

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ФИНИТНЫХ СИГНАЛОВ, ПРОШЕДШИХ ЧЕРЕЗ ФИЛЬТР НИЗКИХ ЧАСТОТ

А. Ю. Зражевский, В. А. Коротков

ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Фрязинский филиал

Получена 21 марта 2013 г.

Аннотация. В работе рассмотрена возможность восстановления одномерных финитных сигналов, прошедших через фильтр низких частот. Показано, что возможно полное восстановление исходного сигнала при условии ограниченности длительности сигнала.

Ключевые слова: восстановление сигналов, фильтр низких частот, преобразование Фурье.

Abstract. The possibility of restoring of one-dimensional finite signals passed through the low pass filter is considered. It is shown an ability to recover the original signal provided that the signal is time limited.

Keywords: signal restoration, low-pass filter, Fourier transform.

Существуют методы, которые сводятся к восстановлению исходного сигнала по сигналу, прошедшему через идеальный фильтр низких частот (ФНЧ). В общем виде эта задача представляется неразрешимой. Однако, если входной сигнал ограничен по времени или пространству, то решение возможно [1-3]. В данной работе, в отличие от представленных ранее, рассматривается способ на основе получения ограниченного по частоте спектра из известного сигнала.

Пусть сигналы на выходе ФНЧ и на входе ФНЧ имеют вид:

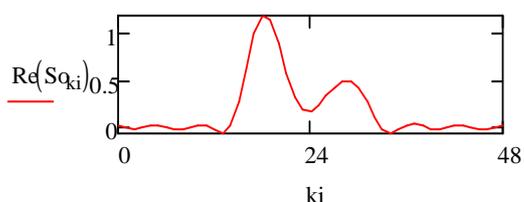


Рис.1.Сигнал на выходе ФНЧ.

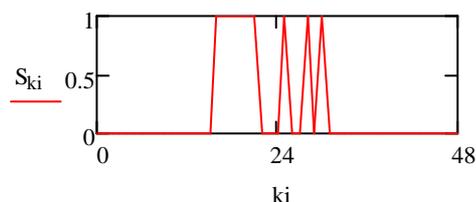


Рис.2.Сигнал на входе ФНЧ.

График на Рис.2 был получен из сигнала, который дополнили с обеих сторон нулями. Далее был рассчитан спектр этого сигнала, спектр ограничили и с помощью обратного преобразования Фурье получили график на Рис.1. Спектры выходного из ФНЧ и входного сигнала представлены на рисунках 3 и 4 соответственно.

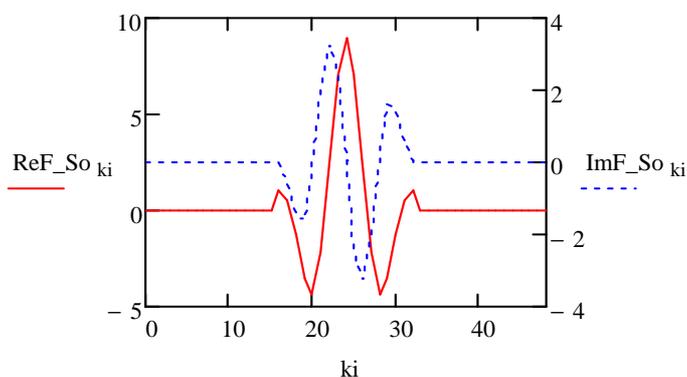


Рис.3.Спектр сигнал на выходе ФНЧ.

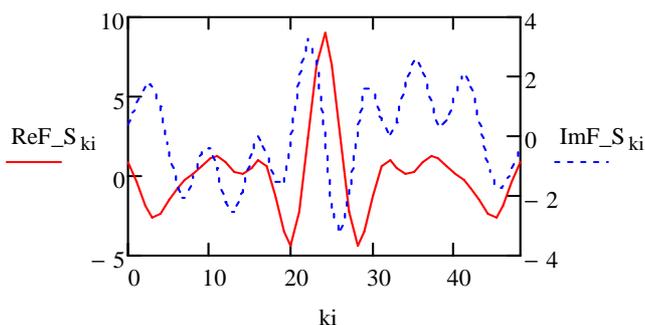


Рис.4.Спектр сигнал на входе ФНЧ.

Для расчета спектра сигнала на входе ФНЧ используем формулу:

$$F(k) = \sum_{j=-N/2}^{N/2} f(j) \exp(i2\pi jk / (N + 1)), \quad (1)$$

где $f(j)$ – входной сигнал, $F(k)$ – спектр «входного» сигнала, $N+1$ – количество отсчетов входного сигнала. Так как спектр выходного сигнала ограничен полосой пропускания ФНЧ, то k меняется от $-N_o/2$ до $N_o/2$ и $N_o \leq N$. В силу того, что нас интересует не весь входной сигнал, а только его ненулевая часть, можно пределы суммирования в (1) брать меньше. Выражение (1) можно представить в виде системы линейных уравнений или умножения матриц:

$$F = A * f . \quad (2)$$

Решение (2) относительно f – исходного сигнала наталкивается на некоторые трудности, связанные с комплексным характером матриц A и F и линейной зависимостью уравнений, связанную в первую очередь с симметрией A и F . Поэтому целесообразно разделить A , f и F на симметричные и антисимметричные части и решать полученные уравнения отдельно. Далее из симметричной и антисимметричной части построить полное решение. Поступая так, получим :

$$Ac_{k,j} = \cos(2\pi kj / (N + 1)), \quad As_{k,j} = \sin(2\pi kj / (N + 1)), \quad (3)$$

$$Fc_k = (F_k + F_{-k})/2, \quad Fs_k = (F_k - F_{-k})/2, \quad (4)$$

$$fc_j = (f_j + f_{-j})/2, \quad fs_j = (f_j - f_{-j})/2. \quad (5)$$

В дальнейшем учтем, что в (3)-(5) k меняется от 0 до $N_o/2$, а j меняется от 0 до ненулевого исходного сигнала, что в прочем не критично. Уравнения (2) теперь выглядят так:

$$Fc_k = Ac_{k,j} f_j, \quad Fs_k = As_{k,j} fs_j. \quad (6)$$

Решение переопределенных уравнений (6) проводим методом SVD [4]. Графики симметричной и антисимметричной частей F представлены на рис.5.

Полученное решение после суммирования симметричной и антисимметричной частей находится на рис.6.

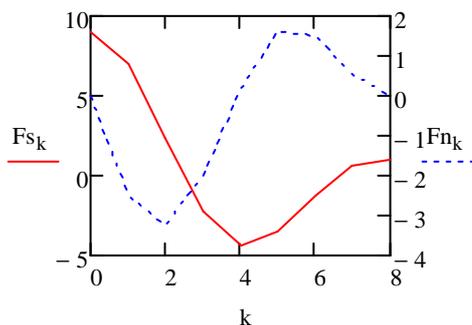


Рис.5. Части спектра на выходе ФНЧ.
(симметричная и антисимметричная части F соответственно красная и синяя линии)

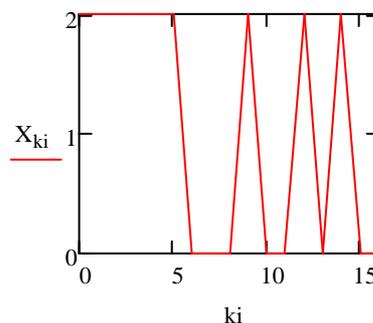


Рис.6. Полученное решение.

(без нулевых частей, ограничивающих сигнал справа и слева)

Сравнение Рис.6 и Рис.2. позволяет сделать вывод о полном восстановлении входного сигнала. Отметим, что ключевым моментом успешного восстановления сигнала является знание ограниченности входного сигнала по времени или пространству.

Литература

1. М.А.Броварова, С.Н.Хонина. Повышение разрешающей способности с помощью вытянутых сфероидальных волновых функций. Компьютерная оптика, 21, 53-57, 2001.
2. К.М.Ермохин. Технология построения разрезов методом аналитического продолжения геофизических полей. Геоинформатика, 2, 51-60, 2010.
3. Л.А.Айзенберг, Б.А.Кравцов. Вычислительный эксперимент по сверхразрешению физических приборов в экстраполяции спектра Фурье одномерных финитных сигналов. Письма в ЖТФ. 13. №9. 1987.
4. Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер - Машинные методы математических вычислений. «Мир». 1980.