит из слоев одинаковой толщины, имеющих чередующиеся волновые свойства, в качестве которых за основу примем волновое число.

#### 4.5.2. Основные режимы пространственной модуляции

В поведении пространственной модуляции в зависимости от соотношения волновых чисел в соседствующих слоях  $k_s/k_p$  можно выделить пять характерных режимов: синусоидальный, полусинусоидальный, линейный, экспоненциальный и синусоидальный с верхним пределом, соответствующих различным интервалам значений такого соотношения.

Будем полагать, что волна падает со стороны начала структуры ( $A_0 = 1$ ,  $B_{16} = 0$ ), и сначала рассмотрим характерные свойства этих режимов, после чего установим интервалы их существования.

**Режим № 1** — синусоидальные колебания амплитуды.

В этом случае распределение амплитуды колебаний по координате имеет вид довольно правильной синусоиды, не имеющей ограничения сверху или снизу по своему значению. Типичная картина распределения амплитуд для такого режима иллюстрируется рис. 4.6, где показаны зависимости амплитуд волн прямого (*a*) и обратного (*б*) направлений от координаты в различных слоях структуры. Рисунок построен при отклонении значений волновых чисел в слоях от среднего значения на 47,3%. Укрупненные точки являются результатами машинного эксперимента и построены как середины перепадов между амплитудами волн в соседствующих слоях. Синусоидальная кривая на рис. 4.6 *a* построена по эмпирической формуле

$$A_n = 0,11 \sin(1,79x - 3,00) + 0,78, \quad (4.11)$$

а подобная кривая на рис. 4.6, *б* построена по формуле

$$B_n = 0,21 \sin(1,79x - 3,00) + 0,40. \quad (4.12)$$

Из рисунка видно, что в этом режиме линии, проведенные через экспериментальные точки, близки к многократно осциллирующим синусоидам, вследствие чего режим назван «синусоидальным». При этом эмпирические кривые согласуются с точками в основном с точностью не хуже 5%. Несколько большие отклонения наблюдаются только на границе между первым и вторым слоями, где для волн прямого направления отличие составляет 16%, а для волн обратного 0–30%, что, по-видимому, связано с недостаточным установлением режима распространения волн вблизи точки их излучения.

Как видно из приведенных формул, частоты и фазы обеих кривых совпадают, однако амплитуды и постоянные составляющие значитель-

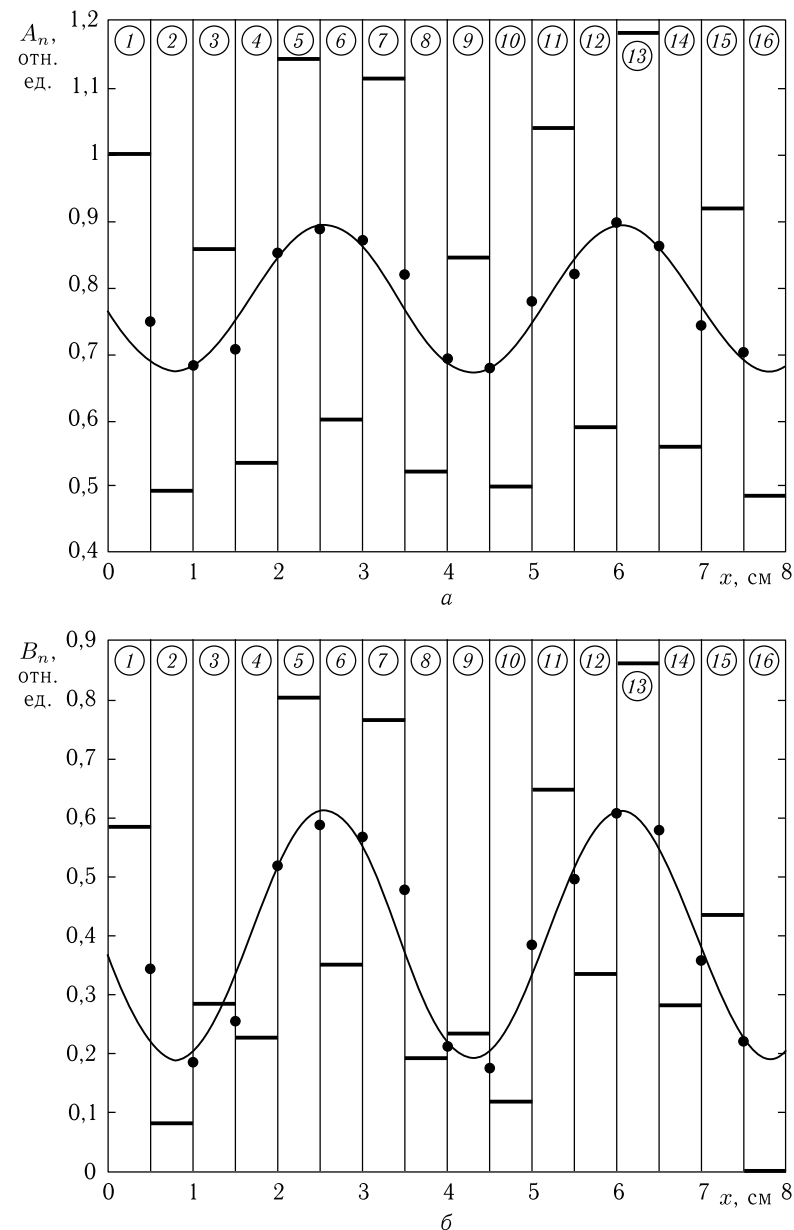


Рис. 4.6. Зависимости амплитуд волн прямого (*a*) и обратного (*б*) направлений от координаты в различных слоях структуры. Утолщенные горизонтальные линии — амплитуды волн в слоях. Волновые числа:  $k_c = 1,90 \text{ см}^{-1}$ ,  $k_p = 1,00 \text{ см}^{-1}$ ,  $k_s = 2,80 \text{ см}^{-1}$

но различаются. Так, амплитуда синусоиды, соответствующей волнам прямого направления, примерно в два раза меньше амплитуды синусоиды волн обратного направления, а соотношение для постоянных составляющих — обратное: постоянная составляющая синусоиды для волн прямого направления примерно в два раза больше подобной составляющей для волн обратного направления.

Такой синусоидальный характер полученных кривых говорит о том, что для обоих направлений перепады амплитуд волн в соседних слоях по мере изменения координаты периодически осциллируют. Период осцилляций амплитуды здесь равен  $P_m = 3,51$  см, что соответствует изменению аргумента синуса на  $2\pi$ , причем этот период одинаков для волн обоих направлений.

**Режим № 2** — полусинусоидальное изменение амплитуды.

В этом случае распределение амплитуды по координате напоминает по форме положительную половину периода синусоиды, вследствие чего режим назван «полусинусоидальным». Типичная картина распределения амплитуд для такого режима иллюстрируется рис. 4.7, где показаны зависимости амплитуд волн прямого (сплошные линии и закрытые точки) и обратного (пунктирные линии и открытые точки)

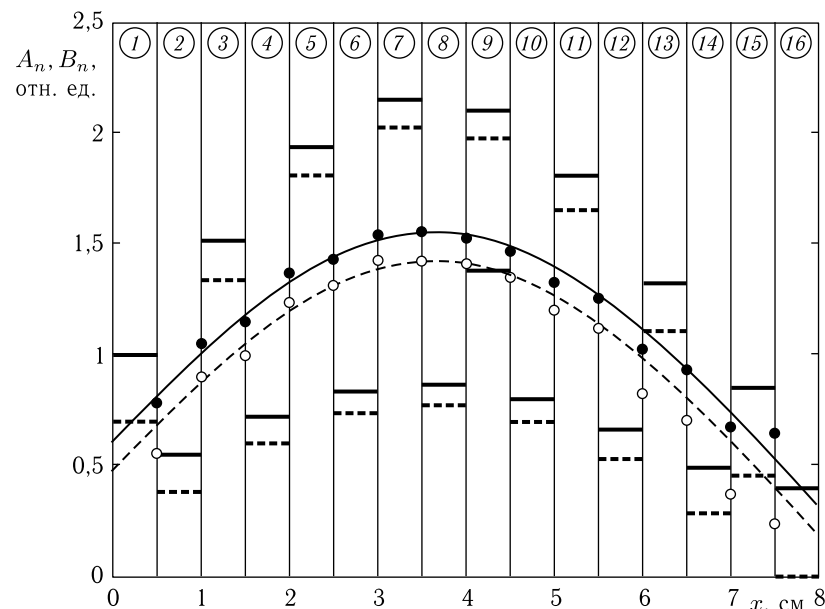


Рис. 4.7. Зависимости амплитуд волн прямого (сплошные линии и закрытые точки) и обратного (пунктирные линии и открытые точки) направлений от координаты в различных слоях структуры. Кривые построены по формулам (4.13) и (4.14). Волновые числа:  $k_c = 2,15 \text{ см}^{-1}$ ,  $k_p = 1,00 \text{ см}^{-1}$ ,  $k_s = 3,30 \text{ см}^{-1}$

направлений от координаты в различных слоях структуры. Рисунок построен при отклонении значений волновых чисел в слоях от среднего значения на 53,4%. Укрупненные точки являются результатами машинного эксперимента и построены как середины перепадов между амплитудами волн в соседствующих слоях. Сплошная кривая построена по эмпирической формуле

$$A_n = 0,95 \sin(0,43x) + 0,60, \quad (4.13)$$

пунктирная кривая построена по формуле

$$A_n = 0,95 \sin(0,43x) + 0,48. \quad (4.14)$$

Из рисунка видно, что, как и при синусоидальном режиме, частоты и фазы обеих кривых совпадают, здесь же совпадают также и амплитуды, а различаются только постоянные составляющие, причем всего на 11% от среднего значения (0,54). То есть зависимости амплитуд волн обоих направлений от координаты, в отличие от синусоидального режима, почти совпадают. Если принять наблюдаемую половину синусоиды за половину периода осцилляций, то можно видеть, что здесь он равен  $P_m = 14,50$  см и одинаков для волн обоих направлений.

**Режим № 3** — линейный спад амплитуды.

В этом режиме амплитуда по координате спадает линейным образом. Типичная картина распределения амплитуд для такого режима иллюстрируется рис. 4.8, где показаны зависимости амплитуд волн прямого (сплошные линии и сплошные точки) и обратного (пунктирные линии и открытые точки) направлений от координаты в различных слоях структуры. Рисунок построен при отклонении значений волновых чисел в слоях от среднего значения на 54,6%. Жирные точки являются результатами машинного эксперимента и построены как середины перепадов между амплитудами волн в соседствующих слоях. Сплошная линия построена по эмпирической формуле

$$A_n = 0,725 - 0,0812x, \quad (4.15)$$

пунктирная построена по формуле

$$B_n = 0,725 - 0,0906x. \quad (4.16)$$

Из рисунка видно, что в этом режиме линии, проведенные через экспериментальные точки, являются прямыми, вследствие чего режим назван «линейным».

В отличие от синусоидального и полусинусоидального режимов здесь какая-либо периодичность зависимостей полностью отсутствует, постоянные составляющие для волн обоих направлений совпадают, а угловые коэффициенты прямых слегка различаются, хотя и незначительно — всего на 11,8% от среднего значения (0,0859). Зависимости

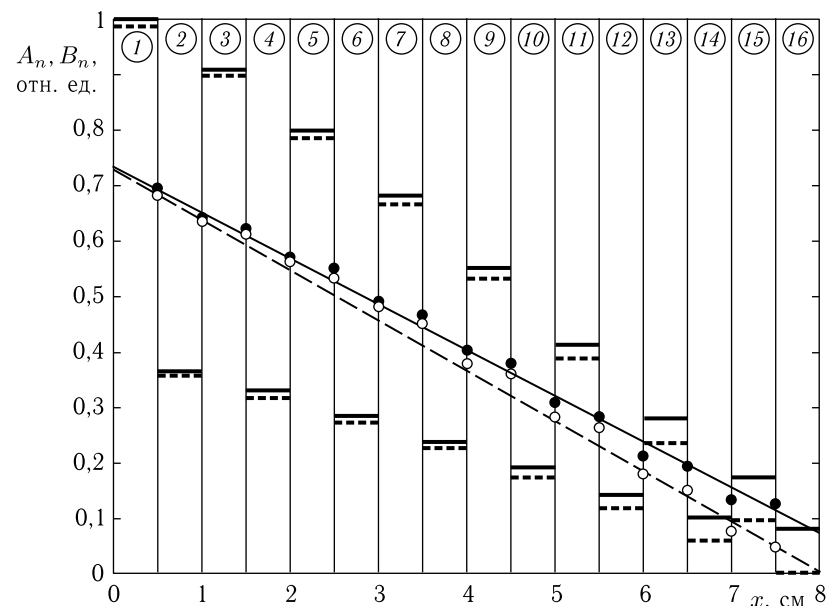


Рис. 4.8. Зависимости амплитуд волн прямого (сплошные линии и жирные точки) и обратного (пунктирные линии и открытые точки) направлений от координаты в различных слоях структуры. Прямые построены по формулам (4.15) и (4.16). Волновые числа:  $k_c = 2,20 \text{ см}^{-1}$ ,  $k_p = 1,00 \text{ см}^{-1}$ ,  $k_s = 3,40 \text{ см}^{-1}$

амплитуд волн того и другого направлений от координаты при малых номерах слоев (до 10) практически совпадают (с точностью до 10%) и только при слоях с номерами 14 и 15, то есть вблизи конца структуры, достигают 30%.

#### Режим № 4 — экспоненциальный спад амплитуды.

В этом режиме амплитуда колебаний по координате спадает сначала резко, а потом более плавно. С достаточной точностью такой спад можно приблизить экспонентой, благодаря чему этот режим назван «экспоненциальным». Типичная картина распределения амплитуд для такого режима иллюстрируется рис. 4.9, где показаны зависимости амплитуд волн прямого и обратного направлений от координаты в различных слоях структуры. Амплитуды волн прямого и обратного направлений в каждом слое попарно совпадают друг с другом с точностью в доли процента, поэтому приведенные на рисунке амплитуды, точки и приближающая кривая соответствуют волнам как того, так и другого направлений в равной степени. Рисунок построен при отклонении значений волновых чисел в слоях от среднего значения на 56,5%. Спадающая кривая построена по эмпирической формуле

$$A_n, B_n = 0,84 \cdot \exp(-0,50x). \quad (4.17)$$

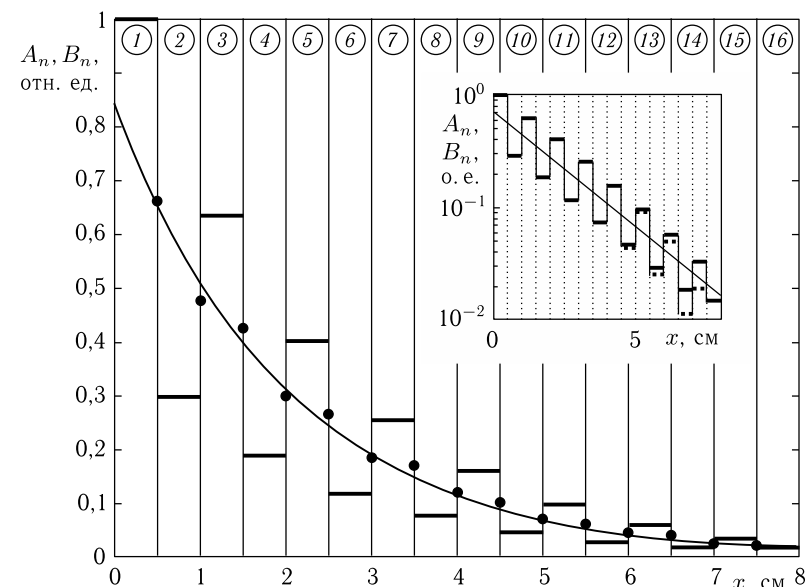


Рис. 4.9. Зависимости амплитуд волн прямого и обратного направлений (совпадают) от координаты в различных слоях структуры. Спадающая кривая построена по формуле (4.17). Волновые числа:  $k_c = 2,30 \text{ см}^{-1}$ ,  $k_p = 1,00 \text{ см}^{-1}$ ,  $k_s = 3,60 \text{ см}^{-1}$

На врезке — те же зависимости в логарифмическом масштабе по вертикальной оси. Сплошные горизонтальные линии соответствуют  $A_n$ , пунктирные —  $B_n$ . Видно, что здесь, начиная с  $x = 5 \text{ см}$ , они несколько различаются тем сильнее, чем больше  $x$ . Такое различие обусловлено растягивающим действием логарифмического масштаба при малых амплитудах.

Из рисунка видно, что в логарифмическом масштабе (врезка) зависимость амплитуд от координаты с высокой точностью (доли процента) представляет собой прямую линию, что говорит о хорошем приближении экспериментальных данных спадающей экспонентой, что оправдывает название режима. В этом режиме зависимости амплитуд волн обоих направлений от координаты практически полностью совпадают.

Дополнительное исследование показывает, что спад экспоненты при увеличении отношения волновых чисел от  $k_s/k_p = 3,6$  до 5,00 увеличивается, причем коэффициент при переменной в ее показателе меняется в пределах от  $-0,50$  до  $-1,50$ . В остальном характер режима полностью сохраняется.

**Режим № 5** — синусоидальные колебания амплитуды с верхним пределом.

В этом случае распределение амплитуды колебаний по координате, как и при режиме № 1, имеет вид довольно правильной синусоиды,



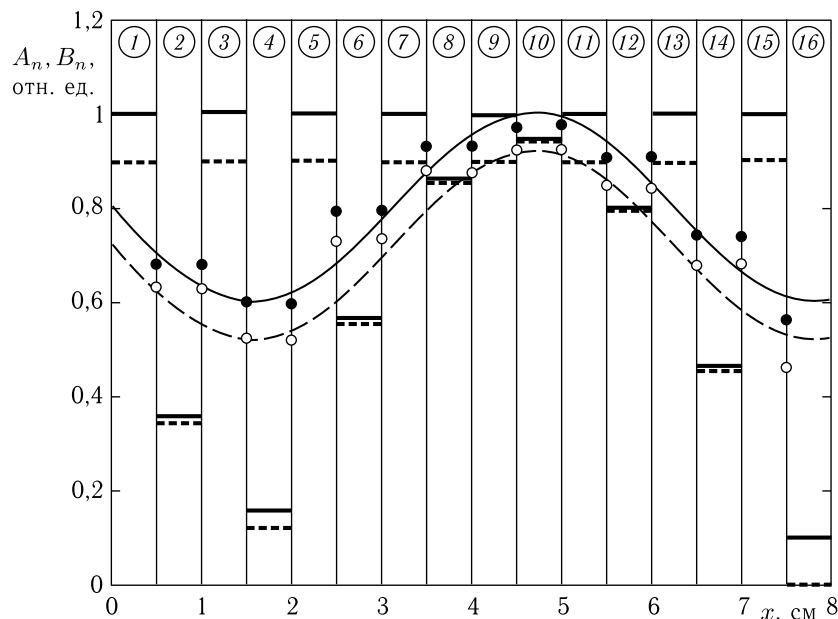


Рис. 4.10. Зависимости амплитуд волн прямого (сплошные линии и закрытые точки) и обратного (пунктирные линии и открытые точки) направлений от координаты в различных слоях структуры. Сплошная кривая построена по формуле (4.18), пунктирная — по формуле (4.19). Волновые числа:  $k_c = 9,93 \text{ см}^{-1}$ ,  $k_p = 1,00 \text{ см}^{-1}$ ,  $k_s = 18,86 \text{ см}^{-1}$

однако здесь все амплитуды ограничены сверху определенным значением, единым для всех слоев. Благодаря такому ограничению в названии режима присутствует формулировка «с верхним пределом». Типичная картина распределения амплитуд для такого режима иллюстрируется рис. 4.10, где показаны зависимости амплитуд волн прямого (сплошные линии и жирные точки) и обратного (пунктирные линии и открытые точки) направлений от координаты в различных слоях структуры. Рисунок построен при отклонении значений волновых чисел в слоях от среднего значения на 89,9%. Жирные точки являются результатами машинного эксперимента и построены как середины перепадов между амплитудами волн в соседствующих слоях. Сплошная синусоидальная кривая построена по формуле

$$A_n = -0,20 \sin(x) + 0,80, \quad (4.18)$$

пунктирная — по формуле

$$B_n = -0,20 \sin(x) + 0,72. \quad (4.19)$$

Из рисунка видно, что в этом режиме синусоидальные кривые ведут себя подобно таковым при режиме № 1, причем здесь они совпадают не только по фазе, но и по амплитуде. Период осцилляций составляет 6,28 см, что соответствует изменению аргумента синуса на  $2\pi$ . Однако соответствие между упомянутыми кривыми и экспериментальными точками здесь несколько хуже, чем при режиме № 1, и в ряде слоев отклонение достигает 10%.

Амплитуды колебаний в слоях с четными и нечетными номерами ведут себя существенно различным образом. Так, амплитуды для нечетных слоев все ограничены сверху одним и тем же значением, для волн прямого направления близким к единице, а для волн обратного направления — близким к величине 0,90 отн. ед. Амплитуды волн в четных слоях везде меньше этих значений. Исключение составляет только амплитуда волны обратного направления в слое № 10, где она равна 0,94 отн. ед., что, впрочем, отличается от основного значения всего на 4,4%, то есть весьма незначительно.

Причина отмеченного несколько неполного соответствия синусоидальных кривых экспериментальным точкам состоит в равенстве перепадов между амплитудами соседствующих слоев для слоев с четными номерами.

#### 4.5.3. Интервалы существования различных режимов

При увеличении соотношения между волновыми числами составляющих структуру сред в пределах  $k_s/k_p \leq 5,00$  описанные выше режимы № 1–№ 4 по очереди сменяют друг друга следующим образом: при  $2,00 \leq k_s/k_p \leq 3,20$  имеет место синусоидальный режим № 1; при  $3,20 \leq k_s/k_p \leq 3,35$  — полусинусоидальный № 2; при  $3,35 \leq k_s/k_p \leq 3,50$  — линейный № 3; при  $3,50 \leq k_s/k_p \leq 5,00$  — экспоненциальный № 4.

Далее наблюдаются широкие интервалы господства экспоненциального режима № 4, перемежаемые относительно узкими «островками» синусоидального режима № 5, где амплитуды ограничены верхним пределом. Так,

при  $3,50 \leq k_s/k_p \leq 6,28$  в интервале 2,78 наблюдается режим № 4;

при  $6,28 \leq k_s/k_p \leq 8,20$  в интервале 1,92 — режим № 5;

при  $8,20 \leq k_s/k_p \leq 12,50$  в интервале 4,30 — режим № 4;

при  $12,50 \leq k_s/k_p \leq 13,20$  в интервале 0,70 — режим № 5;

при  $13,20 \leq k_s/k_p \leq 18,80$  в интервале 5,60 — режим № 4 и т. д.

Как видим, интервалы существования режима № 5 заметно короче интервалов режима № 4, причем с увеличением отношения  $k_s/k_p$  интервалы режима № 5 сужаются.

Границы между всеми режимами являются плавными, какие-либо скачки отсутствуют, однако интервалы изменения режимов, как правило, значительно короче интервалов, где режимы существуют в устойчивом виде.

Из сравнения величин интервалов существования режимов по величине  $k_s/k_p$  при  $k_s/k_p \leq 5,00$  можно видеть, что наиболее протяженными, то есть основными режимами являются синусоидальный и экспоненциальный, занимающие интервалы 1,20 и 1,50 относительных единиц соответственно, тогда как на долю полусинусоидального и линейного режимов приходится интервалы всего по 0,15 относительных единиц. То есть основными режимами являются синусоидальный и экспоненциальный, а режимы полусинусоидальный и линейный — переходными.

#### 4.5.4. Динамика переходов между режимами

Рассмотрим теперь, как именно происходят переходы между режимами по мере увеличения отношения волновых чисел. Начнем с синусоидального режима как соответствующего наименьшему отношению  $k_s/k_p$ . Характерным свойством этого режима является период описывающей его синусоиды. Рассмотрим рис. 4.11, где показана зависимость периода синусоидальной модуляции от отношения волновых чисел барьера и промежутка  $k_s/k_p$ .

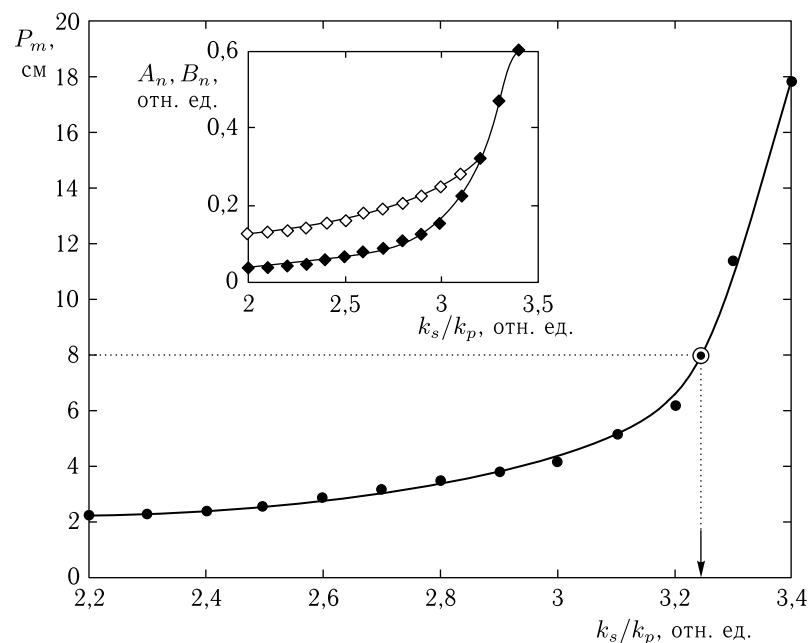


Рис. 4.11. Зависимость периода синусоидальной модуляции от отношения волновых чисел барьера и промежутка. На врезке — зависимости максимальной амплитуды синусоиды (по половине максимального размаха) от отношения волновых чисел. Сплошные точки — волны прямого направления, открытые — обратного

Из рисунка видно, что по мере увеличения этого отношения период увеличивается тем быстрее, чем больше отношение волновых чисел становится ближе к величине  $k_s/k_p = 3,2$ , при которой длина периода сравнивается с полной длиной структуры, в данном случае равной 8 см. Горизонтальная точечная линия, упирающаяся в укрупненную точку, соответствует как раз полной длине структуры. Опущенный из этой точки перпендикуляр на горизонтальную ось приходится на  $k_s/k_p = 3,24$ . Можно видеть, что правее этой точки период еще продолжает увеличиваться, однако теперь уже на длине структуры укладывается только часть периода.

На том же рис. 4.11 на врезке приведены зависимости максимальной амплитуды синусоиды (по половине максимального размаха) от отношения волновых чисел. Такой максимальный размах наблюдается где-то вблизи середины структуры. Из рисунка видно, что при  $k_s/k_p \leq 3,24$  максимальная амплитуда волн обратного направления превышает такую же амплитуду волн прямого направления приблизительно в два раза (как это и наблюдается на рис. 4.6), однако при  $k_s/k_p \geq 3,24$  амплитуды волн обоих направлений сравниваются между собой тем точнее, чем отношение  $k_s/k_p$  больше.

Синусоидальный режим существует в интервале отношения волновых чисел  $2,00 \leq k_s/k_p \leq 3,20$ . Нижняя граница этого интервала определяется тем, что период модуляции приближается к суммарной толщине двух соседствующих слоев, то есть сравнивается с периодом самой структуры. Верхняя граница соответствует увеличению периода модуляции выше полной длины структуры, то есть ситуации, когда на длине структуры период уже не укладывается.

Эволюция изменения характера синусоиды при увеличении отношения  $k_s/k_p$  состоит в сдвиге ее по фазе в сторону меньших значений координаты  $x$ , причем этот сдвиг сопровождается увеличением величины периода до такой степени, что на всей длине структуры помещается только один полупериод синусоиды. При этом амплитуда остающегося полупериода увеличивается настолько, что превышает амплитуду падающей волны благодаря наступающему пространственному резонансу (на длине структуры укладывается половина длины волны модуляции). При таком увеличении отношения  $k_s/k_p$  (то есть выше величины  $k_s/k_p \approx 3,2$ ) синусоидальный режим сменяется полусинусоидальным, после чего линейным, а затем экспоненциальным.

Схема такой последовательной смены режимов иллюстрируется рис. 4.12, к рассмотрению которого переходим.

Основной общей тенденцией изменения зависимостей  $A_n$  и  $B_n$  при увеличении  $k_s/k_p$  является смещение кривых в сторону меньших значений координаты, то есть влево по рисунку. Стрелками показаны направления смещения отдельных участков кривых.

В синусоидальном режиме (а) положительный полупериод синусоиды ABC смещается в левую сторону, одновременно расширяясь. При этом участок АВ смещается сильнее, чем участок ВС, который

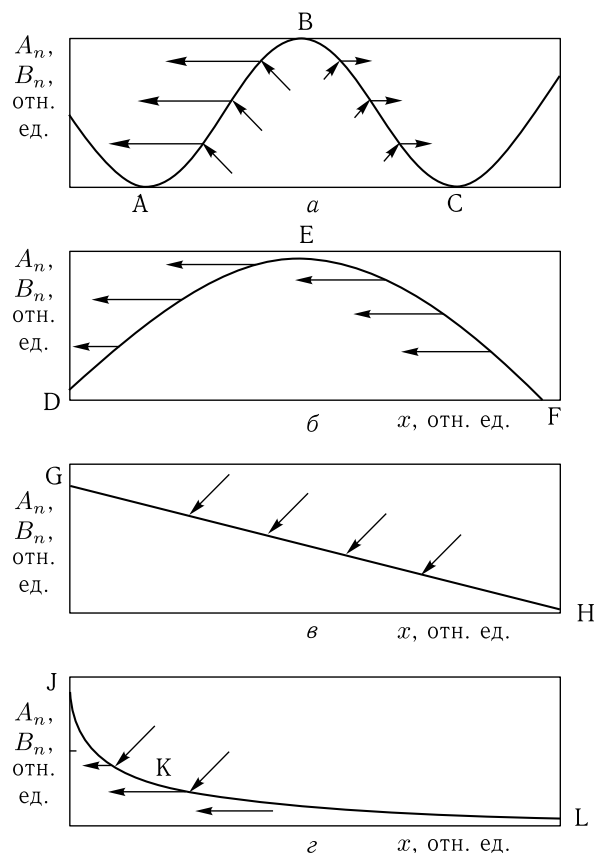


Рис. 4.12. Схема переходов между режимами. Масштаб не соблюден, единицы по осям — условные:  $a$  — режим синусоидальный;  $b$  — режим полусинусоидальный;  $в$  — режим линейный;  $г$  — режим экспоненциальный

от него несколько отстает. В результате на всем протяжении структуры остается только один положительный полупериод синусоиды, что соответствует переходу к режиму полусинусоидальному ( $b$ ), то есть кривая ABC трансформируется в кривую DEF. Далее вся эта кривая опять смещается влево с одновременным расширением, в результате чего участок DE уходит за левый край рисунка, а участок EF, также смещаясь влево, распрямляется, трансформируясь в прямую линию GH линейного режима ( $в$ ). Далее участки линии GH продолжают смещаться влево, в результате чего плоская часть кривой GH проваливается и прямая трансформируется в убывающую экспоненту, то есть наступает экспоненциальный режим ( $г$ ). При дальнейшем увеличении отношения  $k_s/k_p$  участок экспоненты JK стремится к вертикальной оси,

а участок KL — к горизонтальной, то есть показатель экспоненты постепенно увеличивается.

Более подробное рассмотрение описанного поведения приведенных зависимостей показало, что рост амплитуды при увеличении  $k_s/k_p$ , отмеченный на врезке в рис. 4.11, имеет место только до того момента, когда синусоидальный режим полностью перейдет в полусинусоидальный, после чего при дальнейшем увеличении  $k_s/k_p$  амплитуды колебаний в слоях спадают. Такой спад амплитуды объясняется выходом системы из условий отмеченного выше пространственного резонанса. Заметим, что, несмотря на отсутствие затухания в данном рассмотрении, амплитуда колебаний при пространственном резонансе остается конечной, что наводит на мысль об аналогии рассматриваемых явлений с колебаниями закрепленной на концах механической струны.

**Замечание.** Заметим, что в условиях настоящего исследования распространения такой аналогии на моды выше первой обнаружено не было, то есть явно выраженные пространственные резонансы при укладывании на длину структуры двух и более полуволен не наблюдались. Возможной причиной такого обстоятельства может быть недостаточное число слоев, составляющих структуру (здесь — шестнадцать). При этом форма пространственной моды, в отличие от непрерывной струны, где она плавная, здесь получается ступенчатой, причем узлы стоячих мод могут приходиться на внутренние участки ступенек, то есть синусоидальная структура мод получается как бы состоящей из «крупных клеток», затрудняющих точную идентификацию. Таким образом, в качестве рекомендации для обнаружения пространственных мод более высоких порядков можно указать на необходимость увеличения числа слоев структуры хотя бы до нескольких десятков.

#### 4.5.5. Структура областей существования режимов по волновому числу

Описанные переходы между режимами хорошо наблюдаются при  $k_s/k_p \leq 5,00$ . При  $k_s/k_p \geq 5,00$  переходы между режимами № 4 и № 5 также являются плавными и происходят через посредство режимов № 2 и № 3 в прямом или обратном порядке, однако интервалы этих переходов становятся крайне узкими, не более 0,10, причем по мере увеличения отношения  $k_s/k_p$  далее сужаются. Рассмотрим чередование режимов № 4 и № 5 при увеличении  $k_s/k_p$  более подробно.

### 4.6. Отражающие свойства структуры

Естественно предположить, что при увеличении различия между волновыми числами составляющих структуру слоев, отражение от структуры в целом должно увеличиваться, так как ее неоднородность при этом возрастает.

Поэтому сначала обратимся к волне обратного направления  $B_{01}$  в слое № 1, характеризующей отражающие свойства структуры в целом. Для этого рассмотрим рис. 4.13, где показана зависимость амплитуды волны обратного направления  $B_{01}$  от волнового числа  $k_s$  при  $k_p = 1,00 \text{ см}^{-1}$ .

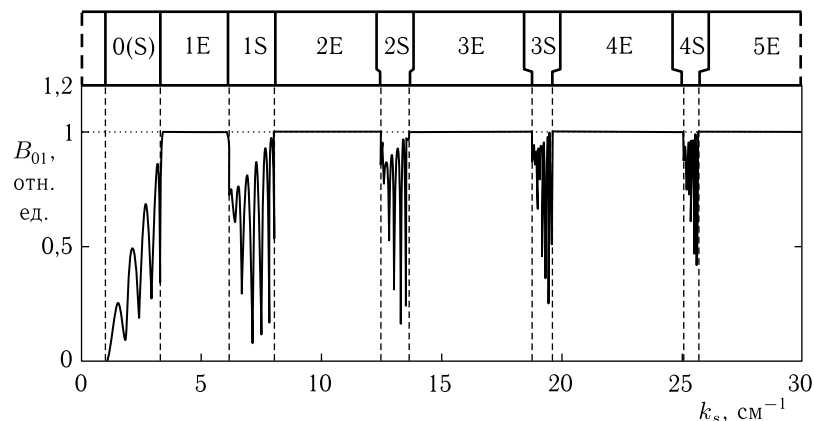


Рис. 4.13. Зависимость амплитуды волны обратного направления в слое № 1 от волнового числа  $k_s$  при  $k_p = 1,00 \text{ см}^{-1}$ . Полная длина структуры — 8 см, толщины слоев — 0,5 см, число слоев — 16. В верхнем ряду — схема расположения областей существования по волновому числу  $k_s$  режимов экспоненциального (E) и синусоидального (S).

Из рисунка видно, что на упомянутой зависимости действительно имеются довольно широкие области, где  $B_{01} = 1,00$ , то есть волна от структуры полностью отражается. Эти области обозначены как 1E, 2E, 3E и так далее, где цифра обозначает порядковый номер области, а буква «E» — экспоненциальный характер распределения амплитуды по слоям структуры, то есть режим № 4.

Однако, наряду с областями полного отражения, имеются области, где  $B_{01}$  значительно уменьшается, причем зависимость  $B_{01}$  от  $k_s$  имеет осциллирующий характер. Эти области обозначены как 1S, 2S, 3S, ..., где цифра означает порядковый номер области, а буква «S» — синусоидальный с верхним пределом характер распределения амплитуды по слоям структуры, то есть режим № 5.

Малым значениям волнового числа  $k_s$  соответствует область 0(S), где характер распределения амплитуд является синусоидальным, но верхнего предела не имеет, что соответствует режиму № 1.

Начала областей синусоидального режима соответствуют следующим волновым числам: 1S —  $k_s = 6,28 \text{ см}^{-1}$ ; 2S —  $k_s = 12,57 \text{ см}^{-1}$ ; 3S —  $k_s = 18,85 \text{ см}^{-1}$ ; 4S —  $k_s = 25,13 \text{ см}^{-1}$ , то есть выполняется соотношение  $k_s^{(N)} = 2\pi \cdot N$ , где  $N$  — номер соответствующей области.

Можно полагать, что существование подобных чередующихся областей связано с пространственным резонансом волны на длине слоя. То есть синусоидальный режим № 5 наступает тогда, когда на толщине слоя укладывается половина длины волны. Действительно, при толщине слоя 0,5 см, если полагать, что эта толщина соответствует половине длины волны, то полная длина волны равна  $\lambda = 1,0 \text{ см}$ , то есть волновое число при этом равно:  $k = 2\pi/\lambda = 6,2832 \text{ см}^{-1}$ , что как раз соответствует волновому числу  $k_s$  в начале области 1S. Если на толщине слоя укладывается две полуволны, то  $\lambda = 0,5 \text{ см}$ , что соответствует  $k = 12,5664 \text{ см}^{-1}$ , то есть  $k_s$  в начале области 2S. Следующая область 3S соответствует укладыванию на толщине слоя трех полуволн и так далее.

Заметим, что речь идет о тех слоях структуры, где волновое число равно именно  $k_s$ , так как в других слоях волновое число  $k_p$  — другое, то есть резонанс в этих слоях не возбуждается. При этом в силу геометрии задачи слои, где волновое число равно  $k_s$ , имеют четные номера, а слои, где волновое число равно  $k_p$ , — нечетные. То есть резонансными слоями являются именно четные, а нечетные являются лишь связующими звеньями между резонансными. Таким образом структура в целом представляет собой многорезонаторную систему, состоящую из цепочки резонаторов, связанных нерезонансными звеньями.

Осциллирующий характер зависимостей амплитуды волны  $B_{01}$  от  $k_s$  внутри резонансных областей 1S, 2S, 3S и так далее, по-видимому, обусловлен взаимодействием связанных колебаний в соседних слоях структуры, обладающих одинаковыми резонансными свойствами, то есть имеет место расщепление общей резонансной кривой, свойственное многорезонаторной системе.

Наблюдаемое сужение резонансных областей по мере увеличения  $k_s$ , по-видимому, связано с уменьшением эффективности возбуждения резонансных мод по мере увеличения их номера (с уменьшением «интеграла перекрытия»).

Таким образом, отражающие свойства рассматриваемой многослойной структуры подобны свойствам классической многорезонаторной системы, где роль частоты играет волновое число, в результате чего частотный резонанс проявляется как пространственный резонанс по координате.

Отметим, что, в отличие от классического резонанса, предполагающего высокую амплитуду в резонансных условиях, здесь при выполнении условий резонанса, то есть равенства целого числа полуволн толщине слоя, амплитуда в резонансных слоях (четных) получается меньшей, чем в нерезонансных (нечетных), что в той или иной степени наблюдается во всех режимах. Таким образом, резонансный слой как бы «выталкивает из себя» энергию колебаний, или благодаря кратности своей длины целому числу полуволн, при попадании в него распространяющейся волны стремится передать эту энергию дальше, не накапливая ее в себе самом.

### 4.7. Пропускающие свойства структуры

Обратимся теперь к рассмотрению пропускающих свойств той же структуры. При рассмотрении рис. 4.10 уже отмечалась сильно различающаяся роль четности и нечетности номера слоя. Так, амплитуды волн прямого направления в двух последних слоях равны:  $A_{15} = 1,00$ ,  $A_{16} = 0,10$ , то есть отличаются на порядок. Поэтому далее рассмотрим поведение амплитуд указанных волн в обоих этих слоях, иллюстрируемое рис. 4.14.

Из рисунка видно, что общая структура по волновому числу границ областей максимумов амплитуды прямых волн для обоих слоев совпадает со структурой минимумов обратных волн для слоя № 1, приведенной на рис. 4.13.

То есть при тех значениях волнового числа, где в слое № 1 наблюдается уменьшение амплитуды, здесь в слоях № 15 и 16 наблюдается ее увеличение. В этих интервалах волнового числа имеет место соответственно режим № 5 — синусоидальный с верхним пределом. Между этими интервалами имеет место режим № 4 — экспоненциальный со спадом амплитуды по координате, при котором амплитуды волн в слоях № 15 и 16 близки к нулю.

В областях существования режима № 5 амплитуда волн в слое № 15, всегда будучи большей единицы, по мере увеличения  $k_s$  возрастает, тогда как в слое № 16, будучи меньшей единицы, соответственно убывает. Так, в области 1S при  $k_s \approx 7 \text{ см}^{-1}$  амплитуда  $A_{15}$  составляет около 1,52 отн. ед., а амплитуда  $A_{16} = 0,36$  отн. ед., тогда как в области 4S при  $k_s \approx 25,4 \text{ см}^{-1}$  эти же величины соответственно равны:  $A_{15} = 2,37$  отн. ед. и  $A_{16} = 0,20$  отн. ед. То есть с увеличением волнового числа различие между амплитудами в соседствующих слоях растет.

Резонансным размером здесь обладает слой № 16 (четный), так что можно полагать, что по мере увеличения числа укладываемых на его длине полуволн, условия резонанса становятся более критичными, то есть резонансная линия сужается, вызывая соответствующее усиление свойства «выталкивания» энергии из резонансного слоя, отмеченного при разборе рис. 4.13. Такое «выталкивание» и приводит к уменьшению амплитуды в слое № 16 с соответствующим увеличением в слое № 15.

Тонкая структура изрезанности рассматриваемых зависимостей в областях существования режима № 4, надо полагать, обусловлена теми же причинами, что и подобная структура для волны  $B_{01}$ , то есть расщеплением резонансной характеристики за счет сильной связи нескольких резонаторов в многорезонаторной системе.

#### 4.7.1. Замечание о частотных свойствах структур с периодическими неоднородностями

Здесь рассмотрены зависимости амплитуд волн обоих направлений от волнового числа, что не ограничивает общности задачи в том плане, что ее решение с частотой волны напрямую никак не связано. В то же

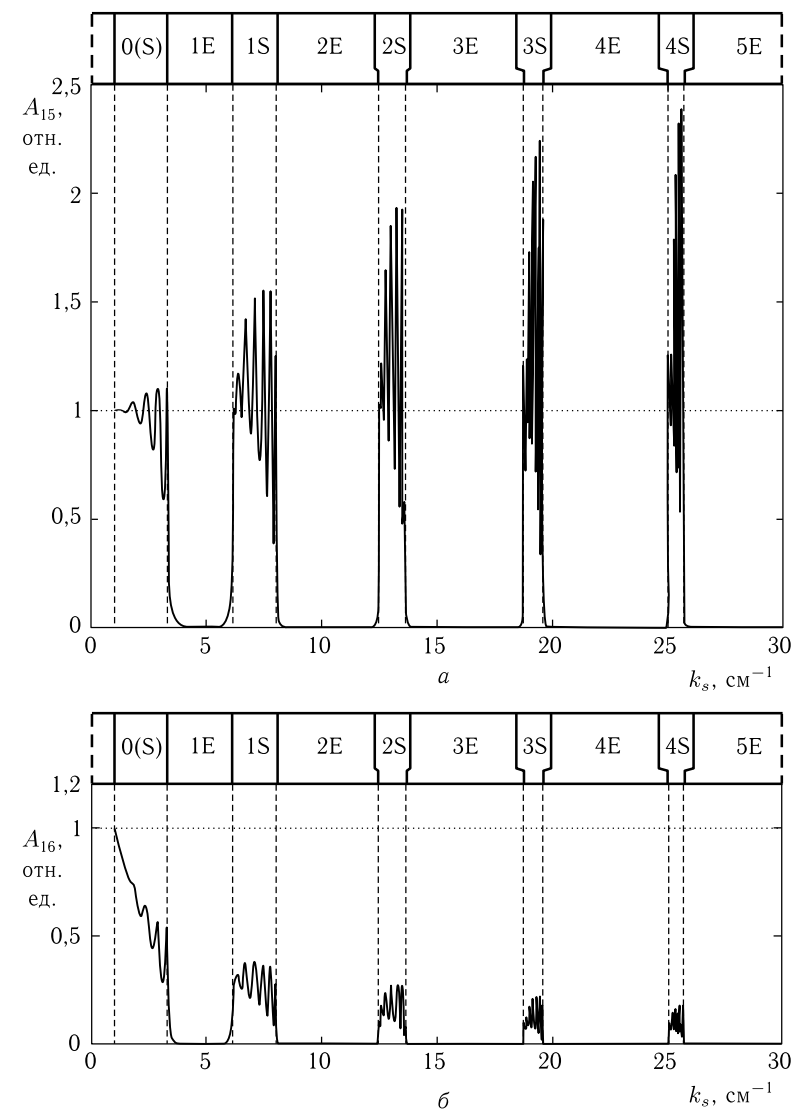


Рис. 4.14. Зависимости амплитуд волн прямого направления в слоях № 15 (а) и № 16 (б) от волнового числа  $k_s$  при  $k_p = 1,00 \text{ см}^{-1}$ . Все параметры совпадают с приведенными на предыдущем рисунке

время, как известно (см. напр. [133] и множество других учебников), волновое число волны, распространяющейся в какой-то среде, связано с частотой той же волны дисперсионным соотношением, которое в общем случае является нелинейным.

Однако в частном случае сред с линейной дисперсией, волновое число и частота прямо пропорциональны друг другу, в результате чего зависимости, полностью подобные показанным на рис. 4.2–4.6, будут не только от волнового числа, но также и от частоты, что может быть особенно важным для построения частотноселективных систем.

### Выводы по главе 4

Данная глава посвящена описанию распространения одномерных волн через структуры с периодическими неоднородностями меандрового и пилообразного видов. Получены распределения амплитуд волн по слоям структуры, выявлены различные режимы распределений.

Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрено распространение волн прямого и обратного направлений в структуре ограниченной длины с периодической неоднородностью меандрового вида. Получены амплитуды волн в крайних слоях структуры. Показано, что амплитуды волн как прямого, так и обратного направлений распространения имеют ярко выраженные особенности в случае, когда на длине периода структуры укладывается одна половина длины волны. По обе стороны от главного максимума обнаружены осцилляции, обусловленные интерференционными явлениями за счет конечности общего числа барьеров структуры, причем при увеличении количества барьеров амплитуды осцилляций уменьшаются, а главный максимум сужается.

2. Выявлен эффект «вторичной модуляции», состоящий в периодической осцилляции амплитуд отраженной и проходящей волн при изменении среднего волнового числа. Высказано предположение, что причиной вторичной модуляции является чередование пространственных резонаторов, образованных периодически повторяющимися участками структуры с различными свойствами.

3. Исследованы амплитуды волн прямого и обратного направлений при изменении координаты или номера слоя структуры, а также среднего волнового числа. Выявлен монотонно спадающий характер амплитуды волн обратного направления в сочетании с осциллирующим спадом амплитуды волн прямого направления, объясненный сочетанием постепенного просачивания волны через структуру с убыванием энергии волны в полосе непропускания и сохранением ее энергии вне такой полосы.

4. Рассмотрено распространение волн в условиях неоднородности пилообразного вида, в том числе влияние структуры зубца «пилы». Показано, что пилообразная неоднородность на амплитудах распространяющихся волн сказывается значительно слабее, чем меандровая (приблизительно в полтора-два раза), причем тонкая структура «зубца» пилы проявляется тем слабее, чем ближе его длина приближается к длине барьера меандра. Рассмотрено распределение амплитуд в случае большого (до нескольких раз) изменения соотношения между волновыми числами двух видов сред, составляющих структуру.

5. На основе периодической структуры в виде симметричного меандра выявлена сильная зависимость распределения амплитуд в слоях от координаты, соответствующей продольному размеру структуры, интерпретированная как пространственная модуляция амплитуды.

6. В характере пространственной модуляции выявлены пять основных режимов: синусоидальный, полусинусоидальный, линейный, экспоненциальный и синусоидальный с верхним пределом. Показано, что по мере увеличения отношения волновых чисел в слоях того и другого вида эти режимы сменяют друг друга последовательно. При этом основными режимами являются синусоидальный и экспоненциальный, интервалы существования которых значительно (в несколько раз) превышают интервалы существования режимов линейного и полусинусоидального, которые по существу являются переходными между двумя основными.

7. Полусинусоидальный режим интерпретирован как соответствующий резонансу, при котором на полной длине структуры укладывается половина длины волны пространственной модуляции амплитуды.

8. Синусоидальный режим с верхним пределом интерпретирован как соответствующий резонансу, при котором на толщине одного слоя укладывается целое число полуволн распространяющейся волны. При этом на зависимости амплитуд волн от большего волнового числа из двух видов слоев имеет место периодическое расположение областей упомянутого режима. Показано, что такая зависимость имеет вид широких областей экспоненциального режима, перемежающихся периодически расположенными узкими областями синусоидального режима с верхним пределом, причем соотношение протяженностей областей, соответствующих этим двум режимам, может достигать нескольких раз и увеличивается по мере увеличения волнового числа. Отмечено, что зависимость амплитуд от волнового числа в областях синусоидального режима с верхним пределом имеет осциллирующий характер.

9. На основе рассмотрения распространения волн прямого и обратного направлений в отдельных слоях исследованы отражающие и пропускающие свойства структуры в целом. Показано, что в областях экспоненциального режима структура практически полностью отражает падающую волну. В областях синусоидального режима с верхним пределом отражение падает до нескольких раз, а пропускание волны в случае нечетного числа слоев может приближаться к полному, тогда в случае четного уменьшается относительно амплитуды падающей волны почти на порядок.

10. В качестве возможного объяснения наблюдаемых особенностей пространственной модуляции амплитуды волн в слоях многослойной структуры предложена аналогия с многорезонаторной системой, представляющей собой цепочку последовательно соединенных связанных резонаторов.

11. Рассмотренные свойства многослойных структур обобщены на случай линейной дисперсии волн. Дана рекомендация использования исследованных структур для построения частотноселективных систем.

## Глава 5

### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АЛГОРИТМА ДЛЯ РАСЧЕТА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Глава посвящена описанию применения метода полного пошагового алгоритма для расчета распространения электромагнитных волн через структуры, содержащие периодические неоднородности меандрового вида. Приведены частотные зависимости амплитуд волн прямого и обратного направлений, а также отмечена трансформация частотных характеристик при изменении числа барьеров. Исследовано распределение амплитуд волн во внутренних слоях структуры, выявлены два главных вида распределения — синусоидальное и экспоненциальное. Для широкого диапазона частот введены определения сильной и слабой неоднородностей и получен критерий перехода между ними. Рассмотрена трансформация частотных зависимостей в широком интервале изменения соотношения проницаемостей слоев.

В главе частично использованы материалы монографий [65], [25, стр. 27–29] [56–63, 148–182], а также статей [68, 73, 76, 96–99, 103]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

#### 5.1. Геометрия задачи

Геометрия задачи аналогична приведенной в разделе 4.1 на рис. 4.1 для случая одномерной волны [96]. Рассматривается симметричная меандровая структура, то есть такая, в которой неоднородность по координате представляет собой периодически расположенные одинаковые прямоугольные барьеры с одинаковыми промежутками между ними. Для удобства обращения схема геометрии приведена повторно на рис. 5.1. Отличие от рис. 4.1 состоит в использовании электродинамических параметров барьеров и адмиттансов вместо волновых чисел [97].

Структура содержит два вида сред, обозначаемых далее индексами «*p*» и «*s*», каждый из которых имеет собственные значения диэлектрических  $\varepsilon_p$ ,  $\varepsilon_s$  и магнитных  $\mu_p$ ,  $\mu_s$  проницаемостей, а также прово-

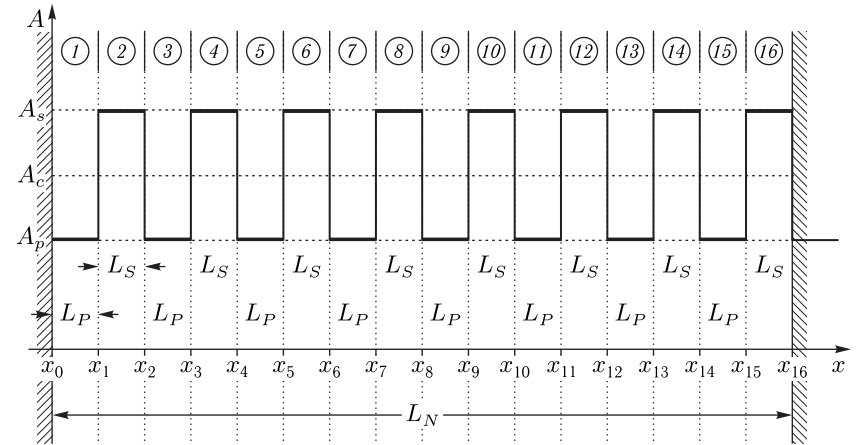


Рис. 5.1. Общая схема многослойной структуры с периодической неоднородностью для задачи о распространении электромагнитных волн. Цифры в кругах — номера слоев (сред)

димостей  $\sigma_p$ ,  $\sigma_s$ . Отложенные по вертикальной оси обозначения  $A_{p,s,c}$  соответствуют адмиттансам сред и поясняются далее. Остальные обозначения подобны приведенным в разделе 4.1 и ясны из рисунка.

#### 5.2. Обобщение постановки задачи на случай электромагнитных волн

В главе 4 [96] рассмотрение проведено на основе волнового числа, которое для одномерной волны является определяющим параметром. Для электромагнитной волны с прикладной стороны более важным параметром является частота, поэтому проведем дальнейшее рассмотрение, опираясь именно на частоту падающей волны. Для перехода от одномерной волны к электромагнитной воспользуемся правилами эквивалентности, приведенными в работах [37–39].

В настоящем рассмотрении для простоты ограничимся случаем нормального падения волны, не требующим учета сложных угловых соотношений. Будем полагать, что все среды однородны и изотропны, то есть диэлектрическая и магнитная проницаемости, а также проводимость везде являются постоянными скалярными величинами.

##### 5.2.1. Введение электродинамических параметров

Согласно [57, 58, 75], а также [1, стр. 153–154, табл. 3.1], для введения электродинамических параметров достаточно во всех выражениях, полученных для одномерной волны, кроме показателей экспонент, заменить волновые числа величинами, обратными соответствующим импедансам:

$$k_n \rightarrow 1/Z_n, \quad (5.1)$$

где

$$Z_n = \sqrt{\frac{\mu_n \mu_0}{\varepsilon_n \varepsilon_0}}, \quad (5.2)$$

причем  $\mu_n$  и  $\varepsilon_n$  — магнитная и диэлектрическая проницаемости  $n$ -го слоя,  $\mu_0$  и  $\varepsilon_0$  — магнитная и электрическая постоянные системы СИ.

Как видно из предыдущего рассмотрения (главы 2–4, а также работа [96]), при методе пошагового алгоритма все выражения получаются в виде линейных комбинаций из волновых чисел. При замене (5.1) такие выражения будут содержать суммы дробей с различающимися знаменателями, поэтому чтобы избежать необходимости их суммирования, удобно импедансы слоев заменить на обратные им величины — адмиттансы:

$$A_n = \frac{1}{Z_n} = \sqrt{\frac{\varepsilon_n \varepsilon_0}{\mu_n \mu_0}}. \quad (5.3)$$

В этом случае замена (5.1) существенно упрощается и принимает вид:

$$k_n \rightarrow A_n. \quad (5.4)$$

При этом волновые числа в показателях экспонент остаются прежними:

$$k_n = \omega \sqrt{\varepsilon_n \varepsilon_0 \mu_n \mu_0}, \quad (5.5)$$

где  $\omega$  — частота, задаваемая падающей волной в первом или последнем слоях.

В случае электромагнитных волн вместо одномерных амплитуд  $A_n$  и  $B_n$  присутствуют амплитуды электрического и магнитного полей  $E_n$  и  $H_n$ . Однако, как следует из классики [134, 135], а также для рассматриваемой геометрии подробно показано в [57, 58, 75], магнитное поле волны в каждом слое может быть представлено как производная по времени от электрического поля в том же слое, поэтому достаточно рассмотреть только амплитуды какого-то одного поля, например электрического.

### 5.2.2. Электродинамические параметры в случае проводящей среды

Если среда обладает проводящими свойствами, то в этом случае для нее, наряду с основными параметрами, такими как диэлектрическая и магнитная проницаемости  $\varepsilon$  и  $\mu$ , важнейшее значение приобретает проводимость  $\sigma$ .

Рассмотрим, как выражаются приведенные замены (5.4)–(5.5) через эти параметры. Для простоты дальнейшей записи соответствующий номеру среды индекс « $n$ » будем опускать.

При записи уравнений электродинамики для проводящей среды ее проводимость удобно включить в диэлектрическую проницаемость в виде мнимой добавки [136–138]:

$$\varepsilon = \varepsilon_r - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}, \quad (5.6)$$

где  $\varepsilon_r$  — действительная часть волнового числа.

При этом полное волновое число, становясь комплексным, приобретает вид:

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu \mu_0 \left( \varepsilon_r - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right)}. \quad (5.7)$$

Преобразуя эту формулу по правилам извлечения квадратного корня из комплексного числа [127], получаем:

$$k = \eta - i \cdot \xi, \quad (5.8)$$

где

$$\eta = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu \mu_0}{2} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \omega} \right)^2} \right\}}; \quad (5.9)$$

$$\xi = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu \mu_0}{2} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \omega} \right)^2} \right\}}. \quad (5.10)$$

Именно в таком виде волновое число будет входить в показатель экспоненты.

Рассмотрим теперь, как преобразуется адмиттанс в среде с проводимостью, для чего подставим (5.6) в (5.3).

В результате получаем:

$$A = \delta - i \cdot \varepsilon, \quad (5.11)$$

где

$$\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{2 \mu \mu_0} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \omega} \right)^2} \right\}}; \quad (5.12)$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{2 \mu \mu_0} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \omega} \right)^2} \right\}}. \quad (5.13)$$

В таком виде адмиттансы будут входить в линейные суммы выражений, получающихся в ходе реализации пошагового алгоритма.

Из приведенных формул можно видеть, что действительные и мнимые части волнового числа и адмиттанса связаны соотношениями:

$$\frac{\eta}{\delta} = \frac{\xi}{\varepsilon} = \omega \mu \mu_0. \quad (5.14)$$

### 5.2.3. Индексация волн прямого и обратного направлений

Чтобы различать волны прямого и обратного направлений, будем электрические поля таких волн снабжать индексами: для прямого направления — индексом « $A$ », для обратного — « $B$ », после которых будем приводить номер слоя.

Как и в разделе 4.1, будем полагать, что отражение волн при координатах  $x_0$  и  $x_{16}$  отсутствует, причем в среде № 1 распространяется в положительном направлении волна с амплитудой  $E_{A01}$ , а в среде



№ 16 — в отрицательном направлении волна с амплитудой  $E_{B16}$ , обе из которых по отношению к структуре в целом являются падающими.

Для упрощения записи экспонент при  $1 \leq n \leq N$  введем обозначения:

$$e_n = \exp[-ik_n(x - x_{n-1})], \quad (5.15)$$

а также

$$e_0 = \exp(i\varphi), \quad (5.16)$$

где  $\varphi$  — начальная фаза, которую без особенного ограничения общности можно положить равной нулю.

#### 5.2.4. Особенности геометрии задачи для случая электромагнитных волн

Следуя общим правилам, сформулированным в предыдущем разделе, внесем некоторую коррекцию в геометрию данной задачи по сравнению со случаем одномерной волны. В одномерном случае полагалось, что структура содержит два вида сред с волновыми числами  $k_p$  и  $k_s$ , причем

$$k_p \leq k_s. \quad (5.17)$$

Переходя на адмиттансы, в соответствии с (5.4) получаем:

$$A_p \leq A_s. \quad (5.18)$$

Аналогично разделу 4.1 можно ввести среднее значение адмиттанса:

$$A_c = \frac{A_p + A_s}{2}, \quad (5.19)$$

а также добавку к нему  $\Delta A_c$ , такую, что

$$A_p = A_c - \Delta A_c; \quad (5.20)$$

$$A_s = A_c + \Delta A_c. \quad (5.21)$$

**Замечание.** В соответствии с (5.5) из (5.17) получаем:

$$\varepsilon_p \mu_p \leq \varepsilon_s \mu_s. \quad (5.22)$$

С другой стороны, из (5.18) в соответствии с (5.3) получаем:

$$\varepsilon_p \mu_s \leq \varepsilon_s \mu_p. \quad (5.23)$$

При  $\mu_p = \mu_s$ , что имеет место в большинстве немагнитных сред, особенно в оптическом диапазоне, соотношения (5.22) и (5.23) совпадают друг с другом, однако при произвольных значениях  $\mu_p$  и  $\mu_s$  они могут различаться, в результате чего соотношение (5.23) может быть обратным, то есть  $A_p$  и  $A_s$  на рис. 5.1 надо поменять местами. Такое обстоятельство необходимо учитывать в случае магнитных сред, особенно на частотах, соответствующих ферромагнитному резонансу в одной из групп слоев, где магнитная проницаемость может возрасти

на несколько порядков [18–20, 24, 25]. Данный случай выходит за рамки настоящего раздела и требует более подробного рассмотрения. Здесь же ограничимся случаем (5.22) и будем далее с позиций многобарьерной структуры рассматривать  $A_p$  как величину адмиттанса, соответствующую промежуткам между барьерами, а за величину адмиттанса, соответствующую барьерам, примем  $A_s$ .

### 5.3. Схема расчета методом пошагового алгоритма

Для расчета амплитуд в слоях многослойной структуры, как и в случае одномерной задачи (глава 4), будем пользоваться методом пошагового алгоритма (глава 3) [62, 79, 90], позволяющим получить значения амплитуд во всех слоях. Учитывая специфику электромагнитных волн, в первую очередь замену волновых чисел на адмиттансы и введение в качестве переменных электрического и магнитного полей, приведем схему реализации алгоритма более подробно. Учитывая однозначную связь между электрическим и магнитным полями электромагнитной волны, в качестве основной переменной выберем электрическое поле  $E_n$ , исходя из которого магнитное поле  $H_n$  может быть выражено стандартными методами через производные по времени и координате [134, 135].

#### 5.3.1. Общая схема пошагового алгоритма

Общая схема пошагового алгоритма аналогична таковой для одномерной волны (глава 3). Алгоритм содержит два этапа, состоящих в последовательном прохождении по слоям структуры от одного конца структуры к другому и обратно.

На первом этапе сначала с помощью простых правил задаются вспомогательные величины, определяемые параметрами первого слоя. Из них на основе параметров первого и второго слоев формируются новые величины, принадлежащие второму слою. Затем таким же образом из величин второго слоя формируются величины третьего слоя и так далее до тех пор, пока все слои структуры не будут исчерпаны. Формирование последующих величин из предыдущих производится путем увеличения порядковых индексов всех предыдущих величин на единицу. Второй этап начинается с формирования вспомогательных величин, определяемых параметрами последнего слоя структуры. Далее из этих величин с использованием параметров последнего и предпоследнего слоев формируются подобные величины для предпоследнего слоя и так далее. Процедура формирования последующих величин из предыдущих состоит в уменьшении порядковых индексов всех предыдущих величин на единицу.

Из всех величин, получаемых на обоих этапах, с помощью простых правил суммирования формируются детерминанты, определяющие амплитуды волн внутри слоев.

### 5.3.2. Аналитическая реализация алгоритма

Аналитическая реализация пошагового алгоритма для электромагнитной волны подобна таковой для одномерной волны с учетом замен, приведенных в предыдущих разделах. Изложим далее ее в последовательном виде.

#### ЭТАП № 1

Вводим вспомогательное обозначение

$$T_0 = 1, \quad (5.24)$$

а также полагаем начальную тройку основных обозначений:

$$P_1 = 1; \quad (5.25)$$

$$Q_1 = 0; \quad (5.26)$$

$$T_1 = T_0 2A_1 e_1. \quad (5.27)$$

С использованием (5.25)–(5.27) формируем новую тройку выражений:

$$P_2 = P_1(A_1 + A_2) + Q_1(A_1 - A_2)e_1^2; \quad (5.28)$$

$$Q_2 = P_1(A_1 - A_2) + Q_1(A_1 + A_2)e_1^2; \quad (5.29)$$

$$T_2 = T_1 2A_2 e_2. \quad (5.30)$$

Далее, увеличивая порядковые номера индексов на единицу, получаем следующую тройку подобных выражений и так далее, вплоть до  $P_N$ ,  $Q_N$ ,  $T_N$ . Общие формулы для получения последующих выражений из предыдущих при произвольном номере  $n$  имеют вид:

$$P_{n+1} = P_n(A_n + A_{n+1}) + Q_n(A_n - A_{n+1})e_n^2, \quad (5.31)$$

$$Q_{n+1} = P_n(A_n - A_{n+1}) + Q_n(A_n + A_{n+1})e_n^2, \quad (5.32)$$

$$T_{n+1} = T_n 2A_{n+1} e_{n+1}. \quad (5.33)$$

Процесс заканчивается при достижении  $n$  значения  $N - 1$ . При этом получаем:

$$P_N = P_{N-1}(A_{N-1} + A_N) + Q_{N-1}(A_{N-1} - A_N)e_{(N-1)}^2; \quad (5.34)$$

$$Q_N = P_{N-1}(A_{N-1} - A_N) + Q_{N-1}(A_{N-1} + A_N)e_{(N-1)}^2; \quad (5.35)$$

$$T_N = T_{N-1} 2A_N e_N. \quad (5.36)$$

#### ЭТАП № 2.

Введем другое вспомогательное обозначение

$$U_{N+1} = 1, \quad (5.37)$$

а также положим другую начальную тройку основных обозначений, индексы которых зададим равными полному количеству слоев:

$$R_N = 1; \quad (5.38)$$

$$S_N = 0; \quad (5.39)$$

$$U_N = U_{N+1} 2A_N e_N. \quad (5.40)$$

С использованием (5.38)–(5.40) формируем тройку выражений:

$$R_{N-1} = (A_{N-1} + A_N)R_N + (A_{N-1} - A_N)S_N e_N^2; \quad (5.41)$$

$$S_{N-1} = (A_{N-1} - A_N)R_N + (A_{N-1} + A_N)S_N e_N^2; \quad (5.42)$$

$$U_{N-1} = U_N 2A_{N-1} e_{N-1}. \quad (5.43)$$

Далее, уменьшая порядковые номера индексов на единицу, получаем следующую тройку подобных выражений и так далее, вплоть до  $P_1$ ,  $Q_1$ ,  $U_1$ . Общие формулы для получения последующих выражений из предыдущих при произвольном номере  $n$  имеют вид:

$$R_{n-1} = (A_{n-1} + A_n)R_n + (A_{n-1} - A_n)S_n e_n^2; \quad (5.44)$$

$$S_{n-1} = (A_{n-1} - A_n)R_n + (A_{n-1} + A_n)S_n e_n^2; \quad (5.45)$$

$$U_{n-1} = U_n 2A_{n-1} e_{n-1}. \quad (5.46)$$

Процесс заканчивается при достижении  $n$  значения 1. При этом получаем:

$$R_1 = (A_1 + A_2)R_2 + (A_1 - A_2)S_2 e_2^2; \quad (5.47)$$

$$S_1 = (A_1 - A_2)R_2 + (A_1 + A_2)S_2 e_2^2; \quad (5.48)$$

$$U_1 = U_2 2A_1 e_1. \quad (5.49)$$

#### Формирование детерминантов

Полагая, что в структуру входят электрические поля  $E_{A01}$  и  $E_{BN}$ , из полученных выражений формируем детерминанты следующим образом:

$$D_0 = R_1 - Q_1; \quad (5.50)$$

$$D_{EB1} = E_{A01} S_1 T_0 e_1 + E_{BN} e_0 P_1 U_2; \quad (5.51)$$

$$D_{EA2} = E_{A01} R_2 T_1 - E_{BN} e_0 Q_2 U_3 e_2; \quad (5.52)$$

$$D_{EB2} = E_{A01} S_2 T_1 e_2 + E_{BN} e_0 P_2 U_3; \quad (5.53)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$D_{EAn} = E_{A01} R_n T_{n-1} - E_{BN} e_0 Q_n U_{n+1} e_n; \quad (5.54)$$

$$D_{EBn} = E_{A01} S_n T_{n-1} e_n + E_{BN} e_0 P_n U_{n+1}; \quad (5.55)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$D_{EAN} = E_{A01} R_N T_{N-1} - E_{BN} e_0 Q_N U_{N+1} e_N; \quad (5.56)$$

$$D_0 = S_N + P_N. \quad (5.57)$$

Здесь индексы детерминантов соответствуют номерам слоев, а выражения (5.50) и (5.57), определяющие  $D_0$ , имея различный вид записи, тождественно равны.

Найденные детерминанты (5.50)–(5.57) позволяют определить амплитуды всех волн через  $E_{A01}$  и  $E_{BN}$  с помощью формул, задающих амплитуды волн в точках их исхода:

$$E_{An} = \frac{D_{EAn}}{D_0}; \quad E_{Bn} = \frac{D_{EBn}}{D_0}. \quad (5.58)$$

При этом амплитуда волны, выходящей из структуры в положительном направлении оси  $Ox$ , в точке  $x_N$  равна:

$$E_{ANT} = \frac{D_{EAN}}{D_0} e_N, \quad (5.59)$$

а амплитуда волны, выходящей в отрицательном направлении оси  $Ox$ , в точке  $x_0$  равна:

$$E_{BIT} = \frac{D_{EB1}}{D_0} e_1. \quad (5.60)$$

Описанный здесь метод будет далее применен для численного расчета амплитуд волн прямого и обратного направлений в структуре, схема которой показана на рис. 5.1. Перейдем к описанию результатов расчетов.

#### 5.4. Амплитуды волн в крайних слоях структуры

Применим теперь пошаговый алгоритм для рассмотрения амплитуд волн в крайних слоях структуры при изменении частоты.

Пусть структура содержит 16 слоев, из которых 7 являются барьерами с диэлектрической проницаемостью выше, чем у промежутков. Барьерами являются слои с четными номерами от №2 до №14, промежутками — с нечетными от №1 до №15, последний слой №16 имеет те же параметры, что и №15, то есть параметры промежутка. Это сделано для того, чтобы параметры обеих внешних сред были одинаковыми. Полная длина структуры  $L_N = 8$  см, толщина одного слоя  $L_s = L_p = 0,5$  см. На структуру падает одна волна прямого направления с амплитудой  $E_{A01}$  (при этом  $E_{B16} = 0$ ). В слое №1 этой волне соответствует отраженная с амплитудой  $E_{B01}$ , а в слое №16 — проходящая с амплитудой  $E_{A16}$ . На настоящем этапе рассматривается интервал изменения частоты падающей волны  $f$  от 5 ГГц до 20 ГГц.

На рис. 5.2 показаны зависимости нормированных амплитуд волн обратного ( $a, б, в$ ) и прямого ( $г, д, е$ ) направлений в крайних слоях структуры от частоты падающей волны. По горизонтальным рядам рисунка увеличивается диэлектрическая проницаемость барьера: в первом ряду ( $a, г$ ) она равна  $\epsilon_s = 1,1$ , что мало отличается от проницаемости промежутка  $\epsilon_s = 1,0$ , во втором ряду ( $б, д$ ) —  $\epsilon_s = 1,4$ , что отличается несколько больше, в третьем ряду ( $в, е$ ) —  $\epsilon_s = 3,0$ , что превышает проницаемость промежутка в три раза.

Из рисунка видно, что с увеличением различия между диэлектрическими проницаемостями барьера и промежутка амплитуды волн обоих

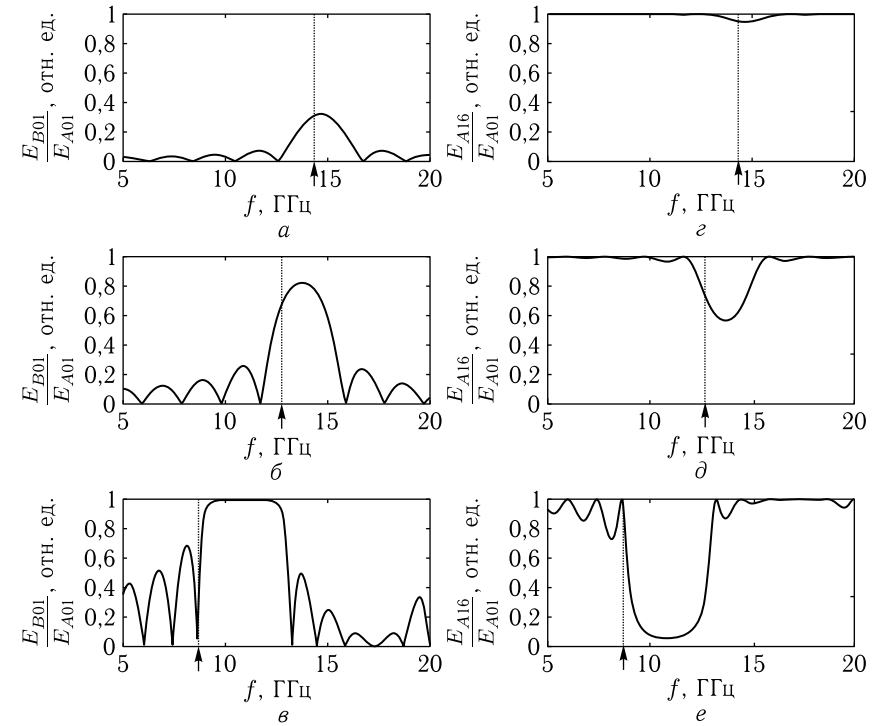


Рис. 5.2. Зависимости нормированных амплитуд волн в крайних слоях структуры от частоты падающей волны.  $a, б, в$  — волна обратного направления в слое №1 (отраженная относительно  $E_{A01}$ );  $г, д, е$  — волна прямого направления в слое №16 (проходящая относительно  $E_{A01}$ ). Параметры материала сред:  $\epsilon_p = 1,0$ ;  $\mu_{p,s} = 1,0$ ;  $\sigma_{p,s} = 0,0$ ;  $a, г$  —  $\epsilon_s = 1,1$ ;  $б, д$  —  $\epsilon_s = 1,4$ ;  $в, е$  —  $\epsilon_s = 3,0$

направлений возрастают, причем это возрастание для волн обратного направления ( $a, б, в$ ) выражено сильнее, чем для волн прямого ( $г, д, е$ ). Зависимости для амплитуд волн прямого направления ( $г, д, е$ ) симметричны относительно горизонтальной оси зависимостям для амплитуд волн обратного направления ( $a, б, в$ ) с тем отличием, что для них амплитуда несколько меньше, причем это различие с увеличением проницаемости  $\epsilon_s$  уменьшается. Так, при  $\epsilon_s = 1,1$  различие почти в пять раз, при  $\epsilon_s = 1,4$  — почти в два раза, при  $\epsilon_s = 3,0$  амплитуда волн прямого направления уже приближается к амплитуде волн обратного направления и составляет от нее около 95%.

Общий вид тех и других зависимостей представляет собой большой центральный лепесток, по обе стороны от которого располагаются лепестки-сателлиты, амплитуда которых по мере удаления от центрального лепестка спадает. Ширина сателлитов меньше ширины

центрального лепестка тем более, чем различие проницаемостей выше. Так при  $\varepsilon_s = 1,1$  сателлиты уже центрального лепестка примерно в два раза, тогда как при  $\varepsilon_s = 3,0$  различие ширины достигает уже пяти раз.

Как и в главе 4, рис. 4.2, многолепестковый характер обеих зависимостей обусловлен интерференционными явлениями при многократном переотражении волн обоих направлений. Заметим, что, по сравнению с рис. 4.2, многолепестковый характер амплитуды здесь выражен сильнее, чем для рассмотренной там одномерной волны, что, по-видимому, обусловлено тем что там менялось только одно волновое число барьера  $k_s$ , тогда как волновое число промежутка  $k_p$  оставалось неизменным, здесь же при изменении частоты меняются оба волновых числа  $k_s$  и  $k_p$  в соответствии с формулой (5.5).

Совокупность расположенных друг за другом барьеров представляет собой цепочку одинаковых последовательно соединенных через промежутки полуволновых резонаторов. Для каждого из таких резонаторов собственная длина волны связана с длиной барьера соотношением

$$\lambda_s^{(\text{res})} = 2L_s, \quad (5.61)$$

то есть резонансная частота имеет вид:

$$f_s^{(\text{res})} = \frac{c}{2\sqrt{\varepsilon_s \mu_s} L_s}, \quad (5.62)$$

где  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  — скорость электромагнитной волны в свободном пространстве ( $3 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ).

Подставляя в эту формулу  $\varepsilon_s = 1,1$ , получаем частоту 14,302 ГГц, подставляя  $\varepsilon_s = 1,4$ , получаем 12,677 ГГц, подставляя  $\varepsilon_s = 3,0$ , получаем 8,660 ГГц. На соответствующих эпюрах эти значения частот показаны стрелками на горизонтальной оси и вертикальными точечными линиями.

Видно, что расчетные значения частот всегда лежат несколько ниже положения максимумов главного лепестка, причем это рассогласование с увеличением  $\varepsilon_s$  возрастает. Так, для  $\varepsilon_s = 1,1$  оно не превышает 3% от частоты максимума, для  $\varepsilon_s = 1,4$  составляет около 7%, а для  $\varepsilon_s = 3,0$  достигает 21%. В этом последнем случае расчетное значение частоты приходится как раз на низший по частоте край главного лепестка.

Дополнительное исследование показывает, что если теперь зафиксировать значение диэлектрической проницаемости барьера  $\varepsilon_s$  на достаточно высоком уровне и повышать значение диэлектрической проницаемости промежутка  $\varepsilon_p$ , приближая ее к проницаемости барьера, то центральная частота главного лепестка понижается, стремясь к резонансной частоте барьера. Так, при  $\varepsilon_s = 3,0$  и  $\varepsilon_p = 2,9$  максимум главного лепестка приходится на 8,720 ГГц, что уже весьма близко к резонансной частоте для барьера, равной 8,660 ГГц. Амплитуда максимума при этом также резко снижается, для отражения составляя 0,12 отн. ед., а для прохождения — около 0,01 отн. ед.

Таким образом, частота главного лепестка, хотя и определяется в первую очередь диэлектрической проницаемостью барьера, отклоняется от резонансной частоты барьера вниз тем сильнее, чем больше различие диэлектрических проницаемостей барьера и промежутка.

## 5.5. Изменение числа барьеров

Согласно принятой постановке задачи, структура содержит конечное число одинаковых барьеров, разделенных одинаковыми промежутками, геометрическая длина которых равна геометрической длине барьеров. Рассмотрим сначала, как меняются частотные свойства структуры в зависимости от полного числа составляющих структуру барьеров. Будем полагать, что различие параметров барьеров и промежутков недостаточно для приближения коэффициентов отражения и прохождения структуры в целом к единице (то есть тот или другой коэффициент составляет не более  $\sim 0,95$ ).

Частотные свойства такой структуры иллюстрируются рис. 5.3, где показаны зависимости нормированной амплитуды волны обратного направления в слое № 1 от частоты при различном количестве барьеров. Волна падает на структуру только из слоя № 1, то есть  $E_{A01}$  отлично от нуля, тогда как  $E_{B16} = 0$ .

Наблюдаемая ситуация соответствует частотной зависимости коэффициента отражения (по амплитуде). Поскольку  $\sigma_{p,s} = 0$ , то затухание волны отсутствует, то есть коэффициент поглощения равен нулю, а частотная зависимость коэффициента прохождения аналогична таковой для коэффициента отражения с точностью до обратного знака по амплитуде (подобно описанному в работах [57, 58, 66, 67, 75]), поэтому на данном этапе не рассматривается.

### 5.5.1. Минимальные значения амплитуды

Из рисунка видно, что частотные зависимости имеют вид многолепесткового повторения кривых, похожих на положительный полупериод синусоиды, причем по мере увеличения числа барьеров количество лепестков увеличивается.

При единственном барьере (рис. 5.3, а) зависимость имеет вид периодически повторяющейся четкой половины синусоиды. При заданных параметрах материала барьера длина волны в его пределах равна  $\lambda_s = 1,0$  см. Учитывая, что длина барьера равна  $L_s = 0,5$  см, можно видеть, что в этом случае на длине барьера укладывается как раз половина длины волны. Таким образом, минимум отражения здесь соответствует хорошо известному в оптике свойству полуволновой пластинки, вытекающего из потери полуволны при отражении от менее плотной среды [4, 6].

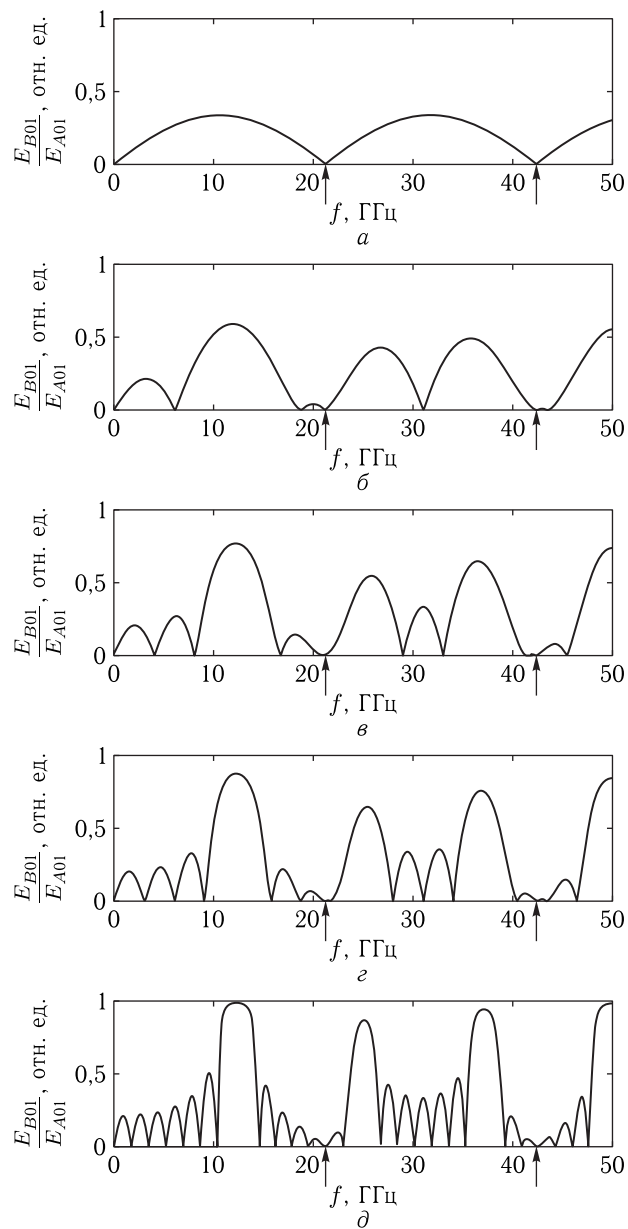


Рис. 5.3. Зависимость нормированной амплитуды волны обратного направления в слое №1 от частоты при различном количестве барьеров: *a* — 1; *б* — 2; *в* — 3; *г* — 4; *д* — 7. Шаг по частоте — 0,04 ГГц. Параметры материала сред:  $\varepsilon_p = 1$ ;  $\varepsilon_s = 2,0$ ;  $\mu_{p,s} = 1$ ;  $\sigma_{p,s} = 0$

Частотные положения следующих друг за другом минимумов отражения определяются формулой:

$$f_s^{(\min)} = \frac{cn^{(\min)}}{2\sqrt{\varepsilon_s\mu_s}L_s}, \quad (5.63)$$

где  $n^{(\min)}$  — порядковый номер минимума, показывающий, сколько полуволн укладывается по длине барьера,  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  — скорость электромагнитной волны в свободном пространстве ( $3 \cdot 10^8$  м · с<sup>-1</sup>).

При  $\varepsilon_s = 2$ ,  $\mu_s = 1$  и  $L_s = 0,5$  см первый минимум соответствует частоте 21,213 ГГц, второй — 42,426 ГГц, третий — 63,639 ГГц и так далее. Положения первых двух минимумов отмечены на рисунке стрелками, подходящими снизу к горизонтальной оси.

При увеличении числа барьеров (рис. 5.3, б–д) положения по частоте этих основных минимумов сохраняются (отмечены стрелками), однако появляются новые дополнительные минимумы, частоты которых уже в простые соотношения не укладываются и требуют более подробного рассмотрения условий интерференции. Не вдаваясь в такое рассмотрение, отметим здесь лишь наиболее явные особенности наблюдаемой картины.

Так, при двух барьерах (рис. 5.3, б), кроме основных, появляются минимумы при (в ГГц): 6,100, 18,700, 31,020, 43,420, то есть ниже первого основного (21,213) — два дополнительных (6,100 и 18,700), между первым и вторым основными (21,210 и 42,420) — один дополнительный (31,020) и выше в пределах шкалы рисунка еще один дополнительный (43,420). При трех барьерах (рис. 5.3, в) ниже первого основного появляются четыре дополнительных, между основными — три и выше еще один. При четырех (рис. 5.3, г) ниже первого — пять, между основными — пять. При семи барьерах (рис. 5.3, д) ниже первого — десять, между основными — девять.

Таким образом, при увеличении числа барьеров количество минимумов всегда возрастает как ниже первого минимума, так и между двумя основными. При этом при увеличении числа барьеров от двух до четырех количество минимумов  $N^{(\min)}$  между основными подчиняется соотношению:

$$N^{(\min)} = 2n_s - 3, \quad (5.64)$$

где  $n_s$  — число барьеров. Однако это соотношение нельзя считать безупречным. Так, можно было бы ожидать, что при  $n_s = 7$  количество минимумов между основными должно равняться одиннадцати, однако из рис. 5.3, д видно, что в этом интервале минимумов всего девять. Более точная проверка с шагом по частоте в 0,001 ГГц (1,0 МГц) показала, что на рисунке минимумы при 21,210 и 21,296 ГГц не разрешены из-за их чрезвычайной близости. Однако между основными было обнаружено не одиннадцать, а всего десять минимумов, то есть опять-таки на единицу меньше приведенного соотношения. Возможной причиной нарушения соотношения (5.64) при увеличении числа барьеров может

явиться возрастание сложности интерференционной картины при многочисленных переотражениях волн внутри структуры.

### 5.5.2. Максимальные значения амплитуды

Обратимся теперь к рассмотрению главных максимумов приведенных зависимостей, имеющих наибольшую амплитуду.

При единственном барьере (рис. 5.3, *а*) зависимость амплитуды от частоты в рассматриваемом интервале частот имеет два максимума — при частотах 10,580 ГГц и 31,820 ГГц, которые соответствуют укладыванию по длине барьера нечетного числа четвертей длины волны. Частотные положения следующих друг за другом максимумов отражения определяются формулой:

$$f_s^{(\max)} = \frac{c(2n^{(\max)} - 1)}{4\sqrt{\varepsilon_s \mu_s} L_s}, \quad (5.65)$$

где  $n^{(\max)}$  — порядковый номер максимума, при котором на длине барьера укладывается  $2n^{(\max)} - 1$  четвертей длин волн,  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  — скорость электромагнитной волны в свободном пространстве ( $3 \times 10^8$  м · с<sup>-1</sup>). Таким образом, максимум отражения здесь также соответствует известному в оптике свойству четвертьволновой пластинки [4, 6]. При большем числе барьеров картина максимумов, как и минимумов, также не поддается столь простому расчету, поэтому отметим лишь ее основные особенности.

При увеличении числа барьеров положения по частоте наблюдаемых на рис. 5.3, *а* максимумов смещаются несколько вверх, при двух барьерах (рис. 5.3, *б*) — принимая значения 11,940 ГГц и 35,780 ГГц, а при семи барьерах (рис. 5.3, *д*) — 12,380 ГГц и 37,100 ГГц соответственно. Однако, начиная с двух барьеров (рис. 5.3, *б*), между ними появляется еще один дополнительный максимум при 26,780 ГГц, который при увеличении числа барьеров смещается не вверх, а вниз, выходя при семи барьерах (рис. 5.3, *д*) на частоту 25,100 ГГц.

При такой трансформации соответствующие максимумам лепестки значительно сужаются. Так, по расстоянию между двумя ближайшими минимумами ширина обоих лепестков при одном барьере составляет 21,213 ГГц. При двух барьерах ширина основных лепестков составляет: нижнего по частоте — 12,600 ГГц, верхнего — 11,400 ГГц, а ширина лепестка между ними — 9,820 ГГц. При семи барьерах эти же величины уменьшаются до 4,400, 4,000 и 3,760 ГГц соответственно.

Амплитуды всех максимумов при увеличении числа барьеров возрастают. Так, при одном барьере амплитуды обоих основных максимумов равны 0,333 отн. ед., при двух барьерах амплитуда низшего по частоте максимума составляет 0,588 отн. ед., а высшего — 0,491 отн. ед. Амплитуда находящегося между ними дополнительного максимума равняется 0,423 отн. ед. При семи барьерах эти же величины соответственно равны 0,982 отн. ед., 0,936 отн. ед. и 0,859 отн. ед. То есть

дополнительный максимум сужается быстрее, но по амплитуде растет несколько медленнее основных.

### 5.6. Распределение амплитуд в слоях при большой вариации параметров

Рассмотрим распределение амплитуд в слоях при большом изменении параметров материала от слоя к слою. Ограничимся рассмотрением волн прямого направления, так как характер распределения волн обратного направления аналогичен таковому в главе 4.

**Замечание.** В работе [96] и здесь в главе 4 приведенные далее зависимости амплитуд волн в слоях от координаты по длине структуры, полученные для одномерной волны, названы «режимами». Однако, как показано там же, резких границ между такими «режимами» нет, причем принципиально отличаются друг от друга только два из них, №1 и №4 — синусоидальный и экспоненциальный. Поэтому в настоящем рассмотрении мы предпочли отказаться от наименования «режимы» и заменить их на наш взгляд более естественным названием «распределения», которое и будет использоваться далее.

На рис. 5.4 показаны зависимости распределения нормированных амплитуд волн прямого направления в слоях от координаты при различных частотах падающей волны. Эпюры расставлены по частоте и сгруппированы по столбцам в соответствии с характерными частотными областями распределений. Утолщенные горизонтальные линии — амплитуды волн прямого направления в соответствующих слоях. Укрупненные точки соответствуют серединам перепадов амплитуд между соседствующими слоями. Утолщенные сплошные кривые построены по эмпирическим формулам синусоиды, прямой или экспоненты, подобным формулам (4.11)–(4.19).

Из рисунка можно видеть, что здесь в случае электромагнитной волны присутствуют те же основные виды распределения амплитуд, что и в случае одномерной. Главными видами являются синусоидальное и экспоненциальное. Эти виды распределения при изменении частоты чередуются друг за другом, а переход между ними происходит через посредство полусинусоидального и линейного распределений.

Если за переход от синуса к экспоненте считать прямую линию, то переходы соответствуют частотам 5,10 ГГц (рис. 5.4, *ж*) и 8,60 ГГц (рис. 5.4, *к*). Следующие точки подобного перехода соответствуют частотам 12,00 ГГц, 15,50 ГГц и так далее с интервалами по  $3,45 \pm 0,05$  ГГц.

На частотах ниже  $\sim 1,50$  ГГц зависимость распределения амплитуд от координаты практически отсутствует, причем это отсутствие выражено тем сильнее, чем частота ниже, так что для частоты 0,05 ГГц изменение амплитуды в слоях составляет менее 0,1% (рис. 5.4, *а*).

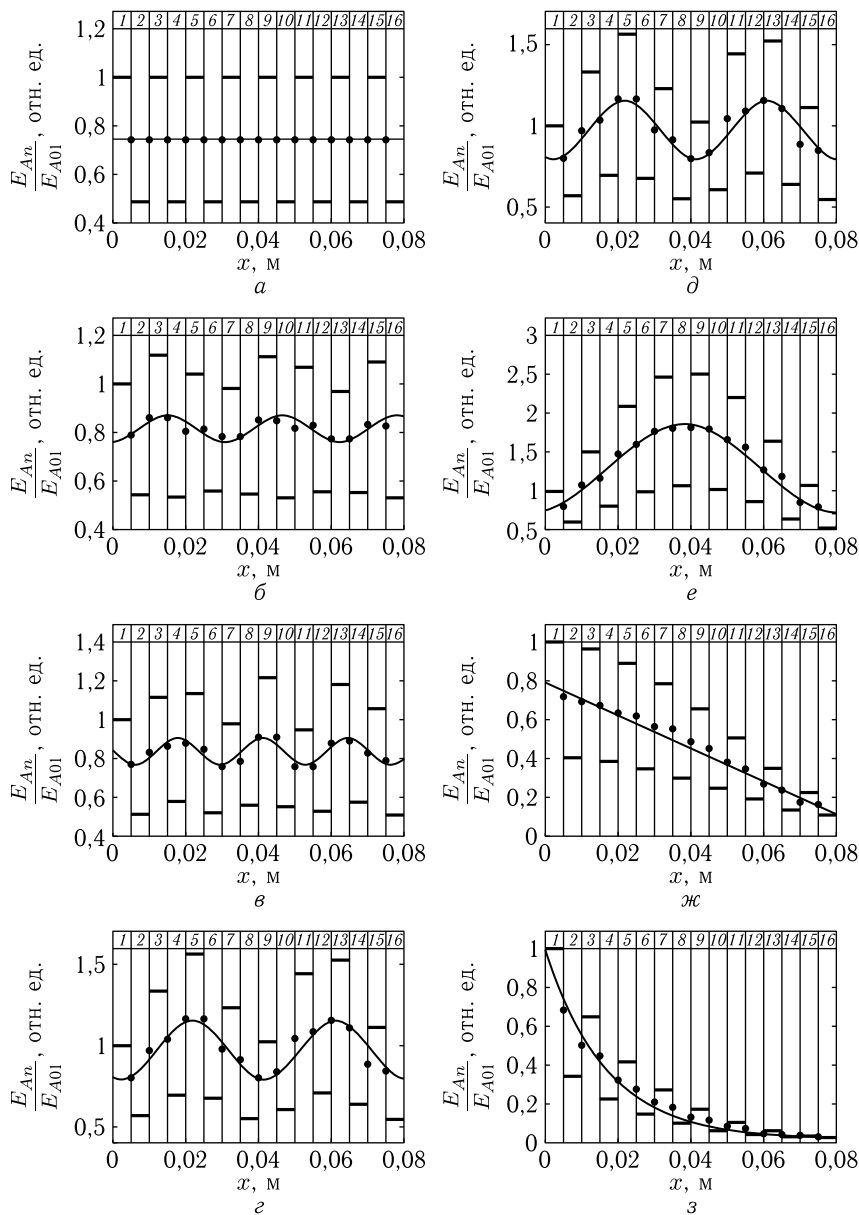


Рис. 5.4. Распределение нормированных амплитуд волн прямого направления в слоях от координаты при различных частотах падающей волны. Цифры в верхнем ряду — номера слоев. Параметры материала слоев:  $\epsilon_p = 1$ ;  $\epsilon_s = 10$ ;  $\mu_{p,s} = 1$ ;  $\sigma_{p,s} = 0$ . Частоты следующие: а — 0,05 ГГц; б — 2,00 ГГц; в — 3,60 ГГц; г — 4,40 ГГц; д — 4,40 ГГц; е — 4,95 ГГц; ж — 5,10 ГГц; з — 5,40 ГГц

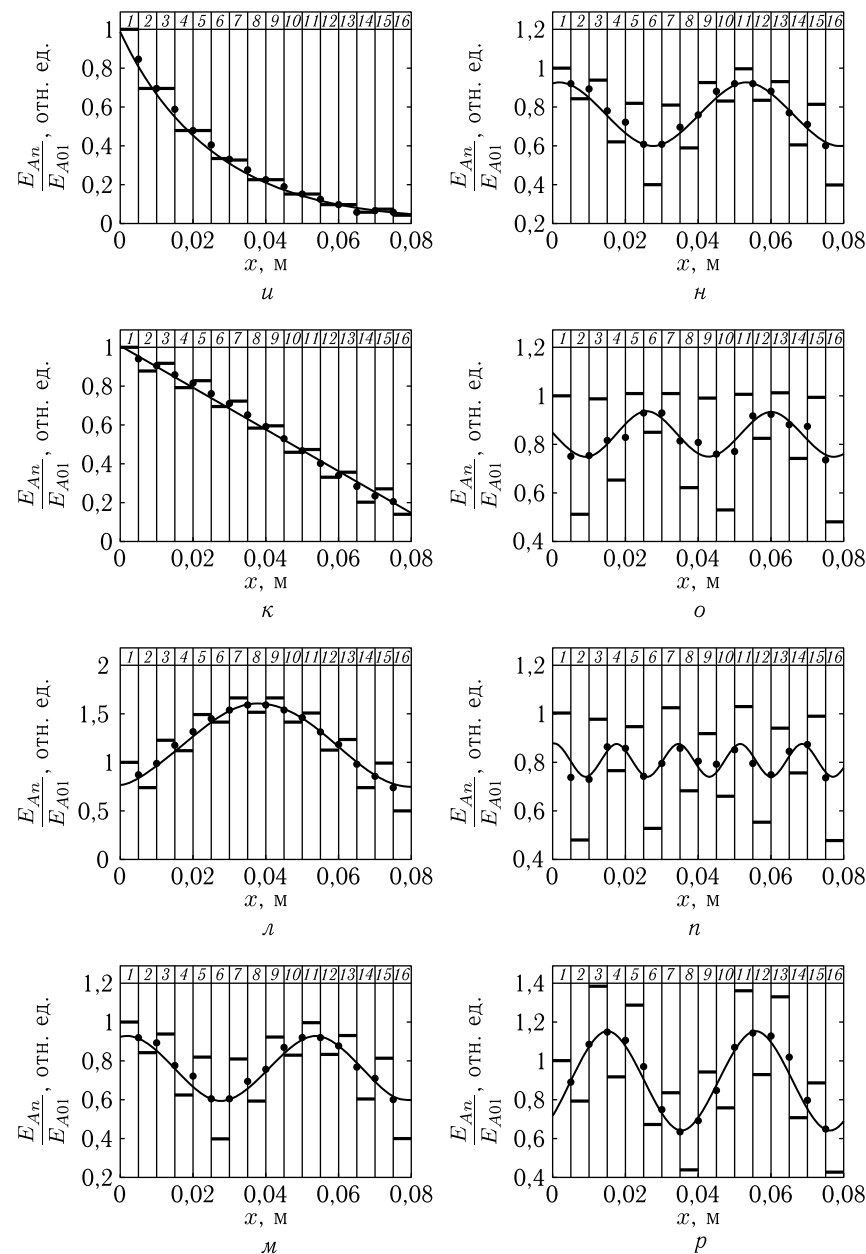


Рис. 5.4. (Окончание). Частоты следующие: и — 8,40 ГГц; к — 8,60 ГГц; л — 8,75 ГГц; м — 9,00 ГГц; н — 9,00 ГГц; о — 9,40 ГГц; п — 10,0 ГГц; р — 11,50 ГГц

При увеличении частоты заметно выше 1,50 ГГц распределение постепенно приобретает синусоидальный характер и при частоте 2,00 ГГц (рис. 5.4, б) изменение амплитуды достигает уже 10%.

Распределение амплитуд в интервале от 2,00 ГГц (рис. 5.4, б) до 4,40 ГГц (рис. 5.4, д) носит типичный синусоидальный характер. На рисунке полной эволюции распределения амплитуд от отсутствия распределения до конца синусоидального соответствует первый столбец от рис. 5.4, а до рис. 5.4, г. Считая от нуля, ширина полного интервала по частоте здесь составляет около 4,40 ГГц.

Однако при дальнейшем увеличении частоты всего на 0,55 ГГц, то есть уже на частоте 4,95 ГГц, синусоидальное распределение сменяется полусинусоидальным (рис. 5.4, е), которое при дальнейшем увеличении частоты на 0,15 ГГц до 5,10 ГГц переходит в линейное (рис. 5.4, ж), а затем при увеличении еще на 0,30 ГГц до 5,40 ГГц — в экспоненциальное (рис. 5.4, з). Таким образом, полный интервал смены синусоидального распределения на экспоненциальное заключен между 4,40 ГГц и 5,40 ГГц, чему на рисунке соответствует второй столбец (от рис. 5.4, д до рис. 5.4, з), причем этот интервал составляет не более 1,00 ГГц.

Далее вплоть до частоты 8,40 ГГц распределение является экспоненциальным (рис. 5.4, и). Полный интервал экспоненциального распределения составляет не менее 3,00 ГГц.

При увеличении частоты с 8,40 ГГц до 8,60 ГГц экспоненциальное распределение переходит в линейное (рис. 5.4, к), затем при частоте 8,75 ГГц — в полусинусоидальное (рис. 5.4, л), после чего, начиная с частоты 9,00 ГГц, в синусоидальное (рис. 5.4, м). Эта трансформация представлена третьим столбцом рисунка. Интервал здесь составляет 0,60 ГГц.

Далее синусоидальное распределение, претерпевая некоторые вариации периода, как это показано на рис. 5.4, о–р (четвертый столбец рисунка), остается таковым вплоть до 11,80 ГГц (на рисунке дальнейшие эволюции не показаны), где сменяется полусинусоидальным, затем на частоте 12,00 ГГц — линейным, которое на частоте 12,40 ГГц переходит в экспоненциальное и так далее. Интервалы перехода от экспоненциального распределения к синусоидальному и обратно составляют здесь 0,40 ГГц и 0,60 ГГц соответственно, тогда как интервал существования синусоидального распределения между этими переходами составляет 2,80 ГГц.

Таким образом, средняя протяженность интервалов существования основных распределений, синусоидального и экспоненциального, составляет около 3,47 ГГц, тогда как протяженность интервалов переходных распределений (полусинусоидального и линейного) не превышает 0,67 ГГц, то есть составляет около 19% или одну пятую от интервалов основных распределений.

### 5.6.1. Переход между распределениями амплитуды

Рассмотрим несколько более подробно характер изменения распределений амплитуд в слоях на примере частотных зависимостей при достаточно большом соотношении проницаемостей барьеров и промежутков  $\varepsilon_s/\varepsilon_p$  (критерий «достаточности» обсуждается в следующем разделе). Обратимся к рис. 5.5, где показаны зависимости нормированных амплитуд обратно направленной волны в слое №1 (а) и прямо направленных волн в слоях №15 (б) и №16 (в) от частоты падающей волны при соотношении между проницаемостями, равном шести.

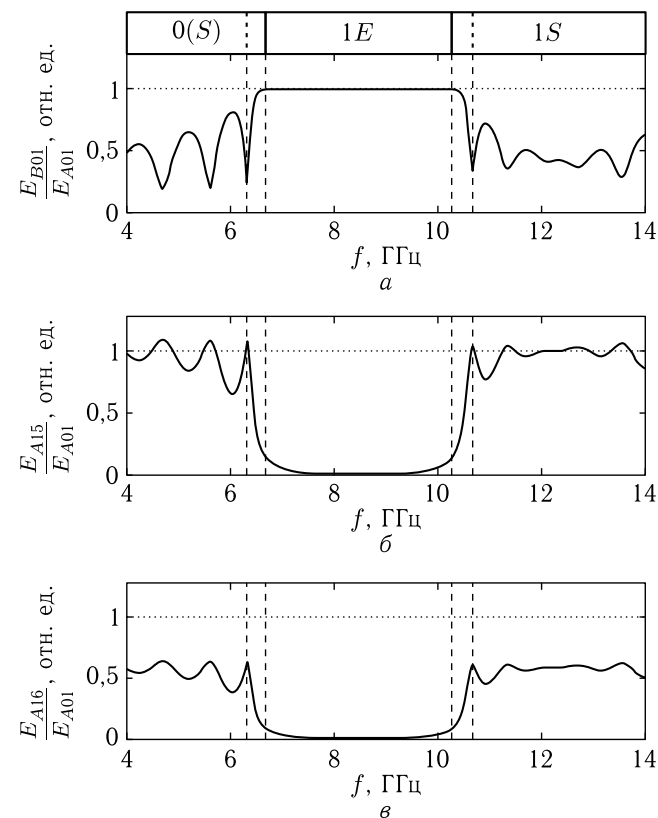


Рис. 5.5. Зависимости нормированных амплитуд обратно направленной волны в слое №1 (а) и прямо направленных волн в слоях №15 (б) и №16 (в) от частоты падающей волны. В верхнем ряду — наименования областей с характерными распределениями амплитуд по слоям: 0(S) — синусоидальное (нулевая зона); 1E — экспоненциальное (первая зона); 1S — синусоидальное (первая зона). Параметры материала сред:  $\varepsilon_p = 1,0$ ;  $\varepsilon_s = 6,0$ ;  $\mu_{p,s} = 1,0$ ;  $\sigma_{p,s} = 0,0$ . Обозначения областей — те же, что на рис. 4.13–4.14



Из рисунка видно, что в области экспоненциального распределения (1E) нормированная амплитуда обратно направленной волны в слое №1 близка к единице, то есть структура отражает падающую на нее волну практически полностью. При этом в слоях №15 и №16 амплитуды прямо направленных волн близки к нулю, то есть падающая волна через структуру не проходит.

В областях синусоидального распределения (0(S)) и (1S) амплитуда обратно направленных волн по частоте осциллирует от 0,2 до 0,7 отн. ед. Амплитуда прямо направленных волн в слое №15 также осциллирует между 0,6 и 1,1 отн. ед., а в слое №16 — между 0,4 и 0,6 отн. ед. Значительное, почти в два раза, уменьшение среднего уровня осцилляций в слое №16, по сравнению со слоем №15, обусловлено свойствами четности этих слоев, подобно тому, как это обсуждалось в разделе 4.6.

Некоторое превышение нормированной амплитуды в слое №15 над единицей, подобное наблюдавшемуся для одномерной волны (раздел 4.6), обусловлено переходом волны от слоя с большой проницаемостью (№14, где  $\varepsilon_s = 6,0$ ) к слою с малой (№15, где  $\varepsilon_p = 1,0$ ) и вызвано требованием сохранения потока энергии волны, правила обращения с которым подробно разобраны в работе [72].

Переходы между областями с характерными распределениями являются плавными. Таким образом, между областями, соответствующими синусоидальному и экспоненциальному распределениям, имеются переходные области, приближенные границы которых (на уровне 0,8–0,9) показаны пунктиром.

Граничные частоты переходных областей для первой области (по нижнему уровню в точке минимума, по верхнему — на уровне 0,985 отн. ед.), равны соответственно 6,320 ГГц и 6,660 ГГц, для второй (по тем же уровням) 10,320 ГГц и 10,640 ГГц. Ширина первой области равна 0,340 ГГц, что составляет около 5% от частоты ее центра (6,490 ГГц), а ширина второй области — 0,320 ГГц, то есть около 3% от частоты ее центра (10,480 ГГц).

Ширина переходных областей по мере увеличения соотношения диэлектрических проницаемостей барьера и промежутка уменьшается. Так, при  $\varepsilon_p = 1,0$  и  $\varepsilon_s = 4,0$  переходная область между зонами 0(S) и 1E составляет около 5,6% от центральной частоты, при увеличении  $\varepsilon_s$  до значения 10,0 уменьшается до 4,0%, а при  $\varepsilon_s = 20,0$  составляет всего 0,7%. То есть переходы между синусоидальным и экспоненциальным распределениями с увеличением отношения проницаемостей становятся более резкими. Тем не менее в переходных областях по мере изменения частоты переход между распределениями амплитуд всегда остается достаточно плавным: от синусоидального распределения к полусинусоидальному, затем к линейному, которое переходит в экспоненциальное. Переход от экспоненциального распределения к синусоидальному происходит в обратном порядке. Динамика перехода полностью аналогична таковой для одномерной волны, как это подробно рассмотрено в разделе 4.5.4.

## 5.7. Слабая и сильная неоднородности

Рассмотрим теперь частотные зависимости амплитуд волн в слоях при сильной и слабой степенях неоднородности структуры. Будем различать сильную и слабую степени неоднородности по тому признаку, что в случае слабой неоднородности нормированная амплитуда обратно направленной волны в слое №1, то есть отраженной от структуры в целом, не достигает единицы ни при какой частоте падающей волны. При этом всегда часть энергии волны проходит через структуру, обнаруживая себя на ненулевом уровне в слоях №15 или №16. Заметим, что нулевой уровень здесь в обоих случаях является определенной идеализацией, асимптотически достижимой только при бесконечно большом числе элементов структуры. В реальном же случае рассматриваемой здесь структуры из 16 элементов (слоев) будем полагать критический уровень отражения равным 0,999 отн. ед.

Обратимся к рис. 5.6, где показаны зависимости нормированных амплитуд обратно направленной волны в слое №1 (*a*, *г*) и прямо направленных волн в слоях №15 (*б*, *д*) и №16 (*в*, *е*) от частоты падающей волны при различных соотношениях между проницаемостями слоев.

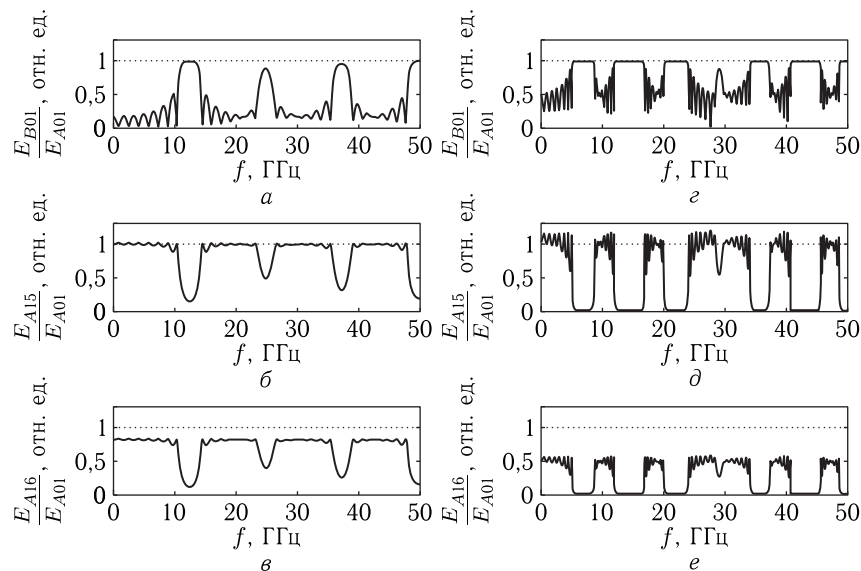


Рис. 5.6. Зависимости нормированных амплитуд обратно направленной волны в слое №1 (*a*, *г*) и прямо направленных волн в слоях №15 (*б*, *д*) и №16 (*в*, *е*) от частоты падающей волны при различных соотношениях между проницаемостями слоев. Проницаемость барьера: *a*, *б*, *в* —  $\varepsilon_s = 2,0$ ; *г*, *д*, *е* —  $\varepsilon_s = 10,0$ . Остальные параметры:  $\varepsilon_p = 1,0$ ;  $\mu_{p,s} = 1,0$ ;  $\sigma_{p,s} = 0,0$

Из рисунка видно, что в обоих случаях частотные зависимости амплитуды представляют собой чередование ярко выраженных «полос пропускания» и «непропускания», подобных имеющим место в периодической структуре бесконечной протяженности, в аналитическом виде получаемых классическими методами Хилла, Уиттекера, Бриллюэна [132, 139, 140], а также [25, стр. 118–142]. Однако здесь, в отличие от классики, правильная периодичность в какой-то степени нарушается, что особенно хорошо видно из рис. 5.6, *г–е*, где две «полосы пропускания» между 25,0 и 35,0 ГГц практически сливаются вместе, оставляя лишь сравнительно узкий неглубокий промежуток вблизи 29,8 ГГц. Можно полагать, что такой характер наблюдаемых зависимостей обусловлен довольно небольшим количеством слоев структуры, насчитывающим всего 8 полных периодов изменения свойств.

Наблюдаются также заметные отличия от случая одномерной волны, рассмотренного в разделах 4.16, 4.17. Так, для одномерной волны при увеличении волнового числа области пропускания сужаются, причем амплитуда проходящих волн в слое № 15 увеличивается, а в слое № 16 уменьшается. В рассматриваемом здесь случае электромагнитной волны при увеличении частоты ширина тех и других полос меняется не более чем на 20%, причем нерегулярным образом. Амплитуда как проходящих, так и отраженных волн также не имеет тенденции к систематическому увеличению или уменьшению, причем меняется в ту и другую сторону также на  $\sim 20\%$ . То есть в нулевом приближении можно считать, что здесь как частотный интервал, так и амплитуда тех и других волн в пределах соответствующих полос практически не меняются (с точностью до 20%).

Рассмотрим теперь приведенные зависимости с количественной стороны.

Так, рис. 5.6, *а, б, в* соответствуют слабой неоднородности:  $\varepsilon_s = 2,0$  при  $\varepsilon_p = 1,0$ , то есть проницаемость барьера превышает проницаемость промежутка всего в два раза. В этом случае максимальная амплитуда отраженной волны в слое № 1 достигает уровня 0,987 отн. ед. на частоте 12,450 ГГц, а амплитуда проходящей волны на той же частоте в слое № 15 падает до уровня 0,164 отн. ед. и в слое № 16 — до уровня 0,136 отн. ед. То есть неоднородность, согласно приведенному критерию, является слабой.

Рис. 5.6, *г, д, е* соответствуют сильной неоднородности:  $\varepsilon_s = 10,0$  при  $\varepsilon_p = 1,0$ , то есть проницаемость барьера превышает проницаемость промежутка в десять раз. В этом случае максимальная амплитуда отраженной волны в слое № 1 превышает критический уровень 0,999 отн. ед. в интервале частот от 5,370 ГГц до 8,290 ГГц, достигая максимума, равного 0,9999898 отн. ед. на частоте 7,290 ГГц. При этом амплитуда проходящей волны в слое № 15 падает до уровня ниже 0,01, на краях интервала минимума составляя  $0,956 \cdot 10^{-2}$  отн. ед. на частоте 5,930 ГГц и  $0,941 \cdot 10^{-2}$  отн. ед. на частоте 7,730 ГГц, достигая

абсолютного минимума  $0,210 \cdot 10^{-2}$  отн. ед. на частоте 6,850 ГГц. Амплитуда проходящей волны в слое № 16 падает до уровня ниже 0,01, на краях интервала минимума составляя  $0,963 \cdot 10^{-2}$  отн. ед. на частоте 5,610 ГГц и  $0,953 \cdot 10^{-2}$  отн. ед. на частоте 8,050 ГГц, достигая абсолютного минимума  $0,438 \cdot 10^{-2}$  отн. ед. на частоте 6,810 ГГц. Таким образом, неоднородность, согласно приведенному критерию, является сильной.

Основное различие между зависимостями, соответствующими слабой и сильной неоднородностям, состоит в том, что при слабой неоднородности зависимости имеют плавный округлый вид, тогда как при сильной они резко очерчены по верхнему и нижнему уровням, то есть их вид близок к прямоугольному. Количество тех и других полос при сильной неоднородности резко возрастает. Так, в рассматриваемом интервале частот (0–50 ГГц) на рис. 5.6, *а* наблюдаются четыре колоколообразных максимума, тогда как на рис. 5.6, *г* — уже шесть широких прямоугольных и один узкий колоколообразный, то есть всего семь. То же можно видеть и при сравнении рис. 5.6, *б, в* с рис. 5.6, *д, е*.

Оценка по формуле (5.65) для слабой неоднородности при  $\varepsilon_s = 2$  дает частоту 21,213 ГГц, что не соответствует никакой из наблюдаемых полос. В то же время, если взять среднее значение проницаемости между слоями:  $\varepsilon_m = (\varepsilon_s + \varepsilon_p)/2$ , а также положить, что длина такого «составного» слоя равна сумме длин барьера и промежутка  $L_m = L_s + L_p$ , то, подставляя эти значения в формулу (5.65), получаем частоту 12,247 ГГц, что весьма близко соответствует частоте первого максимума на рис. 5.6, *а* (12,450 ГГц).

Аналогичная оценка для сильной неоднородности при  $\varepsilon_s = 10$  дает частоту 9,487 ГГц, что получается заметно выше верхнего края первого максимума на рис. 5.6, *г* (8,290 ГГц). В то же время если взять среднее значение проницаемости барьера и промежутка, а также положить слой «составным», то получаем частоту 6,396 ГГц, что также довольно близко подходит к наблюдаемому значению центра этого максимума 7,290 ГГц, а по минимумам для слоев № 15 (6,850 ГГц) и № 16 (6,810 ГГц) соответствие получается еще более близким.

Таким образом, можно полагать, что для нахождения центральной частоты первой «области непропускания» более чем (5.65) подходит следующая формула:

$$f_s^{(\text{res})} = \frac{c}{\sqrt{2(\varepsilon_s + \varepsilon_p)\mu_s(L_s + L_p)}}, \quad (5.66)$$

где полагается  $\mu_s = \mu_p$ .

Приведенные оценки выполнены для первой наиболее низкочастотной «полосы непропускания». Анализ последующих полос показывает, что их центральные частоты находятся в целочисленном кратном отношении к частоте первой полосы. Получаемое по формуле (5.66) значение первой из частот, однако является несколько заниженным, так что для повышения точности следует ввести поправочный коэффициент.

С такой эмпирической поправкой формулы для расчета центральной частоты  $n$ -й «полосы не пропускания», приобретают вид:

— при слабой неоднородности

$$f_s^{(n)} = \frac{1,0166cn}{\sqrt{2(\varepsilon_s + \varepsilon_p)\mu_s(L_s + L_p)}}, \quad (5.67)$$

— при сильной неоднородности

$$f_s^{(n)} = \frac{1,1398cn}{\sqrt{2(\varepsilon_s + \varepsilon_p)\mu_s(L_s + L_p)}}. \quad (5.68)$$

При промежуточной неоднородности поправочный коэффициент будет иметь промежуточное значение.

### 5.8. Изменение соотношения проницаемостей слоев

Рассмотрим теперь трансформацию частотных зависимостей амплитуд при изменении соотношения проницаемостей слоев. С этой целью обратимся к рис. 5.7, где показаны соответствующие зависимости для нормированной амплитуды волны обратного направления в слое № 1 ( $E_{B01}/E_{A01}$ ), то есть амплитуды отраженной волны от структуры в целом. Частотные зависимости амплитуд волн прямого направления в слоях № 15 и № 16 ведут себя сходным образом, поэтому далее не рассматриваются.

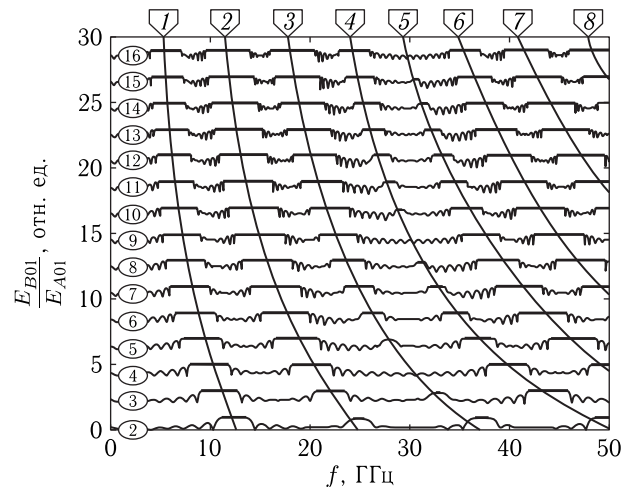


Рис. 5.7. Зависимости нормированной амплитуды обратно направленной волны в слое № 1 от частоты при различных соотношениях проницаемостей слоев. Числа в кругах около вертикальной оси слева — отношение проницаемостей барьера и промежутка  $\varepsilon_s/\varepsilon_p$ . Остальные параметры слоев — те же

При построении зависимостей  $E_{B01}/E_{A01}$  каждая последующая кривая была смещена вверх по отношению к предыдущей на 2 отн. ед., то есть нулевой уровень каждой кривой, соответствующей заданному в кругу значению  $\varepsilon_s/\varepsilon_p$ , приходится на  $(2\varepsilon_s/\varepsilon_p - 4)$  отн. ед. Горизонтальные участки кривых, выделенные утолщенными линиями, соответствуют  $E_{B01}/E_{A01} = 1$ , то есть полному отражению падающей волны от структуры в целом. Наклонные кривые проведены через середины горизонтальных участков.

Из рисунка видно, что по мере увеличения соотношения проницаемостей центральные частоты «полос не пропускания» снижаются, причем тем сильнее, чем номер полосы выше. То есть происходит как бы сгущение полос в направлении к нулю частоты. Однако при таком сгущении явного взаимного соотношения места, занимаемого отдельными полосами, не наблюдается, хотя некоторые полосы (№ 3, 4, 5 и в какой-то степени № 2) испытывают сужение с последующим расширением. Так, например, полоса № 4 при  $\varepsilon_s/\varepsilon_p = 2$  имеет ширину около 5 ГГц, которая при  $\varepsilon_s/\varepsilon_p = 9$  сужается до нуля, а при  $\varepsilon_s/\varepsilon_p = 16$  снова расширяется, составляя около 4 ГГц. При этом расстояние между окружающими ее полосами № 3 и № 5 во всем интервале изменения  $\varepsilon_s/\varepsilon_p$  монотонно уменьшается с 25 до 15 ГГц, не претерпевая никакого локального сужения в окрестности  $\varepsilon_s/\varepsilon_p = 9$ .

Таким образом, сгущение полос при увеличении  $\varepsilon_s/\varepsilon_p$  происходит довольно равномерно по всем полосам во всем исследованном диапазоне частот.

### Выводы по главе 5

Данная глава посвящена описанию распространения электромагнитных волн через структуры с периодическими неоднородностями меандрового вида. Получены распределения амплитуд волн по слоям структуры, рассмотрены их амплитудно-частотные параметры.

Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. В качестве расчетного аппарата использован метод пошагового алгоритма, первоначально разработанный для одномерных волн. В данной задаче метод обобщен на случай трехмерных электромагнитных волн, показана возможность его реализации с использованием комплексных адмиттансов и волновых чисел сред, составляющих структуру. Приведены схема и аналитическая реализация метода пошагового алгоритма для случая сред с произвольными диэлектрической и магнитной проницаемостями, а также проводимостями.

2. Исследованы частотные зависимости амплитуд волн прямого и обратного направлений в крайних слоях структуры. Показано, что такие зависимости имеют квазирезонансный характер в виде большого центрального лепестка, с обеих сторон сопровождаемого меньшими лепестками-сателлитами. Предложена модель структуры как цепочки

последовательно соединенных полуволновых резонаторов. Показано, что частота главного лепестка определяется в первую очередь диэлектрической проницаемостью барьера, но отклоняется от резонансной частоты полуволнового барьера вниз тем сильнее, чем больше различие диэлектрических проницаемостей барьера и промежутка.

3. Исследована трансформация частотных характеристик при изменении числа барьеров. Показано, что по мере увеличения числа барьеров количество лепестков увеличивается, причем между основными, определяемыми резонансными свойствами барьера, появляются промежуточные, связанные с интерференцией волн при распространении между барьерами. Получены аналитические формулы, позволяющие рассчитать частоты основных лепестков, положения их максимумов и минимумов между ними при заданном числе барьеров.

4. Исследовано распределение амплитуд волн во внутренних слоях структуры при большом различии параметров между барьерами и промежутками. Показано, что по зависимости амплитуд от координаты вдоль оси структуры преобладают два главных вида распределения — синусоидальное и экспоненциальное, по частоте поочередно переходящие друг в друга через посредство промежуточных распределений — полусинусоидального и линейного. Выявлено, что частотные интервалы существования главных распределений превышают таковые для промежуточных не менее чем в несколько раз, причем при увеличении различия параметров барьеров и промежутков такое превышение увеличивается. Показано, что как при вариации параметров, так и при изменении частоты переход основных распределений друг в друга через промежуточные всегда происходит плавно, однако частотные интервалы переходных распределений с увеличением различия параметров слоев сужаются.

5. Исследованы особенности частотных зависимостей амплитуды отраженной и проходящей волн в широком диапазоне частот при различных степенях неоднородности структуры. Введены определения сильной и слабой неоднородностей и получен критерий перехода между ними, определяемый величиной различия диэлектрических проницаемостей барьера и промежутка. Показано, что как при слабой, так и особенно при сильной неоднородностях частотные зависимости амплитуды представляют собой чередование ярко выраженных «полос пропускания» и «непропускания», подобных имеющим место в периодической структуре бесконечной протяженности, в аналитическом виде получаемых классическими методами.

6. Выявлено не отмеченное классикой нарушение правильной периодичности наблюдаемых зависимостей, состоящее в изменении частотной ширины полос вплоть до полного их исчезновения или слияния с соседними. В качестве возможной причины такого нарушения предложен ограниченный характер полного числа слоев структуры по сравнению с классическим случаем, где такое ограничение отсутствует. Для расчета центральных частот полос непропускания предложена

эмпирическая формула, включающая в себя усредненное значение проницаемостей слоев в сочетании с близким к единице поправочным коэффициентом, увеличивающимся по мере увеличения степени неоднородности.

7. Рассмотрена трансформация частотных зависимостей в широком интервале изменения соотношения проницаемостей слоев. Показано что при увеличении этого соотношения частоты середин полос того и другого вида снижаются, а их ширина также уменьшается, то есть полный спектр полос как бы поджимается к своему низкочастотному концу, причем это стремление выражено тем сильнее, чем частота полосы выше.

## Глава 6

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АЛГОРИТМА ДЛЯ РАСЧЕТА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СРЕДЕ С МАГНИТНЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Глава посвящена применению метода пошагового алгоритма для расчета распространения электромагнитных волн в многослойной структуре с периодической неоднородностью, барьеры которой обладают магнито-диэлектрическими свойствами. Показано, что в такой среде возможно распространение двух независимых волн — гиромангнитной и гироэлектрической. Рассмотрено отражение и прохождение гиромангнитной волны при падении на плоскую границу раздела двух сред с магнитными параметрами. Получены амплитуды отраженной и проходящей волн, выраженные через адмиттансы сред. Введен в рассмотрение «параметр расходимости», представляющий собой комбинацию из компонент тензора магнитной проницаемости. Показано, что в случае отрицательного знака параметра расходимости распространение гиромангнитной волны невозможно. Рассмотрен баланс потоков энергии распространяющихся волн на структуре в целом. В широком диапазоне частот рассмотрены амплитуды волн обоих направлений. В спектре распространения выявлено появление широкой линии, обусловленной магнитными свойствами среды.

В главе частично использованы материалы монографий [65], [25, стр. 27–29], [46–63, 148–182], а также статей [68, 73, 76, 96–99, 103]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

### 6.1. Геометрия задачи

Геометрия задачи совпадает с приведенной в предыдущей главе на рис. 5.1. Как и ранее, структура содержит два вида сред, обозначаемых индексами «*p*» и «*s*», каждый из которых имеет собственные значения диэлектрических  $\varepsilon_p, \varepsilon_s$  и магнитных  $\mu_p, \mu_s$  проницаемостей. В данной главе ограничимся диэлектрическими средами, то есть положим проводимости сред равными нулю:  $\sigma_{p,s} = 0$ . В качестве волноведущих параметров сред будем использовать адмиттансы  $A_{p,s,c}$ . В предыдущей главе исследовалась структура, в качестве основных параметров слоев

которой были диэлектрические проницаемости, а магнитные проницаемости всех слоев равнялись единице. Здесь же основное внимание уделим изменению именно магнитных проницаемостей слоев.

### 6.2. Электромагнитные волны в магнитной среде

Главной задачей настоящей работы является рассмотрение распространения электромагнитных волн в описанной в предыдущем разделе структуре, составляющие среды которой обладают магнитными свойствами. В главе 4, опирающейся на работу [96], рассмотрение проведено на основе волнового числа, которое для одномерной волны является определяющим параметром. В главе 5, опирающейся на работу [97], такое же рассмотрение проведено для электромагнитных волн, где роль определяющего параметра выполняет частота.

Рассматриваемый здесь случай магнитных сред является частным проявлением ситуации, описанной в предыдущей главе, поэтому математический аппарат будет тем же самым. Как и ранее, ограничимся случаем нормального падения волны, а также будем полагать все среды однородными. Диэлектрические свойства сред положим скалярными, магнитные же как скалярными, так и гиротропными. Электродинамические свойства сред будем описывать с помощью адмиттансов, а при расчете амплитуд воспользуемся методом пошагового алгоритма (глава 3), схема которого для электромагнитных волн подробно описана в главе 5 и здесь не повторяется.

Главной задачей настоящей главы является выявление роли магнитных свойств вещества сред, составляющих многослойную структуру. Будем рассматривать магнитные диэлектрики, важнейшими представителями которых являются ферриты. Во многих таких материалах магнитные свойства, в отличие от диэлектрических, могут проявляться как в скалярном, так и в тензорном виде [18–20, 24, 25]. Поэтому сначала рассмотрим роль скалярной магнитной проницаемости, после чего обратимся к тензорной проницаемости, обусловленной свойством гиротропии.

### 6.3. Скалярная магнитная проницаемость

Рассмотрим случай скалярной магнитной проницаемости. При рассмотрении будем следовать тому же порядку, что был принят в предыдущей главе для диэлектрической проницаемости. Основное внимание уделим частотным характеристикам распределения амплитуд волн в различных слоях структуры.

#### 6.3.1. Частотные характеристики при малой проницаемости

Предварительное исследование показало, что для скалярной магнитной проницаемости выполняются те же критерии слабой и сильной неоднородностей, что и для структур одномерной (разделы 4.5.1–4.5.5) и содержащей диэлектрические барьеры (раздел 5.7).

Основное различие между частотными зависимостями, соответствующими слабой и сильной неоднородностям, состоит в том, что при слабой неоднородности зависимости имеют плавный округлый вид, тогда как при сильной они резко очерчены по верхнему и нижнему уровням, то есть их вид близок к прямоугольному. В случае диэлектрических барьеров переход от слабой неоднородности к сильной происходит при  $2 \leq \varepsilon_s \leq 3$  (раздел 5.7). В случае магнитных барьеров такой же переход происходит в том же интервале изменения значений магнитной проницаемости, то есть при  $2 \leq \mu_s \leq 3$ .

В соответствии с тем же порядком действий, что был принят в предыдущей главе, прежде всего исследовались частотные зависимости амплитуд волн прямого и обратного направлений в крайних слоях структуры. Было показано, что такие зависимости имеют квазирезонансный характер в виде большого центрального лепестка, с обеих сторон сопровождаемого меньшими лепестками-сателлитами.

Приведенные в разделе 5.4 на рис. 5.2 зависимости нормированных амплитуд волн в крайних слоях структуры от частоты падающей волны, соответствующие параметрам диэлектрических барьеров  $\varepsilon_s = 1,1; 1,4; 3,0$  при  $\mu_s = 1,0$ , полностью повторяются тождественно при магнитных барьерах с параметрами  $\mu_s = 1,1; 1,4; 3,0$  при  $\varepsilon_s = 1,0$ .

То же касается трансформации частотных характеристик при изменении числа барьеров, представленной в разделе 5.5 на рис. 5.3. То есть приведенные там кривые, соответствующие  $\varepsilon_s = 2,0$ ,  $\mu_s = 1,0$ , полностью повторяются при  $\varepsilon_s = 1,0$ ,  $\mu_s = 2,0$ . Точно так же по мере увеличения числа барьеров количество лепестков увеличивается, причем между основными появляются те же промежуточные. Аналитические формулы, позволяющие рассчитать частоты основных лепестков, положение их максимумов и минимумов между ними, также полностью сохраняются. Можно полагать, что такая тождественность обусловлена решающей ролью соотношения волновых чисел барьеров и промежутков, где значение волнового числа, при скалярных обеих проницаемостях равно

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}, \quad (6.1)$$

зависит от той и другой проницаемостей полностью идентично.

### 6.3.2. Распределение амплитуд в слоях при большой вариации параметров

Рассмотрим теперь распределение амплитуд в слоях при большом изменении параметров материала от слоя к слою. Ограничимся рассмотрением волн прямого направления, так как характер распределения волн обратного направления аналогичен, подобно таковому в главах 4, 5. Здесь, в отличие от предыдущего случая, между характеристиками, соответствующими вариации диэлектрической и магнитной проницаемостей, наблюдаются определенные различия, на рассмотрении которых и остановимся.

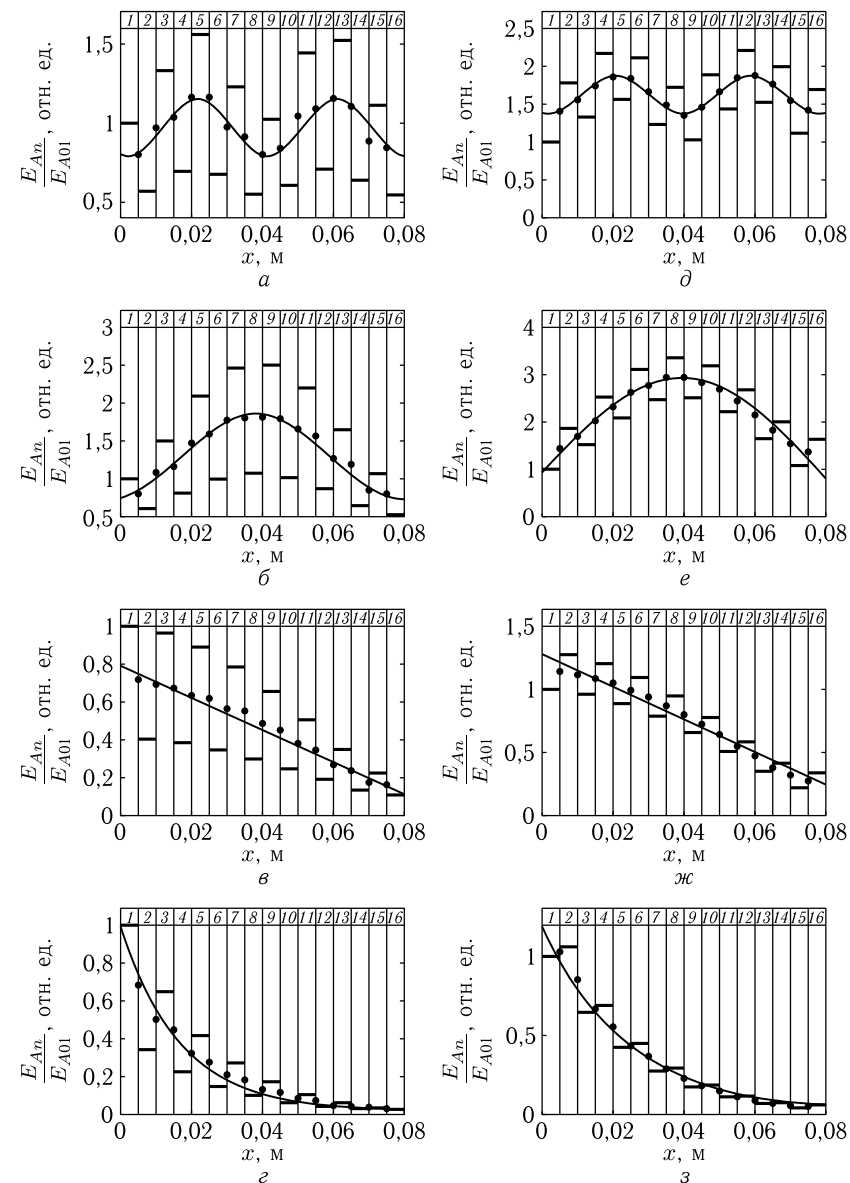


Рис. 6.1. Распределение нормированных амплитуд волн прямого направления в слоях от координаты при различных частотах падающей волны. Цифры в верхнем ряду — номера слоев. Параметры материала слоев: общие:  $\varepsilon_p = 1$ ;  $\mu_p = 1$ ;  $\sigma_{p,s} = 0$ ; специфические: а, б, в, г —  $\varepsilon_s = 10$ ;  $\mu_s = 1$ ; д, е, ж, з —  $\varepsilon_s = 1$ ;  $\mu_s = 10$ . Частоты: а, д — 4,40 ГГц; б, е — 4,95 ГГц; в, ж — 5,10 ГГц; г, з — 5,40 ГГц

Обратимся к рис. 6.1, где показано распределение нормированных амплитуд волн прямого направления в слоях от координаты при различных частотах падающей волны. Левый столбец (*a*, *б*, *в*, *г*) представляет собой распределения, имеющие место при большой диэлектрической проницаемости барьера, и приведен здесь для сравнения. Правый столбец (*д*, *е*, *ж*, *з*) иллюстрирует распределения при большой магнитной проницаемости барьера.

Из сравнения столбцов рисунка можно видеть, что те и другие распределения по форме повторяют друг друга, то есть в обоих случаях имеются все четыре вида распределения: синусоидальное (*a*, *д*), полусинусоидальное (*б*, *е*), линейное (*в*, *ж*) и экспоненциальное (*г*, *з*). Более того, сходные распределения имеют место при одних и тех же частотах. Существенным различием является тот факт, что амплитуды при большой магнитной проницаемости превышают таковые при большой диэлектрической проницаемости примерно в полтора-два раза. Кроме того, абсолютные величины амплитуд в последовательно расположенных слоях как бы находятся в противофазе друг к другу, то есть при увеличении соседствующих амплитуд в случае диэлектрической проницаемости, подобные амплитуды в случае магнитной проницаемости уменьшаются и наоборот. Так, например, амплитуда в слое №1 на рис. 6.1, *a* составляет 1,0000 отн. ед., в слое №2 — 0,5892 отн. ед., в слое №3 — 1,5009 отн. ед. Тогда как подобные амплитуды на рис. 6.1, *д* равны соответственно 1,0000 отн. ед., 1,7838 отн. ед., 1,3342 отн. ед. То есть если в слое №1, являющимся промежуток, нормированные амплитуды в обоих случаях равны единице, что задается начальным возбуждением, то в слое №2, являющимся барьером, амплитуда в случае диэлектрического барьера уменьшается, а в случае магнитного — увеличивается. При переходе от барьера №2 к промежутку №3 амплитуда в случае диэлектрического барьера увеличивается, а в случае магнитного — уменьшается.

Такое поведение амплитуд обусловлено последовательным переходом волны из менее плотной среды в более плотную и обратно при условии сохранения потока энергии [64, 70, 72, 80, 86]. Так, в случае большой диэлектрической проницаемости барьер представляет собой среду более плотную, чем промежуток, а в случае большой магнитной — менее плотную. То есть в первом случае адмиттанс барьера по сравнению с адмиттансом промежутка велик, а во втором — мал. В математическом отношении это обусловлено тем, что в выражении для адмиттанса (раздел 5.2.1, форм. (5.3)) под корнем диэлектрическая проницаемость находится в числителе, а магнитная — в знаменателе.

Аналогичным образом амплитуды в правом столбце в среднем выше амплитуд в левом из-за того, что в правом столбце относительно слоя №1, то есть слоя исхода волны, преобладают барьеры с малой плотностью, а в левом — с большой. Другими словами, усредненная по всей структуре плотность в правом столбце меньше плотности первого слоя, а в левом — больше. Таким образом, здесь выполняется то же правило

увеличения амплитуды при переходе от менее плотной среды к более плотной и обратно, что и для соседствующих слоев, но уже относительно всей структуры в целом по отношению к плотности первого слоя, где амплитуда задана условиями возбуждения.

## 6.4. Тензорная магнитная проницаемость

Теперь, когда основные свойства электромагнитной волны в многослойной структуре со скалярной магнитной проницаемостью в основном рассмотрены, обратимся к случаю, когда эта проницаемость имеет тензорный характер. В качестве предварительного этапа рассмотрим общие свойства электромагнитной волны в тензорной среде, необходимые для получения волновых чисел и адмиттансов в отдельных слоях структуры.

### 6.4.1. Волна в среде с тензорными параметрами

В большинстве сред магнитная проницаемость имеет гиротропный тензорный характер, поэтому рассмотрим сначала свойства электромагнитной волны в подобной среде. Для симметрии математического аппарата будем полагать среду бигиротропной, то есть такой, у которой как магнитная, так и диэлектрическая проницаемости обладают гиротропными свойствами.

Введем декартову систему координат *Oxyz* и направим ось *Oz* вдоль общей оси гиротропии, как это иллюстрируется рис. 6.2.

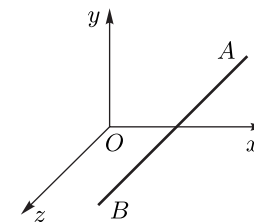


Рис. 6.2. Общая геометрия задачи. АВ — ось гиротропии

В такой геометрии тензоры проницаемостей для бигиротропной среды имеют вид [18–20, 24], [25, стр. 47, форм. (2.145), (2.146)]:

$$\overleftrightarrow{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{||} \end{pmatrix}; \quad (6.2)$$

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & i\varepsilon_a & 0 \\ -i\varepsilon_a & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{||} \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Уравнения электродинамики в системе СИ в среде с тензорными параметрами имеют вид [136, 138, 141–145], [25, стр. 47, форм. (2.147), (2.148)]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \overleftrightarrow{\mu} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad (6.4)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (6.5)$$

где:  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — электрическое и магнитное поля,  $\overleftrightarrow{\varepsilon}$  и  $\overleftrightarrow{\mu}$  — тензорные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды,  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  — электрическая и магнитная постоянные в системе СИ.

Среда предполагается однородной, компоненты тензоров могут быть комплексными. Полагая зависимость от времени в виде  $\exp(i\omega t)$ , получаем:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega\mu_0 \overleftrightarrow{\mu} \mathbf{H}; \quad (6.6)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = i\omega\varepsilon_0 \overleftrightarrow{\varepsilon} \mathbf{E}. \quad (6.7)$$

Составляющие правых частей уравнений (6.6) и (6.7) имеют вид:

$$\overleftrightarrow{\mu} \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{||} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu H_x + i\mu_a H_y \\ -i\mu_a H_x + \mu H_y \\ \mu_{||} H_z \end{pmatrix}; \quad (6.8)$$

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon & i\varepsilon_a & 0 \\ -i\varepsilon_a & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{||} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon E_x + i\varepsilon_a E_y \\ -i\varepsilon_a E_x + \varepsilon E_y \\ \varepsilon_{||} E_z \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Записывая уравнения (6.6)–(6.7) по компонентам, получаем:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega\mu_0 (\mu H_x + i\mu_a H_y); \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu_0 (-i\mu_a H_x + \mu H_y); \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu_0 \mu_{||} H_z; \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = i\omega\varepsilon_0 (\varepsilon E_x + i\varepsilon_a E_y); \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega\varepsilon_0 (-i\varepsilon_a E_x + \varepsilon E_y); \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\varepsilon_0 \varepsilon_{||} E_z. \quad (6.15)$$

Положим, что координатно-временная составляющая волны имеет вид:

$$\exp[i(\omega t - \mathbf{kr})] = \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)]. \quad (6.16)$$

При этом получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow -ik_x, \quad \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow -ik_y, \quad \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -ik_z. \quad (6.17)$$

Из (6.10)–(6.15), раскрывая скобки, перенося все слагаемые в левую часть и обозначая через  $E_{x,y,z}$ ,  $H_{x,y,z}$  амплитуды полей волны, получаем:

$$-ik_y E_z + ik_z E_y + i\omega\mu_0 \mu H_x - \omega\mu_0 \mu_a H_y = 0; \quad (6.18)$$

$$-ik_z E_x + ik_x E_z + \omega\mu_0 \mu_a H_x + i\omega\mu_0 \mu H_y = 0; \quad (6.19)$$

$$-ik_x E_y + ik_y E_x + i\omega\mu_0 \mu_{||} H_z = 0; \quad (6.20)$$

$$-ik_y H_z + ik_z H_y - i\omega\varepsilon_0 \varepsilon E_x + \omega\varepsilon_0 \varepsilon_a E_y = 0; \quad (6.21)$$

$$-ik_z H_x + ik_x H_z - \omega\varepsilon_0 \varepsilon_a E_x - i\omega\varepsilon_0 \varepsilon E_y = 0; \quad (6.22)$$

$$-ik_x H_y + ik_y H_x - i\omega\varepsilon_0 \varepsilon_{||} E_z = 0. \quad (6.23)$$

Это основная система уравнений для волны, распространяющейся в произвольном направлении в бигиротропной среде, имеющей ось гиротропии вдоль оси  $Oz$ . Частные случаи подобной системы для несколько другой геометрии приведены в работах [18–20, 24, 25, 146, 147]. В работах [148, 149] близкая система использовалась для исследования распространения волн в композиционной среде, содержащей ферритовые элементы в условиях ориентационного перехода. В настоящей работе эта система полагается в основу задачи о многослойной среде с магнитными параметрами.

#### 6.4.2. Ориентация волнового вектора по нормали к оси гиротропии

Рассмотрим теперь более простой частный случай — плоскую волну, волновой вектор которой ориентирован по нормали к оси гиротропии, то есть в плоскости  $Oxy$  при  $k_z = 0$ . Из (6.18)–(6.23) получаем:

$$-ik_y E_z + i\omega\mu_0 \mu H_x - \omega\mu_0 \mu_a H_y = 0; \quad (6.24)$$

$$ik_x E_z + \omega\mu_0 \mu_a H_x + i\omega\mu_0 \mu H_y = 0; \quad (6.25)$$

$$-ik_x E_y + ik_y E_x + i\omega\mu_0 \mu_{||} H_z = 0; \quad (6.26)$$

$$-ik_y H_z - i\omega\varepsilon_0 \varepsilon E_x + \omega\varepsilon_0 \varepsilon_a E_y = 0; \quad (6.27)$$

$$ik_x H_z - \omega\varepsilon_0 \varepsilon_a E_x - i\omega\varepsilon_0 \varepsilon E_y = 0; \quad (6.28)$$

$$-ik_x H_y + ik_y H_x - i\omega\varepsilon_0 \varepsilon_{||} E_z = 0. \quad (6.29)$$

Эту систему уравнений можно разбить на две независимые группы — одну, содержащую только  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $E_z$  — уравнения (6.24), (6.25), (6.29), другую — содержащую только  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_z$  — уравнения (6.26), (6.27), (6.28). Умножаем уравнения (6.24), (6.26), (6.29) на  $-i$ , (6.27) на  $i$ , (6.28) на  $-1$ , (6.25) — оставляем без изменения. Объединяя уравнения в две группы, получаем две независимые системы уравнений, каждая из которых описывает свою независимую волну:



— гиромагнитная:

$$\omega\mu_0\mu H_x + i\omega\mu_0\mu_a H_y - k_y E_z = 0; \quad (6.30)$$

$$\omega\mu_0\mu_a H_x + i\omega\mu_0\mu H_y + ik_x E_z = 0; \quad (6.31)$$

$$k_y H_x - k_x H_y - \omega\varepsilon_0\varepsilon_{||} E_z = 0; \quad (6.32)$$

— гироэлектрическая:

$$\omega\varepsilon_0\varepsilon E_x + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_a E_y + k_y H_z = 0; \quad (6.33)$$

$$\omega\varepsilon_0\varepsilon_a E_x + i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_y - ik_x H_z = 0; \quad (6.34)$$

$$k_y E_x - k_x E_y + \omega\mu_0\mu_{||} H_z = 0. \quad (6.35)$$

Поскольку в данной задаче (многослойная структура с магнитными свойствами) главный интерес представляют вариации именно магнитной проницаемости, то будем считать диэлектрическую проницаемость скалярной величиной  $\varepsilon$ , то есть в выражениях (6.32)–(6.34) положим  $\varepsilon_a = 0$ ,  $\varepsilon_{||} = \varepsilon$ . Таким образом, дальше ограничимся рассмотрением только гиромагнитной волны.

### 6.4.3. Поля гиромагнитной волны

Рассмотрим гиромагнитную волну, геометрия полей для которой, совпадающая с принятой в [146–149], показана на рис. 6.3.

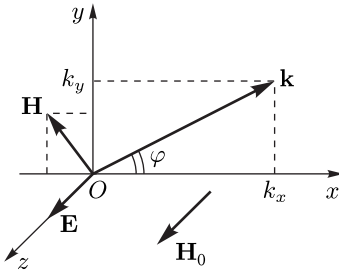


Рис. 6.3. Геометрия полей для гиромагнитной волны

Здесь гиротропия обеспечивается магнитным полем  $\mathbf{H}_0$ , направленным вдоль оси  $Oz$ , волновой вектор лежит в плоскости  $Oxy$ , электрическое поле волны направлено вдоль оси  $Oz$ , а магнитное — лежит в плоскости  $Oxy$ .

Система уравнений для  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $E_z$  имеет вид:

$$\omega\mu_0\mu H_x + i\omega\mu_0\mu_a H_y - k_y E_z = 0; \quad (6.36)$$

$$\omega\mu_0\mu_a H_x + i\omega\mu_0\mu H_y + ik_x E_z = 0; \quad (6.37)$$

$$k_y H_x - k_x H_y - \omega\varepsilon_0\varepsilon E_z = 0. \quad (6.38)$$

Из условия равенства нулю детерминанта этой системы получаем дисперсионное соотношение:

$$k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2\mu_0(\mu^2 - \mu_a^2)\varepsilon_0\varepsilon}{\mu}. \quad (6.39)$$

Система (6.36)–(6.38) является однородной (справа — нули) и содержит три уравнения для трех неизвестных, поэтому два неизвестных можно выразить через третье. Полагая заданным  $E_z$ , получаем систему для определения  $H_x$  и  $H_y$ :

$$\omega\mu_0\mu H_x + i\omega\mu_0\mu_a H_y = k_y E_z; \quad (6.40)$$

$$\omega\mu_0\mu_a H_x + i\omega\mu_0\mu H_y = -ik_x E_z; \quad (6.41)$$

$$k_y H_x - k_x H_y = \omega\varepsilon_0\varepsilon E_z, \quad (6.42)$$

решая которую находим поля гиромагнитной волны в виде:

$$H_x = \frac{k_y\mu + ik_x\mu_a}{\omega\mu_0(\mu^2 - \mu_a^2)} E_z; \quad (6.43)$$

$$H_y = \frac{-k_x\mu + ik_y\mu_a}{\omega\mu_0(\mu^2 - \mu_a^2)} E_z. \quad (6.44)$$

Здесь, в отличие от изотропной среды, электромагнитная волна с волновым вектором вдоль оси  $Ox$ , кроме поперечных компонент электрического и магнитного полей  $E_z$  и  $H_y$ , имеет также продольную компоненту магнитного поля  $H_x$ . Причиной появления продольной магнитной составляющей электромагнитной волны является магнитная гиротропия.

### 6.4.4. Полярная система координат

Вводя угол  $\varphi$  между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и осью  $Ox$  (рис. 6.3), получаем:

$$k_x = k \cos \varphi; \quad (6.45)$$

$$k_y = k \sin \varphi, \quad (6.46)$$

а также, учитывая, что

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2, \quad (6.47)$$

из (6.39) получаем дисперсионное соотношение в следующем виде:

$$k^2 = \frac{\omega^2\mu_0(\mu^2 - \mu_a^2)\varepsilon_0\varepsilon}{\mu}, \quad (6.48)$$

откуда находим волновое число

$$k = \omega \cdot \sqrt{\mu_0 \left( \mu - \frac{\mu_a^2}{\mu} \right) \varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (6.49)$$

Из (6.43) и (6.44) получаем компоненты вектора магнитного поля волны:

$$H_x = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{||}}{\mu_0 \mu (\mu^2 - \mu_a^2)}} (\mu \sin \varphi + i \mu_a \cos \varphi) E_z; \quad (6.50)$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{||}}{\mu_0 \mu (\mu^2 - \mu_a^2)}} (-\mu \cos \varphi + i \mu_a \sin \varphi) E_z. \quad (6.51)$$

#### 6.4.5. Импедансы и адмиттансы

Для удобства записи выражений (6.50)–(6.51), введем **импедансы**:

— линейномагнитный

$$Z_e = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu (\mu^2 - \mu_a^2)}{\varepsilon_0 \varepsilon}}; \quad (6.52)$$

— гиромагнитный:

$$Z_m = \frac{1}{\mu_a} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu (\mu^2 - \mu_a^2)}{\varepsilon_0 \varepsilon}}. \quad (6.53)$$

При этом поля волны (6.50)–(6.51) принимают вид:

$$H_x = \left( \frac{\sin \varphi}{Z_e} + i \frac{\cos \varphi}{Z_m} \right) E_z; \quad (6.54)$$

$$H_y = \left( -\frac{\cos \varphi}{Z_e} + i \frac{\sin \varphi}{Z_m} \right) E_z. \quad (6.55)$$

Наряду с импедансами, поля гиромагнитной волны можно выразить через обратные им величины — **адмиттансы**, что при расчете полей электромагнитной волны в многослойной структуре (раздел 5.2.1) составляет определенное удобство:

— линейномагнитный

$$A_e = \mu \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu (\mu^2 - \mu_a^2)}}; \quad (6.56)$$

— гиромагнитный

$$A_m = \mu_a \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu (\mu^2 - \mu_a^2)}}. \quad (6.57)$$

При этом поля (6.50) и (6.51) принимают вид:

$$H_x = (A_e \sin \varphi + i A_m \cos \varphi) E_z; \quad (6.58)$$

$$H_y = (-A_e \cos \varphi + i A_m \sin \varphi) E_z. \quad (6.59)$$

Для волны, волновой вектор которой направлен вдоль оси  $Ox$ , то есть при  $\varphi = 0$ , поля приобретают особенно простой вид:

$$H_x = i \frac{E_z}{Z_m} = i A_m E_z; \quad (6.60)$$

$$H_y = -\frac{E_z}{Z_e} = -A_e E_z. \quad (6.61)$$

В выражениях (6.58) и (6.60) коэффициент « $i$ » при  $x$ -компонентах магнитных полей означает изменение фазы на  $\pi/2$  в соответствии с выражением, следующим из формулы Эйлера:

$$i = e^{i\pi/2}, \quad (6.62)$$

то есть

$$i e^{i(\omega t - k_1 x)} = e^{i(\omega t - k_1 x + \pi/2)}; \quad (6.63)$$

$$i e^{i(\omega t + k_1 x)} = e^{i(\omega t + k_1 x + \pi/2)}. \quad (6.64)$$

В случае изотропной среды, то есть при  $\mu_a = 0$ , ее свойства определяются линейномагнитными импедансом и адмиттансом, которые принимают классический вид [136, 138, 141–145]:

$$Z_e = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}}; \quad (6.65)$$

$$A_e = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}}. \quad (6.66)$$

При этом гиромагнитные импеданс и адмиттанс соответственно равны:

$$Z_m = \infty; \quad (6.67)$$

$$A_m = 0. \quad (6.68)$$

### 6.5. Падение гиромагнитной волны на границу раздела двух сред

Рассмотрим в качестве предварительной задачи отражение и прохождение гиромагнитной волны через плоскую границу раздела двух сред при нормальном падении. Частные случаи подобной задачи для среды, содержащей ферритовые элементы в условиях ориентационного перехода, рассмотрены в работах [148, 149], здесь же проведем рассмотрение в более общем виде.

Геометрия задачи, аналогичная принятой в [148, 149], иллюстрируется рис. 6.4. Показаны заполненные волноведущими средами две области пространства 1 и 2, разделенные плоской границей между ними. Ось гиротропии, определяемая заданием постоянного магнитного поля, лежит в плоскости границы.

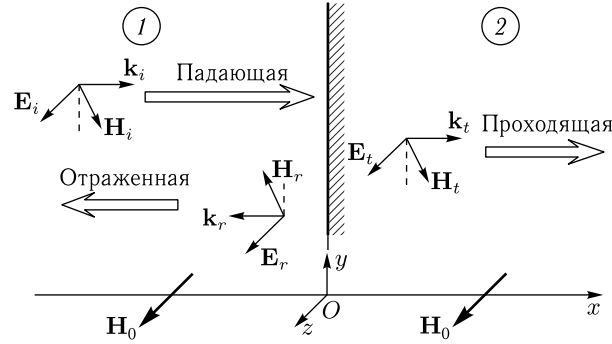


Рис. 6.4. Геометрия падения волны на плоскую границу раздела двух сред

Волна падает из области 1 на границу раздела между областями 1 и 2, частично проходит в область 2 и частично отражается обратно в область 1. Волновые векторы падающей  $\mathbf{k}_i$ , проходящей  $\mathbf{k}_t$  и отраженной  $\mathbf{k}_r$  волн перпендикулярны границе раздела сред. Электрические поля всех волн параллельны плоскости раздела, магнитные имеют две составляющие — параллельную и перпендикулярную плоскости раздела. Ось координат  $Ox$  перпендикулярна границе раздела, плоскость  $Oxy$  совпадает с плоскостью раздела сред, ось  $Oz$  параллельна вектору электрического поля падающей волны  $\mathbf{E}_i$ .

Полные координатно-временные зависимости полей имеют вид:

$$\text{для падающей волны — } e^{i(\omega t - k_1 x)}; \quad (6.69)$$

$$\text{для отраженной волны — } e^{i(\omega t + k_1 x)}; \quad (6.70)$$

$$\text{для проходящей волны — } e^{i(\omega t - k_2 x)}. \quad (6.71)$$

Обозначая амплитуды электрических полей падающей, отраженной и проходящей волн через  $E_{i0}$ ,  $E_{r0}$  и  $E_{t0}$  соответственно, получаем координатные составляющие полей падающей, отраженной и проходящей волн, выраженные через  $E_{i0}$ ,  $E_{r0}$ ,  $E_{t0}$  (записываем через адмиттансы только отличные от нуля компоненты):

— для падающей волны

$$E_{iz} = E_{i0} e^{-ik_1 x} \text{ — задано}; \quad (6.72)$$

$$H_{ix} = iA_{m1} E_{i0} e^{-ik_1 x}; \quad (6.73)$$

$$H_{iy} = -A_{e1} E_{i0} e^{-ik_1 x}; \quad (6.74)$$

— для отраженной волны

$$E_{rz} = E_{r0} e^{ik_1 x}; \quad (6.75)$$

$$H_{rx} = -iA_{m1} E_{r0} e^{ik_1 x}; \quad (6.76)$$

$$H_{ry} = A_{e1} E_{r0} e^{ik_1 x}; \quad (6.77)$$

— для проходящей волны

$$E_{tz} = E_{t0} e^{-ik_2 x}; \quad (6.78)$$

$$H_{tx} = iA_{m2} E_{t0} e^{-ik_2 x}; \quad (6.79)$$

$$H_{ty} = -A_{e2} E_{t0} e^{-ik_2 x}. \quad (6.80)$$

Координатные составляющие полей по обе стороны от границы раздела сред равны:

— в среде 1 —

$$E_{1z} = E_{i0} e^{ik_1 x} + E_{r0} e^{-ik_1 x}; \quad (6.81)$$

$$H_{1x} = iA_{m1} E_{i0} e^{-ik_1 x} - iA_{m1} E_{r0} e^{ik_1 x}; \quad (6.82)$$

$$H_{1y} = -A_{e1} E_{i0} e^{-ik_1 x} + A_{e1} E_{r0} e^{ik_1 x}; \quad (6.83)$$

— в среде 2 —

$$E_{2z} = E_{t0} e^{-ik_2 x}; \quad (6.84)$$

$$H_{2x} = iA_{m2} E_{t0} e^{-ik_2 x}; \quad (6.85)$$

$$H_{2y} = -A_{e2} E_{t0} e^{-ik_2 x}. \quad (6.86)$$

**Граничные условия** — непрерывность касательных составляющих полей на границе раздела, имеют вид:

$$E_{1z}|_{x=0} = E_{2z}|_{x=0}, \quad (6.87)$$

$$H_{1y}|_{x=0} = H_{2y}|_{x=0}. \quad (6.88)$$

Подставляя (6.81)–(6.86) в (6.87), (6.88) и решая полученную систему относительно амплитуд отраженной и проходящей волн, а также учитывая (6.69)–(6.71), получаем поля всех волн в виде:

— поля падающей волны

$$E_{iz} = E_{i0} \text{ — задано}; \quad (6.89)$$

$$H_{ix} = iA_{m1} E_{i0}; \quad (6.90)$$

$$H_{iy} = -A_{e1} E_{i0}; \quad (6.91)$$

— поля отраженной волны

$$E_{rz} = \frac{A_{e1} - A_{e2}}{A_{e1} + A_{e2}} E_{i0}; \quad (6.92)$$

$$H_{rx} = iA_{m1} \frac{-A_{e1} + A_{e2}}{A_{e1} + A_{e2}} E_{i0}; \quad (6.93)$$

$$H_{ry} = A_{e1} \frac{A_{e1} - A_{e2}}{A_{e1} + A_{e2}} E_{i0}; \quad (6.94)$$

— поля проходящей волны:

$$E_{tz} = \frac{2A_{e1}}{A_{e1} + A_{e2}} E_{i0}; \quad (6.95)$$

$$H_{ix} = iA_{m2} \frac{2A_{e1}}{A_{e1} + A_{e2}} E_{i0}; \quad (6.96)$$

$$H_{ty} = -A_{e2} \frac{2A_{e1}}{A_{e1} + A_{e2}} E_{i0}. \quad (6.97)$$

При этом для каждой из волн определяющим является электрическое поле вдоль оси  $Oz$ , а обе компоненты магнитного поля — поперечная вдоль оси  $Oy$  и продольная вдоль оси  $Ox$  — получаются в соответствии с выражениями (6.90)–(6.91), (6.93)–(6.94), (6.96)–(6.97), причем для отраженной волны надо учитывать изменение знака обеих этих составляющих за счет изменения направления распространения, как это видно из рис. 6.4.

Из выражений (6.89)–(6.97) видно, что они с точностью до замены импедансов на адмиттансы совпадают с аналогичными выражениями полей для электромагнитной волны в изотропной среде [1, стр. 78–81, форм. (2.60)–(2.67)]. Отсюда можно сделать вывод, что электрические поля волн в различных слоях многослойной структуры, содержащей гиротропные магнитные среды, подчиняются тем же законам распространения, что и поля в случае изотропных сред.

Это означает, что для определения полей волн в такой структуре можно использовать тот же пошаговый алгоритм (глава 3), что и для одномерной волны, вариант которого для электромагнитной волны приведен в главе 5.

**Замечание.** Проведенное рассмотрение выполнено для случая, когда направления осей гиротропии во всех слоях структуры совпадают. Однако такие направления могут между собой не совпадать, например если одна из сред обладает анизотропией, ось которой не совпадает с осью  $Oz$ , а анизотропия в другой среде отсутствует или имеет другую ориентацию. Решение подобной задачи, несомненно, имеет прикладное значение, однако авторам настоящей монографии неизвестно, так что любознательный читатель вполне может попробовать свои силы в этой области.

## 6.6. Тензор магнитной проницаемости

Применение пошагового алгоритма требует предварительного вычисления адмиттансов (6.56)–(6.57), в случае гиротропной магнитной среды выражаемых через компоненты тензора магнитной проницаемости  $\mu$  и  $\mu_a$ . Рассмотрим теперь конкретный вид этого тензора.

Высокочастотные магнитные свойства материала описываются на основе модели прецессии вектора намагниченности. Для этого будем

пользоваться уравнением движения для намагниченности Ландау–Лифшица с диссипативным членом в форме Гильберта [18–20, 24, 25]:

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma [\mathbf{m} \times \mathbf{H}_e] + \alpha \left[ \mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \right], \quad (6.98)$$

где  $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_0$  — нормированный вектор намагниченности,  $M_0$  — намагниченность насыщения,  $\gamma$  — гиромангнитная постоянная,  $H_e$  — эффективное поле внутри магнетика,  $\alpha$  — параметр затухания Гильберта.

Решая это уравнение традиционным методом линеаризации [18–20], [24, стр. 41–46], [25, стр. 27–29], получаем компоненты тензора магнитной восприимчивости в виде:

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega_H + i\alpha\Omega}{\Omega_H^2 - (1 + \alpha^2)\Omega^2 + i2\alpha\Omega\Omega_H}; \quad (6.99)$$

$$\chi_a = \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega}{\Omega_H^2 - (1 + \alpha^2)\Omega^2 + i2\alpha\Omega\Omega_H}, \quad (6.100)$$

где

$$\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}; \quad (6.101)$$

$$\Omega_H = \frac{H_0}{4\pi M_0}. \quad (6.102)$$

Полагая магнитные потери достаточно малыми ( $\alpha \ll 1$ ) и освобождаясь от мнимости в знаменателе, получаем:

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \frac{(\Omega_H + i\alpha\Omega)(\Omega_H^2 - \Omega^2 - i2\alpha\Omega\Omega_H)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}; \quad (6.103)$$

$$\chi_a = \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega(\Omega_H^2 - \Omega^2 - i2\alpha\Omega\Omega_H)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}. \quad (6.104)$$

Для дальнейшего упрощения положим мнимые части в числителях обоих этих выражений равными нулю (при этом мы теряем фазу и частично потери, но для первого рассмотрения будем полагать это несущественным):

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega_H(\Omega_H^2 - \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}; \quad (6.105)$$

$$\chi_a = \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega(\Omega_H^2 - \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}. \quad (6.106)$$

Учитывая, что магнитная проницаемость связана с восприимчивостью соотношением

$$\vec{\mu} = \vec{1} + 4\pi \vec{\chi}, \quad (6.107)$$

где  $\vec{1}$  — единичный тензор, получаем компоненты тензора магнитной проницаемости в виде:

$$\mu = 1 + \frac{\Omega_H(\Omega_H^2 - \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}; \quad (6.108)$$

$$\mu_a = \frac{\Omega(\Omega_H^2 - \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}. \quad (6.109)$$

**Замечание.** Динамическая магнитная восприимчивость вещества, обусловленная прецессией вектора намагниченности, традиционно рассчитывается в системе СГС [18–20, 24, 25]. Однако распространение электромагнитных волн в настоящей работе рассчитывается в системе СИ [136, 138, 141–145]. Правила перехода от одной системы к другой можно найти, например, в учебных монографиях [150, 151], а также частично в [135, стр. 370–380, 668–675]. При переходе к системе СИ восприимчивость (6.105)–(6.106) приобретает вид:

$$\chi^{(СИ)} = \frac{\Omega_H(\Omega_H^2 - \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}; \quad (6.110)$$

$$\chi_a^{(СИ)} = \frac{\Omega(\Omega_H^2 - \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega\Omega_H)^2}. \quad (6.111)$$

При этом проницаемость (6.107) вычисляется по формуле:

$$\overset{\leftarrow}{\mu}^{(СИ)} = 1 + \overset{\leftarrow}{\chi}^{(СИ)}, \quad (6.112)$$

в результате чего формулы (6.108)–(6.109), используемые для расчета адмиттансов (6.56)–(6.57), остаются без изменения.

### 6.6.1. Характерные частоты

Отметим сначала некоторые параметры, важные для дальнейшего рассмотрения. Исходя из частотной зависимости компонент проницаемости, выделим следующие характерные частоты:

- частота, где обе компоненты проницаемости  $\mu$  и  $\mu_a$  в отсутствие затухания расходятся, а при наличии затухания  $\mu$  проходит через единицу, а  $\mu_a$  — через нуль:

$$f_a = \gamma H; \quad (6.113)$$

- частота, где компонента проницаемости  $\mu$  в отсутствие затухания проходит через нуль:

$$f_b = \gamma(H + 2\pi M); \quad (6.114)$$

- частота, где параметр расходимости  $\vartheta$  (рассмотрен подробно в следующем разделе) в отсутствие затухания проходит через нуль:

$$f_c = \gamma(H + 4\pi M). \quad (6.115)$$

В дальнейшем, кроме особо оговариваемых случаев, будем использовать следующие параметры магнитной среды: поле  $H = 10\,000$  Э; намагниченность  $4\pi M_0 = 1750$  Гс; гиромагнитная постоянная  $\gamma = 2,80$  МГц  $\cdot$  Э $^{-1}$ .

При этих параметрах характерные частоты имеют следующие значения:

$$f_a = 28,000 \text{ ГГц}; \quad f_b = 30,450 \text{ ГГц}; \quad f_c = 32,900 \text{ ГГц}.$$

### 6.6.2. Параметр расходимости

Важной характеристикой, в значительной степени определяющей свойства распространения волн, является параметр  $\vartheta$ , условно названный нами «параметром расходимости»:

$$\vartheta = \frac{\mu^2 - \mu_a^2}{\mu}. \quad (6.116)$$

Этот параметр входит в подкоренные выражения для волнового числа (6.49) и адмиттанса (6.56)–(6.57). Так что волновое число и адмиттанс могут быть действительными только при положительности этого параметра. В случае его отрицательности волна не может распространяться.

Предварительное рассмотрение показывает, что в отсутствие затухания на частоте  $f_a$  этот параметр имеет особенность типа расходимости, на частотах  $f_b$  и  $f_c$  меняет знак, то есть проходит через нуль. В интервале между  $f_b$  и  $f_c$  этот параметр отрицателен, то есть этот интервал для распространения волны запрещен. В результате волновое число положительно везде на частотах ниже  $f_b$ , кроме небольшой окрестности около частоты  $f_a$ , а также на частотах выше  $f_c$ . Адмиттанс положителен только на частотах ниже  $f_a$  и выше  $f_c$ . Между частотами  $f_b$  и  $f_c$  он не существует (запрещенный интервал), а между частотами  $f_a$  и  $f_b$  является действительным, но имеет отрицательный знак.

Таким образом, когда параметр расходимости  $\vartheta$  отрицателен, волновое число и адмиттанс не существуют.

При принятых параметрах задачи можно указать приближенные границы запрещенных и разрешенных участков. Так, предварительное рассмотрение показало, что при крайне слабом затухании ( $\alpha < 0,001$ ) в пределах исследованного интервала от 20 до 40 ГГц запрещенные участки имеют частоты 28,0–28,2 ГГц; 30,2–33,0 ГГц. При этом разрешенные участки соответствуют частотам 20,0–28,2 ГГц; 28,2–30,2 ГГц; 33,0–40,0 ГГц. При крайне сильном затухании  $\alpha > 0,10$  весь интервал частот разрешен.

После такого краткого введения обратимся к рассмотрению роли затухания в распространении волны более подробно.

### 6.6.3. Три интервала параметра затухания

По свойствам распространения волн можно выделить три характерных вида его поведения, различающихся значениями параметра затухания  $\alpha$ . Интервалы значений  $\alpha$ , определяющие эти свойства, можно условно охарактеризовать затуханием «слабым», «средним» и «сильным». Численное исследование позволило выявить два характерных значения параметра затухания, разделяющего эти три области. Так, при  $H = 10\,000$  Э и  $4\pi M_0 = 1750$  Гс характерные значения равны 0,04198 и 0,08401. Слабое затухание соответствует интервалу  $0 \leq \alpha \leq 0,04198$ , среднее — интервалу  $0,04198 \leq \alpha \leq 0,08401$ , сильное — интервалу

$0,08401 \leq \alpha < +\infty$ . Приведенные численные значения определяются особыми точками характерных значений компонент тензора магнитной проницаемости  $\mu$  и  $\mu_a$ , вследствие чего являются резкими (в настоящей работе определялись с точностью до четырех значащих цифр).

Рассмотрим важные для дальнейшего характерные частотные свойства компонент тензора проницаемости  $\mu$  и  $\mu_a$ , параметра расходимости  $\vartheta$ , волнового числа  $k$  и адмиттанса  $A_e$  в упомянутых трех интервалах параметра затухания.

#### 6.6.4. Затухание слабое

Слабое затухание соответствует интервалу  $0 \leq \alpha \leq 0,04198$ . Обратимся к рис. 6.5, где показаны частотные зависимости характерных параметров распространения волн при параметре затухания равном  $\alpha = 0,01$ .

Из рис. 6.5, *а* видно, что обе компоненты проницаемости проходят через нуль вблизи частоты  $f_a$ . Более подробное исследование показывает, что точно на частоте  $f_a$  компонента проницаемости  $\mu$  проходит через единицу, а компонента  $\mu_a$  — через нуль. По обе стороны от этой частоты при стремлении затухания к нулю обе компоненты расходятся на плюс-минус бесконечность. Компонента  $\mu$  проходит через нуль вблизи частоты  $f_b$  (здесь — несколько ниже, но при  $\alpha \rightarrow 0$  проходит точно). Между  $f_a$  и  $f_b$  величина  $\mu$  отрицательна. При увеличении частоты  $\mu$  стремится к единице, а  $\mu_a$  — к нулю, то есть разность квадратов этих компонент, находящаяся в числителе выражения для параметра расходимости  $\vartheta$  (6.116), всегда положительна.

На рис. 6.5, *б* приведена частотная зависимость для параметра расходимости  $\vartheta$ . Его знак здесь определяется соотношением знаков компонент проницаемости  $\mu$  и  $\mu_a$ . Видно, что этот параметр в областях ниже частоты  $f_b$  и выше  $f_c$  положителен, а между  $f_b$  и  $f_c$  — отрицателен. Это означает, что волновое число и адмиттанс между  $f_b$  и  $f_c$  определены быть не могут. Небольшая особенность параметра при частоте  $f_a$  отражает прохождение  $\mu$  и  $\mu_a$  через нуль, сопровождаемое по обе стороны от этой частоты расходимостью противоположных знаков. При  $\alpha \rightarrow 0$  подобную же расходимость испытывает и  $\vartheta$ .

На рис. 6.5, *в* приведена частотная зависимость для волнового числа  $k$ . Поскольку, согласно (6.49), волновое число пропорционально квадратному корню из  $\vartheta$ , то его частотная зависимость также подобна зависимости для  $\vartheta$ . Между частотами  $f_b$  и  $f_c$  волновое число не определено, а на частоте  $f_c$  — равно нулю в силу равенства нулю на этой частоте параметра  $\vartheta$ . Небольшая особенность  $k$  на частоте  $f_a$  идентична подобной особенности  $\vartheta$ .

На рис. 6.5, *г* приведена частотная зависимость для адмиттанса  $A_e$ . В соответствии с (6.56) знак его определяется произведением корня из  $\vartheta$  на  $\mu$ . Поэтому в области между  $f_a$  и  $f_b$ , где  $\mu$  отрицательна (рис. 6.5, *а*), знак адмиттанса  $A_e$  тоже отрицательный. Между частотами  $f_b$  и  $f_c$  адмиттанс не определен в силу отрицательности  $\vartheta$ ,

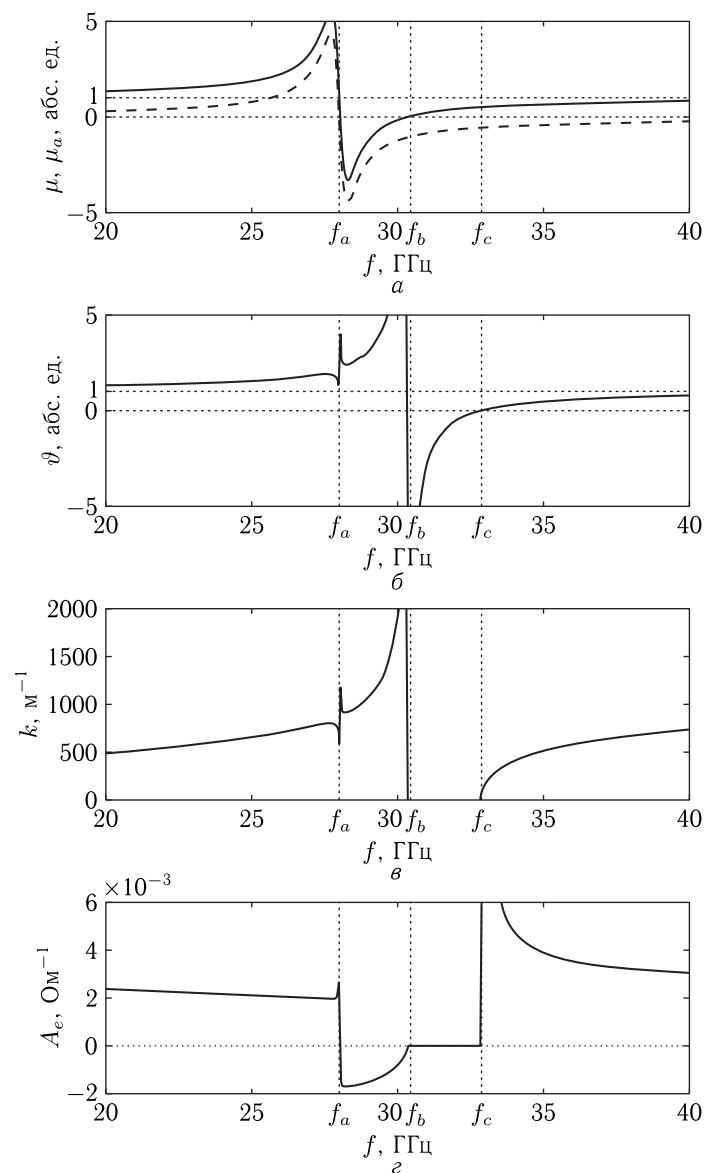


Рис. 6.5. Частотные зависимости характерных параметров распространения волны при слабом затухании:  $\alpha = 0,01$ . *а* — компоненты тензора проницаемости  $\mu$  — сплошная линия,  $\mu_a$  — пунктир; *б* — параметр расходимости  $\vartheta$ ; *в* — волновое число  $k$ ; *г* — адмиттанс  $A_e$ . Горизонтальные точечные линии соответствуют нулю и единице, вертикальные — значениям характерных частот  $f_a, f_b, f_c$

а ниже  $f_a$  и выше  $f_c$  — положителен. В положительной окрестности частоты  $f_c$  адмиттанс расходитя, что обусловлено прохождением через нуль параметра  $\vartheta$ .

Таким образом, можно сделать вывод, что при слабом затухании волна в магнитной среде может распространяться ниже частоты  $f_a$  и выше частоты  $f_c$  обычным порядком, то есть при положительном адмиттансе, между частотами  $f_a$  и  $f_b$  — при отрицательном адмиттансе, а интервал частот между  $f_b$  и  $f_c$  для распространения волны является полностью запрещенным.

### 6.6.5. Затухание среднее

Среднее затухание соответствует интервалу  $0,04198 \leq \alpha \leq 0,08401$ . Обратимся к рис. 6.6, где показаны частотные зависимости характерных параметров распространения волн при параметре затухания равном  $\alpha = 0,05$ .

Из рис. 6.6, а видно, что на частоте  $f_a$ , как и при слабом затухании, компонента проницаемости  $\mu$  проходит через единицу, а компонента  $\mu_a$  — через нуль. По обе стороны от этой частоты они проходят через небольшие экстремумы — ниже  $f_a$  через максимум, выше — через минимум. Обе зависимости подобны друг другу с учетом сдвига  $\mu$  вверх по отношению к  $\mu_a$  на единицу. Во всем интервале частот  $\mu$  положительна, тогда как  $\mu_a$  ниже  $f_a$  положительна, а выше — отрицательна.

В интервале частот, начинающемся несколько выше  $f_b$  и заканчивающемся несколько ниже  $f_c$ , абсолютная величина  $\mu_a$  превышает абсолютную величину  $\mu$ . В этом интервале разность квадратов  $\mu^2 - \mu_a^2$ , присутствующая в числителе выражения для  $\vartheta$ , отрицательна. Вне этого интервала по частоте в обе стороны абсолютная величина  $\mu$  всегда превышает абсолютную величину  $\mu_a$ , то есть разность  $\mu^2 - \mu_a^2$  всегда положительна.

На рис. 6.6, б приведена частотная зависимость для параметра расхожимости  $\vartheta$ . Его знак здесь определяется соотношением знаков компонент проницаемости  $\mu$  и  $\mu_a$ . Видно, что этот параметр ниже частоты  $f_a$ , на которой  $\mu$  и  $\mu_a$  проходят через нуль, положителен. Несколько выше частоты  $f_a$  он остается положительным, после чего меняет знак, оставаясь отрицательным почти до частоты  $f_c$ , немного не доходя до которой снова меняет знак, возвращаясь к положительному значению. Выше этого второго изменения знака параметр  $\vartheta$  всегда остается положительным. Таким образом, между  $f_a$  и  $f_c$ , несколько отступая от этих частот, имеется широкая область отрицательных значений параметра расхожимости  $\vartheta$ . В этой области подкоренные выражения, входящие в волновое число (6.49) и адмиттанс (6.56) отрицательны, то есть для распространения волн эта область является запрещенной.

На рис. 6.6, в приведена частотная зависимость для волнового числа  $k$ . Поскольку, согласно (6.49), волновое число включает в себя квадратный корень из  $\vartheta$ , то в тех местах, где параметр  $\vartheta$  отрицателен,

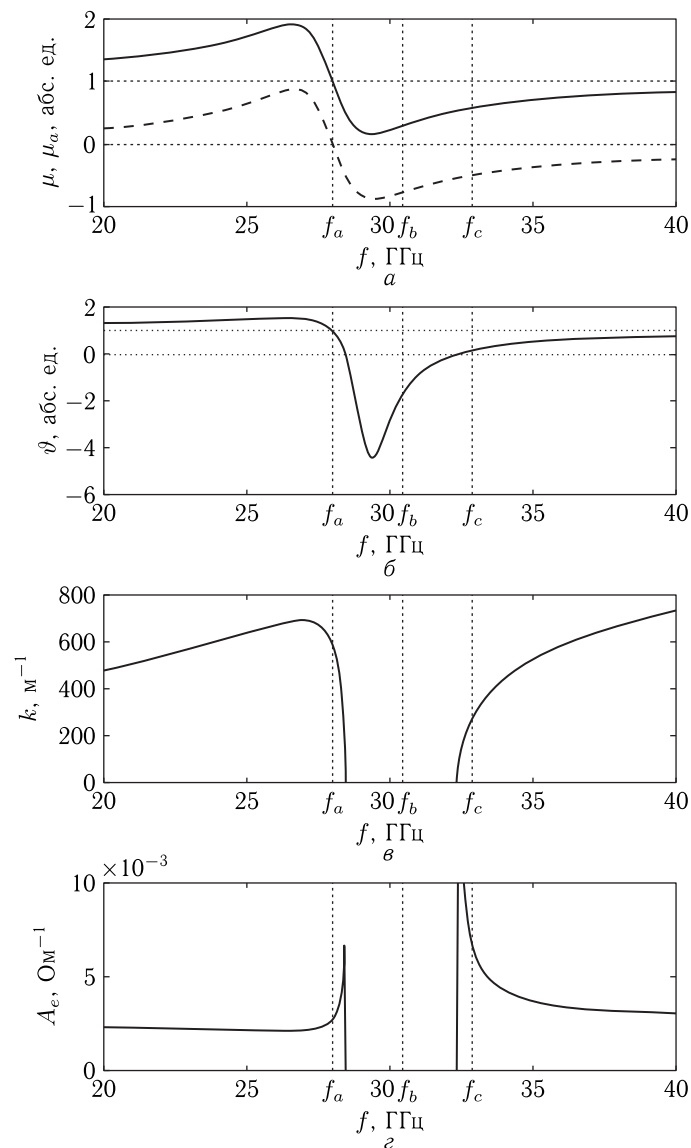


Рис. 6.6. Частотные зависимости характерных параметров распространения волны при среднем затухании:  $\alpha = 0,05$ . Все обозначения и остальные параметры — те же, что на рис. 6.5

волновое число не определено. На краях своей области определения волновое число стремится к нулю, что обусловлено прохождением параметра  $\vartheta$  через нуль.

На рис. 6.6, *г* приведена частотная зависимость для адмиттанса  $A_e$ . Здесь также между  $f_a$  и  $f_b$ , несколько отступив от этих частот, имеется широкая запрещенная область, определяемая интервалом отрицательности параметра  $\vartheta$ . На краях этой области адмиттанс стремится к бесконечности, что также обусловлено прохождением параметра  $\vartheta$  через нуль.

Таким образом, можно сделать вывод, что при среднем затухании волна в магнитной среде может распространяться ниже частоты  $f_a$  и выше частоты  $f_c$  обычным порядком, то есть при положительном адмиттансе. Однако между частотами  $f_a$  и  $f_c$  имеется широкая запрещенная область, края которой близко примыкают к этим частотам, а волна может распространяться только в близких окрестностях частот  $f_a$  и  $f_c$  снизу и сверху соответственно.

### 6.6.6. Затухание сильное

Сильное затухание соответствует интервалу  $0,08401 \leq \alpha < +\infty$ . Обратимся к рис. 6.7, где показаны частотные зависимости характерных параметров распространения волн при параметре затухания равном  $\alpha = 0,10$ .

Из рис. 6.7, *а* видно, что, подобно случаям малого и среднего затухания, на частоте  $f_a$  компонента проницаемости  $\mu$  проходит через единицу, а компонента  $\mu_a$  — через нуль. По обе стороны от этой частоты обе компоненты проходят через небольшие экстремумы, которые здесь однако выражены слабее, чем в случае среднего затухания. Обе зависимости также подобны друг другу с учетом сдвига  $\mu$  вверх по отношению к  $\mu_a$  на единицу. Как и ранее, во всем интервале частот  $\mu$  положительна, тогда как  $\mu_a$  ниже  $f_a$  положительна, а выше — отрицательна. Однако теперь на любых частотах всегда абсолютная величина  $\mu$  превышает абсолютную величину  $\mu_0$ , в результате чего разность квадратов  $\mu^2 - \mu_a^2$ , присутствующая в числителе выражения для  $\vartheta$  (6.116), всегда положительна. При этом, с учетом того, что в рассматриваемом случае проницаемость  $\mu$  всегда положительна, параметр  $\vartheta$ , в соответствии с (6.116), также всегда является положительным, как это видно из рис. 6.7, *б*.

Это означает, что для волнового числа и адмиттанса запрещенных областей нет, то есть волна может существовать во всем интервале частот от минус до плюс бесконечности.

Поведение волнового числа и адмиттанса в этом случае иллюстрируется рис. 6.7, *в* и рис. 6.7, *г* соответственно. Видно, что оба эти параметра между частотами  $f_a$  и  $f_c$  хотя и испытывают изменение знака производной, приводящее к наличию экстремумов, но существуют во всех точках шкалы частот, не имея ни нулей, ни каких-либо особенностей и тем более расходимостей.

Таким образом, можно сделать вывод, что при сильном затухании волна в магнитной среде может распространяться при любых частотах.

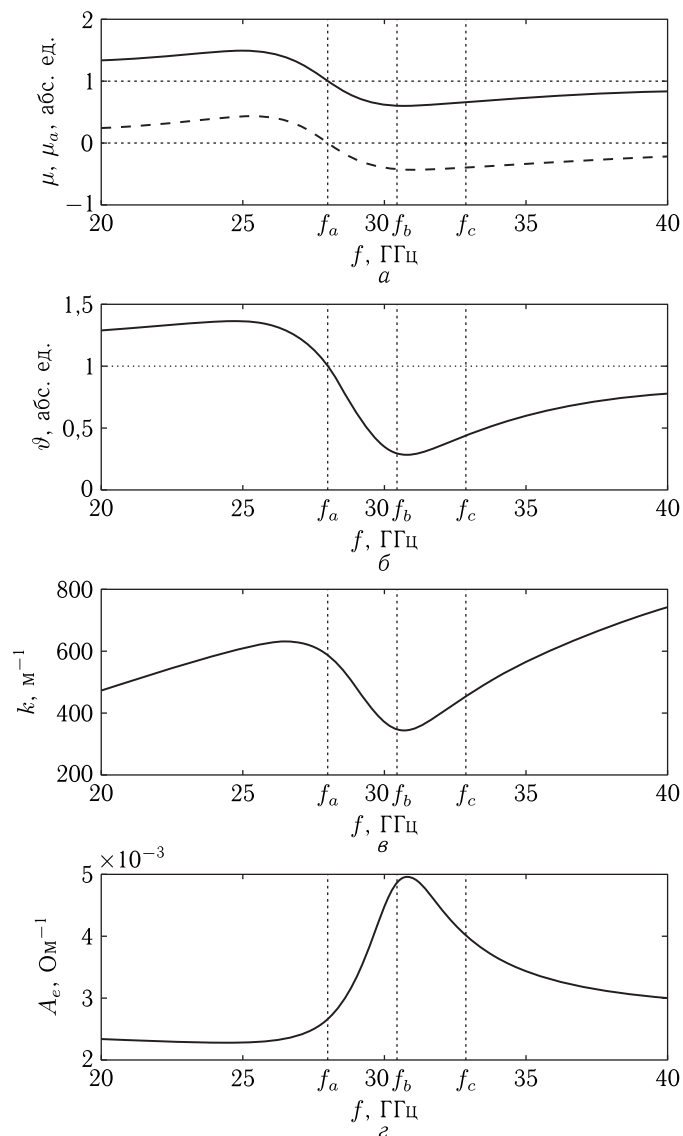


Рис. 6.7. Частотные зависимости характерных параметров распространения волны при сильном затухании:  $\alpha = 0,10$ . Все обозначения и остальные параметры — те же, что на рис. 6.5

**Замечание.** В ходе проведенного рассмотрения на основе отрицательности параметра расходимости (6.116) сделан вывод о невозможности распространения волны в таких условиях. Однако, как можно видеть



из аналитических выражений для волнового числа (6.49) и адмиттанса (6.56), при отрицательной величине  $\vartheta$  алгебраическое вычисление корня приводит к комплексным выражениям. Вообще говоря, комплексное волновое число означает не просто отсутствие волны, а ее постепенное затухание по пути распространения. Можно полагать, что то же относится к адмиттансу. То есть волна на входе в участок среды с отрицательным значением  $\vartheta$  продолжает распространяться с амплитудой, падающей по экспоненциальному закону. То есть происходит что-то подобное входу волны в запердельный волновод [136, 138, 141–145]. При этом волна на выходе из такого участка будет иметь амплитуду значительно меньшую входной. Прямые свойства прецессии намагниченности, по-видимому, задействованы не будут, то есть волна будет распространяться как в диэлектрике без намагниченности. Можно полагать, что такое поведение волны представляет заметный интерес для проявления эффектов туннельного типа, так что любознательный читатель также может попробовать свои силы в этой области.

### 6.7. Распределение амплитуд

Рассмотрим теперь распределение амплитуд волн при тензорной магнитной проницаемости барьеров для различных частот. Ограничимся волнами прямого направления, так как проведенное предварительное исследование показало, что волны обратного направления ведут себя подобным же образом, как это имеет место для диэлектриков (глава 5). Будем рассматривать сильное различие параметров барьеров и промежутков, чтобы яснее выявить характерные особенности. Ограничимся рассмотрением только случаев слабого и сильного затухания, так как в них отражены уже наиболее характерные особенности распределения волн, а случай среднего затухания является промежуточным.

Обратимся к рис. 6.8, где показано распределение амплитуд волн прямого направления в слоях структуры при тензорной магнитной проницаемости барьеров для различных частот.

Рис. 6.8, *а, б, в* (левый столбец) соответствует случаю слабого затухания ( $\alpha = 0,01$ ), рис. 6.8, *г, д, е* — сильного ( $\alpha = 0,10$ ). Частоты возбуждения выбраны следующим образом. Для рис. 6.8, *а, г* частота 27,0 ГГц располагается несколько ниже частоты  $f_a$ , соответствующей началу зоны запрещения, для рис. 6.8, *в, е* частота 33,9 ГГц располагается несколько выше значения  $f_c$ , соответствующего окончанию зоны запрещения. То есть эти частоты, находясь в пределах зоны разрешения, охватывают зону запрещения в непосредственной близости с обеих сторон. Частота 29,2 ГГц, соответствующая рис. 6.8, *б*, приходится на середину участка, разрешенного при слабом затухании, то есть между  $f_a$  и  $f_b$ . Напомним, что в этом случае адмиттанс является отрицательным. Частота 31,5 ГГц, соответствующая рис. 6.8, *д*, приходится на середину участка, запрещенного при слабом затухании,

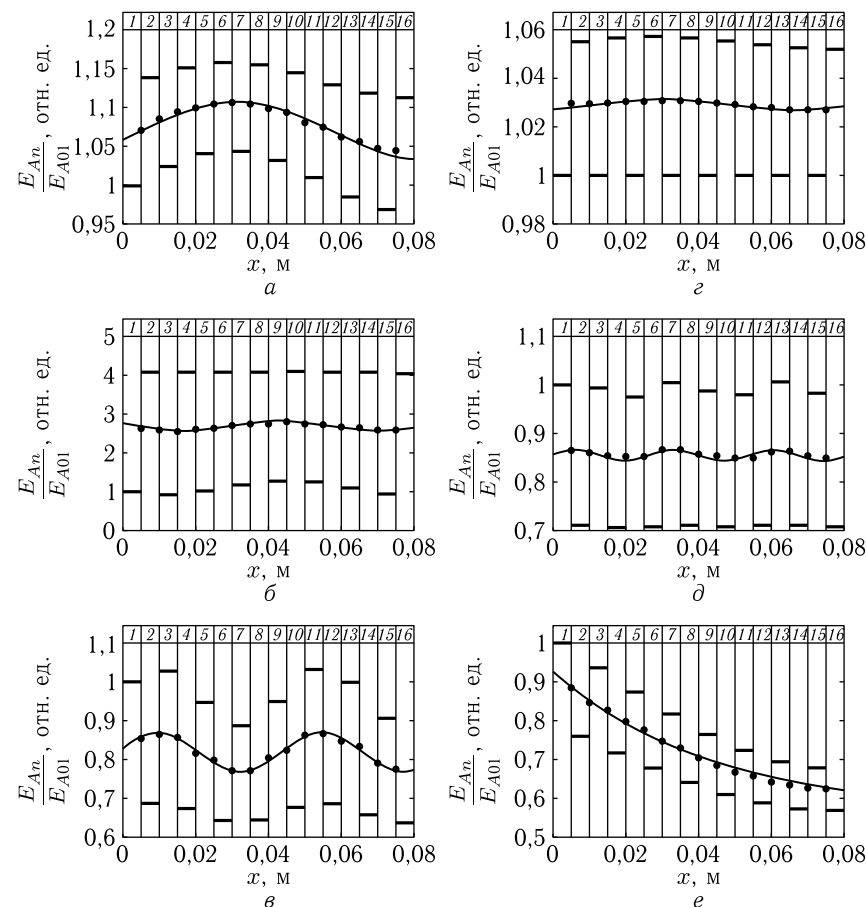


Рис. 6.8. Распределение амплитуд волн прямого направления при тензорной магнитной проницаемости барьеров для различных частот и параметров магнитного затухания.  $\varepsilon_{s,p} = 1,0$ ;  $\sigma_{s,p} = 0,0$ ;  $\mu_p = 1,0$ ;  $\mu_s$  — определяется формулой (6.107) с учетом (6.108)–(6.109). Параметр затухания: *а, б, в* —  $\alpha = 0,01$ ; *г, д, е* —  $\alpha = 0,10$ . Частоты: *а, г* — 27,0 ГГц; *б* — 29,2 ГГц; *д* — 31,5 ГГц; *в, е* — 33,9 ГГц. Остальные параметры — те же что на предыдущих рисунках

но разрешенного при сильном, то есть между  $f_b$  и  $f_c$ . Таким образом, можно полагать, что здесь охвачены все возможные случаи частот, соответствующих различным условиям распространения волн.

Из рисунка видно, что при всех рассмотренных случаях наблюдаются все те же распределения амплитуд, что и в случае диэлектрической среды (раздел 5.6). Так, рис. 6.8, *б, в, г, д* соответствуют синусоидальному распределению, рис. 6.8, *а* — полусинусоидальному, рис. 6.8, *д* — экспоненциальному.

Из сравнения пар рисунков в горизонтальных рядах, то есть (а) с (г), (б) с (д) и (в) с (д) можно видеть, что при увеличении параметра затухания амплитуды во всех слоях в общем уменьшаются.

Однако из рисунков, соответствующих синусоидальным распределениям (б, в, г, д), можно видеть, что при удалении от начала структуры, то есть при возрастании номеров слоев, общий размах амплитуд в соседствующих или последовательных близко расположенных слоях не уменьшается ни при слабом, ни при сильном затухании. Особенно хорошо это видно из рис. 6.8, в, где размах амплитуд между слоями № 3 и № 4 в точности равен размаху амплитуд между слоями № 11 и № 12 или размаху между более удаленными слоями № 3 и № 6 также равняется размаху между слоями № 11 и № 14. Аналогичные закономерности легко прослеживаются также из рис. 6.8, г, например при сравнении слоев № 7 с № 8 или № 13 с № 14.

Таким образом, можно сделать вывод, что магнитное затухание не приводит к абсолютному затуханию волны по координате, а действует как реактивный параметр, определяя амплитуду лишь в каждом отдельном слое по всей его длине, не меняя амплитуды в соседних слоях. То есть затухание определяет лишь размах и максимальную амплитуду колебаний в соответствующих слоях, а поток энергии, входящий в слой и выходящий из него, остается постоянным.

**Замечание.** Отмеченное здесь отсутствие затухания гиромангнитной волны по координате, несмотря на наличие магнитного затухания в каждом слое, на первый взгляд кажется парадоксальным, однако оно обусловлено неучетом уменьшения амплитуды волны при распространении в среде с потерями. Действительно, здесь магнитные колебания в каждом отдельном слое предполагаются однородными, то есть их амплитуда на обеих границах слоя остается одной и той же. Такое рассмотрение правомерно только в случае достаточно тонких слоев, когда падение амплитуды по толщине слоя незначительно. Критерий такой правомерности должен определяться отдельно для каждой конкретной задачи. В более корректном варианте следует учитывать затухание волны при распространении внутри каждого данного слоя подобно тому, как это сделано в работах [70, 72, 80, 86].

## 6.8. Баланс потоков энергии

Несколько неожиданным выглядит заметное увеличение амплитуды колебаний на рис. 6.8, б при  $x > 0,04$ , где частота выбрана в интервале, где адмиттанс является отрицательным. Вообще говоря, из аналогии с электротехникой импеданс представляет собой как бы сопротивление волноведущей среды, тогда как адмиттанс — проводимость. При этом отрицательное сопротивление означает приток энергии в систему в противоположность ее оттоку при сопротивлении положительном. Следуя подобной логике, можно полагать, что отрицательный

адмиттанс также соответствует притоку энергии, что нарушает закон ее сохранения.

Амплитуда волн обратного направления в условиях рис. 6.8, б также велика. Так, для волн прямого направления размах амплитуды в соседствующих слоях составляет от 1 до 4 отн. ед., а для волн обратного направления — от 3 до 0 отн. ед. То есть энергия как бы притекает к волнам как того, так и другого направлений.

Для разрешения этого парадокса рассмотрим потоки энергии в структуре по отдельности. Прежде всего отметим, что поток энергии волн прямого направления ориентирован в положительном направлении оси  $Ox$  (то есть по рисунку слева направо), тогда как поток энергии волн обратного направления ориентирован в отрицательном направлении той же оси (по рисунку справа налево).

При этом в структуру в слое № 1 входит один поток — падающий, а выходит два — отраженный в том же слое № 1 и проходящий в слое № 16. То есть в структуре в целом должен выполняться баланс потоков энергии следующего вида:

$$P^{(0)} = P^{(-)} + P^{(+)}, \quad (6.117)$$

где  $P^{(0)}$  — поток энергии падающей волны (прямого направления) в слое № 1,  $P^{(-)}$  — поток энергии отраженной волны (обратного направления) в слое № 1,  $P^{(+)}$  — поток энергии проходящей волны (прямого направления) в слое № 16.

Следуя приведенным в разделе 5.2.1 правилам перехода от одномерной волны к электромагнитной, а также учитывая определение потока энергии для одномерной волны [70, 72, 80, 86], получаем потоки энергии распространяющихся волн в виде:

поток энергии, входящий в структуру за счет падающей волны,

$$P^{(0)} = E_{A01}^2 A_{e01}; \quad (6.118)$$

поток энергии, выходящий из структуры за счет отраженной волны,

$$P^{(-)} = -E_{B01}^2 A_{e01}; \quad (6.119)$$

поток энергии, выходящий из структуры за счет проходящей волны,

$$P^{(+)} = E_{A16}^2 A_{e16}. \quad (6.120)$$

Рассмотрим теперь численные соотношения потоков энергии в случае положительного и отрицательного адмиттансов.

Так, на частоте 27,9 ГГц, где адмиттанс положителен, получаем амплитуды полей:  $E_{A01} = 1,00000$  отн. ед.,  $E_{B01} = 0,17365$  отн. ед.,  $E_{A16} = 1,13276$  отн. ед.,  $E_{B16} = 0,00000$  отн. ед. При этом адмиттансы равны:  $A_{e01} = 0,26522 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}^{-1}$ ;  $A_{e16} = 0,20046 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}^{-1}$ . Подставляя в (6.118)–(6.120) приведенные выше числовые значения

амплитуд полей и адмиттансов, получаем:  $P^{(0)} = 0,26522 \times 10^{-2}$  отн. ед.,  $P^{(-)} = 7,99753 \cdot 10^{-5}$  отн. ед.,  $P^{(+)} = 2,57219 \times 10^{-3}$  отн. ед.

Легко проверить, что при таких численных значениях условие (6.117) выполняется.

На частоте 29,2 ГГц, где адмиттанс отрицателен, амплитуды полей и адмиттансы соответственно равны:  $E_{A01} = 1,00000$  отн. ед.,  $E_{B01} = 3,12970$  отн. ед.,  $E_{A16} = 4,04850$  отн. ед.,  $E_{B16} = 0,00000$  отн. ед. При этом адмиттансы равны:  $A_{e01} = 0,26522 \cdot 10^{-2}$  Ом<sup>-1</sup>;  $A_{e16} = -0,14231 \cdot 10^{-2}$  Ом<sup>-1</sup>. Потоки энергии при таких численных значениях получаются равными:  $P^{(0)} = 0,26522 \cdot 10^{-2}$  отн. ед.,  $P^{(-)} = 2,59784 \cdot 10^{-2}$  отн. ед.,  $P^{(+)} = -2,33251 \cdot 10^{-2}$  отн. ед.

Можно видеть, что и при этих численных значениях условие (6.117) также выполняется.

Таким образом, можно сделать вывод, что условие баланса энергии на структуре в целом выполняется при любых, как положительных, так и отрицательных значениях адмиттанса.

При этом вопрос о чрезмерном на первый взгляд увеличении амплитуды волн в случае отрицательного импеданса в этом случае математически решается, однако физический смысл отрицательного значения потока энергии  $P^{(+)}$ , проходящего через структуру, по-видимому, состоит в изменении его направления в соответствии с отрицательным знаком. То есть можно полагать, что здесь имеет место аналогия с распространением обратной волны, в которой направления фазовой и групповой скоростей противоположны [39–41, 45, 46, 152, 153]. Увеличение же амплитуды волн во внутренних слоях структуры по сравнению с амплитудой падающей волны можно трактовать как переход волны из среды более плотной в среду менее плотную (аналогично отмеченному в разделе 6.3.2).

**Замечание.** Использованное здесь определение потока энергии как произведения квадрата амплитуды электрического поля на адмиттанс среды, полученное из аналогии с одномерной волной, вообще говоря, относится к потоку, распространяющемуся точно вдоль оси структуры, то есть вдоль оси  $Ox$  на рис. 6.3 и рис. 6.4. Для изотропного диэлектрика такое определение соответствует классическому определению потока энергии через вектор Пойнтинга [136, 138, 141–145]. При этом предполагается, что магнитное поле волны перпендикулярно электрическому и по абсолютной величине равно произведению электрического поля на адмиттанс среды. Однако для гиромангнитной волны магнитное поле кроме поперечной имеет также и продольную составляющую, в результате чего вектор Пойнтинга за счет входящего в него векторного произведения отклоняется от оси структуры, приобретая составляющую вдоль оси  $Oy$ . В настоящей работе мы полагаем структуру в плоскости  $Oyz$  бесконечно протяженной, поэтому такую составляющую не рассматриваем, что, однако, не исключает возможности рассмотрения подобной ситуации любознательным читателем.

## 6.9. Отражение и прохождение в широком диапазоне частот

Рассмотрим теперь частотные зависимости амплитуд волн в слоях в более широком диапазоне частот, когда характеристики отражения и прохождения определяются как магнитным, так и геометрическим факторами структуры.

Как показано в разделах 6.6.4 и 6.6.5, при слабом и среднем магнитном затухании в диапазоне частот появляются запрещенные полосы, где распространение электромагнитных волн невозможно. Поэтому можно ожидать, что на общем частотном спектре отражения и прохождения, подобном показанному в разделе 5.7 на рис. 5.6, появятся какие-то провалы, обусловленные упомянутыми полосами запрещения. Более подробное исследование показывает, что на обоих краях таких провалов со стороны разрешенных частот отражение волн стремится к единице, а прохождение — к нулю. В остальных частях разрешенных областей отражение и прохождение определяется конкретными значениями компонент магнитной проницаемости, которые для  $\mu$  близки к единице, а для  $\mu_a$  — к нулю. То есть картина распространения волн мало отличается от случая скалярной магнитной проницаемости, причем при сравнительно небольших ее значениях.

С другой стороны, как показано в тех же разделах, при сильном магнитном затухании запрещенные области отсутствуют, так что волна может распространяться во всем интервале частот от нуля до плюс бесконечности (разумеется, в тех пределах, где работают обычные механизмы прецессии намагниченности в гиротропной среде [18–20, 24, 25]). Поэтому дальнейшее рассмотрение посвятим именно случаю сильного магнитного затухания и рассмотрим трансформацию амплитуд в слоях в широком диапазоне частот.

Обратимся к рис. 6.9, где показаны зависимости нормированных амплитуд обратной волны в слое №1 (*a*, *б*) и прямо направленных волн в слоях №15 (*в*) и №16 (*г*) от частоты падающей волны при двух различных значениях намагниченности. На рисунке вертикальными пунктирными линиями показаны граничные частоты запрещенной области, то есть  $f_a$  и  $f_c$ , определяемые формулами (6.113) и (6.115), равные соответственно 28,0 ГГц и 32,9 ГГц. Вертикальными точечными линиями показаны частоты, определяемые укладыванием нечетного числа четвертей длин волн на длине одного барьера. Для расчета таких частот в главе 5 предложены две формулы,

первая — аналитическая — под номером (5.65):

$$f_s^{(\max)} = \frac{c(2n^{(\max)} - 1)}{4\sqrt{\epsilon_s \mu_s} L_s}, \quad (6.121)$$

где  $n^{(\max)}$  — порядковый номер максимума, при котором на длине барьера укладывается  $2n^{(\max)} - 1$  четвертей длин волн,  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  —

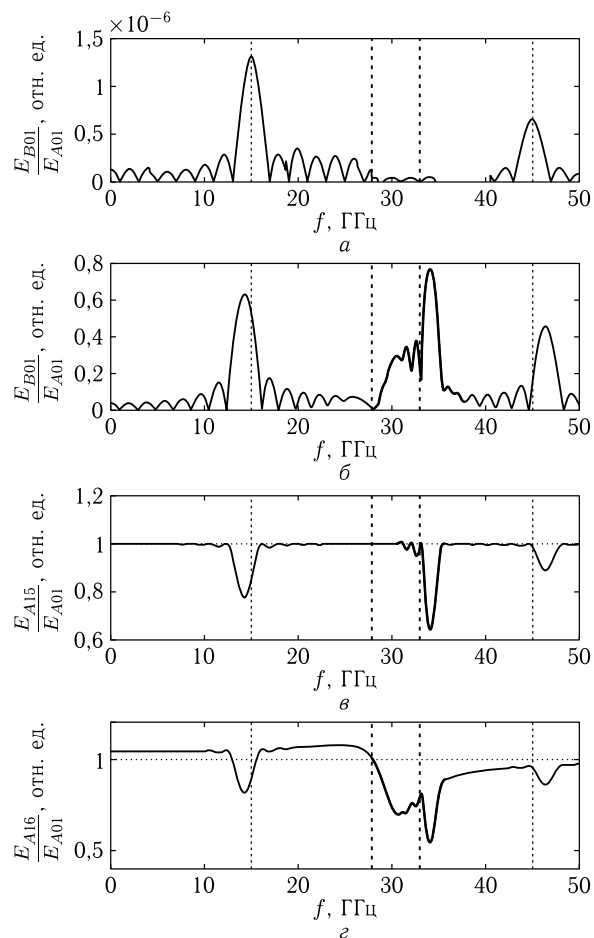


Рис. 6.9. Зависимости нормированных амплитуд обратно направленной волны в слое №1 (*а*, *б*) и прямо направленных волн в слоях №15 (*в*) и №16 (*г*) от частоты падающей волны при двух различных значениях намагниченности. *а* —  $4\pi M_0 = 1750 \cdot 10^{-5}$  Гс; *б*, *в*, *г* —  $4\pi M_0 = 1750$  Гс. Компоненты магнитной проницаемости определяются формулами (6.107)–(6.109). Другие параметры:  $\varepsilon_{p,s} = 1,0$ ,  $\mu_p = 1,0$ ,  $\sigma_{p,s} = 0,0$ . Остальные параметры — те же, что на предыдущих рисунках

скорость электромагнитной волны в свободном пространстве ( $3 \times 10^8$  м · с<sup>-1</sup>);

вторая — эмпирическая — под номером (5.66):

$$f_s^{(\text{res})} = \frac{c}{\sqrt{2(\varepsilon_s + \varepsilon_p)\mu_s(L_s + L_p)}}, \quad (6.122)$$

где полагается  $\mu_s = \mu_p$ .

В рассматриваемом случае вертикальные точечные линии построены по формуле (6.121) при  $n = 1$  (частота 15,0 ГГц) и при  $n = 2$  (частота 45,0 ГГц).

В дальнейших расчетах полагаем параметр затухания  $\alpha = 0,10$ , то есть, в соответствии с приведенной в разделе 6.3.2 оценкой, затухание является сильным.

Итак, переходим к рассмотрению рисунка. Случай рис. 6.9, *а* соответствует крайне малой намагниченности барьеров, равной  $4\pi M_0 = 1750 \cdot 10^{-5}$  Гс, то есть можно считать, что при этом  $\mu \approx 1$ ,  $\mu_a \approx 0$ . Этот случай приведен здесь для сравнения. Показана амплитуда только волны обратного направления в слое №1, при этом амплитуды волн прямого направления в слоях №15 и №16 равны единице с точностью до  $10^{-5}$  отн. ед. Можно считать, что от структуры практически ничего не отражается, а вся энергия возбуждаемых волн проходит насквозь. Тем не менее на частотной характеристике четко выражены два максимума при частотах 15,0 ГГц и 45,0 ГГц. Таким образом, даже при столь малой намагниченности, весьма далекой от условий магнитного резонанса, геометрические резонансные свойства магнитных барьеров, хотя и крайне слабо, но все же проявляются, давая четко выраженные максимумы отражения на частотах, практически точно соответствующих укладыванию нечетного числа четвертей длин волн по длине магнитного барьера (6.121). В интервале частот, соответствующем полосе непропускания (между пунктирными линиями) каких-либо особенностей не наблюдается.

Случай выполнения условий магнитного резонанса представлен на рис. 6.9, *б*, *в*, *г*. Здесь, во-первых, представлены те же две резонансные линии, которые определяются геометрией барьера. Однако частоты обеих резонансных линий несколько раздвинуты в разные стороны: низкочастотная отодвинута вниз на частоту 14,290 ГГц, а высокочастотная — вверх на частоту 46,370 ГГц.

Таким образом, если можно считать снижение частоты линии первого максимума в какой-то степени соответствующим формуле (6.122), то относительно второго максимума этого сказать нельзя, так как он смещается не вниз, а вверх. Причиной такого смещения вверх второго максимума можно считать влияние магнитных свойств среды.

В то же время в области магнитного резонанса здесь возникает новая довольно широкая линия (соответствующие этой линии участки кривых выделены утолщенными линиями). Нижний край этой линии приходится на частоту 28,000 ГГц, то есть в точности совпадает с частотой  $f_a$ , а верхний — на частоту 35,650 ГГц, что заметно превышает частоту  $f_c$ . Более того, резко выраженный максимум этой линии приходится на частоту 34,170 ГГц, что также превышает  $f_c$ . Таким образом, хотя основная часть линии, обусловленной резонансными свойствами магнитной среды совпадает с интервалом между характерными частотами  $f_a$  и  $f_c$ , наиболее резкий максимум этой линии располагается уже за пределами характерного интервала. На частотных зависимо-

стях прохождения (рис. 6.9, в, г) обособление максимума на частоте 34,170 ГГц выражено еще сильнее, чем на зависимостях отражения (рис. 6.9, б).

Причина появления такого максимума, по-видимому, кроется в том, что, как можно видеть из рис. 6.7, адмиттанс при частотах в ближней окрестности выше  $f_c$  снижается незначительно (в рассмотренном на рис. 6.7 интервале не более чем на 30%), а волновое число в том же интервале увеличивается почти в три раза. Можно полагать, что при этом слагаемые, составляющие детерминанты, которые определяют амплитуды волн в соответствии с пошаговым алгоритмом (раздел 5.3.2, форм. (5.50)–(5.57)) увеличиваются в такой степени, что и дают в результате не только смещение основного максимума рассматриваемой линии вверх по частоте, но и некоторый выход его за пределы частоты  $f_c$ .

Заметим дополнительно, что из рис. 6.9, г видно, что амплитуда прямо направленной волны в слое № 16 превышает единицу, то есть здесь происходит переход волны из более плотной среды в менее плотную. Таким образом, можно считать, что увеличение гиромангнитных свойств среды, то есть увеличение ее магнитной проницаемости, приводит к уменьшению ее плотности по отношению к распространению электромагнитных волн. Такое обстоятельство находится в обратном соотношении с диэлектрическими свойствами, где, как показано в главе 5, увеличение диэлектрической проницаемости приводит к увеличению плотности диэлектрической среды. В разделе 6.3.2 подобное обратное соотношение роли той и другой проницаемостей уже отмечалось для случая скалярной магнитной проницаемости (раздел 6.3), здесь же оно дополнительно подтверждено для проницаемости тензорной.

## Выводы по главе 6

Данная глава посвящена описанию распространения электромагнитных волн через структуры с периодическими неоднородностями меандрового вида, обладающими явно выраженными скалярной или тензорной магнитной проницаемостью. Рассмотрено отражение и прохождение гиромангнитной волны через многослойную структуру, обладающую гиротропией. В частотном спектре распространения волн выявлена широкая линия, обусловленная магниторезонансными свойствами среды.

Основные результаты, полученные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрено распространение электромагнитных волн прямого и обратного направлений в многослойной структуре ограниченной длины с периодической неоднородностью меандрового типа, барьеры которой обладают магнитодиэлектрическими свойствами. В качестве расчетного аппарата использован метод пошагового алгоритма, обоб-

щенный на случай трехмерных электромагнитных волн, распространяющихся в среде с магнитными параметрами.

2. Для случая скалярной магнитной проницаемости получены те же закономерности распространения волн, что и для изотропной диэлектрической среды с тем отличием, что повышение диэлектрической проницаемости среды приводит к повышению ее электродинамической плотности, тогда как увеличение магнитной проницаемости такую плотность уменьшает. Распределение амплитуд волн в отдельных слоях структуры подобно таковому для случая диэлектрической среды, то есть наблюдаются те же два основных вида распределения — синусоидальное и экспоненциальное, а также два переходных — полусинусоидальное и линейное.

3. В качестве предварительного этапа для изучения тензорных сред рассмотрено распространение электромагнитной волны в бигиротропной среде с общей осью гиротропии для магнитной и диэлектрической проницаемостей. Показано, что в такой среде перпендикулярно оси гиротропии возможно распространение двух независимых друг от друга волн — гиромангнитной и гироэлектрической, каждая из которых, кроме поперечных составляющих полей, имеет также и продольные, причем в случае образования гиротропии за счет постоянного магнитного поля решающую роль играет гиромангнитная волна.

4. Рассмотрено отражение и прохождение гиромангнитной волны при падении на плоскую границу раздела двух сред с магнитными параметрами. Получены амплитуды отраженной и проходящей волн, выраженные через адмиттансы сред, образованные совокупностью компонент соответствующих тензоров магнитной проницаемости. Получены два вида адмиттансов — линейномагнитный и гиромангнитный, каждый из которых ответствен за свои компоненты полей распространяющихся волн. На основе механизма прецессии вектора намагниченности в среде с магнитными потерями рассчитаны компоненты гиротропного тензора магнитной проницаемости, а также линейномагнитный и гиромангнитный адмиттансы среды.

5. Введен в рассмотрение «параметр расходимости», представляющий собой комбинацию из компонент тензора, определяющий частотные области существования действительных адмиттансов, а также волновых чисел распространяющихся волн. Показано, что в многослойной структуре с тензорными параметрами имеются области частот, где распространение волн невозможно, что определяется отрицательным знаком параметра расходимости. Найдены три характерные частоты, определяющие границы упомянутых областей, выявлена их зависимость от намагниченности среды и величины создающего гиротропию магнитного поля.

6. По величине параметра затухания магнитных колебаний выделены три характерных области: слабого, среднего и сильного затухания. Показано, что в случае слабого затухания в области частот между двумя крайними характерными значениями распространение гироманг-

нитных волн запрещено, тогда как вне этой области — возможно. В случае сильного затухания какие-либо запрещения для распространения гиромангнитных волн отсутствуют.

7. Установлено, что для распределения амплитуд волн в отдельных слоях структуры для тензорной среды наблюдаются те же его виды, что и для скалярной среды, — основные синусоидальное и экспоненциальное, а также переходные — полусинусоидальное и линейное.

8. Отмечено аномально большое (в два-три раза) увеличение амплитуды волн прямого и обратного направлений в области частот, где линейномагнитный адмиттанс является отрицательным. Для интерпретации этого случая рассмотрен баланс потоков энергии распространяющихся волн на структуре в целом. Показано, что, несмотря на отрицательность адмиттанса, баланс энергии в этом случае выполняется в той же степени, как и при положительном значении адмиттанса. Наблюдаемое увеличение амплитуды отнесено к ситуации распространения волны из области более плотной в область менее плотную, аналогичную таковой для скалярной проницаемости.

9. В широком диапазоне рассмотрена частотная зависимость амплитуд волн обоих направлений в крайних и некоторых промежуточных слоях структуры. Показано, что даже в случае намагниченности на четыре-пять порядков ниже соответствующей реальным магнитным средам, амплитуда отраженной волны имеет те же резонансные особенности, соответствующие укладыванию по длине одного барьера нечетного числа четвертей длин волн, что и для диэлектрика. Однако при реальных значениях намагниченности кроме этих резонансов появляется широкая дополнительная линия, обусловленная именно магнитными свойствами среды. Общее положение этой линии задается характерными частотами, определяющими знак параметра расходимости, однако максимум приходится на частоту, несколько выше наибольшей из характерных частот, что обусловлено медленностью спада адмиттанса и ростом волнового числа в этой области.

## Глава 7

### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АЛГОРИТМА ДЛЯ РАСЧЕТА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В СРЕДЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ, ОБЛАДАЮЩИМИ ДИССИПАЦИЕЙ

Глава посвящена применению метода пошагового алгоритма для расчета распространения одномерных и электромагнитных волн в многослойной структуре с периодической неоднородностью, обладающей диссипацией. В результате рассмотрения амплитуд волн в слоях структуры выявлен новый вид их распределения — линейно-синусоидальный, обусловленный диссипацией среды. Выполнено сравнение эффективности механизмов диссипации для одномерной и электромагнитной волн. Обнаружен обусловленный проводимостью диссипативный резонанс. Для случая металлической проводимости выявлена роль соотношения между глубиной проникновения волны и толщиной барьера.

В главе частично использованы материалы монографий [65, стр. 83–109], [25, стр. 27–29, 46–63, 148–182], а также статей [68, 73, 76, 96–99, 103]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

#### 7.1. Геометрия задачи

Геометрия задачи совпадает с приведенной в главах 4–7 настоящей монографии: для одномерной волны — с учетом определяющей роли волнового числа (рис. 4.1), а для электромагнитной — с учетом роли адмиттанса (рис. 5.1). Как и ранее, рассматривается симметричная меандровая структура, где неоднородность представляет собой периодически расположенные прямоугольные барьеры (слои), с одинаковыми промежутками между ними. Линейные протяженности барьеров и промежутков равны друг другу. Барьеры обозначаются индексами « $p$ », промежутки — индексами « $s$ ». В случае одномерной задачи параметрами сред являются волновые числа  $k_p$ ,  $k_s$ , а в случае электродинамической — диэлектрические  $\epsilon_p$ ,  $\epsilon_s$  и магнитные  $\mu_p$ ,  $\mu_s$  проницаемости, а также проводимости  $\sigma_p$ ,  $\sigma_s$ , и соответствующие адмиттансы  $A_{p,s,c}$ . Остальные обозначения совпадают с приведенными на рис. 4.1 и рис. 5.1. В рамках настоящего рассмотрения положим

число слоев равным 16, то есть слои соответственно пронумерованы от 1 до 16. Полная длина структуры, кроме особо оговоренных случаев, будет равняться 8 см, толщины слоев — 0,5 см,

## 7.2. Распределение амплитуд для одномерной волны

Для того, чтобы выявить основные закономерности распространения волн в периодической структуре с диссипацией, обратимся сначала к случаю одномерной волны, как имеющему более элементарный характер. Для одномерной волны основным фактором ее распространения является волновое число, которое в среде с диссипацией является комплексным, причем спад амплитуды по координате описывается мнимой частью волнового числа.

Рассмотрим рис. 7.1, где показаны распределения амплитуд волн обоих направлений в многослойной структуре при некоторых характерных значениях комплексного волнового числа.

Будем полагать, что волновое число волны в промежутке всегда действительное, то есть в промежутках затухание волны отсутствует, а волновое число барьера может иметь мнимую составляющую, то есть волна при распространении внутри барьера может испытывать определенное затухание.

При построении рисунка значения волновых чисел были подобраны таким образом, чтобы в случаях *a*, *б*, *в* действительная составляющая волнового числа для барьера значительно (в 2,4 раза) превышала такую для промежутка, тогда как в случаях *г*, *д*, *е* действительная составляющая волнового числа для барьера равнялась таковой для промежутка, а волновые числа барьера и промежутка отличались только мнимой составляющей.

Для построения непрерывных кривых на рис. 7.1 использовались следующие эмпирические формулы (с точностью до постоянной составляющей и сдвига фазы):

$$a - A_n \rightarrow 11 \sin(240x); B_n \rightarrow 24 \sin(240x); \quad (7.1)$$

$$б - A_n \rightarrow 5 \sin(240x) - 1000x; B_n \rightarrow 12 \sin(240x) - 300x; \quad (7.2)$$

$$в - A_n \rightarrow \exp(-40(x - 0,004)); B_n \rightarrow 0,34 \exp(-40(x - 0,004)); \quad (7.3)$$

$$г - A_n \rightarrow 1,00; B_n \rightarrow 0,00; \quad (7.4)$$

$$д - A_n \rightarrow -800x; B_n \rightarrow 0,02 \sin(400x); \quad (7.5)$$

$$е - A_n \rightarrow \exp(-33(x - 0,004)); B_n \rightarrow 0,15 \exp(-33(x - 0,004)). \quad (7.6)$$

Распределение, приведенное на рис. 7.1, *a*, соответствует чисто действительному волновому числу и показано здесь для сравнения.

Распределения, приведенные на рис. 7.1, *б*, *д* и рис. 7.1, *в*, *е*, соответствуют относительно малой (*б*, *д*) и сравнительно большой (*в*, *е*) мнимым составляющим волнового числа.

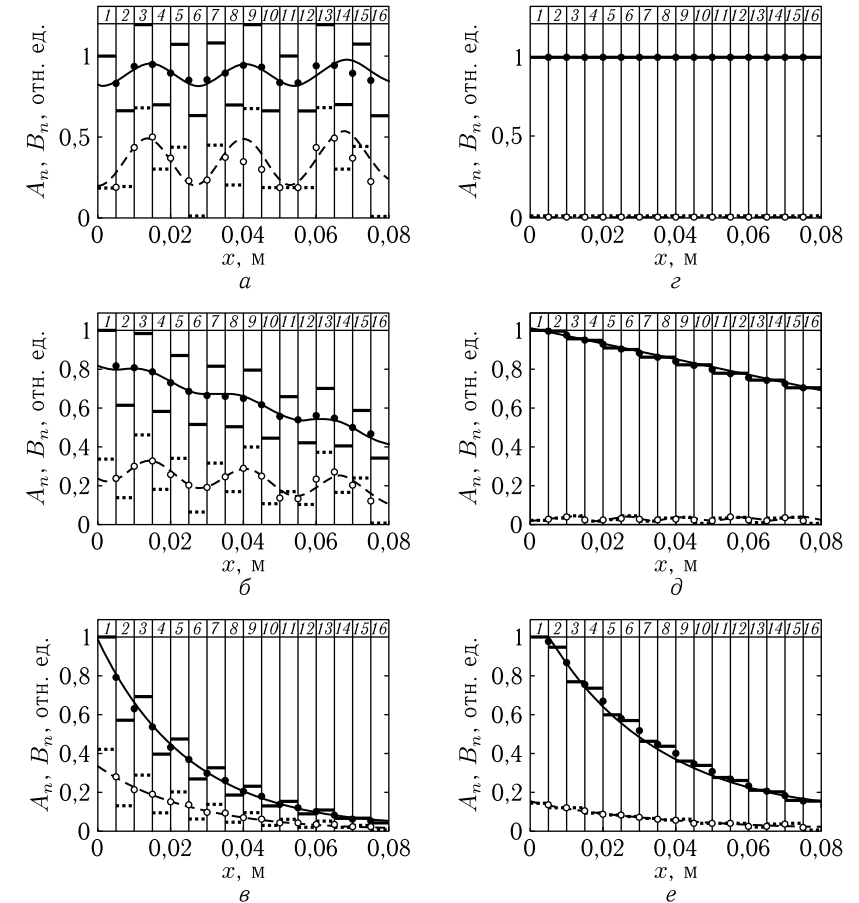


Рис. 7.1. Распределение нормированных амплитуд волн прямого (сплошные линии и сплошные точки) и обратного (пунктирные линии и открытые точки) направлений от координаты при различных значениях комплексного волнового числа. Волновое число промежутка:  $k_p = (1,00 - i \cdot 0,00) \text{ см}^{-1}$ . Волновое число барьера: *a* —  $k_s = (2,40 - i \cdot 0,00) \text{ см}^{-1}$ ; *б* —  $k_s = (2,40 - i \cdot 0,10) \text{ см}^{-1}$ ; *в* —  $k_s = (2,40 - i \cdot 0,50) \text{ см}^{-1}$ ; *г* —  $k_s = (1,00 - i \cdot 0,00) \text{ см}^{-1}$ ; *д* —  $k_s = (1,00 - i \cdot 0,10) \text{ см}^{-1}$ ; *е* —  $k_s = (1,00 - i \cdot 0,50) \text{ см}^{-1}$ ;

Распределение, приведенное на рис. 7.1, *г*, соответствуют точному равенству волновых чисел барьера и промежутка при отсутствии мнимой составляющей. То есть неоднородность структуры в целом отсутствует и волна, не испытывая отражения, полностью проходит насквозь.

Распределения, приведенные на рис. 7.1, *д* и рис. 7.1, *е*, соответствуют тем же значениям малой (*д*) и большой (*е*) мнимой составляющей волнового числа, что и на рис. 7.1, *б* и рис. 7.1, *в*, при условии сохранения

действительной части волнового числа для барьера равной таковой для промежутка.

Из рис. 7.1 можно видеть, что в рассматриваемом случае комплексного волнового числа наблюдаются те же основные виды распределения, что и при волновом числе действительном: синусоидальное и экспоненциальное (раздел 5.6).

Более точно наблюдаемые распределения можно классифицировать следующим образом (буквы соответствуют эпюрам рисунка):

$a$  — синусоидальное;

$b$  — линейное с добавкой синусоидального, называемое далее линейно-синусоидальным;

$v$  — экспоненциальное;

$z$  — постоянное;

$d$  — для волн прямого направления — линейное, для волн обратного направления — синусоидальное с малой амплитудой;

$e$  — экспоненциальное для волн обоих направлений.

Отметим некоторые особенности, следующие из общего вида приведенных кривых.

На рис. 7.1,  $a$  обе синусоиды имеют одинаковый период и одинаковую фазу; средний уровень амплитуды волн прямого направления (0,95 отн. ед.) выше среднего уровня амплитуды волн обратного направления (0,35 отн. ед.) примерно в три раза.

На рис. 7.1,  $b$  коэффициент линейного спада для волн прямого направления (1000) больше коэффициента линейного спада волн обратного направления (300) примерно в три раза; соотношение средних уровней синусоидальных составляющих амплитуд волн прямого и обратного направлений также около трех раз. Для волн прямого направления  $A_n$  средний уровень вблизи  $x = 0$  составляет 0,80 отн. ед., амплитуда синусоидальной составляющей — 0,02 отн. ед., отношение этих величин равно 40. Для волн обратного направления  $B_n$  средний уровень вблизи  $x = 0$  составляет 0,30 отн. ед., амплитуда синусоидальной составляющей — 0,10 отн. ед., отношение этих величин равно 3. Таким образом, для волн прямого направления в распределении преобладает линейная составляющая, для волн обратного направления — преобладает синусоидальная составляющая.

На рис. 7.1,  $v$  обе зависимости описываются одной и той же экспонентой, различие состоит только в линейном числовом коэффициенте: для волн обратного направления он составляет 0,15 от такого же коэффициента для волн прямого направления.

Подобные особенности наблюдаются и для кривых, приведенных на рис. 7.1,  $z, d, e$ .

Характерна наблюдаемая при сравнении горизонтальных пар рисунков несколько более слабая зависимость распределений от координаты, свойственная правому столбцу (рис. 7.1,  $z, d, e$ ) по сравнению с левым (рис. 7.1,  $a, b, v$ ). При этом различие между амплитудами волн прямого и обратного направлений при экспоненциальном распределении (рис. 7.1,  $e$ ) составляет около восьми раз, при линейно-синусоидальном

(рис. 7.1,  $d$ ) достигает тридцати, а при постоянном (рис. 7.1,  $z$ ) стремится к бесконечности. Можно полагать, что такое отличие обусловлено тем, что для левого столбца в формировании распределений участвуют как действительная, так и мнимая — обе составляющие волнового числа, тогда как для правого столбца — только одна мнимая, вклад которой меньше.

### 7.2.1. Роль комплексного характера волнового числа

Рассмотрим теперь специфические особенности приведенных зависимостей, обусловленные именно комплексным характером волнового числа.

Явное отличие от случая действительного волнового числа здесь состоит в том, что синусоидальное распределение не является самостоятельным, а накладывается на линейное (особенно хорошо это заметно на рис. 7.1,  $b$ ), образуя распределение линейно-синусоидальное.

Наблюдаемое здесь линейное распределение не является переходным от синусоидального к экспоненциальному, а получается как результат убывания амплитуд волн того и другого направлений при удалении их от точки возбуждения (то есть от слоя № 1).

Очевидно, такое убывание является следствием затухания волны по координате, что и описывается мнимой составляющей волнового числа. Когда мнимая составляющая становится достаточно большой, линейно-синусоидальное распределение сменяется экспоненциальным, как это видно из рис. 7.1,  $v, e$ . Однако здесь спадающий характер распределения обусловлен не наличием «полос непропускания» при действительном волновом числе, определяемых интерференцией волн при их многократном переотражении (раздел 5.7), а именно затуханием волны по мере ее распространения по координате.

Это хорошо видно из сравнения рис. 7.1,  $a$  с рис. 7.1,  $v$ , где действительная часть волнового числа соответствует области пропускания, а распределение на рис. 7.1,  $v$  спадает по экспоненте, и особенно из сравнения рис. 7.1,  $z$  с рис. 7.1,  $d, e$ , где действительная часть волнового числа в переотражении волн вообще не участвует, так как ее значения для барьеров и промежутков между собой равны. Тем не менее достаточно большая мнимая часть волнового числа и здесь приводит к спаду распределения сначала по линейному закону (рис. 7.1,  $d$ ), а затем по экспоненте (рис. 7.1,  $e$ ).

Таким образом, из проведенного рассмотрения видно, что мнимая часть волнового числа может приводить к таким же видам распределения амплитуд в слоях, что и действительная, однако главная ее роль состоит в уменьшении амплитуд волн по координате по мере удаления от источника возбуждения, которое накладывается на распределения, обусловленные действительной частью волнового числа.

**Замечание.** В проведенном рассмотрении между синусоидальным и экспоненциальным распределениями выделено линейно-синусоидальное, являющееся как бы наложением синусоидального на линейное.



Более подробное исследование показывает, что в некоторых случаях подобное наложение синусоидального распределения возможно и на экспоненциальное. То есть на экспоненциальном распределении проявляются следы синусоидального. Однако такое наложение синусоиды на экспоненту является крайне слабым: в исследованных случаях вариации амплитуды за счет синусоиды не превышали нескольких (не более пяти) процентов от амплитуды экспоненты, поэтому в рамках настоящей работы выделение подобного распределения в отдельный вид экспоненциально-синусоидального не проводилось.

### 7.2.2. Отражающие и пропускающие свойства структуры для одномерной волны

Рассмотрим теперь, какое влияние оказывает затухание волны на отражающие и пропускающие свойства структуры в целом. Как и ранее, в качестве наиболее простого примера используем одномерную волну.

Обратимся к рис. 7.2, где показаны зависимости амплитуд волн обратного в слое № 1 (*a, б, в*) и прямого в слое № 16 (*г, д, е*) направлений от действительной части волнового числа внутри барьера  $k_s$  при различных значениях его мнимой части (для простоты обозначение «Re» при действительной части волнового числа опущено).

Рис. 7.2, *a* и *г* соответствуют чисто действительному волновому числу, то есть полному отсутствию затухания. Показанные на них кривые практически тождественны таковым, приведенным в главе 4 (разделы 4.6, 4.7) на рис. 4.13 и 4.14, так что представлены здесь для сравнения.

Рис. 7.2, *б* и *д* соответствуют мнимой добавке к волновому числу равной  $0,10 \text{ см}^{-1}$ , то есть, как и в предыдущем разделе, сравнительно малому затуханию.

Рис. 7.2, *в* и *е* соответствуют мнимой добавке к волновому числу равной  $0,50 \text{ см}^{-1}$ , то есть, как и в предыдущем разделе, затуханию довольно большому.

Из рис. 7.2 видно, что все спектры, на нем представленные, как и в главе 4 (разделы 4.6, 4.7), имеют дискретную структуру, образованную чередованием областей пропускания и непропускания. При увеличении затухания полосы пропускания-непропускания остаются на своих местах, задаваемых действительной частью волнового числа, то есть их чередующийся характер от величины затухания не зависит.

При увеличении затухания амплитуда волн того и другого направления в полосах пропускания уменьшается, причем на волнах проходящих (рис. 7.2, *д, е*) такое уменьшение проявляется заметнее, чем на волнах отраженных (рис. 7.2, *б, в*). Так, во второй полосе пропускания (обозначенной на рис. 4.13, рис. 4.14 как «1S»), то есть при  $5,1 \text{ см}^{-1} < k_s < 9,5 \text{ см}^{-1}$ , амплитуда отраженных волн в слое № 1 в отсутствие затухания (рис. 7.2, *a*) (на уровне максимумов тонкой структуры, считая от верхнего края рисунка) равна 0,84 отн. ед., а амплитуда подобных волн при большом затухании (на рис. 7.1, *в*)

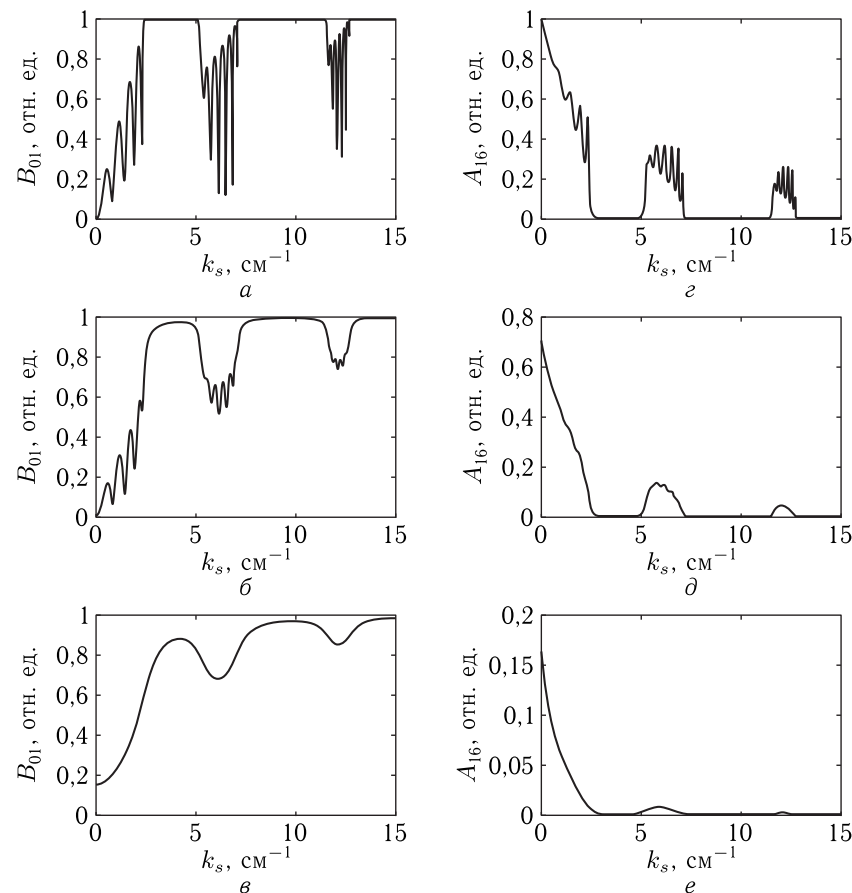


Рис. 7.2. Зависимости амплитуд волн обратного в слое № 1 (*a, б, в*) и прямого в слое № 16 (*г, д, е*) направлений от действительной части волнового числа внутри барьера  $k_s$  при различных значениях его мнимой части. Волновое число промежуток:  $k_p = 1,00 \text{ см}^{-1}$ . Действительная часть волнового числа:  $\text{Re}(k_s) = 0 \div 15 \text{ см}^{-1}$ . Мнимая часть волнового числа: *a, г* —  $\text{Im}(k_s) = 0,00 \text{ см}^{-1}$  — затухание отсутствует; *б, д* —  $\text{Im}(k_s) = 0,10 \text{ см}^{-1}$  — затухание слабое; *в, е* —  $\text{Im}(k_s) = 0,50 \text{ см}^{-1}$  — затухание сильное

равна 0,25 отн. ед., то есть отношение этих амплитуд составляет 3,36. Для проходящих волн в этих же условиях (рис. 7.2, *в, е*) амплитуды составляют 0,38 отн. ед. и 0,11 отн. ед., так что их отношение равно 3,45. В третьей полосе пропускания («2S» рис. 4.13, рис. 4.14), то есть при  $11,5 \text{ см}^{-1} < k_s < 13,2 \text{ см}^{-1}$ , амплитуды отраженных волн равны 0,72 отн. ед. и 0,14 отн. ед., а амплитуды проходящих — 0,028 отн. ед. и 0,004 отн. ед., то есть их отношения в этом случае составляют 5,14

и 7,00 соответственно, что превышает подобные отношения для второй полосы в среднем в два раза.

Таким образом, как сказано выше, затухание волн обоих направлений, обусловленное мнимой частью волнового числа, сказывается тем сильнее, чем номер полосы выше. С физической стороны это происходит из-за того, что увеличение номера полосы означает укладывание большего числа полуволн на длине одного барьера, в результате чего добротность каждого межбарьерного резонатора падает [133, 154, 155] и общее затухание возрастает.

Другой важной особенностью наблюдаемых спектров является тот факт, что на месте исходных полос непропускания, то есть при  $2,4 \text{ см}^{-1} < k_s < 5,1 \text{ см}^{-1}$  — полоса «1E» на рис. 4.13, рис. 4.14 и  $9,5 \text{ см}^{-1} < k_s < 11,5 \text{ см}^{-1}$  — полоса «2E» на рис. 4.13, рис. 4.14, где в отсутствие затухания волна практически целиком отражается (области экспоненциального распределения амплитуд), при увеличении затухания отражение ухудшается тем более, чем затухание выше (то есть на рис. 7.2, б отражение меньше, чем на рис. 7.2, а, а на рис. 7.2, в — еще меньше).

Можно полагать, что такое ухудшение отражения при увеличении затухания также обусловлено уменьшением добротности межбарьерных резонаторов, в результате чего их отражающие способности снижаются.

Весьма наглядной особенностью наблюдаемых спектров для волн, как отраженных (рис. 7.2, а, б, в), так и проходящих (рис. 7.2, г, д, е), является происходящее по мере увеличения затухания постепенное уменьшение тонкой структуры резонансных линий, соответствующих полосам пропускания, вплоть до полного ее исчезновения (рис. 7.2, в, е). Такое уменьшение расщепления резонансных линий сходно с расщеплением общей резонансной линии системы двух и более связанных резонаторов, уменьшающимся при увеличении затухания [133, 154, 155].

Таким образом, из проведенного рассмотрения можно сделать вывод, что при увеличении затухания общая структура спектра, то есть расположение полос пропускания и непропускания по волновому числу в целом не меняется, тогда как прохождение волн и их отражение в соответствующих полосах ухудшаются тем сильнее, чем номер полосы больше, причем тонкое расщепление спектра внутри полос пропускания с увеличением затухания сглаживается.

### 7.3. Электромагнитная волна в проводящей среде

Теперь, когда распространение одномерных волн в многослойной структуре с диссипацией в основном рассмотрено, обратимся к более сложному случаю электромагнитных волн.

Для электромагнитной волны главной причиной диссипации является проводимость среды. Общие принципы введения проводимости в расчетный аппарат пошагового алгоритма рассмотрены в главе 5

(раздел 5.5.2). Здесь повторим лишь некоторые необходимые далее основные положения.

Диэлектрическая проницаемость в среде с проводимостью  $\sigma$  принимает вид [136–138]:

$$\varepsilon = \varepsilon_r - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}, \quad (7.7)$$

где  $\varepsilon_r$  — диэлектрическая проницаемость в отсутствие проводимости, являющаяся действительной.

Волновое число, становясь комплексным, приобретает вид:

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu \mu_0 \left( \varepsilon_r - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right)}. \quad (7.8)$$

Следуя правилам извлечения квадратного корня из комплексного числа [127], получаем:

$$k = \eta - i \cdot \xi, \quad (7.9)$$

где

$$\eta = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu \mu_0}{2} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \omega} \right)^2} \right\}}; \quad (7.10)$$

$$\xi = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu \mu_0}{2} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \omega} \right)^2} \right\}}. \quad (7.11)$$

В таком виде волновое число входит в показатели экспонент в выражениях, получающихся в ходе реализации пошагового алгоритма.

Адмиттанс в проводящей среде также становится комплексным:

$$A = \delta - i \cdot \rho, \quad (7.12)$$

где

$$\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{2 \mu \mu_0} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \omega} \right)^2} \right\}}; \quad (7.13)$$

$$\rho = \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{2 \mu \mu_0} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \omega} \right)^2} \right\}}. \quad (7.14)$$

В таком виде адмиттансы входят в линейные суммы выражений, получающихся в ходе реализации пошагового алгоритма.

Для практики представляет большое значение случай высокой проводимости, какой, например, обладают металлы. При этом форма выражений (7.10)–(7.11) и (7.13)–(7.14) определяется величиной последнего слагаемого под внутренним корнем по сравнению с единицей. Так, при выполнении условия

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \omega} \gg 1, \quad (7.15)$$

что может иметь место при высокой проводимости или низкой частоте, действительная и мнимая компоненты волнового числа  $\eta$  и  $\xi$ , а также

адмиттанса  $\delta$  и  $\rho$ , становятся попарно равными друг другу, приобретая вид:

$$\eta = \xi = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0\sigma}{2}}; \quad (7.16)$$

$$\delta = \rho = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu\mu_0}}. \quad (7.17)$$

Можно видеть, что в обоих случаях зависимость от проводимости имеет корневой характер.

**Замечание.** В рассматриваемой здесь задаче о диссипации магнитные свойства вещества не учитываются, то есть магнитная проницаемость, входящая в выражения (7.8)–(7.17), полагается равной единице. В разделе 6.7 при рассмотрении магнитной проницаемости в тензорном виде, был сделан вывод об отсутствии диссипации для структуры в целом, несмотря на учет затухания в магнитной среде с помощью механизма Гильберта [18–20, 156]. Такой результат получен из-за предположения о действительности компонент тензора магнитной проницаемости, представленных в главе 6 в виде формул (6.108)–(6.109). В этом случае как волновое число, так и адмиттанс остаются действительными, что и проявляется как отсутствие диссипации, несмотря на наличие гильбертова затухания.

Для последовательного учета диссипации, обусловленной гильбертовым механизмом, надо учитывать комплексный вид компонент магнитной проницаемости, описываемый в главе 6 формулами (6.103)–(6.104). При этом приведенные здесь компоненты волнового числа (7.10)–(7.11) и адмиттанса (7.13)–(7.14) приобретают более сложный вид, требующий отдельного рассмотрения, которые авторы оставляют в качестве полезного упражнения для любознательного читателя.

### 7.3.1. Волновое число и адмиттанс в присутствии проводимости

Согласно методу пошагового алгоритма, амплитуды волн в слоях определяются значениями волнового числа и адмиттанса. Рассмотрим, что происходит с этими параметрами при изменении проводимости, для чего обратимся к рис. 7.3, где показаны зависимости диэлектрической проницаемости (а), волнового числа (б) и адмиттанса (в) от проводимости.

При построении рисунка частота была выбрана равной 1 ГГц из того соображения, что такой диапазон СВЧ является рабочим для широкого класса устройств на ферритах [16, 18–20, 157, 158], на метаматериалах [159], а также используется в спин-волновой электронике [23].

На рисунке сплошными линиями показаны действительные части соответствующих величин, пунктирными — мнимые их части.

Интервал рассмотренных значений проводимости выбран таким образом, чтобы действительные и мнимые части различались друг

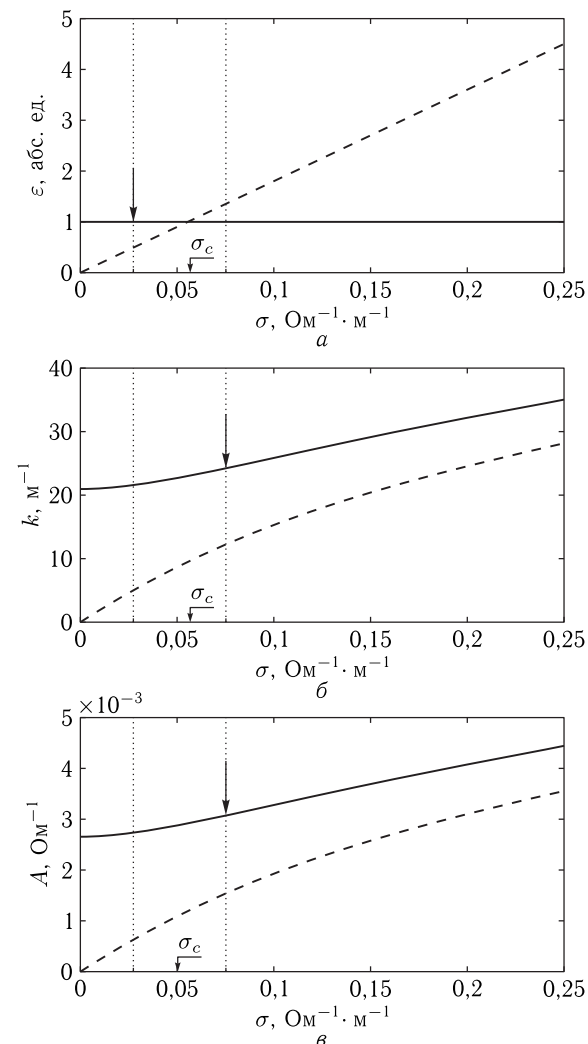


Рис. 7.3. Зависимости диэлектрической проницаемости (а), волнового числа (б) и адмиттанса (в) от проводимости. Сплошные линии — действительные части соответствующих величин, пунктирные — мнимые их части. Параметры среды:  $\epsilon_r = 1$ ,  $\mu = 1$ . Частота 1 ГГц

от друга заметным образом. Этим условием можно определить критическое значение проводимости:

$$\sigma_c = \epsilon_r \epsilon_0 \omega. \quad (7.18)$$

При  $\sigma \ll \sigma_c$  неравенство (7.15) резко не выполняется, то есть среда ведет себя преимущественно как диэлектрик.

При  $\sigma \gg \sigma_c$  неравенство (7.15) выполняется, то есть среда ведет себя как металл.

Случай  $\sigma \sim \sigma_c$  соответствует полупроводящей среде.

Можно видеть, что это критическое значение соответствует критерию перехода между диэлектриком и металлом, введенному в работе [68, форм. (27)]:

$$\sigma_c = g\varepsilon_r\varepsilon_0\omega, \quad (7.19)$$

который переходит в (7.18) при  $g = 1$ .

В рассматриваемом здесь случае, полагая  $\varepsilon_r = 1$ ,  $\varepsilon_0 = 8,842 \times 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}$ ,  $\omega = 6,2832 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ , получаем  $\sigma_c \sim 0,0556 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ . Именно такая величина на рисунке лежит в левой части исследуемого диапазона.

Видно, что левее этого значения проводимости действительные величины диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  (рис. 7.3, а) и особенно волнового числа  $k$  (рис. 7.3, б) и адмиттанса  $A$  (рис. 7.3, в) заметно превышают их мнимые части, то есть средю можно считать по преимуществу диэлектрической с некоторой проводимостью, как бы «плохим полупроводником».

Правее этого значения мнимые части становятся заметными, после чего начинают преобладать над действительными, в результате чего действительная и мнимая ветви для волнового числа (рис. 7.3, б) и адмиттанса (рис. 7.3, в) сближаются («хороший полупроводник»). Далее (за правым краем рисунка) мнимая часть еще более сближается с действительной, причем зависимость от проводимости приобретает корневой характер в соответствии с выражениями (7.16)–(7.17) («металл»).

Для определенности на рисунке проведены вертикальные точечные линии через те значения проводимости, где действительные части исследуемых параметров превышают мнимые в два раза. Для диэлектрической проницаемости (рис. 7.3, а) это соответствует проводимости  $0,028 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$  (левая точечная линия). Для волнового числа (рис. 7.3, б) и адмиттанса (рис. 7.3, в) — проводимости  $0,075 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$  (правая точечная линия, как следует из (7.10)–(7.11) и (7.13)–(7.14), для обоих параметров совпадает). Соответствующие значения действительных частей исследуемых параметров показаны стрелками.

Можно видеть, что критическая величина проводимости  $0,0556 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$  находится вблизи от середины между этими значениями.

Хотя видно, что диэлектрическая проницаемость (рис. 7.3, а) более чувствительна к величине проводимости, чем волновое число (рис. 7.3, б) и адмиттанс (рис. 7.3, в), однако в ходе пошагового алгоритма фигурируют именно эти два последних параметра, то есть можно полагать, что проводимость должна существенно сказываться на распределении амплитуд волн в слоях начиная именно с приведенного критического значения.

### 7.3.2. Характер проникновения волны в металл

Из (7.18) можно видеть, что при увеличении частоты критическое значение проводимости также увеличивается. То есть, казалось бы, на более высоких частотах диэлектрические свойства среды относительно законов распространения волны проявляются до более высоких значений проводимости.

Однако благодаря мнимой составляющей волнового числа (7.11), образующейся за счет проводимости, амплитуда волны по мере распространения в среде уменьшается. Так, в соответствии в классическим критерием убывания амплитуды в  $e = 2,71828 \dots$  раз, то есть полагая  $x\xi = 1$ , из (7.16) получаем «глубину проникновения» волны в металл, обусловленную скин-эффектом:

$$L_r = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\mu_0\sigma}}, \quad (7.20)$$

совпадающую с классикой [116, 136–138, 144, 145].

Таким образом, при увеличении частоты, хотя действительная часть адмиттанса относительно мнимой еще может оставаться достаточно высокой, но амплитуда волны в среде настолько резко затухает, что волна сохраняет способность проникать через слой тем меньшей толщины, чем проводимость больше.

Интересно проверить соотношение частоты, соответствующей критической проводимости, с глубиной проникновения волны в реальный металл. Так, разрешая (7.15) относительно частоты:

$$f_c = \frac{\sigma_c}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0} \quad (7.21)$$

и подставляя типичное значение для металла значение проводимости  $10^6 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$  [27, 68], получаем:  $f_c = 1,8 \cdot 10^{16} \text{ Гц}$ . Такая частота соответствует длине волны  $\lambda_c = 17 \text{ нм}$ , которая приближается к границе ультрафиолетового и рентгеновского диапазонов. При такой частоте, согласно (7.20) (при  $\mu = 1$ ), глубина проникновения равна:  $L_s = 3,75 \text{ нм}$ . То есть в реальном металле на частоте, соответствующей критической проводимости, волна затухает по амплитуде почти в три раза на расстоянии, меньшем четверти ее длины, так что распространение волны является полностью аperiodическим.

### 7.4. Распределение амплитуд для электромагнитной волны

Теперь, после того как основные закономерности распространения волн в периодической структуре с диссипацией на примере одномерной волны рассмотрены, обратимся к более сложному случаю электромагнитной волны.

Здесь, в отличие от одномерной волны, определяющим параметром является не волновое число, а частота, задаваемая источником

возбуждения. Геометрию задачи будем полагать той же самой. В качестве возбуждения будем считать амплитуду электрического поля волны прямого направления в слое №1, то есть  $E_{A01}$ , на которую будем нормировать поля во всех остальных слоях. Источником диссипации волны полагаем электрическую проводимость материала каждого слоя.

В качестве инструмента расчета будем пользоваться пошаговым алгоритмом, вариант которого для электромагнитной волны описан в главе 5 (раздел 5.3), причем для получения волнового числа и адмиттанса в среде с проводимостью используем выражения (7.10)–(7.11) и (7.12)–(7.13).

Основные результаты иллюстрируются рис. 7.4, где показаны распределения нормированных амплитуд волн прямого (сплошные линии и сплошные точки) и обратного (пунктирные линии и открытые точки) направлений от координаты при различных значениях проводимости.

При построении рисунка значения диэлектрической проницаемости барьеров  $\epsilon_s$  были подобраны таким образом, чтобы в случаях (а, б, в) она значительно (в 10 раз) превышала таковую для промежутка  $\epsilon_p$ , тогда как в случаях (г, д, е) обе проницаемости равнялись друг другу:  $\epsilon_s = \epsilon_p$ .

При этом проводимости в случаях (а, б, в) и (г, д, е) нарастали от нуля в случаях (а, г) до превышения над критической проводимостью  $\sigma_c$  в 6 и 2 раза в случаях (в) и (е) соответственно.

Различные значения превышения для левого (6 раз) и правого (2 раза) столбцов на рис. 7.4 были выбраны для обеспечения большей наглядности рисунка, исходя из максимально возможного соответствия характера распределений случаю одномерной волны. В то же время для близкого характера изменений распределения амплитуд между столбцами в случае правого столбца требовалось меньшее значение проводимости, чем для левого из-за того, что в левом столбце проводимость барьера действовала на фоне довольно высокой диэлектрической проницаемости, тогда как в правом — на нулевом фоне по сравнению с промежутком.

Для построения непрерывных кривых на рис. 7.4 использовались следующие эмпирические формулы (с точностью до постоянной составляющей и сдвига фазы):

$$a - E_{An}/E_{A01} \rightarrow 2,5 \sin(236x);$$

$$E_{Bn}/E_{A01} \rightarrow 4,0 \sin(236x); \quad (7.22)$$

$$б - E_{An}/E_{A01} \rightarrow 1,6 \sin(236x) - 80x;$$

$$E_{Bn}/E_{A01} \rightarrow 2,9 \sin(236x) - 20x; \quad (7.23)$$

$$в - E_{An}/E_{A01} \rightarrow \exp(-25(x - 0,004));$$

$$E_{Bn}/E_{A01} \rightarrow 0,5 \exp(-25x); \quad (7.24)$$

$$г - E_{An}/E_{A01} \rightarrow 1,00;$$

$$E_{Bn}/E_{A01} \rightarrow 0,00; \quad (7.25)$$

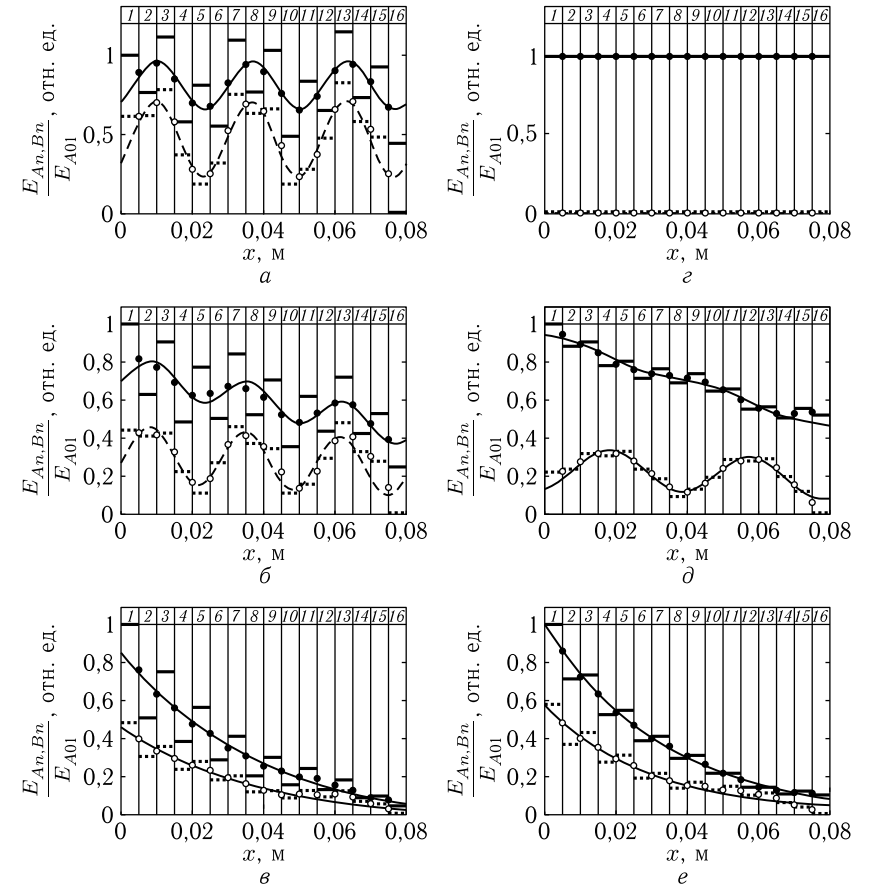


Рис. 7.4. Распределение нормированных амплитуд волн прямого (сплошные линии и сплошные точки) и обратного (пунктирные линии и открытые точки) направлений от координаты при различных значениях проводимости. Частота —  $f = 11$  ГГц. Критическое значение проводимости:  $\sigma_c = 0,6116 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ . Параметры: везде  $\mu_{p,s} = 1$ , в промежутке:  $\epsilon_p = 1$ ,  $\sigma_p = 0$ . Внутри барьера: а, б, в —  $\epsilon_s = 10$ , г, д, е —  $\epsilon_s = 1$ . Проводимость барьера: а — 0; б —  $2 \cdot \sigma_c$ ; в —  $6 \cdot \sigma_c$ ; г — 0; д —  $1 \cdot \sigma_c$ ; е —  $2 \cdot \sigma_c$

$$д - E_{An}/E_{A01} \rightarrow 0,4 \sin(160x) - 120x;$$

$$E_{Bn}/E_{A01} \rightarrow 2 \sin(160x) - 20x; \quad (7.26)$$

$$е - E_{An}/E_{A01} \rightarrow \exp(-30x);$$

$$E_{Bn}/E_{A01} \rightarrow 0,6 \exp(-35x). \quad (7.27)$$

Распределение, приведенное на рис. 7.4, а, соответствует отсутствию проводимости барьера и показано здесь для сравнения.

Распределения, приведенные на рис. 7.4, б, д и в, е, соответствуют относительно малой (б, д) и сравнительно большой (в, е) проводимостям барьера.

Распределение, приведенное на рис. 7.4, г, соответствует точному равенству диэлектрической и магнитной проницаемостей барьера и промежутка при нулевой проводимости обоих. То есть неоднородность структуры в целом отсутствует и волна, не испытывая отражения, полностью проходит насквозь.

Распределения, приведенные на рис. 7.4, б и рис. 7.4, в соответствуют малой (б) и большой (в) проводимостям барьера на фоне относительно большой диэлектрической проницаемости барьера в сравнении с таковой для промежутка.

Распределения, приведенные на рис. 7.4, д и рис. 7.4, е соответствуют малой (д) и большой (е) проводимостям барьера на фоне равенства диэлектрических проницаемостей барьера и промежутка.

Из рис. 7.1 можно видеть, что в рассматриваемом случае отличной от нуля проводимости наблюдаются те же основные виды распределений, что и при ее отсутствии (глава 5), а также для случая одномерной волны, рассмотренном здесь в главе 4.

Более точно наблюдаемые распределения можно классифицировать следующим образом:

*a* — синусоидальное;

*б* — линейное с добавкой синусоидального, называемое далее линейно-синусоидальным;

*в* — экспоненциальное;

*г* — постоянное;

*д* — для волн прямого направления — практически линейное с незначительной (около 3% от максимума) добавкой синусоидального, для волн обратного направления — синусоидальное с большой амплитудой и незначительной (около тех же 3%) добавкой линейного;

*е* — экспоненциальное для волн обоих направлений.

Отметим некоторые особенности, следующие из общего вида приведенных кривых.

На рис. 7.4, а обе синусоиды имеют одинаковый период и одинаковую фазу; средний уровень амплитуды волн прямого направления (0,82 отн. ед.) выше среднего уровня амплитуды волн обратного направления (0,48 отн. ед.) почти в два раза.

На рис. 7.4, б коэффициент линейного спада для волн прямого направления (80) больше коэффициента линейного спада волн обратного направления (20) примерно в четыре раза. Соотношение средних уровней синусоидальных составляющих амплитуд волн прямого (1,6) и обратного (2,9) направлений — обратное по сравнению с таковым на рис. 7.4, а и составляет около двух раз.

Для волн прямого направления  $E_{An}/E_{A01}$  средний уровень вблизи  $x = 0$  составляет 0,70 отн. ед., амплитуда синусоидальной составляющей

щей — 0,12 отн. ед., отношение этих величин — около 6 раз. Для волн обратного направления  $E_{Bn}/E_{A01}$  средний уровень вблизи  $x = 0$  составляет 0,32 отн. ед., амплитуда синусоидальной составляющей — 0,17 отн. ед., отношение этих величин близко к 2.

Таким образом, для волн прямого направления в распределении преобладает линейная составляющая, для волн обратного направления — преобладает синусоидальная составляющая, хотя здесь такое преобладание выражено значительно слабее, чем для одномерной волны: там в  $\sim 13$  раз, здесь в всего  $\sim 3$  раза.

Такое различие, по-видимому, вызвано большим различием диэлектрических проницаемостей барьера и промежутка здесь, чем в случае одномерной волны для волновых чисел. Так, в пересчете на волновое, число здесь различие составляет  $\sqrt{\varepsilon_s/\varepsilon_p} = \sqrt{10} = 3,16$  раз, тогда как для одномерной волны:  $\text{Im}(k_s)/\text{Im}(k_p) = 2,40$ . Хотя по такому пересчету отношение здесь составляет всего  $3,16/2,40 = 1,32$ , что мало отличается от единицы, можно полагать, что электромагнитная волна более чувствительна к изменению проводимости, чем одномерная к изменению волнового числа.

Возможной причиной такой более высокой чувствительности может быть то обстоятельство, что в формировании волнового возмущения в электромагнитной волне участвуют два поля — электрическое и магнитное, тогда как в одномерной волне всего одно — смещение по координате, то есть электромагнитная волна по эффективности связана со средой распространения как бы сильнее, чем одномерная.

На рис. 7.4, в обе зависимости описываются одной и той же экспонентой, различие состоит только в линейном числовом коэффициенте: для волн обратного направления он составляет 0,50 от такого же коэффициента для волн прямого направления. Как видим, здесь этот коэффициент превышает таковой для одномерной волны (0,15) более чем в три раза, что может быть вызвано той же причиной.

Подобные особенности наблюдаются и для кривых, приведенных на рис. 7.4, г, д, е.

Характерна наблюдаемая при сравнении горизонтальных пар рисунков несколько более слабая зависимость распределений от координаты, свойственная первым двум эпюрам правого столбца (рис. 7.4, г, д) по сравнению с таковыми для левого (рис. 7.4, а, б).

Однако здесь, в отличие от случая одномерной волны, такая «слабость» выражена значительно меньше. Так, здесь отношение средних уровней для волн прямого и обратного направлений на рис. 7.4, б составляет  $0,70/0,32 = 2,19$ , а на рис. 7.4, д —  $0,95/0,15 = 6,33$ , то есть увеличивается примерно в три раза. Для одномерных же волн, как можно видеть из рис. 7.1, б, д, подобные же цифры равны  $0,80/0,30 = 2,67$  и  $1,00/0,25 = 4,00$ , то есть отношение увеличивается всего в полтора раза.

То есть здесь наблюдается то же увеличение «чувствительности» электромагнитных волн к диссипации по сравнению с одномерными, обусловленное той же причиной.

На рис. 7.4, в и 5е экспоненты в обоих случаях почти не отличаются, что говорит о преобладании роли проводимости над диэлектрической проницаемостью при экспоненциальном распределении.

Здесь опять проявляется сильно выраженное повышение «чувствительности» электромагнитной волны к диссипации над одномерной волной. Так отношение начальных амплитуд на рис. 7.1, в и рис. 7.1, е равно  $1,00/0,35 = 2,86$  и  $1,10/0,15 = 7,33$  соответственно, что дает соотношение в 2,56 раз, тогда как для электромагнитной волны, как видно из рис. 7.4, в и рис. 7.4, е эти же цифры составляют  $0,85/0,46 = 1,85$  и  $1,00/0,605 = 1,67$ , а их отношение — всего 1,11 раз, то есть более чем вдвое меньше.

Таким образом, несмотря на то, что в формировании распределений в левом столбце рис. 7.4 участвует, наряду с проводимостью, также и диэлектрическая проницаемость, тогда как в формировании распределений правого столбца только проводимость, влияние проводимости для электромагнитной волны значительно преобладает над влиянием диэлектрической проницаемости, в отличие от случая одномерной волны, где такое соотношение является обратным.

#### 7.4.1. Сочетание различных видов распределений

Отметим еще одну характерно выраженную особенность приведенных зависимостей, явно параллельную подобной особенности для одномерной волны.

Так, отличие от случая отсутствия проводимости здесь состоит в том, что синусоидальное распределение не является самостоятельным, а накладывается на линейное (особенно хорошо это заметно на рис. 7.4, в, а также частично на рис. 7.4, д), образуя распределение линейно-синусоидальное.

Наблюдаемое здесь линейное распределение не является переходным от синусоидального к экспоненциальному, а получается как результат убывания амплитуд волн того и другого направлений при удалении их от точки возбуждения (то есть от слоя № 1). Очевидно, такое убывание является следствием затухания волны по координате, что описывается мнимой составляющей диэлектрической проницаемости, обеспечиваемой проводимостью (7.7).

Когда мнимая составляющая диэлектрической проницаемости (7.7) становится достаточно большой, линейно-синусоидальное распределение сменяется экспоненциальным, как это видно из рис. 7.4, в и рис. 7.4, е. Однако здесь спадающий характер распределения обусловлен не наличием «полос непропускания» в отсутствие проводимости, определяемых интерференцией волн при их многократном переотражении, а именно затуханием волны по мере ее распространения по координате.

Это хорошо видно из сравнения рис. 7.4, а с рис. 7.4, в, где действительная диэлектрическая проницаемость соответствует области пропускания, тогда как распределение на рис. 7.4, в спадает по экспоненте. То же следует из сравнения рис. 7.4, г с рис. 7.4, д и рис. 7.4, е, где действительная часть диэлектрической проницаемости в переотражении волн вообще не участвует, так как ее значения для барьеров и промежутков между собой равны. Тем не менее обеспечиваемая проводимостью достаточно большая мнимая составляющая проницаемости и здесь приводит к спаду распределения сначала по линейному закону (рис. 7.4, д), а затем по экспоненте (рис. 7.4, е).

Таким образом, из проведенного рассмотрения видно, что проводимость, обеспечивая мнимую добавку к действительной диэлектрической проницаемости, может приводить к таким же видам распределения амплитуд в слоях, что и действительная диэлектрическая проницаемость, однако главная ее роль состоит в уменьшении амплитуд волн по координате по мере удаления от источника возбуждения, которое накладывается на распределения, обусловленные действительной диэлектрической проницаемостью.

При этом влияние проводимости на диссипативные свойства электромагнитной волны сказывается значительно (более чем в два-три раза) сильнее, чем влияние мнимой части волнового числа на те же свойства для одномерной волны, причиной чего может явиться участие в формировании распределений амплитуд одновременно обоих полей волны — электрического и магнитного, что приводит к повышению эффективности связи волны со средой распространения.

## 7.5. Сравнение эффективности диссипации

В предыдущем разделе был сделан вывод о том, что влияние проводимости на диссипацию электромагнитной волны сказывается значительно (более чем в два-три раза) сильнее, чем влияние мнимой части волнового числа на то же свойство для одномерной волны. Однако параметры, использованные при построении распределений на рис. 7.4, будучи выбранными из условия сходства характера распределений случая одномерной волны, не были эквивалентны подобным параметрам, принятым при построении рис. 7.1. Такое обстоятельство не позволило сравнить диссипативные свойства этих случаев в достаточной полноте.

Для сравнения эффективности механизмов диссипации для одномерной и электромагнитной волны зададим диэлектрическую проницаемость и проводимость таким образом, чтобы волновые числа барьера и промежутка были пропорциональны таковым для одномерной волны.

Так, для одномерной волны при построении рис. 7.1, в были приняты следующие параметры:

$$\text{волновое число промежутка} - k_{po} = (1,00 - i \cdot 0,00) \text{ см}^{-1};$$

$$\text{волновое число барьера} - k_{so} = (2,40 - i \cdot 0,50) \text{ см}^{-1}.$$

При построении рис. 7.1, *e* те же параметры равнялись: волновое число промежутка —  $k_{po} = (1,00 - i \cdot 0,00) \text{ см}^{-1}$ ; волновое число барьера —  $k_{so} = (1,00 - i \cdot 0,50) \text{ см}^{-1}$ .

Потребуем выполнения условий пропорциональности действительных и мнимых частей волновых чисел:

$$\frac{\text{Re}(k_{po})}{\text{Re}(k_{so})} = \frac{\text{Re}(k_{pe})}{\text{Re}(k_{se})}, \quad (7.28)$$

$$\frac{\text{Im}(k_{so})}{\text{Re}(k_{so})} = \frac{\text{Im}(k_{se})}{\text{Re}(k_{se})}, \quad (7.29)$$

где индексами «*o*» и «*e*» отмечены волновые числа для одномерной и электромагнитной волны соответственно.

Из условий (7.28)–(7.29) находим:

$$\text{Re}(k_{se}) = \frac{\text{Re}(k_{pe}) \text{Re}(k_{so})}{\text{Re}(k_{po})}, \quad (7.30)$$

$$\text{Im}(k_{se}) = \frac{\text{Re}(k_{se}) \text{Im}(k_{so})}{\text{Re}(k_{so})}. \quad (7.31)$$

Для электромагнитной волны в промежутке воспользуемся определением волнового числа:

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}, \quad (7.32)$$

из которого при частоте  $f = 11 \text{ ГГц}$  и  $\varepsilon_{pe} = 1$ ,  $\mu_{pe} = 1$ , получаем

$$k_{pe} = (230,4175 - i \cdot 0,0000) \text{ м}^{-1}. \quad (7.33)$$

Согласно (7.30)–(7.31), получаем волновое число для электромагнитной волны внутри барьера при отличной от единицы диэлектрической проницаемости:

$$k_{se} = (553,0020 - i \cdot 115,1903) \text{ м}^{-1}. \quad (7.34)$$

При этом, в соответствии с (7.32), действительная часть диэлектрической проницаемости равна  $\varepsilon_s = 5,7600$ .

В случае  $\varepsilon_s = 1,0000$  вместо (7.34) получаем:

$$k_{se} = (230,4175 - i \cdot 115,1903) \text{ м}^{-1}. \quad (7.35)$$

Для нахождения значения проводимости, требуемой для обеспечения мнимой части волнового числа для электромагнитной волны внутри барьера  $\text{Im}(k_{se}) = 115,1903 \text{ м}^{-1}$ , разрешим (7.11) относительно проводимости:

$$\sigma = \varepsilon_r \varepsilon_0 \omega \sqrt{\left( \frac{2\xi^2}{\omega^2 \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu \mu_0} + 1 \right)^2 - 1}. \quad (7.36)$$

Подставляя в эту формулу  $\varepsilon_r = \varepsilon_s = 5,7600$ , получаем:  $\sigma = 1,4979 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ . При  $\varepsilon_r = 1,0000$  соответственно получаем:  $\sigma = 0,6831 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ .

Рассмотрим теперь рис. 7.5, где показаны распределения нормированных амплитуд волн прямого (сплошные линии и сплошные точки) и обратного (пунктирные линии и открытые точки) направлений от координаты при различных значениях проводимости.

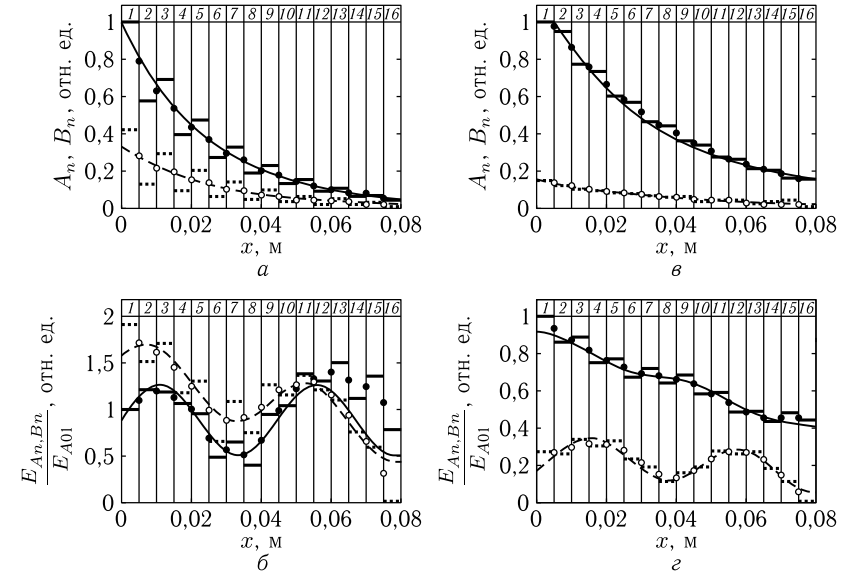


Рис. 7.5. Распределение нормированных амплитуд волн прямого (сплошные линии и сплошные точки) и обратного (пунктирные линии и открытые точки) направлений от координаты при различных значениях проводимости. *a, в* — одномерная волна, параметры — те же, что на рис. 7.1, *в*, 7.2, *e*. *б, г* — электромагнитная волна. Частота —  $f = 11 \text{ ГГц}$ . Параметры: везде  $\mu_{p,s} = 1$ , в промежутке:  $\varepsilon_p = 1$ ,  $\sigma_p = 0$ . *б* —  $\varepsilon_s = 5,7600$ ,  $\sigma = 1,4979 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ ; *г* —  $\varepsilon_s = 1,0000$ ,  $\sigma = 0,6831 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ . Волновые числа для рис. 7.5, *a*:  $k_{po} = (1,00 - i \cdot 0,00) \text{ см}^{-1}$ ,  $k_{so} = (2,40 - i \cdot 0,50) \text{ см}^{-1}$ ; для рис. 7.5, *б*:  $k_{pe} = (230,4175 - i \cdot 0,0000) \text{ м}^{-1}$ ,  $k_{se} = (553,0020 - i \cdot 115,1903) \text{ м}^{-1}$ ; для рис. 7.5, *в*:  $k_{po} = (1,00 - i \cdot 0,00) \text{ см}^{-1}$  и  $k_{so} = (1,00 - i \cdot 0,50) \text{ см}^{-1}$ ; для рис. 7.5, *г*:  $k_{pe} = (230,4175 - i \cdot 0,0000) \text{ м}^{-1}$ ,  $k_{se} = (230,4175 - i \cdot 115,1903) \text{ м}^{-1}$ .

Верхний ряд эпюр (рис. 7.5, *a, в*) соответствует одномерной волне, нижний (рис. 7.5, *б, г*) — электромагнитной. Параметры структуры, в которой распространяется электромагнитная волна, подобраны таким образом, чтобы волновые числа в промежутках и барьерах были пропорциональны волновым числам для одномерной волны (то есть в соответствии со значениями, приведенными выше).



Из сопоставления верхнего и нижнего рядов рисунков видно, что при одинаковом соотношении действительных и мнимых частей волнового числа для одномерной волны (рис. 7.5, *a, в*) распределения становятся экспоненциальными, тогда как для электромагнитной волны (рис. 7.5, *б, г*) сохраняется преобладающая синусоидальная составляющая. При этом когда действительная компонента волнового числа барьера отличается от таковой для промежутка (*a, б*), такое преобладание выражено сильнее, чем в случае, когда эти компоненты равны (рис. 7.5, *в, г*).

То есть при установлении эквивалентности параметров структур по волновым числам влияние проводимости на затухание волны проявляется слабее, чем такое же влияние за счет мнимой составляющей волнового числа.

Этот вывод находится в определенном противоречии со сделанным в предыдущем разделе. Однако надо учесть, что здесь для установления пропорциональности между волновыми числами проводимость для рис. 7.5, *б* положена равной  $\sigma = 1,4979 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ , тогда как для рис. 7.5, *г* ее пришлось уменьшать до величины  $\sigma = 0,6831 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ , то есть более чем в два раза (точнее в 2,1928 раза). Такое уменьшение проводимости соответственно уменьшило ее влияние на затухание волны, что и привело к сохранению синусоидальной составляющей на рис. 7.5, *б* и рис. 7.5, *г*.

То есть можно полагать, что сделанный в предыдущем разделе вывод о более высокой эффективности взаимодействия электромагнитной волны со средой по сравнению с одномерной волной обусловлен тем, что там принято более высокое значение проводимости, что было сделано исходя из требования сходного характера распределений с таковыми в правом и левом столбцах рис. 7.1.

**Замечание.** Сделанный здесь вывод является по сути дела качественным, имеющим силу при принятых параметрах задачи. Для более корректного ответа на вопрос об эффективности взаимодействия волны со средой, по-видимому, должен быть введен какой-то параметр взаимодействия, величина которого была бы критерием такой эффективности. В основу определения такого параметра можно положить или волновое число, как это сделано здесь, или сходство характеров распределений при заданном различии диэлектрических проницаемостей барьеров и промежутков, как это сделано в предыдущем разделе. По-видимому, возможны и другие варианты, однако на данном этапе задача получения такого параметра выходит за рамки настоящей работы.

## 7.6. Отражающие и пропускающие свойства структуры для электромагнитной волны

Рассмотрим теперь, какое влияние оказывает проводимость на отражающие и пропускающие свойства структуры относительно электромагнитной волны.

Предварительное исследование показало, что частотная зависимость отражающих и пропускающих свойств диссипативной структуры для электромагнитной волны во многом подобна таковой в случае отсутствия диссипации (раздел 5.7). То есть и здесь спектр имеет дискретную структуру, образованную чередованием областей пропускания и непропускания. При увеличении затухания полосы пропускания-непропускания остаются на своих местах, задаваемых действительной частью волнового числа, то есть их чередующийся характер от величины затухания не зависит.

Однако, в отличие от случая одномерной волны, здесь затухание волн обоих направлений, обусловленное проводимостью, не приводит к сильному уменьшению амплитуды волн при увеличении частоты. То есть в более высокочастотных областях пропускания и непропускания амплитуда распространяющихся волн сохраняется на такой же величине, какой она была в низкочастотных. В ходе настоящей работы такое свойство было проверено вплоть до пятой-седьмой полос непропускания, то есть при принятых параметрах ( $\varepsilon_p = 1$ ,  $\varepsilon_s \sim 10$ ,  $\sigma_p = 0$ ,  $\sigma_s \sim 1 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ ,  $\mu_{p,s} = 1$ ) на частотах до 50 ГГц.

С другой стороны, дискретный характер структуры каждой полосы, заметнее проявляющийся при  $\varepsilon_s \sim 2-5$ , при повышении частоты от 10 до 50 ГГц несколько сглаживается: амплитуда изрезанности полос падает в полтора-два раза, что аналогично подобному свойству для одномерной волны.

В то же время для электромагнитной волны наблюдается ряд особенностей, заметно отличающих ее свойства от таковых для одномерной волны, на более подробном рассмотрении которых здесь и остановимся.

Обратимся к рис. 7.6, где на примере одной области показаны зависимости нормированных амплитуд волн обратного в слое №1 (*a, б, в*) и прямого в слое №16 (*г, д, е*) направлений от частоты возбуждения при различных значениях проводимости.

Приведенный частотный интервал соответствует первой области непропускания, края которой отмечены парными вертикальными пунктирными линиями. Эти края по уровню отражения 0,9999 соответствуют частотам 4,930 ГГц и 8,770 ГГц, а середина приходится на частоту 6,850 ГГц. В разделе 5.7 для расчета центральной частоты первой области непропускания получена формула (5.66):

$$f_s^{(res)} = \frac{c}{\sqrt{2(\varepsilon_s + \varepsilon_p)\mu_s(L_s + L_p)}}. \quad (7.37)$$

Подставляя приведенные здесь значения, получаем частоту 6,366 ГГц, что несколько ниже наблюдаемой величины. Подобное занижение в ряде случаев отмечалось в том же разделе, для компенсации чего были введены поправочные коэффициенты для случаев слабой и сильной неоднородности, равные 1,0166 и 1,1398. С помощью этих коэффициентов получаем частоты 6,472 ГГц и 7,256 ГГц, первая из которых ниже

наблюдаемой, а вторая — выше. Для рассматриваемого здесь случая наиболее подходит коэффициент 1,076, занимающий как раз промежуточное значение между приведенными в разделе 5.7. Таким образом, с учетом этого коэффициента можно считать согласие приведенной формулы с полученным расчетным значением вполне удовлетворительным.

В том же разделе 5.7 было показано, что первая область непропускания по резонансным свойствам подобна электродинамическому резонатору длиной  $L_m = L_s + L_p$  с диэлектрической проницаемостью, равной средней величине между проницаемостями барьера и промежуток, то есть  $\varepsilon_m = (\varepsilon_s + \varepsilon_p)/2$ .

При построении приведенных на рис. 7.6 зависимостей использовались значения  $\varepsilon_p = 1,0$ ,  $\varepsilon_s = 10,0$ , то есть усредненное значение равно  $\varepsilon_m = 5,5$ . Подставляя это значение и частоту середины области непро-

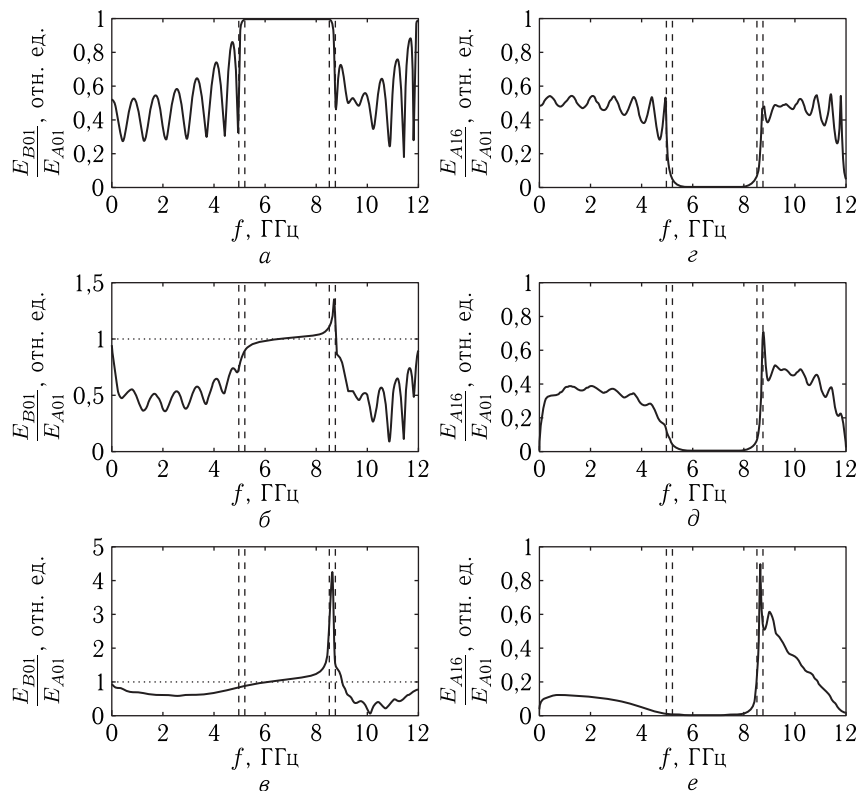


Рис. 7.6. Зависимости нормированных амплитуд волн обратного в слое № 1 (а, б, в) и прямого в слое № 16 (з, д, е) направлений от частоты возбуждения при различных значениях проводимости относительно критического значения  $\sigma_c = 1,9445 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ . а, в —  $\sigma = 0,0 \sigma_c$ ; б, д —  $\sigma = 0,2 \sigma_c$ ; в, е —  $\sigma = 1,0 \sigma_c$ .

Параметры:  $\varepsilon_p = 1,0$ ,  $\varepsilon_s = 10,0$ ,  $\mu_{p,s} = 1,0$ ,  $\sigma_p = 0,0 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$

пускания 6,850 ГГц в формулу (7.18), получаем критическое значение проводимости  $\sigma_c = 1,9445 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ .

Как можно видеть из рис. 7.6, при таком критическом значении действительные части волнового числа и адмиттанса превышают мнимые несколько более, чем в два раза (точнее в 2,2 раза). То есть можно ожидать, что при  $\sigma \ll 1,9445 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$  решающую роль в формировании области непропускания играют еще действительные части волнового числа и адмиттанса, а начиная с  $\sigma \sim 1,9445 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$  роль мнимых частей становится значительной.

В соответствии с этим при построении зависимостей на рис. 7.6 были приняты следующие значения проводимости: для рис. 7.6, б, д —  $0,3889 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ , что значительно меньше  $\sigma_c$ , а для рис. 7.6, в, е —  $1,9445 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ , что как раз равно  $\sigma_c$ . Зависимости на рис. 7.6, а, з соответствуют отсутствию проводимости и приведены здесь для сравнения.

Из рис. 7.6, а, з видно, что в отсутствие проводимости внутри области непропускания амплитуда от частоты не зависит, тогда как по обе стороны от краев области амплитуда имеет осциллирующий характер. Подобная структура области, представляющая собой большой центральный лепесток, сопровождаемый по сторонам лепестками-спутниками спадающей амплитуды, отмечалась в разделах 4.6 (рис. 4.13), 4.7 (рис. 4.14) для одномерной волны и в разделе 5.6.1 (рис. 5.5) для электромагнитной волны, то есть, как и там, обусловлена интерференционными явлениями при многократном переотражении волн обоих направлений.

При увеличении проводимости до уровня  $0,2 \cdot \sigma_c$  (рис. 7.6, б, д) дискретный характер спутников сглаживается, амплитуда их размаха падает в 3–5 раз и более, что обусловлено частичным затуханием интерферирующих волн за счет проводимости.

При увеличении проводимости до  $1,0 \cdot \sigma_c$ , то есть до критического значения (рис. 7.6, в, е), спутники совсем пропадают, а на их месте появляются плавные участки отражения (рис. 7.6, в) или прохождения (рис. 7.6, е). Уровни отражения при этом примерно соответствуют среднему уровню в отсутствие проводимости (около 0,5–0,6 отн. ед.), тогда как для прохождения, особенно ниже основного лепестка, снижаются в несколько раз ( $\sim 0,5$  отн. ед. до  $\sim 0,1$  отн. ед.). Такое сохранение уровня для отраженной волны в сочетании с его падением для волны проходящей, по-видимому, обусловлено тем, что в отражении волны в слой № 1, откуда происходит возбуждение, решающую роль играют слои, наиболее близкие к этому первому слою, где волна еще не успевает затухнуть в значительной степени. Падение уровня проходящей волны в слое № 16 происходит из-за того, что волна до попадания в этот слой должна пройти через множество промежуточных слоев, в каждом из которых она частично затухает. То есть в формировании волны в последнем слое участвуют все промежуточные слои структуры, каждый из которых, внося свой вклад в общее затухание, приводит к совокупному значительному уменьшению амплитуды проходящей волны.

### 7.6.1. Диссипативный резонанс

Важной особенностью наблюдаемых на рис. 7.6 амплитудно-частотных характеристик отражения и прохождения является наличие резкого выброса амплитуды вверх на высокочастотном конце области (между двумя правыми по рисунку пунктирными линиями). Максимум наблюдаемого пика соответствует частоте 8,604 ГГц, а края на половине высоты приходится на частоты 8,496 ГГц и 8,688 ГГц, то есть ширина составляет 0,192 ГГц.

По уровню  $\sqrt{2}$  от максимума края этого пика приходится на частоты 8,552 ГГц и 8,652 ГГц, откуда получаем ширину 0,100 ГГц, что соответствует добротности резонансной системы  $Q = 86$ .

С другой стороны, амплитуда пика при увеличении проводимости также увеличивается. Так для отражения при проводимости  $0,2\sigma_c$  (рис. 7.6, б) его максимум составляет 1,320 отн. ед., а при проводимости  $1,0\sigma_c$  (рис. 7.6, в) уже достигает 4,219 отн. ед. Такой же рост амплитуды пика наблюдается и для прохождения (с 0,704 отн. ед. на рис. 7.6, д при  $0,2\sigma_c$  до 0,905 отн. ед. на рис. 7.6, е при  $1,0\sigma_c$ ).

Таким образом, наблюдаемый пик во-первых связан с геометрическими размерами структуры, о чем говорит его расположение точно на высокочастотном краю области непропускания, и во вторых — обусловлен именно проводимостью определенных слоев, о чем говорит его рост при увеличении проводимости. То есть по характеру частотной зависимости и обусловленности проводимостью его можно назвать «диссипативным резонансом».

### 7.6.2. Аномалия баланса потоков энергии

Другой важной особенностью приведенных амплитудно-частотных зависимостей является наблюдаемое на рис. 7.6, б и рис. 7.6, в превышение амплитуды отраженной волны над амплитудой возбуждающей. Такое превышение наблюдается при проводимости  $0,2\sigma_c$  (рис. 7.7, б) в интервале частот от 6,610 ГГц до 8,800 ГГц, а при проводимости  $1,0\sigma_c$  (рис. 7.7, в) происходит в еще более широком диапазоне частот от 6,290 ГГц до 9,050 ГГц, захватывая также диссипативный резонанс.

С физической стороны превышение амплитуды отраженной волны над амплитудой падающей означает увеличение потока энергии отраженной волны по сравнению с потоком энергии падающей, что находится в определенном противоречии с законом сохранения энергии.

Такое обстоятельство в диссипативных средах, в том числе обладающих проводимостью, вообще говоря, более или менее известно. Так, в классической монографии [8] не только обозначается такая проблема, но и упоминается многолетняя дискуссия на эту тему. Неоднократно отмечено, что превышение суммарного потока энергии волн, выходящих из структуры — отраженной и проходящей, над потоком энергии падающей волны имеет место при прохождении волны из диссипативной среды в бездиссипативную [160–165].

Для преодоления такого противоречия предложен ряд приемов, в том числе введение «фиктивного» слоя [163], учет неоднородности электромагнитных волн вблизи границы раздела сред [162], привлечение для выполнения баланса энергии понятия интерференционного потока [164, 165], введение нового специального вида определения энергетического коэффициента прохождения волны [161], опять же на основе интерференционного потока.

В работе [72] для выполнения баланса энергии в случае одномерной волны для структуры из трех диссипативных сред, разделенных двумя границами, предложено использовать кроме потоков энергии отраженного и проходящего, также поток локализованный, содержащий активную и реактивную части. Такая модель обеспечивает выполнение баланса энергии в случае представления распространяющихся волн в комплексном виде. Некоторое расширение этой модели, в том числе для электромагнитных волн и магнитных сред, выполнено в работах [70, 73, 80, 86, 166, 167]. Однако общая задача о балансах энергии волн, распространяющихся в многослойной структуре, требует более подробного рассмотрения, выходящего за рамки настоящей работы. Можно полагать, что, как и в работах [70, 72, 73, 80, 86, 166, 167], к определенному успеху приведет использование комплексных потоков энергии с учетом локализации активной и реактивной составляющих в промежуточных слоях такой структуры. Более подробно этот вопрос обсуждается в следующих главах настоящей монографии.

**Замечание.** Появление дополнительного резонанса, обусловленного диссипативными свойствами структуры, вообще говоря, является несколько неожиданным. Для проверки возможности существования такого резонанса было выполнено контрольное исследование распространения электромагнитной волны в многослойной структуре, все слои которой обладают одинаковой диэлектрической и магнитной проницаемостями, но чередующейся от слоя к слою проводимостью. Было получено, что диссипативный резонанс имеет место и в этом случае, причем его амплитуда с увеличением проводимости увеличивается, но не монотонно, а переменным образом, при некоторых значениях проводимости достигая весьма больших величин, а при других падая до малых. Так, при равенстве проводимости критическому значению  $1\sigma_c$  амплитуда диссипативного резонанса достигала 7 отн. ед. по проходящей волне и 5 отн. ед. по отраженной, при проводимости  $10\sigma_c$  амплитуды возрастали до 30 отн. ед. и 50 отн. ед. соответственно, а при  $12\sigma_c$  снова падали до 5 отн. ед. и 3 отн. ед. При этом частота диссипативного резонанса при  $1\sigma_c$  составляла 12,5 ГГц, а при  $10\sigma_c$  линия раздваивалась на две при частотах  $\sim 5$  ГГц и  $\sim 20$  ГГц. Вообще говоря, по-видимому, природа диссипативного резонанса — та же, что и природы превышения потоков энергии выходящих волн над входящими. В пользу этого говорит единый непрерывный характер частотных зависимостей, при которых диссипативный резонанс является как бы про-

должением частотной характеристики внутри полосы не пропускания. Однако вопрос в целом представляется довольно сложным и требует отдельного рассмотрения.

## 7.7. Особенности случая металлической проводимости

Проведенное в предыдущих разделах рассмотрение для электромагнитной волны выполнено в условиях, сходных с таковыми для одномерной волны. То есть проводимость выбиралась такой, чтобы порядок величин действительной и мнимой частей волнового числа был близким. Это было сделано для того, чтобы, во-первых, рассмотреть возможные варианты соотношений величин действительной и мнимой частей, и, во-вторых, результаты, получаемые для электромагнитной волны, удобно было бы сравнивать с таковыми для одномерной волны.

При этом проводимость составляла не более нескольких единиц  $\text{Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ , что соответствует полупроводниковым материалам [27, 68]. Однако при этом оставался за пределами рассмотрения широкий класс материалов с более высокой проводимостью, каковой обладают металлы. Так, для металлов типичное значение проводимости составляет порядка  $10^6 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$  и даже несколько более [27, 52, 53, 68]. То же касается проводимости некоторых композиционных сред, в том числе содержащих металлические гранулы в диэлектрической матрице [168–172]. Поэтому в рамках данной работы представляет интерес рассмотрение периодических структур, барьеры которых обладают именно металлической проводимостью, что и сделано далее.

### 7.7.1. Распределение амплитуд при металлической проводимости

В случае металлической проводимости, как это видно из разделов 7.3 и 7.3.1, мнимая часть комплексной диэлектрической проницаемости (7.7) значительно (на несколько порядков) превышает действительную, а мнимые части волнового числа (7.11) и адмиттанса (7.14) приближаются к действительным частям тех же величин.

При этом на рассматривавшихся выше частотах СВЧ-диапазона (10–40 ГГц) глубина проникновения поля волны в металл (7.20) становится на несколько порядков меньше принятой в том рассмотрении не только полной длины структуры (8 см), но и толщины одиночного барьера (0,5 см). В такой ситуации является очевидным тот факт, что волна не только не проходит через структуру, но и отражается практически целиком на толщине одного барьера, то есть распределение амплитуд волн с слоев структуры становится экспоненциальным с весьма высоким показателем. Поэтому для выявления разнообразия распределений имеет смысл рассмотрение таких структур, где толщина барьера имеет тот же порядок, или менее, чем глубина проникновения, то есть в рассматриваемом диапазоне частот и проводимостей составляет единицы микрометров.

Для такого рассмотрения обратимся к рис. 7.7, где показаны распределения нормированных амплитуд волн прямого и обратного направлений от координаты в случае металлической проводимости при различных значениях толщины барьера.

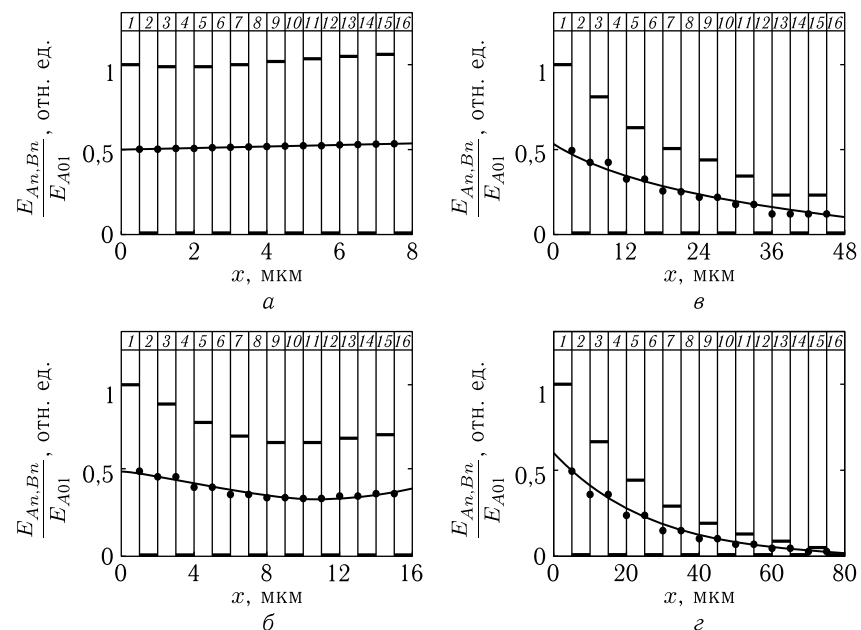


Рис. 7.7. Распределение нормированных амплитуд волн прямого и обратного направлений (совпадают) от координаты в случае металлической проводимости при различных значениях толщины барьера. Частота  $f = 10$  ГГц. Толщина барьеров:  $a - 0,5$  мкм;  $б - 1,0$  мкм;  $в - 3,0$  мкм;  $г - 5,0$  мкм. Параметры:  $\mu_{p,s} = 1$ ,  $\varepsilon_{p,s} = 1$ ,  $\sigma_p = 0$ ,  $\sigma_s = 10^6 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$

Частота выбрана равной  $f = 10$  ГГц. При проводимости барьера  $\sigma_s = 10^6 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$  и остальных типичных параметрах ( $\mu_{p,s} = 1$ ,  $\varepsilon_{p,s} = 1$ ,  $\sigma_p = 0$ ) глубина проникновения, согласно (7.20), составляет  $L_r = 5,0322$  мкм.

Исходя из условия не очень большого затухания волны на толщине барьера (не более чем в  $e = 2,7128$  раз) толщины барьеров выбраны в интервале от 0,5 мкм (рис. 7.7,  $a$ ) до 5,0 мкм (рис. 7.7,  $г$ ). При этом, учитывая, равенство толщин барьера и промежутка ( $L_s = L_p$ ), полная длина структуры  $L_N$ , содержащей 16 слоев (рис. 5.1), получается равной от 8 мкм (рис. 7.7,  $a$ ) до 80 мкм (рис. 7.7,  $г$ ), с промежуточными значениями 16 мкм (рис. 7.7,  $б$ ) и 48 мкм (рис. 7.7,  $в$ ) при толщинах барьеров 1,0 мкм и 3,0 мкм соответственно.

Для показанных на рис. 7.7 распределений построение непрерывных кривых осуществлялось с помощью следующих эмпирических формул (с точностью до постоянной составляющей и сдвига фазы):

$$a - E_{An}/E_{A01} \rightarrow 0,045x; \quad (7.38)$$

$$б - E_{An}/E_{A01} \rightarrow 1,4 \sin(0,17x); \quad (7.39)$$

$$в - E_{An}/E_{A01} \rightarrow 0,2 \exp[-0,10(x - 30)] - 0,10x; \quad (7.40)$$

$$г - E_{An}/E_{A01} \rightarrow 0,8 \exp[-0,09(x - 30)]. \quad (7.41)$$

В ходе построения рис. 7.7 было выявлено, что при принятых параметрах частоты и проводимости амплитуды волн прямого и обратного направлений в каждом отдельном слое совпадают друг с другом с точностью  $10^{-2}$  отн. ед. Поэтому в приведении отдельных данных для каждого из направлений в принятом масштабе рисунка не было необходимости. Таким образом, показанные на рис. 7.7 уровни амплитуд относятся к волнам как прямого, так и обратного направлений в равной степени.

Из рис. 7.7 видно, что при металлической проводимости в выбранном диапазоне толщин совокупность наблюдаемых распределений в общем подобна таковой для случая полупроводящей среды (раздел 7.4).

Так, распределение на рис. 7.7, а, соответствующее структуре, для которой глубина проникновения превышает толщину барьера на порядок, согласно принятой в разделе №2 терминологии, является постоянным.

Распределение на рис. 7.7, б, где глубина проникновения превышает толщину барьера в пять раз, является синусоидальным, однако, благодаря тому, что период его составляет 36,96 мкм, то есть более чем вдвое превышает длину структуры (16 мкм), его можно считать уже полусинусоидальным, то есть переходным от синусоидального к линейному.

Распределение на рис. 7.7, в, где глубина проникновения превышает толщину барьера всего в 1,67 раз, представляет собой сумму экспоненциального и линейного, хотя линейный его характер еще выражен более явно, чем экспоненциальный. Так, отклонение от прямой, проведенной через точки 7–16 слоев для слоя №1, где оно максимально, не превышает 30%. Следы же синусоиды в этом случае уже отсутствуют.

Распределение на рис. 7.7, г, где глубина проникновения равняется толщине барьера (с точностью более 1%), является ярко выраженным экспоненциальным, без заметного вклада линейного и тем более синусоидального.

Таким образом, можно сделать вывод, что в формировании распределений, отличных от чисто экспоненциального (рис. 7.7, а–в), необходимым условием является превышение глубины проникновения над толщиной барьера в полтора–два и более раз.

Заметим, что это относится именно к толщине барьера, но не к структуре в целом, длина которой может более чем на порядок превышать глубину проникновения (в рассматриваемых примерах — до 16 раз).

Укажем дополнительно, что во всех рассмотренных случаях достаточно большая (сравнимая с единицей) амплитуда волн имеет место только внутри промежутков (нечетные слои), тогда как внутри барьеров величины полей значительно меньше и составляют порядка  $10^{-2}$ – $10^{-5}$  отн. ед. Так для рис. 7.7, а, где распределение постоянно, амплитуды волн во всех промежутках близки к единице, тогда как амплитуда в слое №1 (первый барьер) составляет  $2,1318 \cdot 10^{-3}$  отн. ед., а в слое №16 (последний барьер) равняется  $1,5810 \cdot 10^{-3}$  отн. ед. На рис. 7.7, г, где распределение является ярко выраженным экспоненциальным, то есть по длине структуры значительно спадает, те же величины равны  $1,3960 \cdot 10^{-3}$  отн. ед. и  $7,8338 \cdot 10^{-5}$  отн. ед. соответственно.

То есть видно, что все перечисленные виды распределений проявляются достаточным образом уже на амплитудах, соответствующих только промежуткам (верхние участки утолщенных горизонтальных линий).

### 7.7.2. Отражающие и пропускающие свойства структуры при металлической проводимости

Рассмотрим теперь, как сказывается металлическая проводимость на частотных свойствах структуры, для чего обратимся к рис. 7.8, где показаны зависимости нормированных амплитуд волн обратного в слое №1 (а) и прямого в слое №16 (б) направлений от частоты возбуждения при различных значениях толщины барьера.

Для удобства сравнения с данными предыдущего раздела, значения толщин барьеров выбраны теми же самыми. На рис. 7.7, при построении которого частота выбрана равной 10 ГГц, нормированная амплитуда  $E_{B01}/E_{A01}$  в слое №1 при всех толщинах близка к единице, а нормированная амплитуда  $E_{A16}/E_{A01}$  при тех же условиях в слое №16 близка к нулю. Из рис. 7.8 видно, что на той же частоте 10 ГГц в тех же слоях №1 и №16 эти величины составляют (0,9976–0,9986) отн. ед. и  $(0,07$ – $1,50) \cdot 10^{-3}$  отн. ед., то есть отличаются от единицы и нуля на величины порядка 0,1%, то есть соответствие можно считать весьма хорошим.

Другой важной особенностью наблюдаемых частотных зависимостей является их плавный монотонный вид с полным отсутствием полос непропускания, имеющих место при малой проводимости (рис. 7 здесь, а также рис. 5.6 в разделе 5.7).

Можно полагать, что такое отсутствие упомянутых полос, а также вообще какой-либо изрезанности обсуждаемых кривых, обусловлено общей тенденцией сглаживания амплитудно-частотных зависимостей при увеличении проводимости. Такое сглаживание было отмечено в разделе 7.6 уже при сравнительно малых ее значениях (рис. 7.7, в и е,

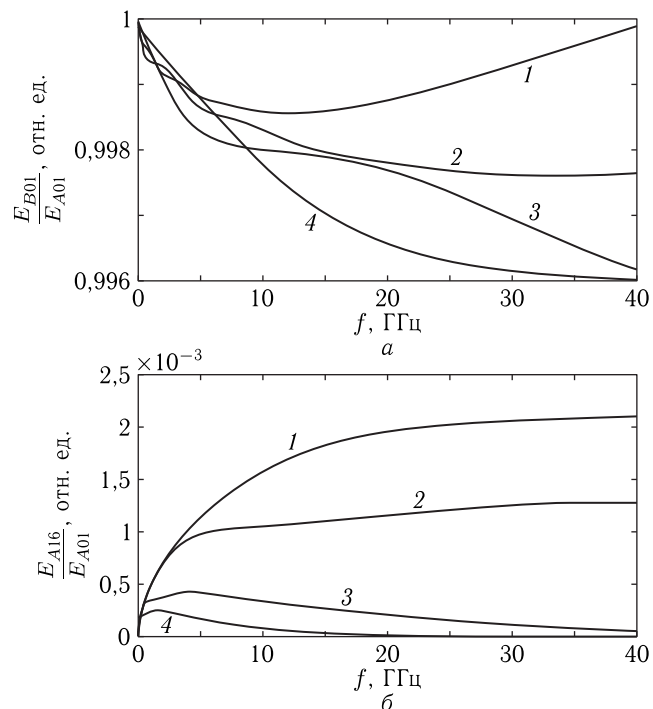


Рис. 7.8. Зависимости нормированных амплитуд волн обратного в слое № 1 (а) и прямого в слое № 16 (б) направлений от частоты возбуждения в случае металлической проводимости при различных значениях толщины барьера. Толщина барьеров: а — 0,5 мкм; б — 1,0 мкм; в — 3,0 мкм; г — 5,0 мкм. Параметры:  $\mu_{p,s} = 1$ ,  $\varepsilon_{p,s} = 1$ ,  $\sigma_p = 0$ ,  $\sigma_s = 10^6 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$

где  $\sigma = 1,9445 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ ), а здесь при металлической проводимости ( $10^6 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ ) оно проявляется с особой силой.

Из рис. 7.8,а далее видно, что до 10 ГГц амплитуда волн обратного направления в слое № 1, то есть отраженных от структуры, при любой толщине с повышением частоты падает. Та же тенденция сохраняется при толщинах выше 1 мкм (кривые 2, 3, 4) во всем диапазоне исследованных частот (до 40 ГГц). Такое уменьшение отражения обусловлено тем, что совокупная амплитуда обратно направленной волны в слое № 1 складывается из амплитуд волн, отраженных от двух поверхностей каждого слоя. При этом если волна внутри какого-либо слоя доходит до его противоположной поверхности без сильного ослабления, то после отражения от этой поверхности она складывается с той частью волны, которая отражается от первой поверхности до вхождения в слой. То есть суммарная амплитуда отраженной волны увеличивается. Если же волна на толщине слоя заметным образом затухает,

ет, то она уже не может внести вклада в общее отражение и суммарная амплитуда отраженной волны формируется только за счет отражения от передней поверхности слоя. Величина затухания волны в слое определяется глубиной проникновения волны в металл. Так, если толщина слоя меньше глубины проникновения, то волна затухает мало и отражение получается большим. Если же толщина слоя больше глубины проникновения, то волна в слое затухает и отражение получается малым.

Как показано в предыдущем разделе, глубина проникновения на частоте 10 ГГц составляет около 5 мкм. На частоте 40 ГГц она уменьшается уже до 2,5 мкм. Соответственно на фиксированной частоте отражение должно быть тем больше, чем толщина барьера меньше. Это и наблюдается для всех исследованных структур на частотах от 10 до 40 ГГц. Ниже 10 ГГц эта тенденция несколько нарушается, по-видимому, благодаря вступлению в игру интерференционных эффектов, проявляющихся на полной толщине структуры.

С другой стороны, по мере увеличения частоты волна все меньше проникает в слой, то есть затухает сильнее, в результате чего отражение уменьшается. Именно так на рис. 7.8,а ведут себя кривые 2 (толщина барьера — 1 мкм), 3 (3 мкм) и 4 (5 мкм).

Подобным образом ведет себя и кривая 1, соответствующая толщине барьера 0,5 мкм, но только до частоты порядка 10 ГГц.

Выше этой частоты кривая 1 идет вверх, стремясь к единице и, как следует из дополнительного исследования, несколько превышая ее (за правым краем рисунка), что может быть обусловлено явлениями разбаланса потоков энергии, упомянутыми в разделе 7.6.2.

Обратимся теперь к рис. 7.8,б, где показаны подобные частотные зависимости для волн прямого направления в слое № 16, соответствующие прохождению волны через структуру в целом.

В соответствии со сказанным относительно соотношения толщины барьера с глубиной проникновения, естественно ожидать, что на любой заданной частоте по мере увеличения толщины барьера прохождение должно уменьшаться. Это и наблюдается на рис. 7.8,а: ниже всех идет кривая 4, которой соответствует наибольшая толщина, а выше — кривая 1 с толщиной наименьшей.

С другой стороны, по мере увеличения частоты при неизменной толщине затухание волны должно увеличиваться, так как глубина проникновения волны при этом уменьшается, то есть волна на толщине барьера затухает сильнее. Это и наблюдается для толщин 3 и 5 мкм (кривые 3 и 4 соответственно) на частотах выше ~5 ГГц, где интерференционные явления уже не сказываются. Для толщины 1 мкм (кривая 2), начиная с частоты ~5 ГГц, наступает противодействующая тенденция, так что уменьшение прохождения сменяется почти горизонтальным участком, а для толщины 0,5 мкм (кривая 1) эта тенденция становится преобладающей, приводя к росту прохождения по мере повышения частоты с последующим стремлением к насыщению на уровне порядка  $2,3 \cdot 10^{-3}$  отн. ед. В качестве возможной причины

можно предполагать и здесь проявление разбаланса потоков, аналогичное ответственному за рост кривой 1 на рис. 7.8, а.

Таким образом, можно сделать вывод, что нормальное поведение частотных зависимостей, то есть по мере увеличения частоты уменьшение как отражения, так и прохождения имеет место только при толщинах барьеров, превышающих примерно четвертую-пятую часть от глубины проникновения. При меньших же толщинах по мере увеличения частоты как отражение, так и прохождение увеличиваются, что может быть обусловлено энергетическим разбалансом потоков энергии распространяющихся волн.

### Выводы по главе 7

Данная глава посвящена описанию распространения электромагнитных волн через структуры с периодическими неоднородностями меандрового вида, обладающими диссипацией. Рассмотрено распределение амплитуд волн в различных слоях структуры в широком диапазоне изменения диссипации. Отдельное внимание уделено случаю металлической проводимости. Отмечено явление диссипативного резонанса. Приведены данные, касающиеся аномалий баланса потоков энергии в диссипативных структурах.

Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрено распространение электромагнитных волн прямого и обратного направлений в многослойной структуре ограниченной длины с периодической неоднородностью меандрового вида, барьеры которой обладают диссипативными свойствами. В качестве расчетного аппарата использован метод пошагового алгоритма, обобщенный на случай трехмерных электромагнитных волн, распространяющихся в среде с диссипацией.

2. На примере одномерной волны рассмотрено распределение амплитуд волн в слоях в случае комплексного волнового числа для барьеров. Рассмотрены два варианта соотношения составляющих волнового числа для барьера и промежутка — первый, когда действительная составляющая волнового числа для барьера значительно превышает таковую для промежутка, второй — когда действительная составляющая волнового числа для барьера равняется таковой для промежутка, а волновые числа барьера и промежутка отличаются только мнимой составляющей. Показано, что в обоих случаях наблюдаются те же основные распределения амплитуд, что и в случае без диссипации: синусоидальное и экспоненциальное.

3. Наряду с упомянутыми, обнаружено новое распределение — линейно-синусоидальное, синусоидальный характер которого обусловлен интерференционным переотражением волн в слоях, а линейная составляющая — затуханием волны по мере удаления от источника возбуждения. Дополнительно показано, что хотя мнимая часть волно-

вого числа может приводить к таким же видам распределения амплитуд в слоях, что и действительная, однако главная ее роль состоит в уменьшении амплитуд волн по координате по мере удаления от источника возбуждения, которое накладывается на распределения, обусловленные действительной частью волнового числа.

4. Для случая одномерной волны рассмотрены отражающие и пропускающие свойства структуры на основе зависимости от действительной части волнового числа для барьера. Показано, что при увеличении затухания общая дискретная структура спектра, то есть расположение областей пропускания и непропускания по волновому числу, в целом не меняется, тогда как прохождение волн и их отражение в соответствующих областях ухудшаются тем сильнее, чем номер области больше, причем тонкое расщепление спектра внутри областей пропускания с увеличением затухания сглаживается.

5. Рассмотрены основные закономерности распространения электромагнитной волны в проводящей среде. Получено волновое число и адмиттанс в виде суммы действительной и мнимой частей, в том числе в приближении большой проводимости, свойственной металлу. Рассмотрены зависимости комплексного волнового числа и адмиттанса от проводимости, получено критическое значение проводимости, при котором проводящие свойства среды начинают преобладать над диэлектрическими. Определена критическая частота, при которой в реальном металле волна затухает по амплитуде в три раза на расстоянии четверти ее длины, так что распространение волны является аперiodическим.

6. На основе полученных результатов проведено рассмотрение распределения амплитуд волн в слоях многослойной структуры, барьеры которой обладают проводящими свойствами. Показано, что в зависимости от величины проводимости наблюдаются те же основные виды распределения амплитуд, что и для одномерной волны: синусоидальное, экспоненциальное и линейно-синусоидальное.

7. Выполнено сравнение эффективности действия на конфигурацию распределений механизмов диссипации одномерной и электромагнитной волны. Показано, что на основе критерия сходства конфигурации распределений механизм диссипации для электромагнитной волны является более эффективным, чем для одномерной. Однако на основе критерия подобия соотношения между действительной и мнимой частями волнового числа соотношение эффективности механизмов является обратным. Такое различие объяснено неэквивалентной ролью проводимости относительно обоих механизмов, так как для обеспечения подобия конфигурации распределений проводимость должна значительно превышать значение, требуемое для подобия волновых чисел.

8. Рассмотрены отражающие и пропускающие свойства структуры для электромагнитной волны. Показано, что частотная зависимость упомянутых свойств, в основном, подобна зависимости от волнового числа для одномерной волны, то есть имеет сходный дискретный характер,

однако здесь при увеличении номера области непропускания максимальная амплитуда волн в слоях преимущественно сохраняется. Показано, что положение областей непропускания от проводимости в пределах ее средних значений от частоты не зависит, то есть подчиняется тому же закону соответствия суммы длин барьера и промежутка нечетному числу четвертей длины волны, что и для бездиссипативной среды.

9. Исследована частотная конфигурация отдельной области непропускания, показано, что как и для бездиссипативной структуры, область представляет собой широкий центральный лепесток, окруженный узкими сателлитами спадающей амплитуды. Однако за счет проводимости, по мере ее увеличения тонкая структура сателлитов сглаживается, уступая место почти равномерному распределению. В высокочастотной части области непропускания обнаружен обусловленный проводимостью диссипативный резонанс, а также некоторое превышение потока энергии отраженной волны по сравнению с падающей. В качестве возможного объяснения подобной аномалии рассмотрены известные механизмы такого превышения, причем отдано предпочтение механизму, учитывающему локализацию энергии во внутренних слоях структуры в виде совокупности активной и реактивной составляющих.

10. Рассмотрено распространение электромагнитных волн в периодических структурах, барьеры которых обладают металлической проводимостью. Показано, что при этом в формировании распределений амплитуд, отличных от чисто экспоненциального, таких как синусоидальное и линейное, необходимым условием является превышение глубины проникновения волны над толщиной барьера, тогда как полная толщина структуры может превышать глубину проникновения более чем на порядок. Показано, что амплитуды отраженных и проходящих волн относительно структуры в целом при повышении частоты уменьшаются вплоть до толщин, составляющих четвертую–пятую часть от глубины проникновения волны в металл, а при меньших толщинах испытывают аномальное увеличение, в качестве возможного способа устранения которого указан учет локализации энергии волны в виде совокупности активной и реактивной составляющих.

## Глава 8

### НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА ОДНОМЕРНЫХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Глава посвящена рассмотрению некоторых наиболее общих свойств одномерных и электромагнитных волн, распространяющихся в многослойных структурах. Материал главы является вспомогательным, необходимым для создания фундамента рассматриваемых далее процессов баланса и переноса энергии теми и другими волнами в обоих направлениях. На основе анализа волновых уравнений в комплексном виде рассмотрены закономерности распространения волн, спадающих во времени и в пространстве. Решение приведено как в экспоненциальном, так и в тригонометрическом виде, в том числе для случая сред, обладающих диссипацией. Рассмотрено отражение и прохождение электромагнитной волны через плоскую границу раздела двух сред, а также через три среды, разделенные двумя границами, полученные коэффициенты отражения и прохождения.

В главе частично использованы материалы монографий [1, 2, 57, 58, 64]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

#### 8.1. Волновые уравнения для проводящей среды

Классические уравнения электродинамики в системе СИ имеют вид [136, стр. 27, 35, форм. (1.49)–(1.52), (1.67)–(1.69)]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (8.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}, \quad (8.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (8.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (8.4)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — электрическое и магнитное поля,  $\varepsilon$  и  $\mu$  — действительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды,  $\sigma$  — действительная проводимость среды,  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  — электрическая и магнитная постоянные в системе СИ («проницаемости вакуума»),  $t$  — время. Здесь предполагается, что среда однородна, то есть  $\varepsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  не зависят от координат, а также какие-либо заряды отсутствуют.



Для того, чтобы получить из (8.1) и (8.2) волновые уравнения, возьмем ротор от каждой из этих формул и воспользуемся соотношением, известным из векторного анализа [137, стр. 894, форм. (I, 50)]:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}. \quad (8.5)$$

Таким образом, беря ротор от (8.1), получаем:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \text{rot } \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (8.6)$$

откуда с помощью (8.5) получаем:

$$\text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \text{rot } \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (8.7)$$

Учитывая равенство нулю дивергенции (8.3), подставляя  $\text{rot } \mathbf{H}$  из (8.2) и перенося все в левую часть, получаем:

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (8.8)$$

Это — с точностью до обозначений классическое волновое уравнение для трехмерной среды.

Выполняя аналогичную последовательность действий над уравнением (8.2), получаем:

$$\Delta \mathbf{H} - \mu\mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu\mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0. \quad (8.9)$$

Если положить, что поле зависит только от одной координаты  $x$ , что имеет место для плоских волн, то (8.8) и (8.9) можно записать в более традиционном виде:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu\mu_0 \varepsilon \varepsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = 0; \quad (8.10)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{1}{\mu\mu_0 \varepsilon \varepsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} = 0. \quad (8.11)$$

Ввиду полной линейности обоих уравнений относительно переменных, можно видеть, что эти же уравнения выполняются для любой координатной компоненты электрического или магнитного поля  $E_{x,y,z}$  или  $H_{x,y,z}$ .

Введем обозначения:

$$\beta = \frac{\sigma}{2\varepsilon \varepsilon_0}; \quad (8.12)$$

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0 \varepsilon \varepsilon_0}}. \quad (8.13)$$

Из этих выражений первое — коэффициент затухания, второе — фазовая скорость волны.

Ввиду сходства уравнений (8.10) и (8.11) можно ввести общую переменную  $G$ , относящуюся к любой из компонент  $E_{x,y,z}$  или  $H_{x,y,z}$ .

С этими обозначениями получаем единственное волновое уравнение, выполняющееся для любой из компонент того или другого поля:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial G}{\partial t} - \nu^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0. \quad (8.14)$$

Волновое уравнение в виде (8.14) является самым простым и, в то же время, достаточно общим. Поскольку волновая функция  $G$  зависит только от одной координаты, то есть от одного измерения пространства, можно называть волну, описываемую этим уравнением, «одномерной волной».

### 8.1.1. Гармоническая зависимость от времени

Вернемся на время к уравнению (8.8) и предположим сначала, что зависимость от времени имеет вид  $e^{i\omega t}$ , где частота  $\omega$  задана

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}, \quad (8.15)$$

где  $\mathbf{E}_0$  зависит только от координат и не зависит от времени. При этом

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow i\omega \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -\omega^2. \quad (8.16)$$

Учитывая (8.15), (8.16) и отбрасывая множитель  $e^{i\omega t}$ , из (8.8) получаем:

$$\Delta \mathbf{E}_0 + \omega^2 \mu\mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 - i\omega \mu\mu_0 \sigma \mathbf{E}_0 = 0, \quad (8.17)$$

откуда

$$\Delta \mathbf{E} + \omega^2 \mu\mu_0 \left( \varepsilon \varepsilon_0 - i \frac{\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E}_0 = 0. \quad (8.18)$$

Введем обозначение:

$$k = \omega \sqrt{\mu\mu_0 \left( \varepsilon \varepsilon_0 - i \frac{\sigma}{\omega} \right)}. \quad (8.19)$$

Подставляя правую часть (8.19) в (8.18), получаем:

$$\Delta \mathbf{E}_0 + k^2 \mathbf{E}_0 = 0. \quad (8.20)$$

Из (8.9) полностью аналогично получаем:

$$\Delta \mathbf{H}_0 + k^2 \mathbf{H}_0 = 0. \quad (8.21)$$

Уравнения (8.20) и (8.21) имеют классический вид координатного волнового уравнения, в котором  $k$  — волновое число. Из (8.19) видно, что, благодаря проводимости  $\sigma$ , волновое число является комплексным, то есть волна при распространении в проводящей среде затухает.

В отсутствие проводимости ( $\sigma = 0$ ) из (8.19) получаем:

$$k = \omega \sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0}, \quad (8.22)$$

что дает волновое число для непроводящей среды.

При  $\varepsilon = 1$  и  $\mu = 1$  получаем:

$$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}, \quad (8.23)$$

то есть волновое число для электромагнитной волны, распространяющейся в свободном пространстве. При этом фазовая скорость такой волны равна:

$$v = \frac{\omega}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c, \quad (8.24)$$

где  $c$  — скорость света в свободном пространстве.

Вынесем теперь под корнем в выражении (8.19) величину  $\varepsilon_0$  за скобку:

$$k = \omega \sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon_0 \left( \varepsilon - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right)}. \quad (8.25)$$

Из сравнения (8.25) с (8.22) видно, что в (8.25) выражение в скобках под корнем играет такую же роль, как величина  $\varepsilon$  в (8.22). Поэтому это выражение можно рассматривать, как комплексную диэлектрическую проницаемость в проводящей среде:

$$\varepsilon_c = \varepsilon - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}, \quad (8.26)$$

которая при  $\sigma = 0$  переходит в обычную действительную диэлектрическую проницаемость для непроводящей среды.

Таким образом, с введением комплексной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_c$  волновое число в проводящей среде принимает вид:

$$k = \omega \sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon_c \varepsilon_0}. \quad (8.27)$$

Система уравнений электродинамики (8.1)–(8.4) при введении комплексной диэлектрической проницаемости (8.26) и временной зависимости вида  $e^{i\omega t}$  с учетом (8.16) принимает вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad (8.28)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = i\omega \varepsilon_c \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (8.29)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (8.30)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (8.31)$$

Волновые уравнения (8.20) и (8.21) сохраняют свой вид, причем  $k$  определяется формулой (8.27), где  $\varepsilon_c$  определяется (8.26).

### 8.1.2. Замечание о комплексных волновых числах

При выводе этих выражений не делалось никакого предположения о действительности или мнимости волновых чисел. Поэтому полученные выражения должны быть справедливы при любых комплексных волновых числах.

Предположим теперь, что волновое число является комплексным, то есть

$$k = \eta + i\vartheta, \quad (8.32)$$

где  $\eta$  и  $\vartheta$  — действительные.

В этом случае, как будет показано далее (раздел 8.2), из общего решения волнового уравнения (8.14) следует, что амплитуда волны приобретает множитель в виде экспоненты с действительным показателем:  $e^{\pm \mu x}$ . В зависимости от знака показателя экспоненты амплитуда волны в процессе распространения нарастает или убывает. Полагая, что среда является пассивной, то есть энергия волны при распространении в такой среде может только убывать, получаем, что мнимая часть волнового числа может быть только отрицательной.

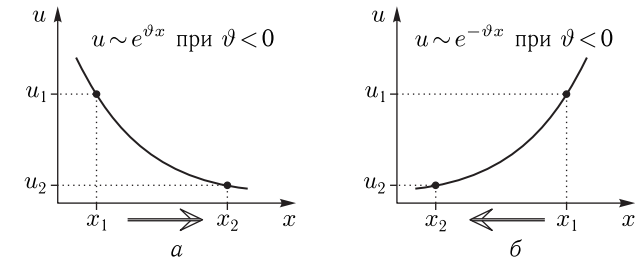


Рис. 8.1. Изменение амплитуды волны при распространении в положительном (а) и отрицательном (б) направлениях оси  $Ox$

Более подробно роль знака мнимой части волнового числа иллюстрируется рис. 8.1, где показано изменение амплитуды волны  $u$  по мере распространения от точки с координатой  $x_1$  к точке с координатой  $x_2$  в положительном (а) и отрицательном (б) направлениях оси  $Ox$  (направление распространения волны показано стрелкой внизу). Рисунок заведомо построен при  $\vartheta < 0$ . При этом амплитуда волны меняется от значения  $u_1$  до значения  $u_2$ . Видно, что при обоих направлениях распространения волны из соотношения  $x_1 < x_2$  следует соотношение  $u_1 > u_2$ , то есть амплитуда волны как того, так и другого направления всегда уменьшается, для чего необходимым условием является отрицательность мнимой части волнового числа.

Заметим, что на практике удобнее пользоваться положительными числами, поэтому обычно вместо отрицательного обозначения  $\vartheta$  используют положительное обозначение  $\xi$ , то есть полагают волновое число в виде

$$k = \eta - i\xi, \quad (8.33)$$

где  $\xi$  предполагается числом действительным и положительным (здесь  $\xi = -\vartheta$ ). Именно такой формой волнового числа мы будем пользоваться в дальнейшем.

### 8.1.3. Комплексное волновое число при гармонической зависимости от времени

Приведем выражение для комплексного волнового числа в среде с проводимостью при гармонической зависимости от времени. Воспользуемся формулой для квадратного корня из комплексного числа [173, стр. 19, форм. (58.2)]:

$$\sqrt{a - ib} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}. \quad (8.34)$$

При этом, полагая

$$k_{1,2} = \pm(\eta - i\xi), \quad (8.35)$$

в соответствии с (8.25), получаем:

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{2} k_p \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0}\right)^2}}; \quad (8.36)$$

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} k_p \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0}\right)^2}}, \quad (8.37)$$

где  $k_p$  — волновое число, без учета проводимости, равное

$$k_p = \omega \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}. \quad (8.38)$$

### 8.1.4. Разделение переменных

Вернемся теперь к одномерной волне, описываемой уравнением (8.14). В этом уравнении зависимость функции  $G$  от времени никак не определена. В качестве частного случая предположим, что его решение может представлять собой произведение двух функций, одна из которых зависит только от времени, а другая только от координаты, то есть выполним традиционную процедуру разделения переменных [55, стр. 82–88]:

$$G(t, x) = T(t)X(x). \quad (8.39)$$

Дифференцируя, подставляя производные в уравнение, разделяя его на  $TX$  и вводя постоянную разделения  $-\omega^2$ , получаем:

$$\frac{\partial^2 G / \partial t^2}{T} + 2\beta \frac{\partial G / \partial t}{T} = v^2 \frac{\partial^2 G / \partial x^2}{X} = -\omega^2. \quad (8.40)$$

Это соотношение из трех равных частей эквивалентно двум независимым уравнениям, временному и координатному: временное уравнение

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial T}{\partial t} + \omega^2 T = 0; \quad (8.41)$$

координатное уравнение

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 X = 0. \quad (8.42)$$

Первое из этих уравнений имеет решение вида  $e^{\pm i\omega t}$ , где  $\omega$  является комплексной величиной. Второе уравнение имеет решение вида  $e^{\pm ikx} e^{\pm ikx}$ , где

$$k = \omega/v, \quad (8.43)$$

причем в случае комплексной частоты  $\omega$  волновое число  $k$  также может быть величиной комплексной.

Общее решение должно иметь вид произведения этих двух решений, то есть полная экспонента должна иметь вид:

$$e^{\pm i\omega t} e^{ikx} = e^{\pm i(\omega t \pm kx)}. \quad (8.44)$$

Поскольку уравнения (8.41) и (8.42) являются независимыми, каждое из них может описывать какие-то свои свойства общего решения, поэтому рассмотрим возможные виды общего решения по отдельности.

## 8.2. Одномерная волна в среде с затуханием

Рассмотрим уравнение для одномерной волны в среде с затуханием вида (8.14):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial G}{\partial t} - v^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0. \quad (8.45)$$

Здесь затухание описывается вторым слагаемым. В случае струны это уравнение выражает баланс сил, действующих на участок струны (с точностью до деления на плотность), при этом второе слагаемое выражает силу, пропорциональную скорости движения этого участка, то есть аналогично силе трения (которая равна произведению скорости на коэффициент трения). При этом  $\beta$  — параметр затухания, а  $v$  имеет физический смысл фазовой скорости волны в отсутствие затухания.

Затухание положительно если  $\beta > 0$ . Это будет видно из дальнейшего при решении уравнения по времени.

Предположим, что решение уравнения (8.45) имеет вид:

$$G = e^{i(\omega t - kx)} = e^{i\omega t} e^{-ikx}, \quad (8.46)$$

где  $k$  — волновое число, которое может быть комплексным.

При действительном  $k > 0$  такой вид решения соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении оси  $Ox$ . При действительном  $k < 0$  — волне, распространяющейся в отрицательном направлении той же оси.

Подставляя (8.46) в (8.45), получаем уравнение, связывающее волновое число  $k$  и частоту  $\omega$ :

$$-\omega^2 + i2\omega\beta + v^2 k^2 = 0. \quad (8.47)$$

Это одно уравнение с двумя неизвестными. Поэтому одну из величин  $\omega$  или  $k$  можно задать изначально и положить действительной.

Возможны два варианта:

1) задана действительная частота  $\omega$ , при этом амплитуда волны спадает в пространстве и остается неизменной во времени;

2) задано действительное волновое число  $k$ , при этом амплитуда волны спадает во времени и остается неизменной в пространстве.

Рассмотрим эти варианты по отдельности.

### 8.2.1. Амплитуда волны спадает в пространстве

Предположим, что задана частота  $\omega$ . При этом из (8.47) получаем:

$$v^2 k^2 = \omega^2 - i2\omega\beta, \quad (8.48)$$

откуда

$$k_{1,2} = \pm \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - i \frac{2\beta}{\omega}}. \quad (8.49)$$

Воспользуемся формулой квадратного корня из комплексного числа [173, стр. 19, форм. (58.2)]:

$$\sqrt{a - ib} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}. \quad (8.50)$$

При этом получаем:

$$k_{1,2} = \pm \frac{\omega}{v} \left[ \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\omega^2}} \right)} - i \sqrt{\frac{1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\omega^2}} \right)} \right]. \quad (8.51)$$

Представим волновое число в виде:

$$k_{1,2} = \pm(\eta - i\xi), \quad (8.52)$$

где  $\eta$  и  $\xi$  — действительные величины, равные

$$\eta = \frac{\omega}{v} \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\omega^2}} \right)}; \quad (8.53)$$

$$\xi = \frac{\omega}{v} \sqrt{\frac{1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\omega^2}} \right)}. \quad (8.54)$$

Эти выражения с точностью до раскрытия обозначений совпадают с полученными ранее (8.35)–(8.38).

Решение уравнения (8.45) имеет вид:

$$G = e^{i[\omega t \mp (\eta - i\xi)x]} = e^{\mp \xi x} e^{i(\omega t \mp \eta x)}. \quad (8.55)$$

Таким образом, полное решение имеет вид:

$$G = A e^{-\xi x} e^{i(\omega t - \eta x)} + B e^{\xi x} e^{i(\omega t + \eta x)}, \quad (8.56)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные.

Здесь первое слагаемое описывает волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $Ox$ , а второе — в отрицательном. Амплитуда каждой волны по мере распространения спадает.

Дисперсионное соотношение (8.53), разрешенное относительно частоты  $\omega$ , имеет вид:

$$\omega = \frac{\eta^2 v^2}{\sqrt{\eta^2 v^2 + \beta^2}}. \quad (8.57)$$

Из него получаем фазовую и групповую скорости:

$$v_p = \frac{\omega}{\eta} = \frac{\eta v^2}{\sqrt{\eta^2 v^2 + \beta^2}}. \quad (8.58)$$

$$v_g = \frac{d\omega}{d\eta} = \frac{\eta v^2 (\eta^2 v^2 + 2\beta^2)}{(\eta^2 v^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (8.59)$$

Произведение фазовой и групповой скоростей отлично от  $v^2$ :

$$v_p v_g = \frac{\eta^2 v^4 (\eta^2 v^2 + 2\beta^2)}{(\eta^2 v^2 + \beta^2)^2} = v^2 \left[ 1 - \frac{\beta^4}{(\eta^2 v^2 + \beta^2)^2} \right]. \quad (8.60)$$

### 8.2.2. Амплитуда волны спадает во времени

Предположим, что задано волновое число  $k$ . При этом из (8.47) получаем:

$$\omega^2 - 2i\beta\omega - v^2 k^2 = 0, \quad (8.61)$$

откуда

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{v^2 k^2 - \beta^2} + i\beta. \quad (8.62)$$

Представим частоту в виде:

$$\omega = \pm \rho + i\delta, \quad (8.63)$$

где  $\rho$  и  $\delta$  — действительные величины, равные

$$\rho = \sqrt{v^2 k^2 - \beta^2}; \quad (8.64)$$

$$\delta = \beta. \quad (8.65)$$

Решение уравнения (8.45) имеет вид:

$$G = A e^{-\delta t} e^{i(\rho t - kx)} + B e^{-\delta t} e^{-i(\rho t + kx)}, \quad (8.66)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные.

Здесь оба слагаемых описывают волны, распространяющиеся в положительном направлении оси  $Ox$ . Амплитуда каждой волны с течением времени спадает.

Первое слагаемое отвечает зависимости от времени в виде  $e^{i\rho t}$ , второе —  $e^{-i\rho t}$ . Если считать, что по физическому смыслу действительная частота должна быть положительной, то остается только первое слагаемое:

$$G = A e^{-\delta t} e^{i(\rho t - kx)}. \quad (8.67)$$

Дисперсионное соотношение (8.62), разрешенное относительно действительной составляющей частоты  $\rho$ , имеет вид:

$$\rho = \sqrt{v^2 k^2 - \beta^2}. \quad (8.68)$$

Из него получаем фазовую и групповую скорости:

$$v_p = \frac{\rho}{k} = \frac{\sqrt{v^2 k^2 - \beta^2}}{k}; \quad (8.69)$$

$$v_g = \frac{d\rho}{dk} = \frac{v^2 k}{\sqrt{v^2 k^2 - \beta^2}}. \quad (8.70)$$

Произведение фазовой и групповой скоростей равно  $v^2$ :

$$v_p v_g = v^2. \quad (8.71)$$

### 8.2.3. Физическая реализация полученных решений

В результате проделанных вычислений получены два принципиально различных вида решения (8.56) и (8.66) единого волнового уравнения (8.45). Какое именно решение реализуется в реальном случае, зависит от постановки задачи. Возможны две принципиально различные постановки, отличающиеся источником возбуждения волны: «точечного» и «мгновенного» источника. Рассмотрим их по отдельности.

1) Точечный источник.

Волна возбуждается точечным источником, неподвижным в пространстве, меняющимся только во времени по гармоническому закону. В этом случае возмущение среды или поле возбуждается в точке расположения источника, от которой отходит волна, далее с источником не взаимодействующая. При этом реализуется решение, при котором волна затухает по мере распространения в пространстве.

2) Мгновенный источник.

Волна возбуждается источником, распределенным гармоническим образом по всему пространству, однако действующим только в какой-то начальный момент времени, после чего его действие прекращается. В этом случае возмущение среды или поле, оставаясь по пространству подобным начальному возмущению, затухает во времени, то есть реализуется решение, при котором волна затухает во времени.

Эти два источника представляют собой крайние случаи. В общем случае реальный источник может представлять собой какую-то комбинацию этих двух источников. При этом волновое возмущение также будет являться соответствующей комбинацией двух рассмотренных решений. Для получения решения в общем случае можно воспользоваться представлением источников в виде ряда Фурье по гармоническим составляющим по пространству или по времени, то есть совокупности волн различных частот и различных длин, причем для каждого члена ряда волновое уравнение должно решаться отдельно, хотя эти уравнения и будут подобны друг другу. В наиболее общем случае произвольного источника общее решение может быть представлено в виде произведения двух таких разложений.

## 8.3. Возможные виды решения для волны, спадающей в пространстве

Ввиду важности для дальнейшего рассмотрения остановимся несколько более подробно на решении для волны, спадающей в пространстве. С математической стороны, поскольку волновое уравнение является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, возможны два варианта решения: с помощью экспоненциальных или тригонометрических функций. Рассмотрим их по отдельности.

Как и ранее, будем рассматривать уравнение для одномерной волны в среде с затуханием в виде (8.14):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial G}{\partial t} - v^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0. \quad (8.72)$$

Затухание описывается вторым слагаемым. При этом  $\beta$  — параметр затухания, а  $v$  имеет физический смысл фазовой скорости волны в отсутствие затухания. Затухание положительно, если  $\beta > 0$ . Это следует из аналогии с общим уравнением свободных колебаний с затуханием, где зависимость от координаты отсутствует:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\beta \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0, \quad (8.73)$$

решение которого имеет вид:

$$u = e^{-\beta t} (A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}), \quad (8.74)$$

или

$$u = e^{-\beta t} [C \cos \omega t + D \sin \omega t], \quad (8.75)$$

где  $A, B, C, D$  — произвольные постоянные, причем

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (8.76)$$

Рассмотрим решение волнового уравнения (8.72) экспоненциальным и тригонометрическим методами.

### 8.3.1. Экспоненциальное решение

Будем искать решение в виде волны, амплитуда которой зависит от координаты по экспоненциальному закону:

$$G = e^{-\xi x} e^{i(\omega t - \eta x)}. \quad (8.77)$$

При действительных  $\eta > 0$  и  $\xi > 0$  такой вид решения соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении оси  $Ox$ , амплитуда которой по мере распространения уменьшается.

Находим производные:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = i\omega G; \quad (8.78)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\omega^2 G; \quad (8.79)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -(\xi + i\eta)G; \quad (8.80)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = (\xi + i\eta)^2 G. \quad (8.81)$$

Подставляя эти производные в уравнение (8.72), получаем:

$$-\omega^2 + 2i\beta\omega - \nu^2(\xi + i\eta)^2 = 0. \quad (8.82)$$

Учитывая, что

$$\xi + i\eta = i(\eta - i\xi), \quad (8.83)$$

получаем:

$$(\eta - i\xi)_{1,2} = \pm \frac{1}{\nu} \sqrt{\omega^2 - 2i\beta\omega}. \quad (8.84)$$

Вспользуемся формулой квадратного корня из комплексного числа [173, стр. 19, форм. (58.2)]:

$$\sqrt{a - ib} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}. \quad (8.85)$$

При этом получаем:

$$(\eta - i\xi)_{1,2} = \pm \left[ \frac{\omega}{\nu} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\omega^2}} + 1 \right)} - i \frac{\omega}{\nu} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\omega^2}} - 1 \right)} \right]. \quad (8.86)$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получаем:

$$\eta_{1,2} = \pm \frac{\omega}{\nu} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\omega^2}} + 1 \right)}; \quad (8.87)$$

$$\xi_{1,2} = \pm \frac{\omega}{\nu} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\omega^2}} - 1 \right)}. \quad (8.88)$$

Таким образом, полное решение имеет вид:

$$G = Ae^{-\xi_1 x} e^{i(\omega t - \eta_1 x)} + Be^{-\xi_2 x} e^{i(\omega t - \eta_2 x)}. \quad (8.89)$$

Здесь первое слагаемое описывает волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $Ox$ , а второе — в отрицательном направлении той же оси. Амплитуды обеих волн по мере распространения спадают.

### 8.3.2. Тригонометрическое решение

Будем искать решение в виде волны, амплитуда которой зависит от координаты по экспоненциальному закону:

$$G = e^{-\xi x} \cos(\omega t - \eta x). \quad (8.90)$$

Такой вид решения представляет собой действительную часть решения вида (8.77), выраженного через экспоненты.

Как и в предыдущем случае, при действительных  $\eta > 0$  и  $\xi > 0$  этот вид решения соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении оси  $Ox$ , амплитуда которой по мере распространения уменьшается.

Находим производные:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\omega e^{-\xi x} \sin(\omega t - \eta x); \quad (8.91)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\omega^2 e^{-\xi x} \cos(\omega t - \eta x); \quad (8.92)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = e^{-\xi x} [-\xi \cos(\omega t - \eta x) + \eta \sin(\omega t - \eta x)]; \quad (8.93)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -e^{-\xi x} [(\eta^2 - \xi^2) \cos(\omega t - \eta x) + 2\eta\xi \sin(\omega t - \eta x)]. \quad (8.94)$$

Подставляя эти производные в уравнение (8.72), разделяя на  $e^{-\xi x}$  и приводя подобные члены, получаем:

$$[\omega^2 - \nu^2(\eta^2 - \xi^2)] \cos(\omega t - \eta x) + 2(\omega\beta - \nu^2\eta\xi) \sin(\omega t - \eta x) = 0. \quad (8.95)$$

В силу произвольности координаты и времени это уравнение удовлетворяется только при равенстве нулю обоих коэффициентов при синусе и косинусе. Из этого получаем систему уравнений для  $\omega$ ,  $\eta$  и  $\xi$ :

$$\begin{cases} \omega^2 - \nu^2(\eta^2 - \xi^2) = 0 \\ \omega\beta - \nu^2\eta\xi = 0. \end{cases} \quad (8.96)$$

Эта система содержит три неизвестных величины:  $\omega$ ,  $\eta$  и  $\xi$ , а уравнений всего два. Поэтому одну из неизвестных можно задать произвольным образом. Будем полагать заданной частоту  $\omega$ . Это означает, что уравнение (8.72) может описывать волны, имеющие любую наперед заданную частоту. Итак, при заданной  $\omega$  получаем:

$$\begin{cases} \eta^2 - \xi^2 = \frac{\omega^2}{\nu^2} \\ \eta\xi = \frac{\omega\beta}{\nu^2}. \end{cases} \quad (8.97)$$

Эта система содержит два уравнения относительно двух неизвестных,  $\eta$  и  $\xi$ .

Из второго уравнения выразим  $\xi$ :

$$\xi = \frac{\omega\beta}{\nu^2\eta}. \quad (8.98)$$

Подставляя (8.98) в первое уравнение системы (8.97), получаем биквадратное уравнение для  $\eta$ :

$$\eta^4 - \frac{\omega^2}{\nu^2} \cdot \eta^2 - \frac{\omega^2\beta^2}{\nu^4} = 0. \quad (8.99)$$

Решая это уравнение, получаем:

$$(\eta^2)_{1,2} = \frac{\omega^2}{2\nu^2} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\omega^2}} \right). \quad (8.100)$$

Так как по физическому смыслу  $\eta^2 > 0$ , то в скобках оставляем знак плюс. Извлекая из (8.100) квадратный корень, получаем:

$$\eta_{1,2} = \pm \frac{\omega}{\nu} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\omega^2}} + 1 \right)}. \quad (8.101)$$

Подставляя (8.101) в (8.98), получаем:

$$\xi_{1,2} = \pm \frac{\omega}{\nu} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\omega^2}} - 1 \right)}. \quad (8.102)$$

Эти выражения совпадают с (8.87)–(8.88), полученными путем решения через экспоненты. Полное решение теперь имеет вид:

$$G = Ae^{-\xi_1 x} \cos(\omega t - \eta_1 x) + Be^{-\xi_2 x} \cos(\omega t - \eta_2 x). \quad (8.103)$$

Это решение совпадает с действительной частью решения (8.89), полученного через экспоненты. Здесь первое слагаемое описывает волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $Ox$ , а второе — в отрицательном направлении той же оси. Амплитуды обеих волн по мере распространения спадают.

## 8.4. Распространение электромагнитной волны через границу, разделяющую две среды

В качестве типичного примера классического решения задачи о распространении волн в слоистых средах рассмотрим отражение и прохождение электромагнитной волны через одну плоскую границу раздела двух сред при нормальном падении волны. В силу простоты задачи рассмотрение проведем прямым методом.

### 8.4.1. Общая геометрия задачи

Геометрия задачи показана на рис. 8.2.

На рисунке показаны заполненные волноведущей средой две области пространства 1 и 2, разделенные плоской границей между ними, причем внутри каждой области пространства параметры среды сохраняются постоянными, а на границе между областями меняются скачком. Волна падает из области 1 на границу раздела между областями 1 и 2, частично проходит в область 2 и частично отражается обратно в область 1.

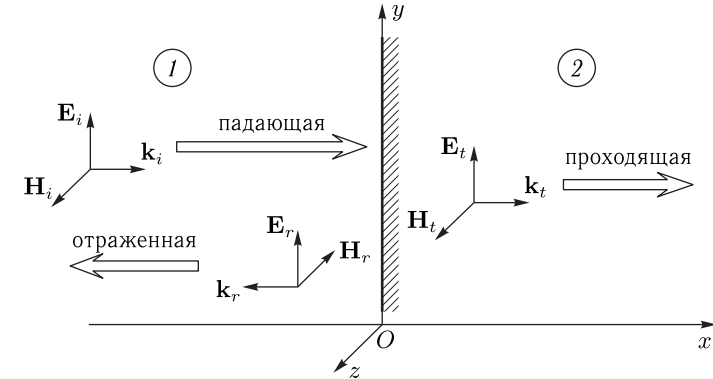


Рис. 8.2. Геометрия задачи

Ось координат  $Ox$  ориентирована перпендикулярно границе раздела, координата границы:  $x = 0$ . Координатная плоскость  $Oyz$  параллельна плоскости раздела сред. Ось  $Oy$  выбрана параллельной вектору электрического поля падающей волны  $\mathbf{E}_i$ . При этом ось  $Oz$  параллельна вектору магнитного поля  $\mathbf{H}_i$  той же волны. Волновые векторы падающей  $\mathbf{k}_i$ , проходящей  $\mathbf{k}_t$  и отраженной  $\mathbf{k}_r$  волн перпендикулярны границе раздела сред. Электрические и магнитные поля всех волн параллельны плоскости раздела. Для простоты полагаем обе среды бездиссипативными, так что волновые числа всех волн являются действительными. Поскольку падающая и отраженная волны распространяются в одной и той же среде 1, то волновые числа этих волн одинаковы. Дадим этим волновым числам обозначение  $k_1$ , а волновому числу проходящей волны, распространяющейся в среде 2, — обозначение  $k_2$ .

### 8.4.2. Решения волновых уравнений

Волновые уравнения для всех волн имеют типичный вид типа (8.14), где в отсутствие затухания  $\beta_{1,2} = 0$ , так что не будем заниматься подробным их рассмотрением, а сразу запишем решения в наиболее общем виде:

$$\text{для падающей волны — } \mathbf{A}e^{i(\omega t + k_1 x)}; \quad (8.104)$$

$$\text{для отраженной волны — } \mathbf{B}e^{i(\omega t - k_1 x)}; \quad (8.105)$$

$$\text{для проходящей волны — } \mathbf{C}e^{i(\omega t + k_2 x)}. \quad (8.106)$$

Знаки в показателях экспонент учитывают направление распространения соответствующей волны.

Координатные составляющие полей имеют вид:

для падающей волны

$$E_{ix} = 0; \quad (8.107)$$

$$E_{iy} = E_{i0}e^{ik_1 x} \text{ — задано (в силу поляризации вдоль } Oy); \quad (8.108)$$

$$E_{iz} = 0; \quad (8.109)$$

$$H_{ix} = 0; \quad (8.110)$$

$$H_{iy} = 0; \quad (8.111)$$

$$H_{iz} = \frac{E_{i0}}{Z_1}e^{ik_1 x} \text{ (в силу поперечного характера волны);} \quad (8.112)$$

для отраженной волны

$$E_{rx} = 0; \quad (8.113)$$

$$E_{ry} = E_{r0}e^{-ik_1 x}; \quad (8.114)$$

$$E_{rz} = 0; \quad (8.115)$$

$$H_{rx} = 0; \quad (8.116)$$

$$H_{ry} = 0; \quad (8.117)$$

$$H_{rz} = -\frac{E_{r0}}{Z_1}e^{-ik_1 x}; \quad (8.118)$$

для проходящей волны

$$E_{tx} = 0; \quad (8.119)$$

$$E_{ty} = E_{t0}e^{ik_2 x}; \quad (8.120)$$

$$E_{tz} = 0; \quad (8.121)$$

$$H_{tx} = 0; \quad (8.122)$$

$$H_{ty} = 0. \quad (8.123)$$

$$H_{tz} = \frac{E_{t0}}{Z_2}e^{ik_2 x}, \quad (8.124)$$

где  $Z_{1,2} = \sqrt{\mu_{1,2}\mu_0/\varepsilon_{1,2}\varepsilon_0}$  — импедансы соответствующих сред [1, стр. 50, форм. (1.258); стр. 53, форм. (1.306)], [143, стр. 199, форм. (7.4)].

Таким образом, координатные составляющие полей по обе стороны от границы равны:

$$E_{1y} = E_{i0}e^{ik_1 x} + E_{r0}e^{-ik_1 x}; \quad (8.125)$$

$$E_{2y} = E_{t0}e^{ik_2 x}; \quad (8.126)$$

$$H_{1z} = \frac{E_{i0}}{Z_1}e^{ik_1 x} - \frac{E_{r0}}{Z_1}e^{-ik_1 x}; \quad (8.127)$$

$$H_{2z} = \frac{E_{t0}}{Z_2}e^{ik_2 x}. \quad (8.128)$$

В качестве граничных условий принимаем непрерывность касательных составляющих полей на границе раздела:

$$E_{1y}|_{x=0} = E_{2y}|_{x=0}, \quad (8.129)$$

$$H_{1z}|_{x=0} = H_{2z}|_{x=0}, \quad (8.130)$$

Подставляя (8.125)–(8.128) в (8.129), (8.130), получаем:

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0}; \quad (8.131)$$

$$\frac{E_{i0}}{Z_1} - \frac{E_{r0}}{Z_1} = \frac{E_{t0}}{Z_2}. \quad (8.132)$$

Разделим на  $E_{i0}$  и введем новые переменные — нормированные амплитуды:

для отраженной волны

$$A = \frac{E_{r0}}{E_{i0}}, \quad (8.133)$$

для проходящей волны

$$B = \frac{E_{t0}}{E_{i0}}. \quad (8.134)$$

С этими обозначениями из (8.131)–(8.132) получаем систему уравнений для определения  $A$  и  $B$ :

$$1 + A = B; \quad (8.135)$$

$$Z_2 - AZ_2 = BZ_1. \quad (8.136)$$

Решая эту систему, находим амплитуды волн отраженной  $A$  и проходящей  $B$  в следующем виде:

$$A = -\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad (8.137)$$

$$B = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (8.138)$$

Чтобы не путаться с перестановкой индексов «1» и «2» будем всегда ставить на первом месте «1», на втором «2»)

Возвращаясь к исходным переменным в соответствии с (8.133)–(8.134), получаем амплитуды электрических полей:

$$E_{i0} \text{ — задано;} \quad (8.139)$$

$$E_{r0} = -\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot E_{i0}; \quad (8.140)$$

$$E_{t0} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot E_{i0}. \quad (8.141)$$



Учитывая (8.112), (8.118) и (8.124), находим амплитуды магнитных полей:

$$H_{i0} = \frac{1}{Z_1} E_{i0}; \quad (8.142)$$

$$H_{r0} = -\frac{E_{r0}}{Z_1} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1(Z_1 + Z_2)} E_{i0}; \quad (8.143)$$

$$H_{t0} = \frac{E_{t0}}{Z_2} = \frac{2}{Z_1 + Z_2} E_{i0}. \quad (8.144)$$

Из (8.143) и (8.144) с помощью (8.142) выразим  $H_{r0}$  и  $H_{t0}$  через  $H_{i0}$ :

$$H_{r0} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} H_{i0}; \quad (8.145)$$

$$H_{t0} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} H_{i0}. \quad (8.146)$$

### 8.4.3. Коэффициенты отражения и прохождения по полям

Имея амплитуды электрического и магнитного полей, находим коэффициенты отражения и прохождения по полям.

Для электрического поля (8.139)–(8.141):

$$R_{fe} = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = -\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad (8.147)$$

$$T_{fe} = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad (8.148)$$

или то же по модулю:

$$|R_{fe}| = \left| \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right|; \quad (8.149)$$

$$|T_{fe}| = \left| \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \right|. \quad (8.150)$$

Для магнитного поля (8.142)–(8.146):

$$R_{fm} = \frac{H_{r0}}{H_{i0}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad (8.151)$$

$$T_{fm} = \frac{H_{t0}}{H_{i0}} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}, \quad (8.152)$$

или то же по модулю:

$$|R_{fm}| = \left| \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right|; \quad (8.153)$$

$$|T_{fm}| = \left| \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \right|. \quad (8.154)$$

Заметим, что коэффициенты, определяемые из различных полей, электрического или магнитного, между собой различаются, то есть  $R_{fe} \neq R_{fm}$ , а также  $T_{fe} \neq T_{fm}$  и  $|T_{fe}| \neq |T_{fm}|$ .

### 8.4.4. Коэффициенты отражения и прохождения по энергиям

Найдем теперь коэффициенты отражения и прохождения по энергиям, учитывая, что в классике поток энергии определяется вектором Пойнтинга, который в системе СИ определяется выражением [136, стр. 52–53, форм. (1.107)]:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & E_y & 0 \\ 0 & 0 & H_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} E_y H_z. \quad (8.155)$$

**Замечание.** Выражение для вектора Пойнтинга в системе СГС содержит множитель  $(c/4\pi)$  [174, стр. 106, форм. (31.2)], [135, стр. 363, форм. (84.3)]. Здесь мы пользуемся системой СИ, чтобы не загромождать формулы излишними коэффициентами.

Будем считать, что поток энергии определяется модулем этого вектора. При этом с учетом (8.107)–(8.124) получаем потоки энергии:

для падающей волны

$$W_i = |E_{i0} H_{i0}|; \quad (8.156)$$

для отраженной волны

$$W_r = |E_{r0} H_{r0}| = \left| \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right|^2 |E_{i0} H_{i0}|; \quad (8.157)$$

для проходящей волны

$$W_t = |E_{t0} H_{t0}| = \left| \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \right| |E_{i0} H_{i0}|. \quad (8.158)$$

Отсюда находим коэффициенты отражения и прохождения по энергиям:

$$R_e = \frac{W_r}{W_i} = \left| \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right|^2; \quad (8.159)$$

$$T_e = \frac{W_t}{W_i} = \left| \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \right|. \quad (8.160)$$

В силу действительности  $Z_1$  и  $Z_2$  (то есть при принятом условии  $\beta_{1,2} = 0$  или, что то же самое,  $\sigma_{1,2} = 0$ ), получаем:

$$R_e = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2}; \quad (8.161)$$

$$T_e = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}. \quad (8.162)$$

Складывая (8.161) и (8.162), получаем:

$$R_e + T_e = \frac{(Z_1 - Z_2)^2 + 4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = 1, \quad (8.163)$$

что соответствует закону сохранения энергии.

**Замечание.** Приведенное здесь получение коэффициентов отражения и прохождения по энергиям основано на классической трактовке потока энергии электромагнитной волны через вектор Пойнтинга (8.155). Заметим, что приведенный здесь вывод пригоден только при действительных значениях того и другого полей, то есть при отсутствии диссипации в обеих средах. Более подробное рассмотрение вектора Пойнтинга, в том числе для комплексных значений полей, приводится в следующей главе настоящей монографии.

## 8.5. Распространение электромагнитной волны через две границы, разделяющие три среды

В качестве еще одного типичного примера классического решения задачи о распространения волн в слоистых средах рассмотрим отражение и прохождение электромагнитной волны через две плоские границы, разделяющие три среды. Рассмотрение проведем также прямым методом.

### 8.5.1. Общая геометрия задачи

Общая геометрия задачи показана на рис. 8.3.

На рисунке показаны заполненные волноведущей средой три области пространства 1, 2 и 3, разделенные двумя плоскими границами. Волна падает из области 1 на границу раздела между областями 1 и 2, частично проходит в область 2 и частично отражается обратно

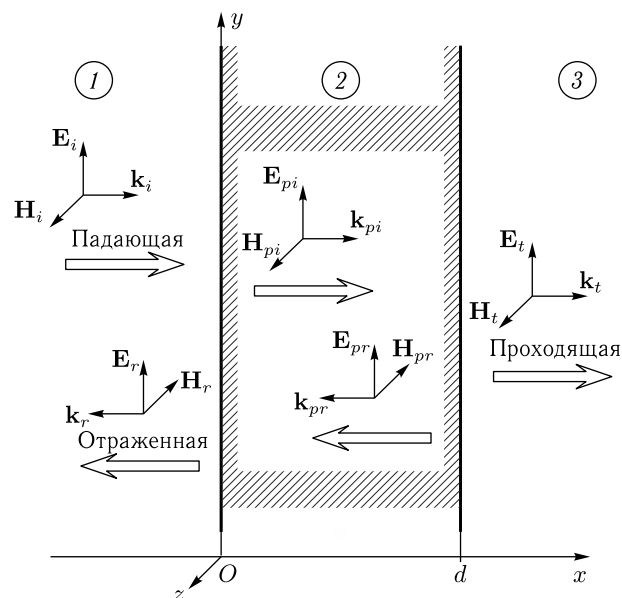


Рис. 8.3. Геометрия задачи

в область 1. Прошедшая в область 2 волна частично отражается от границы 2 и частично проходит в область 3. Начало координат совмещено с плоскостью первой границы. Ось координат  $Ox$  ориентирована перпендикулярно границам раздела, координаты границ —  $x = 0$  и  $x = d$ . Координатная плоскость  $Oyz$  параллельна плоскостям границ. Ось  $Oy$  выбрана параллельной вектору электрического поля падающей волны  $\mathbf{E}_i$ . При этом ось  $Oz$  параллельна вектору магнитного поля  $\mathbf{H}_i$  той же волны. Волновые векторы падающей  $\mathbf{k}_i$ , проходящей  $\mathbf{k}_t$  и отраженной  $\mathbf{k}_r$  волн перпендикулярны границам раздела сред. Электрические и магнитные поля всех волн параллельны плоскостям границ. Для простоты полагаем обе среды бездиссипативными, так что волновые числа всех волн являются действительными. Поскольку падающая и отраженная волны распространяются в одной и той же среде 1, то волновые числа этих волн одинаковы. Дадим этим волновым числам обозначение  $k_1$ . Также одинаковы волновые числа волн того и другого направлений в области 2, так что дадим им обозначение  $k_2$ . Для простоты положим параметры среды 3 теми же, что параметры среды 1, так что волновое число в этой среде также будет равно  $k_1$ . Соответственно импедансы в средах 1 и 3 будут равны  $Z_1$ , а в среде 2 — равен  $Z_2$ .

Найдем амплитуды распространяющихся волн, следуя той же схеме расчета, что применена в работе [1, стр. 125–130] для решения задачи о трехслойной структуре в случае одномерных волн.

### 8.5.2. Решения волновых уравнений

Полные решения волновых уравнений для электрического поля, нормированные относительно точек исхода волн [1, стр. 112–117], имеют вид:

в области 1

$$\text{для падающей волны} \quad \mathbf{E}_{i0} e^{i(\omega t - k_1 x)}; \quad (8.164)$$

$$\text{для отраженной волны} \quad \mathbf{E}_{r0} e^{i(\omega t + k_1 x)}; \quad (8.165)$$

в области 2

$$\text{для падающей волны} \quad \mathbf{E}_{pi0} e^{i(\omega t - k_2 x)}; \quad (8.166)$$

$$\text{для отраженной волны} \quad \mathbf{E}_{pr0} e^{i(\omega t + k_2(x-d))}; \quad (8.167)$$

в области 3

$$\text{для проходящей волны} \quad \mathbf{E}_{t0} e^{i(\omega t - k_1(x-d))}. \quad (8.168)$$

Из геометрии задачи (рис. 8.3) видно, что электрические поля всех волн направлены вдоль оси  $Oy$ , а магнитные поля — вдоль оси  $Ox$ . Это обстоятельство позволяет упростить дальнейшую запись, а именно, учитывая единственность направлений электрического и магнитного полей, индексы  $x$  и  $y$  в обозначениях координатных составляющих полей далее не писать.

В областях 1 и 2 суммарные поля включают в себя поля волн, распространяющихся в обоих направлениях вдоль оси  $Ox$ , а в области 3 — только поля волны, распространяющейся в положительном направлении той же оси.

При прохождении через границы раздела сред направления векторов электрического и магнитного полей всех падающих и проходящих волн сохраняются. Предположим далее, что направления векторов электрического поля всех отраженных волн (то есть распространяющихся в отрицательном направлении оси  $Ox$ ) также сохраняются. При этом из условия сохранения правого характера волны получаем, что направления векторов магнитного поля для отраженных волн меняются на противоположные.

### 8.5.3. Поля распространяющихся волн

В соответствии с (8.164)–(8.168) получаем координатные составляющие полей в трех областях:

в области 1

$$E_1 = E_{i0}e^{-ik_1x} + E_{r0}e^{ik_1x}; \quad (8.169)$$

$$H_1 = \frac{E_{i0}}{Z_1}e^{-ik_1x} - \frac{E_{r0}}{Z_1}e^{ik_1x}; \quad (8.170)$$

в области 2

$$E_2 = E_{pi0}e^{-ik_2x} + E_{pr0}e^{ik_2(x-d)}; \quad (8.171)$$

$$H_2 = \frac{E_{pi0}}{Z_2}e^{-ik_2x} - \frac{E_{pr0}}{Z_2}e^{-ik_2(x-d)}; \quad (8.172)$$

в области 3

$$E_3 = E_{t0}e^{-ik_1(x-d)}; \quad (8.173)$$

$$H_3 = \frac{E_{t0}}{Z_1}e^{-ik_1(x-d)}; \quad (8.174)$$

где  $Z_{1,2} = \sqrt{\mu_{1,2}\mu_0/\varepsilon_{1,2}\varepsilon_0}$  — импедансы соответствующих сред [1, стр. 50, форм. (1.258); стр. 53, форм. (1.306)], [143, стр. 199, форм. (7.4)].

В выражениях (8.170) и (8.172) знак минус перед вторым слагаемым отражает изменение направления магнитного поля соответствующей волны.

Записываем далее граничные условия — непрерывность касательных составляющих полей на границах раздела:

$$E_1|_{x=0} = E_2|_{x=0}; \quad (8.175)$$

$$H_1|_{x=0} = H_2|_{x=0}; \quad (8.176)$$

$$E_2|_{x=d} = E_3|_{x=d}; \quad (8.177)$$

$$H_2|_{x=d} = H_3|_{x=d}. \quad (8.178)$$

Подставляя (8.169)–(8.174) в (8.175)–(8.178), получаем систему уравнений для амплитуд полей:

$$E_{r0} - E_{pi0} - E_{pr0}e^{-ik_2d} = -E_{i0}; \quad (8.179)$$

$$Z_2E_{r0} + Z_1E_{pi0} - Z_1e^{-ik_2d} = Z_2E_{i0}; \quad (8.180)$$

$$E_{pi0}e^{-ik_2d} + E_{pr0} - E_{t0} = 0; \quad (8.181)$$

$$Z_1E_{pi0}e^{-ik_2d} - Z_1E_{pr0} - Z_2E_{t0} = 0. \quad (8.182)$$

Согласно этой системе четыре неизвестных амплитуд  $E_{r0}$ ,  $E_{pi0}$ ,  $E_{pr0}$ ,  $E_{t0}$  определяются через известное значение поля падающей волны  $E_{i0}$ . Решая эту систему методом Крамера [127, стр. 45, раздел 1.9–2], [128, стр. 54–56], получаем:

$$E_{r0} = -\frac{(Z_1^2 - Z_2^2)(e^{ik_2d} - e^{-ik_2d})}{(Z_1 + Z_2)^2 e^{ik_2d} - (Z_1 - Z_2)^2 e^{-ik_2d}} E_{i0}, \quad (8.183)$$

$$E_{pi0} = \frac{2Z_2(Z_1 + Z_2)e^{ik_2d}}{(Z_1 + Z_2)^2 e^{ik_2d} - (Z_1 - Z_2)^2 e^{-ik_2d}} E_{i0}; \quad (8.184)$$

$$E_{pr0} = \frac{2Z_2(Z_1 - Z_2)e^{-ik_2d}}{(Z_1 + Z_2)^2 e^{ik_2d} - (Z_1 - Z_2)^2 e^{-ik_2d}} E_{i0}; \quad (8.185)$$

$$E_{t0} = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2 e^{ik_2d} - (Z_1 - Z_2)^2 e^{-ik_2d}} E_{i0}. \quad (8.186)$$

Можно видеть, что эти выражения с точностью до обозначений совпадают с полученными прямым методом в качестве частного случая задачи о трех средах при условии  $k_3 = k_1$  в первой части настоящей монографии [1, стр. 129–130, форм. (3.182)–(3.185)].

### 8.5.4. Коэффициенты отражения и прохождения по электрическому полю

Полученные выражения позволяют получить коэффициенты отражения и прохождения по электрическому полю:

$$R_{fe} = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = -\frac{(Z_1^2 - Z_2^2)(e^{ik_2d} - e^{-ik_2d})}{(Z_1 + Z_2)^2 e^{ik_2d} - (Z_1 - Z_2)^2 e^{-ik_2d}}; \quad (8.187)$$

$$T_{fe} = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2 e^{ik_2d} - (Z_1 - Z_2)^2 e^{-ik_2d}}. \quad (8.188)$$

Для получения коэффициентов по модулю следует раскрыть экспоненты через тригонометрические функции с помощью формулы Эйлера [173, стр. 76, форм. (408.04)], после чего из полных выражений выделить действительную и мнимую части, которые использовать для получения модуля. Вычисления в аналитическом виде являются довольно громоздкими, поэтому авторы здесь их не приводят, а всего лишь

осмеливаются предложить их любознательному читателю в качестве полезного упражнения.

Для получения коэффициентов отражения и прохождения по энергиям можно воспользоваться тем же приемом, опирающемся на вектор Пойнтинга (8.155), что был применен в разделе 8.4.4, для чего сначала надо найти магнитные поля всех волн, что можно сделать исходя из формул для электрических полей (8.164)–(8.168), используя соответствующие значения импедансов сред. Такое вычисление авторы также оставляют в качестве возможного упражнения для любознательного читателя.

Заметим, что ввиду значительной громоздкости аналитических вычислений, любознательный читатель может попробовать свои силы в численном получении зависимостей коэффициентов по энергиям от толщины промежуточного слоя (среды 2), то есть от параметра  $d$ , что, по мнению авторов, можно сделать довольно простыми средствами.

Более подробное решение этих задач в том числе для сред, обладающих диссипацией, будет приведено в следующих главах настоящей монографии.

## Выводы по главе 8

Данная глава посвящена описанию некоторых наиболее общих свойств одномерных и электромагнитных волн в многослойных структурах. Рассмотрено распространение волн в средах с комплексными параметрами, приведены частные случаи классического решения задачи о падении волны на одну и две границы раздела между средами. Материал главы является вспомогательным для рассмотрения процессов переноса энергии, которым посвящены последующие главы.

Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрено распространение электромагнитной волны в проводящей среде. Получен общий вид волнового уравнения для диссипативной среды. Рассмотрено волновое уравнение для случая гармонической зависимости от времени, в том числе при комплексном характере волнового числа среды. Приведены решения уравнений в экспоненциальной и тригонометрической формах. Методом разделения переменных получены решения волновых уравнений в средах, обладающих комплексными параметрами.

2. Рассмотрена одномерная волна в среде с затуханием. Получены решения волнового уравнения для случая волны, спадающей в пространстве и во времени. Получены групповые и фазовые скорости распространяющихся волн, а также закон дисперсии для обоих случаев. Приведена схема физической реализации этих случаев в виде точечного и мгновенного источников.

3. Рассмотрено решение задачи о распространении электромагнитной волны через две среды с действительными параметрами, разделен-

ные одной границей. С использованием прямого метода решения получены амплитуды отраженной и проходящей волн. Определены коэффициенты отражения и прохождения по электрическому и магнитному полю, выявлено их различие. На основе классического определения потока энергии волны через вектор Пойнтинга получены коэффициенты отражения и прохождения по энергиям. Установлено, что сумма этих коэффициентов равна единице, что находится в соответствии с законом сохранения энергии.

4. Рассмотрено решение задачи о распространении электромагнитной волны через три среды, разделенные двумя границами. С использованием прямого метода получены аналитические выражения для амплитуд электрического поля волн, распространяющихся в обоих направлениях во всех трех слоях структуры. Получены коэффициенты отражения и прохождения по электрическому полю. Отмечена крайняя громоздкость получения подобных выражений в случаях комплексных параметров сред и даны соответствующие рекомендации для численного определения амплитуд волн и коэффициентов отражения и прохождения по энергиям.

## Глава 9

**ОБЩИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВОЛН**

Глава посвящена описанию общих энергетических характеристик распространяющихся волн. Приведено определение объемной плотности энергии, потока энергии и плотности потока энергии для одномерной волны, волны в струне и электромагнитной волны. Рассмотрено общее определение вектора Умова–Пойнтинга, а также в качестве частного случая определение вектора Пойнтинга для электромагнитной волны. Приведена схема получения вектора Пойнтинга на основе общих уравнений электродинамики, в том числе при экспоненциальном решении волнового уравнения. Приведены общие рекомендации для работы с потоками энергии распространяющихся волн, отмечены некоторые случаи, требующие подробного рассмотрения.

В главе частично использованы материалы монографий [57, 58], а также [64, стр. 22–32] и статьи [75]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

**9.1. Общие определения энергетических характеристик распространяющейся волны**

Рассмотрим некоторые общие определения энергетических характеристик распространяющейся волны в основном следуя [150, с. 101–102].

Энергия волны как динамического процесса определяется энергией вовлеченных в это процесс составляющих его компонент.

Так энергия волны в механической среде (например в струне, в твердом теле, в жидкости, в газе, в какой-либо дискретной структуре) определяется суммой потенциальной и кинетической энергий составляющих среду движущихся ее частей или отдельных частиц. То же касается энергии акустических волн.

Энергия электромагнитной волны определяется суммой энергий составляющих эту волну электрического и магнитного полей.

**9.1.1. Объемная плотность энергии волны**

Энергия волны распределяется в пространстве неравномерно и, кроме того, меняется во времени.

В заданной точке пространства в заданный момент времени энергия волны характеризуется **объемной плотностью энергии** и определяется как предел отношения:

$$w = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta W}{\Delta V} \right), \quad (9.1)$$

где  $\Delta W$  — энергия, заключенная в заданный момент времени в бесконечно малом объеме  $\Delta V$ , окружающем заданную точку. Так как волновой процесс является переменным как в пространстве, так и во времени, то и объемная плотность энергии волны также зависит от пространственной и временной координат:  $w = w(x, t)$ .

Для характеристики распространения волны в достаточно протяженной части пространства можно пользоваться **средней объемной плотностью энергии**:

$$\langle w \rangle = \Delta W / \Delta V, \quad (9.2)$$

где  $\Delta W$  — энергия волны, заключенная в элементе пространства объемом  $\Delta V$ , линейные размеры которого значительно больше длины волны  $\lambda$ . Для обозначения средней плотности энергии волны, если это не оговаривается специально, обычно используется обозначение без скобок:  $w$ .

Единицу объемной плотности энергии волны в системе СИ определим из формулы (9.1) для  $w$ , положив  $W = 1$  Дж,  $V = 1$  м<sup>3</sup>:

$$[w] = 1 \text{ Дж} / 1 \text{ м}^3 = 1 \text{ Дж} / \text{м}^3.$$

Эта единица называется *джоуль на кубический метр*.

Аналогично в системе СГС:

$$[w] = 1 \text{ эрг} / 1 \text{ см}^3 = 1 \text{ эрг} / \text{см}^3.$$

Эта единица называется *эрг на кубический сантиметр*.

Соотношение между единицами двух систем:

$$1 \text{ эрг} / \text{см}^3 = 10^{-7} \text{ Дж} / 10^{-6} \text{ м}^3 = 0,1 \text{ Дж} / \text{м}^3.$$

Размерность объемной плотности энергии волны:

$$\dim w = L^{-1} M T^{-2}, \quad (9.3)$$

где  $L$  — единица длины,  $M$  — единица массы,  $T$  — единица времени.

**9.1.2. Поток энергии волны**

В процессе своего распространения волна переносит определенную энергию. Перенос энергии волной при прохождении ее через заданную поверхность характеризуется **потоком энергии волны**  $\Phi$  и определяется как величина, равная пределу отношения количества энергии  $\Delta W$ ,

перенесенной волной через эту поверхность, ко времени  $\Delta t$ , за которое такой перенос осуществлен, при  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\Phi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta W}{\Delta t} \right). \quad (9.4)$$

Поток энергии волны не постоянен во времени. В течение периода колебаний он меняется от максимального до нуля (то есть энергия волны переносится пульсирующим образом). Поэтому часто используется не мгновенное, а усредненное по времени значение потока энергии:

$$\langle \Phi \rangle = \Delta W / \Delta t, \quad (9.5)$$

где предполагается, что средний поток вычисляется за время, много большее периода колебаний, то есть  $\Delta t \gg T$ . Для обозначения среднего потока энергии также обычно используется обозначение без скобок:

$$\Phi = \Delta W / \Delta t, \quad (9.6)$$

которое следует отличать от (9.4) в соответствии с контекстом.

Наиболее просто можно найти поток энергии в однородной среде для плоской площадки при падении на нее плоской волны по нормали к плоскости площадки. Простота достигается здесь тем, что за счет однородности среды в сочетании с плоским (то есть нерасходящимся) характером волны, объемная плотность энергии в каждой точке пространства (с учетом усреднения по времени) остается постоянной. В этом случае количество энергии в каком-то объеме пространства равно произведению плотности энергии волны на объем этого пространства. В случае плоской площадки, перпендикулярной направлению распространения волны, за единицу времени через площадку проходит объем пространства, равный площади площадки умноженной на скорость волны.

Таким образом, через площадку с площадью  $s$  при скорости волны  $v$  за единицу времени проходит следующее количество энергии:

$$W_s = wsv, \quad (9.7)$$

где  $w$  — плотность энергии волны, определяемая формулой (9.1). При этом предполагается, что  $w$  в пределах площадки, а также на расстоянии, проходимом волной за единицу времени, является однородной. Это и есть поток энергии волны через заданную площадку.

Единицу потока энергии волны в системе СИ можно определить из формулы (9.5) для  $\Phi$  в виде:

$$[\Phi] = 1 \text{ Дж}/1 \text{ с} = 1 \text{ Дж}/\text{с} = 1 \text{ Вт}.$$

Эта единица называется *Ватт* и равна потоку энергии волны, эквивалентному мощности в 1 Вт.

Аналогично в системе СГС:

$$[\Phi] = 1 \text{ эрг}/1 \text{ с} = 1 \text{ эрг}/\text{с}.$$

Эта единица называется *эрг в секунду*.

Соотношение между единицами двух систем:

$$1 \text{ эрг}/\text{с} = 10^{-7} \text{ Дж}/\text{с} = 10^{-7} \text{ Вт}.$$

Размерность потока энергии волны:

$$\dim \Phi = L^2 M T^{-3}, \quad (9.8)$$

где  $L$  — единица длины,  $M$  — единица массы,  $T$  — единица времени.

### 9.1.3. Плотность потока энергии волны

Определение потока энергии волны подразумевает прохождение волны через полную поверхность заданной конфигурации и размера. Для характеристики прохождения волны через единицу площади такой поверхности используется понятие **плотности потока энергии** волны (иногда называемое **интенсивностью** волны)  $I$ , определяемое как предел отношения потока энергии  $\Delta \Phi$  через плоскую площадку поверхности  $\Delta s$ , перпендикулярную направлению распространения волны, к площади этой площадки:

$$S = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \Phi}{\Delta s} \right). \quad (9.9)$$

В случае достаточно плоской поверхности удобно пользоваться средним значением плотности потока энергии волны:

$$\langle S \rangle = \frac{\Delta \Phi}{\Delta s}, \quad (9.10)$$

которое также обычно используется без скобок.

Единицу плотности потока энергии волны в системе СИ можно определить из формулы (9.9) для  $I$ , полагая  $\Phi = 1 \text{ Вт}$ ,  $s = 1 \text{ м}^2$ :

$$[S] = 1 \text{ Вт}/1 \text{ м}^2 = 1 \text{ Вт}/\text{м}^2.$$

Эта единица называется *Ватт на квадратный метр* и равна потоку энергии волны, при котором через поверхность площадью  $1 \text{ м}^2$ , расположенную перпендикулярно направлению распространения волны, за время 1 с переносится энергия в 1 Дж.

Аналогично в системе СГС:

$$[S] = (1 \text{ эрг}/\text{с})/1 \text{ см}^2 = 1 \text{ эрг}/(\text{с} \cdot \text{см}^2).$$

Эта единица называется *эрг в секунду на квадратный сантиметр*.

Соотношение между единицами двух систем:

$$1 \text{ эрг}/(\text{с} \cdot \text{см}^2) = 10^{-7} \text{ Дж}/(\text{с} \cdot 10^{-4} \text{ м}^2) = 10^{-3} \text{ Вт}/\text{м}^2.$$

Размерность плотности потока энергии волны:

$$\dim I = M T^{-3}, \quad (9.11)$$

где  $L$  — единица длины,  $M$  — единица массы,  $T$  — единица времени.

### 9.1.4. Вектор Умова–Пойнтинга

Рассмотрим распространение плоской волны в однородном пространстве со скоростью  $\mathbf{v}$ , иллюстрируемое рис. 9.1. Будем полагать энергетические параметры волны УСРЕДНЕННЫМИ в пространстве и во времени (в соответствии с формулами (9.2) и (9.5)).

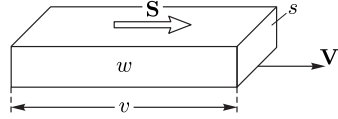


Рис. 9.1. К схеме определения вектора Умова–Пойнтинга

Проходя через прямоугольную площадку площадью  $s$ , волна за единицу времени «заметает» объем прямоугольного параллелепипеда равный

$$V = sv. \quad (9.12)$$

В силу однородности пространства, энергия волны, заключенная внутри этого параллелепипеда, равна:

$$W = wV = wsv, \quad (9.13)$$

что совпадает с формулой (9.7).

Так как эта энергия проходит через площадку  $s$  за единицу времени, то поток энергии волны через площадку  $s$  равен той же величине:

$$\Phi = wsv. \quad (9.14)$$

Согласно определению плотности потока энергии как потока через единицу площади, получаем:

$$S = \frac{\Phi}{s} = wv. \quad (9.15)$$

Вектор, численно равный плотности потока энергии волны (интенсивности)  $S$  и направленный в сторону распространения волны, называется **вектором Умова** (для акустических волн) и **вектором Пойнтинга** (для электромагнитных волн) или обобщенно **вектором Умова–Пойнтинга**. С учетом векторного характера скорости, вектор Умова–Пойнтинга имеет вид:

$$\mathbf{S} = w\mathbf{v}. \quad (9.16)$$

Вектор Умова–Пойнтинга выражается в тех же единицах, что и интенсивность, то есть в *Ваттах на квадратный метр* или в *эргах в секунду на квадратный сантиметр*.

## 9.2. Энергетические характеристики волны в струне

Рассмотрим сначала энергетические характеристики волны, распространяющейся в струне, задача о которой подробно рассмотрена в [55, стр. 23–27].

Распространяющаяся в струне волна, являющаяся решением одномерного волнового уравнения второго порядка, имеет вид:

$$u = u_0 \cdot \exp [i(\omega t - kx)], \quad (9.17)$$

где  $u(x, t)$  — величина поперечного отклонения точки струны с координатной  $x$  от равновесного положения, равно нулю.

Удельная плотность энергии колебаний струны (энергия на единицу длины) по [55, стр. 28–30, форм. (17)] равна:

$$w_s = \frac{1}{2} \left[ T \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right], \quad (9.18)$$

где  $T$  — натяжение струны, под которым понимается сила, приходящаяся на единицу площади поперечного сечения струны, что аналогично понятию напряжения в механике деформируемого тела [175, стр. 269, форм. (81.2)],  $\rho$  — плотность материала струны.

Так как в формулу (9.18) входят квадраты, то прибегнем к тригонометрическому виду решения, то есть возьмем от (9.17) действительную часть:

$$u = u_0 \cos(\omega t - kx). \quad (9.19)$$

Отсюда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -ku_0 \sin(\omega t - kx), \quad (9.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\omega u_0 \sin(\omega t - kx). \quad (9.21)$$

Подставляя (9.20) и (9.21) в (9.18), получаем:

$$w_s = \frac{1}{2} (Tk^2 + \rho\omega^2) u_0^2 \sin^2(\omega t - kx). \quad (9.22)$$

Преобразуя квадрат синуса в соответствии с выражением:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2\alpha), \quad (9.23)$$

получаем:

$$w_s = \frac{1}{4} (Tk^2 + \rho\omega^2) u_0^2 [1 - \cos 2(\omega t - kx)]. \quad (9.24)$$

Усредним  $w_s$  по времени и координате, учитывая, что среднее значение косинуса за период по обоим этим переменным равно нулю. В результате получаем:

$$\langle w_s \rangle = \frac{1}{4} (Tk^2 + \rho\omega^2) u_0^2. \quad (9.25)$$

Согласно определению фазовой скорости [6, стр. 430]:

$$v = \frac{\omega}{k}, \quad (9.26)$$

причем для струны по [55, стр. 26, форм. (5)]:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (9.27)$$

Далее возможны два варианта.

1) Из (9.26) выразим  $k$ :

$$k = \frac{\omega}{v} \quad (9.28)$$

и подставим в (9.25):

$$\langle w_s \rangle = \frac{1}{4} \left( \frac{T}{v^2} + \rho \right) \omega^2 u_0^2. \quad (9.29)$$

Подставляя (9.27) в (9.29), получаем:

$$\langle w_s \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_0^2. \quad (9.30)$$

2) Из (9.26) выразим  $\omega$ :

$$\omega = kv \quad (9.31)$$

и подставим в (9.25):

$$\langle w_s \rangle = \frac{1}{4} (T + \rho v^2) k^2 u_0^2. \quad (9.32)$$

Подставляя (9.27) в (9.32), получаем:

$$\langle w_s \rangle = \frac{1}{2} T k^2 u_0^2. \quad (9.33)$$

Итак, получены два эквивалентных выражения для усредненной по периоду плотности энергии струны — (9.30) и (9.33). Эти выражения переходят друг в друга при учете (9.26) и (9.27).

В виде (9.30), то есть через квадрат частоты, выражение для плотности энергии волны наиболее часто используется в литературе [176, стр. 82, форм. (4.65)]. Однако для нашего дальнейшего рассмотрения более важен второй вариант (9.33) — через квадрат волнового числа.

Следующим этапом должно быть нахождение плотности потока энергии волны. Хотя для струны понятие поперечного сечения не определено, то есть плотность энергии (9.18) соответствует единице длины, будем полагать, что по-прежнему средняя плотность потока энергии волны определяется формулой (9.15), то есть по модулю равна:

$$\langle S_s \rangle = \langle w_s \rangle \cdot v. \quad (9.34)$$

Подставляя в это выражение (9.33) и (9.26), получаем плотность потока энергии для струны, выраженную через волновое число, в виде:

$$\langle S_s \rangle = \frac{1}{2} T \omega k u_0^2. \quad (9.35)$$

Таким образом, можно видеть, что средняя плотность потока энергии волны в струне пропорциональна произведению квадрата амплитуды волны на ее волновое число.

### 9.3. Энергетические параметры электромагнитной волны

Рассмотрим определения основных энергетических параметров электромагнитной волны. При рассмотрении будем следовать справочному изданию [55] в сочетаниями с общими свойствами волны в соответствии с [134, стр. 595–620]. Будем пользоваться системой СИ.

#### 9.3.1. Общие соотношения для электромагнитной волны

Напомним некоторые общие соотношения для электромагнитных волн на примере плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $Ox$ .

Волновые уравнения для электрического и магнитного полей такой волны в среде с проницаемостями  $\varepsilon$  и  $\mu$  имеют вид [134, стр. 598, форм. (267.3)]:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0; \quad (9.36)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0, \quad (9.37)$$

где  $v$  — фазовая скорость волны, равная [134, стр. 601, форм. (269.3)]

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}}, \quad (9.38)$$

причем  $\mu_0, \varepsilon_0$  — магнитная и диэлектрическая постоянные в системе СИ.

Фазовая скорость волны  $v$  связана с волновым числом  $k$  следующим соотношением [6, стр. 430]:

$$v = \frac{\omega}{k}, \quad (9.39)$$

где  $\omega$  — частота волны.

Из этого выражения с учетом (9.38) находим волновое число:

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}. \quad (9.40)$$

Получим из (9.40) вспомогательные соотношения:

$$\varepsilon \varepsilon_0 = \frac{k^2}{\omega^2 \mu \mu_0}; \quad (9.41)$$

$$\mu \mu_0 = \frac{k^2}{\omega^2 \varepsilon \varepsilon_0}. \quad (9.42)$$

Эти соотношения будут использованы в дальнейшем.

Для полей волны выполняются соотношения [134, стр. 601, форм. (269.40)]:

$$H = \frac{E}{Z}, \quad (9.43)$$

или

$$E = ZH, \quad (9.44)$$



где  $Z$  — импеданс среды, равный [1, стр. 50, форм. (1.258)]:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}. \quad (9.45)$$

В случае свободного пространства  $Z = Z_0$ , где  $Z_0$  — импеданс свободного пространства, равный:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}. \quad (9.46)$$

В качестве энергетических параметров волны обычно используются следующие:

- $w_S$  — (объемная) плотность энергии волны;
- $\vec{W}_S$  — поток энергии волны (через заданную площадку);
- $S$  — плотность потока энергии волны;
- $\mathbf{S}$  — вектор Пойнтинга.

Перейдем к рассмотрению этих параметров по отдельности.

### 9.3.2. Объемная плотность энергии волны

**Определение.** Объемная плотность энергии электромагнитной волны — количество энергии волны в единице объема.

Поскольку волна содержит электрическое и магнитное поля, то объемная плотность энергии волны равна сумме объемных плотностей энергии составляющих ее полей.

Объемная плотность энергии электрического поля равна:

$$w_E = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (9.47)$$

Объемная плотность энергии магнитного поля равна:

$$w_H = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}. \quad (9.48)$$

Отсюда полная объемная плотность энергии волны равна сумме [134, стр. 608]:

$$w_S = w_E + w_H = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 + \mu\mu_0 H^2}{2}. \quad (9.49)$$

При подстановке (9.44) с учетом (9.45) в (9.47) это выражение переходит в (9.48), откуда получаем:

$$w_E = w_H. \quad (9.50)$$

Таким образом, полную объемную плотность энергии можно записать через какое-то одно поле, электрическое

$$w_S = \varepsilon\varepsilon_0 E^2, \quad (9.51)$$

или магнитное

$$w_S = \mu\mu_0 H^2. \quad (9.52)$$

Можно видеть, что при заменах (9.43) и (9.44) с учетом (9.45) эти выражения переходят друг в друга.

Из (9.51), (9.52) с помощью (9.41), (9.42) можно выразить объемную плотность энергии волны через волновое число:

$$w_S = \frac{1}{\omega^2 \mu\mu_0} E^2 k^2, \quad (9.53)$$

$$w_S = \frac{1}{\omega^2 \varepsilon\varepsilon_0} H^2 k^2. \quad (9.54)$$

### 9.3.3. Усредненная по времени объемная плотность энергии волны

Поскольку в распространяющейся волне поля  $E$  и  $H$  зависят от времени, то и объемная плотность энергии волны зависит от времени. Однако в большинстве задач представляет интерес средняя плотность энергии волны за промежуток времени, значительно больший периода колебаний волны.

Предположим, что поля волны зависят от времени в виде:

$$E = E_0 \cos(\omega t); \quad (9.55)$$

$$H = H_0 \cos(\omega t), \quad (9.56)$$

где  $E_0$ ,  $H_0$  — амплитуды электрического и магнитного поля соответственно, связанные друг с другом соотношениями (9.43), (9.44), а зависимость типа косинуса взята для примера, как частный случай (если взять синус, в том числе с фазой — ничего не изменится).

При вычислении объемной плотности энергии по выражениям (9.51)–(9.54) поля возводятся в квадрат, в результате чего зависимость от времени объемной плотности получается пропорциональной квадрату косинуса. Усреднение квадрата косинуса за период дает:

$$\overline{\cos^2(\omega t)} = \frac{1}{2}. \quad (9.57)$$

Таким образом, подставляя (9.55), (9.56) в (9.51), (9.52) с учетом (9.57), получаем объемную плотность энергии волны, усредненную за период, в следующем виде:

$$\overline{w_S} = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E_0^2, \quad (9.58)$$

или

$$\overline{w_S} = \frac{1}{2} \mu\mu_0 H_0^2. \quad (9.59)$$

Из этих выражений, аналогично (9.53), (9.54) с помощью (9.41), (9.42), получаем усредненную плотность энергии волны в виде:

$$\overline{w}_S = \frac{1}{2\omega^2 \mu \mu_0} E_0^2 k^2; \quad (9.60)$$

$$\overline{w}_S = \frac{1}{2\omega^2 \varepsilon \varepsilon_0} H_0^2 k^2. \quad (9.61)$$

Таким образом, можно видеть, что объемная плотность энергии пропорциональна произведению квадрата амплитуды волны на квадрат волнового числа.

#### 9.3.4. Поток энергии волны

С учетом (9.53), (9.54), то есть на данном этапе без учета усреднения по времени, введенного в формулах (9.60), (9.61), из (9.7) получаем выражения для потока энергии волны через площадку  $S_p$ , записанные через волновое число:

$$W_S = \frac{1}{\omega \mu \mu_0} E^2 k S_p; \quad (9.62)$$

$$W_S = \frac{1}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} H^2 k S_p. \quad (9.63)$$

Заметим, что отказ от усреднения в этих формулах привел к отмене коэффициента 2 в знаменателе.

Поскольку согласно (9.55), (9.56) плотность энергии волны  $w_S$  (9.53), (9.54) все же зависит от времени, то и поток энергии (9.7) получается зависящим от времени.

Путем усреднения с целью исключения зависимости от времени получаем:

$$\overline{W}_S = \overline{w}_S S_p v. \quad (9.64)$$

В таком виде поток энергии от времени не зависит.

Аналогично из (9.60), (9.61) с помощью (9.55), (9.56) и (9.57), получаем:

$$\overline{W}_S = \frac{1}{2\omega \mu \mu_0} E_0^2 k S_p; \quad (9.65)$$

$$\overline{W}_S = \frac{1}{2\omega \varepsilon \varepsilon_0} H_0^2 k S_p. \quad (9.66)$$

Таким образом, усредненный по времени поток энергии волны через заданную площадку пропорционален произведению квадрата амплитуды волны на волновое число и на площадь площадки.

#### 9.3.5. Плотность потока энергии волны

**Определение.** плотность потока энергии волны — поток энергии волны через площадку единичной площади, то есть количество эне-

гии  $w_S$ , переносимое волной со скоростью  $v$  за единицу времени через площадку единичной площади (то есть при  $S_p = 1$ ):

$$S = \frac{W_S}{S_p} = w_S \cdot v, \quad (9.67)$$

где  $W_S$  — определяется формулой (9.62) или (9.63), откуда получаем:

$$S = \frac{1}{\omega \mu \mu_0} E^2 k; \quad (9.68)$$

$$S = \frac{1}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} H^2 k. \quad (9.69)$$

С учетом (9.41), (9.42), а также (9.39), из этих формул получаем:

$$S = \varepsilon \varepsilon_0 E^2 v, \quad (9.70)$$

или

$$S = \mu \mu_0 H^2 v. \quad (9.71)$$

В эти выражения удобно ввести импеданс. Для этого учтем, что скорость электромагнитной волны в среде с проницаемостями  $\varepsilon$  и  $\mu$  определяется выражением (9.38), подставляя которое в (9.70) и (9.71), получаем:

$$S = E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} = \frac{E^2}{Z}, \quad (9.72)$$

или

$$S = H^2 \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} = H^2 Z, \quad (9.73)$$

где  $Z$  определяется формулой (9.45).

Учитывая связь между электрическим и магнитным полями волны в виде (9.43), (9.44), оба выражения (9.72) и (9.73) можно привести к единому виду:

$$S = EH. \quad (9.74)$$

**Замечание о терминологии.** Иногда, особенно в задачах об излучении электромагнитных волн, плотность потока энергии волны  $S$  называют «плотностью потока излучения».

#### 9.3.6. Усредненная по времени плотность потока энергии волны

В виде (9.67) плотность потока энергии волны зависит от времени. Подстановка полей, зависящих от времени в виде (9.55), (9.56), приводит опять к квадрату косинуса, в результате чего, учитывая (9.57), получаем:

$$\overline{S} = \frac{1}{2} E_0 H_0. \quad (9.75)$$

В таком виде плотность потока энергии волны от времени не зависит.

Из выражений (9.68), (9.69) с учетом (9.55), (9.56) и (9.57) получаем:

$$\bar{S} = \frac{1}{2\omega\mu\mu_0} E_0^2 k; \quad (9.76)$$

$$\bar{S} = \frac{1}{2\omega\epsilon\epsilon_0} H_0^2 k. \quad (9.77)$$

Таким образом, получаем, что усредненная по времени плотность потока энергии волны пропорциональна произведению квадрата амплитуды одного из полей волны на волновое число.

С использованием импеданса из (9.72), (9.73) с учетом (9.57) получаем:

$$\bar{S} = \frac{E_0^2}{2Z}; \quad (9.78)$$

$$\bar{S} = \frac{1}{2} H_0^2 Z. \quad (9.79)$$

#### 9.4. Вектор Пойнтинга для электромагнитной волны

Понятие вектора Пойнтинга в случае электромагнитной волны требует более подробного рассмотрения, поэтому сначала приведем его общее определение, после чего остановимся на классической схеме вывода этого понятия из общих уравнений электродинамики.

**Определение.** Вектор Пойнтинга — вектор, направление которого совпадает с направлением переноса энергии, а длина равна численному значению плотности потока энергии волны, то есть количеству энергии, переносимой через единичную площадку в единицу времени.

Вектор Пойнтинга определяется выражением:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]. \quad (9.80)$$

Вследствие зависимости полей  $E$  и  $H$  от времени определенный таким образом вектор Пойнтинга  $\mathbf{S}$  также зависит от времени.

##### 9.4.1. Получение выражения для вектора Пойнтинга из уравнений электродинамики

Рассмотрим общую схему получения выражения для вектора Пойнтинга в электродинамике, используемую в классических источниках [174, стр. 105–107], [137, стр. 52–55].

Первые два классические уравнения электродинамики в системе СИ имеют вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad (9.81)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (9.82)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — электрическое и магнитное поля,  $\epsilon$  и  $\mu$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды,  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  — электрическая и магнитная постоянные в системе СИ («проницаемости вакуума»),  $t$  — время. Здесь предполагается, что среда однородна, то есть  $\epsilon$ ,  $\mu$  не зависят от координат, а диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  может быть комплексной и включать в себя проводимость  $\sigma$  в соответствии с формулой:

$$\epsilon_c = \epsilon - i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}. \quad (9.83)$$

**Замечание.** Электрическое и магнитное поля, входящие в выражения (9.81) и (9.82), являются взаимно обусловленными в том отношении, что одно из них вызывает другое и наоборот. Система (9.81)–(9.82) является замкнутой в том отношении, что обусловленность полей друг другом выполняется полностью. Это означает, что все магнитное поле  $\mathbf{H}$ , входящее в первое уравнение, целиком является причиной электрического поля  $\mathbf{E}$ , входящего в то же уравнение, а электрическое поле  $\mathbf{E}$ , входящее во второе уравнение, в свою очередь целиком является причиной магнитного поля  $\mathbf{H}$ , входящего во второе уравнение. Поскольку поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  являются одними и теми же в обоих уравнениях, то эти уравнения в совокупности образуют как бы «кольцо» равенств, не имеющее никаких ответвлений, то есть входящих или отходящих компонент.

Перейдем теперь к выводу выражения для вектора Пойнтинга.

Умножая уравнение (9.81) на  $\mathbf{H}$ , а уравнение (9.82) на  $-\mathbf{E}$  скалярным образом, получаем:

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad (9.84)$$

$$-\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\epsilon\epsilon_0 \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (9.85)$$

Складывая эти выражения, получаем:

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\mu\mu_0 \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon\epsilon_0 \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (9.86)$$

Для преобразования левой части воспользуемся известным соотношением векторного анализа [127, стр. 172, табл. 5.5–1]:

$$\operatorname{div}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}, \quad (9.87)$$

в котором положим  $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{H}$ .

Правую часть преобразуем в соответствии с правилами интегрирования с учетом скалярного характера произведения:

$$\mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = \frac{1}{2} a^2; \quad \mathbf{b} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \frac{1}{2} b^2. \quad (9.88)$$

В результате получаем:

$$\operatorname{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} \right). \quad (9.89)$$

Введем обозначения:

$$w_E = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}; \quad (9.90)$$

$$w_H = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}; \quad (9.91)$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]. \quad (9.92)$$

В этих обозначениях (9.89) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(w_E + w_H) = -\operatorname{div} \mathbf{S}. \quad (9.93)$$

Выражения (9.90) и (9.91) представляют собой плотность энергии электрического и магнитного поля соответственно.

Вектор  $\mathbf{S}$  (9.92) — вектор Пойнтинга для электромагнитного поля.

Интегрируя (9.93) по какому-либо замкнутому объему  $V$ , получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (w_E + w_H) dV = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{S} dV. \quad (9.94)$$

Преобразуем правую часть с помощью известной формулы Гаусса-Остроградского [127, стр. 175, табл. 5.6–1, форм. 1], [177, стр. 188, форм. (7.27), стр. 192, форм. (7.33)], [178, стр. 407, форм. 4]:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{p} dV = \int_{\Sigma} \mathbf{np} d\sigma, \quad (9.95)$$

где  $\Sigma$  — поверхность, окружающая объем  $V$ ,  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к этой поверхности,  $d\sigma$  — ее дифференциальный элемент.

**Замечание.** Формула (9.95), являющаяся обобщением одномерной формулы Ньютона–Лейбница для определенного интеграла («основной формулы интегрального исчисления») [127, стр. 117, форм. (4.6–11)], [180, стр. 327, форм. (10.18)], [179, стр. 143, форм. (A)] на трехмерное пространство, в книге [127, стр. 175, табл. 5.6–1, форм. 1] названа «теоремой о дивергенции», в [137, стр. 29, форм. (4.6)] — «теоремой Гаусса», в [177, стр. 191, форм. (7.33)] — «формулой Остроградского», в [178, стр. 407, форм. 4], а также [137, стр. 30, форм. (4.8)] — «формулой Гаусса–Остроградского».

В результате получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (w_E + w_H) dV = - \int_{\Sigma} \mathbf{nS} d\sigma. \quad (9.96)$$

В этом равенстве слева стоит изменение во времени полной энергии электромагнитного поля, заключенного в объеме  $V$ , а в правой — полный поток вектора  $\mathbf{S}$  через поверхность  $\Sigma$ , окружающую этот объем.

Итак, изменение полной энергии поля в замкнутом объеме равно полному потоку вектора Пойнтинга через поверхность этого объема.

#### 9.4.2. Соотношение полученного выражения для вектора Пойнтинга с его общим определением

В общем случае вектор Пойнтинга в среде, обладающей внутренней энергией, определяется выражением

$$\mathbf{S} = w\mathbf{v}, \quad (9.97)$$

где  $w$  — объемная плотность энергии среды;  $\mathbf{v}$  — скорость перемещения энергии через единичную площадку, перпендикулярную этому вектору скорости. По направлению вектор Пойнтинга совпадает с направлением вектора скорости.

Поскольку энергия электромагнитного поля перемещается в виде электромагнитных волн, рассмотрим перемещение энергии через площадку столь малую, что в ее пределах фронт электромагнитной волны можно считать плоским.

Будем считать среду изотропной без каких-либо ограничений на комплексность или действительность проницаемостей.

В такой волне электрическое и магнитное поля перпендикулярны друг другу, а также вектору скорости, причем модули полей связаны соотношением

$$|H| = \frac{|E|}{Z}, \quad (9.98)$$

где  $Z$  — импеданс среды, равный (9.45):

$$Z = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}. \quad (9.99)$$

Вектор Пойнтинга в этом случае, в соответствии с геометрическим определением векторного произведения, будет направлен вдоль скорости, поэтому достаточно рассмотреть лишь его модуль. При этом из выражения (9.92) с учетом (9.98)–(9.99) получаем:

$$|S| = |E||H| = \frac{|E|^2}{Z}. \quad (9.100)$$

Рассмотрим теперь классическое определение вектора Пойнтинга (9.16). Поскольку в силу изотропности среды он направлен вдоль скорости, то опять-таки достаточно рассмотреть лишь его модуль:

$$|S| = w|v|. \quad (9.101)$$

Плотность энергии  $w$  с учетом (9.98)–(9.99) можно привести к виду:

$$w = \varepsilon\varepsilon_0 |E|^2. \quad (9.102)$$

Скорость волны в изотропной среде с проницаемостями  $\varepsilon$  и  $\mu$  по модулю равна:

$$|v| = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}. \quad (9.103)$$

Подставляя (9.102) и (9.103) в (9.101) с учетом (9.99), получаем:

$$|S| = \varepsilon\varepsilon_0|E^2| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{|E^2|}{Z}, \quad (9.104)$$

что совпадает с (9.100).

Таким образом, полученное из уравнений электродинамики выражение для вектора Пойнтинга (9.92) в случае изотропной среды полностью совпадает с классическим наиболее общим определением (9.101), полученным из определения плотности потока энергии.

#### 9.4.3. Усредненный по времени вектор Пойнтинга

В большинстве задач представляет интерес вектор Пойнтинга, не зависящий от времени, для чего выполняется усреднение. Для усредненной по времени плотности потока энергии волны вектор Пойнтинга с учетом (9.55), (9.56) и (9.57) принимает вид:

$$\mathbf{S} = \overline{[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]} = \frac{1}{2}[\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0]. \quad (9.105)$$

#### 9.4.4. Вектор Пойнтинга при экспоненциальном решении

При решении практических задач электродинамики часто используется метод комплексных амплитуд, вариант которого представлен здесь в главе 8 при решении волнового уравнения (8.14) в экспоненциальной форме (8.77). Это уравнение, а следовательно и его решение, является обобщением тождественных волновых уравнений (8.10) и (8.11) для электрического и магнитного полей электромагнитной волны. Решение получено в виде (8.89), где все входящие в это выражение параметры  $\eta_{1,2}$ ,  $\xi_{1,2}$ ,  $\omega$  являются действительными. Ответственная за мнимую часть волнового числа  $k$  проводимость  $\sigma$ , будучи действительной, входит в действительный же параметр  $\xi$ , определяемый выражением (8.88), через посредство коэффициента затухания (8.12). При этом коэффициенты  $A$  и  $B$  при экспонентах являются произвольными постоянными и в самой задаче о решении уравнения (8.14) никак не определены. Явный вид этих коэффициентов может быть получен при решении каких-то конкретных задач о распространении электромагнитной волны, например при ее прохождении через многослойную структуру, где вид подобных коэффициентов будет определяться граничными условиями. Однако на данном этапе нет оснований считать их комплексными, поэтому, исходя из физической реальности электромагнитной волны, будем считать их действительными. Таким образом, решение волновых уравнений вида (8.14), а также (8.10)–(8.11) содержит мнимость только в показателе экспоненты в виде явно представленной мнимой единицы  $i$  и нигде более.

Для упрощения дальнейшей записи отвлечемся от координатной зависимости решения уравнения (8.14) и рассмотрим только временную часть.

Итак, будем полагать, что получены два вида решений, одно — тригонометрическим методом и другое — экспоненциальным.

Тригонометрическое решение имеет вид:

$$E_d = E_0 \cos \omega t; \quad (9.106)$$

$$H_d = H_0 \cos \omega t. \quad (9.107)$$

Экспоненциальное решение имеет вид:

$$E_c = E_0 e^{i\omega t}; \quad (9.108)$$

$$H_c = H_0 e^{i\omega t}. \quad (9.109)$$

Как показано выше, в обоих решениях амплитуды полей  $E_0$  и  $H_0$  являются действительными.

Согласно определению вектора Пойнтинга (9.92), надо найти произведение  $\mathbf{E}$  на  $\mathbf{H}$ , усредненное по времени.

Поскольку тригонометрическое решение не используют к комплексную форму, будем искать эту величину, исходя именно из него:

$$\overline{E_d H_d} = E_0 H_0 \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2} E_0 H_0, \quad (9.110)$$

где учтено, что усредненный за период квадрат косинуса равен 1/2, аналогично (9.57). Дальнейшей задачей будет получить такое же выражение, исходя из выражений для полей в комплексной форме.

Для этого рассмотрим также усредненное по времени произведение полей (9.108) и (9.109):

$$\overline{E_c H_c} = E_0 H_0 \overline{e^{2i\omega t}} = E_0 H_0 (\overline{\cos 2\omega t + i \sin 2\omega t}) = 0, \quad (9.111)$$

где использована формула Эйлера [173, стр. 76, форм. 408.04], и учтено, что усреднение за период как синуса, так и косинуса дает нуль.

Видно, что полученный нуль никак не соответствует выражению (9.110). Вследствие такой неудачи предпримем другую попытку:

$$\overline{E_c H_c^*} = E_0 H_0 \overline{e^{i\omega t} e^{-i\omega t}} = E_0 H_0, \quad (9.112)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение, а для представления экспонент опять же использована формула Эйлера.

На этот раз по сравнению с требуемым выражением (9.110) не хватает коэффициента 1/2, поэтому введем его в явном виде:

$$\overline{E_c H_c^*} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} E_0 H_0. \quad (9.113)$$

Полученное выражение точно совпадает с (9.110). Поэтому заключаем, что для определения вектора Пойнтинга при экспоненциальном решении надо пользоваться формулой

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \overline{[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_c \times \mathbf{H}_c^*], \quad (9.114)$$

которая по общей структуре совпадает с традиционно принятым выражением [144], [145, стр. 9, форм. (1.16), стр. 23, форм. (6.07)].

Заметим, что приведенный здесь вывод выражения (9.114) является схематичным и дает лишь общую иллюстрацию получения формулы для вектора Пойнтинга в случае комплексных переменных. Более точное выражение имеет вид:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \overline{[\mathbf{E}_c \times \mathbf{H}_c^*]}, \quad (9.115)$$

подробный вывод которого приведен в [144], [145, стр. 20, форм. (5.12)].

С другой стороны, поскольку при выводе выражения (9.114) полагалось, что в решении уравнения (8.14) мнимость присутствует только в показателях экспонент, использование этого выражения в таких случаях является вполне оправданным.

Тем не менее, как будет показано далее, конкретные значения амплитуд, полученных из задачи о прохождении волн через многослойные структуры, могут быть выражены через импедансы или волновые числа соответствующих сред, которые в общем случае могут содержать мнимые составляющие. Поэтому в таких задачах предпочтительной является формула (9.115), учитывающая комплексный характер коэффициентов при экспонентах.

### 9.5. Общие свойства плотности потока энергии распространяющихся волн

Основным предметом настоящей работы является рассмотрение отражения и прохождения волн через многослойные структуры, где главную роль играет перераспределение плотностей потоков энергии волн на границах раздела сред. Поэтому кратко рассмотрим некоторые общие свойства плотности потока энергии, для чего еще раз приведем полученные выражения для волны в струне и электромагнитной волны, выраженные через волновое число и импеданс.

**ВОЛНА В СТРУНЕ:**

средняя плотность потока энергии

$$\langle S_s \rangle = \frac{1}{2} T \omega k u_0^2. \quad (9.116)$$

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ВОЛНА:**

средняя плотность потока энергии, выраженная через электрическое поле,

$$\langle S_e \rangle = \frac{1}{2\omega\mu\epsilon_0} k E_0^2, \quad (9.117)$$

средняя плотность потока энергии, выраженная через магнитное поле,

$$\langle S_h \rangle = \frac{1}{2\omega\epsilon\epsilon_0} k H_0^2. \quad (9.118)$$

Из сравнения приведенных выражений можно видеть, что в этих случаях средняя плотность потока энергии пропорциональна произведению квадрата амплитуды волны на ее волновое число.

При прохождении волны из одной среды в другую параметры сред могут меняться. При этом коэффициент пропорциональности между  $\langle S_{s,e,h} \rangle$  и  $kA_0^2$  (где  $A_0 = u_0, E_0, H_0$ ) сохраняется постоянным в тех случаях, когда натяжение струны  $T$  или одна из проницаемостей среды  $\epsilon$  или  $\mu$  не меняются. Натяжение  $T$  сохраняется в струне с постоянным поперечным сечением (но с меняющейся плотностью), проницаемость  $\mu$  сохраняется в оптическом диапазоне, где она равна единице, проницаемость  $\epsilon$  сохраняется при распространении волны СВЧ в среде из феррита, где главную роль играет ферромагнитный резонанс. В этих случаях можно нормировать амплитуды распространяющихся волн на упомянутый коэффициент пропорциональности и считать, что плотность потока энергии такой нормированной волны просто равна произведению квадрата амплитуды на ее волновое число.

В этом случае коэффициент прохождения волны через границу раздела будут определяться отношением волновых чисел соседствующих сред.

В случае струны с переменным поперечным сечением ее натяжение в различных участках меняется. При этом коэффициент прохождения будет определяться не только отношением волновых чисел, но и отношением натяжений соответствующих участков струны.

В случае электродинамических сред, обе проницаемости в которых меняются, коэффициент прохождения также будет определяться не только отношением волновых чисел, но и отношением меняющихся проницаемостей. В этом случае удобно использовать выражения плотности потока энергии через импеданс:

$$\langle S_e \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{Z} E_0^2, \quad (9.119)$$

$$\langle S_h \rangle = \frac{1}{2} Z H_0^2. \quad (9.120)$$

При этом коэффициент прохождения будет определяться отношением единственных параметров — импедансов, которые здесь будут играть роль, аналогичную роли волновых чисел в случае неизменных проницаемостей.

Переход от выражений одного типа (через волновые числа) к выражениям другого (через импедансы) можно осуществить с помощью замен параметров, приведенных в работах [75], [57, стр. 77–79], [58, стр. 87–90], а также [1, стр. 153–154].

### 9.5.1. Замечание о размерности

Рассмотрим размерность приведенных величин в системе СИ.

Объемная плотность энергии волны, согласно определению, представляет собой количество энергии в единице объема.

Очевидно, что размерность величин  $w_E$ ,  $w_H$ ,  $w_S$ ,  $\overline{w_S}$  — одна и та же. Например, для  $\overline{w_S}$  она равна:

$$[\overline{w_S}] = \left[ \frac{M}{LT^2} \right] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}, \quad (9.121)$$

где  $L$  — единица длины,  $M$  — единица массы,  $T$  — единица времени.

Размерности общих величин, входящих в (9.36)–(9.46) и последующие выражения, равны:

$$[\varepsilon_0] = \frac{T^4 I^2}{L^3 M}; \quad (9.122)$$

$$[\mu_0] = \frac{LM}{T^2 I^2}; \quad (9.123)$$

$$[E] = \frac{LM}{T^3 I}; \quad (9.124)$$

$$[H] = \frac{I}{L}; \quad (9.125)$$

$$[Z] = \frac{L^2 M}{T^3 I^2}. \quad (9.126)$$

Размерности общих характеристик волны:

$$[\nu] = \frac{L}{T} = \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad (9.127)$$

$$[k] = \frac{1}{L} = \frac{1}{\text{м}}; \quad (9.128)$$

$$[\omega] = \frac{1}{T} = \frac{1}{\text{с}}. \quad (9.129)$$

Размерность потока энергии (9.7) равна:

$$[W_S] = \left[ \frac{ML^2}{T^3} \right] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}. \quad (9.130)$$

Размерность плотности потока энергии (9.67) равна:

$$[S] = \left[ \frac{M}{T^3} \right] = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}. \quad (9.131)$$

Размерность вектора Пойнтинга (9.80) — та же, что и размерность плотности потока энергии:

$$[\mathbf{S}] = \left[ \frac{M}{T^3} \right] = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}. \quad (9.132)$$

То же относится к усредненным по времени величинам.

## 9.6. Общие правила работы с потоками энергии электромагнитной волны

В классике поток энергии электромагнитной волны определяется вектором Пойнтинга, который в системе СИ имеет вид:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]. \quad (9.133)$$

В классике о происхождении полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  ничего не говорится, то есть они полагаются совершенно взаимно независимыми. При этом иногда считается, что даже в случае скрещенных постоянных электрического и магнитного полей поток энергии имеется. Так, в [135, стр. 367] рассмотрен случай помещенного в магнитное поле цилиндрического конденсатора с центральным проводником, электрическое поле в котором направлено по радиусам цилиндра от центрального проводника к стенкам цилиндра, а магнитное поле направлено вдоль оси цилиндра, то есть вдоль центрального проводника. При этом утверждается, что при обоих постоянных полях в конденсаторе существует поток энергии, направленный по кольцу вокруг центрального проводника. В то же время очевидно, что в этом случае энергия никуда не перемещается, а все остается статичным, то есть какой-либо поток энергии полностью отсутствует. С другой стороны, в [137, стр. 53–55] говорится, что в случае статических полей производная по времени от плотности энергии поля «теряет смысл» [137, стр. 53, 55, форм. (12.4)], однако какое-либо указание на то, как надо работать со статическими полями, отсутствует. Таким образом, можно полагать, что применение вектора Пойнтинга к случаю статических полей приводит к физически некорректному результату.

Теперь представим другой случай. Допустим, в пространстве распространяется электромагнитная волна. Создадим в ограниченной области пространства на пути этой волны область с постоянным магнитным полем, ориентированным так, чтобы оно было перпендикулярно электрическому полю распространяющейся волны. При этом, согласно классике, до области с постоянным магнитным полем и после нее поток энергии определяется полями волны, входящими в вектор Пойнтинга, причем как до прохождения области, так и после нее поток имеет одну и ту же конечную величину. Но внутри области, за счет постоянного магнитного поля, добавляющегося к магнитному полю волны, поток увеличивается, то есть внутри области при неизменной скорости волны количество энергии в единице объема больше, чем вне нее. Полагая количество энергии до входа волны в область равным количеству энергии после ее выхода, можно сделать вывод, что внутри области, где энергии больше, она возникает из ничего, что противоречит закону ее сохранения.

Также в области пересечения двух волновых пучков, поля которых складываются, поток энергии внутри области пересечения становится больше суммарного потока каждой из волн в отдельности до их пересечения. Это следует из того, что квадрат суммы двух чисел больше суммы квадратов тех же чисел на удвоенное произведение первого числа

на второе. То есть опять на входе в область пересечения волновых пучков энергия возникает из ничего, а на выходе в ничто обращается. С другой стороны, очевидно, что в случае пересечения, например, двух световых лучей эти лучи никак не взаимодействуют (по крайней мере, в линейной среде), то есть один луч проходит через другой насквозь никак не меняясь и не приобретая никакой дополнительной энергии.

Таким образом, можно видеть, что прямолинейное использование классического определения вектора Пойнтинга в ряде случаев может приводить к некорректным результатам.

Отметим единое свойство всех приведенных примеров. Во всех этих случаях складываемые поля происходят от независимых источников. Так, в случае пересечения постоянных полей каждое из них создается независимым источником, при прохождении электромагнитной волны через область с постоянным магнитным полем это постоянное поле создается также отдельным источником, с распространяющейся волной никак не связанным. При пересечении волновых пучков каждый из них создается своим собственным источником, совершенно от другого не зависящим. Таким образом, некорректность расчета потока энергии с помощью вектора Пойнтинга проявляется тогда, когда входящие в него поля получаются путем суммирования полей, создаваемых не зависящими друг от друга источниками.

Вспомним теперь, что классический вывод выражения для вектора Пойнтинга основан на суммировании двух уравнений Максвелла, входящих в единую систему для взаимно обусловленных электрического и магнитного полей. Поэтому можно полагать, что его использование для вычисления потока энергии правомерно только для тех полей, которые укладываются именно в ту систему уравнений Максвелла, из которой он выведен. С другой стороны, одно из уравнений Максвелла говорит о том, что переменное магнитное поле создает переменное электрическое, а второе уравнение из этого электрического поля производит магнитное поле, которое входит в первое уравнение. При этом система уравнений является единой и описывает взаимное превращение связанных между собой электрического и магнитного полей друг в друга. При этом происхождение обоих полей едино, то есть если имеется какое-то переменное магнитное поле, то оно создает соответствующее электрическое поле, с исходным магнитным полем неразрывно связанное и полностью им определяемое. То же можно сказать и об электрическом поле по отношению к магнитному. Таким образом, уравнения Максвелла описывают единую систему электрического и магнитного полей, полностью взаимно обусловленных и переходящих друг в друга.

Такая неразрывная связь проявляется в существовании электромагнитной волны, для которой поток энергии определяется вектором Пойнтинга.

Все остальные поля, не входящие в те, которые дают такую волну, в вектор Пойнтинга и в поток энергии или совсем не входят, как, например, постоянные, или образуют другие независимые потоки энергии, как в случае пересечения волновых пучков.

Поэтому прежде чем использовать для вычисления потока энергии вектор Пойнтинга, надо установить, принадлежат ли имеющиеся налицо магнитные и электрические поля к одной и той же электромагнитной волне. Если имеются поля, не принадлежащие ни к какой электромагнитной волне, то их не надо учитывать совсем, а если имеются поля, принадлежащие к другой волне, то их надо учитывать независимо от первых с помощью другого вектора Пойнтинга.

### 9.6.1. Некоторые дополнительные замечания

В случае анизотропной среды диэлектрическая и магнитная проницаемости уже не являются скалярами, а носят тензорный характер. При этом направление распространения энергии волны совпадает с направлением групповой скорости, в общем случае отличающимся от направления фазовой скорости. Более подробно этот вопрос рассмотрен в [116, 181].

Еще большим разнообразием отличается случай распространения электромагнитных волн в магнитных средах, обладающих гиромангнитными свойствами. При этом различие направлений векторов фазовой и групповой скоростей становится столь большим [48, 182], что поток энергии может уже не сохранять свое единство, а подразделяться на несколько парциальных потоков, имеющих не только свои скорости, но даже и направления распространения. Некоторым особенностям такого распространения посвящена работа [183], однако проведенное там рассмотрение все же нельзя считать достаточно полным, так как рассмотрены только специфические, определяемые геометрией структуры направления распространения волн, в общем же случае трудности аналитического решения значительно возрастают, так что эти вопросы еще ожидают своего исследователя.

Особенным разнообразием отличаются потоки энергии в метаматериалах — композитных средах, составленных из искусственно набранных элементов микроскопического размера. В таких материалах, особенно при реализации отрицательных диэлектрической и магнитной проницаемостей, направления фазовой и групповой скоростей могут различаться на любые углы вплоть до их антипараллельной ориентации. Впервые уникальные свойства волн в подобных средах еще с позиций эфира были отмечены в книге Шустера [39, стр. 331, рис. 186], некоторые новые вопросы обсуждались в работе [40], а после первой успешной реализации в эксперименте [45], последовала лавина публикаций на эту тему, частично обобщенных в работах [41, 49, 151, 153].

## Выводы по главе 9

Данная глава посвящена описанию общих энергетических характеристик распространяющихся волн. Приведены определения плотности и потока энергии волны, вектора Умова–Пойнтинга, даны общие рекомендации для работы с потоками энергии.



Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему:

1. Рассмотрены общие определения энергетических характеристик распространяющейся волны, таких как объемная плотность энергии, поток энергии и плотность потока энергии. Отмечена дифференциальная природа таких определений, приведены условия перехода к интегральным характеристикам, в том числе при усреднении по времени и пространству. Приведены единицы измерения этих величин и их размерность в системах СИ и СГС.

2. Для волны произвольной природы приведена схема получения и общее определение вектора Умова–Пойнтинга как вектора, численно равного плотности потока энергии волны и направленного в сторону распространения волны. Отмечено, что в частотном случае электромагнитной волны этот вектор носит название вектора Пойнтинга. Приведены единицы измерения этих величин и их размерность в системах СИ и СГС.

3. Рассмотрены энергетические характеристики волны в струне. Приведена удельная плотность энергии колебаний струны как сумма потенциальной и кинетической энергии единичного элемента длины струны. Получены два эквивалентных выражения для усредненной по периоду плотности энергии струны, переходящих друг в друга при учете связи между фазовой скоростью, частотой колебаний, натяжением и плотностью материала струны. Отмечена пропорциональность плотности энергии струны квадрату частоты или квадрату волнового числа волны. Получено усредненное по периоду выражение для плотности потока энергии струны. Показано, что в случае пропорциональности плотности энергии квадрату волнового числа плотность потока энергии пропорциональна произведению квадрата амплитуды волны на ее волновое число.

4. Рассмотрены энергетические характеристики электромагнитной волны. На основе решения волновых уравнений для электрического и магнитного полей волны получены соотношения, связывающие волновое число и фазовую скорость волны с параметрами среды, в которой эта волна распространяется. Показано, что электрическое поле волны прямо пропорционально магнитному, причем коэффициент пропорциональности является импеданс среды. Получена объемная плотность энергии волны, равная сумме объемных плотностей энергии составляющих ее полей. Отмечена возможность выражения полной объемной плотности энергии волны через какое-то одно поле — электрическое или магнитное, причем в этом случае плотность энергии пропорциональна произведению квадрата амплитуды того или иного поля на соответствующую этому полю проницаемость среды. Получена усредненная по времени объемная плотность энергии волны, пропорциональная произведению квадрата амплитуды волны на волновое число.

5. Получен поток энергии электромагнитной волны через заданную площадку. Показано, что усредненный по времени поток энергии волны

через заданную площадку пропорционален произведению квадрата амплитуды волны на волновое число и на площадь площадки. Получена плотность потока энергии волны как поток энергии волны через площадку единичной площади. Показано, что определенная таким образом плотность потока энергии волны пропорциональна произведению квадрата того или иного поля волны на соответствующую проницаемость и фазовую скорость волны. Показано, что усредненная по времени плотность потока энергии волны равна половине от произведения квадрата амплитуды магнитного поля волны на импеданс среды или половине частного от деления квадрата амплитуды электрического поля на импеданс среды.

6. Приведено определение вектора Пойнтинга для электромагнитной волны как вектора, направление которого совпадает с направлением переноса энергии, а длина равна численному значению плотности потока энергии волны, то есть количеству энергии, переносимому через единичную площадку в единицу времени. Отмечено, что математическое определение вектора Пойнтинга равно векторному произведению электрического поля волны на магнитное. Приведена общая схема получения выражения для вектора Пойнтинга на основе классических уравнений электродинамики для ротора электрического и магнитного полей. Отмечено, что изменение полной энергии поля в замкнутом объеме равно полному потоку вектора Пойнтинга через поверхность, окружающую этот объем. Показано, что определение вектора Пойнтинга для электромагнитной волны совпадает с общим определением плотности потока энергии для волны произвольного характера. Получено выражение для вектора Пойнтинга при экспоненциальном решении общих уравнений электродинамики, в том числе для среды, обладающей проводимостью. Отмечена необходимость учета в этом случае комплексно сопряженного выражения для магнитного поля.

7. На примере волны в струне и электромагнитной волны рассмотрены общие свойства потока энергии распространяющейся волны. Отмечено, что в обоих случаях средняя плотность потока энергии пропорциональна произведению квадрата амплитуды волны на ее волновое число. Рассмотрены особенности потока энергии волны при переходе через границу, разделяющую среды с различными параметрами, в первую очередь коэффициент прохождения волны. Отмечено, что в случае струны с переменным поперечным сечением коэффициент прохождения определяется как отношением волновых чисел распространяющихся волн, так и отношением натяжений соответствующих участков струны. В случае электродинамических сред, обе проницаемости в которых меняются, коэффициент прохождения определяется как отношением волновых чисел, так и отношением меняющихся проницаемостей или импедансов сред.

8. Приведена сводка единиц измерения энергетических параметров распространяющихся волн, а также размерности таких параметров, выраженные через единицы длины, массы и времени.

9. Приведены общие правила работы с потоками энергии электромагнитной волны. Рассмотрена степень корректности использова-

ния математического выражения для вектора Пойнтинга, включающего векторное произведение эклектического и магнитного поля. Отмечена неприменимость этого выражения в случае статических полей от разных источников. Установлено, что применение математического выражения для вектора Пойнтинга корректно только для случая электрического и магнитного полей, взаимно связанных между собой через единые общие уравнения электродинамики, то есть только в том случае, когда магнитное поле создает электрическое, а электрическое создает магнитное, то есть источник обоих полей является единым. Отмечено, что в случае нескольких источников следует использовать вектор Пойнтинга для каждого источника по отдельности.

10. В качестве особых случаев использования понятия потока энергии, требующих отдельного рассмотрения, упомянуто распространение электромагнитных волн в анизотропных, магнитогириротропных и композиционных средах, где направления векторов фазовой и групповой скоростей могут различаться на значительные углы вплоть до полностью противоположного.

## Глава 10

### **ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД С КОМПЛЕКСНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Глава посвящена рассмотрению методов работы со средами, обладающими комплексными параметрами со сравнимыми величинами действительной и мнимой частей и призвана дать некоторые рекомендации для корректного вычисления энергетических параметров отражения, прохождения и поглощения волн, а также баланса энергии на границах раздела сред. В качестве наиболее простого примера выбрано распространение плоских одномерных волн, то есть таких, параметры которых зависят только от одной координаты, перпендикулярной направлению распространения. Рассмотрено падение волны на одну и две границы раздела сред с произвольными комплексными параметрами. Показано, что традиционные способы вычисления энергетических параметров, таких как «отражательная», «пропускательная» и «поглощательная» способности [4, стр. 66–67, форм. (27)], приводят к корректным результатам только при действительных волновых числах всех сред. Рассмотрен баланс энергии одномерной волны на одной и двух границах раздела сред и выявлен его комплексный характер. Введены определения и рассмотрены свойства комплексных энергетических параметров одномерной волны: коэффициентов отражения, прохождения, локализации, реактивности и поглощения.

В главе частично использованы материалы монографии [64], а также статей [72, 74, 78]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

#### **10.1. Общий обзор работ по энергетическим характеристикам волн в многослойных структурах**

Внимание исследователей к задачам распространения волн через одну или несколько следующих друг за другом границ раздела сред, привлечено издавна. Достаточно упомянуть, например, геометрические законы отражения и преломления, известные еще в средние века, правила распределения интенсивностей отраженной и проходящей волны, открытые в 19 веке, закономерности распространения волн в слоистых средах, нашедшие всестороннее объяснение в 20 веке [3–7]. В большинстве решенных задач рассматривались электромагнитные и акустические

волны, законы распространения которых в различных средах имеют много общего [5]. В оптике весьма подробно были исследованы два вида сред — диэлектрики, у которых проводимость полностью отсутствует, и металлы, проводимость которых весьма велика [6, 7]. В диапазоне СВЧ, наряду с диэлектриками, значительное внимание до сих пор уделяется гиротропным средам — ферритам, которые по существу представляют собой также диэлектрики, гиротропные свойства которых проявляют резонансный характер [16–20, 184]. В последнее время расширяются работы по фотонным, фононным и магнонным кристаллам, близким к диэлектрикам с сильно выраженными резонансными свойствами, к биизотропным, бианизотропным и киральным диэлектрическим средам [109], в том числе посвященные распространению обратных волн [40, 43]. Особую группу сред составляют тонкие (наноразмерные) металлические пленки, проводимость которых меняется в зависимости от толщины за счет явления перколяции [50–53].

В большинстве работ в случае диэлектриков рассматриваются среды без потерь, в которых волны распространяются без затухания. Для металлов, наоборот, потери настолько велики, что волны затухают практически полностью на расстояниях меньших длины волны. Традиционным способом описания потерь и затухания волн является ведение комплексных параметров среды. Для электромагнитных волн основной механизм затухания — проводимость, которую можно рассматривать как мнимую добавку к действительной диэлектрической проницаемости, в результате чего проницаемость становится комплексной. При этом для диэлектриков проницаемость является действительной, а для металлов — мнимой. Общий случай расчета при комплексных параметрах, действительная и мнимая часть которых составляют величины одного порядка, приводит к довольно громоздким вычислениям [7].

В подавляющем большинстве решенных задач волна падает на слоистую структуру из свободного пространства и выходит из структуры также в свободное пространство. В рассмотрение вводятся два понятия [4–7]:

1) коэффициенты отражения и прохождения по амплитуде, равные отношению амплитуды отраженной и проходящей волн к амплитуде падающей;

2) отражательная, пропускательная и поглощательная способности, равные отношению потоков энергии отраженной, проходящей и поглощаемой волн к потоку энергии падающей волны, являющиеся по существу коэффициентами отражения, прохождения и поглощения по энергиям.

При этом сумма отражательной, пропускательной и поглощательной способностей полагается равной единице, что является проявлением закона сохранения энергии.

Хотя большинство исследований относится к распространению электромагнитных волн в диэлектриках или металлах, где действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости различаются на несколько порядков, в природе существует множество веществ, прово-

димость которых сравнима с диэлектрической проницаемостью. К таким материалам относятся в первую очередь разнообразные полупроводники, полуметаллы, некоторые ферриты, различные композиционные среды, в том числе состоящие из дискретных проводящих элементов, и другие. Кроме того структура, на которую падает электромагнитная волна, может находиться в среде с не очень большой конечной проводимостью, каковой является, например, газоразрядная плазма, морская вода, насыщенный влагой воздух, влажная почва, некоторые строительные материалы и многое другое. Частичное поглощение волны в такой среде также описывается комплексными параметрами, причем коэффициенты отражения и прохождения волны определяются не только параметрами структуры, но и параметрами окружающей среды.

В то же время общий случай падения волны из поглощающей среды с комплексными параметрами (например, с небольшой проводимостью) на слоистую структуру, обладающую комплексными параметрами, а также выход волны из структуры в подобную среду, рассматривались недостаточно.

Традиционным способом решения подобных задач является использование метода комплексных амплитуд [142]. Однако корректное его применение допустимо только в случае линейных операций, каковыми для комплексных чисел являются сложение, вычитание, умножение и деление на действительное число, дифференцирование и интегрирование по действительной переменной. При вычислении же потоков энергии волны используется нелинейная операция — возведение комплексной амплитуды в квадрат с дальнейшим умножением на волновое число, которое также может быть комплексным. Традиционная рекомендация работать только с действительными частями комплексных амплитуд приводит к неоправданно громоздким вычислениям. В электротехнике аналогичный вопрос, состоящий в вычислении мощности, решается путем введения активной и реактивной составляющих, что приводит к произведению квадрата модуля амплитуды на определенный фазовый множитель [142]. В электродинамике при вычислении энергии поля рекомендуется использовать произведение амплитуды поля на комплексно-сопряженную величину, что также дает квадрат модуля [116]. Именно такой вид используется обычно в качестве определений отражательной и пропускательной способностей [4, 5], однако вопрос о характере входящего в определение пропускательной способности отношения волновых чисел остается без должного внимания.

Настоящая глава посвящена рассмотрению методов работы со средами, обладающими комплексными параметрами со сравнимыми величинами действительной и мнимой частей и призвана дать некоторые рекомендации для корректного вычисления энергетических параметров отражения, прохождения и поглощения, а также баланса энергии волн на границах раздела сред. В качестве наиболее простого примера выбрано распространение плоских одномерных волн, то есть таких,

параметры которых зависят только от одной координаты, перпендикулярной направлению распространения. Полученные результаты известными способами [5] могут быть обобщены на случаи распространения электромагнитных, акустических и других волн в изотропных средах.

Глава состоит из трех основных частей.

В первой части на наиболее общем примере одномерного волнового уравнения рассмотрено падение волны на одну и две границы раздела сред с произвольными комплексными параметрами. Рассмотрены традиционные способы вычисления энергетических параметров и выявлены их ограничения.

Во второй части рассмотрен баланс энергии одномерной волны на одной и двух границах раздела сред и выявлен его комплексный характер.

В третьей для случая произвольных точек входа и выхода волны относительно структуры введены определения и рассмотрены свойства комплексных энергетических параметров одномерной волны.

## 10.2. Энергетические параметры — традиционные формы определения

Рассмотрим сначала традиционные способы вычисления энергетических параметров распространения волны.

### 10.2.1. Одна граница раздела сред

В качестве первого примера возьмем падение одномерной волны на плоскую границу раздела двух сред из произвольной точки пространства. Геометрия задачи показана на рис. 10.1.

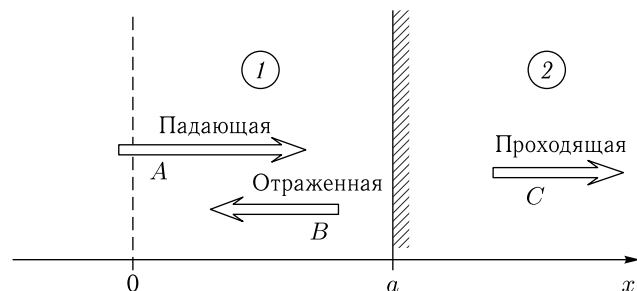


Рис. 10.1. Геометрия задачи для двух сред с одной границей раздела

Уравнение для одномерной волны в среде с затуханием имеет вид:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial G}{\partial t} - v^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0, \quad (10.1)$$

где  $\beta \geq 0$  — параметр затухания, а  $v$  имеет физический смысл фазовой скорости волны в отсутствие затухания.

Здесь и везде далее будем рассматривать режим распространения волны, спадающей в пространстве, но стационарный во времени, когда временной множитель имеет вид:  $e^{i\omega t}$ , где частота  $\omega$  — постоянная заданная извне действительная величина.

Координатная часть решения уравнения (10.1) имеет вид:

$$G = C_1 e^{-ikx} + C_2 e^{ikx}, \quad (10.2)$$

где  $k$  — волновое число, равное

$$k = \eta - i\xi, \quad (10.3)$$

причем  $\eta$  и  $\xi$  — действительные величины:

$$\eta = \frac{\omega}{v} \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\omega^2}} \right)}, \quad (10.4)$$

$$\xi = \frac{\omega}{v} \sqrt{\frac{1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\omega^2}} \right)}. \quad (10.5)$$

Из (10.4) и (10.5) видно, что  $\eta > 0$ ,  $\xi \geq 0$ .

При действительном  $k > 0$  первое слагаемое выражения (10.2) соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении оси  $Ox$ , а второе — в отрицательном. В обоих случаях амплитуда волны по мере распространения убывает.

Рассмотрим теперь волны в средах 1 и 2 по обе стороны от границы раздела, соответствующей  $x = a$ .

Для того чтобы подчеркнуть комплексный характер обоих волновых чисел, введем для них обозначения:

$$q_1 = \eta_1 - i\xi_1; \quad (10.6)$$

$$q_2 = \eta_2 - i\xi_2, \quad (10.7)$$

где индексы «1» и «2» соответствуют средам 1 и 2.

Суммарное волновое решение в средах 1 и 2 принимает вид:

$$U_1 = A e^{-iq_1 x} + B e^{iq_1 x}; \quad (10.8)$$

$$U_2 = C e^{-iq_2 x}, \quad (10.9)$$

где  $A$  — амплитуда падающей,  $B$  — амплитуда отраженной и  $C$  — амплитуда проходящей волны.

Граничные условия при  $x = a$  имеют вид:

$$U_1|_{x=a} = U_2|_{x=a}, \quad (10.10)$$

$$\frac{dU_1}{dx}|_{x=a} = \frac{dU_2}{dx}|_{x=a}. \quad (10.11)$$

Подставляя (10.8)–(10.9) в (10.10)–(10.11) и решая полученную систему уравнений, находим амплитуды волн  $B$  и  $C$  в виде:

$$B = A \frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2} e^{-2iq_1 a}; \quad (10.12)$$

$$C = A \frac{2q_1}{q_1 + q_2} e^{-2i(q_1 - q_2)a}. \quad (10.13)$$

Координатные составляющие падающей, отраженной и проходящей волн принимают вид:

падающая

$$U_i = A e^{-iq_1 x}; \quad (10.14)$$

отраженная

$$U_r = A \frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2} e^{-2iq_1 a} e^{iq_1 x}; \quad (10.15)$$

проходящая

$$U_t = A \frac{2q_1}{q_1 + q_2} e^{-i(q_1 - q_2)a} e^{-iq_2 x}. \quad (10.16)$$

Коэффициенты отражения и прохождения по амплитуде равны отношениям амплитуд соответствующих волн к амплитуде падающей волны:

$$R_a = \frac{U_r}{U_i} \Big|_{x=a} = \frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2}; \quad (10.17)$$

$$T_a = \frac{U_t}{U_i} \Big|_{x=a} = \frac{2q_1}{q_1 + q_2}. \quad (10.18)$$

Из (10.17) и (10.18) видно, что  $R_a$  и  $T_a$  от координаты границы  $a$  не зависят и совпадают с аналогичными коэффициентами, получаемыми при решении задачи с началом координат в точке  $x = a$  (то есть при  $a = 0$ ). Форма выражений (10.17) и (10.18) совпадает с хорошо известными действительными коэффициентами отражения и прохождения при действительных волновых числах [4, 5].

При комплексных  $q_1$  и  $q_2$  величины  $R_a$  и  $T_a$  являются комплексными:

$$R_a = \frac{(\eta_1^2 - \eta_2^2) + (\xi_1^2 - \xi_2^2)}{(\eta_1 + \eta_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2} + i \frac{2(\eta_1 \xi_2 - \eta_2 \xi_1)}{(\eta_1 + \eta_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}; \quad (10.19)$$

$$T_a = \frac{2[\eta_1(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \xi_1(\xi_1^2 + \xi_2^2)]}{(\eta_1 + \eta_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2} + i \frac{2(\eta_1 \xi_2 - \eta_2 \xi_1)}{(\eta_1 + \eta_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}. \quad (10.20)$$

Рассмотрим теперь определение энергетических параметров волны при ее падении на границу раздела.

Согласно [4, стр. 66–67, форм. (27)] энергетическими параметрами волны являются отражательная и пропускательная способности, равные отношениям потоков энергии отраженной и проходящей волн к потоку энергии падающей волны. С учетом того, что поток энергии одномерной волны (с точностью до частоты, единой для всех волн структуры в целом, поэтому во всех дробях сокращающейся) равен

произведению квадрата ее амплитуды на волновое число [1, стр. 39–46, форм. (1.187), (1.201)–(1.203)], отражательная и пропускательная способности имеют вид:

$$R_e = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = |R_a|^2; \quad (10.21)$$

$$T_e = \left| \frac{C}{A} \right|^2 \frac{k_2}{k_1} = |T_a|^2 \frac{k_2}{k_1}. \quad (10.22)$$

При этом закон сохранения энергии в предположении бесконечно тонкой границы требует выполнения соотношения баланса [1, стр. 44, форм. (1.210)]:

$$R_e + T_e = 1. \quad (10.23)$$

Естественно предположить, что в случае комплексных волновых чисел действительные величины  $k_{1,2}$  в формулах (10.21) и (10.22) должны быть заменены на комплексные  $q_{1,2}$ . При этом из (10.22) видно, что величина  $T_e$  становится также комплексной, что противоречит предполагаемому действительному характеру пропускательной способности. Однако в [4, 53] на это противоречие должного внимания не обращено и какие-либо рекомендации по его преодолению отсутствуют. Классическая рекомендация использовать вместо квадрата амплитуды произведение амплитуды на комплексно сопряженную величину [116] здесь приводит к соотношениям:

$$R_{en} = \left| \frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2} \right|^2; \quad (10.24)$$

$$T_{en} = \left| \frac{2q_1}{q_1 + q_2} \right|^2 \left| \frac{q_2}{q_1} \right|. \quad (10.25)$$

Для пропускательной способности возможны также следующие варианты:

$$T_{ep} = \left| \frac{2q_1}{q_1 + q_2} \right|^2 \frac{\operatorname{Re}(q_2)}{\operatorname{Re}(q_1)}; \quad (10.26)$$

$$T_{em} = \left| \frac{2q_1}{q_1 + q_2} \right|^2 \operatorname{Re} \left( \frac{q_2}{q_1} \right). \quad (10.27)$$

С другой стороны, если предположить, что отражательная и пропускательная способности могут быть комплексными, то получаем:

$$R_{ec} = \left( \frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2} \right)^2; \quad (10.28)$$

$$T_{ec} = \left( \frac{2q_1}{q_1 + q_2} \right)^2 \frac{q_2}{q_1}. \quad (10.29)$$

При этом чтобы при комплексных волновых числах отражательная и пропускательная способности были действительными, можно взять действительные части от (10.28)–(10.29), то есть ввести определение:

$$R_e = \text{Re} \left[ \left( \frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2} \right)^2 \right]; \quad (10.30)$$

$$T_e = \text{Re} \left[ \left( \frac{2q_1}{q_1 + q_2} \right)^2 \frac{q_2}{q_1} \right]. \quad (10.31)$$

Рассмотрим теперь, как соотносятся введенные определения (10.24)–(10.31) с законом сохранения энергии, который требует, чтобы сумма отражательной и пропускательной способностей была равна действительной единице. В качестве иллюстрации рассмотрим таблицу, где приведены упомянутые величины, рассчитанные при различных комплексных волновых числах (размерность волновых чисел здесь и далее для простоты опущена).

Таблица. Энергетические коэффициенты при различном задании рабочих формул

| № | 1                 | 2              | 3               | 4               | 5               |
|---|-------------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1 | $q_1$             | $1 - 0,00i$    | $1 - 1,00i$     | $1 - 0,00i$     | $1 - 1,00i$     |
| 2 | $q_2$             | $4 - 0,00i$    | $4 - 0,00i$     | $4,00 - 1,00i$  | $4,00 - 1,00i$  |
| 3 | $B$               | $-0,60 + 0,0i$ | $-0,54 - 0,31i$ | $-0,62 + 0,08i$ | $-0,52 - 0,21i$ |
| 4 | $C$               | $0,40 + 0,00i$ | $0,46 - 0,31i$  | $0,38 + 0,08i$  | $0,48 - 0,21i$  |
| 5 | $R_{en} + T_{en}$ | 1,00           | 1,25            | 1,02            | 1,11            |
| 6 | $R_{ep} + T_{ep}$ | 1,00           | 1,61            | 1,00            | 1,41            |
| 7 | $R_{em} + T_{em}$ | 1,00           | 1,00            | 1,00            | 1,00            |
| 8 | $R_{ec} + T_{ec}$ | $1,00 + 0,00i$ | $1,00 + 0,00i$  | $1,00 + 0,00i$  | $1,00 + 0,00i$  |

В первом столбце таблицы приведены обозначения входящих в нее величин. В 1 и 2 строках приведены используемые в расчетах комплексные волновые числа  $q_1$  и  $q_2$ , причем столбец 2 соответствует обоим  $q_1$  и  $q_2$  действительным, в столбце 3 —  $q_1$  — комплексное,  $q_2$  — действительное, в столбце 4 —  $q_1$  — действительное,  $q_2$  — комплексное, в столбце 5 — оба  $q_1$  и  $q_2$  — комплексные. В 3 и 4 строках приведены амплитуды отраженной и проходящей волн  $B$  и  $C$  рассчитанные по формулам (10.12) и (10.13) при  $a = 0$ . В строке 5 — сумма отражательной и пропускательной способностей  $R_{en} + T_{en}$ , рассчитанная по формулам (10.24) и (10.25). В строке 6 — сумма  $R_{ep} + T_{ep}$ , рассчитанная по формулам (10.24) и (10.26). В строке 7 — сумма  $R_{em} + T_{em}$ , рассчитанная по формулам (10.24) и (10.27). В строке 8 — сумма  $R_{ec} + T_{ec}$ , рассчитанная по формулам (10.28) и (10.29).

Из таблицы видно, что амплитуды отраженной и проходящей волн  $B$  и  $C$  являются действительными только при действительных волновых числах  $q_1$  и  $q_2$  (второй столбец). При комплексных  $q_1$  и  $q_2$  (третий–пятый

столбцы) амплитуды  $B$  и  $C$  являются комплексными, что отражает фазу соответствующих волн. Сумма отражательной и пропускательной способностей, рассчитанная по всем формулам, равна единице только при действительных волновых числах (столбец 2). При комплексных волновых числах формулы (10.25) и (10.26) (5 и 6 строки) дают превышение над единицей, что означает нарушение закона сохранения энергии. Формула (10.27) (строка 7) дает единицу, однако правомерность ее вывода не вполне ясна. Формулы (10.28) и (10.29), соответствующие комплексным выражениям для отражательной и пропускательной способностей, дают всегда действительную единицу (строка 8), что соответствует как сохранению энергии, так и ее действительному виду.

В целом из рассмотрения таблицы можно сделать вывод, что использование для вычисления пропускательной способности выражений вида (10.25) и (10.26) некорректно, выражение (10.27) допустимо, но требует корректного вывода, а выражения (10.28) и (10.29), хотя и являются комплексными, но вполне удовлетворяют закону сохранения энергии и допускают определения отражательной и пропускательной способностей в виде (10.30) и (10.31).

Таким образом, подставляя в (10.23) выражения (10.28), (10.29) с учетом (10.12), (10.13) при  $a = 0$ , а также для простоты рассмотрения полагая  $A = 1$ , можно видеть, что баланс энергии на границе (то есть при  $a = 0$ ) имеет вид:

$$B^2 + C^2 \frac{q_2}{q_1} = 1, \quad (10.32)$$

справедливый при любых комплексных  $q_1$  и  $q_2$ .

Другими словами, при комплексных волновых числах баланс энергии (10.23) корректно выполняется только в случае, когда потоки энергии пропорциональны квадратам не модулей, а комплексных амплитуд волн.

### 10.2.2. Две границы раздела сред

В качестве второго примера рассмотрим падение одномерной волны на пластину, окруженную двумя средами, причем как пластина, так и обе внешние среды могут иметь произвольные комплексные параметры. Геометрия задачи показана на рис. 10.2.

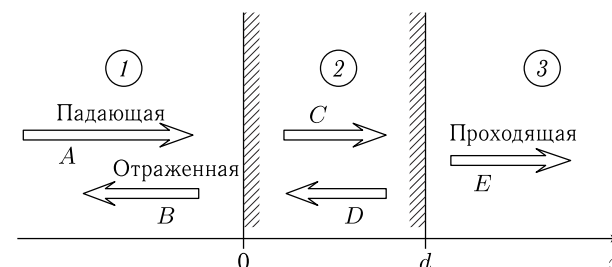


Рис. 10.2. Геометрия задачи для трех сред с двумя границами раздела

Действуя аналогично предыдущему случаю, получаем амплитуды волн  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  в виде:

$$B = A \frac{(q_1 - q_2)(q_2 + q_3)e^{iq_2d} + (q_1 + q_2)(q_2 - q_3)e^{-iq_2d}}{(q_1 + q_2)(q_2 + q_3)e^{iq_2d} + (q_1 - q_2)(q_2 - q_3)e^{-iq_2d}}; \quad (10.33)$$

$$C = A \frac{2q_1(q_2 + q_3)e^{iq_2d}}{(q_1 + q_2)(q_2 + q_3)e^{iq_2d} + (q_1 - q_2)(q_2 - q_3)e^{-iq_2d}}; \quad (10.34)$$

$$D = A \frac{2q_1(q_2 - q_3)e^{-iq_2d}}{(q_1 + q_2)(q_2 + q_3)e^{iq_2d} + (q_1 - q_2)(q_2 - q_3)e^{-iq_2d}}; \quad (10.35)$$

$$E = A \frac{4q_1q_2}{(q_1 + q_2)(q_2 + q_3)e^{iq_2d} + (q_1 - q_2)(q_2 - q_3)e^{-iq_2d}}. \quad (10.36)$$

Чтобы перейти к случаю одной границы, достаточно в формулах (10.33)–(10.36) положить  $q_3 = q_2$ . При этом получаем формулы, совпадающие с (10.12), (10.13). Для перехода к случаю одинаковых внешних сред надо положить  $q_3 = q_1$ . В этом последнем случае получаем:

$$B = A \frac{(q_1^2 - q_2^2)(e^{iq_2d} - e^{-iq_2d})}{(q_1 + q_2)^2 e^{iq_2d} - (q_1 - q_2)^2 e^{-iq_2d}}; \quad (10.37)$$

$$C = A \frac{2(q_1 + q_2)e^{iq_2d}}{(q_1 + q_2)^2 e^{iq_2d} - (q_1 - q_2)^2 e^{-iq_2d}}; \quad (10.38)$$

$$D = A \frac{-2(q_1 - q_2)e^{-iq_2d}}{(q_1 + q_2)^2 e^{iq_2d} - (q_1 - q_2)^2 e^{-iq_2d}}; \quad (10.39)$$

$$E = A \frac{4q_1q_2}{(q_1 + q_2)^2 e^{iq_2d} - (q_1 - q_2)^2 e^{-iq_2d}}; \quad (10.40)$$

Выражения (10.37) и (10.40) с точностью до замены  $q_j$  на  $k_j$ , совпадают с полученными в работе [66].

Переход к случаю отсутствия границ происходит при  $q_1 = q_2 = q_3$  и  $d = 0$ . При этом из (10.33)–(10.36) получаем:

$$B = 0; \quad C = 1; \quad D = 0; \quad E = 1, \quad (10.41)$$

что означает, что волна не отражается и полностью проходит во вторую, а затем и в третью среду.

Для вычисления энергетических параметров распространения волны в случае двух границ рассмотрим далее баланс энергии на каждой из границ и на всей структуре в целом.

### 10.3. Баланс энергии на границах раздела сред

Рассмотрим теперь баланс энергии при распространении волны через первую и вторую границы. Будем предполагать, что волновые числа во всех трех средах являются комплексными. Это означает, что поток энергии при распространении волны меняется, то есть для одной и той же волны потоки энергии на первой и второй границах различны:

на второй по ходу волны меньше, чем на первой, так как на пути между границами волна несколько затухла.

Как показано в предыдущем разделе, при комплексных волновых числах баланс энергии на одной границе (10.23) корректно выполняется только в случае, когда потоки энергии пропорциональны квадратам комплексных амплитуд волны. Поэтому будем считать поток энергии равным произведению квадрата комплексной амплитуды волны на комплексное волновое число, подобно тому, как это было принято для действительных волновых чисел [1, стр. 39–46, форм. (1.187), (1.201)–(1.203)].

#### 10.3.1. Баланс на одной границе раздела сред

Рассмотрим сначала первую границу при  $x = 0$ . На эту границу падают две волны: из области 1 с амплитудой  $A$  и из области 2 волна с амплитудой  $D$ . Выходят из нее также две волны: в область 1 с амплитудой  $B$  и в область 2 с амплитудой  $C$ . Таким образом, уравнение баланса принимает вид:

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 + \left(\frac{C}{A}\right)^2 \frac{q_2}{q_1} - \left(\frac{D}{A}\right)^2 \frac{q_2}{q_1} = 1. \quad (10.42)$$

или при  $A = 1$ :

$$B^2 + C^2 \frac{q_2}{q_1} - D^2 \frac{q_2}{q_1} = 1. \quad (10.43)$$

#### 10.3.2. Баланс на двух границах раздела сред

Рассмотрим теперь вторую границу при  $x = d$ . Здесь надо учитывать, что волна  $C$  в точке  $x = d$  имеет амплитуду

$$C_d = Ce^{-iq_2d}, \quad (10.44)$$

а волна  $D$  в той же точке имеет амплитуду

$$D_d = De^{iq_2d}. \quad (10.45)$$

При этом уравнение баланса принимает вид:

$$\left(\frac{D_d}{C_d}\right)^2 + \left(\frac{E}{C_d}\right)^2 \frac{q_3}{q_2} = 1 \quad (10.46)$$

или

$$\left[\frac{D}{C}e^{2iq_2d}\right]^2 + \left[\frac{E}{C}e^{iq_2d}\right]^2 \frac{q_3}{q_2} = 1. \quad (10.47)$$

Рассмотрим теперь баланс энергии сразу на двух границах, то есть на всей структуре в целом.

Прямое распространение (в положительном направлении оси  $Ox$ ) в среде 2 описывается волной с коэффициентом  $C$ . При этом начальная плотность энергии волны в точке  $x = 0$  равна  $C^2q_2^2$ , то есть поток энергии слева направо равен  $C^2q_2$ . Конечная плотность энергии в точке  $x = d$  равна  $C_d^2q_2^2$ , то есть поток энергии в том же направлении равен  $C_d^2q_2$ , где  $C_d$  определяется формулой (10.44). Таким образом,

за счет затухания волны  $C$  в среде 2 рассеивается (теряется) поток энергии:

$$\delta\Pi_C = C^2 q_2 - C_d^2 q_2 = C^2 q_2 [1 - e^{-2iq_2 d}]. \quad (10.48)$$

Обратное распространение в той же среде описывается волной с коэффициентом  $D$ . При этом начальная плотность энергии волны в точке  $x = d$  равна  $D_d^2 q_2^2$ , то есть поток энергии справа налево равен  $D_d^2 q_2$ , где  $D_d$  определяется формулой (10.45). Конечная плотность энергии в точке  $x = 0$  равна  $D^2 q_2^2$ , то есть поток энергии в обратном направлении равен  $D^2 q_2$ . Таким образом за счет затухания волны  $D$  в среде 2 рассеивается (теряется) поток энергии:

$$\delta\Pi_D = D_d^2 q_2 - D^2 q_2 = D^2 q_2 [e^{2iq_2 d} - 1]. \quad (10.49)$$

Баланс энергии состоит в том, что поток энергии падающей волны распределяется на три части:

- 1) поток энергии отраженной волны;
- 2) поток энергии, рассеивающейся в среде 2, равный сумме (10.48) и (10.49);
- 3) поток энергии проходящей волны.

Таким образом, получаем баланс энергии на двух границах в виде:

$$A^2 q_1 = B^2 q_1 + \delta\Pi_C + \delta\Pi_D + E^2 q_3. \quad (10.50)$$

При  $A = 1$  из (10.50) получаем:

$$B^2 + \{C^2[1 - e^{-2iq_2 d}] - D^2[1 - e^{2iq_2 d}]\} \frac{q_2}{q_1} + E^2 \frac{q_3}{q_1} = 1. \quad (10.51)$$

Прямая проверка показывает, что соотношения (10.42), (10.43), (10.46), (10.47), (10.50) и (10.51) выполняются при любых волновых числах — как действительных, так и комплексных. При этом действительные части всех выражений баланса равны единице, а мнимые — нулю. С другой стороны, использование для потоков энергии выражений с модулями типа (10.24)–(10.27) приводит к нарушению соотношений баланса.

В качестве иллюстрации на рис. 10.3 показаны зависимости суммарных потоков энергии для двух границ в целом от нормированной толщины пластины (среда 2), рассчитанные по разным формулам при комплексных волновых числах:  $q_1 = 3 - 2i$ ,  $q_2 = 7 - 0,25i$ ,  $q_3 = 12 - 2i$ .

На рис. 10.3 кривая 1 построена по формуле

$$S_{en} = |B|^2 + |E|^2 \left| \frac{q_3}{q_1} \right|; \quad (10.52)$$

кривая 2 — по формуле

$$S_{ep} = |B|^2 + |E|^2 \frac{\operatorname{Re}(q_3)}{\operatorname{Re}(q_1)}; \quad (10.53)$$

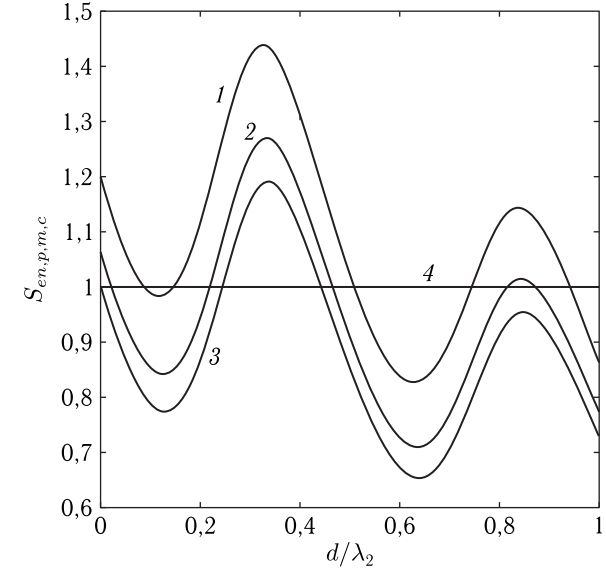


Рис. 10.3. Рассчитанные по разным формулам зависимости суммарных потоков энергии для двух границ от нормированной толщины пластины при комплексных волновых числах

кривая 3 — по формуле

$$S_{em} = |B|^2 + |E|^2 \operatorname{Re} \left( \frac{q_3}{q_1} \right); \quad (10.54)$$

кривая 4 — по формуле

$$S_{ec} = \operatorname{Re}(B^2) + \operatorname{Re} \left\{ \{C^2[1 - e^{-2iq_2 d}] - D^2[1 - e^{2iq_2 d}]\} \frac{q_2}{q_1} \right\} + \operatorname{Re} \left( E^2 \frac{q_3}{q_1} \right). \quad (10.55)$$

Из рисунка видно, что все зависимости, рассчитанные по формулам с модулями (10.52)–(10.54), осциллируют и периодически превышают единицу, что означает нарушение сохранения энергии. И только соотношение (10.55) всегда равно единице в полном соответствии с законом сохранения энергии.

Соотношение (10.55) позволяет ввести комплексные коэффициенты отражения  $R_e$ , прохождения  $T_e$  и «поглощения»  $P_e$  в виде:

$$R_e = B^2; \quad (10.56)$$

$$T_e = E^2 \frac{q_3}{q_1}; \quad (10.57)$$

$$P_e = \{C^2[1 - e^{-2iq_2 d}] - D^2[1 - e^{2iq_2 d}]\} \frac{q_2}{q_1}, \quad (10.58)$$



а выражение (10.55) принимает вид:

$$R_e + T_e + P_e = 1. \quad (10.59)$$

Также выполняются соотношения:

$$\operatorname{Re}(R_e) + \operatorname{Re}(T_e) + \operatorname{Re}(P_e) = 1; \quad (10.60)$$

$$\operatorname{Im}(R_e) + \operatorname{Im}(T_e) + \operatorname{Im}(P_e) = 1. \quad (10.61)$$

**Замечание.** Соотношение (10.60) является прямым следствием соотношения (10.55), а в справедливости соотношений (10.59) и (10.61) любознательный читатель может убедиться самостоятельно с использованием соотношений (10.37)–(10.40).

Введенный формулой (10.58) комплексный коэффициент  $P_e$ , хотя и обеспечивает выполнение соотношений баланса (10.59)–(10.61), однако не полностью отвечает физическому смыслу поглощения волны в среде. В самом деле, даже при действительных волновых числах  $q_1$  и  $q_2$ , то есть в отсутствие поглощения волн в обеих средах, величина  $P_e$ , рассчитанная по формуле (10.58), отлична от нуля. Такое положение означает, что величина  $P_e$  характеризует не только безвозвратное поглощение волны в среде, но и временное поглощение с последующей отдачей, свойственное реактивному поведению: энергия волны в течение одного полупериода входит и запасается в среде, а в течение следующего выходит и отдается из среды. Таким образом, более уместным для  $P_e$  является название «коэффициент локализации», что включает в себя как реактивную (запасаемую и возвращаемую), так и активную (поглощаемую) части.

Сказанное иллюстрируется рис. 10.4, где показаны зависимости действительной (а), мнимой (б) частей и модуля (в) комплексных коэффициентов  $R_e$ ,  $T_e$ ,  $P_e$ , а также их суммы от нормированной толщины пластины при действительных волновых числах:  $q_1 = 3$ ,  $q_2 = 7$ ,  $q_3 = 12$ . Кривая 1 соответствует  $G = R_e$  по (10.56), кривая 2 —  $G = T_e$  по (10.57), кривая 3 —  $G = P_e$  по (10.58), кривая 4 —  $G = R_e + T_e + P_e$  по (10.56)–(10.58).

Из рисунка видно, что все кривые осциллируют с периодом, равным половине длины волны во второй среде. Все коэффициенты имеют мнимую составляющую, которая равняется нулю только при толщине пластины, равной целому числу четвертей длин волн. При этом их сумма (кривая 4) является чисто действительной и всегда равна единице. Поскольку определением всех коэффициентов  $R_e$ ,  $T_e$ ,  $P_e$  является отношение потоков энергии соответствующих волн, то мнимые части этих коэффициентов отражают различие фаз таких волн. Классическим отражательной и пропускательной способностям соответствуют кривые 1 и 2 на рис. 10.4, в, причем их сумма всегда равна единице.

Обращает на себя внимание осциллирующие с большой амплитудой действительная и мнимая составляющие коэффициента  $P_e$ , построенного по формуле (10.58). Такое их поведение в отсутствие затухания

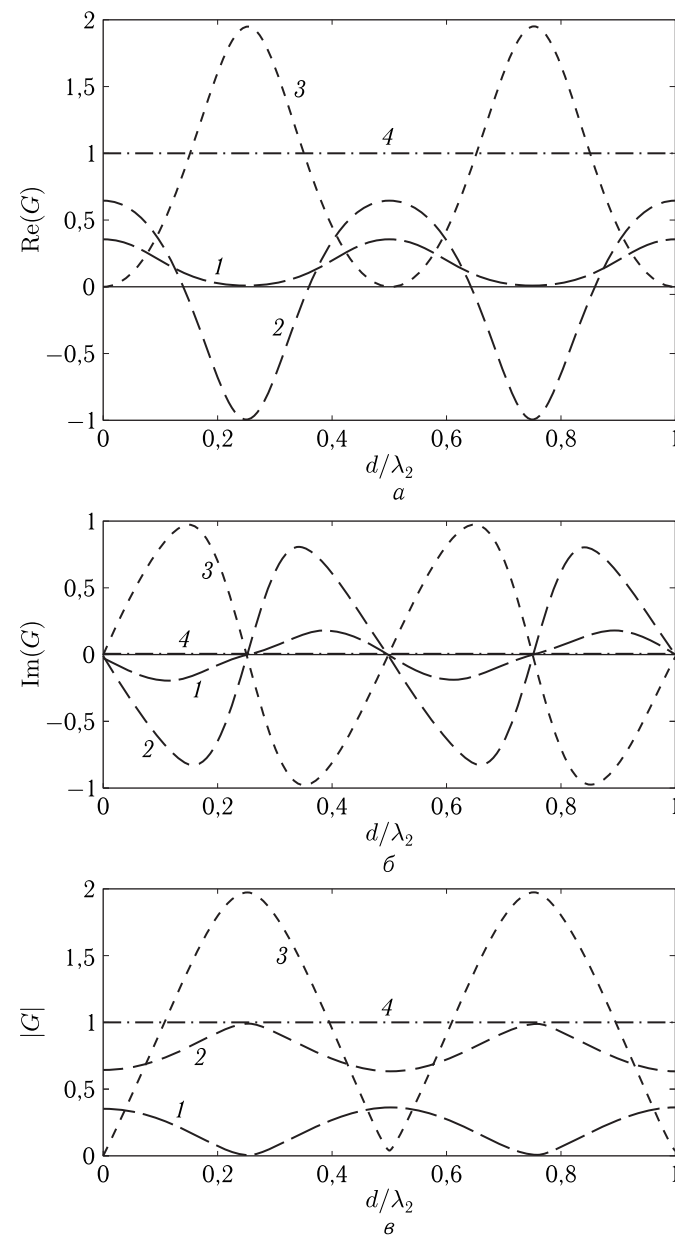


Рис. 10.4. Зависимости действительной (а), мнимой (б) частей и модуля (в) комплексных коэффициентов отражения (1), прохождения (2) и «поглощения» (3), а также их суммы (4) от нормированной толщины пластины при действительных волновых числах

демонстрирует проявление реактивных свойств области 2 (пластины), ограниченной с обеих сторон частично отражающими поверхностями. Например, при  $d/\lambda_2 = 0,25$  эта область играет роль четвертьволновой пластинки, которая локализует в себе довольно много энергии в реактивной форме, то есть в течение одного полупериода по времени запасает энергию с тем, чтобы в следующий полупериод ее отдать. При  $d/\lambda_2 = 0,50$  пластинка становится полуволновой и реактивная локализация энергии в ней отсутствует.

Проведенное рассмотрение, хотя и позволяет выполнить условия баланса энергии, однако при наличии потерь энергии ставит среды 1, 2 и 3 в неравное положение. Так, потери волны в форме экспоненты с отрицательным показателем учитываются только во второй среде (внутри пластины), а вне нее в выражениях для коэффициентов  $R_e$ ,  $T_e$ ,  $P_e$  никак не участвуют. Это происходит из-за того, что амплитуда падающей волны считается заданной на первой границе раздела между средами 1 и 2, а амплитуда проходящей волны анализируется на второй границе раздела между средами 2 и 3.

Для того чтобы исправить такое положение, рассмотрим более сложную задачу, когда падающая волна задается в произвольной точке области 1, а проходящая анализируется в произвольной точке области 3.

#### 10.4. Энергетические коэффициенты, характеризующие распространение одномерной волны через две границы раздела трех сред

Рассмотрим распространение одномерной волны через две границы раздела трех сред с различными параметрами. Сначала получим амплитуды волн, после чего на их основе определим энергетические параметры.

##### 10.4.1. Геометрия задачи и амплитуда распространяющихся волн

Геометрия задачи представлена на рис. 10.5.

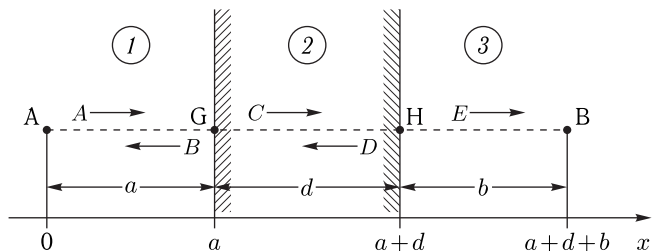


Рис. 10.5. Геометрия задачи для трех сред с комплексными параметрами в случае произвольных начальной и конечной точек распространения волны

Здесь показаны заполненные однородными волноведущими средами три области пространства 1, 2 и 3, отделенные друг от друга двумя плоскими границами. Во всех средах по одному направлению, перпендикулярному плоскости границы, распространяются плоские волны, фронты которых перпендикулярны направлению распространения.

В такой постановке задача является одномерной, то есть параметры всех волн зависят от единственной координаты, которую обозначим далее через  $x$ , причем ось  $Ox$  совпадает с направлением распространения волн.

Предположим, что первичная волна излучается из точки А. В результате взаимодействия с границами, находящимися в точках Г и Н, возникают четыре вторичные волны: две волны вне среды 2, первая — отраженная, распространяющаяся от точки Г к точке А в среде 1, вторая — проходящая, распространяющаяся от точки Н к точке В в среде 3, а также две волны внутри среды 2, одна из которых распространяется от точки Г к точке Н, а другая — от точки Н к точке Г.

Расстояние от точки А до точки Г равно  $a$ , расстояние от точки Г до точки Н равно  $d$ , расстояние от точки Н до точки В равно  $b$ . Таким образом, точка А соответствует  $x = 0$ , точка Г —  $x = a$ , точка Н —  $x = a + d$ , точка В —  $x = a + d + b$ .

Для удобства обращения будем далее называть СТРУКТУРОЙ область пространства, заключенную между плоскостями, перпендикулярными  $Ox$ , проходящими через точки А и В, содержащую среду 1 от точки А до точки Г, среду 2 от точки Г до точки Н, среду 3 от точки Н до точки В, а также границы раздела между средами, соответствующие точкам Г и Н.

Найдем сначала амплитуды отраженной и проходящей волн при заданной амплитуде падающей волны.

Суммарное волновое решение в средах 1–3 имеет вид:

$$U_1 = Ae^{-iq_1x} + Be^{iq_1x}; \quad (10.62)$$

$$U_2 = Ce^{-iq_2(x-a)} + De^{iq_2(x-a)}; \quad (10.63)$$

$$U_3 = Ee^{-iq_3[x-(a+d)]}, \quad (10.64)$$

где  $A$  — амплитуда падающей,  $B$  — амплитуда отраженной и  $E$  — амплитуда проходящей волны в среде 3,  $C$  и  $D$  — амплитуды падающей и отраженной волн в среде 2.

В формулах (10.63) и (10.64) для удобства вычислений введена нормировка, соответствующая умножению амплитуд на постоянные множители  $e^{-iq_2a}$ ,  $e^{iq_2a}$  и  $e^{-iq_2(a+d)}$ .

Подставляя (10.62)–(10.64) в граничные условия аналогичные (10.10)–(10.11) при  $x = a$  и  $x = a + d$ , получаем решение в виде:

$$B = A \frac{(q_1 - q_2)(q_2 + q_3)e^{iq_2d} + (q_1 + q_2)(q_2 - q_3)e^{-iq_2d}}{(q_1 + q_2)(q_2 + q_3)e^{iq_2d} + (q_1 - q_2)(q_2 - q_3)e^{-iq_2d}} e^{-2iq_1a}, \quad (10.65)$$

$$C = A \frac{2q_1(q_2 + q_3)e^{-i(q_1 a - q_2 d)}}{(q_1 + q_2)(q_2 + q_3)e^{iq_2 d} + (q_1 - q_2)(q_2 - q_3)e^{-iq_2 d}}; \quad (10.66)$$

$$D = A \cdot \frac{2q_1(q_2 - q_3)e^{-i(q_1 a + q_2 d)}}{(q_1 + q_2)(q_2 + q_3)e^{iq_2 d} + (q_1 - q_2)(q_2 - q_3)e^{-iq_2 d}}; \quad (10.67)$$

$$E = A \cdot \frac{4q_1 q_2 e^{-iq_1 a}}{(q_1 + q_2)(q_2 + q_3)e^{iq_2 d} + (q_1 - q_2)(q_2 - q_3)e^{-iq_2 d}}. \quad (10.68)$$

Как видим, оно отличается от (10.33)–(10.36) экспонентами, содержащими в показателях расстояние  $a$ , которые описывают изменение параметров падающей и отраженной волн на участке AG.

#### 10.4.2. Потоки энергии распространяющихся волн

Обратимся теперь к рассмотрению ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ распространяющихся волн. Потоки энергии в структуре распределяются следующим образом.

Поток энергии, ВХОДЯЩИЙ в структуру, состоит из потока энергии падающей волны в точке А:

$$W_{\text{in}} = A^2 q_1. \quad (10.69)$$

Поток энергии, ВЫХОДЯЩИЙ из структуры, состоит из двух потоков:

1) выходящего в среду  $I$ , представляющего собой поток энергии отраженной волны  $B$  в точке А —

$$W_{\text{out1}} = B^2 q_1. \quad (10.70)$$

2) выходящего в среду  $3$ , представляющего собой поток энергии проходящей волны  $E$  в точке В —

$$W_{\text{out3}} = E^2 e^{-2iq_3 b} q_3. \quad (10.71)$$

Поток энергии, ЛОКАЛИЗУЕМЫЙ (то есть распространяющийся с возможным поглощением) внутри структуры, содержит в себе пять потоков:

1) поток энергии волны  $A$  на участке AG, равный разности потоков энергии этой волны в точках А и G —

$$W_{\text{loc}}^{(AG)} = W_{\text{in}}^{(A)} - W_{\text{out}}^{(G)} = A^2 [1 - e^{-2iq_1 a}] q_1; \quad (10.72)$$

2) поток энергии волны  $B$  на участке GA, равный разности потоков энергии этой волны в точках G и А —

$$W_{\text{loc}}^{(GA)} = W_{\text{in}}^{(G)} - W_{\text{out}}^{(A)} = -B^2 [1 - e^{2iq_1 a}] q_1; \quad (10.73)$$

3) поток энергии волны  $C$  на участке GH, равный разности потоков энергии этой волны в точках G и H —

$$W_{\text{loc}}^{(GH)} = W_{\text{in}}^{(G)} - W_{\text{out}}^{(H)} = C^2 [1 - e^{-2iq_2 d}] q_2; \quad (10.74)$$

4) поток энергии волны  $D$  на участке HG, равный разности потоков энергии этой волны в точках H и G —

$$W_{\text{loc}}^{(HG)} = W_{\text{in}}^{(H)} - W_{\text{out}}^{(G)} = -D^2 [1 - e^{2iq_2 d}] q_2; \quad (10.75)$$

5) поток энергии волны  $E$  на участке HB, равный разности потоков энергии этой волны в точках H и В —

$$W_{\text{loc}}^{(HB)} = W_{\text{in}}^{(H)} - W_{\text{out}}^{(B)} = E^2 [1 - e^{-2iq_3 b}] q_3. \quad (10.76)$$

Полный поток энергии, локализуемый в структуре, равен:

$$\begin{aligned} W_{\text{loc}}^{(AB)} &= W_{\text{loc}}^{(AG)} + W_{\text{loc}}^{(GA)} + W_{\text{loc}}^{(GH)} + W_{\text{loc}}^{(HG)} + W_{\text{loc}}^{(HB)} = \\ &= A^2 [1 - e^{-2iq_1 a}] q_1 - B^2 [1 - e^{2iq_1 a}] q_1 + \\ &+ C^2 [1 - e^{-2iq_2 d}] q_2 - D^2 [1 - e^{2iq_2 d}] q_2 + E^2 [1 - e^{-2iq_3 b}] q_3. \end{aligned} \quad (10.77)$$

При комплексных  $q_1 = \eta_1 - i\xi_1$ ,  $q_2 = \eta_2 - i\xi_2$  и  $q_3 = \eta_3 - i\xi_3$  поток энергии, локализуемый в структуре, состоит из двух частей:

РЕАКТИВНОЙ, которая определяется действительными частями волновых чисел и соответствует реактивному запасанию энергии в течение одного полупериода по времени с отдачей в следующий полупериод:

$$\begin{aligned} W_{\text{loc}}^{(AB)} &= A^2 (1 - e^{-2i\eta_1 a}) e^{-2\xi_1 a} q_1 - B^2 (1 - e^{2i\eta_1 a}) e^{2\xi_1 a} q_1 + \\ &+ C^2 (1 - e^{-2i\eta_2 d}) e^{-2\xi_2 d} q_2 - D^2 (1 - e^{2i\eta_2 d}) e^{2\xi_2 d} q_2 + \\ &+ E^2 (1 - e^{-2i\eta_3 b}) e^{-2\xi_3 b} q_3. \end{aligned} \quad (10.78)$$

АКТИВНОЙ, которая определяется мнимыми частями волновых чисел и соответствует поглощению энергии, то есть уходу ее из структуры:

$$\begin{aligned} W_{\text{locA}}^{(AB)} &= A^2 (1 - e^{-2\xi_1 a}) q_1 - B^2 (1 - e^{2\xi_1 a}) q_1 + C^2 (1 - e^{-2\xi_2 d}) q_2 - \\ &- D^2 (1 - e^{2\xi_2 d}) q_2 + E^2 (1 - e^{-2\xi_3 b}) q_3. \end{aligned} \quad (10.79)$$

#### 10.4.3. Энергетические коэффициенты (аналитические выражения)

Введем следующие определения энергетических коэффициентов.

Энергетический коэффициент ОТРАЖЕНИЯ — отношение потока энергии волны, отраженной от структуры обратно в среду  $I$ , к потоку энергии волны, входящей в структуру:

$$R_e = \frac{W_{\text{out1}}}{W_{\text{in}}} = \frac{B^2}{A^2}. \quad (10.80)$$

Энергетический коэффициент ПРОХОЖДЕНИЯ — отношение потока энергии волны, проходящей через структуру в среду  $3$ , к потоку энергии волны, входящей в структуру:

$$T_e = \frac{W_{\text{out2}}}{W_{\text{in}}} = \frac{E^2}{A^2} e^{-2iq_3 b} \frac{q_3}{q_1}. \quad (10.81)$$

Энергетический коэффициент ЛОКАЛИЗАЦИИ — отношение потока энергии волны, локализуемой в структуре, к потоку энергии волны, входящей в структуру:

$$P_e = \frac{W_{\text{loc}}^{(AB)}}{W_{\text{in}}} = (1 - e^{-2iq_1a}) - \frac{B^2}{A^2}(1 - e^{2iq_1a}) + \frac{C^2}{A^2}(1 - e^{-2iq_2d}) \frac{q_2}{q_1} - \frac{D^2}{A^2}(1 - e^{2iq_2d}) \frac{q_2}{q_1} + \frac{E^2}{A^2}(1 - e^{-2iq_3b}) \frac{q_3}{q_1}. \quad (10.82)$$

Энергетический коэффициент РЕАКТИВНОСТИ — отношение потока энергии волны, запасаемой в структуре в реактивной форме, к потоку энергии волны, входящей в структуру:

$$S_e = \frac{W_{\text{locS}}^{(AB)}}{W_{\text{in}}} = (1 - e^{-2i\eta_1a})e^{-2\xi_1a} - \frac{B^2}{A^2}(1 - e^{2i\eta_1a})e^{2\xi_1a} + \frac{C^2}{A^2}(1 - e^{-2i\eta_2d})e^{-2\xi_2d} \frac{q_2}{q_1} - \frac{D^2}{A^2}(1 - e^{2i\eta_2d})e^{2\xi_2d} \frac{q_2}{q_1} + \frac{E^2}{A^2}(1 - e^{-2i\eta_3b})e^{-2\xi_3b} \frac{q_3}{q_1}. \quad (10.83)$$

Энергетический коэффициент ПОГЛОЩЕНИЯ — отношение потока энергии волны, поглощаемой (теряемой) в структуре, к потоку энергии волны, входящей в структуру:

$$A_e = \frac{W_{\text{locA}}^{(AB)}}{W_{\text{in}}} = (1 - e^{-2\xi_1a}) - \frac{B^2}{A^2}(1 - e^{2\xi_1a}) + \frac{C^2}{A^2}(1 - e^{-2\xi_2d}) \frac{q_2}{q_1} - \frac{D^2}{A^2}(1 - e^{2\xi_2d}) \frac{q_2}{q_1} + \frac{E^2}{A^2}(1 - e^{-2\xi_3b}) \frac{q_3}{q_1}. \quad (10.84)$$

Все полученные коэффициенты можно выразить через волновые числа  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$ , для чего надо подставить амплитуды  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , определяемые формулами (10.65)–(10.68), в выражения для коэффициентов (10.80)–(10.84). Непосредственная подстановка никаких затруднений не вызывает, однако здесь получаемые выражения не приводятся ввиду их громоздкости.

Закон сохранения энергии требует выполнения соотношения:

$$R_e + T_e + P_e = 1, \quad (10.85)$$

где

$$P_e = S_e + A_e, \quad (10.86)$$

то есть

$$R_e + T_e + S_e + A_e = 1. \quad (10.87)$$

#### 10.4.4. Совпадение конечных точек структуры с границами раздела сред

Совпадение начальной и конечной точек структуры с первой и второй границами раздела сред означает, что  $a = 0$  и  $b = 0$ . При этом амплитуды волн (10.65)–(10.68) принимают вид (10.33)–(10.36). Энергетические коэффициенты (10.80)–(10.84) принимают вид:

$$R_e = \frac{B^2}{A^2}; \quad (10.88)$$

$$T_e = \frac{E^2}{A^2} \frac{q_3}{q_1}; \quad (10.89)$$

$$P_e = \frac{C^2}{A^2}(1 - e^{-2iq_2d}) \frac{q_2}{q_1} - \frac{D^2}{A^2}(1 - e^{2iq_2d}) \frac{q_2}{q_1}; \quad (10.90)$$

$$S_e = \frac{C^2}{A^2}(1 - e^{-2i\eta_2d})e^{-2\xi_2d} \frac{q_2}{q_1} - \frac{D^2}{A^2}(1 - e^{2i\eta_2d})e^{2\xi_2d} \frac{q_2}{q_1}; \quad (10.91)$$

$$A_e = \frac{C^2}{A^2}(1 - e^{-2\xi_2d}) \frac{q_2}{q_1} - \frac{D^2}{A^2}(1 - e^{2\xi_2d}) \frac{q_2}{q_1}. \quad (10.92)$$

Как видим, коэффициенты (10.88)–(10.90) совпадают с введенными ранее коэффициентами (10.56)–(10.58). Здесь однако реактивная и активная части коэффициента локализации разделены, что позволяет рассматривать  $A_e$  как настоящий коэффициент поглощения, обусловленный потерями волны в материале среды 2.

#### 10.4.5. Энергетические коэффициенты при различных параметрах сред

Рассмотрим теперь, как зависят введенные энергетические коэффициенты от комплексных параметров сред.

Обратимся к рис. 10.6, где показаны зависимости действительных ( $a$ ) и мнимых ( $b$ ) частей энергетических коэффициентов от нормированной толщины второй среды при действительных волновых числах всех сред, что соответствует отсутствию затухания. Для упрощения расчета волновые числа выбраны равными  $q_1 = 1$ ,  $q_2 = 5$ ,  $q_3 = 25$ , чтобы отношения волновых чисел соседствующих сред были одинаковыми. Начальная и конечная точки распространения волны совпадают с границами раздела сред:  $a = 0$ ,  $b = 0$ . Кривая 1 соответствует  $R_e$ , кривая 2 —  $T_e$ , кривая 3 —  $P_e$ , кривая 4 —  $S_e$ , кривая 5 —  $A_e$ , кривая 6 —  $R_e + T_e + P_e$  или  $R_e + T_e + S_e + A_e$ .

Из рисунка видно, что в отсутствие затухания все кривые имеют периодический характер, соответствующий установлению целого числа полутолщин по толщине второй среды.

При нулевой толщине второй среды  $d = 0$  значения действительных частей коэффициентов  $R_e$  (кривая 1) и  $T_e$  (кривая 2) отражают различие параметров первой и третьей сред, при этом сумма их равна единице. Коэффициенты  $P_e$  (10.3),  $S_e$  (10.4) и  $A_e$  (10.5) в этой точке равны нулю, так как при нулевой толщине в структуре ничего

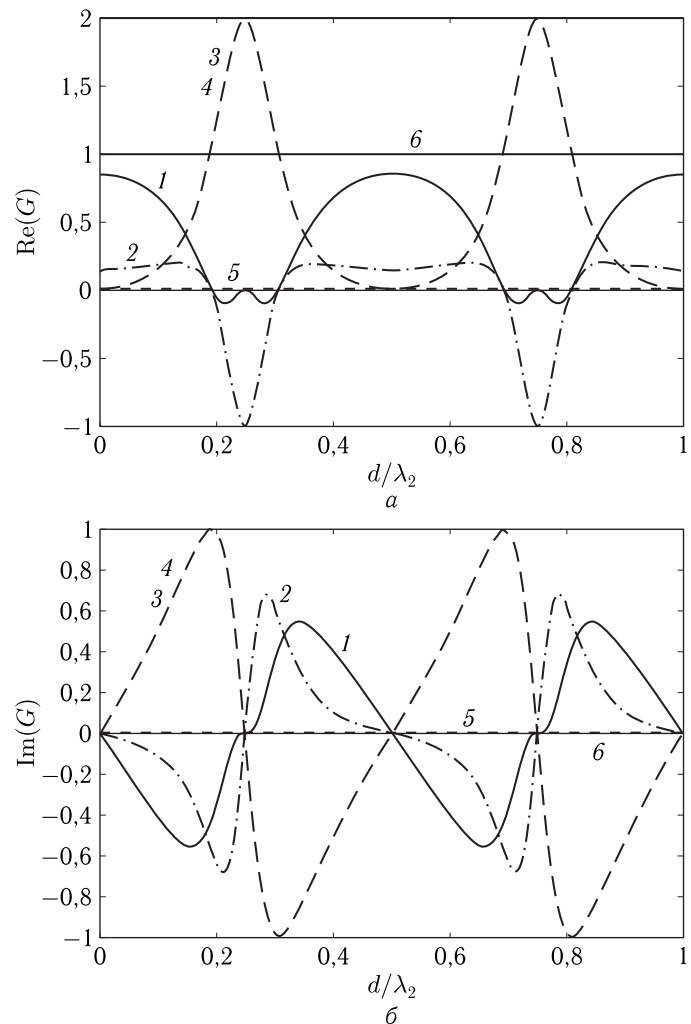


Рис. 10.6. Зависимости действительных (а) и мнимых (б) частей энергетических коэффициентов от нормированной толщины второй среды при действительных волновых числах всех сред

не локализуется, не запасается и не поглощается. Мнимые части всех коэффициентов равны нулю, так как при нулевой толщине какой-либо набег фазы отсутствует.

При увеличении толщины второй среды коэффициент отражения  $R_e$  уменьшается, а коэффициент прохождения  $T_e$  несколько увеличивается, так как в их формировании теперь играет роль различие параметров сред 1 и 2, а также 2 и 3, которое меньше чем различие параметров

сред 1 и 3. При этом резко растут мнимые части всех коэффициентов, что отражает увеличение набегов фаз соответствующих волн.

При толщине второй среды, равной четверти длины волны ( $d/\lambda_2 = 0,25$ ) коэффициент отражения  $R_e$  равен нулю, так как волна внутри второй среды, проделав путь от первой границы раздела до второй и обратно, выходит из структуры в противофазе с волной, испытавшей только одно отражение от первой границы. В этом случае коэффициент прохождения равен минус единице, что означает, что волна проходит вся целиком, но в противофазе с падающей волной. При такой толщине достигает максимального значения равного двум коэффициенту локализации  $P_e$  (кривая 3) и равный ему коэффициент реактивности  $S_e$  (кривая 4, совпадающая с кривой 3). Такой рост коэффициентов локализации и реактивности соответствует реактивному характеру распространения волны, при котором в течение одного полупериода по времени энергия, переходя из среды 1 в среду 2, запасается в среде 2, а в течение следующего — из среды 2 отдается в среду 3. Мнимые части всех коэффициентов при этом проходят через нуль, что отражает набег фаз потоков энергии соответствующих волн.

Заметим, что наблюдаемое здесь равенство экстремальных значений коэффициентов прохождения и локализации или реактивности целым числам (–1 и 2) не является общим и обусловлено частным выбором значений волновых чисел, отношения которых в соседствующих средах взяты равными. Если эти отношения не равны друг другу, то экстремальные значения коэффициентов будут другими.

При увеличении толщины второй среды до  $d/\lambda_2 = 0,50$  как действительные, так и мнимые части всех коэффициентов возвращаются к своим начальным значениям, что обусловлено укладыванием по толщине второй среды половины длины всех волн.

Дальнейшее увеличение толщины второй среды приводит к периодическому повторению картины, соответствующей интервалу  $0 \leq d/\lambda_2 \leq 0,50$ .

Обратим теперь внимание на кривую 6, отражающую зависимости суммы коэффициентов отражения, прохождения и локализации или отражения, прохождения, реактивности и поглощения от нормированной толщины среды 2. В обоих случаях действительная часть каждой из этих сумм всегда равна единице, а мнимая — нулю, в как это и следует из соотношений (10.60) и (10.61), то есть закон сохранения энергии безупречно выполняется.

#### 10.4.6. Влияние диссипации во второй среде

Рассмотрим теперь, какие особенности в описанную картину вносит наличие затухания во второй среде.

Выяснению этого вопроса посвящен рис. 10.7, где показаны те же зависимости, что и на рис. 10.6, но при волновом числе второй среды комплексном и равном  $q_2 = 5 - 4i$ . Волновые числа первой и третьей сред оставим прежними.

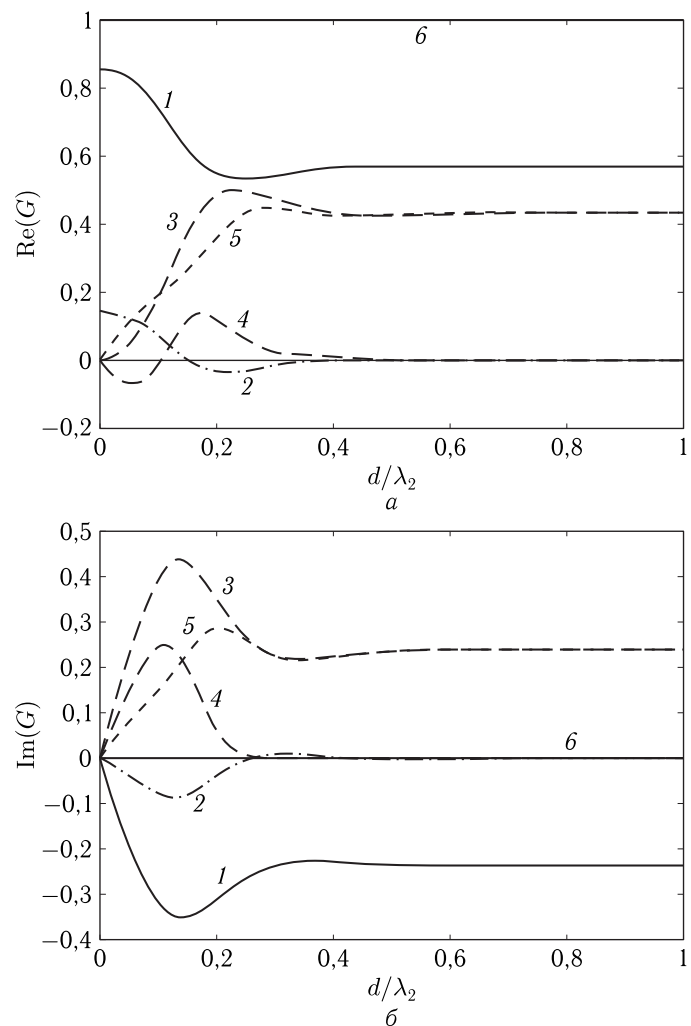


Рис. 10.7. Зависимости действительных (а) и мнимых (б) частей энергетических коэффициентов от нормированной толщины второй среды при комплексном волновом числе второй среды и действительных волновых числах первой и третьей сред

Из рисунка видно, что при нулевой толщине второй среды начальные точки всех кривых совпадают с аналогичными точками на рис. 10.6. При малых (вблизи нуля) толщинах второй среды коэффициенты отражения  $R_e$  (кривая 1), прохождения  $T_e$  (кривая 2) и локализации  $P_e$  (кривая 3) также ведут себя подобным образом, но коэффициент поглощения  $A_e$  (кривая 5), начиная с нуля резко возрастает, что обуслов-

лено ростом поглощения энергии волны в среде 2. При дальнейшем увеличении толщины второй среды зависимости как действительной, так и мнимой частей коэффициентов отражения  $R_e$  (1), прохождения  $T_e$  (2) и локализации  $P_e$  (3), не проявляя никаких признаков периодического характера при  $d/\lambda_2 \sim 0,5 \div 0,7$  достигают насыщения и выходят на горизонтальные участки. При этом как коэффициент реактивности  $S_e$  (4), так и коэффициент поглощения  $A_e$  (5) также принимают постоянные значения такие, что их сумма становится равной соответствующему значению коэффициента локализации  $P_e$  (3). Насыщение всех кривых означает, что при толщине  $d/\lambda_2 \sim 0,5 \div 0,7$  волна во второй среде практически полностью затухает, не доходя до второй границы раздела сред. При этом коэффициент отражения далее не зависит от толщины и принимает значение порядка 0,6, коэффициент прохождения равняется нулю, а коэффициент локализации также стабилизируется на величине около 0,4. Коэффициент поглощения становится равным коэффициенту локализации ( $\sim 0,4$ ), а коэффициент реактивности стремится к нулю, то есть энергия, проходящая через первую границу из первой среды во вторую, полностью в ней (второй среде) поглощается, не доходя до второй границы, в результате чего локализация энергии в реактивной форме становится невозможной. Сумма действительных частей коэффициентов отражения и локализации стремится к единице, а сумма их мнимых частей стремится к нулю.

#### 10.4.7. Произвольные начальная и конечная точки распространения волн

Рассмотрим теперь случай, когда начальная и конечная точки распространения волны не совпадают с границами раздела сред.

Такая ситуация иллюстрируется рис. 10.8, где показаны зависимости действительных частей энергетических коэффициентов от нормированной толщины второй среды при действительных волновых числах всех сред для случаев: а)  $a/\lambda_2 = 0,5$ ,  $b/\lambda_2 = 0$ ; б)  $a/\lambda_2 = 0$ ,  $b/\lambda_2 = 3$ .

Из рис. 10.8, а ( $a \geq 0$ ), видно, что изменение положения начальной точки распространения волны (А по рис. 10.5) приводит к сильному изменению всех зависимостей, в том числе и при  $d = 0$ . Такое положение обусловлено тем, что падающая волна еще до соприкосновения с первой границей раздела проходит путь  $a$  от точки А до точки Г по рис. 10.5, то есть ее фаза при падении на первую границу меняется на величину  $a\eta_1$ . При этом все остальные волны также приобретают сдвиг фазы на эту фиксированную величину. Коэффициент локализации  $P_e$  (кривая 3) отличен от нуля даже при  $d = 0$ , так как при этом происходит локализация волны на участке АГ (рис. 10.5). То же касается коэффициента реактивности  $S_e$  (кривая 4, совпадающая с кривой 3).

С другой стороны, из рис. 10.8, б ( $b \geq 0$ ) видно, что изменение положения конечной точки распространения волны — В по рис. 10.5, меняет зависимости сравнительно мало. Более или менее серьезные изменения претерпевает только коэффициент прохождения  $T_e$  (кривая 2), так как

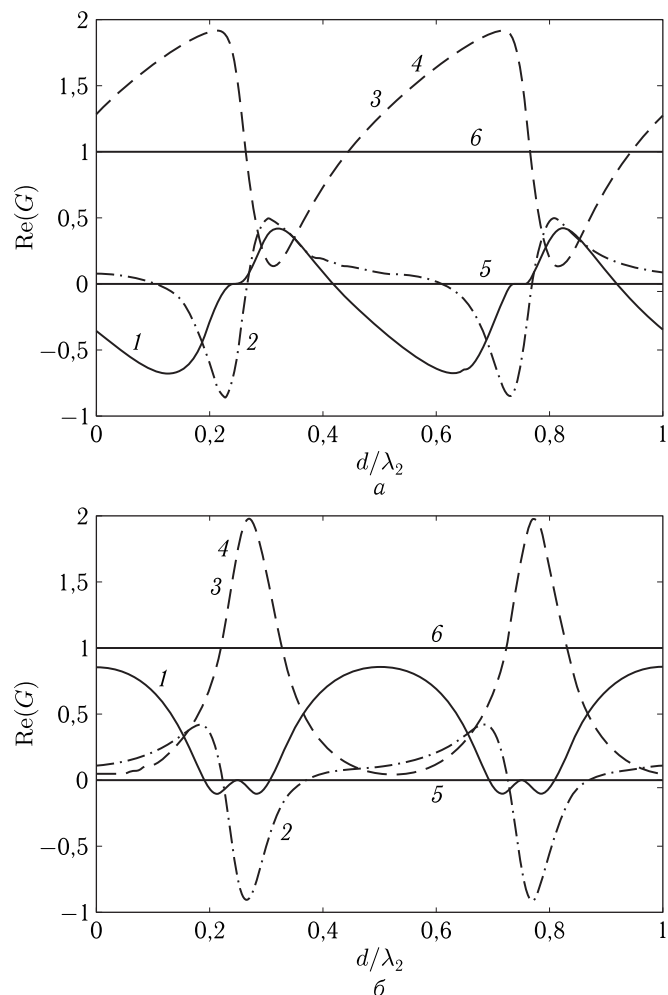


Рис. 10.8. Зависимости действительных частей энергетических коэффициентов от нормированной толщины второй среды при действительных волновых числах всех сред для случаев: а)  $a/\lambda_2 = 0,5$ ,  $b/\lambda_2 = 0$ ; б)  $a/\lambda_2 = 0$ ,  $b/\lambda_2 = 3$

после прохождения второй среды на участке НВ (рис. 10.5) распространяется только проходящая волна, а от точки В ничего не отражается и встречная волна на этом участке отсутствует.

В обоих случаях, как при  $a \geq 0$  (рис. 10.8, а), так и при  $b \geq 0$  (рис. 10.8, б), суммы действительных частей коэффициентов отражения, прохождения и локализации или отражения, прохождения, реактивности и поглощения от нормированной толщины второй среды (кривые б) всегда равны единице, что соответствует закону сохранения энергии.

## 10.5. Основные правила работы с потоками энергии волн, распространяющихся в слоистой среде

Резюмируя сказанное в предыдущих разделах, приведем краткую сводку последовательности действий при определении энергетических параметров распространяющихся волн.

### 10.5.1. Общая постановка задачи

Имеется многослойная структура, состоящая из некоторого числа плоскопараллельных слоев с различными параметрами, однородными в пределах каждого слоя.

На эту структуру с одной стороны падает плоская волна, волновой фронт которой параллелен плоскостям слоев.

Рассматривается одномерная задача, то есть такая, в которой все волны распространяются по одной координате и имеют одну амплитудную составляющую. Простейшим примером одномерной волны является поперечная волна в струне.

Ось координат выбирается вдоль направления распространения волны. При этом координаты границ между слоями соответствуют точкам на координатной прямой.

В таком виде задача сводится к распространению одномерной волны через совокупность одномерных участков, заполненных однородными средами с различными параметрами и отделенных друг от друга точечными границами, причем предполагается, что амплитуда волны, падающей на структуру извне, то есть из начальной точки в первой среде, задана изначально.

Согласно определению, поток энергии волны в данной точке одномерной структуры равен произведению квадрата амплитуды волны на волновое число, причем направление потока энергии определяется направлением распространения волны.

Таким образом, процедура нахождения потоков энергии и их балансов требует сначала нахождения амплитуд волн.

### 10.5.2. Нахождение амплитуд волн

Последовательность действий для нахождения амплитуд волн состоит в следующем.

Прежде всего надо записать волновые уравнения для каждой среды в отдельности с параметрами, соответствующими данной среде.

После этого найти решения волновых уравнений в виде волн, с амплитудами в виде произвольных коэффициентов.

Эти решения представляют собой две волны, распространяющиеся во встречных уравнениях, записываемых через экспоненты с временным и координатным множителями, при этом временные множители для всех волн одни и те же, а координатные для каждой волны записываются

в локальной системе координат с началом в той граничной точке, откуда волна исходит.

Теперь записать функции волновых полей в каждой среде в виде суммы прямой и встречной волн внутри этой среды.

Параллельно записать граничные условия, состоящие в равенстве функций волновых полей и их производных по координатам на границах раздела сред.

После этого подставить функции полей в граничные условия, что даст систему линейных уравнений для амплитуд волн, в которой заданным параметром будет амплитуда волны, падающей на систему извне.

Теперь нужно решить эту систему, для чего, записав расширенную матрицу, найти методом Крамера амплитуды волн, выраженные через заданную амплитуду исходной падающей волны.

### 10.5.3. Нахождение потоков энергии

Чтобы определить поток энергии через данную точку структуры, надо умножить квадрат амплитуды волны в этой точке на волновое число. При этом если направление распространения волны совпадает с положительным направлением оси координат, то надо брать знак плюс, если эти направления противоположны — знак минус.

### 10.5.4. Баланс энергии на точечной границе

Будем считать далее волны, падающие на границу раздела сред, входящими в данную границу, а отходящие от этой границы — выходящими из нее.

Далее надо определить амплитуды всех волн, входящих и выходящих из данной границы. При этом амплитуды волн, выходящих из границы, равны значениям, найденным при решении полученной из граничных условий системы алгебраических уравнений, а амплитуды волн, входящих в границу, равны произведению этих значений на координатные множители в экспонентах соответствующих волн, где значения координат для каждой волны берутся в локальных системах координат, начало которых совпадает с точками, откуда эти волны исходят.

Для вычисления баланса энергии на границе надо найти потоки энергии всех входящих и выходящих волн, используя полученные значения амплитуд волн на этой границе.

Баланс энергии на точечной границе состоит в равенстве суммарного потока всех входящих волн сумме потоков всех выходящих волн.

### 10.5.5. Баланс энергии на участке, ограниченном двумя точечными границами

Для участка структуры, ограниченного точечными границами, существуют три потока энергии: входящий, выходящий и локализуемый на этом участке. Локализация состоит из двух частей — активной и реактивной. Активная часть представляет собой поглощение энергии на данном участке, приводящее к частичному затуханию волны.

Реактивная часть представляет собой временное накопление энергии в течение одного полупериода волны с последующей отдачей в следующий полупериод.

В каждом участке структуры распространяются две волны во встречных направлениях, причем на конечном участке структуры в случае отсутствия отражения амплитуда одной из волн равняется нулю.

Направление каждой из двух волн задается видом волновой функции, то есть сочетанием знаков временного и координатного слагаемых в показателе экспоненты.

При этом конец участка, из которого волна исходит, будет считаться входным по отношению к волне, а другой конец — выходным.

Теперь надо найти поток энергии данной волны, входящий в заданный участок, для чего взять произведение квадрата амплитуды волны на входе участка на волновое число волны на этом участке.

Затем найти поток энергии, выходящий из заданного участка, для чего взять произведение квадрата амплитуды волны на выходе участка на волновое число волны на этом участке.

После этого найти поток энергии, локализованный на данном участке, для чего взять разность входного и выходного потоков.

Затем те же действия надо проделать для волны встречного направления, то есть найти для нее потоки входящий, выходящий и локализованный.

Баланс энергии на данном участке состоит в равенстве суммы всех входящих потоков сумме всех выходящих и локализованных потоков.

### 10.5.6. Баланс энергии на структуре, содержащей несколько однородных участков, разделенных точечными границами

Для нахождения баланса энергии на структуре, содержащей несколько однородных участков, разделенных точечными границами, надо найти потоки энергии, входящие извне в крайние участки структуры, а также выходящие наружу из крайних участков структуры и все потоки, локализованные во всех участках структуры.

Баланс энергии на структуре в целом состоит в равенстве двух сумм: первой — суммы всех потоков, входящих в структуру извне, второй — суммы всех потоков, выходящих из структуры наружу и локализованных внутри структуры.

## Выводы по главе 10

Данная глава посвящена рассмотрению энергетических характеристик распространения одномерной волны через границы раздела сред с комплексными параметрами. На примере падения волны на одну и две границы раздела сред показано, что традиционные способы вычисления энергетических параметров приводят к корректным результатам только при действительных волновых числах всех сред. На основе рассмотрения баланса энергии на границах раздела сред введены определения



комплексных энергетических параметров волны: коэффициентов отражения, прохождения, локализации, реактивности и поглощения.

Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрено падение одномерной волны из среды с произвольными комплексными параметрами на одну и две границы раздела сред, параметры которых также произвольны. Найдены амплитуды волн, отраженных и проходящих через каждую границу раздела. Получены коэффициенты отражения, прохождения и поглощения по амплитудам волн.

2. Обсуждены традиционно используемые правила получения коэффициентов отражения, прохождения и поглощения по энергии, то есть отражательной, пропускательной и поглощательной способностей относительно распространения волны через границы сред с действительными параметрами. Показано, что традиционный выбор определений таких коэффициентов в случае комплексных параметров сред приводит к противоречию с законом сохранения энергии. Для случая распространения волны через одну границу приведен комплексный вид выражений энергетических коэффициентов, отвечающий закону сохранения энергии.

3. Рассмотрен баланс энергии на отдельных границах раздела сред и на структуре в целом для случая произвольных комплексных параметров. Показано, что необходимым условием выполнения баланса, соответствующего закону сохранения энергии при распространении волны, является использование комплексного вида энергетических коэффициентов. Предложено новое определение энергетических коэффициентов отражения, прохождения, локализации, реактивности и поглощения, пригодное для сред с комплексными параметрами.

4. На примере прохождения волны через три среды, разделенные двумя границами, получены энергетические коэффициенты и рассмотрено их поведение в зависимости от толщины центрального слоя, а также расположения начальной и конечной точек распространения волны. Показано, что в отсутствие затухания волны в центральном слое зависимости коэффициентов от толщины этого слоя периодически осциллируют, а при наличии затухания насыщаются. Поведение коэффициентов сопоставлено с балансом энергии в системе, наглядно продемонстрирована реализация сохранения энергии распространяющихся волн.

5. В качестве рекомендации к проведению дальнейших исследований приведены основные правила работы с потоками энергии в виде последовательности подлежащих выполнению действий. Отмечены приемы работы, необходимые для корректного вычисления энергетических коэффициентов отражения, прохождения, локализации, реактивности и поглощения, применимые для сред, обладающих комплексными параметрами со сравнимыми величинами действительной и мнимой частей.

## Глава 11

### **ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ МНОГОСЛОЙНУЮ СТРУКТУРУ**

Глава посвящена рассмотрению энергетических характеристик распространения встречных волн через многослойную структуру с произвольным числом слоев. Найдены входящий, уходящий и локализованный потоки энергии, а также их баланс относительно многослойной структуры в целом. Введено понятие энергетических коэффициентов выхода. На примере трехслойной структуры показано, что мнимая составляющая волнового числа приводит к осцилляциям и превышению над постоянным значением сумм коэффициентов выхода, причем, в отличие от случая падения одной волны, осцилляции и превышение могут быть вызваны мнимой составляющей волнового числа любой из трех сред.

В главе частично использованы материалы монографии [64, стр. 76–98], а также статей [80,86]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

#### **11.1. Баланс потоков энергии для встречных волн в структуре с произвольным числом слоев**

В главе 7 настоящей монографии в разделе 7.6.2 упомянуто аномальное поведение потоков энергии распространяющихся волн при их традиционном определении. В частности, отмечено, что в случае падения волны из диссипативной среды такое определение приводит к противоречию с законом сохранения энергии [8, 161, 163]. В ряде работ предлагался выход из сложившегося положения путем введения нового определения потока энергии, особого «интерференционного потока», или «фиктивного слоя» [161, 164, 165, 185–187]. Однако наиболее последовательным рассмотрением этого вопроса можно считать решение задачи в комплексном виде с учетом локализации энергии волны в промежуточном слое, впервые приведенное в работах [70, 72, 166], а также для случая трех сред подробно рассмотренное в главе 10 настоящей монографии (разделы 10.3, 10.4). Здесь мы распространим приведенные там результаты на случай произвольного числа сред при падении двух встречных волн на оба конца структуры.

### 11.1.1. Геометрия и постановка задачи

Рассмотрим падение двух встречных одномерных волн на многослойную неоднородную структуру, схематически показанную на рис. 11.1. Можно видеть, что геометрия задачи полностью совпадает с приведенной в главе 2 на рис. 2.5 (раздел 2.3.1), с той лишь разницей, что там главной задачей был расчет амплитуд распространяющихся волн, а здесь обратимся к рассмотрению потоков энергии этих волн.

Структура состоит из  $N$  сред (номера  $1, 2, \dots, N$  в кругах), разделенных  $N - 1$  границами (номера  $1, 2, \dots, N - 1$  в треугольниках). Параметры всех сред могут быть различными, все волновые числа могут быть действительными или комплексными.

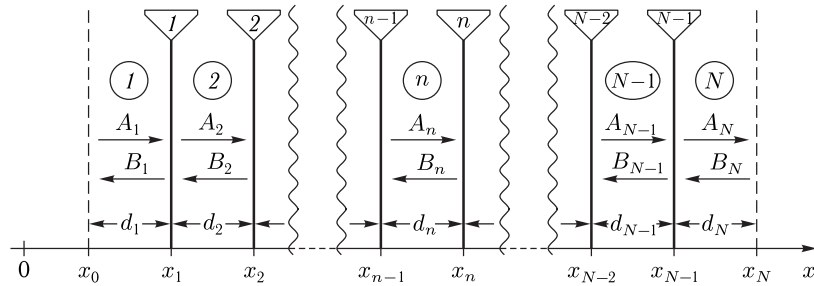


Рис. 11.1. Геометрия задачи

Амплитуды волн, распространяющихся в положительном направлении оси  $Ox$ , обозначены буквами  $A_i$ , в отрицательном —  $B_i$ , волновые числа обозначены далее через  $k_i$ , где  $i$  — номер среды.

Амплитуды волн  $A_1$  и  $B_N$  заданы, то есть на структуру падают две встречные волны: одна слева направо из точки с координатой  $x_0$ , имеющая амплитуду  $A_0$ , другая справа налево из точки с координатой  $x_N$ , имеющая амплитуду  $B_0$  и отставание по фазе относительно первой волны на угол  $\varphi$  (при  $\varphi > 0$ ). При этом

$$A_1 = A_0; \quad (11.1)$$

$$B_N = B_0 e^{-i\varphi}. \quad (11.2)$$

Амплитуды и фазы всех остальных волн определяются амплитудами и соотношением фаз этих двух волн в сочетании с параметрами сред.

Решения волновых уравнений в областях  $1, 2, \dots, N$ , нормированные относительно точек исхода соответствующих волн, имеют вид:

$$U_1 = A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + B_1 e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (11.3)$$

$$U_n = A_n e^{-ik_n(x-x_{n-1})} + B_n e^{ik_n(x-x_n)}; \quad (11.4)$$

$$U_N = A_N e^{-ik_N(x-x_{N-1})} + B_N e^{ik_N(x-x_N)}. \quad (11.5)$$

Для упрощения дальнейшей записи введем обозначения:

$$e_1 = e^{-ik_1(x_1-x_0)}; \quad (11.6)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$e_n = e^{-ik_n(x_n-x_{n-1})}; \quad (11.7)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$e_N = e^{-ik_N(x_N-x_{N-1})}, \quad (11.8)$$

а также

$$e_0 = e^{-i\varphi}. \quad (11.9)$$

### 11.1.2. Балансы потоков энергии на границах внутри многослойной структуры

Рассмотрим балансы энергии на внутренних границах многослойной структуры. Будем пользоваться определением, введенным в работе [1, стр. 39–45, форм. (1.187), (1.197), (1.201)–(1.203), (1.223)], согласно которому комплексный поток энергии одномерной волны с точностью до частоты  $\omega$ , которую для простоты рассмотрения положим равной единице, имеет вид:

$$P = A^2 k, \quad (11.10)$$

где  $A$  — амплитуда и  $k$  — волновое число, оба из которых могут быть комплексными.

**Замечание.** Принятое здесь условие  $\omega = 1$  критичным не является, так как в силу постановки задачи предполагается, что частота волны при распространении внутри структуры не меняется, так что все рассматриваемые далее потоки энергии содержат  $\omega$  в качестве нормирующего коэффициента, который, присутствуя во всех частях соотношений для балансов, сокращается. Считаем также, что поперечная площадь структуры для всех ее слоев остается постоянной, так что, полагая эту площадь равной единице, для простоты обращения вместо выражения «плотность потока энергии» будем использовать выражение «поток энергии». Также заметим, что в проводимом далее рассмотрении фигурируют амплитуды волн, относительно которых предполагается, что они определены заранее из решения задачи о распространении волны с соответствующими граничными условиями любым из методов, описанных в настоящей монографии и ее предыдущих двух частях [1, 2]. Таким образом, в принятых допущениях выражение (11.10) является достаточно общим, как это можно видеть из сравнения его с подобными выражениями для струны (9.35) и электромагнитной волны (9.68), (9.69) и (9.76), (9.77).

В качестве первого этапа найдем потоки энергии, переносимые различными волнами по отдельности в точках границ. Отвлечемся от того, что амплитуды волн  $A_1$  и  $B_N$  заданы и будем рассматривать эти

волны наравне с другими. Пользуясь (11.3)–(11.10), сначала найдем параметры волн в начальных и конечных точках распространения, а затем потоки для различных границ.

Рассмотрим сначала первую границу при  $x = x_1$ . На эту границу падают две волны: из области 1 волна  $A_1$ , имеющая в точке  $x_1$  амплитуду  $A_1 e_1$ , и из области 2 волна  $B_2$ , имеющая в точке  $x_1$  амплитуду  $B_2 e_2$ . Потоки энергии этих волн соответственно равны  $(A_1 e_1)^2 k_1$  и  $(B_2 e_2)^2 k_2$ . Суммарный поток энергии, входящий в границу, равен:

$$P_{in}^{(1)} = (A_1 e_1)^2 k_1 + (B_2 e_2)^2 k_2. \quad (11.11)$$

Из этой границы исходят также две волны: в область 1 волна  $B_1$ , имеющая в точке  $x_1$  амплитуду  $B_1$ , и в область 2 волна  $A_2$ , имеющая в точке  $x_1$  амплитуду  $A_2$ . Потоки энергии этих волн соответственно равны  $B_1^2 k_1$  и  $A_2^2 k_2$ . Суммарный поток энергии, выходящий из границы, равен:

$$P_{out}^{(1)} = B_1^2 k_1 + A_2^2 k_2. \quad (11.12)$$

Соотношение баланса принимает вид:

$$P_S^{(1)} = (A_1 e_1)^2 k_1 + (B_2 e_2)^2 k_2 - B_1^2 k_1 - A_2^2 k_2. \quad (11.13)$$

Из условия сохранения энергии должно выполняться соотношение:

$$P_S^{(1)} = 0. \quad (11.14)$$

Аналогично можно записать соотношение баланса для любой внутренней границы с номером  $n$ , входящей в многослойную структуру, содержащую  $N$  слоев:

$$P_S^{(n)} = (A_n e_n)^2 k_n + (B_{n+1} e_{n+1})^2 k_{n+1} - B_n^2 k_n - A_{n+1}^2 k_{n+1}. \quad (11.15)$$

Соотношение (11.15) пригодно для всех границ с номерами от  $n = 2$  до  $n = N - 2$ . Для первой и последней границ (при  $n = 1$  и  $n = N - 1$ ) надо учитывать соотношения (11.1) и (11.2), а также обозначение (11.9). При этом соотношения баланса на этих границах принимают вид:

$$P_S^{(1)} = (A_0 e_1)^2 k_1 + (B_2 e_2)^2 k_2 - B_1^2 k_1 - A_2^2 k_2; \quad (11.16)$$

$$P_S^{(N-1)} = (A_{N-1} e_{N-1})^2 k_{N-1} + (B_0 e_0)^2 k_N - B_{N-1}^2 k_{N-1} - A_N^2 k_N. \quad (11.17)$$

Условие сохранения энергии требует выполнения соотношения:

$$P_S^{(n)} = 0 \quad (11.18)$$

на всех границах с номерами  $n$  от 1 до  $N - 1$ .

Выполненное авторами настоящей монографии численное вычисление выражения (11.15) для случая сред от трех до пяти показывает полное выполнение соотношения (11.18). Проверка же условия (11.18)

в аналитическом виде требует подстановки в (11.15) явных выражений для амплитуд  $A_n$  и  $B_n$  (например, приведенных в разделе 3.1.3 в виде (3.45), (3.53), (3.63) с раскрытием соответствующих детерминантов), что даже для случая трех сред получается довольно громоздким. Авторы лишь осмеливаются предложить выполнить такую проверку любознательному читателю в качестве полезного упражнения.

### 11.1.3. Балансы потоков энергии на многослойной структуре в целом

Рассмотрим теперь баланс потоков энергии для структуры в целом, состоящей из произвольного числа  $N$  сред.

Прежде всего рассмотрим потоки энергии, переносимые различными волнами по отдельности. Отвлечемся от того, что амплитуды волн  $A_1$  и  $B_N$  заданы, и будем рассматривать эти волны наравне с другими. Сначала, пользуясь (11.3)–(11.10), найдем параметры волн в начальных и конечных точках распространения, а затем потоки для различных областей структуры.

Рассмотрим сначала область № 1.

Волна  $A_1$ :

амплитуда — в точке  $x_0$   $A_1$ ;

в точке  $x_1$   $A_1 \cdot e^{-ik_1(x-x_0)} = A_1 \cdot e_1$ ;

поток энергии в области 1 — входящий  $A_1^2 k_1$ ;

выходящий  $A_1^2 e_1^2 k_1$ ;

локализованный (как разность входящего и выходящего) —

$$\delta P_{A1}^{(1)} = A_1^2 k_1 (1 - e_1^2). \quad (11.19)$$

Волна  $B_1$ :

амплитуда — в точке  $x_0$   $B_1 \cdot e^{ik_1(x_0-x_1)} = B_1 \cdot e_1$ ;

в точке  $x_1$   $B_1$ ;

поток энергии в области 1 — входящий  $B_1^2 k_1$ ;

выходящий  $B_1^2 e_1^2 k_1$ ;

локализованный (как разность входящего и выходящего) —

$$\delta P_{B1}^{(1)} = B_1^2 k_1 (1 - e_1^2). \quad (11.20)$$

Полный поток энергии, локализованный в области 1:

$$\delta P^{(1)} = \delta P_{A1}^{(1)} + \delta P_{B1}^{(1)} = (A_1^2 + B_1^2) k_1 (1 - e_1^2). \quad (11.21)$$

Аналогично находим полные потоки энергии, локализованные в других областях от 2 до  $N$ :

$$\delta P^{(2)} = \delta P_{A2}^{(2)} + \delta P_{B2}^{(2)} = (A_2^2 + B_2^2) k_2 (1 - e_2^2); \quad (11.22)$$

.....

$$\delta P^{(n)} = \delta P_{A_n}^{(n)} + \delta P_{B_n}^{(n)} = (A_n^2 + B_n^2)k_n(1 - e_n^2); \quad (11.23)$$

$$\delta P^{(N)} = \delta P_{A_N}^{(N)} + \delta P_{B_N}^{(N)} = (A_N^2 + B_N^2)k_N(1 - e_N^2). \quad (11.24)$$

Полный поток, локализованный внутри структуры в целом:

$$P_e^{(S)} = \sum_{n=1}^N \delta P^{(n)} = \sum_{n=1}^N (A_n^2 + B_n^2)k_n(1 - e_n^2). \quad (11.25)$$

Учитывая, что на внешних границах структуры амплитуды падающих волн заданы в виде (11.1) и (11.2), а также используя обозначение (11.9), получаем:

$$\begin{aligned} P_e^{(S)} &= \delta P^{(1)} + \sum_{n=2}^{N-1} \delta P^{(n)} + \delta P^{(N)} = \\ &= (A_0^2 + B_1^2)k_1(1 - e_1^2) + \sum_{n=2}^{N-1} \delta P^{(n)} + (A_N^2 + B_0^2 e_0^2)k_N(1 - e_N^2). \end{aligned} \quad (11.26)$$

Найдем теперь потоки энергии, входящие и выходящие относительно структуры в целом.

В структуру входят две волны —  $A_1$  в точке  $x_0$  с амплитудой  $A_0$  и  $B_N$  с амплитудой  $B_0 e_0$  в точке  $x_N$ . Соответственно их потоки равны:

$$P_{in}^{(A1)} = A_1^2 k_1 = A_0^2 k_1; \quad (11.27)$$

$$P_{in}^{(BN)} = B_N^2 k_N = B_0^2 e_0^2 k_N. \quad (11.28)$$

Полный поток энергии, входящий с структуру, равен их сумме:

$$P_{in}^{(S)} = A_0^2 k_1 + B_0^2 e_0^2 k_N. \quad (11.29)$$

Из структуры выходят также две волны — одна из среды 1, из точки  $x_0$ , имеющая в этой точке амплитуду  $B_1 e_1$ ; другая — из среды  $N$ , из точки  $x_N$ , имеющая в этой точке амплитуду  $A_N e_N$ . Соответственно их потоки равны:

$$P_{out}^{(B1)} = B_1^2 e_1^2 k_1; \quad (11.30)$$

$$P_{out}^{(AN)} = A_N^2 e_N^2 k_N. \quad (11.31)$$

Полный поток энергии, выходящий из структуры, равен их сумме:

$$P_{out}^{(S)} = B_1^2 e_1^2 k_1 + A_N^2 e_N^2 k_N. \quad (11.32)$$

Итак, относительно структуры в целом имеются три потока энергии: входящий (11.29)

$$P_{in}^{(S)} = A_0^2 k_1 + B_0^2 e_0^2 k_N; \quad (11.33)$$

выходящий (11.32)

$$P_{out}^{(S)} = B_1^2 e_1^2 k_1 + A_N^2 e_N^2 k_N; \quad (11.34)$$

локализованный (11.26)

$$\begin{aligned} P_e^{(S)} &= \delta P^{(1)} + \sum_{n=2}^{N-1} \delta P^{(n)} + \delta P^{(N)} = \\ &= (A_0^2 + B_1^2)k_1(1 - e_1^2) + \sum_{n=2}^{N-1} \delta P^{(n)} + (A_N^2 + B_0^2 e_0^2)k_N(1 - e_N^2). \end{aligned} \quad (11.35)$$

Из условия сохранения энергии сумма выходящего и локализованного потоков должна быть равна потоку входящему, то есть должно выполняться соотношение

$$P_{in}^{(S)} = P_{out}^{(S)} + P_e^{(S)} \quad (11.36)$$

или

$$P_{in}^{(S)} - P_{out}^{(S)} - P_e^{(S)} = 0. \quad (11.37)$$

Численный расчет зависимостей от толщины отдельных слоев для структур, содержащих от трех до пяти слоев, показывает, что эти соотношения полностью выполняются. Аналитический же расчет хотя бы для случая трех сред авторы лишь могут рекомендовать любознательному читателю в качестве крайне громоздкого, но полезного упражнения.

## 11.2. Энергетические коэффициенты выхода при падении встречных волн на многослойную структуру

В предыдущем разделе рассмотрено распространение волн в многослойной структуре с произвольным числом слоев в случае падения встречных волн на оба конца структуры. Получены балансы потоков энергии на произвольно взятой отдельной границе и на всей структуре в целом. Обратимся теперь к рассмотрению для этого случая энергетических коэффициентов отражения и прохождения. Поскольку поток энергии, выходящий из того или иного конца структуры, будет теперь определяться не одной падающей волной, а двумя, входящими в структуру с обеих ее концов, то такой поток будем называть «выходным» или «выходящим» из структуры, а соответствующие коэффициенты — «коэффициентами выхода».

### 11.2.1. Общая постановка задачи

Будем рассматривать задачу в той же геометрии, что и в предыдущем разделе, представленной на рис. 11.1. Структура состоит из  $N$  слоев, разделенных  $N - 1$  границами. Амплитуды волн, распространяющихся

в положительном направлении оси  $Ox$ , обозначены буквами  $A_n$ , в отрицательном —  $B_n$ , волновые числа —  $k_n$ , где  $n$  — номер слоя. Амплитуды падающих на структуру встречных волн  $A_1$  и  $B_N$  заданы:  $A_1 = A_0$ ,  $B_N = B_0 e^{i\varphi}$ , где  $\varphi$  — фаза волны  $B_N$  относительно волны  $A_1$ . При  $x_0$  и  $x_N$  отражение отсутствует.

Применение прямого метода [1, стр. 190–214], [58, стр. 32–58] к данной задаче дает совокупность решений в слоях  $1, \dots, N$  вида:

$$U_n = A_n e^{-ik_n(x-x_{n-1})} + B_n e^{ik_n(x-x_{n-1})}, \quad (11.38)$$

подстановка которых в граничные условия равенства волновых функций и их производных приводит к системе  $2N - 2$  линейных алгебраических уравнений для амплитуд  $A_2, \dots, A_N, B_1, \dots, B_{N-1}$ , выраженных через амплитуды  $A_0$  и  $B_0$ . Решение такой системы методом Крамера [127, стр. 45, раздел 1.9–2], [128, стр. 54–56] дает детерминанты  $D_0, D_{B1}, D_{A2}, \dots, D_{BN}, D_{AN}$ , определяющие амплитуды волн:

$$A_n = \frac{D_{An}}{D_0}, \quad (11.39)$$

где  $n$  меняется от 2 до  $N$ , а также

$$B_n = \frac{D_{Bn}}{D_0}, \quad (11.40)$$

где  $n$  меняется от 1 до  $N - 1$ .

Для удобства записи далее введены обозначения:

$$e_n = e^{-ik_n(x-x_{n-1})}; \quad (11.41)$$

$$e_0 = e^{-i\varphi}. \quad (11.42)$$

Решение полной задачи нахождения амплитуд волн  $A_n$  и  $B_n$  через  $A_0$  и  $B_0$  при заданных волновых числах  $k_n$  сводится к нахождению детерминантов  $D_0, D_{B1}, D_{A2}, \dots, D_{BN}, D_{AN}$ . Полученные таким образом амплитуды волн в первом и последнем слоях структуры позволяют найти энергетические коэффициенты отражения и прохождения для случая падения одной волны. Поскольку нашей задачей является обобщение традиционных понятий на случай двух встречных волн, то сначала для простоты рассмотрим введение коэффициентов выхода на примере трех сред, после чего обобщим полученные выражения на случай произвольного числа сред.

### 11.2.2. Коэффициенты выхода для трех сред

В случае трех сред  $N = 3$ . Важные для дальнейшего рассмотрения детерминанты имеют вид:

$$D_0 = (k_1 + k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e_2^2; \quad (11.43)$$

$$D_{B1} = (A_{10}e_1)[(k_1 - k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e_2^2] + (B_{30}e_0e_3)4k_2k_3e_2; \quad (11.44)$$

$$D_{A3} = (A_{10}e_1)4k_1k_2e_2 - (B_{30}e_0e_3)[(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e_2^2]. \quad (11.45)$$

Амплитуды соответствующих волн определяются соотношениями типа (11.39), (11.40).

Теперь, следуя классике [1, стр. 82, форм. (2.80)–(2.83)], [4, стр. 67, форм. (27)], а также формулам (8.159), (8.160) раздела 8.4.4 настоящей монографии, введем энергетические коэффициенты:  $R$  — отражения,  $T$  — прохождения. Поскольку эти коэффициенты традиционно определяются через отношение амплитуд двух волн, определим их относительно точек исхода соответствующих волн [1, стр. 112–117].

При падении только одной волны из среды № 1 ( $A_{10} > 0$ ,  $B_{30} = 0$ ) энергетический коэффициент отражения, определенный относительно точек исхода волн — падающей  $x_0$  и отраженной  $x_1$  — имеет вид:

$$R_A = \left| \frac{B_1}{A_{10}e_1} \right|^2. \quad (11.46)$$

При действительном волновом числе в первой среде  $k_1$  (то есть при отсутствии в ней затухания волны), экспонента  $e_1$  имеет чисто мнимый показатель, благодаря чему при взятии модуля дает единицу, в результате чего получаем:

$$R_{AR} = \left| \frac{B_1}{A_{10}} \right|^2. \quad (11.47)$$

Энергетический коэффициент прохождения относительно точек исхода волн — падающей  $x_0$  и проходящей  $x_2$  — имеет вид:

$$T_A = \left| \frac{A_3}{A_{10}e_1} \right|^2 \left| \frac{k_3}{k_1} \right|. \quad (11.48)$$

Здесь по вопросу о правомерности взятия модуля во втором множителе имеются разночтения, частично разобранные в работе [72], а также в главе 10 (раздел 10.2.1). Поскольку классика однозначного ответа на этот вопрос не дает, ограничимся далее записью вида (11.48), при действительных волновых числах сомнения не вызывающей.

При действительном  $k_1$  получаем:

$$T_{AR} = \left| \frac{A_3}{A_{10}} \right|^2 \left| \frac{k_3}{k_1} \right|. \quad (11.49)$$

При падении только одной волны из среды № 3 ( $A_{10} = 0$ ,  $B_{30} > 0$ ) коэффициент отражения, определенный относительно точек исхода волн — падающей  $x_3$  и отраженной  $x_2$  — имеет вид:

$$R_B = \left| \frac{A_3}{B_{30}e_0e_3} \right|^2. \quad (11.50)$$

При действительном волновом числе в третьей среде  $k_3$  и действительном сдвиге фаз между падающими волнами  $\varphi$  показатели экспонент  $e_0$  и  $e_3$  являются чисто мнимыми, в результате чего получаем:

$$R_{BR} = \left| \frac{A_3}{B_{30}} \right|^2. \quad (11.51)$$

Коэффициент прохождения относительно точек исхода волн — падающей  $x_3$  и проходящей  $x_1$  — имеет вид:

$$T_B = \left| \frac{B_1}{B_{30}e_0e_3} \right|^2 \left| \frac{k_1}{k_3} \right|. \quad (11.52)$$

При действительных  $\varphi$  и  $k_3$  получаем:

$$T_{BR} = \left| \frac{B_1}{B_{30}} \right|^2 \left| \frac{k_1}{k_3} \right|. \quad (11.53)$$

При падении сразу двух волн из обеих крайних сред №1 и №3 ( $A_{10} > 0$ ,  $B_{30} > 0$ ), можно ввести «**обобщенные энергетические коэффициенты выхода**» волн  $P$  относительно точек входа (исхода) волн  $x_0$  для  $A_1$  и  $x_3$  для  $B_3$  и выхода (исхода)  $x_1$  для  $B_1$  и  $x_2$  для  $A_3$  с помощью соотношений:

обобщенный коэффициент выхода в первую среду

$$P_1 = R_A + T_B = \left| \frac{B_1}{A_{10}e_1} \right|^2 + \left| \frac{B_1}{B_{30}e_0e_3} \right|^2 \left| \frac{k_1}{k_3} \right|, \quad (11.54)$$

откуда при действительных  $e_0$ ,  $k_1$  и  $k_3$  получаем

$$P_{1R} = R_{AR} + T_{BR} = \left| \frac{B_1}{A_{10}} \right|^2 + \left| \frac{B_1}{B_{30}} \right|^2 \left| \frac{k_1}{k_3} \right|; \quad (11.55)$$

обобщенный коэффициент выхода в третью среду

$$P_3 = R_B + T_A = \left| \frac{A_3}{B_{30}e_0e_3} \right|^2 + \left| \frac{A_3}{A_{10}e_1} \right|^2 \left| \frac{k_3}{k_1} \right|. \quad (11.56)$$

откуда при действительных  $e_0$ ,  $k_1$  и  $k_3$  получаем:

$$P_{3R} = R_{BR} + T_{AR} = \left| \frac{A_3}{B_{30}} \right|^2 + \left| \frac{A_3}{A_{10}} \right|^2 \left| \frac{k_3}{k_1} \right|. \quad (11.57)$$

Введенные так обобщенные коэффициенты не являются объективной мерой потоков энергии, вытекающих из структуры в первую или вторую среду, а позволяют лишь оценить общий характер этих потоков, так как для их определения использованы детерминанты  $D_{B1}$  и  $D_{A3}$ , каждый из которых содержит неразделенными два слагаемых, пропорциональных амплитудам входящих волн  $A_{10}$  и  $B_{30}$ . Для того, чтобы найти «**истинные энергетические коэффициенты выхода**», надо эти слагаемые разделить следующим образом:

$$D_{B1} = D_{B1A} + D_{B1B}, \quad (11.58)$$

где

$$D_{B1A} = A_{10}[(k_1 - k_2)(k_2 + k_3) + (k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e_2^2]; \quad (11.59)$$

$$D_{B1B} = B_{30}e_0 \cdot 4k_2k_3e_2; \quad (11.60)$$

а также

$$D_{A3} = D_{A3A} + D_{A3B}, \quad (11.61)$$

где

$$D_{A3A} = A_{10}4k_1k_2e_2; \quad (11.62)$$

$$D_{A3B} = -B_{30}e_0[(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e_2^2]. \quad (11.63)$$

При этом частичные амплитуды принимают вид:

$$B_{1A} = \frac{D_{B1A}}{D_0}; \quad B_{1B} = \frac{D_{B1B}}{D_0}; \quad A_{3A} = \frac{D_{A3A}}{D_0}; \quad A_{3B} = \frac{D_{A3B}}{D_0}. \quad (11.64)$$

В результате истинные коэффициенты выхода принимают вид: истинный коэффициент выхода в первую среду

$$P_{1S} = \left| \frac{B_{1A}}{A_{10}e_1} \right|^2 + \left| \frac{B_{1B}}{B_{30}e_0e_3} \right|^2 \left| \frac{k_1}{k_3} \right|; \quad (11.65)$$

истинный коэффициент выхода в третью среду

$$P_{3S} = \left| \frac{A_{3A}}{A_{10}e_1} \right|^2 \left| \frac{k_3}{k_1} \right| + \left| \frac{A_{3B}}{B_{30}e_0e_3} \right|^2, \quad (11.66)$$

или при действительных  $e_0$ ,  $k_1$  и  $k_3$ :

истинный коэффициент выхода в первую среду

$$P_{1SR} = \left| \frac{B_{1A}}{A_{10}} \right|^2 + \left| \frac{B_{1B}}{B_{30}} \right|^2 \left| \frac{k_1}{k_3} \right|; \quad (11.67)$$

истинный коэффициент выхода в третью среду

$$P_{3SR} = \left| \frac{A_{3A}}{A_{10}} \right|^2 \left| \frac{k_3}{k_1} \right| + \left| \frac{A_{3B}}{B_{30}} \right|^2. \quad (11.68)$$

### 11.2.3. Коэффициенты выхода для произвольного числа сред

Полученные выражения для коэффициентов можно обобщить на произвольное число  $N$  сред. При этом получаем следующее.

При падении только одной волны из первой среды ( $A_{10} > 0$ ,  $B_{N0} = 0$ ) коэффициент отражения, определенный относительно точек исхода волн — падающей  $x_0$  и отраженной  $x_1$ , имеет вид:

$$R_A^{(N)} = \left| \frac{B_1}{A_{10}e_1} \right|^2. \quad (11.69)$$

При действительном волновом числе в первой среде  $k_1$  (то есть при отсутствии в ней затухания волны) экспонента  $e_1$  имеет чисто мнимый

показатель, благодаря чему при взятии модуля дает единицу, в результате чего получаем:

$$R_{AR}^{(N)} = \left| \frac{B_1}{A_{10}} \right|^2. \quad (11.70)$$

Коэффициент прохождения относительно точек исхода волн — падающей  $x_0$  и проходящей  $x_{N-1}$  — имеет вид:

$$T_A^{(N)} = \left| \frac{A_N}{A_{10}e_1} \right|^2 \left| \frac{k_N}{k_1} \right|. \quad (11.71)$$

При действительном  $k_1$  получаем:

$$T_{AR}^{(N)} = \left| \frac{A_N}{A_{10}} \right|^2 \left| \frac{k_N}{k_1} \right|. \quad (11.72)$$

При падении только одной волны из последней среды №  $N$  ( $A_{10} = 0$ ,  $B_{N0} > 0$ ) коэффициент отражения, определенный относительно точек исхода волн — падающей  $x_N$  и отраженной  $x_{N-1}$  — имеет вид:

$$R_B^{(N)} = \left| \frac{A_N}{B_{N0}e_0e_N} \right|^2. \quad (11.73)$$

При действительном волновом числе в последней среде  $k_N$  и действительном сдвиге фаз между падающими волнами  $\varphi$ , показатели экспонент  $e_0$  и  $e_N$  являются чисто мнимыми, в результате чего получаем:

$$R_{BR}^{(N)} = \left| \frac{A_N}{B_{N0}} \right|^2. \quad (11.74)$$

Коэффициент прохождения относительно точек исхода волн — падающей  $x_N$  и проходящей  $x_1$  — имеет вид:

$$T_B^{(N)} = \left| \frac{B_1}{B_{N0}e_0e_N} \right|^2 \left| \frac{k_1}{k_N} \right|. \quad (11.75)$$

При действительных  $\varphi$  и  $k_N$  получаем:

$$T_{BR}^{(N)} = \left| \frac{B_1}{B_{N0}} \right|^2 \left| \frac{k_1}{k_N} \right|. \quad (11.76)$$

При падении сразу двух волн из обеих крайних сред 1 и  $N$  ( $A_{10} > 0$ ,  $B_{N0} > 0$ ) можно ввести обобщенные коэффициенты выхода волн  $P$  относительно точек входа (исхода) волн  $x_0$  для  $A_1$  и  $x_N$  для  $B_N$  и выхода (исхода)  $x_1$  для  $B_1$  и  $x_{N-1}$  для  $A_N$  с помощью соотношений: обобщенный коэффициент выхода в первую среду

$$P_1^{(N)} = R_A^{(N)} + T_B^{(N)} = \left| \frac{B_1}{A_{10}e_1} \right|^2 + \left| \frac{B_1}{B_{N0}e_0e_N} \right|^2 \left| \frac{k_1}{k_N} \right|, \quad (11.77)$$

откуда при действительных  $e_0$ ,  $k_1$  и  $k_N$  получаем:

$$P_{1R}^{(N)} = R_{AR}^{(N)} + T_{BR}^{(N)} = \left| \frac{B_1}{A_{10}} \right|^2 + \left| \frac{B_1}{B_{N0}} \right|^2 \left| \frac{k_1}{k_N} \right|; \quad (11.78)$$

обобщенный коэффициент выхода в среду с номером  $N$

$$P_3^{(N)} = R_B^{(N)} + T_A^{(N)} = \left| \frac{A_N}{B_{N0}e_0e_N} \right|^2 + \left| \frac{A_N}{A_{10}e_1} \right|^2 \left| \frac{k_N}{k_1} \right|, \quad (11.79)$$

откуда при действительных  $e_0$ ,  $k_1$  и  $k_3$  получаем:

$$P_{NR}^{(N)} = R_{BR}^{(N)} + T_{AR}^{(N)} = \left| \frac{A_N}{B_{N0}} \right|^2 + \left| \frac{A_N}{A_{10}} \right|^2 \left| \frac{k_N}{k_1} \right|. \quad (11.80)$$

Найти истинные коэффициенты выхода можно таким же образом, как это сделано для случая трех сред, путем разделения полных детерминантов на два слагаемых. Получающиеся при этом выражения имеют вид:

истинный коэффициент выхода в первую среду

$$P_{1S} = \left| \frac{B_{1A}}{A_{10}e_1} \right|^2 + \left| \frac{B_{1B}}{B_{N0}e_0e_N} \right|^2 \left| \frac{k_1}{k_N} \right|; \quad (11.81)$$

откуда при действительных  $e_0$ ,  $k_1$  и  $k_N$  получаем:

$$P_{1SR} = \left| \frac{B_{1A}}{A_{10}} \right|^2 + \left| \frac{B_{1B}}{B_{N0}} \right|^2 \left| \frac{k_1}{k_N} \right|; \quad (11.82)$$

истинный коэффициент выхода в среду с номером  $N$

$$P_{NS} = \left| \frac{A_{NA}}{A_{10}e_1} \right|^2 \left| \frac{k_N}{k_1} \right| + \left| \frac{A_{ANB}}{B_{N0}e_0e_N} \right|^2; \quad (11.83)$$

откуда при действительных  $e_0$ ,  $k_1$  и  $k_3$  получаем:

$$P_{NSR} = \left| \frac{A_{NA}}{A_{10}} \right|^2 \left| \frac{k_N}{k_1} \right| + \left| \frac{A_{ANB}}{B_{N0}} \right|^2. \quad (11.84)$$

#### 11.2.4. Интерпретация зависимости коэффициентов от толщины сред

Из полученных выражений можно видеть, что значения коэффициентов должны зависеть от толщин отдельных сред. Рассмотрим теперь эти зависимости на примере трех сред.

В подмодульные выражения для рассматриваемых коэффициентов зависимости от толщины первой и третьей сред входят через экспоненты  $e_1$  и  $e_3$ . Имеется также зависимость от разности фаз между двумя падающими волнами, описываемая экспонентой  $e_0$ . При действительных волновых числах и действительной разности фаз показатели всех этих экспонент являются чисто мнимыми, то есть при взятии модулей дают единицу и на величине коэффициентов никак не сказываются. Если волновые числа первой или третьей сред являются комплексными, то есть содержат ненулевую мнимую часть, то в коэффициентах после взятия модулей появляются действительные множители, экспоненциально спадающие по ходу распространения волны. Мнимая часть в разности фаз  $\varphi$  соответствует умножению амплитуды падающей волны  $B_{30}$  на постоянный действительный коэффициент.

Поскольку подмодульные выражения для коэффициентов, кроме явно входящих в них экспонент  $e_0$ ,  $e_1$  и  $e_3$ , определяются амплитудами волн в первой и третьей средах  $B_1$  и  $A_3$ , обратимся к структуре определяющих их детерминантов  $D_{B1}$  и  $D_{A3}$ .

Как видно из (11.44) и (11.45), какая-либо зависимость этих детерминантов от толщины первой и третьей сред отсутствует, а имеется зависимость только от толщины второй среды, обусловленная наличием экспоненты  $e_2$ . При этом, благодаря комплексному характеру показателя этой экспоненты, зависимость будет осциллирующей (согласно формуле Эйлера для экспоненты, как сумма синусов и косинусов). При чисто действительном волновом числе второй среды  $k_2$  амплитуда осцилляций при изменении толщины второй среды будет сохраняться постоянной, а при наличии мнимой составляющей  $k_2$  амплитуда по мере увеличения толщины будет уменьшаться. Осциллирующий характер зависимости от толщины обусловлен установлением стоячих волн между границами при  $x_1$  и  $x_2$ , то есть наличием пространственного резонатора из-за того, что на этих границах волны могут отражаться. На границах при  $x_0$  и  $x_3$  отражения не происходит, поэтому стоячие волны в первой и третьей средах не образуются и осциллирующие зависимости от толщины первой и третьей сред отсутствуют. В этом случае при наличии мнимых составляющих в волновых числах  $k_1$  и  $k_3$ , отражающих затухание волн в первой и третьей средах, зависимости коэффициентов от толщины этих сред имеются, однако они являются не осциллирующими, а по мере увеличения толщины экспоненциально спадающими (так как в среде с затуханием амплитуда волны по мере увеличения толщины этой среды экспоненциально спадает).

Рассмотренные особенности иллюстрируются рис. 11.2 и рис. 11.3, где показаны зависимости энергетических коэффициентов отражения  $R$  и прохождения  $T$  от толщины второй среды  $d_2$  при падении волны из первой (рис. 11.2 —  $A_{10} = 1$ ,  $B_{30} = 0$ ) и третьей (рис. 11.3 —  $A_{10} = 0$ ,  $B_{30} = 1$ ) сред. Коэффициенты  $R$  и  $T$  определяются по формулам (11.46)–(11.49). На обоих рисунках случай «а» соответствуют отсутствию затухания во всех средах, случай «б» — затуханию только в первой среде, «в» — только во второй и «г» — только в третьей. Волновые числа для случаев а–г, в  $\text{см}^{-1}$  приведены в таблице, где строки соответствуют случаям а–г, столбцы — номерам сред.

Таблица. Волновые числа, характеризующие затухание в различных средах

|   |            |            |            |
|---|------------|------------|------------|
|   | 1          | 2          | 3          |
| а | 1          | 3          | 5          |
| б | $1 - 0,5i$ | 3          | 5          |
| в | 1          | $3 - 0,1i$ | 5          |
| г | 1          | 3          | $5 - 0,5i$ |

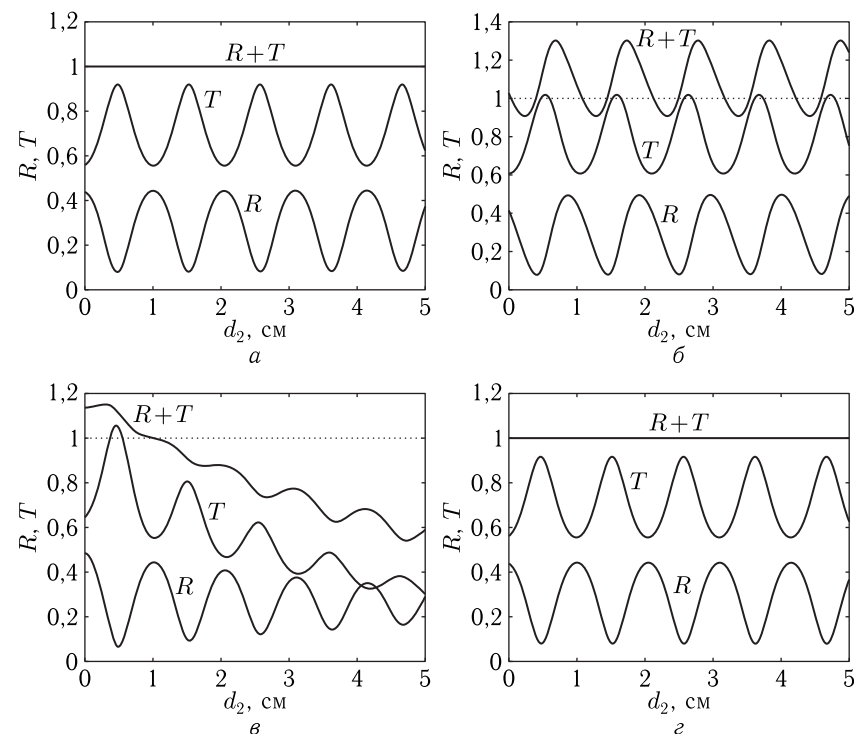


Рис. 11.2. Зависимости коэффициентов отражения и прохождения от толщины второй среды при падении волны из первой среды

Из рис. 11.2, а видно, что оба коэффициента по мере изменения  $d_2$  осциллируют с постоянной амплитудой по закону, близкому к синусоидальному, а сумма их равна единице, в соответствии с законом сохранения энергии.

Из рис. 11.2, б видно, что при наличии затухания в первой среде правильные осцилляции обоих коэффициентов сохраняются, однако их сумма не является постоянной, а также осциллирует с постоянной амплитудой, при некоторых значениях толщины  $d_2$  превышая единицу. Причина такого превышения состоит в модуле второго сомножителя в формуле (11.48) и подробно обсуждается в работе [72] и здесь в главе 10, где для его устранения введены комплексные коэффициенты отражения, прохождения, поглощения, содержащие активную и реактивную части. Здесь мы лишь отмечаем факт превышения, не затрагивая эти коэффициенты ввиду их громоздкости. Из этого рисунка видно также, что отражение вблизи нулевой толщины стало чуть меньше из-за того, что падающая волна до подхода к границе при  $x_1$  на пути от  $x_0$ , где задана ее начальная амплитуда, слегка затухла. Дальше все амплитуды



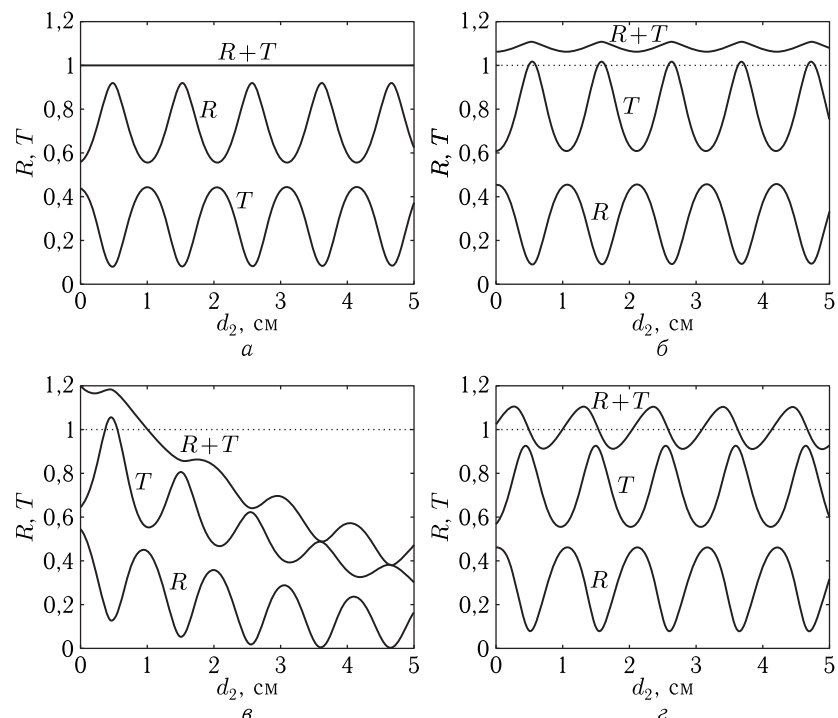


Рис. 11.3. Зависимости коэффициентов отражения и прохождения от толщины второй среды при падении волны из третьей среды

сохраняются постоянными, так как в их формировании затухание падающей волны в первой среде вносит вклад только один раз — на подходе к границе при  $x_1$ , после чего работает резонатор между  $x_1$  и  $x_2$ .

Из рис. 11.2, в видно, что при наличии затухания во второй среде все коэффициенты, сохраняя осциллирующий характер, по мере увеличения ее толщины уменьшаются, что отражает уменьшение амплитуд соответствующих волн. При небольших значениях  $d_2$  превышение суммы коэффициентов над единицей также имеется, однако, в отличие от случая, рассмотренного в работе [72] и здесь в главе 10, при затухании во второй, а не в первой среде. Подробный расчет, подобный выполненному в [72] и здесь в главе 10, показывает, что балансы энергии во всех средах и на границах здесь полностью выполняются.

Рис. 11.2, г совпадает с рис. 11.2, а, по той причине, что параметры третьей среды в выражения для коэффициентов не входят: с физической стороны это объясняется тем, что мы берем амплитуду  $A_3$  в третьей среде — в точке исхода проходящей волны  $x_2$ .

Рассмотрим теперь случай падения волны из третьей среды, иллюстрируемый рис. 11.3.

Рис. 11.3, а по форме совпадает с рис. 11.2, а с той однако разницей, что здесь коэффициенты  $R$  и  $T$  поменялись местами. Такой обмен соответствует изменению направления падающей волны на противоположное и отражает свойство взаимности структуры в целом. Изменение порядка волновых чисел сред на обратный:  $k_1 = 5$ ,  $k_2 = 3$ ,  $k_3 = 1$ , приводит к повторению кривых, приведенных на рис. 11.2 в обратном порядке, что также обусловлено взаимностью структуры. Однако если значения действительных частей волновых чисел брать в первоначальном порядке, то есть  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 3$ ,  $k_3 = 5$ , то здесь при приемной добавке в любой из сред будет проявляться превышение суммы коэффициентов над единицей, что иллюстрируется рис. 11.3, б, в, г. Причина превышения суммы коэффициентов над единицей — та же, что для рис. 11.2, однако значительным отличием от случая, рассмотренного в работе [72] и в главе 10, является наличие превышения при затухании в любой из сред.

Обратимся теперь к рассмотрению коэффициентов выхода при одновременном падении на структуру двух встречных волн.

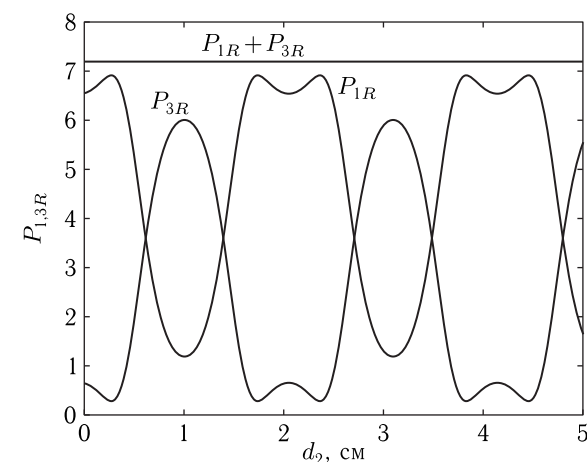


Рис. 11.4. Зависимости обобщенных коэффициентов выхода от толщины второй среды

На рис. 11.4 показаны зависимости обобщенных коэффициентов выхода  $P_{1R}$  и  $P_{3R}$ , а также их суммы от толщины второй среды  $d_2$  при падении двух встречных волн:  $A_{10} = 1$ ,  $B_{30} = 1$ . Как и ранее  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 3$ ,  $k_3 = 5$ . Видно, что в этом случае зависимости обоих коэффициентов от  $d_2$  осциллируют с постоянной амплитудой, однако форма колебаний весьма далека от синусоидальной, что обусловлено сложением волн сразу от двух источников с последующей интерференцией между ними. Сумма коэффициентов выхода в обе стороны постоянна, что находится в соответствии с действительным характером волновых

чисел во всех трех средах. Абсолютная величина этой суммы 7,25 также определяется интерференционным характером сложения волн во всех трех средах.

На рис. 11.5 показаны зависимости истинных коэффициентов выхода  $P_{1SR}$  и  $P_{3SR}$ , а также их суммы от толщины второй среды  $d_2$  при падении двух встречных волн:  $A_{10} = 1$ ,  $B_{30} = 2$  (амплитуды заданы различными, чтобы избежать наложения кривых). Здесь также:  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 3$ ,  $k_3 = 5$ .

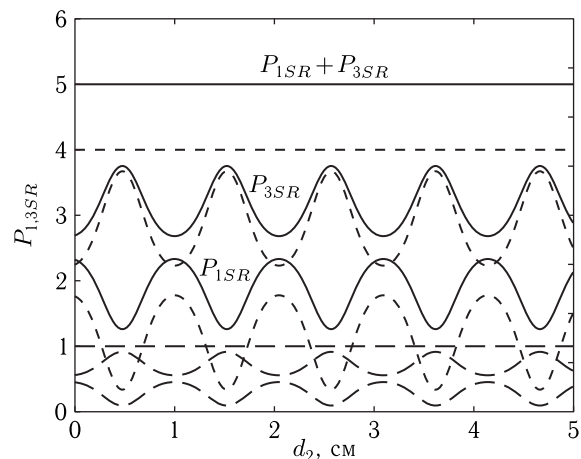


Рис. 11.5. Зависимости истинных коэффициентов выхода от толщины второй среды

На рисунке истинные коэффициенты выхода и их сумма показаны сплошными линиями. Видно, что коэффициенты по отдельности осциллируют по закону, близкому к синусоидальному, причем их сумма остается постоянной. Ее величина равна сумме квадратов входных амплитуд, то есть выполняется соотношение:  $P_{1SR} + P_{3SR} = A_{10}^2 + B_{30}^2$ . Для сравнения на рисунке крупным пунктиром показаны коэффициенты отражения, прохождения и их сумма при  $A_{10} = 1$ ,  $B_{30} = 0$ , мелким — те же коэффициенты при  $A_{10} = 0$ ,  $B_{30} = 2$ . Видно, что полные истинные коэффициенты выхода равны сумме этих коэффициентов с противоположными знаками, то есть суммируются осцилляции с противоположными фазами. Противоположность обусловлена тем, что в первом случае (крупный пунктир) возбуждение волн в структуре осуществляется волной прямого направления (с амплитудой  $A_{10}$ ), а во втором (мелкий пунктир) — волной обратного направления (с амплитудой  $B_{30}$ ). Осцилляции суммарной амплитуды (сплошные кривые) по фазе совпадают с осцилляциями волн обратного направления из-за того, что входная амплитуда этих волн  $B_{30}$  превышает амплитуду волн прямого направления  $A_{10}$ .

Приведенные на рис. 11.4 и рис. 11.5 зависимости соответствуют действительным волновым числам во всех трех средах. Дополнительное исследование показывает, что введение мнимой части волнового числа для любой из сред вызывает осцилляции и превышение суммы коэффициентов над величиной, соответствующей действительным волновым числам, подобно тому, как это происходит для коэффициентов отражения и прохождения (рис. 11.2 и рис. 11.3). Здесь также, по сравнению с работой [72] и главой 10 настоящей монографии, превышение наблюдается не только в первом, но и в двух других случаях.

## Выводы по главе 11

Данная глава посвящена рассмотрению энергетических характеристик распространения одномерной волны через структуры с произвольным числом слоев в случае падения на концы структуры двух встречных волн. Получен баланс энергии на границах раздела сред и на всей структуре в целом, а также коэффициенты выхода относительно всей структуры.

Основные результаты, рассмотренные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрены энергетические характеристики распространения встречных волн через многослойную структуру с произвольным числом слоев. На основе введенного в предыдущей главе определения комплексного потока энергии для одномерной волны рассмотрен баланс энергии входящих и уходящих волн на отдельной границе многослойной структуры. Найдены входящий, уходящий и локализованный потоки энергии относительно многослойной структуры в целом. На примере зависимости перечисленных потоков от толщины слоев пятислойной структуры проверено выполнение баланса, подтвердившее полное соответствие полученных выражений с законом сохранения энергии.

2. На основе решения задачи о падении двух встречных волн на многослойную структуру введено понятие об энергетических коэффициентах выхода, характеризующих отношение потоков энергии волн, выходящих из структуры, к потокам энергии волн, входящих в нее. Проанализированы традиционные определения энергетических коэффициентов отражения и прохождения, показана их недостаточность для описания распространения встречных волн.

3. На примере трехслойной структуры исследованы зависимости коэффициентов отражения, прохождения и выхода от толщины центральной среды. Показано, что при действительных волновых числах всех трех сред сумма коэффициентов отражения и прохождения, а также сумма коэффициентов выхода в обоих направлениях от толщины центральной среды не зависят и сохраняются постоянными. Мнимая составляющая волнового числа приводит к осцилляциям этих сумм и превышению над постоянным значением, причем, в отличие от случая падения одной волны, осцилляции и превышение могут быть вызваны мнимой составляющей волнового числа любой из трех сред.

## Глава 12

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД С КОМПЛЕКСНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Глава посвящена обобщению развитых в предыдущих главах положений об энергетических характеристиках распространяющихся волн в средах с комплексными параметрами на случай электромагнитных волн, падающих по нормали на проводящую пластину, окруженную проводящей средой. Показано, что использование традиционных определений отражательной и пропускательной способностей в случае проводящих сред приводит к нарушению закона сохранения энергии. Предложены определения комплексных энергетических коэффициентов отражения, прохождения, локализации, реактивности и поглощения. На примере зависимостей этих коэффициентов от толщины пластины показано, что введенные определения находятся в полном согласии с требованием сохранения энергии распространяющейся волны.

В главе частично использованы материалы монографии [64, стр. 64–75], а также статей [70, 72–74, 78]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

### 12.1. Общее состояние работ по распространению волн в проводящей среде

Интерес исследователей к вопросам распространения электромагнитных волн через слоистые среды насчитывает многие десятилетия [3–7]. Основное внимание уделялось диэлектрическим средам как материалу для применений в различных оптических устройствах и приборах [188], а также металлическим средам, позволяющим выявить природу и различные механизмы высокой ( $\sim 10^6 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ ) проводимости [116].

В условиях металлической проводимости волна затухает на расстояниях, как правило, меньших длины волны [4, стр. 673–674, форм. (22), табл. 13.1] В то же время в природе существует значительное количество сред со сравнительно небольшой проводимостью, в которых волна до полного затухания способна проходить расстояния, во много раз превышающие ее длину. К таким средам относятся в первую очередь различные полупроводники, полуметаллы, некоторые ферриты, многие ком-

позиционные среды, а также такие широко распространенные в природе объекты, как морская вода, влажная почва, сырой или слегка ионизированный воздух и многие другие. Краткое перечисление некоторых из подобных задач приведено в разделе 10.1 настоящей монографии. Следует заметить, что средам с промежуточной между диэлектрической и металлической проводимостями уделялось значительно меньше внимания.

В то же время подавляющее большинство работ рассматривает падение волны на исследуемую среду из свободного пространства с последующим выходом также в свободное пространство. Таким образом, получается, что исследуемая среда окружена двумя свободными полупространствами, какая-либо проводимость в которых отсутствует. Случай проводящих окружающих сред, за редкими исключениями [160–163 и некоторые другие], также оставлен без должного внимания.

Известные работы, как правило, останавливаются на расчете коэффициентов отражения и прохождения волны по амплитуде. Для энергетических характеристик распространяющихся волн используются такие параметры, как «отражательная» и «пропускательная» способности, представляющие собой отношения потоков энергии соответствующих волн, для вычисления которых предлагается брать квадрат модуля отношения их амплитуд [4, стр. 67, форм. (27), стр. 86, форм. (49)–(51)]. При этом сумма отражательной и пропускательной способностей должна равняться единице, что означает выполнение закона сохранения энергии [4, стр. 67, форм. (28)]. Это положение более или менее хорошо проверено только для случая диэлектрических сред, потери в которых отсутствуют. Для сред с потерями (в первую очередь металлов) вводится понятие «поглощательной способности», которая вычисляется как разность между единицей и суммой отражательной и пропускательной способностей, в результате чего выполнение закона сохранения энергии обеспечивается автоматически [4, стр. 682, сноска (\*\*), а также форм (32)]. В то же время прямое вычисление поглощательной способности, как правило, не проводится.

Материал настоящей главы посвящен некоторому (разумеется, далеко не исчерпывающему) восполнению перечисленных промежутков. Рассмотрено падение электромагнитной волны на проводящую пластину, окруженную двумя проводящими полупространствами, причем проводимость как пластины, так и окружающих сред полагается произвольной (то есть может меняться от нулевой до металлической). Рассмотрены энергетические параметры распространения волны, показана ограниченность традиционных определений таких параметров и предложена новая концепция, состоящая в учете их комплексной природы.

### 12.2. Геометрия задачи

Рассмотрим случай нормального падения электромагнитной волны на плоскопараллельную пластину, окруженную двумя идентичными полупространствами. Геометрия задачи подобна рассмотренной

в работе [66] и здесь представленной на рис. 8.3 в разделе 8.5.1. Для удобства дальнейшего рассмотрения приведем эту геометрию здесь еще раз на рис. 12.1.

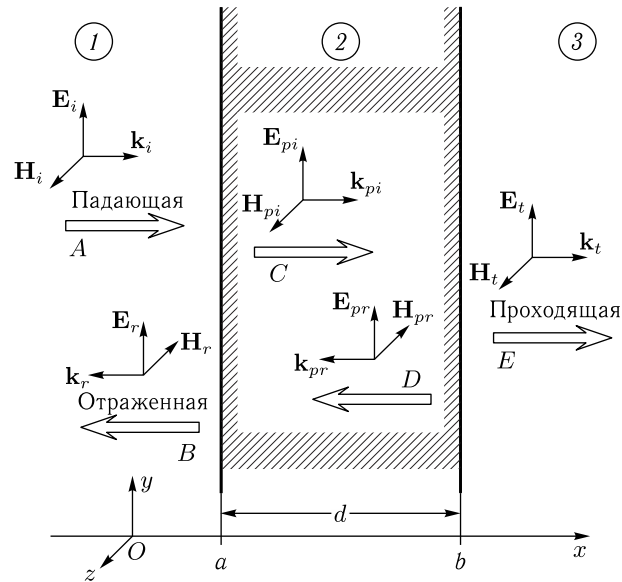


Рис. 12.1. Геометрия задачи

Здесь показано распространение волны через три среды: пластину 2 и окружающие ее полупространства 1 и 3. Система координат  $Oxyz$  выбрана таким образом, что плоскость  $Oyz$  параллельна плоскости пластины, а ось  $Ox$  ей перпендикулярна. Координаты поверхностей пластины равны  $a$  и  $b$ , причем толщина пластины  $b - a = d$ . Направление распространения всех волн параллельно оси  $Ox$ . Вне пластины в среде 1 распространяются две волны: падающая с амплитудой  $A$  и отраженная с амплитудой  $B$ , а в среде 3 — проходящая с амплитудой  $E$ . Внутри пластины в положительном направлении оси  $Ox$  распространяется волна с амплитудой  $C$ , в отрицательном — с амплитудой  $D$ . Ориентация волновых векторов и векторов электрического и магнитного полей всех волн показаны на рисунке. Зависимость от времени предполагается в виде  $\exp(i\omega t)$ . Так как все среды являются проводящими, то их диэлектрическая проницаемость является комплексной:

$$\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_i - i \frac{\sigma_i}{\varepsilon_0 \omega}, \quad (12.1)$$

где индекс  $i = 1, 2, 3$  означает номер среды, а  $\sigma_i$  — проводимость соответствующей среды.

Введем обозначения:

$$\varepsilon_{ri} = \varepsilon_i, \quad (12.2)$$

$$\varepsilon_{\sigma i} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_0 \omega}. \quad (12.3)$$

В этих обозначениях комплексная диэлектрическая проницаемость принимает вид:

$$\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_{ri} - i \varepsilon_{\sigma i}. \quad (12.4)$$

При этом волновые числа распространяющихся волн становятся комплексными. Чтобы подчеркнуть комплексный характер волновых чисел, введем для них обозначения:

$$q_1 = \eta_1 - i \xi_1; \quad (12.5)$$

$$q_2 = \eta_2 - i \xi_2; \quad (12.6)$$

$$q_3 = \eta_3 - i \xi_3, \quad (12.7)$$

где

$$\eta_i = k_0 \frac{\sqrt{\mu_i \varepsilon_{ri}}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon_{\sigma i}}{\varepsilon_{ri}}\right)^2}}, \quad (12.8)$$

$$\xi_i = k_0 \frac{\sqrt{\mu_i \varepsilon_{ri}}}{\sqrt{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon_{\sigma i}}{\varepsilon_{ri}}\right)^2}}, \quad (12.9)$$

где  $i = 1, 2, 3$ , а также

$$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \quad (12.10)$$

— волновое число волны частоты  $\omega$  в свободном пространстве,  $\mu_0$  и  $\varepsilon_0$  — магнитная и электрическая постоянные системы СИ. Магнитную проницаемость  $\mu_i$  во всех средах полагаем равной единице. Из (12.8) и (12.9) можно видеть, что  $\eta_i \geq 0$ ,  $\xi_i \geq 0$ .

### 12.3. Амплитудные параметры распространяющихся волн

Выполняя действия, аналогичные проведенным в разделе 8.5.1, запишем решения волновых уравнений для всех волн в трех средах, подставим их в граничные условия равенства касательных составляющих полей на границах раздела сред и решим полученную систему уравнений для амплитуд волн  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  относительно  $A$ .

Введем импедансы сред с помощью формулы [1, стр. 50, форм. (1.258); стр. 53, форм. (1.306)], [143, стр. 199, форм. (7.4)]:

$$Z_i = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_i}{\varepsilon_i}}, \quad (12.11)$$

где

$$Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \quad (12.12)$$

импеданс свободного пространства, учтем идентичность параметров первой и третьей сред (то есть  $q_3 = q_1$ ), а также положим  $A = 1$ .

В результате получим амплитуды электрических полей распространяющихся волн в виде, с точностью до обозначений совпадающем с (8.183)–(8.186):

$$B = -\frac{(Z_1^2 - Z_2^2)(e^{iq_2d} - e^{-iq_2d})}{(Z_1 + Z_2)^2 e^{iq_2d} - (Z_1 - Z_2)^2 e^{-iq_2d}}; \quad (12.13)$$

$$C = \frac{2Z_2(Z_1 + Z_2)e^{iq_2d}}{(Z_1 + Z_2)^2 e^{iq_2d} - (Z_1 - Z_2)^2 e^{-iq_2d}}; \quad (12.14)$$

$$D = \frac{2Z_2(Z_1 - Z_2)e^{-iq_2d}}{(Z_1 + Z_2)^2 e^{iq_2d} - (Z_1 - Z_2)^2 e^{-iq_2d}}; \quad (12.15)$$

$$E = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2 e^{iq_2d} - (Z_1 - Z_2)^2 e^{-iq_2d}}. \quad (12.16)$$

Здесь, по сравнению с (8.183)–(8.186), действительные волновые числа  $k_i$  заменены на комплексные волновые числа  $q_i$ , а выражения для полей  $E_{r0}$ ,  $E_{pi0}$ ,  $E_{pr0}$ ,  $E_{t0}$  для простоты обозначены буквами  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ .

Амплитуды магнитных полей волн определяются теми же соотношениями с учетом импеданса среды, например с помощью формул типа (8.170), (8.172), (8.174).

#### 12.4. Традиционные энергетические параметры распространяющихся волн

Рассмотрим сначала традиционное определение энергетических параметров распространяющихся волн.

Согласно [4, стр. 67, форм. (27); стр. 86, форм. (51)], при идентичных параметрах первой и третьей сред, то есть при  $q_3 = q_1$ , отражательной способностью  $R_{ec}$  является квадрат модуля отраженной волны, пропускательной  $T_{ec}$  способностью — квадрат модуля проходящей волны, то есть

$$R_{ec} = |B|^2; \quad (12.17)$$

$$T_{ec} = |E|^2, \quad (12.18)$$

причем должно выполняться соотношение [4, стр. 67, форм. (28)]

$$R_{ec} + T_{ec} = 1, \quad (12.19)$$

отражающее закон сохранения энергии.

#### 12.5. Традиционные энергетические характеристики при изменении параметров сред

Рассмотрим теперь, как энергетические параметры (12.17)–(12.19) ведут себя при изменении параметров сред. Благодаря модулям все они являются действительными. Рассмотрим, как зависят эти величины от толщины пластины, полагая общие параметры следующими:  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 5$ ,  $\mu_{1,2} = 1$ ,  $\omega = 10^{11}$  рад с<sup>-1</sup>.

##### 12.5.1. Диэлектрическая пластина между двух диэлектрических сред

Обратимся сначала к случаю диэлектрических сред, иллюстрируемому рис. 12.2, где показаны зависимости  $R_{ec}$  и  $T_{ec}$  от нормированной толщины пластины  $d/\lambda_2$  (где  $\lambda_2$  — длина волны в среде 2), построенные по формулам (12.17) и (12.18) с учетом (12.13) и (12.16) при нулевых проводимостях  $\sigma_1 = 0$ ;  $\sigma_2 = 0$ . Кривая 1 соответствует  $R_{ec}$ , кривая 2 —  $T_{ec}$ .

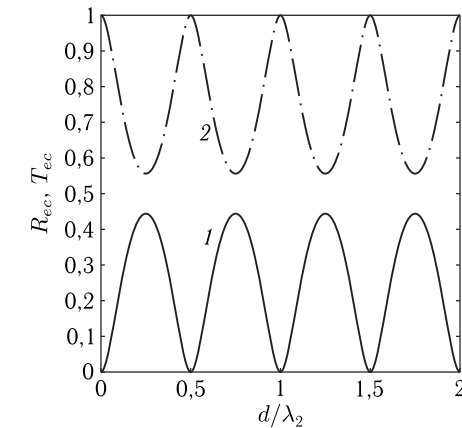


Рис. 12.2. Зависимости отражательной (1) и пропускательной (2) способностей от нормированной толщины пластины  $d/\lambda_2$  в случае диэлектрических сред:  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = 0$

Осциллирующий характер кривых обусловлен интерференционными явлениями на двух границах, причем экстремумы соответствуют толщине пластины, кратной целому числу четвертей длин волн. Обе кривые осциллируют в противофазе с одинаковой амплитудой, максимальные значения обеих величин не превышают единицу, причем их сумма  $R_{ec} + T_{ec}$  всегда равна единице в полном соответствии с соотношением (12.19).

##### 12.5.2. Диэлектрическая пластина между двух проводящих сред

Рассмотрим теперь среды с проводимостью. Обратимся для начала к случаю диэлектрической пластины, окруженной двумя проводящими

полупространствами. Пусть, например, проводимости сред равны:  $\sigma_1 = 5 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ ,  $\sigma_2 = 0$ . Соответствующие зависимости для  $R_{ec}$  и  $T_{ec}$  показаны на рис. 12.3. Кривая 1 соответствует  $R_{ec}$ , кривая 2 —  $T_{ec}$ , кривая 3 — их сумме  $R_{ec} + T_{ec}$ .

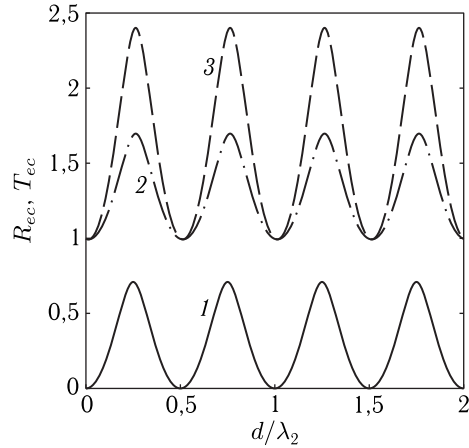


Рис. 12.3. Зависимости отражательной (1) и пропускательной (2) способностей от нормированной толщины пластины  $d/\lambda_2$  в случае диэлектрической пластины в проводящей среде:  $\sigma_1 = 5 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ ,  $\sigma_2 = 0$

Из рисунка видно, что осциллирующий характер кривых и постоянство их амплитуды сохраняется. Это происходит благодаря отсутствию затухания волны во второй среде. Однако теперь противофазный характер кривых нарушается, а максимальные значения как пропускательной способности  $T_{ec}$ , так и суммы  $R_{ec} + T_{ec}$  значительно превышают единицу, то есть условие (12.19) не выполняется.

Проверка показывает, что введение проводимости во вторую среду приводит к затухающему характеру кривых, причем условие (12.19) по-прежнему не выполняется.

Таким образом, можно сделать вывод, что использование в качестве энергетических параметров распространяющейся волны отражательной и пропускательной способностей в традиционном виде (12.17) и (12.18) корректно только при отсутствии проводимости в обеих средах, то есть когда эти среды являются диэлектриками.

## 12.6. Комплексные энергетические параметры распространяющихся волн

Продемонстрированная неприменимость традиционных энергетических параметров для проводящих сред требует поиска других возможностей. Следуя правилам, приведенным в разделе 10.5 главы 10,

введем в рассмотрение комплексные энергетические параметры как отношения комплексных потоков энергии распространяющихся волн. Будем полагать, что поток энергии волны равен частному от деления квадрата амплитуды электрического поля на импеданс соответствующей среды. При этом энергетические параметры для каждой из волн будем рассматривать как отношение потока энергии этой волны к потоку энергии падающей волны. При распространении в проводящей среде амплитуда волны уменьшается в соответствии с экспоненциальным множителем, показатель которого определяется мнимой частью волнового числа. При этом поток энергии волны также уменьшается пропорционально квадрату того же множителя. Если волна проходит участок среды, ограниченный с обеих сторон частично отражающими границами, то внутри этого участка происходит частичная локализация волны, состоящая с одной стороны в периодическом запасании и отдаче энергии в течение следующих во времени друг за другом полупериодов колебаний, а с другой — в частичном ее поглощении, то есть волна проявляет как реактивные, так и активные свойства.

Учитывая перечисленные обстоятельства, получаем следующие комплексные энергетические коэффициенты.

Энергетический коэффициент отражения

$$R_e = B^2; \quad (12.20)$$

Энергетический коэффициент прохождения

$$T_e = E^2. \quad (12.21)$$

Энергетический коэффициент локализации

$$P_e = [C^2(1 - e^{-2iq_2d}) - D^2(1 - e^{2iq_2d})] \frac{Z_1}{Z_2}. \quad (12.22)$$

Энергетический коэффициент реактивности

$$S_e = [C^2(1 - e^{-2i\eta_2d})e^{-2\xi_2d} - D^2(1 - e^{2i\eta_2d})e^{2\xi_2d}] \frac{Z_1}{Z_2}. \quad (12.23)$$

Энергетический коэффициент поглощения

$$A_e = [C^2(1 - e^{-2\xi_2d}) - D^2(1 - e^{2\xi_2d})] \frac{Z_1}{Z_2}. \quad (12.24)$$

Согласно определению,

$$P_e = S_e + A_e, \quad (12.25)$$

так что закон сохранения энергии требует выполнения соотношений:

$$R_e + T_e + P_e = 1; \quad (12.26)$$

$$R_e + T_e + S_e + A_e = 1. \quad (12.27)$$

### 12.7. Энергетические характеристики при изменении параметров сред

Рассмотрим теперь, как коэффициенты (12.20)–(12.27) ведут себя при изменении параметров сред. Поскольку закон сохранения энергии требует равенства сумм  $R_e + T_e + P_e$  и  $R_e + T_e + S_e + A_e$  действительной единице, то будем рассматривать действительные части упомянутых коэффициентов.

#### 12.7.1. Диэлектрическая пластина между двух диэлектрических сред

Обратимся сначала к случаю, когда как пластина, так и окружающие среды являются диэлектриками, то есть проводимость во всех средах отсутствует:  $\sigma_1 = 0$ ;  $\sigma_2 = 0$ . Этот случай иллюстрируется рис. 12.4, где показаны зависимости действительных частей энергетических коэффициентов  $R_e$  (кривая 1),  $T_e$  (кривая 2),  $P_e$  (кривая 3),  $S_e$  (кривая 4),  $A_e$  (кривая 5), а также их сумм  $R_e + T_e + P_e$  и  $R_e + T_e + S_e + A_e$  (кривая 6) от нормированной толщины пластины при отсутствии проводимости во всех средах.

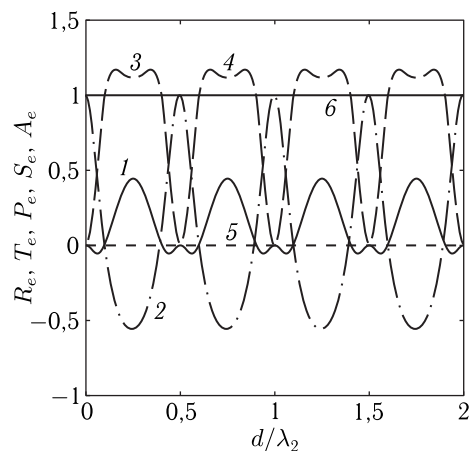


Рис. 12.4. Зависимости действительных частей энергетических коэффициентов (номера кривых указаны в тексте) от нормированной толщины пластины  $d/\lambda_2$  при отсутствии проводимости во всех средах:  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = 0$

Из рисунка видно, что все коэффициенты осциллируют подобно кривым, приведенным на рис. 12.2 и рис. 12.3. Причина осцилляций — те же интерференционные явления на двух границах сред. Коэффициент отражения  $R_e$  (1) и коэффициент прохождения  $T_e$  (2) принимают как положительные, так и отрицательные значения, что отражает изменение фаз отраженной и проходящей волн относительно фазы падающей волны. Превышение значений коэффициента локализации  $P_e$  (3)

над единицей отражает увеличение амплитуды локализованной волны по сравнению с падающей за счет резонансного характера отражения волн от границ внутри пластины. Коэффициент реактивности  $S_e$  (4) при этом совпадает с коэффициентом локализации  $P_e$  (3), а коэффициент поглощения  $A_e$  равен нулю, что отражает чисто реактивный характер локализации энергии внутри пластины в отсутствие потерь. Обе суммы  $R_e + T_e + P_e$  и  $R_e + T_e + S_e + A_e$  при любых значениях толщины пластины всегда равны единице (кривая 6), что полностью соответствует закону сохранения энергии.

#### 12.7.2. Диэлектрическая пластина между двух проводящих сред

Рассмотрим теперь, как меняется описанная картина, если среда, окружающая пластину, является проводящей:  $\sigma_1 = 5 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ ;  $\sigma_2 = 0$ . Этот случай иллюстрируется рис. 12.5, где показаны те же зависимости, что и на рис. 12.4 с той же нумерацией кривых.

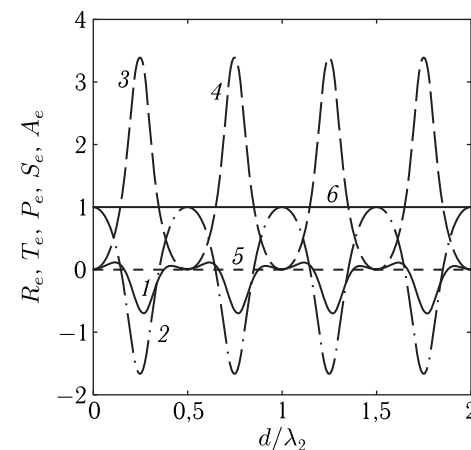


Рис. 12.5. Зависимости действительных частей энергетических коэффициентов (номера кривых — те же, что на рис. 12.4) от нормированной толщины пластины  $d/\lambda_2$  для случая диэлектрической пластины в проводящей среде:  $\sigma_1 = 5 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ ,  $\sigma_2 = 0$

Из рисунка видно, что общий характер осцилляций всех коэффициентов сохраняется. Коэффициент отражения  $R_e$  (1) меняет знак, что означает изменение фазы отраженного сигнала относительно фазы падающего. Общий характер поведения коэффициентов прохождения  $T_e$  (2), локализации  $P_e$  (3) и реактивности  $S_e$  (4) сохраняется, но амплитуда осцилляций несколько увеличивается. При этом коэффициент поглощения  $A_e$  по-прежнему равен нулю. Такое поведение коэффициентов отражает более благоприятные условия распространения волны в пластине, где затухание отсутствует, по сравнению с окружающей средой, обеспечивающей сильное затухание как падающей, так и проходящей волн.

Обе суммы  $R_e + T_e + P_e$  и  $R_e + T_e + S_e + A_e$  по-прежнему при любых значениях толщины пластины всегда равны единице (кривая 6), что полностью соответствует закону сохранения энергии.

### 12.7.3. Проводящая пластина между двух проводящих сред

Обратимся теперь к случаю, когда как пластина, так и окружающие среды являются проводящими:  $\sigma_1 = 5 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ ;  $\sigma_2 = 2 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ . Этот случай иллюстрируется рис. 12.6, где показаны те же зависимости, что и на предыдущих рис. 12.4 и рис. 12.5 с той же нумерацией кривых.

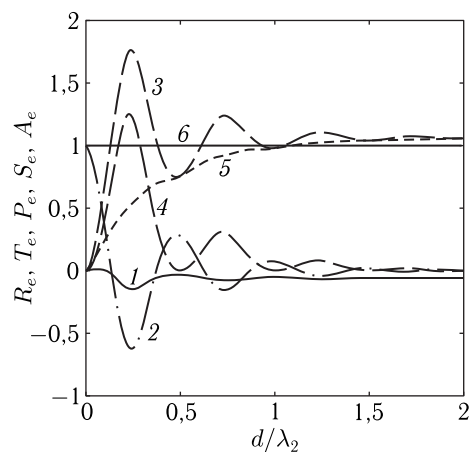


Рис. 12.6. Зависимости действительных частей энергетических коэффициентов (номера кривых — те же, что на рис. 12.4) от нормированной толщины пластины  $d/\lambda_2$  для случая проводящей пластины в проводящей среде:  $\sigma_1 = 5 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ ,  $\sigma_2 = 2 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$

Из рисунка видно, что осциллирующий характер всех кривых заметно изменился: при увеличении толщины пластины все осцилляции затухают, стремясь к постоянным значениям. При этом коэффициент отражения  $R_e$  (1) стремится к величине, порядка  $-0,06$ , отрицательный характер которой отражает изменение фазы отраженной волны. Коэффициент прохождения  $T_e$  (2) стремится к нулю, так как через достаточно толстую пластину волна не проходит. Коэффициент локализации  $P_e$  (3), проходя через ряд затухающих осцилляций, стремится к величине  $1,06$ , которая складывается из реактивной и поглощаемой частей. Коэффициент реактивности  $S_e$  (4) стремится к нулю, так как при большой толщине пластины волна до второй границы не доходит и интерференционные явления не возникают. Коэффициент поглощения  $A_e$  (5), монотонно увеличиваясь, стремится к постоянной величине  $1,06$ , что соответствует полному затуханию волны при достаточно большой толщине пластины. Тот факт, что коэффициент поглощения

несколько превышает единицу, обусловлен поглощением энергии волны в первой среде: при  $\sigma_1 = 0$  коэффициент поглощения всегда меньше единицы. Обе суммы  $R_e + T_e + P_e$  и  $R_e + T_e + S_e + A_e$ , как и в предыдущих двух случаях, при любых значениях толщины пластины всегда равны единице (кривая 6), что полностью соответствует закону сохранения энергии.

### 12.8. Замечание о возможном развитии исследований

Проведенное в этой главе рассмотрение касается нормального падения волны на плоскость структуры. Однако, благодаря трехмерному характеру электромагнитной волны, значительный интерес представляет рассмотрение особенностей энергетических параметров при наклонном падении волны на плоскость структуры.

Амплитуды распространяющихся волн при наклонном падении электромагнитной волны на две граница раздела получены в монографии [1, стр. 145–186]. Коэффициенты отражения и прохождения приведены для случая бездиссипативных сред, когда все параметры распространения являются действительными. Можно полагать, что рассмотрение сред с диссипацией потребует учета энергетических характеристик в комплексном виде. Эта задача частично затронута в [1, стр. 192–195], в том числе там же на рис. 4.10 отмечено сильное превышение коэффициента прохождения над единицей, имеющее осциллирующий характер в зависимости от угла падения волны. Однако комплексная трактовка наблюдаемого явления отсутствует. Можно полагать, что подобное рассмотрение представляет интерес в качестве отдельной задачи.

Положенное в разделе 12.2 условие  $\mu_{1,2,3} = 1$ , будучи довольно распространенным, главным образом в оптике, однако не является полностью общим. В отличие от диэлектрической проницаемости, в довольно широком диапазоне от частоты не зависящей, магнитная проницаемость, благодаря явлению ферромагнитного резонанса, а также резонанса доменных границ, имеет четко выраженную частотную зависимость резонансного характера. Особенно ярко такая зависимость проявляется в ферромагнитных диэлектриках — ферритах [18–20, 24–27]. Значительных величин магнитная проницаемость может достигать также в области ориентационных переходов [26, 27]. Ряд явлений, касающихся отражения электромагнитных волн от поверхности ферромагнитного диэлектрика, в первую очередь частотно-полевые зависимости, рассмотрены в монографиях [189, стр. 42–83] и [190, стр. 139–180], а также в цитированных там статьях. Отмечалась минимизация отражения при условии равенства магнитной и диэлектрической проницаемостей отражающей среды. Однако прохождение даже через один слой, а также распространение волн в многослойных средах, обладающих частотно-зависимой магнитной проницаемостью, не исследовалось. Оставался открытым также вопрос, касающийся наклонного падения волны на плоскость структуры. В монографии [1, стр. 186–192] частично



рассмотрена роль магнитной проницаемости в задаче о распространении электромагнитной волны через три магнитных среды. Отмечено аномальное поведение угла Брюстера, состоящее в уменьшении этого угла вплоть до пропадания минимума отражения при увеличении магнитной проницаемости. В работе [73] рассмотрена роль магнитной проницаемости в той же геометрии для магнитных сред с потерями. Получены комплексные энергетические характеристики распространяющейся волны, в том числе в условиях наклонного падения. Однако выполненное там рассмотрение является неполным и крайне конспективным, в том числе без должного учета особенностей резонансного характера. Авторы настоящей монографии полагают, что здесь также остается определенный простор для развития подобного направления исследований, так что осмеливаются его рекомендовать любознательному читателю в качестве самостоятельной задачи.

### Выводы по главе 12

Данная глава посвящена обобщению развитых в предыдущих главах положений об энергетических характеристиках распространения волн в средах с комплексными параметрами на случай электромагнитных волн. Для проводящих сред предложены определения комплексных энергетических коэффициентов отражения, прохождения, локализации, реактивности и поглощения, позволяющие обеспечить полное соответствие энергетических характеристик распространения волн законам сохранения энергии.

Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрено падение электромагнитной волны на проводящую пластину, окруженную двумя проводящими полупространствами, причем проводимость как пластины, так и окружающих сред полагается произвольной. На основе рассмотрения энергетических параметров распространяющихся волн показано, что использование традиционных определений отражательной и пропускательной способностей приводит к противоречию с законом сохранения энергии. Предложены новые определения комплексных энергетических коэффициентов отражения, прохождения, локализации, реактивности и поглощения.

2. На примерах диэлектрической и проводящей пластин, окруженных диэлектрическими и проводящими средами, исследованы зависимости энергетических коэффициентов от толщины пластины. Показано, что в случае диэлектрической пластины эти зависимости имеют осциллирующий характер с постоянной амплитудой, определяемой соотношением параметров пластины и окружающих сред. В случае проводящей пластины осцилляции энергетических коэффициентов по мере увеличения толщины пластины затухают, стремясь к постоянным значениям.

3. Для случая трех сред с одинаковыми параметрами первой и третьей сред рассмотрены все возможные варианты произвольных проводи-

мости и диэлектрических проницаемостей. Показано, что во всех этих случаях сумма коэффициентов отражения, прохождения и локализации или отражения, прохождения, реактивности и поглощения всегда равна единице в полном соответствии с законом сохранения энергии.

4. Кратко обсуждены возможности дальнейшего развития исследований. Отмечена целесообразность рассмотрения энергетических характеристик распространяющейся волны в условиях наклонного падения на плоскость структуры. Отмечена роль магнитной проницаемости в рассматриваемых задачах. Приведены рекомендации учета частотно-полевого резонансного характера магнитной проницаемости, а также рассмотрения задач для многослойных структур с учетом наклонного падения волны на плоскость структуры.

## Глава 13

**ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЙ ПОТОК ЭНЕРГИИ  
РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВОЛН**

Глава посвящена рассмотрению широко распространенного понятия «интерференционного потока», используемого при анализе распространения волн через многослойные структуры с неоднородностями различного вида, как правило, обладающими диссипацией. Рассмотрение ограничено начальным представлением об интерференционном потоке, в первую очередь его классической трактовкой. Отмечена неоднозначность классического определения, особенно в применении к случаю падения волны на структуру из диссипативной среды. Обсуждена искусственность некоторых определений и дана интерпретация на основе комплексного представления энергетических характеристик распространяющейся волны. Предлагаемая авторами трактовка понятия интерференционного потока основана на их собственных представлениях физической картины явления, так что в определенной степени носит дискуссионный характер. В любом случае авторы будут благодарны за любую конструктивную критику.

В главе частично использованы материалы монографии [64], а также статей [70, 72, 73, 75, 80, 82, 86, 166, 167]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

**13.1. История понятия интерференционного потока**

Понятие «интерференционный поток» широко обсуждалось в литературе с первой половины XX века. Издавна главной областью исследований здесь явилось рассмотрение энергетических характеристик отражения света от границы раздела двух сред. При этом теоретический анализ такого отражения для случая падения света из поглощающей среды на непоглощающую приводил к нарушению закона сохранения энергии, для компенсации которого и было введено понятие интерференционного потока.

Обширную библиографию применения этого понятия к балансу энергии на границе раздела двух сред можно найти, например, в фундаментальной монографии [8].

Одним из предлагавшихся механизмов компенсации нарушения сохранения энергии является возникновение в области перекрытия падающей и отраженной волн стоячей волны, переносящей через границу необходимое количество энергии [8, стр. 93].

В качестве других механизмов «исправления» баланса энергии предлагается новое определение коэффициента прохождения волны, содержащее действительную часть отношения комплексных волновых чисел сред [161], введение «фиктивного» слоя, в пределах которого взаимодействие волн имеется, а вне отсутствует [163], или рассмотрение «неразделяющегося» потока энергии в поглощающей среде [191, 192].

В работе [193] констатируется неаддитивность вектора Пойнтинга внутри поглощающей среды, отражающая нарушение баланса, которое компенсируется при частичном нарушении когерентности волн.

В последние годы понятие «интерференционного потока», кроме задач отражения, широко применяется также для описания интерференции однонаправленных и встречных волн, распространяющихся в однородных средах, в том числе в свободном пространстве, причем делается вывод об универсальности этого понятия для волн различных типов (электромагнитных, акустических, спиновых и других) [165].

Ввиду великого множества и значительного различия упомянутых предложений, рассмотрим некоторые из них более подробно.

**13.2. Общие положения о потоке энергии**

Традиционной областью применения понятия интерференционного потока является оптика, так что теоретическое рассмотрение, как правило, выполняется для электромагнитных волн. Поэтому, следуя традиции, отвлечемся на время от одномерных волн и обратимся к электромагнитным.

**13.2.1. Поток энергии в непоглощающей среде**

Как отмечено в разделе 9.4 (форм. (9.80)), поток энергии электромагнитной волны в отсутствие поглощения описывается вектором Пойнтинга, в системе СИ имеющим вид [135]:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]. \quad (13.1)$$

В системе СГС тот же вектор имеет вид [135]:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]. \quad (13.2)$$

**13.2.2. Поток энергии в поглощающей среде**

В случае поглощающей среды для расчета потоков энергии используется метод комплексных амплитуд.

В этом случае вектор Пойнтинга (13.1)–(13.2) становится комплексным и принимает вид:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}_c \times \mathbf{H}^*]. \quad (13.3)$$

В системе СГС тот же вектор имеет вид:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]. \quad (13.4)$$

При усреднении по времени к этим выражениям добавляется коэффициент  $1/2$ , например [194, стр. 128, форм. (30)]:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*], \quad (13.5)$$

а также [144, стр. 20, форм. (5.12)]

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]. \quad (13.6)$$

Физически реализуемый вектор Пойнтинга имеет вид:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*], \quad (13.7)$$

а также

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*], \quad (13.8)$$

Подробное преобразование (13.1)–(13.2) в (13.3)–(13.8) при переходе к комплексным переменным любознательный читатель может найти в виде леммы над комплексными числами, приведенной в [144, стр. 19].

### 13.2.3. Баланс энергии для непоглощающих сред

При падении волны на границу раздела двух сред векторы потоков энергии имеют вид [8, стр. 81]:

волна падающая

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}], \quad (13.9)$$

волна отраженная

$$\mathbf{S}_r = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}_r \times \mathbf{H}_r], \quad (13.10)$$

волна проходящая

$$\mathbf{S}_d = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}_d \times \mathbf{H}_d]. \quad (13.11)$$

При усреднении по времени к выражениям (13.9)–(13.11) добавляется коэффициент  $1/2$  (как среднее от квадрата косинуса за период).

Суммарный поток энергии через границу равен:

$$\mathbf{S}_S = \mathbf{S} + \mathbf{S}_r - \mathbf{S}_d. \quad (13.12)$$

Поскольку поток падающий разлагается на сумму потоков отраженного и проходящего, то в отсутствие поглощения в обеих средах суммарный поток равен нулю:

$$\mathbf{S}_S = 0, \quad (13.13)$$

что соответствует закону сохранения энергии без какого-либо «накопления» энергии на поверхности раздела сред.

Равенство (13.13) можно проверить непосредственным вычислением, используя выражения для полей распространяющихся волн, полученные в разделе 8.4.1 (форм. (8.139)–(8.146), где все амплитуды полагаются действительными.

### 13.2.4. Баланс энергии для поглощающих сред

Непосредственное вычисление потока энергии для сред с поглощением приводит к нарушению соотношения (13.13), которое происходит из-за того что в среде с потерями волновое число теперь становится комплексным, как это показано в разделе 8.1.3, форм. (8.35)–(8.38), а также в разделе 8.2.1, форм. (8.51)–(8.54). То есть при этом получаем:

$$\mathbf{S}_S \neq 0. \quad (13.14)$$

Для устранения такого явного противоречия с законом сохранения энергии к потоку  $\mathbf{S}_S$  вводится добавка — «интерференционный поток»  $\mathbf{S}_{\text{инт}}$ , так что теперь

$$\mathbf{S}_S = \mathbf{S} + \mathbf{S}_r - \mathbf{S}_d + \mathbf{S}_{\text{инт}}, \quad (13.15)$$

причем величина интерференционного потока выбирается такой, чтобы условие (13.13) выполнялось.

## 13.3. Механизмы формирования интерференционного потока

Как отмечено в разделе 13.1, для «исправления» соотношения балансов (13.15) предложено несколько вариантов формирования интерференционного потока. Довольно подробно разработанными из них являются механизм стоячих волн и механизм фиктивного слоя. Рассмотрим эти механизмы более подробно.

### 13.3.1. Механизм стоячих волн

Одним из довольно подробно развитых механизмов формирования интерференционного потока является механизм, основанный на картине стоячих волн вблизи поверхности раздела.

Рассмотрим этот механизм, следуя монографии [8, стр. 93–94]. Предполагается, что волна распространяется из среды 1 в среду 2 в направлении оси  $Oz$ , перпендикулярной плоскости раздела сред, причем угол падения волны обозначен через  $\varphi$ . Полное выражение для потока падающей волны из среды 1, приведенное в [8, стр. 93, форм. (8.9)] (без вывода и ссылок) имеет вид:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}_1 \rangle &= \frac{c}{4\pi T} \int_0^T [\operatorname{Re}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_r), \operatorname{Re}(\mathbf{H} + \mathbf{H}_r)] dt = \\ &= \langle \mathbf{S} \rangle + \langle \mathbf{S}_r \rangle + \frac{c}{4\pi} \{ [\mathbf{E}^* \mathbf{H}_r] + [\mathbf{E} \mathbf{H}_r^*] + [\mathbf{E}_r^* \mathbf{H}] + [\mathbf{E}_r \mathbf{H}^*] \} = \\ &= \langle \mathbf{S} \rangle + \langle \mathbf{S}_r \rangle + \langle \mathbf{S} \rangle_{\text{интер}}, \end{aligned} \quad (13.16)$$

где последнее слагаемое — «интерференционный член» при  $z = 0$  и  $\varphi = 0$ , имеющий вид:

$$|\langle \mathbf{S}_{\text{интер.}} \rangle| = \frac{c}{4\pi} \zeta_1 \frac{2(\zeta_1 n_2 - \zeta_2 n_1)}{(n_2 + n_1)^2 + (\zeta_2 + \zeta_1)^2}. \quad (13.17)$$

Здесь  $\zeta$  — коэффициент поглощения, определяемый как мнимая часть комплексного коэффициента преломления

$$\vartheta = n - i\zeta, \quad (13.18)$$

где  $n$  — действительный показатель преломления, а индексы 1 и 2 соответствуют той и другой средам.

Заметим, что в общем случае показатель преломления пропорционален волновому числу [4, стр. 45, форм. (41)]:

$$n = \frac{c}{\omega} k, \quad (13.19)$$

поэтому в случае комплексного волнового числа показатель преломления также является комплексным.

Можно видеть, что в общем случае, например при  $\zeta_1 \neq 0$ , а также среды различны, то есть  $\zeta_1 n_2 - \zeta_2 n_1 \neq 0$ , то интерференционный член также от нуля отличен:

$$|\langle \mathbf{S}_{\text{интер.}} \rangle|_{\substack{\zeta_1 \neq 0 \\ \zeta_1 n_2 - \zeta_2 n_1 \neq 0}} \neq 0. \quad (13.20)$$

Как утверждается в [8, стр. 93], прямым вычислением можно показать, что интерференционный поток идет в сторону среды с меньшим поглощением.

Далее говорится, что с физической стороны отличие от нуля интерференционного потока означает, что при возникновении стоячих волн в поглощающей среде баланс энергии без учета интерференционного потока нарушается, однако интерференционный поток «переносит через границу необходимое для исправления баланса количество энергии».

Цитируем далее: «Иными словами, выделение из суммарного поля отраженного и преломленного потоков энергии происходит не только на самой границе раздела (в силу граничных условий), но и вблизи нее в интерференционном поле (в силу интерференции). Толщина этого слоя — порядка полуволны и зависит от скачка фаз на границе». В подтверждение такой локализации интерференционного потока приведены три ссылки на статьи от 1911, 1960 и 1970 годов. Далее приводятся некоторые рассуждения словесного характера: «Существование стоячих волн у границы диэлектрик-металл не вызывает теоретических сомнений и доказано экспериментально (опыты Друде, Нернста, Айвса, Винера); поэтому вряд ли есть основания сомневаться в существовании их и для границы металл-диэлектрик. В первом случае, при  $\zeta_1 = 0$ , они с переносом энергии через границу не связаны, во втором ( $\mathbf{S}_{\text{интер.}}|_{\dot{y}=0} \neq 0$ ). Подобное различие вызвано тем, что на границе в этом случае нет узла (скачок фазы  $\neq 0, \pi/2$ ); следует также иметь в виду, что между

соседними «узлами» (термин условен) есть определенный «перепад энергии» — амплитуда на расстоянии  $\lambda/2$  заметно меняется. При нормальном падении  $\mathbf{S}_{\text{интер.}}$  нормален к поверхности раздела, при наклонном имеется некоторая слагающая вдоль поверхности, подобно тому, как это имеет место при полном внутреннем отражении. Однако здесь энергия циркулирует по некоторым замкнутым контурам (между «узлами» и «пучностями», хотя термины эти для наклонного падения не точны).

Если качественная картина здесь достаточно ясна, то количественный расчет служит до сего времени предметом оживленной дискуссии» (конец цитаты). Здесь приводятся семь ссылок на соответствующие работы с 1907 по 1969 годы.

Таковы основные положения механизма формирования интерференционного потока за счет стоячих волн.

Рассмотрим теперь эти положения с несколько критической стороны. Итак, здесь предполагается, что интерференционный поток состоит в «циркуляции энергии по замкнутым контурам», определяемым структурой стоячих волн. Заметим, что механизм такой «циркуляции» никак не очевиден и качественной модели не предлагается. С другой стороны, сам факт существования стоячих волн внутри металла остается только предполагаемым на основе аналогии с диэлектриком. Однако если возможность образования стоячих волн внутри диэлектрика обусловлена отсутствием потерь, так что волна может произвольно распространяться на любые расстояния, то возможность образования стоячих волн в металле — под большим вопросом, так как затухание волны может происходить на расстоянии, меньшем длины волны, и тогда стоячие волны не образуются.

Заметим еще, что формула (13.16), по-видимому, не является достаточно полной, так как не учитывает проходящей волны, то есть относится как бы к случаю зеркального отражения, тогда как в формулу (13.17) входят параметры обеих сред. Этот вопрос в [8, стр. 93] также не имеет полного разъяснения.

Резюмируя сказанное, можно заключить, что механизм формирования интерференционного потока за счет стоячих волн нельзя считать полностью завершенным, так как он требует более подробного рассмотрения.

### 13.3.2. Механизм фиктивного слоя

Рассмотрим теперь другой, также довольно распространенный механизм, основанный на введении «фиктивного слоя».

Будем следовать статье [163], где этот механизм описан достаточно подробно.

Предполагается, что световая волна из поглощающей среды падает на границу с прозрачной, а закон сохранения энергии записывается в виде [163, форм. (1)]:

$$P_i(0) + P_r(0) - P_t(0) + P_{ir}(0) = 0, \quad (13.21)$$

где  $P_i(0)$ ,  $P_r(0)$ ,  $P_t(0)$ ,  $P_{ir}(0)$  — граничные значения (при  $z = 0$ ) нормальных составляющих (НС) падающего, отраженного, проходящего и интерференционного потоков (ИП). Заметим, что это вид несколько отличается от приведенного в предыдущем разделе (13.16) тем, что здесь явно присутствует проходящая волна  $P_t(0)$ , выражения для потоков в виде векторов Пойнтинга, видимо, всего лишь подразумеваются, а также комплексный вид, необходимый для описания поглощающей среды, явно не присутствует. В то же время можно полагать, что вид (13.17) является более общим и может включать в себя (13.22) как частный случай (с точностью до ориентации направления падения волны).

Далее цитируем: «Определяя обычным образом коэффициенты отражения  $R = P_r(0)/P_i(0)$  и пропускания  $T = P_t(0)/P_i(0)$ , нетрудно убедиться, что при  $P_{ir}(0) \neq 0$  нарушается равенство

$$R + T = 1, \quad (13.22)$$

а имеет место

$$R + T > 1. \quad (13.23)$$

Здесь автор не раскрывает выражений для  $P_r(0)$ ,  $P_t(0)$ , а также  $P_{ir}(0)$ , ссылаясь на «обычный образ», однако следует заметить, что соотношение (13.23) получается только при наличии затухания в первой среде, тогда как в отсутствие такового будет (13.22), как для случая одномерной волны показано в работе [72], монографии [64], а также здесь в главе 10 [раздел 10.2.1, таблица].

Далее автор упоминает ряд попыток устранить получающееся противоречие (13.23) с помощью «переопределения коэффициентов отражения и пропускания путем отнесения интерференционного потока к одной из волн, фигурирующих в (13.21)», например к падающей [161], проходящей [160] или отраженной, «в зависимости от того, к какой из этих волн интерференционный поток сонаправлен». Также дается ссылка на несовершенство имеющихся экспериментов и недостаточность подобных попыток переопределения [162].

После такого введения автор утверждает, что «наиболее естественно отнести интерференционный поток к поглощению некоего фиктивного слоя, образованного в поглощающей среде». Такой слой должен быть отграничен «мысленной границей», а толщина его выбирается из соотношения равенства нулю интерференционного потока и имеет вид [163, стр. 467, форм. (4)]:

$$h = \lambda_0 \frac{\delta_r - \pi}{4\pi N_z}, \quad (13.24)$$

где  $\lambda_0$  — длина волны света в свободном пространстве,  $\delta_r$  — сдвиг фазы при отражении,  $N_z$  — нормальная составляющая волны при отражении.

Таким образом, рассматриваются следующие друг за другом три слоя: поглощающая среда, фиктивный слой и прозрачная среда, причем положение «мысленной границы», то есть толщина «фиктивного слоя»

выбирается так, чтобы выполнялось соотношение (13.22), соответствующее закону сохранения энергии.

Итак, как и в механизме стоячих волн (раздел 13.3.1), здесь в рассмотрение вводится некая окрестность реальной границы между средами, однако механизм поведения плотности энергии в такой окрестности (например, типа «циркуляции по кругу в стоячей волне») не приводится.

Таким образом, можно полагать, что прием введения «фиктивного слоя» с «мысленной границей», хотя и приводит к математическому согласию с законом сохранения энергии, однако является довольно искусственным и не вполне определенным.

### 13.3.3. Дополнительное замечание

Заметим, что превышение суммы потоков энергии отраженной и проходящей волн над потоком энергии волны падающей в случае ее падения из поглощающей среды, кроме двух перечисленных выше, рассматривалось и в ряде других работ, в том числе были попытки проведения соответствующих экспериментов, также не давшие окончательного результата. Однако во всех случаях понятие интерференционного потока считалось необходимым, рассматривались лишь различные механизмы его реализации. Любопытный читатель может найти некоторые из таких работ, следуя ссылкам в приведенных выше работах, в том числе в разделе 13.1.

Однако, по мнению авторов настоящей монографии, наиболее последовательным является представление задачи в комплексном виде, подобное проведенному здесь в главе 10. В этом случае закон сохранения энергии полностью выполняется вполне естественным образом без необходимости привлечения «интерференционного потока».

## 13.4. Потоки энергии при интерференции независимых волн

Несколько особняком к рассматриваемому материалу стоит работа [165], обобщающая ряд более ранних работ тех же авторов и несколько других исследований. Здесь задача об отражении волн не рассматривается, а предполагается, что интерферируют две волны, исходящие от независимых источников.

Статья начинается словами: «С энергетической точки зрения суть явления интерференции состоит в том, что результирующая интенсивность двух когерентных волн в области их перекрытия отличается от суммы интенсивностей исходных волн». Далее авторы приводят выражение для вектора средней плотности потока энергии двух монохроматических когерентных волн в виде:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_{\text{int}}, \quad (13.25)$$

где

$$\mathbf{S}_{1,2} = \tau \operatorname{Re}[\mathbf{e}_{1,2} \times \mathbf{h}_{1,2}^*]; \quad (13.26)$$

$$\mathbf{S}_{\text{int}} = \tau \operatorname{Re} \{ [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{h}_2^*] + [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{h}_1^*] \}, \quad (13.27)$$

то есть  $\mathbf{S}_{1,2}$  — потоки энергии каждой из одиночных волн,  $\mathbf{S}_{\text{int}}$  — интерференционный поток,  $\tau = c/8\pi$ ,  $c$  — скорость света в свободном пространстве,  $\mathbf{e}_{1,2}$  и  $\mathbf{h}_{1,2}$  — комплексные напряженности соответствующих электрического и магнитного полей.

Можно видеть, что это выражение в определенной степени сходно с (13.16), так как оба они основаны на комплексной форме вектора Пойнтинга (9.115), однако здесь выражение несколько проще.

Таким образом, здесь выражение (13.25) принимается за исходное, откуда делаются выводы о перераспределении в области перекрытия потоков активных и реактивных компонент волновых полей. Задача о падении волны из поглощающей среды на границу с непоглощающей упоминается как исторически первая, однако парадокс превышения суммы потоков отраженной и проходящей волн над потоком падающей с соответствующим нарушением сохранения энергии не рассматривается.

#### 13.4.1. Замечание о дальнейшем изложении

Авторы настоящей монографии не ставят себе задачу пересказывать содержание статьи [165], поэтому далее ее не рассматривают. В то же время общая идеология задачи о падении волны из поглощающей среды на непоглощающую рассмотрена для одномерной волны в главе 10 и для электромагнитной волны в главе 12 настоящей монографии, так что авторы полагают эту задачу полностью решенной без какого-либо привлечения понятия интерференционного потока. То есть в этой задаче введение интерференционного потока является излишним.

В то же время независимая разработка понятия интерференционного потока, выполненная в работе [165], заслуживает определенного внимания, поэтому, не вдаваясь в глубину вопроса (которая, по-видимому, довольно велика), авторы приводят далее лишь некоторые рассуждения дискуссионного характера, ставящие вопрос о корректности этого понятия. Любопытный читатель сам может судить о правильности приведенных далее соображений, а авторы настоящей монографии будут за любые замечания весьма благодарны.

### 13.5. Общая схема формирования интерференционного потока

Рассмотрим общую схему формирования интерференционного потока на примере интерференции двух пересекающихся волновых пучков одномерных волн. Обратим основное внимание на независимость полей волн друг от друга и покажем, что суммарный поток энергии в области перекрытия пучков равен сумме потоков энергии отдельных волн.

Рассмотрим выполнение энергетического баланса в области перекрытия и степень необходимости введения понятия «интерференционный поток». Рассмотрим эти положения последовательно, начиная с традиционного определения интерференционного потока и сопоставления такого определения с реальной картиной распространения волн.

#### 13.5.1. Традиционное определение интерференционного потока

Понятие «интерференционный поток», используемое при описании интерференции двух волн, основано на интерпретации понятия потока энергии, описываемого вектором Пойнтинга (9.80):

$$\mathbf{P} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]. \quad (13.28)$$

Для одной электромагнитной волны, имеющей электрическое поле  $\mathbf{E}$  и магнитное поле  $\mathbf{H}$ , соотношение (13.28) справедливо как для безграничной плоской волны, так и для какой-либо точки внутреннего сечения волнового пучка, ограниченного в поперечном направлении.

Предположим далее, что имеются два таких волновых пучка, образованных когерентными электромагнитными волнами с полями  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{H}_2$ . Вне области перекрытия пучков потоки энергии каждой из волн  $\mathbf{P}_1$  и  $\mathbf{P}_2$  равны соответственно:

$$\mathbf{P}_1 = [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1], \quad (13.29)$$

$$\mathbf{P}_2 = [\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2], \quad (13.30)$$

поэтому в каком-то поперечном сечении, общем для обеих волн, суммарный поток энергии  $\mathbf{P}_S$  должен быть равен сумме потоков энергии каждой из волн по отдельности, то есть

$$\mathbf{P}_S = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1] + [\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2]. \quad (13.31)$$

При вычислении потока энергии в области перекрытия пучков, в качестве векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , входящих в формулу (13.28), используется сумма электрического и магнитного полей составляющих волн, то есть вместо  $\mathbf{E}$  берется  $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ , а вместо  $\mathbf{H}$  берется  $\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ . Правомомерность такого суммирования обычно постулируется без каких-либо доказательств. В результате получается:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{ST} &= [(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \times (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2)] = \\ &= [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1] + [\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2] + ([\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2] + [\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1]), \end{aligned} \quad (13.32)$$

где третье слагаемое в правой части формулы (13.32), равное

$$\mathbf{P}_{\text{int}} = [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2] + [\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1], \quad (13.33)$$

называют «интерференционным потоком».

При этом суммарный поток получается в виде:

$$\mathbf{P}_{ST} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_{\text{int}}, \quad (13.34)$$

что, как легко видеть из сравнения с (13.31), не равно  $\mathbf{P}_S$ .

Это означает, что в области перекрытия суммарный поток энергии становится больше суммы потоков отдельных пучков до их перекрытия, а после расхождения пучков возвращается к прежнему значению. Таким образом, в области перекрытия к двум исходным потокам добавляется дополнительный поток, что противоречит закону сохранения энергии.

### 13.5.2. Неадекватность традиционного представления реальной картине распространения волн

С другой стороны, в отсутствие какой-либо материальной среды, то есть в свободном пространстве, электромагнитное поле одной волны какие-либо свойства области распространения никак не меняет, то есть другая волна в этой же области распространяется совершенно независимо от первой. При этом если в области перекрытия волн расположен измеритель поля, то он действительно может показать суммарную амплитуду, то есть по амплитудам волн суммирование, дающее традиционную интерференционную картину, вполне допустимо. Однако в силу свободы пространства сами волны при этом относительно друг друга никак не меняются, то есть, если включать или выключать одну из волн, то другая всегда будет оставаться той же самой. Таким образом, плотность энергии каждой из волн в любой точке свободного пространства, в том числе в области перекрытия волн, никак не будет зависеть от присутствия или отсутствия в этой же точке полей другой волны. Поэтому и потоки энергии отдельных волн в этой точке будут суммироваться так, как если бы каждая из волн была совершенно независима от другой. Таким образом, «интерференционному потоку» просто неоткуда было бы взяться, несмотря на то, что математическое выражение (13.33) позволяет его определить в любом случае. Если же волны распространяются не в свободном пространстве, а в какой-то среде, свойства которой меняются под действием одной из волн, то другая волна уже может «почувствовать» присутствие первой и какое-то изменение суммарного потока может иметь место. Однако такое изменение уже будет иметь совершенно другую природу и другой вид, никак не описываемый выражением (13.32), куда свойства среды вообще не входят.

Такое обстоятельство, то есть неадекватность понятия интерференционного потока и выражения (13.32) реальному положению вещей, вынуждает обратиться к пересмотру традиционной идеологии.

### 13.5.3. Определение потока энергии для одномерной задачи

Понятие «интерференционного потока» для электромагнитных волн является следствием алгебраического тождества вида:

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = (a_1b_1) + (a_2b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1). \quad (13.35)$$

В силу единства физического существа волновых процессов различной природы, введенное так понятие интерференционного потока является универсальным для разных видов волн.

Учитывая, что магнитное поле волны  $H$  связано с ее электрическим полем  $E$  через импеданс  $Z$ :

$$H = \frac{1}{Z}E, \quad (13.36)$$

можно видеть, что поток энергии имеет вид

$$\vec{P} = \frac{1}{Z}E^2, \quad (13.37)$$

то есть квадратичен относительно амплитуды волны.

Это свойство квадратичности сохраняется и для волн другой природы. Для одномерной волны, например типа поперечной волны в струне, коэффициент  $1/Z$  заменяется на волновое число  $k$ , в результате чего при действительной амплитуде  $A$  получаем:

$$P = A^2k. \quad (13.38)$$

Усреднение по времени добавляет к этому выражению коэффициент  $1/2$ , который для простоты далее учитывать не будем. Для двух одномерных волн с амплитудами  $A$  и  $B$  вместо (13.32) получаем:

$$P_{SI} = (A + B)^2k = A^2k + B^2k + 2ABk, \quad (13.39)$$

то есть интерференционный поток равен

$$P_{\text{int}} = 2ABk. \quad (13.40)$$

В силу такой эквивалентности выводы, полученные для одномерных волн, будут справедливы и для волн любой другой природы, математическая же картина распространения одномерных волн по сравнению с электромагнитными, заметно упрощается. Поэтому далее с целью выяснения физической роли потоков энергии обратимся к рассмотрению одномерных волн, имея в виду применимость получаемых результатов к волнам любой природы.

### 13.5.4. Образование интерференционного потока в области перекрытия двух волновых пучков

Рассмотрим сначала качественную картину двух пересекающихся пучков одномерных волн в области их перекрытия. Общая геометрия задачи иллюстрируется рис. 13.1, где показаны волновые пучки 1 и 2, векторы скоростей волн в которых равны соответственно  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  и составляют с горизонтальной осью  $Ox$  углы  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ . Для простоты будем полагать  $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = v$  и  $\alpha_2 = -\alpha_1 = \alpha$ , то есть волновые числа для обеих волн равны и составляют  $k = \omega/v$ , где  $\omega$  — частота, единая для обеих волн. Положим также амплитуды волн равными  $A$ , а область перекрытия на рисунке обозначим буквами  $ABCD$

В области перекрытия компоненты скоростей по оси  $Oy$ , будучи равными  $\pm v \sin \alpha$  и имея противоположные знаки, взаимно компенсируются, а вдоль оси  $Ox$ , будучи равными  $v \cos \alpha$  и однонаправленными, обеспечивают стационарную интерференционную картину, движущуюся

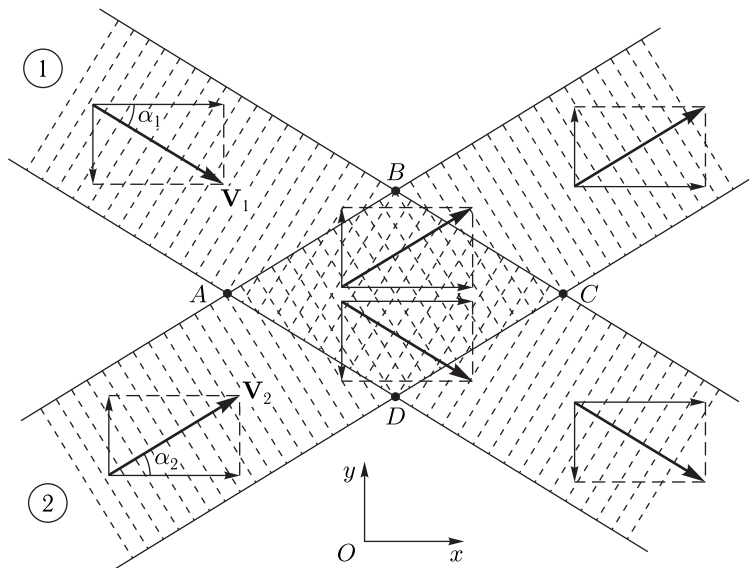


Рис. 13.1. Общая геометрия задачи

вдоль оси  $Ox$  с той же скоростью  $v \cos \alpha$ , что соответствует волновому числу  $k \cos^{-1} \alpha$ .

Традиционная идеология утверждает, что внутри пучков 1 и 2 волновые потоки по модулю равны  $P_1 = A^2 k$  и  $P_2 = A^2 k$ , а по направлению совпадают с направлениями соответствующих скоростей. При этом суммарный поток в плоскости, перпендикулярной оси  $Ox$ , вне области перекрытия равен:

$$P_S = P_1 + P_2 = 2A^2 k \cos^{-1} \alpha. \quad (13.41)$$

Рассматривая интерференционную картину как единую волну с амплитудой  $2A$  и скоростью  $v \cos \alpha$ , то есть волновым числом  $k \cos^{-1} \alpha$ , получаем, что поток внутри области перекрытия равен:

$$P_{SI} = 4A^2 k \cos^{-1} \alpha. \quad (13.42)$$

При этом интерференционный поток равен:

$$P_{\text{int}} = P_{SI} - P_S = 2A^2 k \cos^{-1} \alpha. \quad (13.43)$$

После выхода волн из области перекрытия суммарный поток в плоскости, перпендикулярной оси  $Ox$ , снова становится равным выражению (13.41).

Таким образом, на подходе к области перекрытия вблизи точки  $A$  суммарный поток еще равен  $2A^2 k \cos^{-1} \alpha$ , внутри всей области перекрытия  $ABCD$  скачком увеличивается до  $4A^2 k \cos^{-1} \alpha$ , а далее точки  $C$  снова скачком падает до  $2A^2 k \cos^{-1} \alpha$ . Таким образом, везде

внутри области перекрытия  $ABCD$  существует постоянный интерференционный поток  $2A^2 k \cos^{-1} \alpha$ , вне этой области равный нулю.

Такое весьма искусственное появление «из ничего» на границе области перекрытия постоянного интерференционного потока не соответствует закону сохранения энергии и вынуждает к пересмотру традиционных представлений.

### 13.5.5. Корректное рассмотрение потока энергии в области перекрытия

Проведенное рассмотрение основывается на предположении, что в области перекрытия  $ABCD$  распространяется суммарная волна с волновым вектором  $k \cos^{-1} \alpha$ , параллельным  $AC$ , причем амплитуда этой волны равна  $2A$ , а волновой фронт параллелен  $BD$ . Амплитуда волны вдоль волнового фронта полагается неизменной и равной  $2A$ .

Для проверки корректности этого предположения обратимся к рис. 13.2, где показана схема взаимного расположения максимальных и минимальных значений полей волн в области перекрытия и конфигурация поля суммарной волны в фиксированный момент времени.

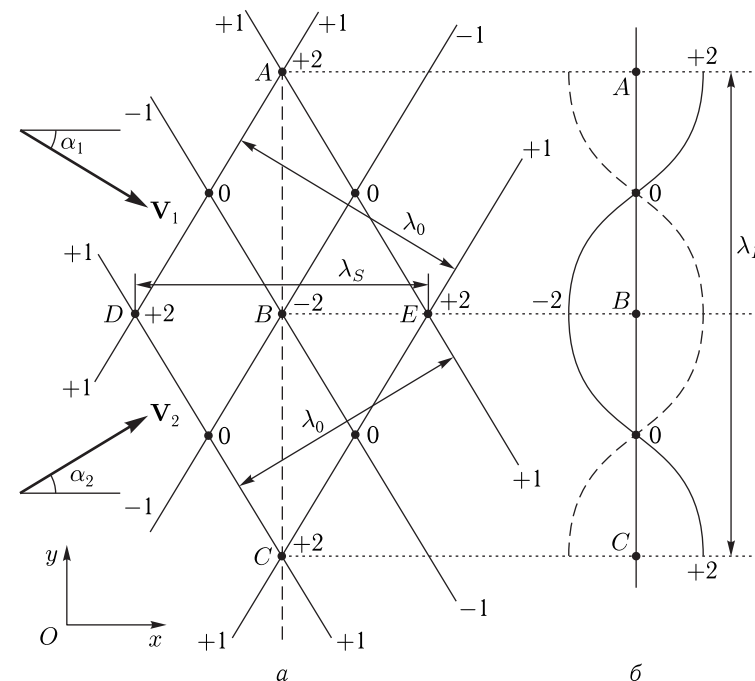


Рис. 13.2. Схема расположения максимальных и минимальных значений полей волн в области перекрытия (а) и конфигурация поля суммарной волны (б)



Здесь в левой части рисунка (а) наклонные линии изображают положения экстремумов (максимумов и минимумов) полей соответствующих волн, векторы скоростей которых, перпендикулярные этим линиям, показаны у левого края рисунка. Буквы  $A, B, C, D, E$  здесь обозначают точки пересечения линий экстремумов волн и с такими же буквами на рис. 13.1 никак не связаны. Цифры на концах наклонных линий соответствуют величинам полей в предположении  $A = 1$ , цифры вблизи укрупненных точек — суммарные величины полей в пересечениях линий экстремумов волн. Расстояния между соседними одноименными экстремумами каждой волны соответствуют длинам исходных волн  $\lambda_0$ .

Из рисунка видно, что интерференционная картина, получающаяся из сложения амплитуд волн вдоль оси  $Ox$ , в точках  $D$  и  $E$  имеет максимумы, равные  $+2$ , а в точке  $B$  — минимум, равный  $-2$ . Аналогично вдоль оси  $Oy$  интерференционная картина имеет в точках  $A$  и  $C$  максимумы, равные  $+2$ , а в точке  $B$  — минимум, равный  $-2$ . Расстояния между максимумами интерференционной картины вдоль оси  $Ox$  обозначены через  $\lambda_S$ , а вдоль оси  $Oy$  — через  $\lambda_L$ .

Конфигурация поля получающейся суммарной волны вдоль оси  $Oy$  схематически показана в правой части (б) того же рисунка. Сплошная линия соответствует полю суммарной волны на линии, проходящей через точки  $A, B, C$ .

С течением времени вся интерференционная картина движется вдоль оси  $Ox$  направо со скоростью единичной волны  $v \cos \alpha$ , то есть волновым числом  $k \cos^{-1} \alpha$ . После смещения на половину длины волны  $\lambda_S/2$  вдоль оси  $Ox$  поля в точках  $A, B, C$  меняют знаки, в результате чего конфигурация поля суммарной волны приобретает вид, показанный пунктиром. Таким образом, можно считать, что в области перекрытия со скоростью  $v \cos \alpha$  движется суммарная волна, амплитуда которой по фронту, параллельному оси  $Oy$ , является не постоянной, а синусоидальной с амплитудой  $2A$  в соответствии со сплошной кривой на рис. 13.2, б, то есть имеет вид:

$$A_L = 2A \cos \frac{2\pi y}{\lambda_L}. \quad (13.44)$$

Для вычисления потока энергии такой волны надо квадрат ее амплитуды  $(A_L)^2$  усреднить по фронту, то есть по координате  $y$  в интервале  $\lambda_L$ , что дает коэффициент  $1/2$ , в результате чего получаем поток в виде:

$$P_{SL} = \overline{\left(2A \cos \frac{2\pi y}{\lambda_L}\right)^2} k \cos^{-1} \alpha = \frac{1}{2}(2A)^2 k \cos^{-1} \alpha = 2A^2 k \cos^{-1} \alpha. \quad (13.45)$$

Из сравнения полученного выражения с (13.41) видно, что

$$P_{SL} = P_S = P_1 + P_2, \quad (13.46)$$

то есть поток суммарной волны в области перекрытия двух волн равен сумме потоков этих волн вне области перекрытия.

Таким образом, в полном соответствии с законом сохранения энергии, какого-либо места для интерференционного потока не остается, а введение его в виде (13.40) основано на некорректном учете амплитуды поля суммарной волны в области перекрытия, которая полагается постоянной, тогда как она вдоль оси  $Oy$  является синусоидальной.

### 13.5.6. Независимость потоков энергии в области перекрытия и некорректность понятия «интерференционного потока»

Итак, получаем, что при распространении двух волновых пучков в каждой точке области их перекрытия:

1) поля отдельных волн суммируются, давая обычно наблюдаемую интерференционную картину;

2) потоки энергии каждой из волн остаются независимыми друг от друга, а суммарный поток энергии равняется сумме таких независимых потоков отдельных волн.

При этом традиционное понятие «интерференционного потока» является некорректным, то есть, в соответствии с законом сохранения энергии, этот поток реально не существует.

### 13.5.7. Потоки энергии электромагнитных волн

Возвращаясь к электродинамике, получаем, что поля, создаваемые двумя волнами в области их перекрытия, равны сумме полей отдельных волн, то есть

$$\mathbf{E}_S = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad (13.47)$$

$$\mathbf{H}_S = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2, \quad (13.48)$$

тогда как суммарный поток энергии  $\mathbf{P}_S$  как вне, так и внутри области перекрытия равен сумме потоков энергии каждой из волн по отдельности в виде (13.31), то есть

$$\mathbf{P}_S = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1] + [\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2], \quad (13.49)$$

а введение «интерференционного потока» в соответствии с формулой (13.33) физического смысла не имеет.

## 13.6. Законы сохранения в задаче о падении волны на границу раздела сред

Решение задачи о падении одномерной волны на одну границу раздела двух сред основано на двух граничных условиях, относящихся к волновым возмущениям по разные стороны границы:

- 1) равенство амплитуд;
- 2) равенство координатных производных.

Эти условия приводят к соотношениям вида:

$$A = -B + C; \quad (13.50)$$

$$Ak_1 = Bk_1 + Ck_2, \quad (13.51)$$

где  $A$  — амплитуда падающей волны,  $B$  — амплитуда отраженной волны,  $C$  — амплитуда проходящей волны.

Требование равенства полных входящего и выходящего относительно границы потоков энергии приводит к соотношению вида:

$$A^2k_1 = B^2k_1 + C^2k_2. \quad (13.52)$$

Покажем, как соотношение (13.52) следует из (13.50) и (13.51).

Умножаем (13.51) на  $A$ :

$$A^2k_1 = ABk_1 + ACk_2. \quad (13.53)$$

В правую часть подставим  $A$  из (13.50):

$$A^2k_1 = (-B + C)Bk_1 + (-B + C)Ck_2. \quad (13.54)$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$A^2k_1 = -B^2k_1 + BC(k_1 - k_2) + C^2k_2. \quad (13.55)$$

Умножаем (13.51) на  $k_1$ :

$$Ak_1 = -Bk_1 + Ck_1. \quad (13.56)$$

Полученное выражение вычитаем из (13.51):

$$0 = Bk_1 + Ck_2 + Bk_1 - Ck_1. \quad (13.57)$$

Приводя подобные члены, получаем:

$$2Bk_1 = C(k_1 - k_2), \quad (13.58)$$

откуда получаем

$$k_1 - k_2 = \frac{2Bk_1}{C}. \quad (13.59)$$

Подставляя (13.59) в (13.55), получаем:

$$A^2k_1 = -B^2k_1 + BC \cdot \frac{2Bk_1}{C} + C^2k_2, \quad (13.60)$$

откуда получаем

$$A^2k_1 = B^2k_1 + C^2k_2, \quad (13.61)$$

то есть соотношение (13.52).

Покажем, как из соотношений (13.51) и (13.52) следует соотношение (13.50).

Умножаем (13.51) на  $A$ :

$$A^2k_1 = ABk_1 + ACk_2. \quad (13.62)$$

Вычитаем это выражение из (13.52):

$$0 = B^2k_1 + C^2k_2 - ABk_1 - ACk_2. \quad (13.63)$$

Приводя подобные члены, получаем:

$$B(A - B)k_1 + C(A - C)k_2 = 0. \quad (13.64)$$

Из этого выражения получаем:

$$\frac{k_1}{k_2} = -\frac{C(A - C)}{B(A - B)}. \quad (13.65)$$

В то же время из (13.51) получаем:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{C}{A - B}. \quad (13.66)$$

Приравняем (13.65) и (13.66):

$$-\frac{C(A - C)}{B(A - B)} = \frac{C}{A - B}. \quad (13.67)$$

Из этого выражения получаем:

$$-\frac{A - C}{B} = 1, \quad (13.68)$$

откуда следует

$$C - A = B \quad (13.69)$$

или

$$A = -B + C, \quad (13.70)$$

что совпадает с выражением (13.50).

Итак, получаем, что из трех выражений:

$$A = -B + C, \quad (13.71)$$

$$Ak_1 = Bk_1 + Ck_2, \quad (13.72)$$

$$A^2k_1 = B^2k_1 + C^2k_2, \quad (13.73)$$

только два (первое и второе или второе и третье) являются независимыми, а третье является следствием двух других.

### 13.7. Механическая аналогия задачи о падении волны на границу

Задача о падении одномерной волны на одну границу раздела сред имеет аналогию в механике — задачу о центральном упругом соударении двух шаров, движущихся по одной линии [175, стр. 115–117]. Рассмотрим эту аналогию более подробно.

**13.7.1. Математический аппарат обеих задач**

В задаче о соударении шаров скорости шаров после соударения выражаются формулами:

$$v_1 = \frac{2m_2v_{20} - (m_1 - m_2)v_{10}}{m_1 + m_2}; \quad (13.74)$$

$$v_2 = \frac{2m_1v_{10} - (m_1 - m_2)v_{20}}{m_1 + m_2}. \quad (13.75)$$

Здесь  $m_{1,2}$  — массы первого и второго шаров,  $v_{10,20}$  — скорости первого и второго шаров до соударения,  $v_{1,2}$  — скорости первого и второго шаров после соударения.

При  $v_{20} = 0$  эти формулы принимают вид:

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{10}; \quad (13.76)$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{10}. \quad (13.77)$$

В задаче о падении одномерной волны формулы для амплитуд имеют вид:

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \cdot A; \quad (13.78)$$

$$C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \cdot A. \quad (13.79)$$

Здесь  $A$  — амплитуда падающей волны,  $B$  — амплитуда отраженной волны,  $C$  — амплитуда проходящей волны.

Пары формул (13.76)–(13.77) и (13.78)–(13.79) переходят друг в друга при следующих заменах:

$$m_{1,2} \rightarrow k_{1,2}, \quad v_1 \rightarrow B, \quad v_2 \rightarrow C, \quad v_{10} \rightarrow A. \quad (13.80)$$

То есть с точки зрения формул массы шаров эквивалентны волновым числам, а их скорости — амплитудам соответствующих волн.

Задача о соударении шаров решается на основе законов сохранения импульса и энергии до и после соударения:

$$m_1v_{10} + m_2v_{20} = m_1v_1 + m_2v_2; \quad (13.81)$$

$$\frac{1}{2} \cdot (m_1v_{10}^2 + m_2v_{20}^2) = \frac{1}{2} \cdot (m_1v_1^2 + m_2v_2^2). \quad (13.82)$$

При  $v_{20} = 0$  эти выражения принимают вид:

$$m_1v_{10} = m_1v_1 + m_2v_2; \quad (13.83)$$

$$m_1v_{10}^2 = m_1v_1^2 + m_2v_2^2. \quad (13.84)$$

Выполняя замены (13.80) и меняя местами порядок сомножителей в слагаемых, получаем:

$$Ak_1 = Bk_1 + Ck_2; \quad (13.85)$$

$$A^2k_1 = B^2k_1 + C^2k_2. \quad (13.86)$$

Задача о падении волны решается на основе сохранения амплитуд волновых возмущений и их производных по обе стороны от границы, которые приводят к соотношениям вида:

$$A = -B + C; \quad (13.87)$$

$$Ak_1 = Bk_1 + Ck_2. \quad (13.88)$$

Требование равенства полных входящего и выходящего относительно границы потоков энергии приводит к соотношению вида:

$$A^2k_1 = B^2k_1 + C^2k_2. \quad (13.89)$$

Легко видеть, что соотношения (13.88) и (13.89) для волн совпадают с соотношениями (13.85) и (13.86) для шаров.

Это означает, что в задаче для волн соотношения (13.88) и (13.89) играют ту же роль, что и законы сохранения импульса (13.83) и энергии (13.84) в задаче для шаров.

**13.7.2. Эквивалентность и различие законов сохранения для обеих задач**

Итак, получаем, что закон сохранения импульса в задаче о соударении шаров эквивалентен закону сохранения производных волновых возмущений в задаче о падении одномерной волны на одну границу, а закон сохранения энергии в задаче о соударении шаров эквивалентен закону сохранения потоков энергии в задаче о падении волны на границу раздела сред.

Отметим, что соотношение (13.87) для волн, отражающее сохранение амплитуд волновых возмущений по обе стороны от границы, среди соотношений для задачи о соударении шаров аналога не имеет. Это обстоятельство, однако, не мешает получению корректного с точки зрения законов сохранения энергии и импульса решения задачи о соударении шаров.

Заметим, что аналог условия (13.87) в задаче для шаров можно рассматривать как равенство скоростей шаров в момент соударения (однако эта аналогия требует уточнения).

Традиционное решение задачи для волн основано на совместном решении уравнений (13.87) и (13.88). При этом соотношение (13.89) рассматривается как следствие закона сохранения энергии, откуда делается вывод, что оно должно выполняться при решении, полученном из соотношений (13.87) и (13.88). Можно показать, что формулы (13.87), (13.88) и (13.89), будучи рассматриваемыми с чисто алгебраической точки зрения, не являются независимыми, так как одно из них является прямым алгебраическим следствием двух других. Это подробно показано в разделе 3.6.

Это означает, что решение задачи о падении волны на основе соотношений (13.87) и (13.88) эквивалентно решению той же задачи на основе соотношений (13.88) и (13.89).

### 13.7.3. Качественная картина превышения в задаче о распространении волн

Таким образом, решение задачи о падении волны на основе соотношений (13.87) и (13.88) необходимо должно удовлетворять соотношению (13.89). Так оно и есть при действительных волновых числах. Если волновые числа положить комплексными, то соотношение (13.89) также будет автоматически удовлетворяться, что и показано в статье [72], монографии [64] и здесь в главе 10, где введен комплексный поток энергии в виде произведения квадрата амплитуды волны на волновое число вида  $A^2k$ .

Однако в классической трактовке считается, что поток энергии обязан быть действительной величиной, для чего он определяется в виде  $\text{Re}[A(Ak)^*]$  или  $|A|^2 \text{Re}(k)$ , то есть как действительная часть от произведения квадрата модуля амплитуды волны на комплексно-сопряженное волновое число. При возведении волновой функции в квадрат и последующем усреднении по времени при этой величине появляется коэффициент  $1/2$ , который, входя во все слагаемые по обе стороны формулы (13.89), сокращается, как и аналогичный коэффициент в формуле (13.82).

При таком определении потока энергии в случае комплексного волнового числа в первой среде, соотношение (13.89) не выполняется в результате того, что амплитуда проходящей волны (13.79) увеличивается, давая превышение суммарного выходящего потока (суммы отраженного и проходящего) над входящим (падающим).

Это и есть то самое превышение, которое в классической трактовке рассматривается как парадокс и для его преодоления предлагаются различные искусственные методы, такие как «фиктивный слой» [163], введение в коэффициент прохождения действительной части отношения комплексных волновых чисел [161] или различные формы «интерференционного потока» [160, 162, 165].

Итак, получается, что классическая задача для волн при комплексных волновых числах решается на основе двух соотношений: для амплитуд и для производных, первое из которых в механике эквивалента не имеет, а второе эквивалентно закону сохранения импульса. После этого делается попытка проверки выполнения закона сохранения энергии, которая приводит к превышению суммы коэффициентов отражения и прохождения над единицей.

Если считать аналогию между задачами для шаров и для волн при комплексных волновых числах справедливой, то задачу для волн надо решать из двух других соотношений: для производных и для потоков. При этом вместо (13.88) и (13.89) надо использовать соответствующие аналоги для комплексных волновых чисел.

### 13.7.4. Качественная картина превышения в задаче о соударении шаров

В задаче для волн затухание описывается мнимой частью комплексного волнового числа. Механической аналогией волнового числа является масса, то есть в задаче для шаров аналогией мнимой части волнового числа должна быть мнимая часть массы. Затухание при движении шара можно рассматривать как сопротивление среды, то есть движение шара в вязкой среде. При этом скорость движения шара будет уменьшаться вплоть до его полной остановки, как и амплитуда волны в среде с затуханием уменьшается до нуля (или, точнее, убывает по экспоненте, стремясь к нулю).

Когда первый шар ударяет во второй, он слегка сжимается, после чего собирается двигаться обратно (отражается), но вязкая среда его не пускает в себя. В результате он еще на какое-то время задерживается и действует на второй шар, толкая его дополнительно, в результате чего скорость второго шара увеличивается. Это аналогично увеличению амплитуды проходящей волны при падении волны из среды с затуханием в среду без затухания. Отсюда и происходит превышение. Увеличивается скорость только второго шара, а скорость первого после отражения становится меньше, чем она была бы без вязкости первой среды. Это аналогично уменьшению амплитуды отраженной волны. Это уменьшение может быть до нуля: первый шар остановится и обратно не пойдет, то есть волна отраженная не возникнет. Это предельная возможность передачи энергии от первого шара ко второму, то есть предельная возможность увеличения амплитуды проходящей волны. При дальнейшем увеличении вязкости среды скорость второго шара возрастать уже не будет и амплитуда проходящей волны остановится на постоянном уровне, то есть превышение испытает насыщение.

## Выводы по главе 13

Данная глава посвящена рассмотрению понятия интерференционного потока, используемого при анализе распространения волн через многослойные структуры. Приведена традиционная трактовка этого понятия, отмечена ее недостаточность. Приведены соображения авторов настоящей монографии, касающиеся более корректного рассмотрения физического существа вопроса.

Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Выполнен краткий обзор работ, касающихся использования понятия интерференционного потока в различных ситуациях, в первую очередь в задаче о падении волны из поглощающей среды на границу с непоглощающей. Приведено наблюдавшаяся многими авторами при вычислении энергетических балансов превышение суммы потоков энергии проходящей и отраженной волн над потоком энергии падающей волны, что означает нарушение закона сохранения энергии. Отмечены

попытки исправления баланса энергии путем рассмотрения интерференционного потока энергии.

2. На основе применения традиционного понятия вектора Пойнтинга для электромагнитных волн рассмотрены потоки энергии в непоглощающей и поглощающей средах, а также балансы энергии в том и другом случаях. Отмечено нарушение сохранения энергии в случае поглощающей первой среды. Приведена схема введения в выражение для баланса интерференционного потока, приводящего к сохранению энергии.

3. Рассмотрены предлагаемые в литературе механизмы формирования интерференционного потока — стоячих волн и фиктивного слоя. Отмечено, что механизм стоячих волн предполагает циркуляцию энергии по некоторым замкнутым контурам между «узлами» и «пучностями» стоячей волны в слое вблизи поверхности раздела сред, толщина которого близка к половине длины волны. Отмечен чисто качественный характер рассмотрения в сочетании с недостаточностью количественной трактовки предлагаемой различными авторами. Механизм фиктивного слоя предполагает существование дополнительного к основным потоку энергии в пределах «фиктивного слоя», отделенного от основной среды «мысленной границей». Количественное согласование баланса энергии достигается путем выбора толщины слоя из условия выполнения баланса. На основе рассмотрения обоих механизмов отмечена их искусственность, не позволяющая сделать однозначного выбора в пользу какого-то из них.

4. Кратко упомянуты описанные в литературе потоки энергии, имеющие место при интерференции пары независимых волн.

Отмечено, что подобное рассмотрение опирается на положение о безусловном существовании интерференционного потока, образованного перекрестными векторными произведениями электрического и магнитного полей обеих волн. Получено перераспределение энергии за счет активных и реактивных компонент волновых полей. Задача о падении волны из поглощающей среды на границу с непоглощающей упоминается как исторически первая, однако парадокс превышения суммы потоков отраженной и проходящей волн над потоком падающей с соответствующим нарушением сохранения энергии не рассматривается.

5. Отмечено, что значительное разнообразие предлагаемых моделей ставит вопрос о более подробном рассмотрении задачи. По мнению авторов настоящей монографии, наиболее последовательным, в первую очередь относительно задачи о падении волны из поглощающей среды на непоглощающую, является рассмотрение в комплексе представлений распространяющихся волн, позволяющее отрегулировать баланс энергии естественным образом без привлечения дополнительного интерференционного потока. В качестве примера приведена ссылка на рассмотренную в главе 10 настоящей монографии такую задачу для одномерной волны и в главе 12 подобную задачу для электромагнитной волны, где баланс энергий был полностью отрегулирован, так что привлечение интерференционного потока было излишним.

6. Рассмотрена общая схема формирования интерференционного потока на примере задачи о балансе энергии в области перекрытия двух пересекающихся волновых пучков. Приведено традиционное определение интерференционного потока в области пересечения электромагнитных волн, основанное на использовании вектора Пойнтинга. Отмечено перекрестное взаимодействие электрического и магнитного полей обеих волн, трактуемое как интерференционный поток. На основе рассмотрения пересечения волновых пучков в свободном пространстве отмечено, что образование интерференционного потока в области перекрытия противоречит представлению о независимости волновых пучков друг от друга. То есть при входе волн в область пересечения возникает дополнительный волновой поток, а по выходе волн из области пересечения этот поток исчезает, что противоречит сохранению энергии.

7. Выполнено рассмотрение пересечения волновых пучков одномерных волн в векторном виде. Показано, что традиционное представление приводит к искусственному появлению «из ничего» на границе области перекрытия постоянного интерференционного потока, что закону сохранения энергии не соответствует. Предложено рассмотрение интерференционной картины на плоскости, проходящей через волновые векторы обеих пересекающихся волн. Показано, что традиционное рассмотрение основано на некорректном учете амплитуды поля суммарной волны в области перекрытия, которая полагается постоянной, тогда как она вдоль оси, перпендикулярной биссектрисе между волновыми векторами исходных волновых пучков, является синусоидальной, что приводит к выполнению баланса энергий без привлечения интерференционного потока.

8. Показано, что при распространении двух волновых пучков в каждой точке области их перекрытия поля отдельных волн суммируются, давая обычно наблюдаемую интерференционную картину, а потоки энергии каждой из волн остаются независимыми друг от друга, а суммарный поток энергии равняется сумме таких независимых потоков отдельных волн. При этом традиционное понятие «интерференционного потока» является некорректным, то есть, в соответствии с законом сохранения энергии, этот поток реально не существует. В применении к электромагнитным волнам это означает, что перекрестное взаимодействие электрического и магнитного полей обеих волн, трактуемое как интерференционный поток, реального физического смысла не имеет.

9. Рассмотрены законы сохранения в задаче о падении волны на границу раздела сред. На примере потоков для одномерных волн показано, что из двух граничных условий — равенства амплитуд и равенства координатных производных обеих волн на границе раздела, следует третье — равенство потоков энергии входящего в границу и выходящего из нее. Таким образом, показано, что на границе выполняются не два, а три граничных условия, из которых только два любые произвольно взятые являются независимыми, а третье является следствием двух других.

10. Предложена механическая аналогия задачи о падении волны на границу. Отмечено, что задача о падении волны имеет тот же математический аппарат, что и механическая задача о соударении двух упругих шаров. При этом массы шаров эквивалентны волновым числам, а их скорости — амплитудам соответствующих волн. Задача о соударении шаров решается на основе законов сохранения импульса и энергии до и после соударения. Задача о падении волны решается на основе сохранения амплитуд волновых возмущений и их производных по обе стороны от границы. Таким образом, закон сохранения импульса в задаче о соударении шаров эквивалентен закону сохранения производных волновых возмущений в задаче о падении одномерной волны на одну границу, а закон сохранения энергии в задаче о соударении шаров эквивалентен закону сохранения потоков энергии в задаче о падении волны на границу раздела сред. В то же время соотношение для волн, отражающее сохранение амплитуд волновых возмущений по обе стороны от границы, среди соотношений для задачи о соударении шаров аналога не имеет. Однако среди присутствующих здесь трех условий сохранения только два являются независимыми, а третье — следствие первых двух. В задаче для волн и задаче для шаров выбор пары таких независимых условий не совпадает, то есть в одной задаче выбирается одна пара, а в другой — другая, а недостающая третья является следствием двух первоначально выбранных.

11. Проведено качественное рассмотрение задачи о соударении шаров в вязкой среде, являющейся аналогом падения волны из поглощающей среды. Отмечено, что вязкая среда мешает отражению ударяющего шара, в результате чего время воздействия этого шара на другой шар увеличивается и скорость второго шара после соударения становится больше той, которая была бы в отсутствие вязкости. Такое приращение скорости и соответствует превышению потока энергии проходящей и отраженной волн над потоком волны падающей.

## Глава 14

### **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ РАСЧЕТА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЕ**

Глава посвящена краткому описанию основных принципов и некоторых приемов использования метода конечных разностей во временной области (FDTD — Finite Difference in Time Domain) для расчета распространения волн через многослойные структуры. Приведена запись уравнений электродинамики в виде конечных разностей по координате и времени. Для плоской электромагнитной волны приведена сетка, позволяющая на основе «правила креста» рассматривать ступенчатое изменение координатных параметров электрического и магнитного полей волны при пошаговом изменении времени. Рассмотрены различные возможности начального возбуждения волны по времени и по координате, в том числе для формирования ограниченных волновых пучков, а также отражение и преломление таких пучков в среде со ступенчатым изменением параметров. Приведена схема наглядного представления распространения волны в виде «водопада» на плоскости пространственная координата — время. В конечно-разностном рассмотрении получены коэффициенты отражения и прохождения волны через границу, разделяющую две среды с различными параметрами. Приведены рекомендации, касающиеся обобщения метода на многослойную структуру.

В главе частично использованы материалы статей [195–199]. Общая структура изложения опирается на материал статьи [200], а также монографий [201, 202]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

#### **14.1. Уравнения электродинамики в конечных разностях**

Будем решать задачу о развитии во времени электромагнитного поля, локализованного в определенной пространственной области.

Полагаем, что электромагнитное поле в этой области описывается классическими уравнениями электродинамики, имеющими вид [135,

стр. 673, форм. (82.1a), (82.2a)]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (14.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad (14.2)$$

где

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}; \quad (14.3)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (14.4)$$

то есть

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad (14.5)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (14.6)$$

Будем считать, что поле, возбужденное в рассматриваемой области, распространяется далее в виде плоской электромагнитной волны чисто поперечного типа. В таком виде задача является одномерной в том отношении, что все поля зависят только от одной координаты, вдоль которой происходит распространение волны. Для описания такой волны введем декартову систему координат, показанную на рис. 14.1, а. Волновой вектор волны направим вдоль оси  $Ox$ , а электрическое и магнитное поля волны — вдоль осей  $Oy$  и  $Oz$  соответственно, как это показано на рис. 14.1, б.

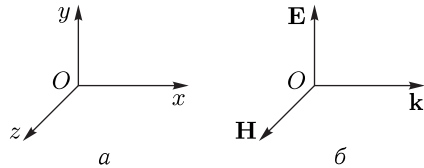


Рис. 14.1. Система координат (а) и ориентация полей электромагнитной волны (б)

При этих условиях векторы того и другого полей имеют вид:

$$\mathbf{E} = \{0; E_y; 0\}; \quad (14.7)$$

$$\mathbf{H} = \{0; 0; H_z\}. \quad (14.8)$$

Определение ротора в декартовой системе координат имеет вид [177, стр. 157, форм. (6.51); 203, стр. 233, форм. (6.24)]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (14.9)$$

С учетом компонент векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , в соответствии с (14.7) и (14.8), получаем:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{i} \frac{\partial E_y}{\partial z} + \mathbf{k} \frac{\partial E_y}{\partial x}; \quad (14.10)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \mathbf{j} \frac{\partial H_z}{\partial x}. \quad (14.11)$$

Поскольку волна является плоской, то есть ее компоненты не зависят от поперечных координат  $y$  и  $z$ , то из (14.10)–(14.11) получаем:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{k} \frac{\partial E_y}{\partial x}; \quad (14.12)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -\mathbf{j} \frac{\partial H_z}{\partial x}. \quad (14.13)$$

Производные по времени полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , в соответствии с (14.7) и (14.8), имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \frac{\partial E_y}{\partial t}; \quad (14.14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{k} \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (14.15)$$

Подставляя (14.12)–(14.13) и (14.14)–(14.15) в (14.5)–(14.6), получаем:

$$\mathbf{k} \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mathbf{k} \mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}; \quad (14.16)$$

$$-\mathbf{j} \frac{\partial H_z}{\partial x} = \mathbf{j} \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (14.17)$$

Опуская излишние для дальнейшего рассмотрения единичные векторы системы координат  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{j}$  и индексы полей  $y$ ,  $z$ , получаем:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}; \quad (14.18)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (14.19)$$

#### 14.1.1. Волновые уравнения для полей

Получим некоторые полезные для дальнейшего рассмотрения выражения. Так, дифференцируя (14.18) по  $x$  и (14.19) по  $t$ , после чего, приравнявая смешанные производные, получаем уравнение для электрического поля:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0. \quad (14.20)$$

Это классическое волновое уравнение для электромагнитной волны, скорость которой имеет вид [1, стр. 52, форм. (1.201), (1.292)]:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0}}. \quad (14.21)$$

Учитывая (14.21), записываем уравнение (14.20) в виде:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0. \quad (14.22)$$

Аналогично дифференцируя (14.18) по  $t$  и (14.19) по  $x$ , после чего приравнявая смешанные производные, получаем уравнение для магнитного поля той же волны:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0. \quad (14.23)$$

Соотношения (14.22) и (14.23) понадобятся в дальнейшем рассмотрении.

#### 14.1.2. Замечание о представлении производных в виде конечных разностей

Для перехода от непрерывных производных к дискретным их эквивалентам в [55, стр. 554–555] предлагаются следующие варианты:

левая разностная производная —

$$\frac{dv}{dx} \rightarrow \frac{v(x) - v(x - \Delta x)}{\Delta x}; \quad (14.24)$$

правая разностная производная —

$$\frac{dv}{dx} \rightarrow \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}; \quad (14.25)$$

центральная разностная производная —

$$\frac{dv}{dx} \rightarrow \frac{v(x + \Delta x) - v(x - \Delta x)}{2\Delta x}. \quad (14.26)$$

В монографии [201, стр. 34, форм. (3.6)] приводится запись в виде:

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \approx \frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta}. \quad (14.27)$$

Можно видеть, что такой вид записи с точностью до обозначений, то есть при замене  $\delta/2$  на  $\Delta x$ , совпадает с (14.26).

Заметим, что в приложении метода конечных разностей к задачам электродинамики использование именно центральной производной является довольно частым. Достаточно упомянуть лишь такие основополагающие работы, как [200, стр. 303, форм. (5), (6)] или [204, стр. 378, форм. (2a), (2b)], а также множество других, следовавших далее. По-видимому, такое предпочтение связано с более высокой точностью, обеспечиваемой вторым порядком аппроксимации по  $\Delta x$  по сравнению с первым порядком при использовании правой или левой производных [55, стр. 555]. Однако координаты узлов конечно-разностной сетки при использовании центральной производной получают содержащими дробное слагаемое вида  $1/2$ , что при машинной реализации является неудобным, так как в машинном языке индексы массивов переменных могут иметь только целые значения [205, стр. 45, 147]. Поэтому в прак-

тике машинной реализации ко всем дробным индексам прибавляется или вычитается  $1/2$ , то есть значения индексов вынужденно «округляются» или «сдвигаются» на эту величину [201, стр. 39, рис. 3.3].

С другой стороны, использование при аналитической записи формул дробных индексов создает излишнюю громоздкость, поэтому в рамках настоящей монографии далее используется правая разностная производная вида (14.25), позволяющая сразу использовать целые индексы. Авторы полагают, что некоторая потеря точности в случае необходимости может быть скомпенсирована уменьшением величины шага сетки, как это обычно бывает при приближении непрерывной зависимости кусочно-ломаной, например при вычислении определенных интегралов [180, стр. 390].

Заметим далее, что принятое в работах [195, 196, 200, 201, 204, 206] обозначение полей индексом времени вверху, а индексом координаты — в следующих далее квадратных скобках, например  $E^n[x + 1/2]$ , по-видимому, достаточно удобное для трехмерных задач, для одномерной дает излишнюю громоздкость записи. Поэтому в рамках настоящей монографии далее будет использоваться более простая индексация: время — вверху, координата внизу, например вида  $E_X^T, H_{X-1}^{T+1}$  или подобного.

#### 14.1.3. Последовательные выражения для электрического и магнитного полей

Учитывая сказанное, запишем производные (14.18), (14.19) в виде конечных разностей через правые разностные производные [55, стр. 554–555; 207, стр. 31]:

$$\frac{E_{X+1}^T - E_X^T}{\Delta x} = -\mu\mu_0 \frac{H_X^{T+1} - H_X^T}{\Delta t}; \quad (14.28)$$

$$\frac{H_{X+1}^T - H_X^T}{\Delta x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{E_X^{T+1} - E_X^T}{\Delta t}, \quad (14.29)$$

где  $X_i$  и  $T_j$  — дискретные значения координаты и времени.

Решение задачи методом конечных разностей состоит в пошаговом определении последующих значений полей на основе известных значений предыдущих. Последовательные шаги осуществляются по мере возрастания времени, то есть из значений полей в момент времени  $T$  определяются значения полей в момент времени  $T + 1$ .

Так, из (14.28) получаем значение магнитного поля в момент времени  $T + 1$  в виде:

$$H_X^{T+1} = H_X^T - \frac{1}{\mu\mu_0} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_{X+1}^T - E_X^T). \quad (14.30)$$

Аналогично из (14.29) получаем значение электрического поля в момент времени  $T + 1$  в виде:

$$E_X^{T+1} = E_X^T - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} (H_{X+1}^T - H_X^T). \quad (14.31)$$



Для простоты дальнейшего рассмотрения в этих выражениях положим пока множители перед скобками равным единице, то есть

$$\frac{1}{\mu\mu_0} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} = 1. \quad (14.32)$$

$$\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} = 1. \quad (14.33)$$

Значение этого множителя и его физический смысл будут рассмотрены далее. Здесь же такое положение позволит заметно упростить геометрическое содержание задачи.

Таким образом, в соответствии с (14.32)–(14.33), приведем (14.30) и (14.31) к виду

$$H_X^{T+1} = H_X^T - (E_{X+1}^T - E_X^T); \quad (14.34)$$

$$E_X^{T+1} = E_X^T - (H_{X+1}^T - H_X^T). \quad (14.35)$$

## 14.2. Сетка и шаблон для одномерной задачи

Для расчета воспользуемся конечно-разностной схемой, впервые предложенной в работе Йи [200] и более подробно рассмотренной в монографии [201, стр. 36–37, рис. 3.1, 3.2]. В рамках настоящей монографии ограничимся одномерным вариантом алгоритма Йи, то есть будем считать, что волна распространяется только вдоль оси  $Ox$  (рис. 14.1) и в процессе распространения остается плоской (разделы 14.1, 14.2). Будем пользоваться сеткой Йи, узлы которой образованы двумя квадратными сетками из электрического и магнитного полей, вложенными друг в друга в шахматном порядке. Схема такой сетки показана на рис. 14.2.

Горизонтальные ряды сетки соответствуют пространственной координате  $x$ , а вертикальные — временной координате  $t$ .

Всю сетку разобьем горизонтальными и вертикальными линиями на квадратные ячейки, каждая из которых в левом верхнем углу содержит узел электрического поля, а в нижнем правом углу — узел магнитного поля. Разделение сетки на ячейки показано на рис. 14.3. Здесь ячейки отделены друг от друга волнистыми линиями, разграничивающими ряды ячеек по времени (горизонтальные) и по координате (вертикальные).

Каждый ряд по времени (горизонтальный) имеет две строки: верхнюю, образованную узлами с электрическими полями, и нижнюю, образованную узлами с магнитными полями.

Каждый ряд по координате (вертикальный) имеет два столбца: левый, образованный узлами с электрическими полями, и правый, образованный узлами с магнитными полями.

Номера ячеек по горизонтальной оси обозначены через  $X_i$ , а по вертикальной — через  $T_j$ , где  $i$  и  $j$  — целые числа порядковой нумерации. На рисунке с целью наглядности приведены ячейки с номерами по координате  $X-1$ ,  $X$ ,  $X+1$  и с номерами по времени  $T-1$ ,  $T$ ,  $T+1$ .

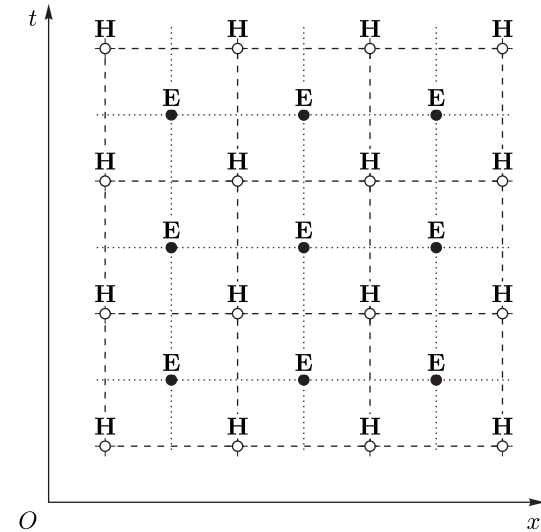


Рис. 14.2. Сетка Йи для расчета полей методом конечных разностей

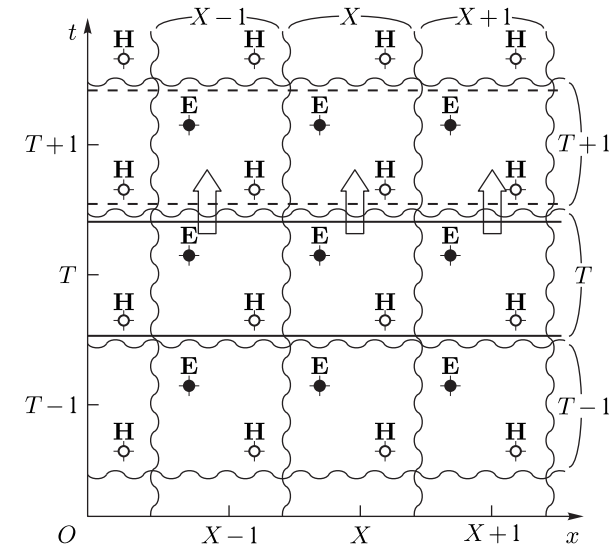


Рис. 14.3. Сетка с выделенными предыдущим  $T$  (сплошные линии) и последующим  $T+1$  (пунктирные линии) рядами по времени. Направление прохода по сетке (снизу вверх) показано стрелками

В рамках поставленной задачи полагаем, что сетка имеет пространственные границы по координате от  $x = 1$ , до  $x = x_N$ , где  $N$  — полное количество ячеек по горизонтали. Количество ячеек по времени

(по вертикали) может быть произвольно большим, определяемым требуемым временем развития исследуемого процесса.

На рис. 14.3 выделены следующие по времени друг за другом два ряда ячеек: предыдущий  $T$ , ограниченный сплошными линиями, и последующий  $T + 1$ , ограниченный пунктирными линиями. Прохождение сетки осуществляется в соответствии с развитием времени, то есть снизу вверх, как показано стрелками. То есть поля в последующем ряду (пунктир) определяются на основе полей предыдущего ряда (сплошные линии).

Итак, проход по сетке будем осуществлять в следующем порядке. Предполагаем, что изначально задан горизонтальный ряд ячеек по времени с номером  $T$ , то есть заданы значения электрического и магнитного полей во всех ячейках этого ряда, начиная с  $x = 1$ , до  $x = x_N$ . Задача состоит в том, чтобы, исходя из этих данных, определить значения обоих полей в следующем ряду по времени, имеющему номер  $T + 1$ .

Прохождение нового ряда будем осуществлять слева направо, то есть начиная с  $x = 1$  до  $x = N$ . При этом, подобно [201, стр. 36, 37, рис. 3.1, 3.2], будем использовать шаблон в виде «креста», схематически показанный на рис. 14.4.

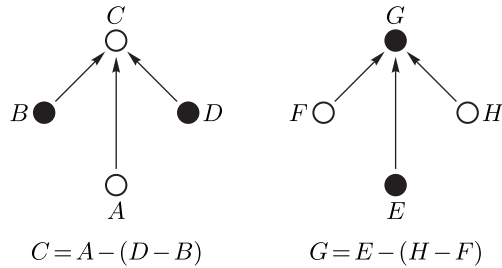


Рис. 14.4. Шаблон в виде «креста» для прохода по секте

Согласно левой части рис. 14.4, магнитное поле в узле  $C$  будет определяться магнитным полем в узле  $A$  и электрическими полями в узлах  $B$  и  $D$  по формуле, приведенной внизу. Согласно правой части того же рисунка, электрическое поле в узле  $G$  будет определяться электрическим полем в узле  $E$  и магнитными полями в узлах  $F$  и  $H$  по формуле, приведенной внизу. Такие два шаблона составляют «правило креста», которым будем руководствоваться при проходе по сетке.

Схема последовательного прохода от ряда  $T$  к ряду  $T + 1$  показана на рис. 14.5.

В качестве исходной выбрана ячейка, соответствующая координате  $X$  и времени  $T$ , а также соседняя с ней ячейка с координатой  $X + 1$  и тем же временем  $T$ . Полагаем, что все поля в ряду по времени  $T$  известны, а поля ряда  $T + 1$  требуется найти. Сначала, следуя правилу креста, определяем нижнюю строку ряда  $T + 1$  по магнитному полю (левая схема на рис. 14.4), то есть поле  $H_X^{T+1}$ . Для этого достаточно

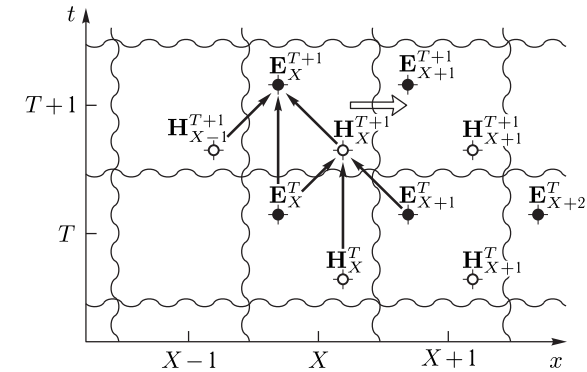


Рис. 14.5. Схема прохождения по сетке от ряда  $T$  к ряду  $T + 1$ . Поля приведены только в узлах, необходимых для настоящего рассмотрения. Сначала рассчитывается  $H_X^{T+1}$  по формуле (14.36), затем  $E_X^{T+1}$  по формуле (14.37)

значений электрического и магнитного полей, имеющихся в нижней и верхней строках предыдущего ряда  $T$ , то есть  $H_X^T$ ,  $E_X^T$ ,  $E_{X+1}^T$ .

При этом поле  $H_X^{T+1}$  имеет вид:

$$H_X^{T+1} = H_X^T - (E_{X+1}^T - E_X^T). \quad (14.36)$$

Затем, также в соответствии с правилом креста, определяем верхнюю строку ряда  $T + 1$  по электрическому полю, то есть  $E_X^{T+1}$ . Для этого правило креста требует уже не только значение электрического поля из ряда  $T$ , то есть  $E_X^T$ , но еще и два значения магнитного поля уже из нижней строки ряда  $T + 1$ , то есть  $H_{X-1}^{T+1}$  и  $H_X^{T+1}$ . При этом поле  $E_X^{T+1}$  имеет вид:

$$E_X^{T+1} = E_X^T - (H_X^{T+1} - H_{X-1}^{T+1}). \quad (14.37)$$

Таким образом, оба поля в ячейке при  $X$  и  $T + 1$  получены.

Дальнейший расчет состоит в переходе от этой ячейки к следующей по горизонтальному ряду, то есть к ячейке при  $X + 1$  и  $T + 1$ , как это показано стрелкой. При этом опять используется правило креста сначала для нахождения магнитного поля  $H_{X+1}^{T+1}$  из полей  $H_{X+1}^T$ ,  $E_{X+1}^T$  и  $E_{X+2}^T$ , а затем и электрического поля  $E_{X+1}^{T+1}$  из полей  $E_{X+1}^T$ ,  $H_{X+1}^{T+1}$  и  $H_X^{T+1}$  (последнее найдено на предыдущем шаге). Подобным образом проходится весь ряд, по времени соответствующий  $T + 1$ . Далее осуществляется переход к началу координат, то есть  $x = 1$ , и выполняется проход слева направо по ряду  $T + 2$ , после чего таким же образом проходится ряд  $T + 3$  и так далее. В результате получается распределение полей во времени по всей площади сетки. Каждый горизонтальный ряд дает значения полей в заданный момент времени  $t$  по всему диапазону изменения координаты  $x$ .

Таким образом, применение шаблона на основе правила креста сводит последовательные шаги при прохождении сетки к единообразию, так что его использование можно считать довольно удобным. В случае же необходимости уточнения получаемых с помощью шаблона результатов следует уменьшать шаги по координате и по времени до тех пор, пока желаемая точность не будет достигнута.

#### 14.2.1. Сравнение шаблона с разностными уравнениями

В аналитическом виде решение задачи о распространении плоской волны приводит к двум конечно-разностным выражениям (14.34) и (14.35), которые для удобства рассмотрения приведем здесь еще раз:

$$H_X^{T+1} = H_X^T - (E_{X+1}^T - E_X^T); \quad (14.38)$$

$$E_X^{T+1} = E_X^T - (H_{X+1}^T - H_X^T). \quad (14.39)$$

Применение шаблона на сетке дает два выражения (14.36) и (14.37), которые также запишем здесь еще раз:

$$H_X^{T+1} = H_X^T - (E_{X+1}^T - E_X^T). \quad (14.40)$$

$$E_X^{T+1} = E_X^T - (H_X^{T+1} - H_{X-1}^{T+1}). \quad (14.41)$$

Из сравнения структуры этих выражений можно видеть, что (14.38) полностью тождественно (14.40), то есть по магнитному полю шаблон дает то же, что и аналитика. Однако (14.39) и (14.41) несколько различаются в том отношении, что магнитные поля в скобках берутся не в тех же, а в соседствующих точках. Это происходит по той причине, что (14.39) получено из выражения (14.31), имеющего вид:

$$\frac{H_{X+1}^T - H_X^T}{\Delta x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{E_X^{T+1} - E_X^T}{\Delta t}, \quad (14.42)$$

тогда как из применения шаблона следует, что это выражение должно иметь вид:

$$\frac{H_X^{T+1} - H_{X-1}^{T+1}}{\Delta x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{E_X^{T+1} - E_X^T}{\Delta t}. \quad (14.43)$$

То есть в выражении (14.42) для магнитного поля по координате берется правая разностная производная, а в выражении (14.43) — по координате берется левая разностная производная. В случае плавной непрерывной зависимости этого поля от координаты различие между производными мало и при уменьшении шага  $\Delta x$  стремится к нулю. То же касается стремления к нулю интервала по времени при уменьшении шага  $\Delta t$ . Таким образом, выражения (14.42) и (14.43) с точки зрения аналитики можно считать эквивалентными. Не так, однако, обстоит дело при численном решении. Конечно-разностное представление (14.42) вполне возможно, однако практика показывает, что использование получаемого таким образом выражения, подобного (14.41), приводит к нестационарному развитию процесса во времени, результатом чего является многократное расщепление исходного импульса,

так что зависимость электрического и магнитного полей от координаты с течением времени приобретает «пилообразный» характер. Здесь не будем останавливаться на причинах такого поведения, а некоторые особенности «пилы» и механизмы ее возникновения рассмотрим далее.

### 14.3. Число Куранта и импеданс

Рассмотрим теперь множители при скобках в выражениях (14.30) и (14.31), имеющие вид (14.32) и (14.33), только теперь раскроем их более подробно.

Обратимся сначала к первому из них, присутствующему в (14.30). Умножим числитель и знаменатель дроби на  $\tilde{n}$  (скорость света в свободном пространстве) и соберем сомножители в группы:

$$\frac{1}{\mu\mu_0} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{\mu\mu_0} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{\tilde{n}}{\tilde{n}} = \frac{1}{\mu} \cdot \left( \frac{\tilde{n}\Delta t}{\Delta x} \right) \cdot \frac{1}{c\mu_0}. \quad (14.44)$$

Введем обозначение:

$$S = \frac{\tilde{n}\Delta t}{\Delta x}. \quad (14.45)$$

Этот параметр называется «числом Куранта» и является критерием устойчивости разностной схемы [201, стр. 38, форм. (3.21)]. Так, схема при  $S \leq 1$  является устойчивой и отражает плавное распространение волны с достаточной достоверностью, а при  $S \geq 1$  схема является неустойчивой и может для волны вместо плавного характера давать беспорядочные скачки вплоть до ухода на бесконечность. Физический смысл параметра Куранта состоит в том, что расстояние, проходимое волной при распространении со скоростью света за промежуток времени  $\Delta t$ , должно быть меньше шага по координате  $\Delta x$ . То есть если волна описывается синусоидой, то на длине волны должно укладываться достаточное количество точек дискретизации по времени. Таким образом, чем меньше число Куранта, тем конечно-разностные вычисления происходят точнее. То есть для достаточной точности надо брать достаточно малый шаг по времени. При этом однако увеличивается объем вычислений, так что реально в большинстве случаев, по крайней мере для первичной оценки, полагают число Куранта равным единице, то есть считают  $S = 1$ .

Далее заметим, что выражение (14.45) содержит скорость света, которая в свободном пространстве описывается выражением:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}. \quad (14.46)$$

Воспользуемся также выражением для импеданса свободного пространства, определяемого формулой [151, стр. 226, форм. (7.127); 1, стр. 50, форм. (1.263)]:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}. \quad (14.47)$$

Подставляя (14.45), (14.46), (14.47) в (14.44) и выполняя простые преобразования, получаем:

$$\frac{1}{\mu\mu_0} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{S}{\mu} \cdot \frac{1}{Z_0}. \quad (14.48)$$

Аналогично множитель в выражении (14.31) принимает вид:

$$\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{S}{\varepsilon} \cdot Z_0. \quad (14.49)$$

#### 14.4. Полные конечно-разностные представления полей

Конечно-разностные представления полей, полученные с помощью шаблона по сетке, имеют вид (14.40) и (14.41). Там коэффициенты при круглых скобках были положены равными единице в соответствии с выражениями (14.32) и (14.33). Приведем теперь те же выражения в полном виде, то есть с учетом величины шагов по времени и координате:

$$H_X^{T+1} = H_X^T - \frac{S}{\mu}(E_{X+1}^T - E_X^T)\frac{1}{Z_0}; \quad (14.50)$$

$$E_X^{T+1} = E_X^T - \frac{S}{\varepsilon}(H_X^{T+1} - H_{X-1}^{T+1})Z_0. \quad (14.51)$$

При  $S = 1$  эти выражения принимают вид:

$$H_X^{T+1} = H_X^T - \frac{1}{\mu}(E_{X+1}^T - E_X^T)\frac{1}{Z_0}; \quad (14.52)$$

$$E_X^{T+1} = E_X^T - \frac{1}{\varepsilon}(H_X^{T+1} - H_{X-1}^{T+1})Z_0. \quad (14.53)$$

Заметим, что использование выражений (14.52) и (14.53) годится только для первичного качественного анализа явления, тогда как для более точного расчета, то есть при  $S \ll 1$ , следует учитывать полные выражения (14.50) и (14.51).

##### 14.4.1. Замечание о других возможных вариантах шаблона

Приведенный здесь шаблон, схема которого представлена на рис. 14.4, получен при конкретном выборе структуры ячеек сетки, а также при определенной поляризации волны. Рассмотрим эти моменты по отдельности.

Во-первых, приведенное на рис. 14.3 разделение сетки на ячейки не является единственно возможным. Так, здесь ячейка построена таким образом, что в ее левом верхнем углу находится узел электрического поля. Однако ячейку можно построить еще тремя возможными вариантами так, чтобы узел электрического поля находился в верхнем правом или в любом из двух нижних углов ячейки. При этом выражения (14.34) и (14.35) будут иметь несколько другой вид, отличающийся порядком следования индексов и знаками. Шаблон правила креста, приведенный на рис. 14.4, также может слегка измениться, как это будет следовать

из аналитических выражений. Однако проверка показывает, что общая картина распространения волны в целом с точностью до одного шага не меняется. Авторы рекомендуют любознательному читателю подробно рассмотреть такие варианты в качестве полезного упражнения.

Далее заметим, что приведенные здесь конечно-разностные уравнения (14.34), (14.35), а также построенный на их основе шаблон на рис. 14.4 несколько отличаются от приведенных в монографии [201, стр. 37–38, форм. (3.15), (3.18)], а также, например в статьях [195, 196], в первую очередь знаками, а также некоторыми индексами. Такое различие принципиальным не является и всего лишь обусловлено различием поляризации электромагнитной волны относительно системы координат. Так, здесь принята ориентация полей волны, представленная на рис. 14.1. То есть электрическое поле направлено вдоль оси  $Oy$ , а магнитное вдоль оси  $Oz$ , так что векторная их запись имеет вид (14.7), (14.8). В цитированных выше работах электрическое поле направлено вдоль оси  $Oz$ , а магнитное вдоль оси  $Oy$ , так что векторная запись имеет вид:  $\mathbf{E} = \{0; 0; E_z\}$ ,  $\mathbf{H} = \{0; -H_y; 0\}$ . В этом случае в выражении для ротора (14.9) выделяются другие слагаемые, в результате чего в правых частях выражений (14.18) и (14.19) минусы меняются на плюсы, а в шаблоне на рис. 14.4 перед скобками минусы также меняются на плюсы. Знаки и индексы в выражениях (14.34) и (14.35) также частично меняются, что следует учитывать при построении машинного алгоритма. Выбор авторами настоящей монографии ориентации полей волны, показанный на рис. 14.1, обусловлен их стремлением к общности с трактовкой волновых процессов в других частях настоящей монографии, например в [1, стр. 78, рис. 2.2], а также в таком весьма важном для практики случае, как распространение гиромагнитных волн в магнитных средах [25, стр. 47–49, рис. 2.3, 2.4]. Следует заметить, что общий характер описываемых далее явлений при выборе той или иной ориентации полей не меняется, а другие варианты ориентации авторы рекомендуют рассмотреть любознательному читателю в качестве полезного упражнения.

Заметим дополнительно, что проведенное выше рассмотрение базируется на сетке, впервые предложенной в работе [200], представляющей собой две сетки с квадратными ячейками, вдвинутые друг в друга в шахматном порядке. При этом ближайшее расстояние между соседними узлами одной из первичных сеток равнялось целой единице, а расстояние между ближайшими узлами первой и второй сеток равнялось одной второй от единицы. При этом индексы, определяющие координаты узлов той и другой сеток, получались содержащими полуцелое слагаемое. Однако при машинной реализации полуцелые индексы в силу технических причин пришлось заменять на целые. Именно такая сетка с целыми индексами представлена в разделе 14.2 на рис. 14.2. С другой стороны, в монографии [201, стр. 34, форм. (3.6)] представлена центральная разностная производная в виде (14.27), содержащая полуцелые индексы, причем сетки на рис. 3.1 и 3.2 (стр. 75–77)

содержат индексы полуцелые, которые далее в листинге Program 3.1 [201, стр. 41–42] заменены на целые, в результате чего наглядность утрачивается.

В таком виде сдвиг первичных сеток на половину шага для размещения их в шахматном порядке представляется не вполне удобным. Поэтому авторы осмеливаются рекомендовать любознательному читателю рассмотреть возможность совмещения двух первичных сеток без сдвига по оси координат, так чтобы узлы сетки магнитного поля находились под узлами сетки электрического поля, а разбиение сетки на ячейки выполнить таким образом, чтобы каждая одна ячейка содержала два узла: вверху — электрический, а внизу — магнитный. В этом случае шаблон, соответствующий конечно-разностным уравнениям, уже не будет иметь вид симметричного креста, а горизонтальная перекладина креста будет сдвинута на единицу вправо или влево. По-видимому, будут два креста — один для электрического поля и другой для магнитного. Авторы настоящей монографии не ставили своей целью экспериментировать с подобными сетками, однако осмеливаются предложить рассмотреть такую возможность любознательному читателю в качестве полезного упражнения и забавного предмета для размышления.

### 14.5. Представление задачи Даламбера в конечных разностях

В предыдущих разделах приведена общая схема применения метода конечных разностей во временной области (иногда кратко называемого FDTD — Finite Difference in Time Domain). Применим теперь этот метод для решения некоторых задач. В качестве одной из наиболее простых рассмотрим распространение импульса, форма которого задана по координате. В классической аналитике это задача Даламбера, имеющая вид [55, стр. 50, форм. (1), (2)]:

уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad (14.54)$$

начальные условия

$$u(x, 0) = \varphi(x); \quad (14.55)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x). \quad (14.56)$$

Решение этой задачи имеет вид [55, стр. 52, форм. (9)]:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha. \quad (14.57)$$

Для дальнейшего рассмотрения важно, что оба слагаемых дают волны, распространяющиеся вдоль оси  $Ox$  в противоположных направлениях [55, стр. 52–58].

Уравнение (14.54) является собой классическое волновое уравнение, которое для полей электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси  $Ox$  (рис. 14.1), принимает вид [1, стр. 52–53, форм. (1.294)–(1.298)]:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = 0; \quad (14.58)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = 0. \quad (14.59)$$

Можно видеть, что эти уравнения совпадают с полученными в разделе 14.1.1 уравнениями (14.22) и (14.23), каждое из которых эквивалентно паре уравнений (14.18) и (14.19).

Таким образом, можно считать, что пара уравнений первого порядка (14.18) и (14.19) для задачи Даламбера в электродинамике играет ту же роль, что уравнение второго порядка (14.54) в классике. То есть решения этой пары уравнений также будут иметь вид волн, распространяющихся вдоль оси  $Ox$  в противоположных направлениях.

Обратимся теперь к граничным условиям. Первое условие (14.55) означает равенство решения уравнения (14.54) вида  $u(x, 0)$  некоторой произвольной функции от координаты  $\varphi(x)$ . Поскольку уравнения (14.18) и (14.19) эквивалентны уравнениям (14.58) и (14.59), то в качестве решения  $u(x, 0)$  может выступить электрическое или магнитное поле волны. То есть условие (14.55) должно иметь вид:

$$E(x, 0) = \varphi(x) \quad (14.60)$$

или

$$H(x, 0) = \varphi(x), \quad (14.61)$$

где в качестве  $\varphi(x)$  может выступить любая функция от координаты, не имеющая разрывов и не обращающаяся в бесконечность в физически реализуемом интервале изменения координаты  $x$ .

Второе условие (14.55) означает равенство производной по времени от решения уравнения (14.54) вида  $\partial u(x, 0)/\partial t$  некоторой произвольной функции от координаты  $\psi(x)$ :

$$\frac{\partial E(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) \quad (14.62)$$

или

$$\frac{\partial H(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad (14.63)$$

где в качестве  $\psi(x)$  также может выступить любая функция от координаты, не имеющая разрывов и не обращающаяся в бесконечность в физически реализуемом интервале изменения координаты  $x$ .

В конечно-разностном представлении эти условия, например для электрического поля, имеют вид:

$$E_X^{T=0} = \varphi(X); \quad (14.64)$$

$$\frac{E_{X+1}^{T=0} - E_X^{T=0}}{\Delta t} = \psi(X), \quad (14.65)$$

где в простейшем случае можно положить шаг по времени  $\Delta t = 1$ . Такие же условия можно записать для магнитного поля. Заметим, что задание первого из этих условий (14.64) уже определяет зависимость электрического поля от координаты  $x$  в момент времени  $t = 0$ , то есть определяет два значения  $E_{X+1}^{T=0}$  и  $E_X^{T=0}$ , так что функция  $\psi(x)$  уже не может быть произвольной. Поэтому можно считать, что решение задачи Даламбера будет определяться только одной функцией  $\varphi(x)$ , которую можно задать произвольно.

Таким образом, задача Даламбера с учетом (14.36), (14.37), (14.40), (14.41) и (14.64) принимает вид: уравнения

$$H_X^{T+1} = H_X^T - (E_{X+1}^T - E_X^T); \quad (14.66)$$

$$E_X^{T+1} = E_X^T - (H_X^{T+1} - H_{X-1}^{T+1}); \quad (14.67)$$

начальное условие — задано электрическое поле

$$E_X^{T=0} = \varphi(X) \quad (14.68)$$

или начальное условие — задано магнитное поле

$$H_X^{T=0} = \varphi(X). \quad (14.69)$$

Итак, постановка задачи Даламбера сводится к заданию уравнений (14.66) и (14.67), а также начальной зависимости от координаты для электрического или магнитного поля (14.68) или (14.69).

В общем случае можно задать оба поля одновременно, но надо учитывать, что они связаны друг с другом как поля одной и той же электромагнитной волны.

## 14.6. Схема машинного расчета задачи Даламбера

Постановка задачи Даламбера состоит в задании профиля волны по координате в начальный момент времени, а решение состоит в нахождении профиля волны, получающегося после ее распространения до последующего заданного заранее момента времени.

Таким образом, в процессе решения меняется координата, а также рассчитываются значения электрического и магнитного полей, так что все эти значения образуют массивы данных.

Расчет выполняется на основе сетки (рис. 14.3), границы которой задаются условиями задачи. По координате сетка содержит  $N$  ячеек,

пронумерованных от 1 до  $N$ . По времени сетка содержит  $M$  ячеек, также пронумерованных от 1 до  $M$ . Верхняя граница сетки, то есть число  $M$ , определяется временем, в течение которого рассматривается распространение волны.

В общем случае величина шагов по координате и по времени, то есть ширина и высота каждой отдельной ячейки, может быть задана исходя из требуемой точности расчета в соответствии с ограничениями, касающимися числа Куранта (раздел 14.3).

Всего требуется пять массивов: один для координаты  $X$ , два для первого и второго значений электрического поля  $E1(X)$ ,  $E2(X)$  и еще два для первого и второго значений магнитного поля  $H1(X)$ ,  $H2(X)$ .

Начало расчета состоит в том, что вручную или с помощью какой-то вспомогательной программы заполняются первые массивы электрического и магнитного полей  $E1(X)$  и  $H1(X)$ .

Далее в цикле рассчитываются последовательные значения координаты  $O$  путем последовательного прибавления единичного шага  $X \rightarrow X + 1$ , по ходу чего получаемые значения записываются в массив координаты  $X(X)$ .

Итак, получаются заполненными три массива: один массив координаты  $X(X)$  и два первых массива электрического и магнитного полей  $E1(X)$  и  $H1(X)$ . Вторые массивы обоих полей  $E2(X)$  и  $H2(X)$  пока остаются пустыми.

При этом первый горизонтальный ряд ячеек сетки (рис. 14.3), соответствующий  $T = 1$ , получается заполненным, то есть во всех узлах этих ячеек значения полей становятся полностью определенными.

Эти значения определяют зависимости того и другого полей от координаты в начальный момент времени  $E(X, T = 1)$  и  $H(X, T = 1)$ .

В случае необходимости эти зависимости в сочетании с массивом по координате можно использовать для графического построения начального профиля волны.

Далее осуществляется переход к следующему значению времени  $T \rightarrow T + 1$ , то есть ко второму горизонтальному ряду ячеек.

Здесь путем последовательного прохождения по координате от  $X = 1$  до  $X = N$  в соответствии с правилом креста (рис. 14.4) рассчитываются значения того и другого полей по значениям, берущимся из первых массивов  $E1(X)$ ,  $H1(X)$ , а полученные значения полей записываются во вторые массивы  $E2(X)$ ,  $H2(X)$ .

Заметим, что сначала следует рассчитывать нижний ряд полей в горизонтальном ряду ячеек, то есть  $H2(X)$ . Здесь для правила креста достаточно данных из предыдущего горизонтального ряда ячеек, то есть  $E1(X)$ ,  $H1(X)$ . При этом получают значения магнитного поля  $H2(X)$ . Затем рассчитывается верхний ряд полей в том же горизонтальном ряду ячеек, то есть  $E2(X)$ . Здесь кроме данных из предыдущего горизонтального ряда, то есть  $E1(X)$  правило креста требует данные из уже заполненного нижнего ряда полей текущего

горизонтального ряда ячеек, то есть  $H2(X)$ . При этом получаются значения электрического поля  $E2(X)$ .

Таким образом, во вторых массивах получаются зависимости того и другого полей от координаты в новый момент времени  $E(X, T = 2)$  и  $H(X, T = 2)$ .

Эти зависимости можно использовать для графического построения профиля волны в окончательный момент времени.

При построении профилей волны в следующие друг за другом моменты времени должна получаться картина, подобная представленной на рис. 6 в монографии [55, стр. 55], где показано, как от одного начального импульса разбегаются в обе стороны два получающихся импульса.

С технической стороны при программировании прохождения горизонтального ряда ячеек по координате в заданный момент времени удобно выполнить в качестве подпрограммы, в конце которой добавить перезапись из вторых массивов в первые.

**Замечание.** В рамках настоящего раздела, как и везде в настоящей работе, решение задачи Даламбера рассмотрено на основе конечно-разностных уравнений вида (14.50), (14.51) или в укороченном варианте (14.36), (14.37). При этом используется разбиение сетки на ячейки, представленное на рис. 14.3, так что узел электрического поля находится в левом верхнем углу ячейки. Заметим, что при другом возможном разбиении сетки на ячейки (раздел 14.4.1) задача решается сходным образом, но порядок вычисления электрического и магнитного полей при прохождении по одному горизонтальному ряду ячеек может меняться.

## 14.7. Графическое представление решения задачи Даламбера

В качестве примера решения задачи Даламбера по описанной в разделе 14.6 схеме приведем результат расчета для простого частного случая.

Будем считать, что в начальный момент времени задано распределение электрического поля по координате в виде ограниченного импульса определенной формы и рассмотрим распространение такого импульса в последующие моменты времени.

### 14.7.1. Схема представления импульса

Используемые далее правила представления импульса едины для любого импульса, как начального, так и распространяющегося далее с течением времени. Для наиболее общего представления импульса начнем отсчет координаты со значения  $X_n$ , где  $n$  — целое число, соответствующее номеру ячейки сетки, которое может быть задано в интервале от 1 до  $N$  конкретными условиями задачи. Отметим величину поля при этом значении  $X_n$  и будем увеличивать далее номер  $n$  шагами по единице, то есть переходя по горизонтальному ряду сетки от ячейки

к ячейке, при каждом получаемом значении координаты отмечая соответствующее значение поля.

Для удобства записи представим такой импульс в виде последовательности разделенных черточками значений поля, соответствующих последовательным значениям координаты

В качестве примера на рис. 14.6 приведена схема импульса, имеющего представление вида 0-5-1-4-3-0.

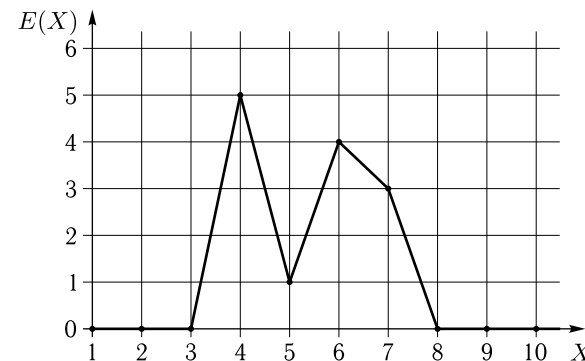


Рис. 14.6. Схема представления импульса вида 0-5-1-4-3-0

На этом рисунке для удобства изображения счет координат начинается с  $X = 1$ , а представление самого импульса начато с  $X = 3$ . В этой точке поле равно нулю:  $E(3) = 0$ , при координате  $X = 4$  поле равно  $E(4) = 5$ , далее  $E(5) = 1$ ,  $E(6) = 4$ ,  $E(7) = 3$ ,  $E(8) = 0$ . В этой точке импульс заканчивается и везде далее поле равно нулю. Заметим, что начало оси координат здесь выбрано условно, то есть импульс с тем же представлением может быть как угодно сдвинут вдоль этой оси, а точное его положение, например начало или точка вершины будет указываться конкретно в текущем рассмотрении.

**Замечание.** В приведенном здесь примере значения поля равны целым числам. Это сделано не более чем для удобства изложения. В общем случае поля могут измеряться дробными числами, однако значения координаты всегда остаются целыми как номера соответствующих ячеек сетки.

### 14.7.2. Иллюстрация развития во времени решения задачи Даламбера

Теперь обратимся к рис. 14.7, где представлена иллюстрация развития во времени решения задачи Даламбера для начального импульса электрического поля в виде равнобедренного треугольника 0-1-2-1-0. При этом вершина импульса приходится на координату  $X = 9$ , так что  $E(9) = 2$ , а во всех точках вне импульса, то есть при  $X \leq 7$  и  $X \geq 12$

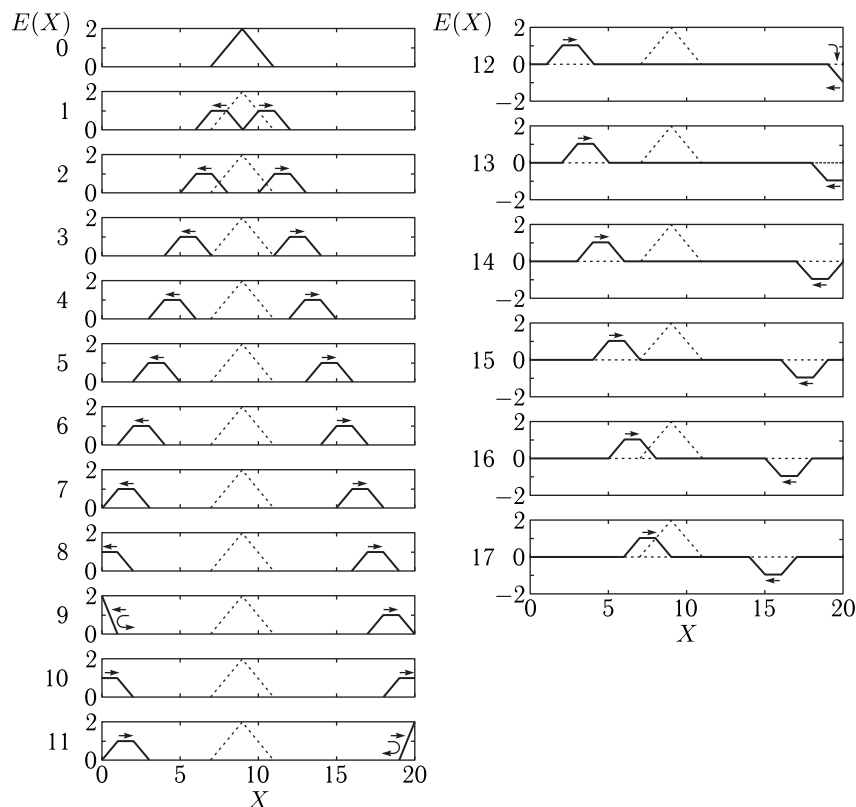


Рис. 14.7. Графическое представление развития во времени электрического поля в соответствии с решением задачи Даламбера для импульса вида 0-1-2-1-0

электрическое поле равно нулю. При этом магнитное поле в начальный момент времени во всем интервале  $X$  равно нулю.

Расчет выполнен для пары значений полей, представленной в виде (14.36), (14.37). При этом в процессе распространения волны будут меняться оба поля — электрическое и магнитное, однако на данном этапе ограничимся представлением в графическом виде только электрического поля, оставляя магнитное таким, как того будет требовать расчет по правилу креста, но выводить его на графику не будем, так как его свойства с точностью до знака повторяют свойства электрического поля. В случае необходимости любознательный читатель может рассмотреть магнитное поле самостоятельно в качестве полезного упражнения.

Таким образом, на рис. 14.7 представлены эпюры развития во времени именно электрического поля.

Номера эпюр соответствуют последовательным моментам времени, увеличивающимся с шагом в единицу, то есть на один горизонтальный

ряд сетки. При времени от нуля до  $T = 11$  (левый столбец) все импульсы положительны, а при времени от  $T = 12$  до  $T = 17$  (правый столбец) часть импульсов отрицательна, поэтому с целью экономии места на рисунке размер эпюр по высоте в левом столбце сокращен от  $E = 0$  до  $E = 2$ , а в правом оставлен полным — от  $E = -2$  до  $E = 2$ . На всех эпюрах точечными линиями приведен вид начального импульса.

Эпюра №1 представляет вид начального, заданного при  $T = 0$  импульса электрического поля, имеющего вид 0-1-2-1-0. Магнитное поле здесь равно нулю и на рисунке не показано.

Эпюра №2 соответствует распределению электрического поля по прошествии одной единицы времени, то есть при  $T = 1$ . Видно, что исходный импульс расщепился на два импульса вида 0-1-1-0, раздвинутых в противоположные стороны, причем амплитуда импульсов по сравнению с начальным значением уменьшилась в два раза. Заметим, что такое уменьшение как раз соответствует делению на два функции  $\varphi(x)$  в первом слагаемом аналитического решения задачи Даламбера, представленного в виде (14.57) (раздел 14.5).

Эпюра №3 соответствует прохождению еще одной единицы времени. Видно, что импульсы, не меняя формы, дополнительно раздвинулись в противоположные стороны.

Из дальнейших эпюр №4–7 видно, что импульсы последовательно раздвигаются все дальше, причем расстояние между ними относительно времени линейно увеличивается. Такое поведение как раз соответствует аналитическому решению, зависящему от времени линейным образом в виде  $x \rightarrow \pm at$ , то есть от начального импульса в обе стороны разбегаются два импульса со скоростями  $\pm a$ . Таким образом, полученная картина вполне соответствует классическому виду аналитического решения, представленного на рис. 6 в монографии [55, стр. 55].

На эпюре №8 импульс, идущий в левую сторону, доходит до края сетки, где далее до эпюры №1 отражается, после чего распространяется в правую сторону, как это видно из эпюр №12–17. Подобное отражение на эпюрах №10–14 претерпевает импульс, изначально распространявшийся направо. Далее отраженный импульс распространяется налево, как это видно из эпюр №15–17.

Различие между двумя приведенными отражениями состоит в том, что от левой границы сетки импульс отражается с тем же знаком, то есть как был, так и остается положительным, тогда как при отражении от правой границы импульс отражается с инверсией, его знак меняется, то есть он был положительным, а становится отрицательным.

В классике такое поведение соответствует отражению от конца струны со свободным и закрепленным концом [55, стр. 67–68, рис. 13, 14]. Для длинной линии это соответствует линии, разомкнутой или замкнутой на конце [130, стр. 219–221]. Для электромагнитной волны это отражение от диэлектрика или от идеального проводника. Более подробное рассмотрение вопроса фазы при отражении,



в том числе с учетом магнитного поля, можно найти в монографии [201, стр. 42–45, рис. 3.6].

С технической стороны различие знаков при отражении на левой и правой границах сетки происходит из-за того, что количество узлов того и другого знака в каждом горизонтальном ряду одинаково. При этом поскольку правило креста подразумевает смещение по координате на один узел, то на левом краю сетки левые значения полей равны нулю (так как они приходятся на точки, где сетки уже нет), а на правом краю сетки равны нулю уже правые значения (так как там тоже сетки уже нет). Для того, чтобы приравнять условия на обеих границах сетки следует взять число узлов для электрического поля отличающимся на единицу от числа узлов для магнитного поля, что достигается заданием размеров соответствующих массивов. При этом отражение от обеих границ будет иметь одинаковые знаки, то есть на обеих границах происходит с инверсией или без нее, в зависимости от того, ряд узлов какого поля будет на единицу длиннее.

Авторы настоящей монографии рекомендуют любознательному читателю провести такую проверку в качестве полезного упражнения.

### 14.7.3. Подавление отражения от края сетки

В представленном на рис. 14.7 изображении распространения импульсов видно, что оба они обязательно отражаются от той или иной границы сетки. Однако на практике может возникнуть желание подавить отражение или вообще прервать дальнейшее распространение волны при какой-то координате сетки. С технической стороны для этого следует проследить момент, когда волна доходит до соответствующей координаты, после чего в последующих двух шагах по времени принудительно задавать электрические и магнитное поля равными нулю. Программным путем это можно сделать с помощью условного перехода по условию, когда поле в заданном узле станет отличным от нуля, то есть волна дойдет до этой точки. При выполнении такого условия следует в последующих двух шагах по времени (или больше, если импульс довольно продолжительный) электрическое и магнитное поля положить равными нулю. При этом правило креста будет «наткаться» на нули и дальнейшее развитие волны прекратится.

Авторы настоящей монографии также рекомендуют любознательному читателю проделать такие манипуляции в качестве полезного упражнения.

## 14.8. Формирование вторичного поля от импульсов различной формы

Приведенное в разделе 14.7.2 решение задачи Даламбера в конечных разностях получается столь красивым, соответствующим аналитической классике [55, стр. 50–70], только для немногих частных

случаев. Одним из таких является импульс 0-1-2-1-0. Рассмотрим теперь другие достаточно характерные случаи.

### 14.8.1. Импульс в виде равнобедренного треугольника

В качестве первого примера обратимся к начальному, то есть первичному импульсу, имеющему форму равнобедренного треугольника, стороны которого, по мере изменения координаты  $X$  единичными шагами, по полю меняются также единичным образом. Для таких импульсов будем использовать укороченный вид записи, указывая, кроме крайних нулевых значений, только одно значение на середине в вершине треугольника. При этом вместо пропущенных значений вставляем две черточки. Так, например, вместо 0-1-2-1-0 будем использовать обозначение 0--2--0, вместо 0-1-2-3-4-5-4-3-2-1-0 будем использовать 0--5--0 и так далее. Импульсы, получающиеся по мере развития времени, будем называть вторичными.

Некоторые из случаев равнобедренных первичных импульсов представлены на рис. 14.8. Приведены вторичные импульсы, формирующиеся по прошествии пяти шагов по времени.

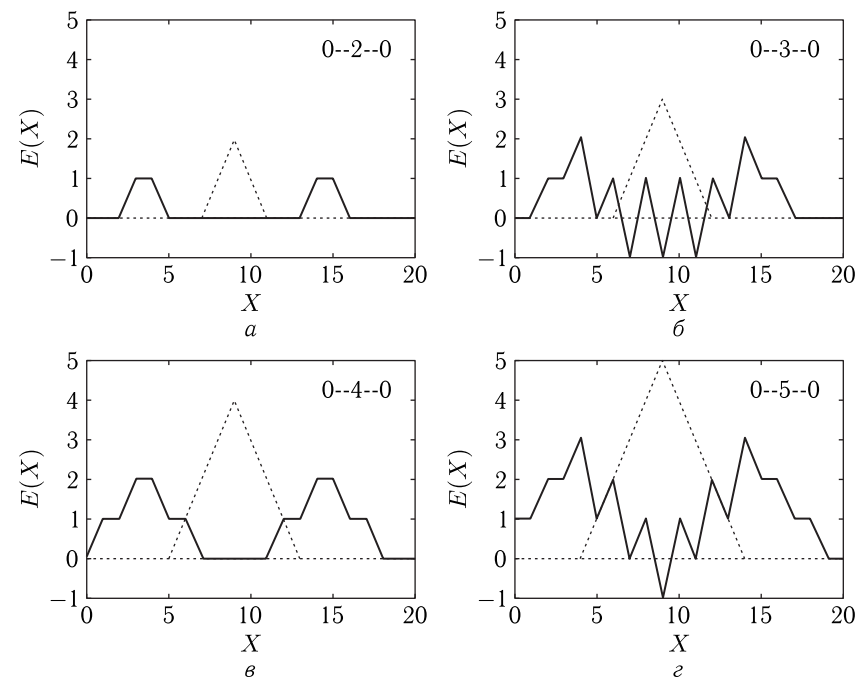


Рис. 14.8. Формирование вторичных импульсов через пять шагов по времени из первичных импульсов, имеющих вид равнобедренных треугольников различной высоты с вершинами в точке  $X = 9$ . Точечными линиями показаны контуры первичных (начальных) импульсов. а — 0--2--0; б — 0--3--0; в — 0--4--0; г — 0--5--0

На рис. 14.8, *а* представлены импульсы, сформированные из первичного импульса вида 0--2--0, то есть имеющего вершину  $E(9) = 2$ . Можно видеть, что эти импульсы полностью совпадают с представленными на эпюре №5 на рис. 14.7, то есть имеют те же особенности, отмеченные в разделе 14.7.2.

На рис. 14.8, *б* представлены импульсы, сформированные из первичного импульса вида 0--3--0, имеющего вершину  $E(9) = 3$ .

Картина вторичных импульсов полностью симметрична, что обусловлено симметрией первичного импульса. Однако вторичная картина резко отличается от предыдущего случая. Здесь наблюдается расщепление единого первичного импульса на множество более мелких импульсов. Расхождение по координате в обе стороны, подобное представленному на рис. 14.7, имеет место только для крайних импульсов, которые отступают на пять шагов, соответствующих пяти шагам по времени. То есть огибающая расхождения по координате, соответствующая классическому решению Даламбера, четко наблюдаемая на рис. 14.7, здесь сохраняется. Однако между двумя расходящимися лучами имеет место чередование амплитуд поля вверх и вниз с единичным шагом по координате, имеющее пилообразный характер. Амплитуды крайних выбросов равны 2,0 единиц по полю, что на 0,5 единицы превышает половину исходного импульса, равную 1,5. Амплитуды пиков пилообразного участка по всей длине одинаковы и составляют  $\pm 1$  единицы по полю.

На рис. 14.8, *в* представлены импульсы, сформированные из первичного импульса вида 0--4--0, имеющего вершину  $E(9) = 4$ .

Картина вторичных импульсов также симметрична и во многом подобна приведенной на рис. 14.8, *а*. Отличие состоит в том, что здесь вторичные импульсы получаются не гладкими, а ступенчатыми, причем величина ступенек составляет одну единицу по полю. Основания вторичных импульсов в два раза превышают основания импульсов от импульса 0--2--0, а полная амплитуда также в два раза выше. В остальном картина соответствует классической ситуации Даламбера.

На рис. 14.8, *г* представлены импульсы, сформированные из первичного импульса вида 0--5--0, имеющего вершину  $E(9) = 5$ . Здесь картина вторичных импульсов также симметрична и во многом подобна картине от импульса 0--3--0, показанной на рис. 14.8, *б*. Точно так же крайние импульсы расходятся в стороны подобно классическим волнам Даламбера, а середина между ними заполнена пилообразными колебаниями, чередующимися с единичным шагом по координате. Амплитуды крайних выбросов равны 2,5 единиц по полю, что на 0,5 единицы превышает половину исходного импульса, равную 2,5. Пилообразные колебания спускаются с обеих сторон крайних импульсов с шагом по единице, достигая в середине величины  $\pm 1$  единицы по полю. В остальном картина подобна приведенной на рис. 14.8, *б*.

Проверка показывает, что дальнейшее увеличение амплитуды первичного импульса приводит к периодическому повторению картин, приведенных на рис. 14.8. При этом если высота первичного импульса рав-

на четному числу, то картина будет подобна приведенной на рис. 14.8, *а* и рис. 14.8, *в*, то есть классическому решению Даламбера, а вторичные импульсы будут иметь половинную амплитуду и ступенчатые стороны. Если высота первичного импульса равна нечетному числу, то картина будет подобна приведенной на рис. 14.8, *б* и рис. 14.8, *г*, то есть будут получаться крайние импульсы с амплитудной на 0,5 единиц поля выше половинной от первичного импульса, а их расхождение в стороны будет подобно классическому расхождению лучей Даламбера. Пространство же между крайними импульсами будет заполнено пилообразными колебаниями, спускающимися с обеих сторон с шагом по единице, стремясь по амплитуде к  $\pm 1$  единице по полю.

**Замечание.** Ввиду достаточно частого повторения далее подобных картин пилообразного характера для краткости изложения будем называть их «пилообразной структурой», или просто «пилой».

### 14.8.2. Импульс произвольной формы

В предыдущем разделе приведены примеры формирования вторичных импульсов из первичных симметричной формы — в виде равнобедренных треугольников. Рассмотрим теперь более сложный случай — первичных импульсов, имеющих произвольную форму. В качестве примеров обратимся к импульсам вида 0-2-1-5-4-7-2-2-1-0 и 0-2-1-(-5)-4-7-(-2)-2-1-0, формирование вторичных импульсов из которых показано на рис. 14.9. Левый столбец рисунка (*а*, *в*, *д*) соответствует первому из этих импульсов, правый (*б*, *г*, *е*) — второму. Первый из первичных импульсов (*а*) полностью положительный, второй (*б*) — содержит положительные и отрицательные части. Первый ряд эпюр рисунка (*а*, *б*) соответствует первичным импульсам, второй (*в*, *г*) — вторичным импульсам, образованным из первичных через три шага по времени, третий (*д*, *е*) — вторичным импульсам, образованным из первичных через пять шагов по времени.

Из рисунка видно, что тот и другой из первичных импульсов дают вторичные импульсы довольно сложной формы, в обоих случаях ни в малейшей степени не повторяющих форму первичных.

В то же время можно видеть, что крайние точки вторичных импульсов  $A, A', A''$  и  $B, B', B''$  расходятся в противоположные стороны в соответствии с лучами Даламбера. В самом деле, рассмотрим, например, левый столбец (*а*, *в*, *д*). Так, точка  $A$  имеет координату  $X = 6$ , а точка  $A'$  имеет координату  $X = 3$ , то есть расстояние по координате между этими точками равно трем. То есть по прошествии трех единиц времени край вторичного импульса сдвинулся в левую сторону на три единицы по координате. Точно так же точка  $A''$  имеет координату  $X = 1$ , то есть отстоит от точки  $A$  на пять шагов по координате, что соответствует пяти шагам по времени. Аналогичные положения по координате и времени соответствуют точкам  $B'$  и  $B''$  относительно точки  $B$ , а на правом столбце рисунка (*б*, *г*, *е*) прослеживаются те же зависимости.

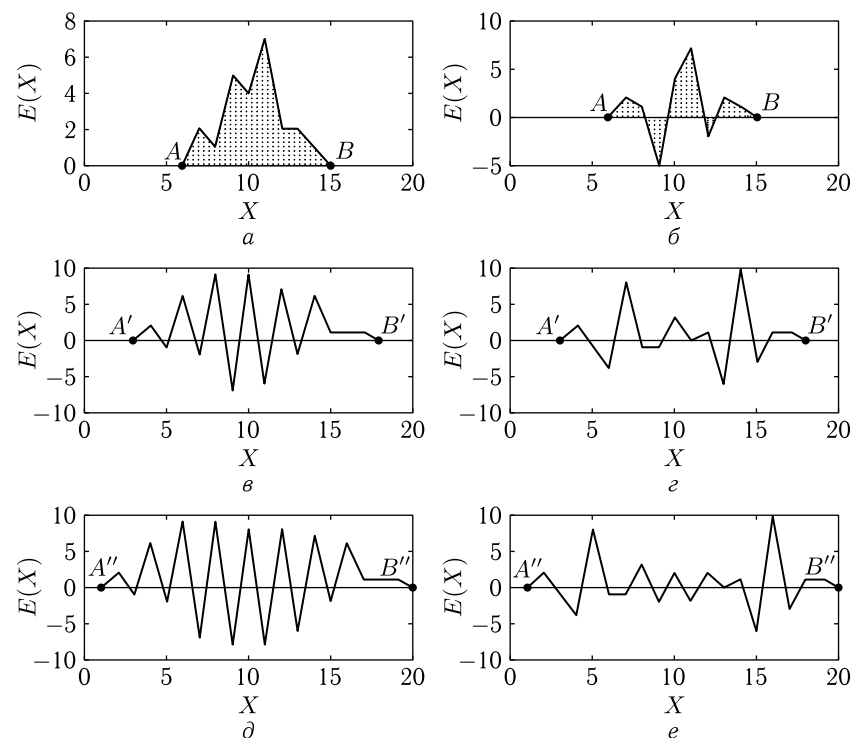


Рис. 14.9. Формирование вторичных импульсов через три и пять шагов по времени из первичных импульсов различного вида:  $a, б$  — первичные импульсы;  $в, г$  — вторичные импульсы через три шага по времени;  $д, е$  — вторичные импульсы через пять шагов по времени. Первичные импульсы (заштрихованы) имеют вид:  $a$  — 0-2-1-5-4-7-2-2-1-0;  $б$  — 0-2-1-(-5)-4-7-(-2)-2-1-0. Точки  $A, A', A''$  и  $B, B', B''$  соответствуют концам импульсов по координате

Таким образом, можно полагать, что крайние границы областей формирования вторичных импульсов следуют расходящимся лучам Даламбера. В то же время пространство между этими лучами заполнено сильно осциллирующими пилообразными структурами, причем можно заметить, что в случае положительного первичного импульса (левый столбец рисунка) эти структуры имеют несколько более регулярный вид, чем в случае знакопеременного первичного импульса (правый столбец рисунка).

Из проделанного рассмотрения можно сделать вывод, что при задании электрического поля в отсутствие магнитного поля соответствующее классике решение задачи Даламбера получается только при задании первичного импульса в виде равнобедренного треугольника, стороны которого по мере изменения координаты  $X$  единичными шагами по полю меняются также единичным образом. При любой другой

форме первичного импульса края вторичных импульсов следуют расходящимся лучам Даламбера, а пространство между этими лучами заполняется структурой пилообразного вида.

### 14.8.3. Единичный импульс

Весьма важным для дальнейшего рассмотрения и в то же время наиболее простым по конфигурации является импульс вида 0-1-0, который далее будем называть «единичным импульсом». Такой импульс является частным случаем равнобедренного импульса, рассмотренного в разделе 14.8.1, и имеет с ним ряд общих свойств.

Обратимся к рис. 14.10, где показано последовательное развитие во времени вторичных импульсов, формирующихся из первичного единичного.

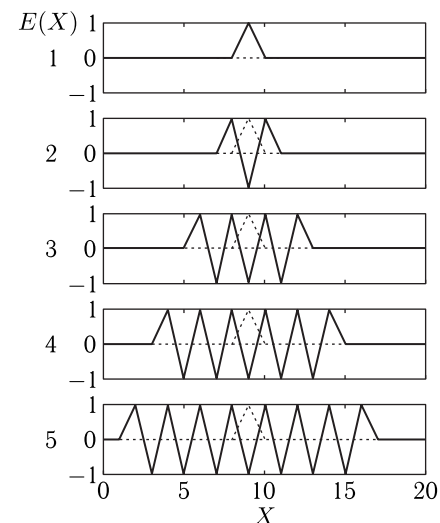


Рис. 14.10. Формирование вторичных импульсов из единичного первичного (эпюра 1) в последовательные моменты времени: 1 — начальный импульс; 2 — один шаг по времени; 3 — три шага по времени; 4 — пять шагов по времени; 5 — семь шагов по времени

Из рисунка можно видеть, что по мере развития времени (по последовательным эпюрам рисунка сверху вниз) внешние края группы вторичных импульсов расходятся в противоположные стороны равномерным (линейным) образом, как того требует общее решение задачи Даламбера (раздел 14.7.2, рис. 14.7). Однако весь промежуток между этими краями не свободен от импульсов, как на рис. 14.7, а заполнен регулярными пилообразными импульсами единичной амплитуды с чередующимися знаками. В этом картина сходна с характерной для равнобедренных импульсов с нечетной амплитудой (рис. 14.8, б, рис. 14.8, г),

только здесь нет провала к середине вниз от крайних импульсов по той причине, что теперь вторичным импульсам некуда проваливаться, ибо они с самого начала сформированы на нулевом горизонтальном уровне.

Пилообразные импульсы здесь имеют четкий регулярный характер, амплитуда периодически перескакивает с  $+1$  на  $-1$  и обратно с единичным шагом по координате. Будем называть такие импульсы «регулярной пилой».

Можно видеть, что количество отрицательных зубьев пилы равно количеству шагов по времени, то есть при продвижении на один шаг количество зубьев увеличивается на единицу. Количество положительных зубьев всегда на единицу больше количества шагов по времени, то есть при каждом шаге их число также увеличивается на единицу.

Таким образом, в отличие от классической задачи Даламбера, решение которой представляет собой распространение в противоположные стороны двух волн, сохраняющих форму начального возмущения (с половинной амплитудой), здесь такому закону распространения следуют только края группы вторичных импульсов, промежутки между которыми заполняются регулярной пилообразной структурой.

### 14.9. Качественная картина задания единичного импульса

В связи с наблюдаемым отличием вторичной картины единичного импульса от классической задачи Даламбера (разделы 14.5, 14.7.2), обратимся за качественной помощью к физике. При этом полагаем, что недостаточно смотреть картину полей вдали от источника, но и источник должен быть физически правдоподобным.

Проведенное до данного момента рассмотрение (разделы 14.7.2–14.8.3) касалось задания в качестве первичного импульса только электрического поля. В то же время в природе динамическое изменение электрического поля всегда сопровождается возникновением магнитного поля, как это можно видеть из уравнения (14.2) (раздел 14.1) [135, стр. 673, (82.2a)]. Таким образом, можно полагать, что единичный импульс электрического поля, рассмотренный в разделе 14.8.3, должен сопровождаться подобным же импульсом магнитного поля.

Рассмотрим случай задания электрического поля в начальный момент времени, полагая, что магнитное поле во всех узлах сетки в этот момент равно нулю. Как было показано в разделе 14.8.1, любая симметричная конфигурация поля, кроме 0-1-2-1-0, дает распределение по времени типа «пилы», не соответствующее физике. Например, импульс типа 0-1-0 уже дает «пилу».

Таким образом, мы хотим получить распределение физическое, а задаем начальные условия чисто математически, не сверяясь с физикой, что недостаточно последовательно.

Поэтому попробуем рассмотреть, насколько распределение типа 0-1-0 соответствует физике.

Обратимся к механическому и геометрическому моделированию. Положим на стол школьную линейку с сантиметровыми делениями. Это будет ось  $Ox$ . Пусть каждое сантиметровое деление является узлом сетки по координате в начальный момент времени. Пусть во всех таких узлах, кроме одного, например семнадцатого, электрическое поле равно нулю, а в этом узле равно единице. Это соответствует заданию поля в виде дельта-функции или импульса вида 0-1-0. Посмотрим теперь, как такое поле можно создать на практике (то есть в физике). Поскольку у нас возмущение дальше будет распространяться вдоль оси  $Ox$ , то есть вдоль линейки, то электрическое поле в семнадцатом узле должно быть перпендикулярно оси линейки. Расположим на уровне этого узла по обе стороны от линейки по электроду, провода от которых присоединим к автомобильному аккумулятору (12 вольт). Таким образом, между электродами на уровне семнадцатого узла будет создано статическое электрическое поле, перпендикулярное оси линейки. Если расстояние между электродами будет меньше одного сантиметра хотя бы в несколько раз, то есть меньше расстояния между соседними узлами сетки, то можно считать, что на шестнадцатом и восемнадцатом узлах уже поля не будет. То есть получаем аналог распределения электрического поля типа 0-1-0.

Начнем теперь отсчет времени. Если электроды будут по-прежнему присоединены к аккумулятору, то во времени ничего и не будет меняться. Однако по условию задачи начальное возмущение должно действовать только в начальный момент времени, после чего волна распространяется сама в соответствии с правилом креста по сетке  $\Psi$  (раздел 14.2).

Исключить начальное условие в первый же шаг по времени можно, оборвав провода к электродам от аккумулятора. Сделаем так и будем смотреть, что получится исходя из физики. Изменение величины электрического поля (в данном случае его выключение) должно привести к возникновению магнитного поля. До момента разрыва цепи магнитного поля не было, так как ток между электродами не шел, а было только электрическое. При разрыве же на смену электрическому полю приходит магнитное. Это означает, что уже после первого шага по времени на месте электрического поля возникло магнитное и оно будет локализовано там же, где было до того электрическое. То есть вместо электрического распределения типа 0-1-0 возникнет магнитное, распределенное по координате тоже по типу 0-1-0.

Поскольку, в соответствии с шахматным характером сетки  $\Psi$ , два поля возникнут по времени за половину от полного шага, то можно считать, что на первом шаге будут присутствовать сразу два поля — электрическое и магнитное.

Будем теперь считать первую половину первого шага подготовительным этапом к развитию процесса по времени. То есть в качестве начального условия надо задать не просто электрическое поле 0-1-0,

а вместе с ним и магнитное тоже типа 0-1-0. Поскольку магнитное является как бы «противодействием» электрическому, то его надо задать в виде 0-(-1)-0, то есть противоположной полярности. Для дальнейшего развития процесса можно использовать сетку Йи с правилом креста (раздел 14.2).

### 14.10. Компенсация вторичных импульсов магнитным полем

В соответствии со сказанным в предыдущем разделе будем полагать, что единичный импульс электрического поля типа 0-1-0 сопровождается единичным импульсом магнитного поля подобного же типа, однако взаимное расположение по координате и знаки импульсов, требуемые для получения регулярной картины, подобной решению Даламбера, получаются только в двух случаях, которые далее рассмотрим более подробно.

#### 14.10.1. Единое расположение импульсов

Сначала рассмотрим случай, когда импульсы электрического и магнитного поля имеют одинаковую координатную зависимость, но различные знаки, то есть импульс электрического поля имеет вид 0-1-0, а магнитного 0-(-1)-0.

Обратимся к рис. 14.11, где показано формирование вторичных импульсов в последовательные моменты времени из единичного первичного (эпюра 1), содержащего электрическое и магнитное поля. Основной электрический импульс показан утолщенной линией. Соответствующий магнитный импульс — тонкой линией. Точечными линиями на эпюрах № 2–5 показаны исходные импульсы, соответствующие эпюре № 1. С целью наглядности рисунка обозначения электрического и магнитного полей приведены не за левой осью рисунка, а непосредственно около соответствующих импульсов. Нумерация эпюр соответствует тем же шагам по времени, что на рис. 14.10.

Из рисунка видно, что вторичные импульсы обоих полей следуют друг за другом в той же конфигурации, что и в начальный момент времени, то есть магнитный импульс всегда остается зеркально отраженным в горизонтальной оси (инвертированным) относительно импульса электрического поля. При этом такая группа импульсов распространяется в левом (отрицательном по оси  $Ox$ ) направлении по времени (по эпюрам сверху вниз) равномерно (линейно), как того требует классическое решение задачи Даламбера (рис. 14.7).

#### 14.10.2. Упреждающее расположение магнитного импульса

Рассмотрим теперь другой случай, когда конфигурация и знаки обоих импульсов являются одинаковыми, то есть имеют вид 0-1-0, однако импульс магнитного поля опережает импульс электрического поля на один шаг по координате.

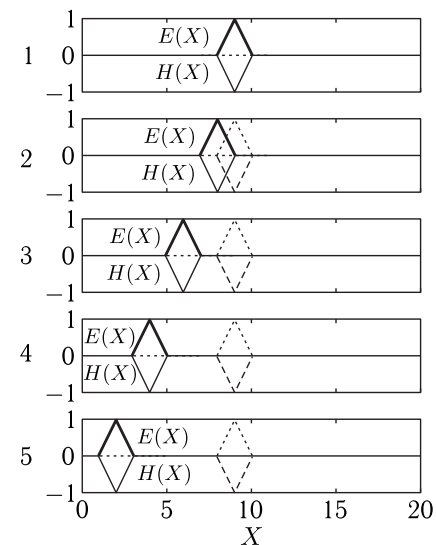


Рис. 14.11. Формирование вторичных импульсов из единичного первичного (эпюра 1), содержащего электрическое и магнитное поля в последовательные моменты времени: 1 — начальный импульс; 2 — один шаг по времени; 3 — три шага по времени; 4 — пять шагов по времени; 5 — семь шагов по времени

Обратимся к рис. 14.12, где показано формирование вторичных импульсов в последовательные моменты времени из единичного первичного (эпюра 1), содержащего электрическое и магнитное поля. Основной электрический импульс показан утолщенной линией. Соответствующий магнитный импульс — тонкой линией. Точечными линиями на эпюрах № 2–5 показаны исходные импульсы, соответствующие эпюре № 1. С целью наглядности рисунка обозначения электрического и магнитного полей приведены не за левой осью рисунка, а непосредственно около соответствующих импульсов. Нумерация эпюр соответствует тем же шагам по времени, что на рис. 14.10.

Из рисунка видно, что вторичные импульсы обоих полей следуют друг за другом в той же конфигурации, что и в начальный момент времени, то есть магнитный импульс всегда остается на один шаг левее электрического. При этом такая группа импульсов распространяется в правом (положительном по оси  $Ox$ ) направлении по времени (по эпюрам сверху вниз) равномерно (линейно), как того требует классическое решение задачи Даламбера (рис. 14.7).

#### 14.10.3. Заключительное замечание

Итак, можно сделать вывод, что добавление к единичному электрическому импульсу дополнительного импульса магнитного поля в конфигурациях, приведенных на эпюрах № 1 рис. 14.11 и рис. 14.12,

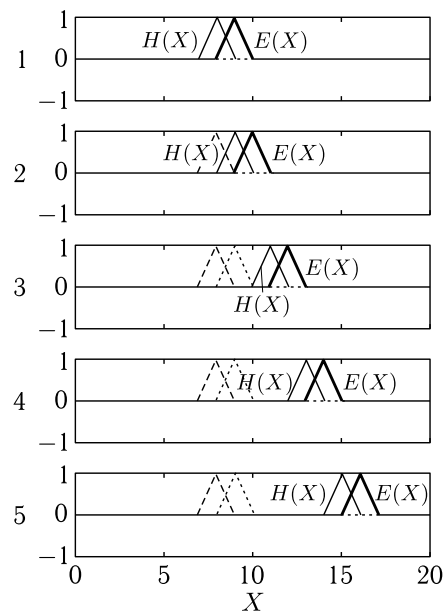


Рис. 14.12. Формирование вторичных импульсов из единичного первичного (эпюра 1), содержащего электрическое и магнитное поля в последовательные моменты времени: 1 — начальный импульс; 2 — один шаг по времени; 3 — три шага по времени; 4 — пять шагов по времени; 5 — семь шагов по времени

позволяет получить регулярное распространение таких объединенных единичных импульсов в виде расходящихся в противоположные стороны волн, подобных классическому решению задачи Даламбера.

Однако наблюдаются два заметных отличия от классики.

Во-первых, та или иная из рассмотренных конфигурация пары основного электрического и дополнительного магнитного импульсов приводит к формированию только одной волны, распространяющейся в ту или другую сторону, тогда как классика Даламбера дает одновременно две волны, распространяющиеся в противоположные стороны.

Во-вторых, ни то ни другое сочетание электрического и магнитного импульсов не дает уменьшения амплитуды вторичных импульсов в два раза, как того требует классическое решение Даламбера.

Важно также заметить, что взаимное расположение импульсов того и другого полей при их различных знаках, показанное на эпюрах № 1 рис. 14.11 и рис. 14.12, является единственным, обеспечивающим регулярную картину, показанную на эпюрах № 2–5 тех же рисунков. Проверка показывает, что при любом другом расположении подобных импульсов получается пилообразная структура, зачастую не вполне симметричного характера.

## 14.11. Интерпретация компенсации вторичных импульсов на сетке

В разделах 14.10.1–14.10.2 показано, что введение должным образом магнитного единичного импульса в добавление к электрическому позволяет сформировать регулярную картину распространения волн Даламбера в ту и другую стороны. Приведем теперь наглядную схему механизма компенсации путем определения полей на узлах сетки с помощью правила креста. Рассмотрим случаи отсутствия компенсации, а также компенсацию в случае того и другого вариантов задания магнитного поля.

### 14.11.1. Отсутствие компенсации

Будем рассматривать сетку в виде, приведенном на рис. 14.3. В виде, наиболее подходящем для данного рассмотрения, сетка показана на рис. 14.13. Ячейки сформированы таким образом, что узел, содержащий электрическое поле, находится в левом верхнем углу ячейки. Нумерация ячеек по времени задана начиная с первой ячейки, рассмотрены три горизонтальных ряда ячеек, что соответствует, кроме начального положения, двум последовательным шагам по времени. По координате та ячейка, в которой задается начальный единичный импульс электрического поля обозначена номером  $X$ , а соседние с ней ячейки имеют номера  $X \pm 1$  и  $X \pm 2$  соответственно.

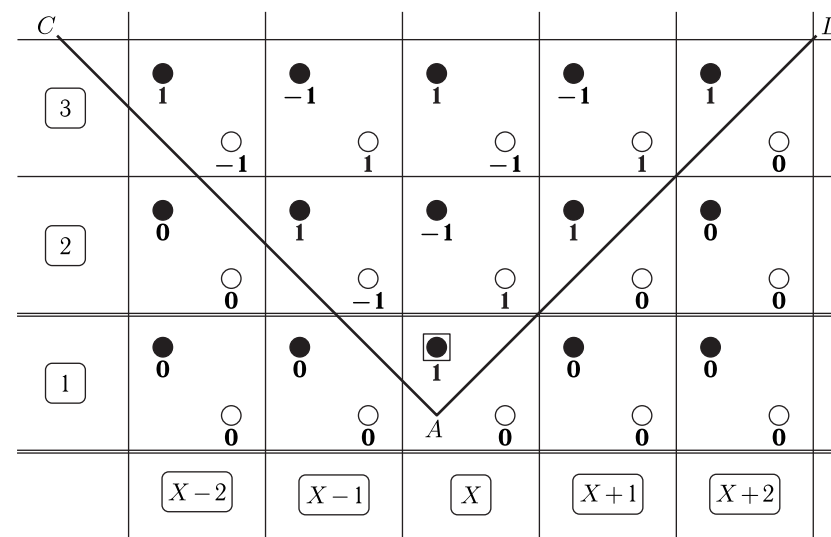


Рис. 14.13. Схема распространения полей по узлам сетки от заданного единичного импульса электрического поля в отсутствие компенсирующего магнитного. Цифры при узлах соответствуют величинам того и другого полей

Прохождение по сетке осуществляется в соответствии с правилом креста (рис. 14.4) по горизонтальным рядам ячеек с левой стороны на правую. При этом сначала проходит нижняя строка узлов в пределах заданного ряда ячеек, то есть определяется магнитное поле, после чего проходит верхняя строка узлов в тех же ячейках, то есть теперь определяется электрическое поле того же ряда ячеек. В результате оба поля данного горизонтального ряда ячеек получают определенными. Далее осуществляется переход к следующему горизонтальному ряду ячеек, что соответствует одному шагу по времени, где снова рассчитывается магнитное поле, а затем электрическое. Таким образом, сетка проходит снизу вверх до любого желаемого момента времени, в результате чего поля во всех узлах сетки будут определены.

На рис. 14.13 в первом горизонтальном ряду ячеек при координате  $X$  задается электрическое поле с амплитудой в одну единицу, а во всех остальных узлах этого ряда поля равны нулю.

Прохождение второго ряда ячеек позволяет определить отличными от нуля поля в ячейках с координатами от  $X - 1$  до  $X + 1$ . При этом электрическое поле имеет вид  $0-1-(-1)-1-0$ , то есть пилообразный вторичный импульс, соответствующий показанному на эюре № 2 на рис. 14.10.

В результате прохождения третьего ряда ячеек электрическое поле приобретает вид  $0-1-(-1)-1-(-1)-1-0$ , что соответствует пилообразному вторичному импульсу, показанному на эюре № 3 на рис. 14.10.

Легко убедиться, что дальнейшее прохождение по горизонтальным рядам ячеек соответствует развитию пилообразной структуры, представленной на рис. 14.10.

Из рисунка видно, что отличные от нуля значения того и другого полей занимают область сетки, ограниченную прямыми линиями  $AC$  и  $AD$ , с каждым шагом по времени раздвигающимися на одну ячейку в ту и другую стороны. Такое поведение границ отвечает распространению в обе стороны волновых решений задачи Даламбера (раздел 14.5, форм. (14.57)), однако здесь, в отличие от классики, пространство между этими границами получается заполненным пилообразными вторичными импульсами, как это и было видно из рис. 14.10.

### 14.11.2. Компенсация при едином расположении импульсов

Рассмотрим теперь компенсирующее действие импульса магнитного поля, расположенного при той же координате, что и импульс электрического поля. Заметим, что, согласно показанному в разделе 14.10.1, импульс магнитного поля должен быть инвертирован относительно импульса электрического поля, то есть иметь противоположный знак.

Обратимся к рис. 14.14, где показана схема распространения полей по узлам сетки от заданного единичного импульса электрического поля в сочетании с компенсирующим импульсом магнитного поля противоположного знака, действующего в той же ячейке сетки.

Прохождение по рядам сетки здесь производится тем же образом, что на рис. 14.13. В результате во второй ячейке получается импульс

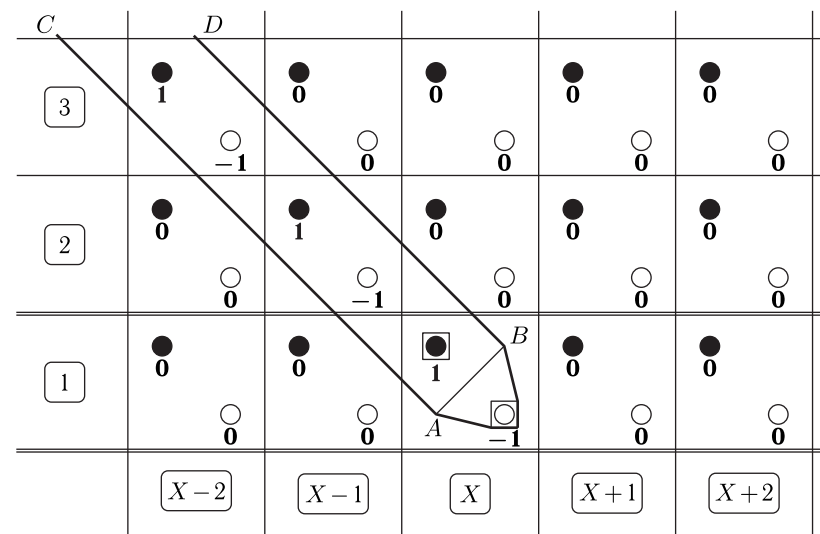


Рис. 14.14. Схема распространения полей по узлам сетки от заданного единичного импульса электрического поля в сочетании с инвертированным импульсом магнитного поля, действующего в той же ячейке сетки

электрического поля  $0-1-0$ , соответствующий эюре № 2 на рис. 14.11. Получающийся при этом импульс магнитного имеет вид  $0-(-1)-0$  и располагается в той же ячейке при координате  $X - 1$ , что также соответствует эюре № 2 на рис. 14.11.

Дальнейшее рассмотрение приводит в такой же паре единичных импульсов, распространяющихся в левую сторону по рисунку, образуя между прямыми  $AC$  и  $BD$  как бы «луч» единичной ширины. Левая граница этого луча совпадает с левой границей отличной от нуля области  $CAD$  на рис. 14.13, то есть также подобна решению задачи Даламбера, причем здесь пилообразное заполнение отсутствует.

### 14.11.3. Компенсация при упреждающем расположении магнитного импульса

Рассмотрим теперь компенсирующее действие импульса магнитного поля, расположенного при координате, на единицу меньшей, чем координата импульса электрического поля. Согласно показанному в разделе 14.10.2, импульс магнитного поля должен иметь тот же знак, что и импульс электрического поля.

Обратимся к рис. 14.15, где показана схема распространения полей по узлам сетки от заданного единичного импульса электрического поля в сочетании с импульсом магнитного поля того же знака, действующего в предшествующей ячейке сетки.

Прохождение по рядам сетки здесь производится тем же образом, что на рис. 14.13 и рис. 14.14. В результате во второй ячейке получается

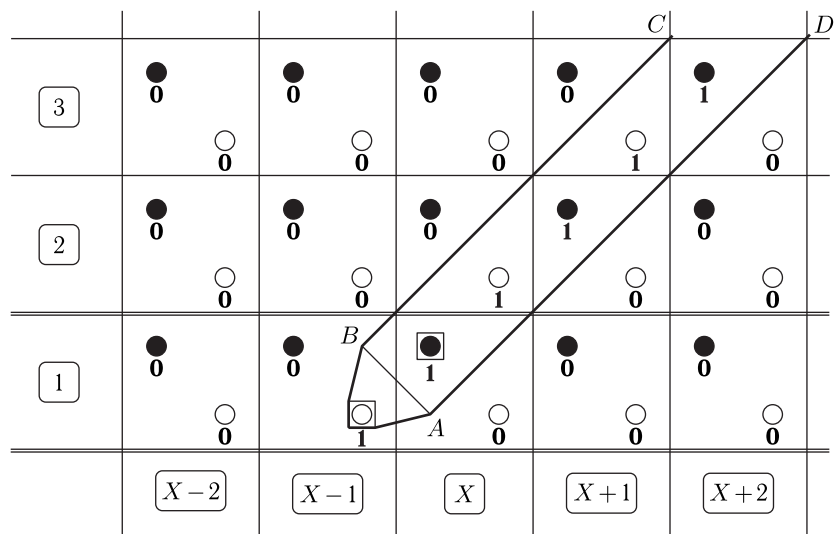


Рис. 14.15. Схема распространения полей по узлам сетки от заданного единичного импульса электрического поля в сочетании с импульсом магнитного поля того же знака, действующего в предшествующей ячейке сетки

импульс электрического поля 0-1-0, соответствующий эпюре №2 на рис. 14.12. Получающийся при этом импульс магнитного имеет вид 0-1-0 и располагается в ячейке при координате  $X + 1$ , что также соответствует эпюре №2 на рис. 14.12. При этом импульс магнитного поля имеет вид 0-1-0 и располагается в ячейке с координатой  $X - 1$ , то есть на один шаг по координате отстает от импульса электрического поля.

Дальнейшее рассмотрение приводит в такой же паре единичных импульсов, распространяющихся в правую сторону по рисунку, образуя между прямыми  $BC$  и  $AD$  как бы «луч» единичной ширины. Правая граница этого луча совпадает с правой границей отличной от нуля области  $CAD$  на рис. 14.13, то есть также подобна решению задачи Даламбера, причем здесь пилообразное заполнение отсутствует.

## 14.12. Универсальный характер компенсации

Таким образом, можно видеть, что использование сетки позволяет весьма наглядно интерпретировать распространение единичного импульса электрического поля как в отсутствие компенсирующего магнитного, так и при его наличии. При этом получаются оба луча задачи Даламбера, но только по одному, соответствующему тому или иному виду компенсации. При этом уменьшение амплитуды в два раза, по сравнению с исходным импульсом, требуемое классическим решением задачи Даламбера, здесь отсутствует. Можно полагать, что это

происходит из-за того, что в классике один начальный импульс расщепляется на два, в результате чего исходная амплитуда делится, а здесь луч всего один, так что необходимость в делении отсутствует.

Заметим, что в проведенном здесь рассмотрении везде задавался единичный импульс электрического поля, имеющий амплитуду, равную единице. Однако это было сделано только для удобства рассмотрения. Проверка показывает, что длительность импульса должна быть единичной, а амплитуда может принимать любые другие, в том числе дробные значения, например такую же пилу дает импульс электрического поля вида 0-2,024-0, а компенсирующими к нему являются импульсы магнитного поля вида 0-(-2,024)-0 и 0-2,024-0, где второй должен быть смещен по координате на один шаг в меньшую сторону. Вся картина поведения таких импульсов остается прежней, а отличие сводится только к изменению масштаба по амплитуде обоих полей.

Заметим, что другие попытки найти возможные варианты компенсации, предпринятые авторами настоящей монографии, успехом не увенчались, однако авторы могут рекомендовать любознательному читателю попробовать в этом свои силы в качестве полезного упражнения.

Предложенные в разделах 14.10.1 и 14.10.2 способы компенсации являются довольно универсальными, то есть позволяют предотвратить формирование пилообразного характера вторичных импульсов и обеспечить два расходящихся решения, отвечающих двум разнонаправленным волнам в классической задаче Даламбера. Универсальность означает, что эти способы применимы к начальным импульсам произвольной формы. В качестве достаточно простого и довольно наглядного примера рассмотрим импульс вида 0-5-1-4-3-1-0, использовавшийся в разделе 14.7.1 при пояснении способа обозначения формы импульсов.

### 14.12.1. Развитие вторичных импульсов без компенсации

Сначала обратимся к рис. 14.16, где показано последовательное развитие во времени вторичных импульсов, формирующихся из первичного импульса вида 0-5-1-4-3-0.

Из рисунка можно видеть, что картина во многом подобна показанной на рис. 14.10 для единичного импульса. Так, видно, что по мере развития времени (по рисунку сверху вниз) внешние края группы вторичных импульсов расходятся в противоположные стороны равномерным (линейным) образом, как того требует общее решение задачи Даламбера (раздел 14.5, форм. (14.57), а также раздел 14.7.2, рис. 14.7). Как и на рис. 14.10, весь промежуток между этими краями заполнен пилообразными импульсами, в центральной части регулярными, а по краям несколько отличными по амплитуде, в близком соответствии с амплитудой краев первичного импульса (то есть слева амплитуда первичного импульса больше, амплитуды на его середине, так что и здесь амплитуда вторичного импульса больше, чем амплитуды вторичных импульсов на середине, а справа наблюдается явление обратное). Ширина по координате всех вторичных импульсов равна одному шагу, как



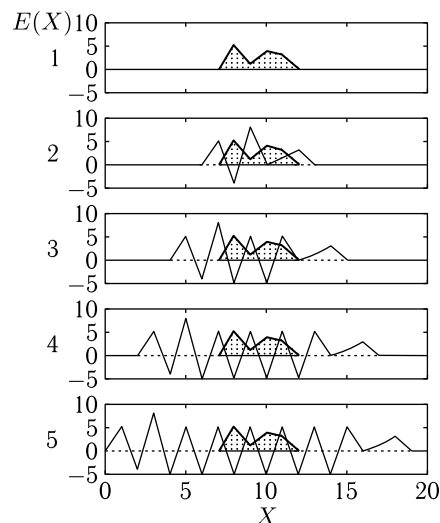


Рис. 14.16. Формирование вторичных импульсов из первичного импульса вида 0-5-1-4-3-0 (эюра № 1) в последовательные моменты времени: На эпорах № 2–5 кроме вторичных импульсов, для сравнения представлен первичный (заштрихован). 1 — начальный импульс; 2 — один шаг по времени; 3 — три шага по времени; 4 — пять шагов по времени; 5 — семь шагов по времени

это наблюдается в случае единичного импульса. Количество четко выраженных отрицательных зубьев (близких к значению  $-5$ ) также равно количеству шагов по времени, количество положительных зубьев — не единицу больше, однако здесь имеются нечетко выраженные импульсы того и другого знаков (например, на эюре № 2 при  $X = 10$  и  $X = 12$ ), в результате чего полное количество импульсов получается несколько больше. Можно полагать, что такая нечеткость вызвана нерегулярным характером исходного импульса.

Итак, главным результатом проделанного рассмотрения рис. 14.16 является ярко выраженный пилообразный характер вторичных импульсов.

#### 14.12.2. Введение компенсирующих импульсов

Рассмотрим теперь введение компенсирующих импульсов магнитного поля по той же схеме, что была предложена в разделах 14.10.1 и 14.10.2 для единичного импульса.

Обратимся к рис. 14.17, где показаны схемы компенсации при едином расположении основного и компенсирующего импульсов (рис. 14.17, а, эюры № 1, 2), а также при упреждении импульса магнитного поля относительно импульса электрического на один шаг по координате (рис. 14.17, б, эюры № 3, 4). Расположение вторичных импульсов представлено по прошествии семи шагов по времени.

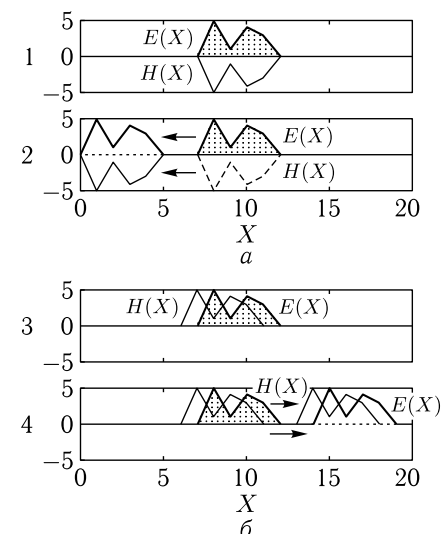


Рис. 14.17. Схема компенсации пилообразных колебаний вторичных импульсов путем введения компенсирующего импульса магнитного поля. Первичный импульс 0-5-1-4-3-0 (заштрихован). а — компенсирующий импульс 0-(-5)-(-1)-(-4)-(-3)-0; б — компенсирующий импульс 0-5-1-4-3-0 с упреждением

В обоих случаях форма компенсирующего импульса полностью повторяет форму исходного, только в первом случае он имеет обратный знак и по координате расположен точно под первичным, а во втором случае знак компенсирующего импульса совпадает со знаком исходного, однако он располагается по координате на один шаг меньше (по рисунку левее).

Из рисунка видно, что в первом случае (рис. 14.17, а) вторичные импульсы полностью повторяют первичные и смещаются по координате в меньшую сторону (по рисунку налево, эюра № 2), а во втором случае также повторяют первичные, но смещаются по координате в большую сторону (по рисунку направо, эюра № 4).

Таким образом, приведенный пример подтверждает универсальный характер предложенных способов компенсации.

#### 14.13. Некоторые дополнительные свойства пилообразных структур

Проведенное рассмотрение позволяет сделать вывод о возможности использования алгоритма Йи для решения задачи Даламбера. Попутным фактом является формирование пилообразного распределения вторичных импульсов. Следует заметить, что пилообразный характер вторичных импульсов является значительно более общим, чем регулярное

распространение с сохранением начальной формы. Можно полагать, что исследование такого достаточно общего явления прежде всего с математической стороны представляет интерес как изучение множества возможных структур, порождаемых алгоритмом Йи. Приведем лишь два примера, в некоторой степени иллюстрирующих сказанное.

### 14.13.1. Распространение волн в обе стороны

Классическая задача Даламбера предполагает распространение двух волн в противоположные стороны. В то же время приведенные здесь в разделах 14.10.1 и 14.10.2 примеры (рис. 14.11 и рис. 14.12) дают распространение только одной волны в ту или иную сторону. Проверка показывает, что две волны можно получить путем комбинации двух рассмотренных вариантов.

Так, представление исходного импульса в виде 0-1-0-0-1-0 в сочетании с компенсирующим импульсом 0-(-1)-0-1-0-0 дает как раз две группы импульсов, расходящиеся в противоположные стороны. Такая ситуация представлена на рис. 14.18.

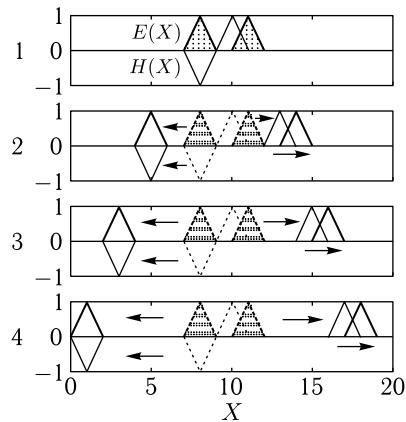


Рис. 14.18. Схема формирования двух расходящихся импульсов при специальной форме первичного и компенсирующего импульсов. 1 — первичный импульс (заштрихован) 0-1-0-0-1-0 и компенсирующий импульс (без штриховки) 0-(-1)-0-1-0-0; 2 — три шага по времени; 3 — пять шагов по времени; 4 — семь шагов по времени

Из рисунка видно, что представленная комбинация первичного и компенсирующего импульсов обеспечивает формирование двух групп вторичных импульсов, расходящихся в противоположные стороны. Форма вторичных импульсов повторяет форму первичных с учетом компенсации. Случай первого шага по времени здесь не показан, так как получающиеся вторичные импульсы перекрываются с первичными, затрудняя наблюдение. Таким образом, картина является как бы объединением рис. 14.11 и 14.12.

### 14.13.2. Аддитивность пилообразных структур

Другим важным свойством пилообразных структур можно считать их аддитивный характер. Так, если задать два первичных импульса и получить от каждого из них вторичные структуры, то сумма первичных импульсов даст такую же вторичную структуру, как сумма отдельных вторичных структур от каждого из первичных импульсов.

В качестве примера рассмотрим рис. 14.19.

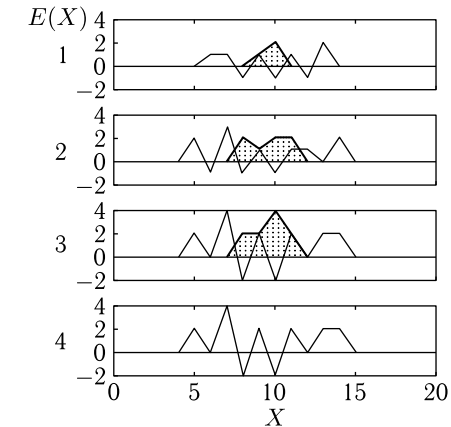


Рис. 14.19. Схема формирования пилообразных структур из двух первичных импульсов при трех шагах по времени. Первичные импульсы — показаны утолщенными линиями и заштрихованы; вторичные импульсы — показаны тонкими линиями. 1 — первый импульс 0-0-1-2-0-0; 2 — второй импульс 0-2-1-2-2-0; 3 — сумма первого и второго импульсов 0-2-2-4-2-0; 4 — сумма пилообразных структур от первого и второго импульсов

Здесь заданы два первичных импульса: первый 0-0-1-2-0-0 (эпюра № 1) и второй 0-2-1-2-2-0 (эпюра № 2), показанные утолщенными линиями и заштрихованные. Каждый из них формирует свою пилообразную структуру, показанную тонкими линиями.

На эпюре № 3 представлена сумма первичных импульсов, получаемая путем арифметического суммирования амплитуд при совпадающих значениях координаты. Там же тонкими линиями представлена пилообразная структура, формируемая таким суммарным импульсом.

На эпюре № 4 представлена сумма пилообразных структур, формируемых первым и вторым импульсом по отдельности, показанных на эпюрах № 1 и 2.

Из сравнении эпюр № 3 и 4 видно, что в обоих случаях пилообразные структуры полностью совпадают, что и доказывает их аддитивный характер.

Проверка, выполненная при других формах импульсов, а том числе с использованием сетки, подобной описанной в разделах 14.11,

14.11.1–14.11.3, показывает, что свойство аддитивности является довольно общим и проявляется при весьма разнообразных формах первичных импульсов. Однако следует заметить, что приведенные соображения безусловным доказательством общности аддитивности не являются, так что этот вопрос требует более подробной проверки, возможно, в рамках отдельной работы.

#### 14.14. Представление задачи Даламбера на плоскости координата–время

В настоящей главе в разделах 14.7–14.13 — всё формирование вторичных импульсов рассматривалось только в какой-то определенный момент времени, то есть после прохождения какого-то заданного числа шагов. В то же время представляет интерес развитие картины вторичных импульсов в следующие друг за другом последовательные моменты времени. В качестве примера отметим картину такого последовательного развития вторичных импульсов при задании первичного в виде 0-1-2-1-0, представленную на рис. 14.7 (раздел 14.7.2). На этом рисунке картина строилась путем многократного, соответствующего числу эпюр на рисунке, запуска программы построения вторичных импульсов, для заданного момента времени (раздел 14.6).

В то же время для построения последовательного развития вторичных импульсов весьма удобно использовать программу, выполняющую такое построение в автоматическом режиме, которая дает полную картину на плоскости «пространственная координата–время».

Пример такой картины, иллюстрирующий схему формирования двух расходящихся волн от одного источника, можно найти в монографии [201, стр. 54, рис. 3.10]. Следуя автору этой монографии, будем условно называть подобные картины «водопадами» (waterfall plot).

##### 14.14.1. Схема машинного расчета водопада

В основе построения водопада лежит многократно повторяемое единичное прохождение по координате от начала до конца при заданном моменте времени с соответствующим вычислением электрического и магнитного полей по правилу креста.

Полный водопад на плоскости координата–время формируется путем последовательного размещения результатов таких прохождений друг над другом в порядке пошагового увеличения времени.

Для построения отдельных прохождений используется специальная программа описанная в разделе 14.6. В результате работы такой программы формируется вторичный импульс, соответствующий заданному моменту времени.

Именно так построен рис. 14.7 (раздел 14.7.2) с той разницей, что там под каждый вторичный импульс выделена отдельная эпюра, а время по рисунку развивается сверху вниз, тогда как в случае классического водопада [201, стр. 54, рис. 3.10] все вторичные импульсы распола-

гаются друг над другом на единой плоскости, а время развивается снизу вверх.

Для автоматического построения водопада упомянутая программа используется в качестве подпрограммы, так что повторяется столько раз, сколько делается шагов по времени. При этом формируются два файла: первый — значение координаты, второй — значение результата прохождения по этой координате, то есть поля.

По полю формируются два файла — электрического и магнитного полей, то есть необходимы два массива.

После каждого прохождения его результат — поле — заносится в файл, в котором собираются результаты последовательных проходов, а данные, находящиеся в массиве, предназначенном для текущего прохождения, стираются, вернее, затираются полем следующего прохождения.

Построение водопада начинается с начального момента времени — в массиве это выглядит как единица. При этом в соответствии с заданием начальных условий формируются два полевых файла: первичный импульс электрического поля и в случае необходимости компенсирующий импульс магнитного поля. Одновременно формируется файл координаты, соответствующий прохождению по координате от начала до конца.

Далее значение координаты устанавливается в начало, а значение времени увеличивается на единицу. После этого выполняется прохождение по координате с помощью подпрограммы. При этом координата записывается в тот же первый файл координаты, следом за тем, что там уже есть, а результаты — оба поля в полевые файлы, также следом за тем, что там уже записано. Для построения диаграммы к каждому полю, полученному на этом шаге, прибавляется постоянная добавка, соответствующая увеличению времени на единицу.

После этого прохода координата снова устанавливается в начало и снова вычисляются поля, к которым для построения добавляется еще одна постоянная добавка, и так далее. Таким образом, получаются три файла: в первом записывается координата столько раз, сколько проходит шагов во времени, во втором и третьем файлах — значения полей, соответствующих каждому из этих шагов со ступенчатым увеличением за счет прибавления суммирующихся со временем постоянных добавок.

Для построения картины в целом для того или другого поля используются два файла — координатный и один из полевых, тот, изображение поля которого требуется. При этом каждая новая строка располагается выше предыдущей за счет увеличивающихся постоянных добавок. Поскольку величина постоянной добавки произвольна, то ее можно установить так, чтобы последующие строки не перекрывались с предыдущими, или просто сделать амплитуду исходного сигнала поменьше.

##### 14.14.2. Водопад для задачи Даламбера без компенсации

Рассмотрим сначала построение водопада для наиболее простого случая — задачи Даламбера с возбуждающим импульсом электрического поля вида 0-1-2-1-0. Решение задачи в такой постановке было

приведено в рамках последовательных по времени единичных разверток по координате в разделе 14.7.2 и представлено на рис. 14.7, который будем использовать для сравнения.

Водопад, построенный по методу, приведенному в разделе 14.14.1, показан на рис. 14.20. При этом на рис. 14.20, б приведена форма возбуждающего (первичного) импульса вида 0-1-2-1-0 в начальный момент времени и двух вторичных импульсов вида 0-1-1-0 по прошествии пяти шагов по времени, распространяющихся в противоположные стороны.

На рис. 14.20, а приведен собственно водопад с поясняющими фрагментами (заштрихованы), представляющими формы вторичных импульсов в различные моменты времени. Стрелками показаны направления распространения вторичных импульсов.

Из рисунка видно, что первичный импульс порождает два вторичных, образующих два «луча», расходящихся в противоположные стороны.

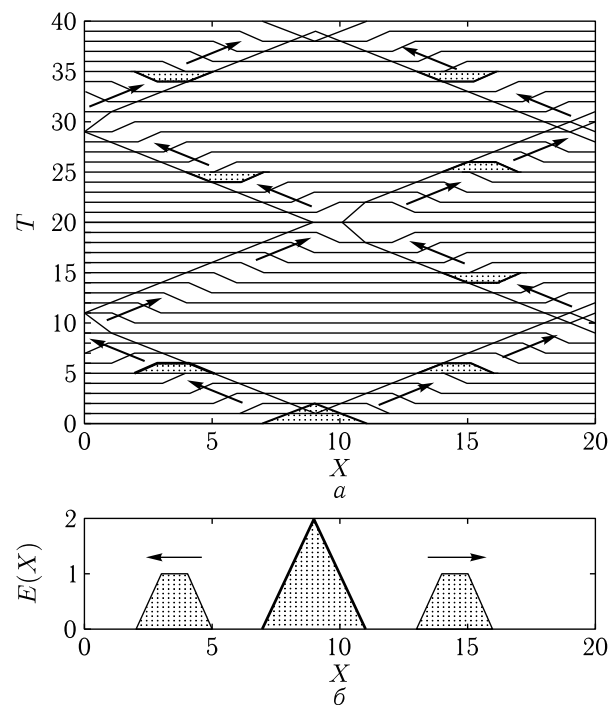


Рис. 14.20. Водопад для задачи Даламбера с возбуждающим импульсом электрического поля 0-1-2-1-0. а — водопад с примерами формы вторичных импульсов (выделены штриховкой) и стрелками, указывающими направления их распространения; б — первичный импульс (посередине) и вторичные импульсы (по двум сторонам) при пяти шагах по времени

Картина полностью аналогична представленной на рис. 14.7 с той оговоркой, что там время развивается по рисунку сверху вниз, а здесь — снизу вверх. Как отмечено в разделе 14.7.2, такое поведение вторичных импульсов полностью отвечает классическому решению задачи Даламбера (раздел 14.5, форм. (14.57)).

До времени  $T = 10$  оба вторичных импульса положительны, как показано при  $T = 5$ . По достижении границ сетки при  $T = 10$  (слева) до  $T = 12$  (справа) оба импульса отражаются (по закону «угол отражения равен углу падения»), причем импульс, отраженный от левой границы остается положительным, а отраженный от правой — инвертируется, то есть становится отрицательным.

Такие варианты отражения аналогичны наблюдаемым на рис. 14.7 (эпюры № 7–11 и № 9–14) и в случае электромагнитной волны соответствуют отражению от диэлектрика или от идеального проводника. С технической стороны сохранение знака вторичного импульса или его изменение определяется равенством или отличием на единицу количества узлов сетки того и другого полей при прохождении координаты по правилу креста (раздел 14.7.2).

После первого отражения лучи, образованные вторичными импульсами, встречаются при времени  $T = 20$ , где импульсы проходят друг через друга без искажений. Можно полагать, что здесь таким образом проявляется аддитивность пилообразной структуры, рассмотренная в разделе 14.13.2.

После пересечения лучей импульсы при времени от  $T = 28$  до  $T = 32$  снова отражаются, причем снова знак левого импульса сохраняется, а правого инвертируется, как это показано при  $T = 35$ . Дальнейшее распространение лучей с последующими пересечениями и отражениями происходит тем же порядком до любого желаемого момента времени.

## 14.15. Водопад для единичного импульса

Таким образом, можно полагать, что построение водопада на плоскости «координата–время» (рис. 14.20) представляет довольно наглядную картину решения задачи Даламбера, сходную с классическим вариантом (рис. 14.7 и форм. (14.57)).

Заметим однако, что так хорошо все получается только для первичного импульса вида 0-1-2-1-0, а для импульсов другого вида, как это показано на рис. 14.8 (раздел 14.8.1), развертка по координате может содержать структуры пилообразного характера.

### 14.15.1. Отсутствие компенсации

Поэтому обратимся к самому простому виду первичного импульса, а именно к единичному импульсу 0-1-0. Получаемый водопад показан на рис. 14.21.

Из рисунка видно, что первичный импульс порождает пилообразную структуру для случая пяти шагов по времени, показанную на рис. 14.21, а утолщенной линией. Следование друг за другом подобных

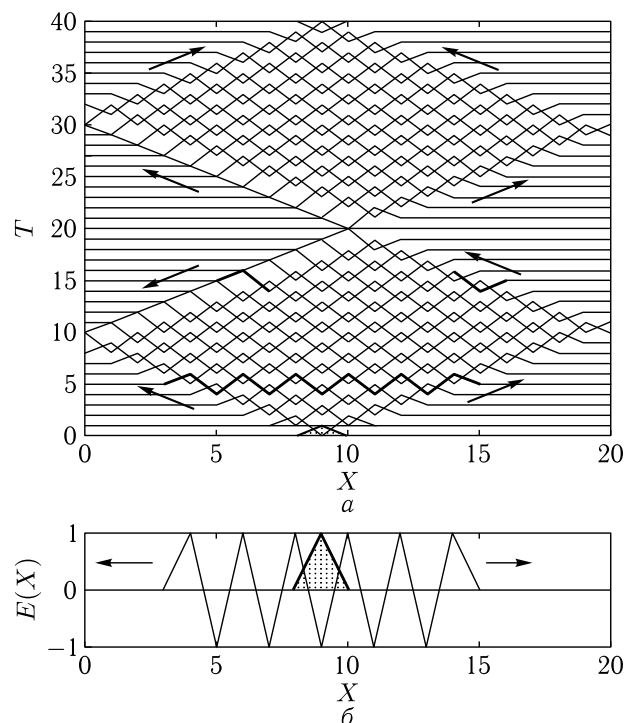


Рис. 14.21. Водопад для задачи Даламбера с единичным возбуждающим импульсом электрического поля вида 0-1-0. *a* — водопад с примерами формы вторичных импульсов и стрелками, указывающими направления распространения их краев; *b* — первичный импульс (посередине, заштрихован) и вторичная пилообразная структура при пяти шагах по времени

пилообразных структур по времени (вверх по рисунку) образует «ковер», края которого соответствуют расходящимся лучам, подобным представленным на рис. 14.20, однако здесь пространство между лучами не свободно, а заполнено пилообразными структурами.

Видно, что края пилообразных структур до первого отражения остаются в виде положительных частичных импульсов, а после отражения при времени больше  $T = 10$  левый частичный импульс остается положительным, а правый инвертируется, как это показано при времени  $T = 15$ .

После отражения края ковра сближаются, подобно лучам вторичных импульсов на рис. 14.20, а при времени  $T = 20$  ковер «схлопывается», что соответствует точке пересечения лучей на рис. 14.20. После схлопывания ковер снова разворачивается, его края опять следуют лучам вторичных импульсов на рис. 14.20, причем правила знаков при отражении также выполняются.

После повторного отражения ковер снова схлопывается, затем опять разворачивается, так что далее схлопывание и разворачивание периодически повторяются.

### 14.15.2. Введение компенсации

В разделах 14.10.1 и 14.10.2 показано, что устранить формирование пилообразной структуры от единичного импульса можно путем введения компенсирующего единичного импульса магнитного поля. Предложены две возможности: первая — задание компенсирующего импульса противоположного исходному знаку при той же координате, что и исходный импульс (раздел 14.10.1, рис. 14.11), вторая — задание компенсирующего импульса того же знака, что и исходный с опережением исходного на один шаг по координате (раздел 14.10.2, рис. 14.12). Рассмотрим, что дают эти возможности для формирования водопада.

### 14.15.3. Единое расположение импульсов

Первый вариант компенсации — единое расположение импульсов противоположных знаков, иллюстрируется рис. 14.22.

В нижней части рисунка (рис. 14.22, б) приведена картина импульсов в развертке по координате, сходная с приведенной на рис. 14.11.

Из рис. 14.22, а видно, что такая компенсация приводит к формированию четко ограниченного луча из вторичных импульсов, первоначально распространяющегося в отрицательном направлении оси координат, а после времен  $T = 10$ , когда происходит отражение от левого края сетки, распространяющегося далее в положительном направлении вплоть до второго отражения при  $T = 30$ , где снова отражается теперь уже от другого края сетки и так далее. При отражении от левой границы знак вторичного импульса сохраняется, при отражении от правой границы — инвертируется, то есть относительно отражения ведет себя таким же образом, как и расходящиеся лучи на рис. 14.20.

### 14.15.4. Упреждающее расположение магнитного импульса

Рассмотрим теперь другой вариант компенсации: когда компенсирующий импульс имеет тот же знак, что и исходный, но располагается по координате относительно исходного с опережением на один шаг. Это случай иллюстрируется рис. 14.23, где в нижней части рисунка (рис. 14.23, б) приведена картина импульсов в развертке по координате, сходная с приведенной на рис. 14.12, а в верхней (рис. 14.23, а) — получающийся водопад.

Из рис. 14.23, а видно, что такая компенсации приводит к формированию четко ограниченного луча из вторичных импульсов, первоначально распространяющегося в положительном направлении оси координат, а после времен  $T = 10$ , когда происходит отражение от правого края сетки, распространяющегося далее в отрицательном направлении до второго отражения при  $T = 30$ , где снова отражается теперь уже от другого края сетки и так далее. При отражении от правой границы знак вторичного импульса инвертируется, при отражении от левой

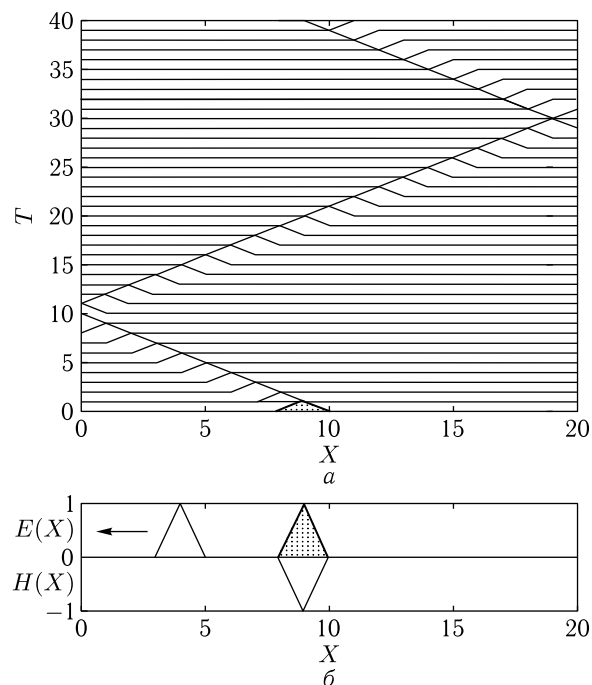


Рис. 14.22. Водопад с единственным возбуждающим импульсом электрического поля вида 0-1-0 при компенсирующем импульсе магнитного поля вида 0-(-1)-0 при едином с электрическим импульсом расположении по координате. *a* — водопад, образованный вторичными импульсами (ввиду явной очевидности, стрелки указывающие направления распространения лучей вторичных импульсов, опущены); *b* — первичный импульс (заштрихован), компенсирующий импульс (под первичным с обратным знаком) и вторичный импульс (слева) при пяти шагах по времени

границы — сохраняется, то есть относительно отражения ведет себя таким же образом, как и расходящиеся лучи на рис. 14.20.

#### 14.15.5. Формирование двух расходящихся лучей

В результате рассмотрения водопадов, приведенных на рис. 14.20, а также рис. 14.22 и рис. 14.23, можно видеть, что классическое решение задачи Даламбера, допускающее формирование двух лучей, расходящихся в противоположные стороны (раздел 14.5, форм. (14.57)), обеспечивает только импульс вида 0-1-2-1-0 без компенсации (рис. 14.20), вообще говоря, единственным не являющийся, тогда как единственный импульс 0-1-0 при том или ином виде компенсации обеспечивает формирование только одного луча в ту или иную сторону в зависимости от используемого варианта компенсации (рис. 14.22 и рис. 14.23). В то же время возникает желание усовершенствовать первичный импульс и со-

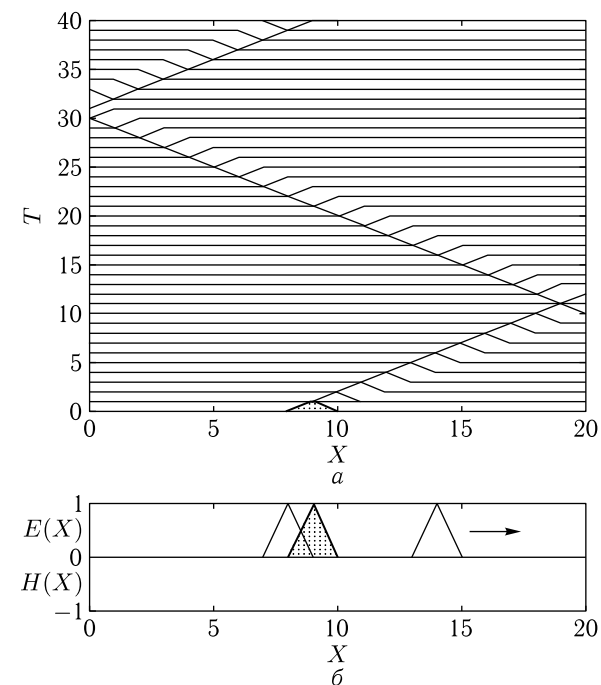


Рис. 14.23. Водопад с единственным возбуждающим импульсом электрического поля вида 0-1-0 при компенсирующем импульсе магнитного поля вида 0-1-0 опережающим электрический импульсом на один шаг по координате. *a* — водопад, образованный вторичными импульсами; *b* — первичный импульс (заштрихован), компенсирующий импульс (левее первичного с тем же знаком) и вторичный импульс (справа) при пяти шагах по времени

ответствующую компенсацию таким образом, чтобы сразу формировались два луча в противоположные стороны. Такую возможность дает рис. 14.24, где показан водопад, формируемый удлинненным единичным импульсом вида 0-1-1-0 с опережающим компенсирующим импульсом вида 0-1-(-1)-0.

Из рис. 14.24, *b* можно видеть, что расширенный первичный импульс представляет собой следующие друг за другом вплотную два единичных импульса вида 0-1-0, а компенсирующий импульс — следующие друг за другом два компенсирующих импульса — 0-1-1 с опережением и 0-(-1)-0 без опережения, то есть оба импульса — основной и компенсирующий — как бы образуют совмещенные вплотную два единичных импульса соответствующих знаков.

Как можно видеть из рис. 14.24, *a*, такое совмещение исходных импульсов порождает совмещение водопадов от каждого из единичных импульсов, то есть водопады, представленные на рис. 14.22 и 14.23, здесь также совмещаются друг с другом, образуя два расходящихся

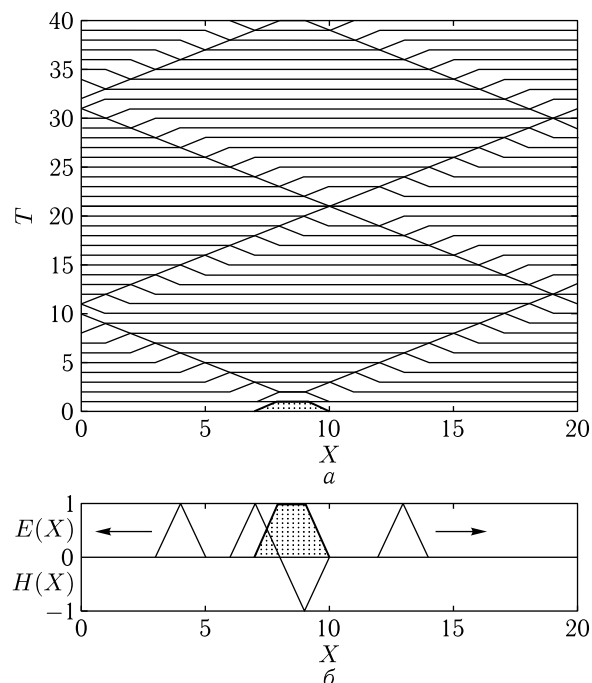


Рис. 14.24. Водопад с возбуждающим импульсом электрического поля вида 0-1-1-0 при компенсирующем импульсе магнитного поля вида 0-1-(-1)-0 опережающим электрический импульс на один шаг по координате. *a* – водопад, образованный вторичными импульсами; *б* – первичный импульс (заштрихован), компенсирующий импульс (начинающийся левее первичного с изменением знака) и вторичные импульсы (слева и справа) при пяти шагах по времени

луча, подобных показанным на рис. 14.20, как того требует классическое решение задачи Даламбера. Пересечение и отражение этих лучей происходят также в полном соответствии с теми же правилами, что на рис. 14.20.

### 14.16. Распространение волны через одну границу, разделяющую две среды

Главным вопросом настоящей монографии является распространение волн через многослойные среды. Покажем, как описанный здесь метод конечных разностей позволяет решить эту задачу. Ввиду значительного принципиального отличия этого метода от классических, рассмотренных в предыдущих главах и первых двух частях настоящей монографии, а также недостаточной разработанности вопроса в целом, авторы не ставили своей целью дать исчерпывающее описание приме-

нения метода в любых условиях. Поэтому в качестве демонстрационного примера будет рассмотрен наиболее простой случай распространения одномерной волны через одну границу, разделяющую две среды с различающимися параметрами.

Обратимся к рис. 14.25, где показан водопад (рис. 14.25, *a*), иллюстрирующий распространение волны через две среды, разделенные одной границей. Волна возбуждается импульсом электрического поля вида 0-1-0 при компенсирующем импульсе магнитного поля вида 0-1-0, опережающим электрический импульс на один шаг по координате (рис. 14.25, *б*). Граница расположена при координате  $X = 10$ . Левее этой границы число Куранта (раздел 14.3) положено равным единице, а правее – уменьшено в полтора раза, то есть в выражениях (14.50), (14.51) левее границы положено  $S = 1,000$ , а правее  $S = 0,667$  (при построении рис. 14.25 полагалось  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $Z_0 = 1$ ).

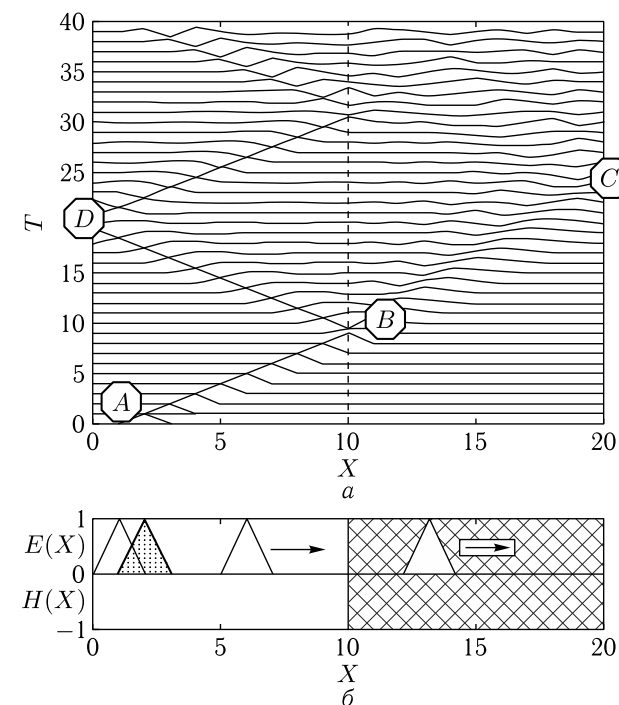


Рис. 14.25. Водопад, иллюстрирующий распространение волны через две среды, разделенные одной границей. *a* – водопад, образованный вторичными импульсами, граница показана вертикальной пунктирной линией при  $X = 10$ ; *б* – первичный импульс (заштрихован), компенсирующий импульс (начинающийся левее первичного с изменением знака) и вторичные импульсы (слева и справа) при пяти шагах по времени; для наглядности правая среда заштрихована

Таким образом, волна возбуждается в точке  $A$ , доходит до границы раздела сред в точке  $B$ , где расщепляется на две волны — проходящую от точки  $B$  к точке  $C$  и отраженную от точки  $B$  к точке  $D$ . Видно, что после отражения, то есть на отрезке  $BD$ , волна идет тем же углом относительно нормали к границе, что и до отражения, то есть на отрезке  $AB$ , что соответствует равенству углов падения и отражения. Однако после прохождения, то есть на отрезке  $BC$ , волна идет круче, чем на  $AB$ , то есть угол преломления становится больше угла падения. Такое изменение направления распространения волны обусловлено ее прохождением из менее плотной среды (левой) в более плотную (правую), где скорость волны уменьшается в соответствии с уменьшением числа Куранта (раздел 14.3, форм. (14.45)).

#### 14.16.1. Коэффициенты отражения и прохождения

Наклон каждого отдельного луча относительно горизонтальной оси отражает скорость данной волны. Скорость на отрезке луча между двумя точками равна отношению интервала по координате к интервалу по времени между этими точками. Таким образом, можно сопоставить скорости волн в обеих средах. Так, параметры луча падающего — на отрезке  $AB$ : интервал по времени — 9 единиц, интервал по координате — 10 единиц, так что скорость равна  $v_{AB} = 10/9 = 1,11$ . Параметры луча проходящего — на отрезке  $BC$ : интервал по времени — 10 единиц, интервал по координате — 10 единиц, так что скорость равна  $v_{BC} = 10/10 = 1,00$ . Можно видеть, что скорость волны в правой среде меньше скорости волны в левой, что соответствует принятым значениям числовых параметров (числа Куранта).

Исходя из полученных значений скоростей  $v_{AB}$  и  $v_{BC}$ , в соответствии с классическим определением волнового числа  $k = \omega/v$  [1, стр. 75, форм. (2.4)], полагая  $\omega = 1$ , получаем волновые числа  $k_{AB} = 0,901$ ,  $k_{BC} = 1,000$ , что дает возможность получить коэффициенты отражения  $R_a$  и прохождения  $T_a$  по амплитудам [1, стр. 77, форм. (2.20), (2.21)]:

$$R_a = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{k_{AB} + k_{BC}} = -0,052; \quad (14.70)$$

$$T_a = \frac{2k_{AB}}{k_{AB} + k_{BC}} = 0,948. \quad (14.71)$$

Знак минус в формуле (14.70) отражает изменение знака поля при отражении от более плотной среды при нормальном падении [6, стр. 475–476], а на рис. 14.25,  $a$  — инверсию знака волны на отрезке  $BD$ . При этом знак в формуле (14.71) остается положительным, что согласуется с сохранением знака при переходе от отрезка  $AB$  на отрезок  $BC$ .

Аналогично из волновых чисел можно получить коэффициенты отражения  $R_e$  и прохождения  $T_e$  по энергиям [1, стр. 77, форм. (2.22), (2.23)]:

$$R_e = \frac{(k_{AB} - k_{BC})^2}{(k_{AB} + k_{BC})^2} = 0,0027; \quad (14.72)$$

$$T_e = \frac{4k_{AB}k_{BC}}{(k_{AB} + k_{BC})^2} = 0,9973. \quad (14.73)$$

При этом выполняется классическое равенство [1, стр. 77, форм. (2.24)]:

$$R_e + T_e = 1. \quad (14.74)$$

#### 14.16.2. Формирование дополнительных лучей

В качестве важной особенности, наблюдаемой на рис. 14.25,  $a$ , следует отметить определенное «расплывание» лучей, переходящих из левой среды в правую. Так, на левой стороне рисунка луч на отрезке  $BD$  в основном сохраняет форму, близкую к форме единичного импульса, хотя и несколько расширенную по сравнению с формой исходного импульса на отрезке  $AB$ . Подобное же сохранение наблюдается и при последующих отражениях вплоть до времени  $T = 40$ , то есть в любом случае вторичные импульсы сохраняют острую вершину и почти прямые склоны. В то же время на правой стороне рисунка, то есть на отрезке  $BC$ , вторичные импульсы, образующие проходящий луч, имеют закругленную вершину и плавно спадающие края, а также, кроме основного, возникает дополнительный луч, несколько левее основного, вторичные импульсы которого также имеют округлую вершину и плавные края, причем амплитуда вторичных импульсов этого дополнительного луча несколько меньше амплитуды импульсов основного. При временах около  $T = 24$  можно наблюдать еще один дополнительный луч, также параллельный основному и имеющий еще меньшую амплитуду. При времени больше  $T = 25$ , то есть после отражения в точке  $C$ , дополнительные лучи появляются уже по другую сторону от основного и область их существования расширяется. Проверка показывает, что при дальнейшем увеличении времени, дополнительные лучи распространяются по всей площади правой стороны структуры и некоторые из них заходят на левую, так что общая картина с каждым последующим отражением все более усложняется.

Причину такого «расплывания» проходящих лучей можно проследить из анализа распространения единичного импульса на сетке, подобной показанной на рис. 14.15.

В этом случае при прохождении по горизонтальным рядам сетки в соответствии с правилом креста до границы сред, то есть на отрезке  $AB$ , во всех узлах, покрываемых крестом при заданном шаге, всегда будут присутствовать только целые числа, которые будут взаимно компенсироваться, так что луч будет сохранять свою форму. Однако в тот момент, когда правый конец перекладины креста перейдет за границу раздела сред, то есть через точку  $B$ , в узле на этом конце появится дробное



число, определяемое числом Куранта, так что компенсация концов перекладины креста нарушится. При этом в узле, соответствующем вершине креста, значение поля также станет дробным, что приведет к дальнейшему нарушению компенсации при последующих проходах креста по рядам сетки. Таким образом, нарушение компенсации на протяжении последовательных шагов креста по координате, а затем и по последующим рядам сетки, приводит к расширению или «расплыванию» луча.

Авторы настоящей монографии не ставили своей задачей подробно проследить расплывание луча и формирование дополнительных лучей в соответствии с предложенным здесь механизмом, однако осмеливаются предложить любознательному читателю такое рассмотрение в качестве полезного упражнения.

### 14.16.3. Заключительное замечание

Настоящая глава является не более чем вспомогательным введением, призванным продемонстрировать возможность применения метода конечных разностей во временной области (FDTD) к задачам о распространении волн через многослойные среды и структуры.

Для большего пояснения механизма работы метода количество шагов по координате и по времени выбрано достаточно малым, а форма импульса — треугольной с единичной шириной и амплитудой. Однако следует учитывать, что метод конечных разностей основан на кусочном представлении производных прямыми отрезками, тогда как в реальных случаях электрическое или магнитное поля меняются достаточно плавно и приближенные производные прямыми отрезками можно считать допустимым только в пределе при стремлении длины этих отрезков к нулю.

Таким образом, для возможности представления плавных процессов, число шагов по координате и по времени должно быть достаточно велико, а шаги достаточно малыми. Так, например, в монографии [201, стр. 41–47, рис. 3.5–3.7 и далее] основные задачи решаются при числе узлов сетки по координате не менее 200, а по времени — до 1000, причем для построения водопадов выводятся развертки вторичных импульсов не все подряд, а только с интервалом в 10 шагов. Во многих случаях исходный импульс задается в виде гауссова импульса типа  $\exp(-t^2)$ , привязанного к конкретной координате [201, стр. 41–42, прог. 3.1], хотя используются и другие представления, например в виде отрезка синусоиды или вейвлета Рикера [196, 200].

В заключение заметим, что из проделанного рассмотрения можно видеть, что применение метода конечных разностей обеспечивает простую и весьма наглядную картину распространения волны при прохождении из одной среды в другую. Можно полагать, что дальнейшая более подробная разработка применения этого метода даст столь же наглядную картину распространения волн через многослойные среды. Авторы осмеливаются предложить любознательному читателю попробовать собственные силы в этом направлении.

## Выводы по главе 14

Данная глава посвящена описанию некоторых приемов применения метода конечных разностей во временной области (FDTD) для расчета распространения волн через многослойные структуры. Приведена схема представления распространения волны в виде «водопада» на плоскости «координата–время». Рассмотрено прохождение волны через две структуры, разделенные одной границей. Приведены рекомендации, касающиеся обобщения метода на многослойную структуру.

Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Выполнено представление уравнений электродинамики в виде конечных разностей по координате и времени. Для одномерной волны, распространяющейся вдоль одной из осей декартовой системы координат, ротор электрического поля записан через производную по времени от магнитного поля, а ротор магнитного поля — через производную по времени от магнитного поля. Входящие в полученные уравнения производные по координате и времени записаны через конечные разности, подстановка которых в исходные уравнения позволила выразить последующие во времени значения электрического и магнитного полей через предыдущие

2. Для решения полученных конечно-разностных уравнений введена составная сетка, образованная двумя простыми квадратными сетками, узлы которых соответствуют значениям электрического и магнитного полей, а сами сетки вложены друг в друга в шахматном порядке. При этом горизонтальные ряды такой сетки соответствуют шагам по координате, в вертикальные — шагам по времени. Для прохождения по сетке введен шаблон в виде «правила креста», позволяющий из значения поля в основании креста и двух значений поля на концах перекладины креста определить значение поля, соответствующее вершине креста. Показано, что циклическое повторение прохождения таким шаблоном по какому-то из горизонтальных рядов сетки с последующим переходом на следующий шаг по времени, позволяет, исходя из задания полей в узлах начального ряда сетки, получить значения полей по всей площади сетки.

3. Введено определение числа Куранта, равное произведению скорости волны на отношение шага по времени к шагу по координате, позволяющее задавать параметры среды через скорость волны в этой среде. Записаны полные конечно-разностные представления электрического и магнитного полей, включающие в себя число Куранта, диэлектрическую и магнитную проницаемости среды, а также импеданс свободного пространства.

4. В качестве характерного объекта для применения аппарата конечных разностей приведена классическая задача Даламбера, требующая решения волнового уравнения для электрического или магнитного поля при задании начального распределения значений поля по координате. Отмечено, что классическое решение задачи Даламбера представляет

собой распространение двух волн во взаимно противоположных направлениях. Основное уравнение задачи Даламбера записано в виде двух связанных между собой конечно-разностных уравнений для электрического и магнитного полей. Для решения полученных уравнений приведена схема машинного алгоритма, использующего предложенную сетку в соответствии с правилом креста.

5. Предложена схема графического представления решения задачи Даламбера. Введено представление конфигурации поля по координате в виде импульса, образованного последовательностью значений поля в следующих друг за другом по координате узлах сетки. При этом начальное условие задачи Даламбера представляется в виде первичного импульса, а рассчитываемые при последующих шагах по времени конфигурации поля — в виде вторичных импульсов.

6. Приведено решение задачи Даламбера при задании первичного импульса электрического поля в виде равнобедренного треугольника, высота которого соответствует двум единицам по величине поля, а ширина основания — трем шагам по координате. Показано, что решение представляет собой два вторичных импульса половинной амплитуды, распространяющихся в противоположные стороны, как того требует классическое решение задачи Даламбера. Отмечено отражение вторичных импульсов от границ сетки, происходящее с инверсией знака импульса или без нее, в зависимости от соотношения между числом узлов сетки того и другого поля на ее границе.

7. Рассмотрено формирование вторичного поля от импульсов различной формы. Установлено, что при произвольной форме первичных импульсов вторичные импульсы образуют два расходящихся луча, соответствующих двум расходящимся волнам в классической задаче Даламбера, а пространство между этими лучами заполняется неоднородной структурой, имеющей пилообразный характер, в классической задаче Даламбера отсутствующей.

8. Ввиду сложности наблюдаемых явлений основное внимание обращено на первичный импульс единичной формы, имеющий вид равнобедренного треугольника с единичной амплитудой по полю и длиной основания, равной двум шагам по координате. Показано, что такой импульс формирует вторичное поле в виде симметричной пилообразной структуры, ограниченной лучами, соответствующими волнам задачи Даламбера. Рассмотрена качественная картина задания единичного импульса. Отмечено, что, в соответствии с законами электродинамики единичный импульс электрического поля обязательно сопровождается единичным импульсом магнитного поля, что должно быть учтено при конечно-разностном рассмотрении задачи Даламбера.

9. С целью предотвращения формирования пилообразной структуры рассмотрено задание единичного импульса в сочетании с одновременным заданием компенсирующего единичного импульса магнитного поля. Установлено, что компенсация возможна только в двух случаях: первый — когда импульс магнитного поля имеет обратный знак от-

носителем импульса электрического поля и расположен при том же значении координаты, и второй — когда импульс магнитного поля имеет тот же знак, что и импульс электрического поля, однако опережает его по координате на один шаг по времени. При этом в первом случае формируется вторичный импульс, распространяющийся в отрицательном направлении оси координат, а во втором — в положительном направлении той же оси.

10. Приведена схема компенсации первичных импульсов электрического поля компенсирующим импульсом магнитного поля с использованием конечно-разностной сетки. Показано, что без компенсации вторичный импульс проявляется в виде чередования знаков в последовательно расположенных по координате значениях поля, что соответствует пилообразной структуре. При введении компенсации в том или ином виде на сетке образуется канал, исходящий от начальной точки под углом в 45 град, причем ширина по основанию этого канала на всем его протяжении сохраняется равной двум шагам по координате, то есть ширине начального импульса. Каждый из таких каналов соответствует той или иной волне классического решения задачи Даламбера.

11. Установлен универсальный характер компенсации, состоящий в том, что при задании первичного импульса любой формы введение компенсирующего импульса другого поля той же формы в любом из двух упомянутых случаев приводит к формированию двух лучей, распространяющихся в ту или иную сторону с сохранением структуры этих лучей соответствующей структуре первичного импульса.

12. Отмечены некоторые дополнительные свойства пилообразных структур. Так, независимо от конфигурации первичных импульсов края получающейся структуры всегда ограничены краями, соответствующими двум расходящимся волнам задачи Даламбера. При этом каждый край структуры определяется краем первичного импульса, в том числе противоположного поля, если он не играет роли компенсирующего. Другое свойство пилообразной структуры состоит в ее аддитивном характере, то есть пилообразная структура от суммы двух первичных импульсов равна сумме пилообразных структур от каждого из первичных импульсов.

13. Выполнено графическое представление конечно-разностного решения задачи Даламбера на единой плоскости «координата–время». Для этого развитие картины вторичных импульсов в следующие друг за другом последовательные моменты времени располагаются друг над другом с шагом по вертикали, соответствующим шагу по времени. Последовательное размещение следующих друг за другом вторичных импульсов образует лучи, расходящиеся из начальной точки в виде «водопада». Приведена схема машинного расчета водопада. Для построения картины в целом для того или другого поля используются два файла — координатный и один из полевых, тот, изображение поля которого требуется. При этом каждая новая строка располагается выше предыдущей за счет увеличивающихся постоянных добавок.

14. Построен водопад при задании первичного импульса электрического поля без компенсации в виде равнобедренного треугольника, высота которого соответствует двум единицам по величине поля, а ширина основания — трем шагам по координате. Отмечено формирование двух вторичных лучей, расходящихся в противоположные стороны, как того требует классическое решение задачи Даламбера. Выявлено отражение лучей без инверсии и с инверсией, а также сохранение их формы при взаимном пересечении.

15. Рассмотрены варианты водопадов от единичного импульса. В случае отсутствия компенсации выявлено формирование «ковра» из вторичных пилообразных структур, ограниченного лучами классической задачи Даламбера. Показано, что введение компенсирующего единичного импульса в обоих допустимых вариантах приводит к формированию четко ограниченного луча Даламбера, распространяющегося в ту или иную сторону при сохранении своей формы на всем протяжении распространения. Выполнено совмещение на расстоянии одного шага по координате двух единичных импульсов электрического поля с соответствующим заданием компенсирующих импульсов магнитного поля. Показано, что в этом случае одновременно формируются два луча, распространяющиеся в противоположные стороны в соответствии с классическим решением задачи Даламбера.

16. В рамках конечно-разностного представления рассмотрено распространение волны через одну границу, разделяющую две среды с различными параметрами. Задание параметров второй среды по отношению к первой выполнено путем уменьшения соответствующего числа Куранта, что соответствует распространению волны из среды менее плотной в среду более плотную, где скорость волны уменьшается. Отмечено преломление волны на границе, соответствующее увеличению угла преломления по сравнению с углом падения. По величине расстояния, проходимого волной за заданный промежуток времени, определены скорости волн в обеих средах по разные стороны от границы. Показано, что перевод полученных значений скоростей в волновые числа при условии сохранения частоты волны при преломлении позволяет определить коэффициенты отражения и прохождения волн по амплитудам и по энергиям. Выявлено формирование дополнительных лучей, сопровождающих преломленную волну, для интерпретации которых предложен механизм раскомпенсации значений поля на концах перекладины креста при продвижении креста через границу.

17. Приведены некоторые замечания и рекомендации, касающиеся дальнейшего развития работы, в первую очередь обобщения полученных результатов на случай многослойных структур и неоднородных сред со сложными видами неоднородностей.

## Литература

1. Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Волны в многослойных структурах. Часть 1. Методы расчета: прямой, усреднения, матрицы. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2022.
2. Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Волны в многослойных структурах. Часть 2. Методы расчета: импеданса, исключения, переотражений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2024.
3. Хвольсон О. Д. Курс физики. — Берлин: Госиздат РСФСР, 1923. Т. 2.
4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1970.
5. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973.
6. Ландсберг Г. С. Оптика. — М.: Наука, 1976.
7. Поль Р. В. Введение в оптику. — М.-Л.: ОГИЗ, Гос. изд. техн.-теор. лит., 1947.
8. Кизель В. А. Отражение света. — М.: Наука, 1973.
9. Бреховских Л. М., Годин О. А. Акустика слоистых сред. — М.: Наука, 1989.
10. Розенберг Г. В. Оптика тонкослойных покрытий. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958.
11. Бреховских Л. М. Отражение плоских волн от слоисто-неоднородных сред // ЖТФ. 1949. Т. 19, № 10. С. 1126–1135.
12. Oksanen M. I., Hanninen J., Tretyakov S. A. Vector circuit method for calculating reflection and transmission of electromagnetic waves in multilayered chiral structures // IEEE Proceedings. Н. 1991. V. 138, № 7. P. 513–520.
13. Sarychev A. K., Bergman D. J., Yagil Y. Theory of the optical and microwave properties of metal-dielectric films // PR(B). 1995. V. 51, № 8. P. 5366–5385.
14. Шварцбург А. Б. Дисперсия электромагнитных волн в слоистых и нестационарных средах (точно решаемые модели) // УФН. 2000. Т. 170, № 12. С. 1297–1324.
15. Каплан А. Е. Об отражательной способности металлических пленок в СВЧ- и радиодиапазоне // РЭ. 1964. Т. 11, № 10. С. 1781–1787.
16. Лакс Б., Баттон К. Сверхвысокочастотные ферриты и ферримагнетики. — М.: Мир, 1965.
17. Микаэлян А. Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. — М.: Госэнергоиздат, 1963.
18. Гуревич А. Г. Ферриты на сверхвысоких частотах. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960.
19. Гуревич А. Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. — М.: Наука, 1973.

20. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1994.
21. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. — М.: Наука, 1967.
22. Вашковский А.В., Стальмахов В.С., Шараевский Ю.П. Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. — Саратов: Изд. Саратовского университета, 1993.
23. Вендик О.Г., Калиникоз Б.А. Волновые процессы в пленочных ферритовых слоистых структурах — физические основы спин-волновой электроники // Изв. вузов. Физика. 1988. Т. 31, № 11. С. 3–5.
24. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Магнитостатические волны в неоднородных полях. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016.
25. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Магнитостатические и электромагнитные волны в сложных структурах. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017.
26. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Ферромагнитный резонанс в условиях ориентационного перехода. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018.
27. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Динамика намагниченности в условиях изменения ее ориентации. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2019.
28. Гуляев Ю.В., Тарасенко С.В., Шавров В.Г. С спин-волновая акустика антиферромагнитных структур как магнитоакустических метаматериалов // УФН. 2011. Т. 181, № 6. С. 595–626.
29. Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Животовский Л.В., Климов А.А., Тайад Ф., Пресманес Л., Бонин К., Цай Ч.С., Высоцкий С.Л., Филимонов Ю.А. Ферромагнитные пленки с периодическими структурами с магнотной запрещенной зоной — магнотные кристаллы // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 77, № 10. С. 670–674.
30. Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Волков А.И. Поверхностные магнитостатические спиновые волны в двумерных магнотных кристаллах // РЭ. 2007. Т. 50, № 9. С. 1107–1113.
31. Третьяков С.А. Электродинамика сложных сред: киральные, биизотропные и некоторые бианизотропные материалы (обзор) // РЭ. 1994. Т. 39, № 10. С. 1457–1470.
32. Козарь А.В. Оптические свойства аперидических тонкослойных структур: эффективный показатель преломления. Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2009. Т. 64, № 3. С. 54–56.
33. Козарь А.В. Оптические свойства аперидических тонкослойных структур: эффективная оптическая толщина. Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2018. Т. 3, № 6. С. 61–66.
34. Козарь А.В., Трофимов А.В., Потанов А.А. Процесс нестационарного отражения коротких электромагнитных импульсов от многослойных фильтров с максимально плоской амплитудно-частотной характеристикой // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). 2016. № 4. [jre.cplire.ru/jre/apr16/1/text.html](http://jre.cplire.ru/jre/apr16/1/text.html).
35. Козарь А.В., Трофимов А.В. Явление нестационарного отражения импульсных сигналов от слоистых структур с потерями // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2013, № 5. С. 38–43.

36. Bobrovnikov Y. A., Gorokhov P. N., Kozar' A. V. Transformation of pulses with the help of layer interference structures // Quantum Electronics. 2003. V. 33, № 11. P. 1019–1021.
37. Бобровников Ю.А., Горохов П.Н., Козарь А.В. Явление нестационарного отражения электромагнитных волн с изменяющейся амплитудой от слоистых структур // Известия РАН. Серия физическая. 2002. Т. 66, № 12. С. 1923–1826.
38. Weiner A.M. Ultrafast optical pulse shaping: A tutorial review // Optics Communications. 2011. V. 284. P. 3669–3692.
39. Шустер А. Введение в теоретическую оптику. — М., Л.: ОНТИ. Гл. ред. общетех. лит., 1935.
40. Веселаго В.Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями  $\epsilon$  и  $\mu$  // УФН. 1967. Т. 92, № 3. С. 517–526.
41. Агранович В.М., Гаршиштейн Ю.Н. Пространственная дисперсия и отрицательное преломление света // УФН. 2006. Т. 176, № 10. С. 1052–1068.
42. Parimi P. V., Lu W. T., Vodo P., Sokoloff J., Derov J. S., Sridhar S. Negative refraction and left-handed electromagnetism in microwave photonic crystals // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92, № 12. P. 127401(4).
43. Lindell I. V., Tretyakov S. A., Nikoskinen K. I., Ilvonen S. BW media — media with negative parameters, capable of supporting backward waves // Microwave and Optical Technology Letters. 2001. V. 31, № 2. P. 129–133.
44. Smith D. R., Padilla W. J., Vier D. C., Nemat-Nasser S. C., Schultz S. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84, № 18. P. 4184–4187.
45. Pendry J. B. Negative refraction makes a perfect lens // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85, № 18. P. 3966–3969.
46. Pendry J. B., Holden A. J., Stewart W. J., Youngs I. Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76, № 25. P. 4773–4776.
47. Strel'niker Y. M., Bergman D. J. Theory of magnetotransport in a composite medium with periodic microstructure for arbitrary magnetic fields // Phys. Rev. B. 1994. V. 50, № 19. P. 14001–14015.
48. Локк Э.Г. Свойства изочастотных зависимостей и законы геометрической оптики // УФН. 2008. Т. 178, № 2. С. 397–417.
49. Веселаго В.Г. Волны в метаматериалах: их роль в современной физике // УФН. 2011. Т. 181, № 11. С. 1201–1205.
50. Sarychev A. K., Bergman D. J., Yagil Y. Theory of the optical and microwave properties of metal-dielectric films // PR(B). 1995. V. 51, № 8. P. 5366–5385.
51. Levy-Nathansohn R., Bergman D. J. Decoupling and testing of the generalized Ohm's law // PR(B). 1997. V. 55, № 8. P. 5425–5439.
52. Антонец И.В., Котов Л.Н., Некипелов С.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Электродинамические свойства тонких металлических пленок с различной толщиной и морфологией поверхности // РЭ. 2004. Т. 49, № 10. С. 1243–1250.

53. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Проводящие и отражающие свойства пленок нанометровых толщин из различных металлов // РЭ. 2006. Т. 51, № 12. С. 1481–1487.
54. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. — М.: Наука, 1964.
55. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972.
56. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. — М.: Наука, 1964.
57. Антонец И.В., Щеглов В.И. Распространение волн через тонкие слои и пленки. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2010.
58. Антонец И.В., Щеглов В.И. Распространение волн через многослойные структуры. Часть первая. Прямой метод. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2011
59. Антонец И.В., Щеглов В.И. Распространение волн через многослойные структуры Часть вторая. Метод матрицы. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2012
60. Антонец И.В., Щеглов В.И. Распространение волн через многослойные структуры Часть третья. Метод импеданса. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2012
61. Антонец И.В., Щеглов В.И. Распространение волн через многослойные структуры. Часть четвертая. Специфические методы. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2013
62. Антонец И.В., Щеглов В.И. Распространение волн через многослойные структуры. Часть пятая. Алгоритмические методы. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2014
63. Антонец И.В., Щеглов В.И. Распространение волн через многослойные структуры. Часть шестая. Метод исключения. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2015
64. Антонец И.В., Щеглов В.И. Распространение волн через многослойные структуры. Часть седьмая. Баланс энергий. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2015
65. Антонец И.В., Щеглов В.И. Распространение волн через многослойные структуры. Часть восьмая. Периодические неоднородности. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2017.
66. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение метода усреднения к расчету распространения электромагнитного излучения через тонкие пленки с различной проводимостью // РЭ. 2007. Т. 52, № 4. С. 403–414.
67. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Расчет коэффициентов отражения, прохождения и поглощения при наклонном падении электромагнитной волны на пластину // РЭ. 2008. Т. 53, № 4. С. 389–402.
68. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Падение электромагнитной волны на одну и две границы раздела сред в условиях перехода от диэлектрического типа распространения к металлическому // РЭ. 2008. Т. 53, № 8. С. 901–913.

69. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Пространственные фазовые характеристики распространения электромагнитной волны через слои с пассивными и активными свойствами // Сборник трудов XVI Международной конференции «Радиолокация и радиосвязь». Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ, 2008. С. 7–17.
70. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Энергетические параметры распространения электромагнитной волны при падении на проводящую пластину, окруженную проводящей средой // Сборник трудов XVI Международной конференции «Радиолокация и радиосвязь». Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ, 2008. С. 18–29.
71. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ распространения электромагнитной волны через проводящий слой методом фазовой плоскости // РЭ. 2009. Т. 54, № 5. С. 517–530.
72. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Энергетические характеристики распространения волны через границы раздела сред с комплексными параметрами // РЭ. 2009. Т. 54, № 10. С. 1171–1183.
73. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Роль магнитной проницаемости в задаче о распространении электромагнитной волны через три магнитных среды с потерями // Сборник трудов XXI Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ)». М.: Изд. МГУ, 2009. С. 939–941.
74. Щеглов В.И., Шавров В.Г., Зубков В.И., Антонец И.В., Котов Л.Н. Распространение волн через двухслойную структуру из тонких пленок с граничными условиями импедансного типа // Сборник трудов XII Международной конференции «Магнетизм, дальше и ближе спин-спиновое взаимодействие». Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ, 2009. С. 108–116.
75. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Эквивалентность скалярного одномерного и векторного электродинамического подходов к задаче о падении волны на пластину, решаемой методами прямым и усреднения // РЭ. 2010. Т. 55, № 2. С. 133–143.
76. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение метода обобщенного импеданса для расчета распространения волн различной природы через слоистую структуру // Сборник трудов XVIII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва–Фирсановка: МЭИ-ПЛАНТИ. 2010. С. 144–153.
77. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение метода характеристической матрицы для расчета распространения волн различной природы через слоистую структуру с произвольным числом слоев // Сборник трудов XVIII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва–Фирсановка: МЭИ-ПЛАНТИ. 2010. С. 154–172.
78. Antonets I. V., Kotov L. N., Shavrov V. G., Shcheglov V. I. Electromagnetic wave propagation through multi-layer structures consist of thin magnetic films with impedance boundary conditions // Book of Abstracts of Moscow International Symposium on Magnetism (MISM). Moscow: «Изд-во Физ. фак. МГУ». P. 781–782.
79. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Алгоритм определения амплитуд внешних и внутренних волн при встречном падении

- двух одномерных волн на многослойную структуру // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы», Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ, 2011. С. 154–165.
80. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Энергетические характеристики распространения встречных волн через многослойную структуру // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ, 2011. С. 166–173.
81. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Распространение волн через многослойные структуры с неоднородностью степенного вида // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ, 2011. С. 174–186.
82. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Интерференционное отражение падающей волны от многослойной структуры при воздействии встречной волны // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ, 2011. С. 187–193.
83. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Алгоритм определения амплитуд отраженных и проходящих волн при симметричном падении двух встречных волн на многослойную неоднородную структуру // РЭ. 2012. Т. 57, № 1. С. 67–79.
84. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Применение метода результирующей матрицы для расчета отражения и прохождения электромагнитных волн при падении на многослойные феррит-металл-диэлектрические структуры // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ, 2012. С. 187–200.
85. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Внешние и внутренние волны в многослойной ступенчато-неоднородной структуре // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ, 2012. С. 201–214.
86. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Энергетические коэффициенты выхода при падении встречных волн на многослойную структуру // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ, 2012. С. 215–229.
87. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Исследование распространения волны через границу между двумя диссипативными средами методом векторной модели // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ, 2012. С. 284–288.
88. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Алгоритм определения амплитуд внешних и внутренних волн при падении встречных волн на многослойную структуру со ступенчатой неоднородностью // РЭ. 2013. Т. 58, № 1. С. 16–27.
89. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Применение метода исключения для анализа распространения волн в многослойных средах со случайным распределением параметров слоев // РЭ. 2013. Т. 58, № 12. С. 1149–1159.

90. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Два простых алгоритма определения амплитуд внешних и внутренних колебаний при распространении встречных волн в многослойной неоднородной структуре // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). 2013. № 1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan13/11/text.pdf>.
91. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Метод исключения для расчета распространения волн через среды со ступенчатыми неоднородностями // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). 2013. № 4. <http://jre.cplire.ru/jre/apr13/6/text.pdf>.
92. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Применение метода исключения для расчета распространения волн через среды со ступенчатыми неоднородностями специального вида // Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ, 2013. С. 130–144.
93. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Исследование методом исключения отражения и прохождения волн при распространении через многослойные среды с барьерными и периодическими неоднородностями // Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ, 2013. С. 145–163.
94. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Внешние и внутренние волны при распространении через ограниченную многослойную структуру с периодической неоднородностью // Сборник трудов XXII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ, 2014. С. 124–138.
95. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Исследование методом исключения распространения волн через многослойную среду с барьерными неоднородностями // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). 2015, № 1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan15/22/text.pdf>.
96. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Пространственное распределение амплитуд внешних и внутренних волн в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью. Часть 1. Одномерная волна // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). 2015, № 2. <http://jre.cplire.ru/jre/feb15/1/text.pdf>.
97. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Пространственное распределение амплитуд внешних и внутренних волн в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью. Часть 2. Электромагнитная волна // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). 2015, № 2. <http://jre.cplire.ru/jre/feb15/2/text.pdf>.
98. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Пространственное распределение амплитуд внешних и внутренних волн в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью. Часть 3. Электромагнитная волна в магнитной среде // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). 2015, № 3. <http://jre.cplire.ru/jre/mar15/13/text.pdf>.
99. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Пространственное распределение амплитуд внешних и внутренних волн в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью. Часть 4. Волна в диссипативной среде // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). 2015, № 3. <http://jre.cplire.ru/jre/mar15/14/text.pdf>.

100. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Вторичная модуляция коэффициентов отражения и прохождения волны через ограниченную периодическую структуру // Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: ИНФРА-М, 2015. С. 132–144.
101. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Невзаимное распространение электромагнитных волн в многослойной структуре с магнитными элементами // Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: ИНФРА-М, 2015. С. 145–159.
102. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Векторная модель распространения волны через границу, разделяющую диссипативные среды // РЭ. 2016. Т. 61, №3. С. 224–232.
103. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Пространственное распределение амплитуд электромагнитных волн, распространяющихся в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью // РЭ. 2017. Т. 62, №12. С. 1224–1236.
104. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Метод обобщенного импеданса для расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 1. Последовательный пересчет импедансов и амплитуд // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). 2023, №1. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.1.1>.
105. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Метод обобщенного импеданса для расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 2. Падение волны на прямоугольный барьер // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). 2023, №1. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.1.2>.
106. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Метод обобщенного импеданса для расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 3. Падение волны на ступенчато-нарастающий барьер // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). 2023, №1. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.1.3>.
107. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Метод обобщенного импеданса для расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 4. Критерий применимости ступенчатого приближения неоднородной среды // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). 2023, №5. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.5.5>.
108. Конторович М.И., Черепанов А.С. Метод усреднения для анализа процессов в волноводе с гиромангнитным заполнением // РЭ. 1985. Т. 30, №8. С. 1543–1548.
109. Халиуллин Д.Я., Третьяков С.А. Обобщенные граничные условия импедансного типа для тонких плоских слоев различных сред (обзор) // РЭ. 1998. Т. 43, №1. С. 16–29.
110. Конторович М.И., Третьяков С.А. Приближенные граничные условия в теории электромагнитных волн в ферритовом слое // РЭ. 1986. Т. 31, №6. С. 110–114.

111. Oksanen M.I., Tretyakov S.A., Lindell I.V. Vector circuit theory for isotropic and chiral slabs // J. of Electromagnetic Waves and Applications, 1990. V. 4, №7. P. 613–643.
112. Третьяков С.А. Приближенные граничные условия для тонкого биизотропного слоя // РЭ. 1994. Т. 39, №2. С. 184–192.
113. Lindell I. V., Sihvola A. N., Tretyakov S. A., Viitanen A. J. Electromagnetic waves in chiral and Bi-isotropic media. — Boston and London: Artech House, 1994.
114. Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Абрамов А.В., Боголюбов А.С. Изменение типа резонансного отражения электромагнитного излучения в структурах «нанометровая металлическая пленка — диэлектрик» // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33, №2. С. 13–22.
115. Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Абрамов А.В., Боголюбов А.С. Изменение толщины нанометровых слоев полупроводника в структурах металл-полупроводник по спектрам отражения и прохождения электромагнитного излучения // ЖТФ. Т. 76, №5. С. 112–117.
116. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред (Теоретическая физика, т. VIII). — М.: Наука, 1982.
117. Абрикосов А.А. Основы теории металлов. — М.: Мир, 1985.
118. Каценеленбаум Б.З. Высокочастотная электродинамика. — М.: Наука, 1966.
119. Кравченко В.Ф., Казаров А.Б. Поверхностный импеданс сверхпроводников и его применение в физике и технике // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1997, №11. С. 59–78.
120. Жук Н.П., Третьяков С.А. Эквивалентный импеданс шероховатой поверхности раздела сред // РЭ. 1987. Т. 32, №10. С. 2079–2088.
121. Багацкая О.В., Жук Н.П., Шульга С.Н. Нелокальный импеданс многослойной пластины из одноосного диэлектрика // РЭ. 1999. Т. 44, №2. С. 151–156.
122. Физическая энциклопедия. Статья «Импеданс» // М.: Советская энциклопедия, 1990. Т. 2. С. 127.
123. Sukstanskii A. I., Korenivski V. Impedance and surface impedance of ferromagnetic multilayers: the role of exchange interaction // J. of Physics D: Applied Physics. 2001. V. 34, №23. P. 3337–3348.
124. Нелин Е.А. Импедансная модель для «барьерных» задач квантовой механики // УФН. 2007. Т. 177, №3. С. 307–313.
125. Кравченко А.Н. Краевые характеристики в задачах электродинамики. — Киев: Наукова думка, 1989.
126. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Алгоритм определения амплитуд внешних и внутренних волн при встречном падении волн на многослойную структуру // Сборник материалов XV Международной зимней школы-семинара по электронике сверхвысоких частот и радиофизике — 2012. Саратов, 6–11.02.2012, Изд. СГУ, 2012. С. 39.
127. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1973.

128. *Сушкевич А.К.* Основы высшей алгебры. — М., Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1941.
129. *Адян С.И.* Математическая энциклопедия. Т. 3. Статья «Математическая индукция». — М.: Сов. Энци., 1982. С. 564–565.
130. *Харкевич А.А.* Основы радиотехники. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
131. *Рэлей Дж. У.* Теория звука. Т. 1, 2. — М.: ИЛ, 1955.
132. *Бриллюэн Л., Пароди М.* Распространение волн в периодических структурах. — М.: ИЛ, 1959.
133. *Карлов Н.В., Кириченко Н.А.* Колебания, волны, структуры. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
134. *Калашников С.Г.* Электричество. — М.: Наука, 1964.
135. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 3. Электричество. — М.: Наука, 1977.
136. *Никольский В.В., Никольская Т.И.* Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Наука, 1989.
137. *Левич В.Г.* Курс теоретической физики. Т. 1. — М.: Наука, 1969.
138. *Красюк Н.П., Дымович Н.Д.* Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Высшая школа, 1974.
139. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Д.Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. — М.: ИЛ, 1963.
140. *Мак-Лахлан Н.В.* Теория и приложения функций Матье. — М.: ИЛ, 1953.
141. *Семенов А.А.* Теория электромагнитных волн. — М.: Изд. МГУ, 1968.
142. *Ионкин П.А., Мельников Н.А., Даревский А.И., Кухаркин Е.С.* Теоретические основы электротехники. Часть 1. Основы теории цепей. — М.: Высшая школа, 1965.
143. *Даревский А.И., Кухаркин Е.С.* Теоретические основы электротехники. Часть 2. Основы теории электромагнитного поля. — М.: Высшая школа, 1965.
144. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. — М.: Сов. радио, 1957.
145. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. — М.: Радио и связь, 1988.
146. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Электромагнитные волны в бигиротропной пластине, распространяющиеся в направлении, перпендикулярном полю подмагничивания // РЭ. 2002. Т. 47, №9. С. 1101–1104.
147. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Электромагнитные волны, распространяющиеся в произвольном направлении в безграничной бигиротропной среде, обладающей круговой цилиндрической симметрией // РЭ. 2003. Т. 48, №10. С. 1186–1194.
148. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Отражение электромагнитных волн от композиционной среды, содержащей ферритовые элементы в условиях ориентационного перехода // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ, 2011. С. 245–260.
149. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* Отражение и прохождение электромагнитных волн при падении на трехслойную композиционную структуру, содержа-

- щую гиромангнитные элементы // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ. 2012. С. 260–273.
150. *Чертов А.Г.* Единицы физических величин. — М.: Высшая школа, 1977.
151. *Сена Л.А.* Единицы физических величин и их размерности. — М.: Наука, 1977.
152. *Виноградов А.П.* Электродинамика композитных материалов. — М.: УРСС, 2001.
153. *Шевченко В.В.* Прямые и обратные волны: три определения, их взаимосвязь и условия применимости // УФН. 2007. Т. 177, №3. С. 301–306.
154. *Стрелков С.П.* Введение в теорию колебаний. — М.: Наука, 1964.
155. *Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н.* Основы теории колебаний. — М.: Наука, 1978.
156. *Gilbert T.L.* A phenomenological theory of damping in ferromagnetic materials // IEEE Trans. on Magn. 2004. V. 40, №6. P. 3443–3449.
157. *Вашковский А.В., Стальмахов В.С., Шараевский Ю.П.* Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. — Саратов: Изд. Саратовского университета, 1993.
158. *Вамберский М.В., Абрамов В.П., Казанцев В.И.* Конструирование ферритовых развязывающих приборов СВЧ. — М.: Радио и связь, 1982.
159. *Вендик И.Б., Вендик О.Г.* Метаматериалы и их применение в технике сверхвысоких частот // ЖТФ. 2013. Т. 83, №1. С. 3–28.
160. *Веремей В.В., Горбунова Т.А., Пуговкин Л.В.* Баланс энергии при отражении света от границ изотропных сред // Оптика и спектроскопия. 1978. Т. 44, №2. С. 345–350.
161. *Бойко Б.Б., Лещенко В.Г., Петров Н.С.* Интерференционный поток и его роль в энергетическом балансе на границе раздела двух сред // В сборнике: Ковариантные методы в теоретической физике. Оптика и акустика. Сборник научных трудов, вып. 1. Минск, Изд. ИФ АН БССР, 1981, стр. 40–55.
162. *Джилавдари И.З., Филиппов В.В.* К вопросу о введении энергетических коэффициентов отражения и прохождения неоднородных электромагнитных волн // ЖПС (Журнал прикладной спектроскопии). 1981. Т. 35, №1. С. 152–155.
163. *Минков И.М.* О переопределении энергетических коэффициентов отражения и пропускания света для границы раздела поглощающей и прозрачной сред // Оптика и спектроскопия. 1985. Т. 58, №2. С. 466–469.
164. *Ефимов В.В., Семенов Д.И.* Диссипация энергии в условиях интерференции встречных волн в поглощающем слое // ЖТФ. 1997. Т. 67, №2. С. 118–120.
165. *Афанасьев С.А., Семенов Д.И.* Поток энергии при интерференции электромагнитных волн // УФН. 2008. Т. 178, №4. С. 377–384.
166. *Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Энергетические параметры падения волны из поглощающей среды на пластину // Сборник трудов IX Международного семинара «Магнитные фазовые переходы».



- Махачкала: издание Института физики Дагестанского научного центра РАН, 2009. С. 67–70.
167. Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Баланс потоков энергии при распространении встречных волн через многослойную структуру // «XXXIV Международная зимняя школа физиков-теоретиков — Коуровка 2012». Тезисы докладов. Екатеринбург: издание ИФМ УрО РАН, 2012. С. 101.
168. Казанцева Н. Е., Пономаренко А. Т., Шевченко В. Г., Чмутин И. А., Калинин Ю. Е., Ситников А. В. Свойства и перспективы применения гранулированных ферромагнетиков в области СВЧ // Физика и химия обработки материалов. 2002, № 1. С. 5–11.
169. Калинин Ю. Е., Ремизов А. Н., Ситников А. В. Электрические свойства аморфных нанокмполитов  $(Co_{45}Fe_{45}Zr_{10})_x(Al_2O_3)_{1-x}$  // ФТТ. 2004. Т. 46, № 11. С. 2076–2082.
170. Иванов А. В., Калинин Ю. Е., Нечаев А. В., Ситников А. В. Электрические и магнитные свойства мультислойных структур  $[(CoFeZr)_x(Al_2O_3)_{1-x}/(\alpha - SiH)]_n$  // ФТТ. 2009. Т. 51, № 12. С. 2331–2336.
171. Ситников А. В. Электрические и магнитные свойства наногетерогенных систем металл–диэлектрик. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. — Воронеж: ВГТУ, 2010.
172. Антонец И. В., Котов Л. Н., Калинин Ю. Е., Ситников А. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Динамическая проводимость аморфных наногранулированных пленок в диапазоне сверхвысоких частот // ПЖТФ. 2014. Т. 40, № 14, С. 1–6.
173. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1973.
174. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля (Теоретическая физика, т. II). — М.: Наука, 1967.
175. Стрелков С. П. Механика. — М.: Наука, 1965.
176. Алешкевич В. А., Деденко Л. Г., Караваев В. А. Колебания и волны. Лекции. — М.: Издание Физ. фак. МГУ, 2001.
177. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Часть II. — М.: Наука, 1973.
178. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. — М., Л.: Гос. изд. техн.-теор. Лит., 1949.
179. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. — М., Л.: Гос. изд. техн.-теор. Лит., 1951.
180. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. — М.: Наука, 1965.
181. Курюшин Е. П., Нефедов Е. И. Электродинамика анизотропных волноводных структур. — М.: Наука, 1983.
182. Вашковский А. В., Локк Э. Г. Прямые и обратные неколлинеарные волны в магнитных пленках // УФН. 2006. Т. 176, № 5. С. 557–562.

183. Вашковский А. В., Локк Э. Г. О взаимосвязи энергетических и дисперсионных характеристик магнитостатических волн в ферритовых структурах // УФН. 2011. Т. 181, № 3. С. 293–304.
184. Вашковский А. В., Зубков В. И., Локк Э. Г., Щеглов В. И. Преломление поверхностных магнитостатических волн на границе раздела сред феррит и феррит–диэлектрик–металл // РЭ. 1991. Т. 36, № 10. С. 1959–1967.
185. Афанасьев С. А., Семенов Д. И. Туннельная интерференция встречных волн в области отрицательной магнитной проницаемости // ЖТФ. 1997. Т. 67, № 10. С. 77–80.
186. Санников Д. Г., Семенов Д. И. Интерференция встречных волн в невзаимной киральной среде // ПЖТФ. 2007. Т. 33, № 23. С. 19–26.
187. Кузнецов Ю. Н., Семенов Д. И. Интерференция однонаправленных и встречных волноводных мод в планарной структуре // ЖТФ. 2005. Т. 75, № 11. С. 81–85.
188. Тудоровский А. И. Теория оптических приборов. — М.–Л.: Изд. АН СССР. Т. 1. 1948. Т. 2. 1952.
189. Бычков И. В., Кузьмин Д. А., Бучельников В. Д., Шавров В. Г. Влияние взаимодействия подсистем на динамические свойства магнетиков. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016.
190. Шавров В. Г., Бучельников В. Д., Бычков И. В. Связанные волны в магнетиках. — М.: Физматлит, 2019.
191. Шевченко В. В. Обратные плоские волны в слоистых средах // РЭ. 2004. Т. 49, № 6. С. 683–688.
192. Шевченко В. В. О прохождении плоских волн через границу двух поглощающих сред // РЭ. 2004. Т. 49, № 9. С. 1048–1053.
193. Ortiz G. P., Mochan W. L. Nonadditivity of Poynting vector within opaque media // J. Opt. Soc. Am. A. 2005. V. 22, № 12. P. 2827–2837.
194. Стрэттон Д. А. Теория электромагнетизма. — М.: ОГИЗ, Гос. изд. техн.-теор. лит., 1948.
195. Макаров П. А., Устюгов В. А., Щеглов В. И. Моделирование распространения электромагнитных волн в магнитно-неоднородных средах // Известия Коми научного центра УрО РАН: Серия «Физико-математические науки». 2022. № 5(57). С. 100–105.
196. Макаров П. А., Устюгов В. А., Щеглов В. И. Особенности численного решения уравнений максвелла методом FDTD в однородной и неоднородной формулировках // Известия Коми научного центра УрО РАН: Серия «Физико-математические науки». 2023. № 4(62). С. 96–107.
197. Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Алгоритм Йи в задаче Даламбера для электромагнитной волны. Часть 1. Формирование вторичного импульса // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). 2024. № XX. **В ПЕЧАТИ.** <http://jre.cplire.ru/jre/XXXX>
198. Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Алгоритм Йи в задаче Даламбера для электромагнитной волны. Часть 2. Единичный импульс // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). 2024. № XX. **В ПЕЧАТИ.** <http://jre.cplire.ru/jre/XXXX>

199. Макаров П. А., Шаевров В. Г., Шеглов В. И. Алгоритм Яй в задаче Даламбера для электромагнитной волны. Часть 3. Плоскость координата-время // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). 2024. № XX. **В ПЕЧАТИ.** <http://jre.cplire.ru/jre/XXXX>
200. Yee K. S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media // IEEE Transactions of antennas and propagation. 1966. V. AP-14, № 3. P. 302–307.
201. Schneider J. B. Understanding the Finite-Difference Time-Domain Method. December 20, 2022. [www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd](http://www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd), 2010. 403 p.
202. Inan U. S., Marshall R. A. Numerical electromagnetics. The FDTD method. — Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 406 p.
203. Будак Б. М., Фомин С. В. Кратные интегралы и ряды. — М.: Наука, 1965.
204. Mur G. Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of the Time-Domain Electromagnetic-Field Equations // IEEE Transactions on Electromagnetic compatibility. 1981. V. EMG-23, № 4. P. 377–382.
205. Пярнпуу А. А. Программирование на Алголе и Фортране. — М.: Наука, 1978.
206. Taflov A., Brodwin M. E. Numerical Solution of Steady-State Electromagnetic Scattering Problems Using the Time-Dependent Maxwell's Equations // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1975. V. MTT-23, № 8. P. 623–630.
207. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983.