УДК 681.3

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССА ПОИСКА И ОБНАРУЖЕНИЯ ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА

В. М. Артюшенко[1], В. И. Воловач[2]

[1]ГБОУ ВО МО «Технологический университет», г. Королев

[2]ФГБОУ ВО «Поволжский государственный университет сервиса», г. Тольятти

Статья поступила в редакцию 13 марта 2017 г.

Аннотация. Рассмотрены вопросы, связанные с вероятностью обнаружения объектов поиска при одновременном перемещении, как самого объекта, так и устройства обнаружения с изменяющимися скоростями по произвольным траекториям при непрерывном и дискретном обследовании пространства, включая их движение по криволинейным траекториям с ускорениями. Получены выражения, описывающие кинематику процесса поиска объекта; осуществлен анализ распределения кинематических характеристик объекта поиска. Получены выражения для определения их вероятностных характеристик, а также законов плотности распределения вероятностей мест нахождения объекта поиска. Показано, что потенциал обнаружения обладает свойством аддитивности, поэтому он может быть использован при расчете вероятности обнаружения объектов поиска, движущихся по ломаным траекториям, а также при расчете вероятности обнаружения объекта поиска несколькими устройствами обнаружения.

Ключевые слова: поиск объектов, вероятность обнаружения, устройство обнаружения, распределение дальности действия, кинематика поиска.

Abstract. The issues associated with probability of search objects detecting while moving both the object and the detection device with variable speeds on arbitrary trajectories with continuous and discrete examination of the space, including their motion along curved paths with acceleration are considered. The expressions describing the kinematics of the search object are obtained; the analysis of the distribution of the kinematics characteristics of the search object is done. The expressions for determination of probabilistic characteristics and laws of the density of probability distribution of locations of the search object are obtained. It is shown that the detection capability has the property of additivity, so it can be used in the calculation of the probability of detecting search objects, moving along the broken trajectories, and also when calculating the probability of detecting the search object by several detection devices.

Key words: search of objects, detection probability, detection device, distribution range, kinematics of the search.

1. Введение

Вопросы обнаружения движущихся объектов в условиях бурного развития беспилотных технологий представляют значительный интерес [1, 2], поскольку связаны с обеспечением безопасности промышленных предприятий, оборонных и энергетических объектов, транспортных узлов, различных мест массового скопления людей и др. Современные системы безопасности помимо традиционных функций (контроль доступа, видеонаблюдение, охрана периметра) должны включать в себя и меры «противовоздушного» характера – возможности обнаружения разнообразных беспилотных летательных аппаратов (дронов, квадрокоптеров, мультикоптеров и пр.).

Среди современных систем активного противодействия дронам выделяется применение противодронов (или дронов-перехватчиков) [3, 4]. Рассмотрим и проанализируем в пределах настоящей статьи в общем виде ряд вопросов, связанных с вероятностью обнаружения объектов поиска (ОП), в том числе и беспилотных летательных аппаратов, устройствами обнаружения (УО) (в качестве которых, как покажем в дальнейшем, могут выступать как стационарные устройства, так и движущиеся дроны-перехватчики).

2. Процесс поиска объекта. Вероятности обнаружения объекта поиска при дискретном и непрерывном обследовании

Известно [5, 6], что под поиском понимается процесс целенаправленного обследования определенной области пространства для обнаружения находящихся там объектов с помощью различных технических средств – радиолокационных, акустических, оптических и других. Под обнаружением понимается получение информации о месте нахождения ОП путем установления с ним прямого энергетического контакта [5, 7].

Поиск следует рассматривать как случайный процесс, ход которого зависит от ряда случайных факторов, поэтому исход поиска для каждого отдельного случая предсказать невозможно. Однако можно сделать обоснованное предположение о среднеожидаемом результате поиска. Для количественного описания процесса поиска используется аппарат теории вероятностей. Сам поиск представляется как случайный процесс марковского типа, в котором будущее состояние системы определяется ее настоящим состоянием и не зависит от ее состояния в прошлом [6].

При рассмотрении марковских случайных процессов с непрерывным временем и дискретными состояниями используется понятие «поток событий», представляющий собой последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени. Применительно к процессу поиска поток событий – это последовательность обнаружений объекта поиска наблюдателями. В теории поиска такой поток называют потоком обнаружений [7].

Принято считать, что поток обнаружений обладает такими свойствами как: отсутствием последействия, ординарностью и стационарностью [8]. Поток событий, обладающий всеми этими свойствами, называется стационарным пуассоновским, характеризующимся распределением Пуассона, или простейшим потоком [9]. Заметим, что поток событий, обладающий первыми двумя свойствами, но не являющийся стационарным, называется нестационарным пуассоновским потоком.

В теории поиска вероятность хотя бы одного обнаружения объекта за время поиска принято называть вероятностью обнаружения $P_{об}$, которая для стационарного и нестационарного пуассоновского потока определяется, соответственно, исходя из выражений:

$$P_{об} = 1 - \exp(-Q) = 1 - \exp(-\gamma t_п);$$

$$P_{об} = P_{об}(t) = 1 - \exp(-Q(t)) = 1 - \exp\left\{\int_{t_0}^{t_0+t_п} \gamma(t)\,dt\right\}, \qquad (1)$$

где Q – поисковый потенциал (потенциал обнаружения); γ – интенсивность потока обнаружений (или интенсивность поиска), то есть среднее число обнаружений в единицу времени; $t_п$ – время поиска; t_0 – начало отсчета времени поиска.

Если интенсивность потока обнаружений с течением времени остается постоянной $\gamma = \text{const}$ (стационарный пуассоновский поток), то поисковый потенциал равен

$$Q = \gamma t_п. \qquad (2)$$

Если интенсивность потока обнаружений с течением времени изменяется (нестационарный пуассоновский поток), то есть является переменной величиной, зависящей от времени $\gamma = \gamma(t)$, то

$$Q = Q(t) = \int_{t_0}^{t_0+t_п} \gamma(t)\,dt.$$

В зависимости от конструктивных особенностей УО и способов их использования, обследование пространства в процессе проведения поиска может быть непрерывным или дискретным во времени. Если наблюдение ведется с помощью УО ненаправленного действия, то его следует отнести к числу непрерывных. В тоже время, если УО направленного действия, например, радиолокаторы, используются для обследования пространства в пределах некоторого угла, значительно превышающего ширину диаграммы направленности этих устройств, то обследование следует рассматривать как дискретное. При этом промежутки времени, через которые производятся мгновенные акты наблюдения (обнаружения), зависят от величины обследуемого угла и угловой скорости обследования. Заметим, что иногда эти промежутки могут быть настолько малы, что обследование можно считать непрерывным.

При поиске важным критерием для оценки эффективности УО, в случае дискретного обследования, является элементарная вероятность g обнаружения ОП на данной дальности посредством одного мгновенного наблюдения. Если принять, что мгновенные наблюдения производятся при неизменных физических условиях и обнаружение объекта в каждом из них представляет собой независимое событие, то вероятность $P_{\text{об}}(n)$ обнаружения ОП хотя бы один раз при n мгновенных наблюдениях можно найти в соответствии с теоремой о повторении независимых опытов по формуле [6]:

$$P_{\text{об}}(n) = 1 - (1 - g)^n . \tag{3}$$

Из (3) видно, что если физические условия, в которых производится поиск, обеспечивают некоторую вероятность g обнаружения при одном мгновенном наблюдении, то, как бы она мала ни была, вероятность $P_{\text{об}}(n)$ может быть сколь угодно близка к единице при достаточно большом значении n. Следовательно, событие, заключающееся в обнаружении ОП, почти наверняка наступит.

Для того чтобы найти среднее значение (математическое ожидание) числа $M(n)$ мгновенных наблюдений, необходимых для обнаружения ОП, надо сначала найти вероятность $P_{\text{об}}(n)$ того, что обнаружение произойдет именно при n-м мгновенном наблюдении, а не раньше. Эта вероятность будет равна произведению вероятности того, что обнаружение не состоится при первых n–1 мгновенных наблюдениях, на вероятность того, что обнаружение будет иметь место именно при n–M мгновенном наблюдении, то есть

$$P_{\text{об}}(n) = 1 - (1 - g)^{n-1} g .$$

В [8] показано, что математическое ожидание числа мгновенных наблюдений $M(n)$ может быть найдено, если суммировать произведения $nP_{\text{об}}(n)$, а именно:

$$M\left(n\right)=\sum_{k=1}^{\infty}kP_{\text{об}}\ \ (n=k), \tag{4}$$

кроме того, дисперсия количества мгновенных наблюдений и среднеквадратическое отклонение в обсуждаемом случае, соответственно, равны:

$$D\left(n\right)=M\left(n^2\right)-\left[M\left(n\right)\right]^2=\left(1-g\right)/g^2\,;\sigma\left(n\right)=\sqrt{D\left(n\right)}=\sqrt{1-g}/g\,.$$

Если в процессе проведения поиска осуществляется непрерывное обследование, одним из важнейших критериев для оценки эффективности УО по обнаружению ОП является элементарная вероятность γdt обнаружения в течение времени dt. При этом величина γ является элементарной плотностью вероятности числа обнаружений, то есть интенсивностью потока обнаружений (интенсивность поиска) [6].

Если обследование производится непрерывно в течение времени t при неизменных физических условиях, то вероятность $P_{\text{об}}(t)$ обнаружения объекта за время $t_{\text{п}}$ в соответствии с (1) и (2) будет определяться по формуле [6]:

$$P_{\text{об}}\left(t\right)=1-\exp\left(-\gamma t_{\text{п}}\right),\ \gamma=\text{const}. \tag{5}$$

Анализ (5) показывает, что если имеется хотя бы малейшая вероятность обнаружения ОП в течение времени dt (т. е. если $\gamma > 0$), то вероятность обнаружения этого объекта может достигнуть при безграничном увеличении времени обследования значения, сколь угодно близкого к единице.

Чтобы вычислить математическое ожидание времени $\bar{t}_{\text{об}}$, требующегося для обнаружения ОП, необходимо найти выражение для плотности распределения времени как непрерывной случайной величины.

Так как уравнение (5) представляет собой функцию распределения случайного времени обнаружения ОП, то выражение для плотности распределения времени найдем, продифференцировав его по времени t

$$f\left(t\right)=\frac{dP_{\text{об}}\left(t\right)}{dt}=\gamma\exp\left(-\gamma t_{\text{п}}\right).$$

Используя общую формулу для математического ожидания и интегрируя по частям, найдем среднее значение времени

$$\overline{t}_{\text{об}} = \int_0^\infty t_\text{п} f\left(t\right) dt = \gamma^{-1}. \qquad (6)$$

Дисперсия и среднеквадратическое отклонение времени обнаружения будут определяться, соответственно:

$$D\left(t_\text{об}\right) = M\left(t_\text{об}^2\right) - \left[M\left(t_\text{об}\right)\right]^2 = \int_0^\infty t_\text{п}^2 \gamma \exp\left(-\gamma t_\text{п}\right) dt - \left(\gamma^{-1}\right)^2 = \gamma^{-2};$$

$$\sigma\left(t_\text{об}\right) = \sqrt{\gamma^{-2}} = \gamma^{-1} = \overline{t}_\text{об}.$$

Заметим, что формулу (3) можно привести к виду (5) и вероятность обнаружения ОП рассчитывать по единой формуле (1):

$$P_\text{об} = 1 - \exp\left(-Q\left(t\right)\right).$$

Потенциал обнаружения в этом случае характеризует накопление вероятности обнаружения с течением времени.

В зависимости от способа обследования он может быть равен:

– при дискретном обследовании пространства

$$Q\left(t_\text{п}\right) = -n\ln\left(1-g\right);$$

– при непрерывном обследовании

$$Q\left(t_\text{п}\right) = \gamma t.$$

Из (4) и (6) следует, что элементарная вероятность g при дискретном обследовании и мгновенная плотность вероятности γ при непрерывном обследовании связаны между собой простейшими зависимостями. А, именно, со средним количеством мгновенных наблюдений $M(n)$ и средним временем обследования $\overline{t}_\text{об}$, необходимым для обнаружения того или иного ОП при данных физических условиях. Следовательно, данные формулы могут служить основой при разработке методик по проведению испытаний новых образцов УО и определению численных значений g и γ как новых, так и существующих устройств [7]. В свою очередь, наличие численных значений g и γ позволяет производить сравнительную количественную оценку эффективности УО по обнаружению различных ОП.

Необходимо отметить, что вероятности g и γdt, рассмотренные выше, справедливы лишь для случая оценки эффективности ОП, когда расстояние r между УО (наблюдатель) и объектом в процессе проведения поиска остается неизменным. Другими словами, когда устройство обнаружения и ОП неподвижны или когда вектор скорости УО $V_н$ равен вектору скорости объекта $V_о$.

На практике, как правило, расстояние r между УО и ОП не является постоянной величиной, и элементарные вероятности обнаружения изменяются во времени.

Обозначим меняющиеся значения элементарных вероятностей через g_i и $\gamma_t dt$, где g_i – элементарная вероятность обнаружения ОП для i-го мгновенного наблюдения, а γ_t – плотность вероятности обнаружения ОП, меняющаяся со временем.

В этом случае формулы для расчета вероятности обнаружения будут иметь вид:

– при дискретном обследовании пространства

$$P_{об} = 1-(1-g_1)(1-g_2)(1-g_3)\ldots(1-g_i)\ldots(1-g_n) = \Pi_{i=1}^{n}(1-g_i); \qquad (7)$$

– при непрерывном обследовании

$$P_{об} = 1-\exp\left(-\int_0^t \gamma_t dt\right). \qquad (8)$$

Заметим, что аналитические выражения для расчета элементарных вероятностей обнаружения ОП могут быть найдены, если известен закон распределения дальности действия $f(R)$ УО, например [10].

Если предположить, что опыты по определению $f(R)$ проводятся в условиях постоянства факторов, определяющих закономерности изменения дальности действия (основные факторы), то элементарную вероятность обнаружения g_i и плотность вероятности обнаружения γ_t можно считать зависящими только от расстояния r между наблюдателем и объектом поиска, то есть

$$g_i = g_i(r);\ \gamma_t = \gamma_t(r). \tag{9}$$

3. Распределение дальности действия устройств обнаружения при поиске

Случайный характер процесса поиска ОП в значительной мере объясняется тем, что основная характеристика УО – дальность обнаружения – подвержена влиянию многочисленных факторов, например [5, 7, 11], таких как:

1. Факторы, определяемые характером ОП; например, тип объекта, его шумовой эффект, отражательная способность, скорость движения и т. д. Для учета влияния названных факторов на дальность обнаружения ОП приходится основываться на экспериментальных данных;

2. Условия, определяемые реальной средой, в которой происходит обнаружение, в первую очередь – метеорологических условий;

3. Тактико-технические параметры УО, режимы работы, уровень помех и т.д.

В реальных условиях все эти факторы подвержены непрерывным и случайным изменениям, поэтому и сама дальность обнаружения является случайной величиной, принимающей при неизменных условиях наблюдения различные значения. Несмотря на это теоретические и экспериментальные исследования УО и условий наблюдения позволяют указать вероятность того, что в данных условиях ОП может быть обнаружен на дальностях, не меньших некоего заданного значения.

Анализ закона распределения дальности обнаружения УО позволяет сделать следующие выводы:

1. Дальность обнаружения практически никогда не превышает некоторого максимального значения $R_{\text{об.max}}$, соответствующего наиболее благоприятному сочетанию физических условий наблюдения. Обнаружение ОП на дальностях превышающих максимальную, имеет ничтожно малую вероятность;

2. Для всех расстояний, меньших некоторой величины $R_{\text{об.min}}$, называемой минимальной дальностью обнаружения, значения вероятности обнаружения ОП

близки к единице. Зона, ограниченная расстоянием $R_{\text{об.min}}$ от наблюдателя, называется зоной достоверного обнаружения.

Заметим, что область ограниченную максимальной дальностью обнаружения, принято называть зоной вероятного обнаружения. Как правило, она представляет собой круг или сектор, причем в пределах этой зоны обнаружение ОП может произойти, а может и не произойти.

Закон распределения дальности обнаружения наиболее полно характеризует УО и условия обнаружения. Однако пользоваться им в расчетах поиска из-за сложности вычислений не всегда бывает удобно. Поэтому часто вводят так называемое понятие средней (эффективной) дальности обнаружения $R_{\text{об.эф}}$ – математического ожидания дальности обнаружения при данных условиях наблюдения.

Как правило, закон распределения дальности действия и его числовые характеристики находят с помощью проведения испытаний, используя методы математической статистики.

Зная закон распределения дальности действия УО $f(R)$ и его числовые характеристики, можно определить вероятность $P_{\text{об.}r}$ обнаружения ОП на дальности, не менее заданной дальности r. Проинтегрировав функцию $f(R)$ в пределах от r до $+\infty$, запишем $P_{\text{об.}r} = \int_r^{\infty} f\left(R_{\text{об}}\right) dR_{\text{об}}$.

Более подробно названные законы и связанные с ними вероятностные характеристики обнаружения ОП были рассмотрены авторами в ряде предыдущих работ [10 и др.].

4. Кинематика поиска обнаруживаемого объекта

Понятие «поиск», наряду со свойствами, изложенными выше, подразумевает, что местоположение объектов поиска и их элементы движения в каждый момент времени в общем случае неизвестны. Поэтому величины, характеризующие положение и движение ОП относительно УО, следует рассматривать как случайные и независимые друг от друга; при этом каждая из указанных величин характеризуется своим законом распределения [9]. В связи с этим особенное значение приобретает закономерность взаимного перемещения УО и ОП, получившее название кинематики поиска [9, 10].

В процессе поиска применение УО может сочетаться с активным маневром носителя этого устройства. Таким устройством может являться дрон-перехватчик, способный автоматически наводиться, например, по шуму двигателей преследуемого беспилотного летательного аппарата или по изображению последнего в системе «компьютерного зрения» перехватчика.

Положение ОП относительно УО и их скорости могут быть охарактеризованы плотностью распределения вероятности (ПРВ) определенных кинематических характеристик. Так, если в качестве кинематических характеристик ОП заданы такие величины, как $V_{\text{о}}$ – скорость ОП; ξ – угол разности курсов УО и ОП; r – расстояние ОУ–ОП; $q_{\text{н}}$ – курсовой угол УО на ОП (угол между курсом УО и направлением от него на ОП), то вероятность того, что объект будет иметь скорость, заключенную между $V_{\text{о}}$ и $V_{\text{о}} + dV_{\text{о}}$, угол разности курсов между ξ и $\xi + d\xi$, расстояние УО–ОП между r и $r + dr$ и курсовой угол между $q_{\text{н}}$ и $q_{\text{н}} + dq_{\text{н}}$, можно представить в виде:

$$P\left(V_{\text{о}}, \xi, r, q_{\text{н}}\right) dV_{\text{о}} d\xi dr dq_{\text{н}}. \tag{10}$$

Если надо определить вероятность распределения кинематических характеристик в некотором диапазоне, то выражение (10) следует проинтегрировать по всем переменным в заданных пределах.

Как правило, поиск организуют, чтобы обнаружить объекты определенного класса, скорость которых $V_{\text{о}}$ лежит в заданных пределах, вследствие чего ее считают известной. При этом на практике наиболее часто встречаются равномерное и нормальное распределение вероятных мест нахождения ОП [12, 13].

Равномерное распределение вероятных мест нахождения ОП. Довольно часто возникают ситуации, когда достоверно известна площадь действия ОП $S_{\text{р}}$; при этом место и направление его движения неизвестны. Кроме того, ни одному возможному его курсу или местоположению предпочтение отдать не возможно. В этом случае наиболее целесообразно принять гипотезу о равномерном распределении местоположения ОП в районе площади $S_р$ и равномерном распределении его движения в пределах от 0 до 2π.

Аналитическое выражение для плотности вероятности можно найти, исходя из следующего [8]: 1. Так как движение возможно в любом направлении, то вероятность того, что разность курсов ξ будет находиться в пределах от ξ до $\xi + d\xi$, равна $d\xi/2\pi$; 2. Так как нахождение ОП возможно в любой точке площади $S_р$, то вероятность того, что он находится в элементарной площади $rdrdq_н$, будет равна $rdrdq_н/S_р$; 3. События «разности курсов» ξ находится в пределах от ξ до $\xi + d\xi$ и «ОП находится в пределах элементарной площади $rdrdq_н$» считаются независимыми.

Исходя из указанного, на основании теоремы об умножении вероятностей, получаем: вероятность того, что разность курсов ξ находится в пределах от ξ до $\xi + d\xi$ и что ОП находится на элементарной площади $rdrdq_н$, равна

$$P(\xi, r, q_н)\, d\xi dr dq_н = rdrdq_н d\xi / S_р .$$

Следовательно, при принятой гипотезе о движении ОП и его местоположении относительно УО, выражение для средней относительной плотности вероятности $P(\xi, r, q_н)$ запишется:

$$P(\xi, r, q_н) = r / 2\pi S_р .$$

Если скорость движения ОП известна, то можно определить вероятность того, что разность курсов заключена между ξ_1 и ξ_2, расстояние – между r_1 и r_2 и курсовой угол – между $q_{н1}$ и $q_{н2}$, при условии, что $\xi_1 < \xi_2$, $r_1 < r_2$, $q_{н1} < q_{н2}$:

$$P(\xi_1 \le \xi \le \xi_2; r_1 \le r \le r_2; q_{н1} \le q_н \le q_{н2}) = \frac{1}{2\pi S_р} \int_{\xi_1}^{\xi_1} \int_{r_1}^{r_2} \int_{q_{н1}}^{q_{н2}} rdrdq_н d\xi .$$

Нормальное распределение вероятных мест нахождения ОП. Такое распределение соответствует случаю, когда поисковые действия организуются на основе данных о местоположении ОП на определенный момент времени, после которого поступление данных по тем или иным причинам прекратилось. Рассмотрим и проанализируем данную задачу несколько подробнее.

Пусть в определенный момент времени обнаружен некий ОП (рис. 1).

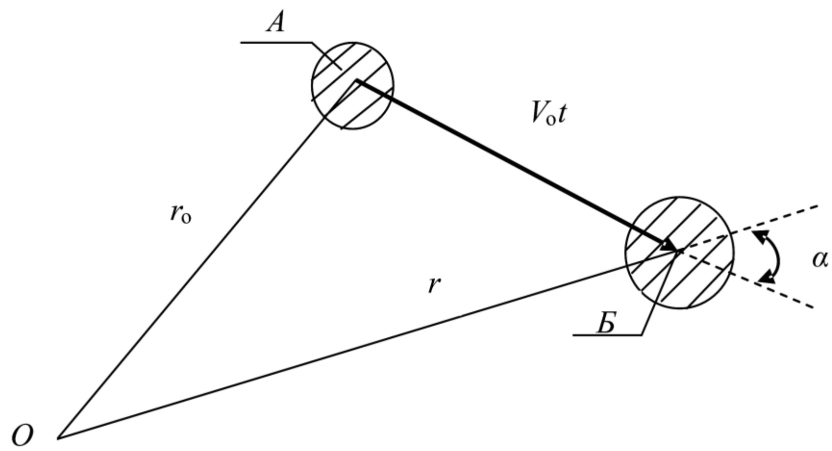

Рис. 1. Геометрическое пояснение распределения вероятностных мест нахождения ОП после его первоначального обнаружения

Предположим, что место нахождения ОП было получено с некоторой ошибкой (погрешностью). Центр распределения вероятных мест нахождения ОП будет находиться в точке O. Одно из возможных случайных положений ОП в момент обнаружения – точка A, находящаяся от центра распределения на расстоянии r_o. Сразу после обнаружения ОП контакт с ним по каким-либо причинам был потерян. Требуется организовать поисковые действия с помощью УО для повторного обнаружения ОП, используя для этого данные о месте первоначального обнаружения последнего.

В этой связи необходимо найти закон изменения плотности вероятности нахождения ОП в различных точках окрестности его первоначального обнаружения.

Предполагается также, что ОП уходит из места его первоначального обнаружения с постоянной скоростью $V_{\text{о}}$. При этом курсы его равномерно распределены пределах от 0 до 360° (2π).

С приемлемой для практических задач точностью можно считать, что ошибки в определении места первоначального обнаружения ОП подчиняются нормальному круговому закону на плоскости, плотность распределения которого выражается как [14]

$$f\left(r_{\text{о}}\right)=\frac{1}{2\pi\sigma^{2}}\exp\left\{-\frac{r_{\text{о}}^{2}}{2\sigma^{2}}\right\}, \tag{11}$$

где σ – среднеквадратическая ошибка места нахождения ОП, зависящая от точности знания места наблюдателем и точности определения координат ОП относительно УО.

Через промежуток времени t после момента первоначального обнаружения ОП удалится от места обнаружения на расстояние $V_{\text{о}}t$. Предположим, что он окажется в случайной точке *Б* на расстоянии r от центра распределения *О*.

Рассмотрим сначала случай, когда курс ОП составляет с направлением от центра распределения на новое место ОП угол в пределах между α и α + dα. При этом ОП через время t будет находиться в пределах некоторой площади $dБ$.

Плотность вероятности события «ОП находится в площади $dБ$» является произведением плотностей вероятностей двух независимых событий:

– ОП поиска имеет данный курс, составляющий с направлением *ОБ* угол между α и α + dα. Плотность вероятности этого события по условию задачи равна $d\alpha/2\pi$;

– ОП в момент первоначального обнаружения находился в точке *А* на расстоянии от точки *Б*, равном $V_{\text{о}}t$, в направлении, обратном курсу ОП. Плотность вероятности этого события соответствует выражению (11).

Подставив вместо $r_о$ его значение (см. рис. 1), $r_о^2 = r^2 + V_о^2 t^2 - 2rV_о t\cos\alpha$, получим

$$f(r_о) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{r^2 + V_о^2 t^2 - 2rV_о t\cos\alpha}{2\sigma^2}\right\}.$$

Следовательно, плотность вероятности события «ОП находится в площади $dБ$» равна

$$\frac{d\alpha}{2\pi}\times\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{r^2 + V_о^2 t^2 - 2rV_о t\cos\alpha}{2\sigma^2}\right\}. \quad (12)$$

Для получения искомого закона распределения плотности вероятности того, что ОП через время t будет находиться на расстоянии r от центра распределения $f(r, t)$, проинтегрируем полученное произведение (12) по всем возможным значениям угла α от 0 до 2π:

$$\begin{aligned} f(r,t) &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{r^2 + V_о^2 t^2 - 2rV_о t\cos\alpha}{2\sigma^2}\right\}d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{r^2 + V_о^2 t^2}{2\sigma^2}\right\}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{rV_о t\cos\alpha}{\sigma^2}\right\}d\alpha. \end{aligned} \quad (13)$$

После ряда преобразований, с учетом того, что интеграл (13) через элементарные функции записан быть не может, выразим его через функцию Бесселя I_0 1-го рода нулевого порядка от мнимого аргумента [15]:

$$f(r,t) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{r^2 + V_о^2 t^2}{2\sigma^2}\right\}I_о\left(\frac{rV_о t}{\sigma^2}\right). \quad (14)$$

На рис. 2 приведены кривые ПРВ, построенные в соответствии с (14).

Здесь по оси абсцисс отложена величина r, выраженная для наглядности и удобства расчета в долях среднеквадратического отклонения σ.

Кривые плотности распределения вероятности даны для фиксированных промежутков времени t_k после первоначального обнаружения ОП. Эти промежутки определяются из отношения $t_k = k\sigma/V_о$, где k – любое положительное число.

Кривые на рис. 2 отображают дифференциальный закон распределения вероятных мест нахождения ОП после первичного его обнаружения.

Таким образом, можно сказать, что выражение (14) описывает неравномерное распределение вероятных мест нахождения ОП для случая, когда курсы объекта равновероятны в пределах от 0 до 360° (2π), а его скорость точно известна и в процессе поиска не изменяется.

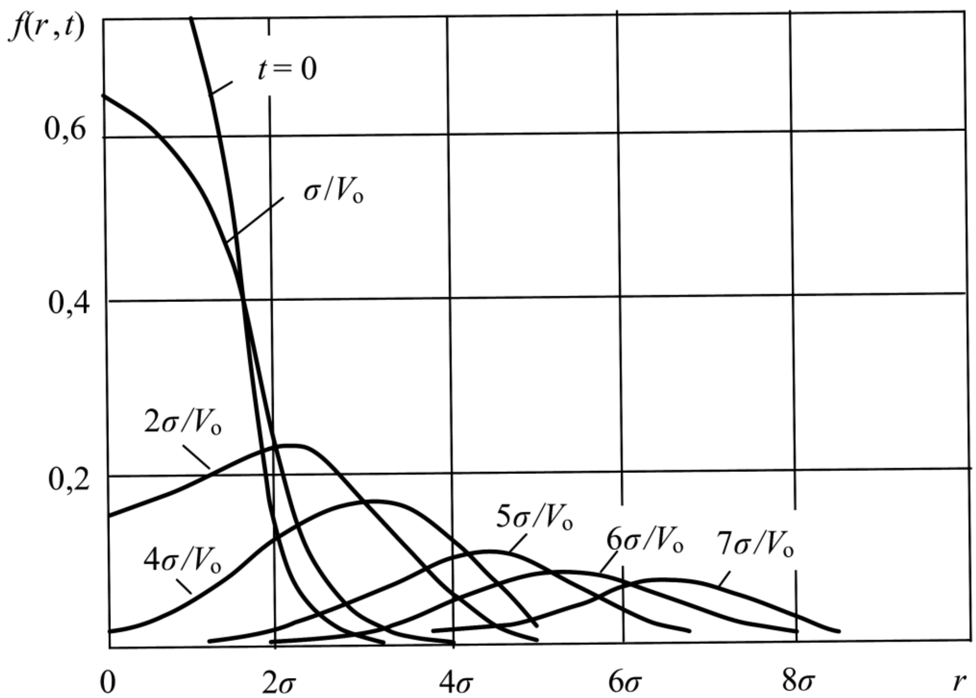

Рис. 2. Кривые ПРВ мест нахождения ОП после его обнаружения

Равномерное распределение вероятных мест нахождения ОП в заданном секторе. На практике часто возникают случаи, когда курсы ОП не равновероятны в пределах от 0 до 360° (2π), а распределены равномерно в секторе (K_2 – K_1). В этом случае выражение для плотности распределения вероятных мест нахождения ОП будет иметь следующий вид:

$$f(r,t)=\frac{1}{2(K_2-K_1)}\exp\left\{-\frac{r^2+V_o^2t^2}{2\sigma^2}\right\}\frac{1}{\pi}\int_{K_1}^{K_2}\exp\left\{-\frac{i^2rV_ot\cos\alpha}{\sigma^2}\right\}d\alpha=$$
$$=\frac{1}{2(K_2-K_1)}\exp\left\{-\frac{r^2+V_o^2t^2}{2\sigma^2}\right\}Z_0\left(\frac{rV_ot}{\sigma^2}\right), \quad (15)$$

где $Z_0 = C_1I_0 + C_2N_0$; N_0 – функция Бесселя 2-го рода нулевого порядка от мнимого аргумента; C_1 и C_2 – постоянные, зависящие от пределов интегрирования K_1 и K_2.

Как правило, на практике скорость движения ОП не является постоянной и точно известной величиной [12, 16]. Поэтому рассмотрим, как изменится выражение (15), если скорость ОП будем считать не как постоянную безошибочную величину, а как величину случайную, подчиненную определенному закону распределения. При этом возможно два варианта учета скорости ОП.

Первый вариант – когда считается, что с известной точностью мы располагаем сведениями о возможной скорости ОП. В этом случае распределение скорости ОП принимается соответствующим релеевскому закону, плотность распределения которого описывается выражением

$$f(V_o)=\frac{V_o}{\sigma_{V_o}^2}\exp\left\{-\frac{V_o^2}{\sigma_{V_o}^2}\right\},$$

где $\sigma_{V_o}^2$ – среднеквадратическая ошибка в определении скорости ОП.

Зная, что закон Релея описывает распределение длины случайного вектора, проекции которого на координатные оси подчиняются нормальному закону, можно считать, что ошибка в определении вектора скорости ОП является случайной величиной, подчиняющейся нормальному круговому закону.

Второй вариант – когда считается, что мы не располагаем определенными данными о скорости ОП, при этом скорость ОП может быть равновероятной в пределах всего диапазона возможных скоростей ОП от 0 до V_{max}. В этом случае при рассмотрении плотности распределения величины скорости ОП целесообразно принять закон равной вероятности. При этом дифференциальный закон распределения для скорости будет иметь вид:

$$f\left(V_{\text{о}}\right)=\begin{cases} V_{\text{о.max}}, & \text{если } 0 < V_{\text{о}} < V_{\text{о.max}}; \\ 0, & \text{вне этого промежутка.} \end{cases}$$

Математическое ожидание скорости будет равно $V_{\text{о.ср}} = V_{\text{о.max}}/2$, а среднеквадратическая ошибка в ее определении – $\sigma^2_{V\text{о}} = V_{\text{о.max}}/2\sqrt{3} \approx 0{,}3V_{\text{о.max}}$.

Используя подходы, изложенные в [6], а также результаты [13], основанные на определении траектории движения УО и ОП путем перехода к относительному движению и полярной системе координат, можно получить для некоторой прямоугольной системы координат искомое уравнение траектории движения ОП:

$$\begin{cases} x = V_{\rho}\left(t - T_{\text{о}}\right); \\ y = 0, \end{cases}$$

где x – направление относительного курса ОП; y – направление относительного траверза, т. е. наименьшего расстояния между линией относительного курса ОП и УО; V_{ρ} – относительная скорость движения ОП [13]; $T_{\text{о}}$ – момент максимального сближения ОП и УО.

При этом начало координат названной системы будет расположено в точке наибольшего сближения в момент относительного траверза $T_{\text{о}}$.

Курсовой угол на ОП $q_{\text{н.о}}$ и расстояние между УО и ОП r_0 будут определяться, соответственно, как

$$q_{\text{н.о}} = \operatorname{arctg}\left(x/y\right);\ r_0^2 = x^2 + y^2.$$

5. Движение устройства обнаружения и объекта поиска по криволинейным траекториям с ускорениями

Рассмотрим и проанализируем общий случай, когда УО и ОП движутся по сложной траектории с ускорениями (переменными скоростями). Определим вероятность обнаружения ОП при непрерывном и дискретном обследовании.

Так как, в нашем случае, УО и ОП движутся по сложной траектории с переменными скоростями, то непрерывное изменение их относительного положения приводит к изменению элементарных вероятностей обнаружения. Найдем выражения для элементарных вероятностей g_t и $\gamma_t dt$ на произвольно взятый момент времени t и для расчета вероятности обнаружения ОП за любой отрезок времени, находящийся в пределах $t_{\text{н.отр}} \le t \le t_{\text{к.отр}}$, где $t_{\text{н.отр}}$ и $t_{\text{к.отр}}$, соответственно, начало и конец отрезка времени наблюдения.

Зададимся прямоугольной системой координат ξ, η (рис. 3) с началом в точке нахождения УО и вычертим относительную траекторию движения ОП S [6].

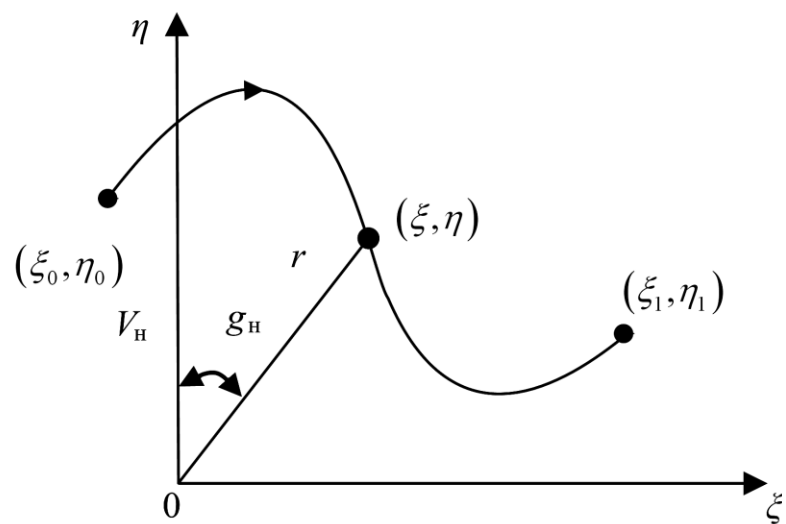

Рис. 3. Относительная траектория ОП в прямоугольной системе координат

Предположим, что нам заданы координаты ОП и функции времени, т. е. известны уравнения его относительного движения: $\xi = \xi(t)$; $\eta = \eta(t)$.

Так как $r = \sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}$, то уравнения (15) можно представить в виде:

$$g = g\left[\sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}\right] = g_i; \tag{16}$$

$$\gamma(r)dt = \gamma\left[\sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}\right]dt = \gamma_t dt. \tag{17}$$

Полученные равенства (16) и (1) являются искомыми аналитическими выражениями, позволяющими при знании траектории относительного движения ОП рассчитать элементарные вероятности обнаружения его на произвольный момент времени *t*.

Воспользовавшись уравнениями (7) и (8) найдем выражения для расчета вероятности обнаружения ОП на отрезке траектории между точками с координатами (ξ_0, η_0) и(ξ_1, η_1):

– при дискретном обследовании пространства

$$P_{\text{об}}(S) = 1 - \Pi_{i=1}^{n}\left\{1 - g\left[\sqrt{\xi^2(t_i) + \eta^2(t_i)}\right]\right\}; \tag{18}$$

– при непрерывном обследовании

$$P_{\text{об}}(S) = 1 - \exp\left\{-\int_{t_{\text{н.отр}}}^{t_n} \gamma\left[\sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}\right]dt\right\}. \tag{19}$$

В уравнении (19) t_i – момент *i*-го мгновенного наблюдения, а *n* – количество мгновенных наблюдений за время от момента $t_{\text{н.отр}}$ до момента $t_{\text{к.отр}}$, причем $t_{\text{н.отр}} \le t_1 \le t_2, \ldots, t_i, \ldots, < t_n \le t_{\text{к.отр}}$.

На основании ранее оговоренных условий (1), представим выражения (18) и (19) в виде равенства

$$P_{\text{об}}(S) = 1 - \exp\{-F(S)\}, \tag{20}$$

где для дискретного обследования $F(S) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left\{1 - g\left[\sqrt{\xi^2(t_i) + \eta^2(t_i)}\right]\right\}$, а для непрерывного $F(S) = \int_{t_{\text{н.отр}}}^{t_n} \gamma\left[\sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}\right]dt$.

Так как $ds = V_\rho dt$, то выражение для $F(S)$ можно представить в виде криволинейного интеграла по траектории *S*, то есть

$$F(S) = \int_S \frac{\gamma(r)\,ds}{V_\rho}.$$

Потенциал обнаружения $F(S)$ обладает свойством аддитивности, которое в данном случае означает, что если S_1 и S_2 – две траектории и $S = S_1 + S_2$ – их комбинация или сумма, а $P_{об}(S) = P_{об}(S_1 + S_2)$ является вероятностью обнаружения ОП хотя бы на одной из этих траекторий, то $P_{об}(S)$ можно рассчитать по формуле (9), причем

$$F(S_1 + S_2) = F(S_1) + F(S_2). \tag{21}$$

Чтобы подсчитать вероятность обнаружения ОП на траектории S_1 или S_2 можно воспользоваться формулой сложения вероятностей для совместных событий [7]:

$$P_{об}(S) = 1 - \left[1 - P_{об}(S_1)\right]\left[1 - P_{об}(S_2)\right]. \tag{22}$$

Так как

$$P_{об}(S_1) = 1 - \exp\left\{-F(S_1)\right\}; \tag{23}$$

$$P_{об}(S_2) = 1 - \exp\left\{-F(S_2)\right\}, \tag{24}$$

то после подстановки (23) и (24) в равенство (22) получим

$$P_{об}(S) = 1 - \exp\left\{-F(S_1)\right\}\exp\left\{-F(S_2)\right\}. \tag{25}$$

Полученный результат свидетельствует о справедливости формулы (21).

Заметим, что свойство аддитивности потенциала обнаружения применимо к любому числу траекторий. Поэтому оно может быть использовано при расчете вероятности обнаружения ОП, движущегося по ломанной траектории, а также при расчете вероятности обнаружения ОП несколькими УО, относительно которых ОП движется соответственно по траекториям S_1, S_2, …, S_i, …, $S_{N.}$

Заметим, что на практике часто траектория ОП является прямолинейной, а относительная скорость V_ρ – постоянной. В этом случае, наиболее целесообразно проводить расчеты с помощью прямоугольной системы координат x и y, где x является травезным расстоянием, а за ось y принимается прямая, совпадающая с линией относительного перемещения ОП.

В данной системе координат уравнение движения ОП можно представить в виде: $x = \text{const}$; $y = V_\rho t$, где t измеряется от момента наибольшего сближения ОП с УО, а за положительное направление оси y принимается положительное направление вектора относительной скорости V_ρ.

Для равномерного и прямолинейного движения УО и ОП поиска потенциал обнаружения можно определить по формулам:

– при дискретном обследовании пространства

$$F(S) = -\sum_{i=1}^{n} \ln\left[1 - g\left(\sqrt{x^2 + V_\rho^2 t_i^2}\right)\right] = -\sum_{i=1}^{n} \ln\left[1 - g\left(\sqrt{x^2 + y_i^2}\right)\right]; \qquad (26)$$

– при непрерывном обследовании

$$F(S) = \int_{t}^{t_n} \gamma\left[\sqrt{x^2 + V_\text{н}^2 t^2}\right] dt = \frac{1}{V_\rho} \int_{y_\text{н.тр}}^{y_\text{к.тр}} \gamma\left[\sqrt{x^2 + y^2}\right] dy. \qquad (27)$$

В формулах (26) и (27) y_i – расстояние от ОП до точки максимального сближения с УО в момент – *i-т*мгновенного наблюдения; $y_\text{н.тр}, x_\text{н.тр} = x$, $y_\text{к.тр}$, $x_\text{к.тр} = x$ – крайние точки (начало и конец) траектории S.

Как видно из выражений (25)–(27), вероятность $P_\text{об}(x)$ обнаружения ОП является функцией траверзного расстояния x.

6. Заключение

Таким образом, рассмотрены и проанализированы вероятностные характеристики процесса поиска и обнаружения объекта поиска в непрерывном и дискретном времени наблюдения. Показано, что элементарная вероятность обнаружения при дискретном обследовании и мгновенная плотность вероятности при непрерывном связаны между собой простейшими зависимостями, определяющими среднее количество мгновенных наблюдений и среднее время обследования, необходимые для обнаружения того или иного объекта при данных физических условиях обнаружения. Показано, что определяющие их выражения могут служить основой при разработке методик по проведению испытаний новых образцов устройств обнаружения, а так же производить сравнительную количественную оценку их эффективности.

Осуществлен анализ распределения кинематических характеристик объекта поиска, представлены аналитические выражения для определения их плотности вероятности. Рассмотрены и проанализированы наиболее часто встречающиеся на практике случаи равномерного и нормального распределения вероятных мест нахождения объекта поиска.

Получены выражения для расчета вероятности обнаружения при взаимном перемещении устройства обнаружения и объекта поиска по криволинейным траекториям с изменяющимися скоростями при непрерывном и дискретном обследовании. Показано, что потенциал обнаружения обладает свойством аддитивности, поэтому он может быть использован при расчете вероятности обнаружения объекта поиска, движущегося по ломанной траектории, а также при расчете вероятности обнаружения объекта поиска несколькими устройствами обнаружения, относительно каждого из которых обнаруживаемый объект движется по своей траектории.

Литература

1. Беспилотные летательные аппараты. URL: http://bp-la.ru/uvs-tech-2009/
2. Демуренко К.А. Дроны – новая угроза с высоты // Алгоритм безопасности. 2016, № 2. С. 48-50.
3. Бойко А. Системы обнаружения и противодействия беспилотникам. URL: http://robotrends.ru/robopedia/obnaruzhenie-i-protivodyaystvie-bespilotnikam
4. Годунов А.И., Шишов С.В., Юрков Н.К. Комплекс обнаружения и борьбы с малогабаритными беспилотными летательными аппаратами // Надежность и качество сложных систем. 2014, № 2(6). С. 62-70.
5. Финкельштейн М. И. Основы радиолокации. М.: Радио и связь, 1983. 536 с
6. Абчук В.А., Суздаль В.Г. Поиск объектов. М.: Сов. радио, 1977. 336 с.

7. Радиолокационные устройства / Под ред. В.В. Григорина-Рябова. М.: Сов. радио, 1970. 680 с.
8. Воловач В.И., Артюшенко В.М. Вероятностные характеристики процесса поиска и обнаружения протяженного объекта в непрерывном и дискретном времени наблюдения // Успехи современной радиоэлектроники. 2016, № 12. С. 58-67.
9. Левин Б.Р. Теоретические основы статической радиотехники / 3-е изд., пераб. и доп. М.: Сов. радио, 1989. 656 с.
10. В.М. Артюшенко, В.И. Воловач. Законы распределения дальности обнаружения протяженных объектов радиотехническими устройствами ближнего действия // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2015, № 1. URL: http://jre.cplire.ru/jre/jan15/11/text.html
11. Артюшенко В.М., Воловач В.И. Оценка погрешности измерения параметров движения протяженных объектов в условиях изменяющейся дальности // Известия высших учебных заведений. Радиотехника. 2015, Т. 58, № 1(631). С. 26-37.
12. Артюшенко В.М., Воловач В.И. Вероятность обнаружения объекта устройством наблюдения при их взаимном перемещении относительно друг друга // X Всероссийская конференция «Радиолокация и радиосвязь». Сборник трудов. – Москва, ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. – 21-23 ноября 2016 г. С. 137-141.
13. Артюшенко В.М., Воловач В.И. Вероятность обнаружения при взаимном перемещении устройств наблюдения и объекта поиска по криволинейным траекториям с изменяющимися скоростями // Двойные технологии. 2016, № 4(77). С. 49-54.
14. Дубровин К.О., Ситротин П.А. Время пребывания цели в районе поиска // Морской сборник. 1965, № 6.
15. Бронштейн И.Н., Семендиев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1967. 720 с.

16. Артюшенко В.М., Воловач В.И. Оценка погрешности измерения скорости движения в условиях изменяющейся дальности до лоцируемого объекта // Радиотехника. 2016, № 6. С. 118-123.

Ссылка на статью:

В. М. Артюшенко, В. И. Воловач. Кинематические и вероятностные характеристики процесса поиска и обнаружения движущегося объекта. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2017. №3. Режим доступа: http://jre.cplire.ru/jre/mar17/10/text.pdf