

## СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРЕЦЕССИИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ НАМАГНИЧЕННОСТИ В НОРМАЛЬНО НАМАГНИЧЕННОЙ ФЕРРИТОВОЙ ПЛАСТИНЕ

В. С. Власов<sup>1</sup>, В. Г. Шавров<sup>2</sup>, В. И. Щеглов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина,  
167001, Сыктывкар, Октябрьский пр-т, 55

<sup>2</sup> Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН,  
125009, Москва, ул. Моховая, 11-7

Статья поступила в редакцию 9 марта 2021 г.

**Аннотация.** Работа в целом посвящена исследованию спектральных характеристик прецессии положения равновесия намагниченности. Геометрия задачи представляет собой нормально намагниченную ферритовую пластину. В этом случае параметрическое возбуждение обменных спиновых волн исключается и угол раскрытия прецессии может принимать значения до нескольких десятков градусов. Отмечено, что в условиях ориентационного перехода приложение переменного поля круговой поляризации в плоскости пластины приводит к прецессии положения равновесия намагниченности. При этом вектор намагниченности участвует в двух движениях прецессионного характера – одно по большому кругу, радиус которого определяется углом отклонения намагниченности от поля в равновесном состоянии и другое – по малому кругу, радиус которого определяется углом отклонения намагниченности от равновесного положения, прецессирующего по большому кругу. Получающийся в результате прецессионный портрет представляет собой большое кольцо, заполненное по образующей малыми кольцами. Записано выражение для плотности энергии, представляющей собой сумму взаимодействия намагниченности с постоянным и переменным полями, а также с полем размагничивания. На основе уравнения Ландау-Лифшица записаны нелинейные уравнения движения для трех компонент намагниченности. Путем

численного решения этой системы уравнений методом Рунге-Кутта получены развертки колебаний намагниченности по времени, а также соответствующие им прецессионные портреты. Продемонстрирована возможность выявления спектральных характеристик прецессии положения равновесия с помощью стандартного пакета Matlab, использующего быстрое преобразование Фурье. Приведен программный алгоритм получения спектров на основе числовых файлов разверток по времени, полученных из решения системы уравнений движения для намагниченности. Получены развертки по времени и прецессионные портреты, а также соответствующие спектры прецессии положения равновесия намагниченности в пяти основных режимах: №1 – малоамплитудная круговая прецессия, №2 – прецессия положения равновесия без охвата центра, №3 – незатухающая прецессия положения равновесия с охватом центра, №4 – затухающая прецессия положения равновесия с охватом центра, №5 – развернутая круговая прецессия. Установлено, что для спектров всех режимов наиболее характерными являются составляющие на двух частотах – частоте возбуждения, соответствующей частоте приложенного переменного поля и частоте прецессии равновесия, значительно более низкой, чем частота возбуждения. Сравнительное исследование амплитуд обеих спектральных линий показало, что в режимах №1 и особенно №2 составляющая на частоте прецессии равновесия превышает амплитуду составляющей на частоте возбуждения. В режиме №3 и особенно №4 амплитуда составляющей на частоте возбуждения значительно превышает амплитуду прецессии равновесия, а в режиме №5 составляющая на частоте прецессии равновесия вообще отсутствует. Исследованы зависимости амплитуды спектральной составляющей на частоте возбуждения от амплитуды возбуждающего поля, снятые по спектрам в различных режимах. В качестве контрольных выполнены измерения тех же зависимостей по разверткам по времени. Отмечено, что измерения по спектрам в средней части полного интервала полей существования прецессии равновесия дают значения, несколько меньшие по сравнению со значениями, полученными по разверткам. Для компенсации

такого расхождения введена корректирующая поправка, представляющая собой квадратичный полином отрицательного знака. Исследованы зависимости амплитуды спектральной составляющей на частоте прецессии равновесия от амплитуды возбуждающего поля. Отмечено, что введение поправки несколько повышает уровень зависимости (примерно на 20%) во всем интервале существования прецессии равновесия, не меняя характера кривой по существу. Характерным признаком рассматриваемой зависимости является начальный горизонтальный участок, захватывающий большую часть области режима №2, с последующим спадом в областях режимов №3, №4 и с падением до нуля при наступлении режима №5. Механизм образования горизонтального участка рассмотрен на основе векторной модели. Отмечено, что при малой амплитуде возбуждения прецессия равновесия происходит по конусу, раскрыв которого определяется величиной равновесного отклонения вектора намагниченности от поля, что и дает горизонтальный участок рассматриваемой зависимости. Увеличение поля возбуждения приводит к увеличению раскрытия конуса прецессии вокруг равновесного положения, так что оба конуса прецессии сливаются и амплитуда колебаний на частоте прецессии стремится к нулю. Выполнено исследование зависимости частоты прецессии равновесия от амплитуды возбуждения. Основные измерения выполнены по спектрам, полученным при исследовании всех пяти режимов. Контрольные измерения проведены путем анализа геометрических параметров (периода) разверток по времени. Установлено хорошее совпадение зависимостей полученных обоими методами, расхождение составило не более 5%. Выполнена проверка полученной зависимости с построенной на основе векторной модели аналитической формулой, имеющей квадратичный характер. Установлено, что в режимах №1 и №2 формула описывает полученные зависимости с точностью не хуже 5%., однако в режиме №3 и №4 квадратичный рост исследуемых зависимостей замедляется, в результате чего формула дает завышенные значения на 20% и более. Отмечено, что причиной такого расхождения является ухудшение точности формулы, так как при ее выводе формулы

принято предположение о малости угла прецессии равновесия. Предложено введение поправки в показатель степени амплитуды переменного поля, постепенно уменьшающей этот показатель по мере увеличения уровня возбуждения. Приведены некоторые возможные вопросы для дальнейших исследований. В первую очередь отмечено, что значительное обогащение спектра должно дать нарушение симметричности геометрии прецессии по постоянному или переменному полю. При этом развертки по времени приобретают вид импульсов сложной формы, так что кроме составляющей на основной частоте прецессии равновесия в спектре должно появиться значительное количество дополнительных частот гармонического характера. Существенное разнообразие может внести также исследование спектральных характеристик прецессии равновесия в анизотропной среде. Отмечено, что исследование спектров в таких условиях может потребовать для интерпретации получаемых результатов привлечения новых моделей, отличных от применяемых в полностью симметричном случае.

**Ключевые слова:** прецессия намагниченности, ориентационный переход, спектральный анализ.

**Abstract.** The investigation of spectral characteristics of precession equilibrium balance position of magnetization is the main subject of this work. The geometry of task is normal magnetized ferrite plate. In this case the parametrical excitation of exchange spin waves is not possible and the angle of precession cone may be about some tens of degree. It is established that in the condition of orientational transition the switching of alternating magnetic field having circular polarization leads to precession of equilibrium position of magnetization. In this case the magnetization vector takes part in two precession motions: the first – along the large ring, the second – along the small ring. The radius of large ring is determined by the equilibrium angle between of magnetization vector direction and the external magnetic field direction. The radius of small ring is determined by the angle of deflection of magnetization vector from equilibrium position which moves along the large ring. As a result the precession portrait consist of large circular ring which is

filled along its environment by small rings. The formula for specific energy which consist of interaction of magnetization with constant and alternating fields and also with demagnetization field is derived. On the basis of Landau-Lifshits equation the system of nonlinear equations of motion for three components of magnetization is derived. By the numerical solution of this system by Rounge-Cutta method the evolutions in time and corresponded precession portraits for magnetization are found. The possibility of founding the spectral characteristics of magnetization equilibrium position precession by the standard mathematical package “Matlab” which based by fast Fourier transformation is demonstrated. The program algorithm of this calculation using the evolutions in time which are found from the system of equations for magnetization is described. The evolutions in time, precession portraits and spectrums for five basis regimes are found. This regimes are: №1 – the small-amplitude circular precession; №2 – precession of equilibrium position without the envelop of centre; №3 – non-fading precession of equilibrium position with the envelop of centre; №4 – fading precession of equilibrium position with the envelop of centre; №5 – comprehensive circular precession. It is established that for the spectrum of all regimes the most typical line are on two frequencies – on the frequency of excitation which is equal to the frequency of alternate field and on the frequency of precession of equilibrium position which is more less then the frequency of excitation. The comparative investigation of amplitudes of both spectral lines shows that in the regime №1 and especially in the regime №2 the amplitude of line on the frequency of equilibrium position precession is more then the amplitude of line on the frequency of excitation. In the regime №3 and especially №4 the amplitude of line on the excitation frequency is more larger then the amplitude of line on the equilibrium position precession and in the regime №5 the line on the frequency of equilibrium position precession is absent. The dependencies of amplitude of spectrum line on the frequency of excitation from the level of alternative field in different regimes are investigated. As a control also the measuring of the same values from the evolutions in time are executed. It is found that the measuring by the spectrums in the middle part of whole interval where the equilibrium precession take place gives out

the values which are a few smaller than the same values which are found from the evolutions in time. For the compensation of this divergence the correcting addition in the form of quadratic polynomial having negative sign is proposed. The dependencies of amplitude spectrum line on the frequency of precession equilibrium from the amplitude of excitation field are investigated. It is found that the using of correction slightly increases the level of dependence (about of 20%) in the whole interval of equilibrium precession presence. In this case the general character of curve is not changed. The character indication of this dependency is the initial horizontal path which occupies the most path of regime №2 and has subsequent abatement in the regime №3, №4 with decreasing to zero in the regime №5. The mechanism of formation of horizontal path is explained on the basis of vector model. It is found that by small amplitude of excitation the precession of equilibrium takes place along the cone which angle is determined by the value of equilibrium inclination of magnetization vector from the field. This motion is the reason of horizontal path of investigated dependence. The increasing of excitation level leads to the increasing of cone angle around the equilibrium position. By this reason the both cones of precession connect together and amplitude on the frequency of equilibrium precession decrease to zero. The investigation of dependence of equilibrium precession frequency from the amplitude of excitation is made. The main measuring are made by spectrum which are founded by whole five regimes. The control measuring are made by analysis of geometrical parameters (periods) of evolutions in time. The good agreement between both dependencies is found. The discrepancy was not more than 5%. The comparison of measured dependence with the analytical formula having quadratic character founded by the basis of vector model is made. It is found that in the regimes №1 and №1 analytical formula describes the measured dependencies to the approximation of 5% but in regimes №3 and №4 the quadratic increasing of explored dependencies is slowed down and the formula gives the excessive values on 20% and more. It is established that the reason of this discrepancy is the lowering the precision of formula so as by its derivation it is accepted the supposition about a small value of equilibrium precession angle. The

introduction of correction into index of degree of alternating field which decreases this index when excitation level increases is proposed. Some possible questions for new investigations is proposed. In the first place it is mentioned that the large enrichment of spectrum may be expected from violation of symmetry of equilibrium precession by constant or alternate fields. In this case the evolutions in time acquire the view of pulses having complex form. In this case in the spectrum of equilibrium precession must be appear large quantity additional frequencies harmonic character. The large variety of spectrum may introduce the investigation of equilibrium precession in anisotropic media. It is mentioned that the investigation of spectrum in these conditions may demand for interpretation of results the elaboration of new models which will be different from models which applied in symmetrical case.

**Key words:** precession of magnetization, orientation transition, spectrum analysis.

## Введение

Исследование нелинейных явлений в ферритах на СВЧ отличается значительным разнообразием [1-4]. Стабильные нелинейные процессы типа умножения и деления частоты, детектирования и других активно исследовались еще на раннем этапе освоения СВЧ свойств ферритов [5-9]. Следующим этапом было освоение различных нестабильностей, в первую очередь связанных с параметрическим возбуждением обменных спиновых волн [10-13].

С появлением железиттриевого граната (ЖИГ), обладающего рекордно низкими потерями [14, 15], было установлено, что нестабильные явления, обусловленные параметрическим возбуждением обменных волн, возникают уже при крайне малых амплитудах прецессии намагниченности, когда угол отклонения вектора намагниченности от равновесного положения не превышает одного-двух градусов [11]. Подобное развитие спин-волновых неустойчивостей затрудняет проявление других нелинейных процессов, требующих отклонения намагниченности на значительно большие углы, в том числе до нескольких десятков градусов. Так, благодаря неустойчивости, шумовые качества параметрического усилителя СВЧ настолько ухудшаются,

что делают его неконкурентоспособным даже с устройствами на электронных лампах [11].

По-видимому, единственной возможностью для реализации больших углов прецессии без возбуждения обменных волн является использование ферритовой пленки (пластины), намагниченной перпендикулярно ее плоскости. В этом случае частота однородной моды ферромагнитного резонанса (ФМР) приходится на нижнюю границу (дно) спектра обменных волн, вследствие чего их параметрическое возбуждение становится невозможным. В эксперименте такие условия были реализованы в работах [16-19], из которых косвенно можно судить о возможности достижения углов прецессии до 20-25 градусов и более без какого-либо возбуждения обменных спиновых волн.

Успех эксперимента породил значительное количество теоретических работ [20-26], рассматривающих свойства нелинейной прецессии намагниченности при больших амплитудах. Были выявлены как стохастические, так и сложные регулярные, в том числе автоколебательные режимы прецессии, рассмотрены статические и динамические бистабильности, приводящие к динамическому перемагничиванию пленки, построены бифуркационные диаграммы, демонстрирующие широкие возможности управления нелинейной динамикой намагниченности в тонкопленочных структурах посредством изменения внешних магнитных полей.

В большинстве перечисленных работ вектор намагниченности в стационарном состоянии предполагался ориентированным вдоль приложенного к пленке постоянного магнитного поля. При этом напряженность такого поля предполагалась заведомо большей поля размагничивания, обусловленного поверхностями магнитной пленки.

В работах [27-29] исследовалась прецессия намагниченности в условиях ориентационного перехода [30], то есть тогда, когда постоянное поле, приложенное по нормали к плоскости пленки, оставалось меньше поля размагничивания. При этом в стационарном состоянии направление вектора намагниченности было отклонено от направления поля на углы, достигавшие



десятков градусов. Было показано, что в таких условиях при подаче на пленку в ее плоскости переменного поля с круговой поляризацией, положение равновесия намагниченности не остается в покое, а само начинает прецессировать, описывая конус вокруг направления постоянного поля с частотой, значительно более низкой, чем частота возбуждающего поля. Такая прецессия была названа «прецессией второго порядка», подробно исследованы ее свойства, выявлены различные режимы колебаний, в том числе имеющие несимметричный характер. Более подробно свойства прецессии в положении равновесия были обобщены в монографиях [31, 32].

Однако, несмотря на выявление значительного количества свойств и особенностей прецессии равновесия, в тени оставались ее амплитудно-частотные параметры. Так, хотя период основной частотной составляющей такой прецессии был исследован с определенной подробностью, но спектральные свойства в целом, наличие боковых и комбинационных частот, а также соотношение амплитуд колебаний возбуждаемых на частоте, отличной от частоты переменного поля, рассмотрены не были.

Настоящая работа направлена на исследование именно спектральных свойств и характеристик прецессии положения равновесия намагниченности, в первую очередь тех, которые остались за кадром работ, обобщенных в [31, 32].

## 1. Геометрия задачи и основные уравнения

Общая схема геометрии задачи, совпадающая с введенной в работах [31-33], показана на рис.1. В ее основе лежит плоскопараллельная магнитная пластина толщины  $d$ . Внешнее постоянное магнитное поле  $\vec{H}_0$  приложено перпендикулярно плоскости пластины, а в плоскости пластины действует переменное магнитное поле  $\vec{h}$ . Задача решается в декартовой системе координат  $Oxyz$ , плоскость  $Oxy$  которой совпадает с плоскостью пластины. Центр системы координат  $O$  находится в центре пластины, так что ее плоскости соответствуют координатам  $z=\pm d/2$ . В рамках рассматриваемой задачи прецессия по толщине пластины предполагается однородной, поэтому

точное значение этой толщины в расчетах явно не участвует, используется лишь размагничивающий фактор, равный  $4\pi$ .

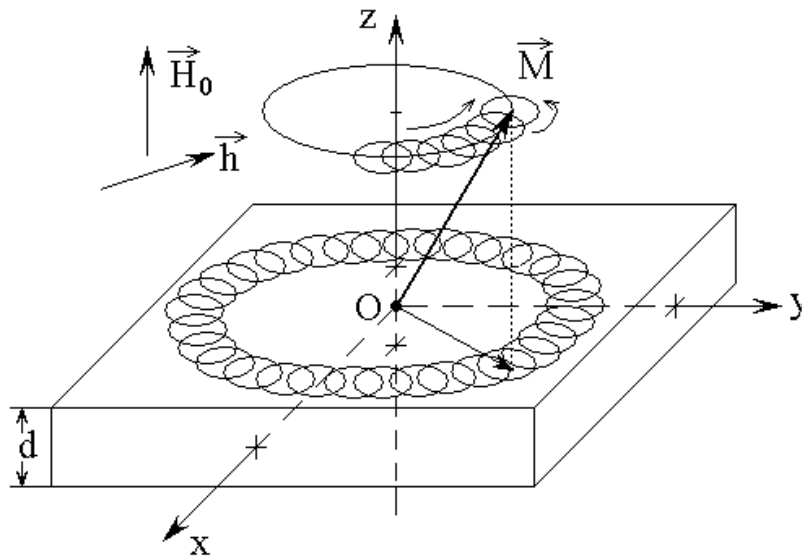


Рис.1. Геометрия задачи и схема образования прецессии положения равновесия намагниченности.

В принятой геометрии резонансная частота колебаний намагниченности соответствует дну спектра обменных спиновых волн, так что их параметрическое возбуждение исключается, и прецессия вектора намагниченности может происходить с отклонением от нормали к плоскости пластины на углы в десятки градусов [16-20, 24, 34].

Когда внешнее поле  $\vec{H}$  больше поля размагничивания, равного  $4\pi M_0$ , вектор намагниченности  $\vec{M}$  ориентируется точно вдоль направления поля  $\vec{H}$ , то есть по оси  $Oz$ . Когда внешнее поле меньше поля размагничивания, то есть в условиях ориентационного перехода, ориентация вектора намагниченности в стационарном состоянии отклоняется от направления поля  $\vec{H}$  и занимает промежуточное положение, определяемое равновесием между значением полей внешнего и размагничивания. Приложение переменного поля  $\vec{h}$ , поляризованного по кругу в плоскости  $Oxy$ , приводит к прецессии вектора намагниченности вокруг равновесного положения, в результате чего само это положение начинает прецессировать вокруг направления поля.

Такое явление, впервые описанное в работах [27-29], названо там прецессией второго порядка, а в работе [32] это название заменено более точным – прецессией положения равновесия.

Схема образования прецессии положения равновесия также показана на рис.1. Вектор намагниченности участвует в двух движениях прецессионного характера. Первое – прецессия по малому кругу вокруг равновесного положения намагниченности. Это – прецессия «первого порядка». Частота такой прецессии совпадет с частотой приложенного переменного поля. Второе движение – прецессия по большому кругу вокруг направления постоянного поля. Здесь прецессирует уже само положение равновесия, так что это прецессия «второго порядка». Частота такой прецессии значительно ниже частоты переменного поля и определяется напряженностью постоянного поля, величиной поля размагничивания и амплитудой переменного поля.

На рисунке прецессия по малому кругу условно изображена малыми кольцами, а прецессия по большому кругу соответствует выстраиванию цепочки малых колец вдоль образующей большого кольца. Проекции компонент вектора намагниченности  $M_x$  и  $M_y$  на плоскость пластины  $Oxy$  образуют прецессионный портрет, схема которого показана на верхней плоскости пластины.

Обратимся теперь к математической трактовке рассматриваемой задачи, в основном следуя [32, стр.389-390].

Будем считать, что внешнее поле имеет вид:

$$\vec{H} = \{H_{0x} + h_x; H_{0y} + h_y; H_{0z}\}, \quad (1)$$

где  $H_{0x,y,z}$  – постоянное подмагничивающее поле,  $h_{x,y}$  – компоненты переменного поля, причем положим, что:  $h_{x,y} < H_{0z}$ , а также  $H_{0x,y} < H_{0z}$ .

Плотность энергии пластины с учетом размагничивающего фактора равна:

$$U = -M_0 h_x m_x - M_0 H_{0x} m_x - M_0 h_y m_y - M_0 H_{0y} m_y -$$

$$-M_0 H_{0z} m_z + 2\pi M_0^2 m_z^2, \quad (2)$$

где  $\vec{m} = \vec{M}/M_0$  – нормированный вектор намагниченности,  $M_0$  – намагниченность насыщения.

При  $H_{0z} = 0$  вектор намагниченности в равновесном состоянии ориентирован в плоскости пластины, а при  $H_{0z} \geq 4\pi M_0$  и  $H_{0x,y} = 0$  – перпендикулярен этой плоскости. В интервале полей  $0 \leq H_{0z} \leq 4\pi M_0$  при начальной ориентации вектора намагниченности, отличной от равновесной, происходит квазистатическое установление намагниченности путем ориентационного перехода [32, 35].

В равновесии при  $h_x = h_y = 0$ , ориентация вектора намагниченности определяется путем минимизации плотности энергии (2) по компонентам намагниченности, в результате чего получаем угол  $\theta_0$  отклонения вектора намагниченности от оси  $Oz$  в виде [32, стр.389, форм.(9.5)]:

$$\theta_0 = \arccos(m_z) = \arccos\left(\frac{H_0}{4\pi M_0}\right). \quad (3)$$

Для решения задачи о динамическом поведении вектора намагниченности в условиях ориентационного перехода воспользуемся уравнениями движения намагниченности Ландау-Лифшица с диссипативным членом в форме Гильберта [1-3, 32, стр.390, форм.(9.6)-(9.8)]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_x}{\partial t} = & -\frac{\gamma}{1+\alpha^2} \cdot \left[ (m_y + \alpha m_x m_z) \cdot H_{ez} - (m_z - \alpha m_y m_x) \cdot H_{ey} - \right. \\ & \left. - \alpha \cdot (m_y^2 + m_z^2) \cdot H_{ex} \right]; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_y}{\partial t} = & -\frac{\gamma}{1+\alpha^2} \cdot \left[ (m_z + \alpha m_y m_x) \cdot H_{ex} - (m_x - \alpha m_z m_y) \cdot H_{ez} - \right. \\ & \left. - \alpha \cdot (m_z^2 + m_x^2) \cdot H_{ey} \right]; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial m_z}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \cdot \left[ (m_x + \alpha m_z m_y) \cdot H_{ey} - (m_y - \alpha m_x m_z) \cdot H_{ex} - \right. \\ \left. - \alpha \cdot (m_x^2 + m_y^2) \cdot H_{ez} \right]; \quad (6)$$

где  $\gamma$  – гиромагнитная постоянная ( $\gamma > 0$ ),  $\alpha$  – параметр затухания прецессии намагниченности. Входящие в эти уравнения эффективные поля, в соответствии с (2), имеют вид:

$$H_{ex} = H_{0x} + h_x; \quad (7)$$

$$H_{ey} = H_{0y} + h_y; \quad (8)$$

$$H_{ez} = H_{0z} - 4\pi M_0 m_z. \quad (9)$$

В работах [27-29] показано, что в условиях ориентационного перехода при возбуждении системы переменным полем круговой поляризации

$$h_x = h_0 \cdot \sin(2\pi f t); \quad (10)$$

$$h_y = -h_0 \cdot \cos(2\pi f t), \quad (11)$$

где  $f$  – частота переменного поля,  $h_0$  – его амплитуда, в определенных обстоятельствах возможна **прецессия положения равновесия**, состоящая в том, что положение равновесия, вокруг которого прецессирует вектор намагниченности с частотой возбуждения, само прецессирует вокруг направления постоянного поля с частотой, значительно более низкой.

Период такой прецессии определяется формулой [32, стр.398, форм.(9.19)]:

$$T_c = \frac{A}{h^2 \sqrt{1 - \left( \frac{H_0}{4\pi M_0} \right)^2}}, \quad (12)$$

где  $h$  – амплитуда переменного поля, а параметр  $A$  – постоянный множитель нормирующего характера, в работе [32] определенный из соответствия между значениями, получаемыми по приведенной формуле и периодом прецессии, получаемым из расчета развертки колебаний по времени. Согласно данным [32,

стр.399, 430, 455 и др.], величина параметра  $A$ , в зависимости от конкретных условий задачи, может составлять от нескольких единиц до нескольких десятков Э<sup>2</sup> мкс.

В соответствии с (12), определим частоту прецессии положения равновесия как величину, обратную ее периоду:

$$F_c = \frac{1}{A} h^2 \sqrt{1 - \left( \frac{H_0}{4\pi M_0} \right)^2}. \quad (13)$$

Эта формула понадобится далее.

Основные приведенные далее результаты получены при следующих параметрах: намагниченность насыщения магнитной пластины –  $4\pi M_0 = 280$  Гс, напряженность постоянного поля  $H_0 = 260$  Э, что в соответствии с формулой (3) давало угол равновесного отклонения  $\theta_0 = 21,7836^\circ$ , параметр затухания  $\alpha = 1,2$ , частота переменного поля – 200 МГц. При этом амплитуда переменного поля  $h_0$  в зависимости от исследуемого режима устанавливалась в интервале от нуля до 50 Э. В большинстве случаев время развертки по времени составляло  $3 \cdot 10^{-7}$  с, а в некоторых случаях (например, при исследовании режима №1) увеличивалось на порядок и более. Такой интервал времени был выбран, исходя из того, чтобы на его протяжении помещалось не менее одного-двух периодов развертки по времени. Шаг по времени составлял  $0,25 \cdot 10^{-11}$  с, что было достаточно, чтобы развертки по времени, в том числе на частоте возбуждения, получались достаточно плавными. Вывод данных осуществлялся на каждом 40-м шаге по времени, что обеспечивало умеренный объем числового файла и давало достаточную плавность траекторий прецессионного портрета. Контрольная проверка, выполненная при выводе на меньшем числе шагов (вплоть до двух), а также при уменьшении шага по времени (вплоть до порядка), каких-либо достаточно заметных изменений спектров не выявила. В то же время, такие параметры приводили к значительному увеличению размеров выводимых файлов и требуемого

машинного времени, поэтому принятые выше параметры (время развертки  $3 \cdot 10^{-7}$  с и шаг  $0,25 \cdot 10^{-11}$  с) в рамках настоящей работы были признаны достаточно удобными.

## 2. Схема расчета параметров прецессии положения равновесия

Главным предметом рассмотрения в настоящей работе являются спектральные свойства прецессии положения равновесия намагниченности. Для этого прежде всего следует рассчитать развитие колебаний во времени, по которым далее определяется спектральный состав этих колебаний. Динамика намагниченности определялась из решения системы уравнений (4)-(6) методом Рунге-Кутты четвертого порядка [36]. При этом были получены зависимости от времени  $t$  компонент намагниченности  $m_x(t)$  и  $m_y(t)$ . Результатами расчета являлись числовые файлы  $m_x(t)$  и  $m_y(t)$ , которые в совокупности с файлом времени  $t$  использовались для построения спектров.

Расчет спектров проводился с помощью стандартного пакета «Matlab» с использованием функции fft (быстрое преобразование Фурье) [37, стр.217-223] в рамках алгоритма следующего вида:

```
u = (tz)./ty;
c = 200;
a = fft(u,40*c);
b = a.*conj(a)/(2*c);
g = 50*(0:(c-1))/(2*c);
plot(g,b(1:c),'w'),
```

где  $ty$  – файл времени,  $tz$  – файл соответствующей компоненты намагниченности  $m_x$  или  $m_y$ .

Характер колебаний, в том числе реализация того или иного режима, исследовался по разверткам по времени и соответствующим прецессионным

портретам. Схема определения основных параметров разверток по времени (а) и параметрических портретов (б) показана на рис.2.

По развертке по времени (а) определялся период  $T_c$  прецессии положения равновесия, а также амплитуды колебаний на частоте возбуждения  $A_{SD}$  и на частоте прецессии равновесия  $A_{S0}$ .

**Замечание.** На рисунке величины  $A_{SD}$  и  $A_{S0}$  измеряются по полному размаху колебаний в обе стороны (плюс и минус). Согласно классическому определению [38, стр.25, форм.(3)], термин «амплитуда» соответствует половине измеренных значений. Такое определение хорошо работает только в случае симметричных относительно горизонтальной оси колебаний, например синусоидальных. Однако колебания прецессии положения равновесия часто являются несимметричными, чему посвящена значительная часть главы 9 и целиком вся глава 10 монографии [32, стр. 431-526]. Можно полагать, что в этом случае более уместной характеристикой колебаний является не половина их размаха, а полный размах от плюса до минуса. Поэтому в рамках настоящей работы будем использовать термин «амплитуда» для характеристики именно такого полного размаха колебаний.

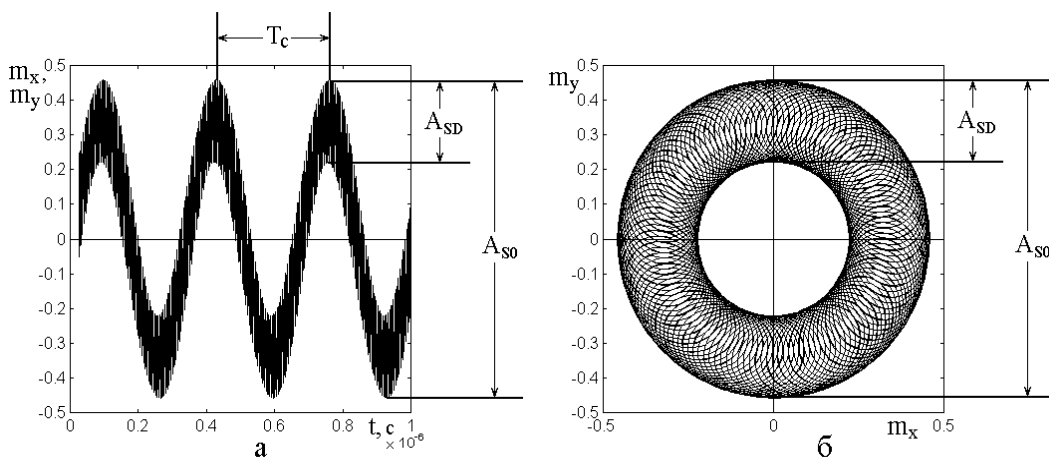


Рис.2. Схема определения геометрических параметров развертки по времени (а) и параметрического портрета (б).

На рис.2а показана типичная развертка по времени колебаний компонент намагниченности  $m_x$  или  $m_y$ . В симметричном случае развертки для обеих компонент являются одинаковыми, сдвинутыми по фазе на  $90^\circ$ , поэтому здесь



показана развертка лишь для одной компоненты  $m_x$ . Колебания на частоте возбуждения в масштабе рисунка являются настолько частыми, что сливаются друг с другом, образуя широкую полосу синусоидального вида. Высота этой полосы  $A_{SD}$  дает амплитуду колебаний на частоте возбуждения. При любом значении времени размах полосы остается одним и тем же, поэтому его удобно измерять в положениях максимального отклонения от горизонтальной оси, как показано на рисунке справа. Полный размах колебаний, обозначенный  $A_{S0}$ , отражает амплитуду колебаний на частоте прецессии равновесия. Это значение складывается из величины стационарного отклонения положения равновесия от нормали и амплитуды на частоте возбуждения. Поскольку величина стационарного отклонения от переменного поля не зависит, то параметр  $A_{S0}$  может превышать это значение только на величину  $A_{SD}$ .

На рис.2б показан типичный прецессионный портрет (то есть зависимость  $m_y$  от  $m_x$  при параметре  $t$ ), соответствующий колебаниям, приведенным на рис.2а. Можно видеть, что он представляет собой большое кольцо, заполненное по образующей малыми кольцами. Диаметр малого кольца равен  $A_{SD}$ , внешний диаметр образующей большого кольца равен  $A_{S0}$ . Если построить кольцевую линию посередине между внешней и внутренней образующими портрета, то такая линия как раз даст портрет прецессии стационарного отклонения намагниченности. Можно видеть, что диаметр такого кольца будет равен  $A_{S0} - A_{SD}$ , то есть будет определяться углом, задаваемым формулой (3)

### **3. Общие характеристики спектров различных режимов прецессии положения равновесия**

В работах [29, 31, 32, стр.409-414] было установлено, что в симметричном случае по мере увеличения амплитуды переменного поля  $h_0$  наблюдаются последовательно сменяющие друг друга пять принципиально различных режимов прецессии положения равновесия: режим №1 – малоамплитудная круговая прецессия, режим №2 – прецессия положения равновесия без охвата

центра, режим №3 – незатухающая прецессия положения равновесия с охватом центра, режим №4 – затухающая прецессия положения равновесия с охватом центра, режим №5 – развернутая круговая прецессия.

Фактическая реализация того или иного режима регистрировалась по развитию колебаний во времени и характеру соответствующих прецессионных портретов.

Перейдем теперь к рассмотрению спектральных характеристик этих режимов, для чего обратимся к рис.3-7, относящимся к различным режимам. На данном этапе ограничимся наиболее простым, симметричным относительно оси  $Oz$  случаем, когда постоянное поле направлено точно перпендикулярно плоскости пластины, то есть  $H_{0x,y} = 0$  Э.

Все эти рисунки имеют одинаковую структуру. Так, «а» – развертка по времени колебаний нормированных на  $M_0$  компонент намагниченности  $m_x$  (сплошные линии) и  $m_y$  (пунктирные линии); «б» – соответствующий прецессионный портрет; «в» – спектр колебаний намагниченности, измеренный по компоненте  $m_x$ , в широком диапазоне частот, включающем частоту возбуждения; «г» – тот же спектр в интервале частот вблизи частоты прецессии равновесия в укрупненном масштабе. Спектр по компоненте  $m_y$  отдельно не показан, так как благодаря симметрии задачи он полностью совпадает со спектром по компоненте  $m_x$ , показанным на эпюрах «в» и «г».

Для удобства сравнения с рис. 9.11-9.15 в работе [32], здесь использовались те же параметры, а именно: намагниченность насыщения –  $4\pi M_0 = 280$  Гс,  $\alpha = 1,2$ ,  $H_{0z} = 260$  Гс. Амплитуда возбуждающего поля менялась от 1 до 50 Э, причем для построения рисунков брались те же значения, что в работе [32] (конкретные значения указаны в подписях к рисункам). Частота переменного поля составляла 200 МГц.

Развертки по времени рассматривались от нуля до  $3,0 \cdot 10^{-7}$  с, а для построения прецессионных портретов и спектров использовались те же

развертки, начиная со времени  $0,2 \cdot 10^{-7}$  с. Начальный промежуток времени из построения портрета исключался, что было сделано для того, чтобы не затемнять данные неустановившимися колебаниями, имеющими место в течение процесса релаксации, который к моменту  $0,2 \cdot 10^{-7}$  с уже заканчивался.

Рассмотрим различные режимы по отдельности.

**Режим №1** – малоамплитудная круговая прецессия (рис.3).

Этот режим является переходным от полного отсутствия прецессии, когда переменное поле равно нулю, к началу прецессии, когда это поле постепенно увеличивается.

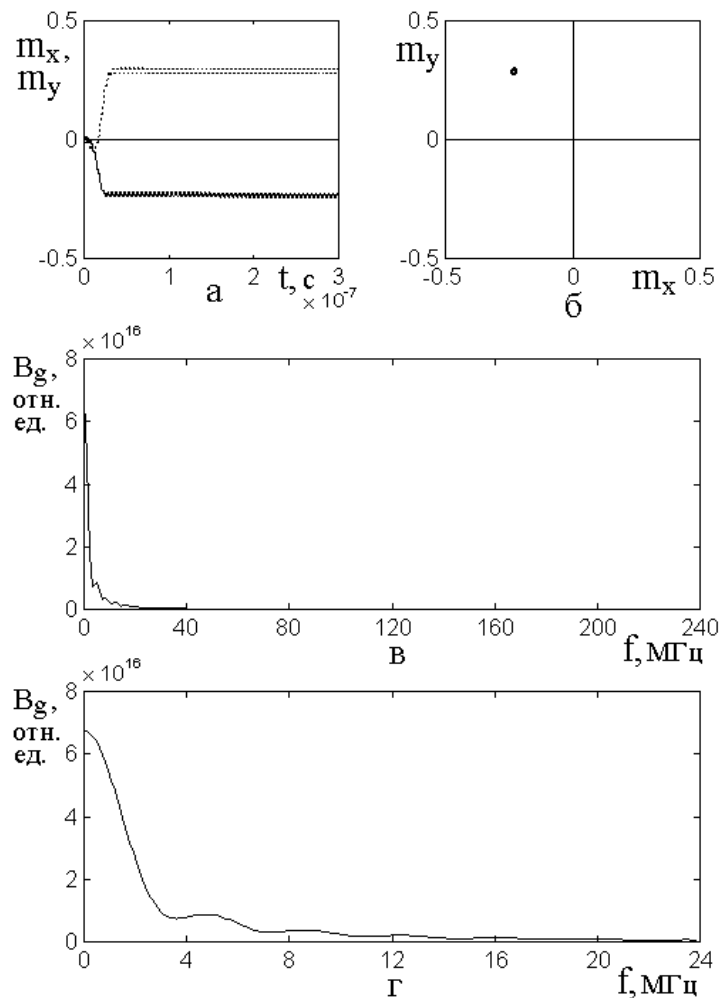


Рис.3. Схема развертки по времени компонент  $m_x$ ,  $m_y$  (а), прецессионного портрета (б) и спектров (в,г) для режима №1. Амплитуда переменного поля – 1 Э.

Из рис.3а видно, что компоненты намагниченности, которые в начальный момент времени положены равными нулю, ко времени около  $0,15 \cdot 10^{-7}$  с, соответствующему окончанию процесса релаксации, принимают значения  $m_x = -2,5$ ,  $m_y = 3,0$ . Эти значения как раз соответствуют равновесному отклонению намагниченности от поля, определяемому углом (3). Далее, поскольку приложено некоторое переменное поле, происходит развитие колебаний во времени с амплитудой, соответствующей величине этого поля, так что, поскольку поле является малым ( $1\text{Э}$ ), то и амплитуда соответственно получается малой (порядка 0,015 от  $M_0$ ). Отклонение центральной линии таких колебаний от значения, принятого после окончания релаксации ( $-2,5$  для  $m_x$  и  $3,0$  для  $m_y$ ), на рассмотренном интервале времени (до  $3,0 \cdot 10^{-7}$  с) хотя и имеет место, но в масштабе рисунка настолько мало, что визуально не наблюдается. Однако проверка показывает, что при временах, по крайней мере на порядок больших, такое отклонение становится вполне заметным, так что прецессия положения равновесия имеет место, однако ее период, в соответствии с показанным на рис.9.6 в монографии [32, стр.399], стремится к бесконечности, так что в пределах рис.3а просто не помещается.

На прецессионном портрете (рис.3б) такие колебания отражены в виде небольшого кольца, центр которого приходится как раз на точку установления компонент намагниченности на рис.3а ( $m_x = -2,5$ ,  $m_y = 3,0$ ).

Спектр колебаний, показанный на рис.3в, в области частоты возбуждения видимого подъема не имеет, что связано с масштабом рисунка по вертикали, обеспечиваемым использованным при построении стандартным пакетом (Matlab [37]). В то же время, вблизи нуля имеется довольно значительная постоянная или почти постоянная (во всяком случае, сравнительно низкочастотная) составляющая, в крупном масштабе показанная на рис.3г. Можно полагать, что эта составляющая отражает некоторое неравенство между установившимися значениями компонент  $m_x$  и  $m_y$ , представленными на

рис.3а. Можно видеть, что по мере увеличения частоты эта составляющая резко спадает, стремясь к нулю.

**Режим №2** – прецессия положения равновесия без охвата центра (рис.4).

Этот режим существует в наиболее широком по переменному полю интервале – от практически нуля до 28 Э.

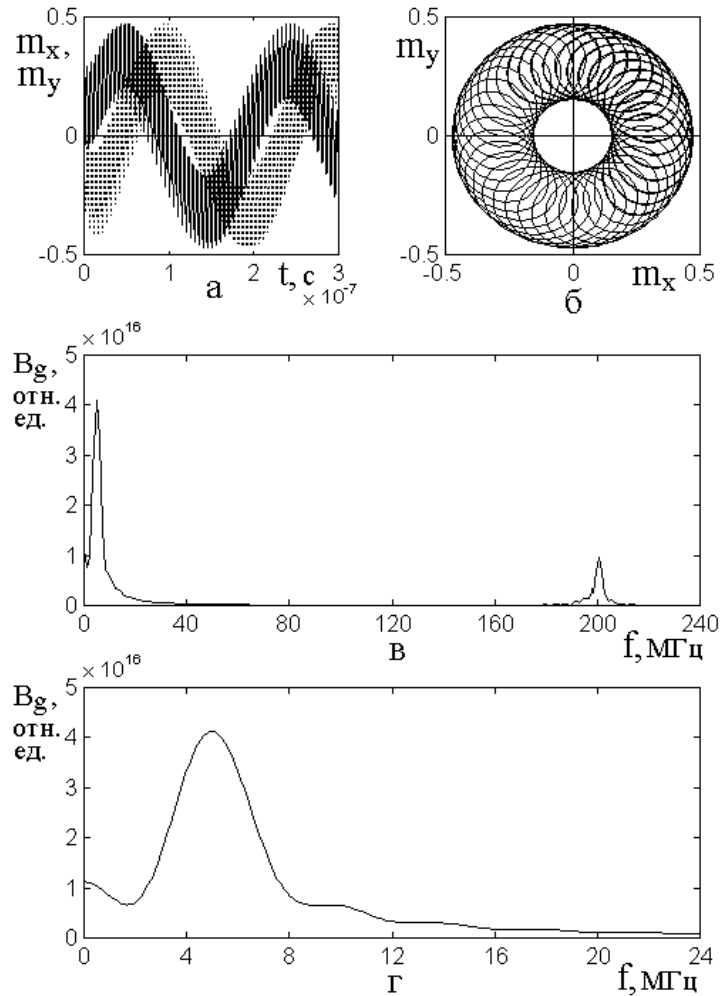


Рис.4. Схема развертки по времени компонент  $m_x$ ,  $m_y$  (а), прецессионного портрета (б) и спектров (в,г) для режима №2. Амплитуда переменного поля – 20 Э.

Из рис.4а видно, что развертки по времени здесь имеют ярко выраженный периодический характер, соответствующий прецессии положения равновесия в полной мере. Компоненты намагниченности  $m_x$  и  $m_y$  участвуют в двух движениях прецессионного типа, высокочастотном и низкочастотном, оба из которых имеют синусоидальный характер. Структура таких колебаний подробно интерпретирована в [32, стр.395-398] на основе векторной модели.

Колебания компонент намагниченности  $m_x$  и  $m_y$  сдвинуты относительно друг друга по фазе на  $90^\circ$ , что соблюдается, как для колебаний на частоте возбуждения, так и для колебаний на частоте прецессии равновесия. Причиной такого сдвига является сохранение длины вектора намагниченности.

Прецессионный портрет имеет вид широкого кругового кольца, заполненного по образующей малыми кольцами, радиусы которых меньше внешнего радиуса большого кольца. Свободная сердцевина образована внутренними касательными к малым кольцам. Соотношение между внешним диаметром большого кольца и диаметрами малых колец на рис.4б соответствует соотношению амплитуд  $A_{S0}$  и  $A_{SD}$  на рис.4а. Более подробно структура портрета объяснена в разделе 2.

Спектр колебаний, показанный на рис.4в, имеет две хорошо выраженные составляющие. Одна – на частоте возбуждения 200 МГц. Эта составляющая соответствует частым колебаниям на рис.4а. Другая составляющая, показанная также в более крупном масштабе на рис.4г, соответствует низкочастотной синусоиде на рис.4а. Частота этой составляющей – около 5 МГц, соответствует периоду большой синусоиды на рис.4а, равному  $2,0 \cdot 10^{-7}$  с. Постоянная составляющая, столь сильно выраженная на рис.3в и рис.3г здесь почти отсутствует. Соотношение амплитуд спектральных составляющих около 4 раз (на частоте возбуждения –  $1,0 \cdot 10^{16}$ , на частоте прецессии равновесия –  $4,0 \cdot 10^{16}$ ) близко к соотношению характерных амплитуд  $A_{SD}$  и  $A_{S0}$  (раздел 2) на развертке колебаний и прецессионном портрете ( $A_{SD} = 0,28$ ,  $A_{S0} = 0,95$ ).

**Режим №3** – прецессия положения равновесия с охватом центра (рис.5).

Этот режим существует в интервале переменного поля от 28 до 37 Э.

Из рис.5а видно, что развертки по времени здесь, как и в предыдущем случае, имеют ярко выраженный периодический характер. Компоненты намагниченности  $m_x$  и  $m_y$  участвуют в двух движениях прецессионного типа, высокочастотном и низкочастотном, оба из которых близки к синусоидальным.

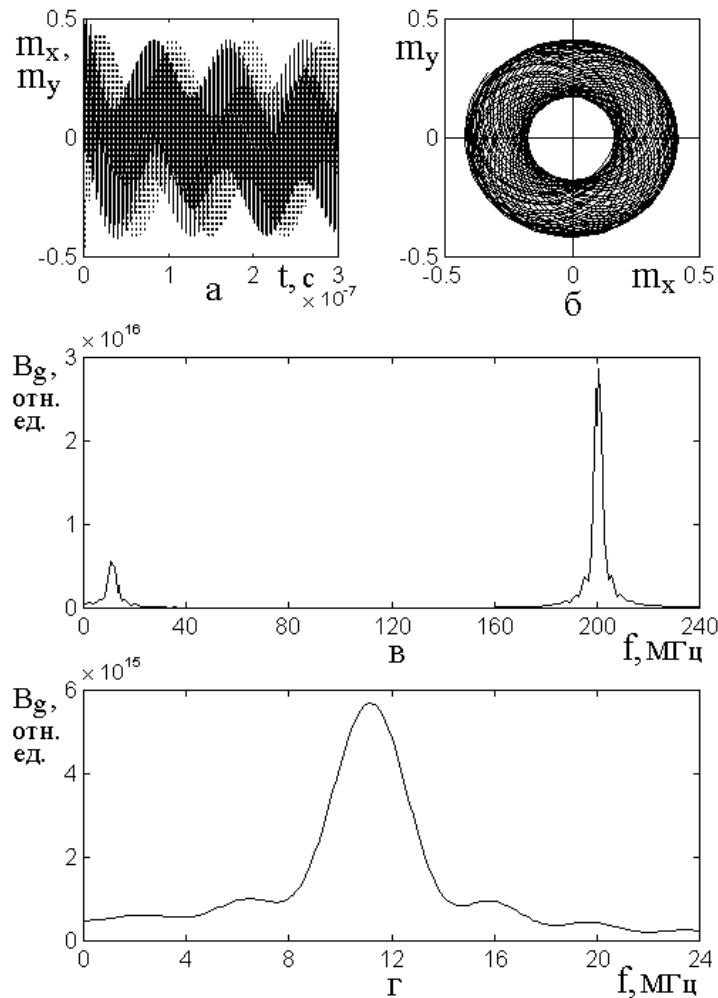


Рис.5. Схема развертки по времени компонент  $m_x, m_y$  (а), прецессионного портрета (б) и спектров (в,г) для режима №3. Амплитуда переменного поля – 35 Э.

Существенным отличием является тот факт, что в предыдущем случае амплитуда высокочастотных колебаний была значительно меньше амплитуды низкочастотных, тогда как здесь соотношение обратное. Главенствующую роль играют именно высокочастотные колебания, а низкочастотные участвуют в них лишь как модулирующая составляющая.

Прецессионный портрет, как и в прошлом случае, имеет вид широкого кругового кольца, заполненного по образующей малыми кольцами, однако здесь радиусы малых колец приближаются к радиусу большого кольца, так что малые кольца как бы «катаются» по внутренней образующей большого, не вылезая за его пределы. Такое «катание» приводит к образованию открытой сердцевины, как и в прошлом случае образованной касательными к малым

кольцам, однако тогда сердцевина располагалась вне малых колец, теперь же она размещается внутри них.

Спектр колебаний, показанный на рис.5в, как и в прошлом случае, имеет две хорошо выраженные составляющие. Одна – на частоте возбуждения 200 МГц, другая – на частоте прецессии равновесия, теперь составляющей 12 МГц (что заметно выше предыдущего случая). Эта частота также соответствует периоду большой синусоиды на рис.5а, равному  $0,9 \cdot 10^{-7}$  с. Постоянная составляющая практически отсутствует.

В отличие от предыдущего случая, здесь составляющая спектра на частоте возбуждения значительно превышает составляющую на частоте прецессии равновесия (на частоте возбуждения –  $2,9 \cdot 10^{16}$ , на частоте прецессии равновесия –  $0,57 \cdot 10^{16}$ ). То есть соотношение достигает 5 раз. Соотношение характерных амплитуд, измеренное по прецессионному портрету, составляет около 4 раз ( $A_{SD} = 0,25$ ,  $A_{S0} = 0,90$ ). Можно полагать, что некоторое наблюдаемое различие обусловлено недостаточной точностью измерений обоими способами.

**Режим №4** – прецессия положения равновесия с охватом центра, амплитуда колебаний которой затухает во времени (рис.6).

Этот режим существует в интервале переменного поля от 37 до 43 Э.

Из рис.6а видно, что развертки по времени здесь имеют выраженный периодический характер с затухающей амплитудой. Можно считать, что начиная со времени около  $2,5 \cdot 10^{-7}$  с низкочастотные колебания, соответствующие прецессии положения равновесия, полностью затухли, так что остается только простая прецессия, частота которой равна частоте возбуждения.

Прецессионный портрет на рис.5б из-за затухания прецессии равновесия, получается довольно размазанным. То есть здесь присутствуют элементы прецессии с охватом центра (режим №3), однако этот охват постепенно



ослабевает, так что малые кольца вырождаются в общее большое кольцо, что и приводит к его размазке.

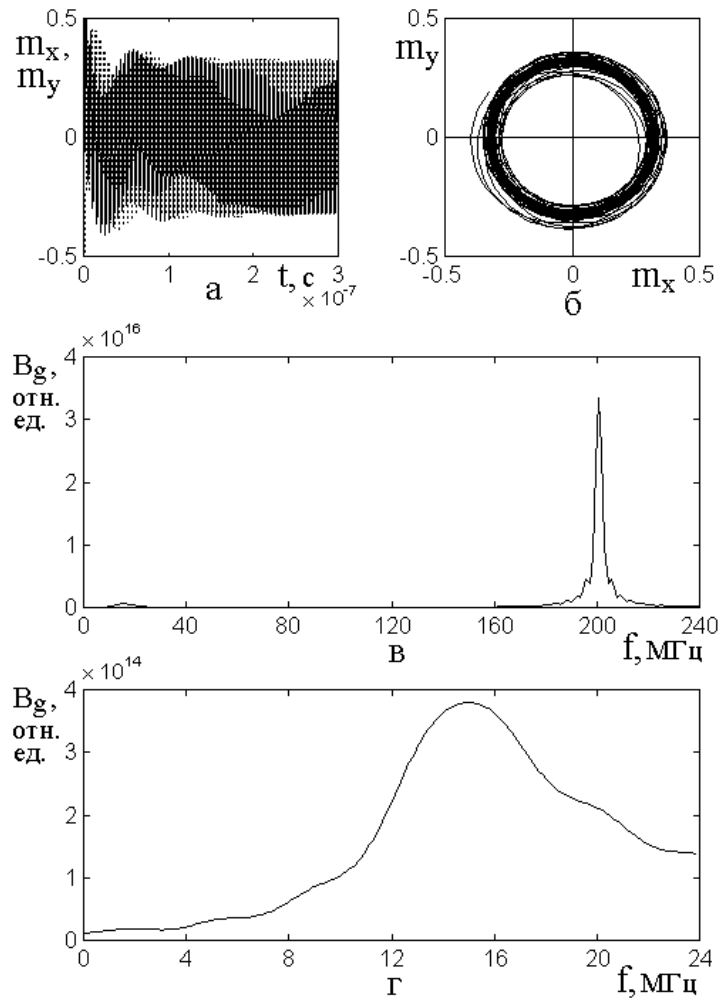


Рис.6. Схема развертки по времени компонент  $m_x$ ,  $m_y$  (а), прецессионного портрета (б) и спектров (в,г) для режима №4. Амплитуда переменного поля – 38 Э.

Спектр колебаний, показанный на рис.6в, также имеет две составляющие, однако теперь составляющая на частоте возбуждения 200 МГц значительно преобладает. Составляющая на частоте прецессии равновесия хотя и заметна на частоте около 16 МГц, однако теперь ее амплитуда крайне мала. Так амплитуда составляющей на частоте 200 МГц равна  $3,3 \cdot 10^{16}$ , а на частоте 16 МГц – всего  $3,7 \cdot 10^{14}$ , то есть на два порядка меньше. Можно полагать, что при времени развертки более  $2,5 \cdot 10^{-7}$  с спектральная составляющая прецессии

равновесия вообще упадет до нуля, так как там эта прецессия просто затухнет.

**Замечание.** Следует отметить, что в рассматриваемом режиме время затухания прецессии положения равновесия значительно (почти на порядок) превышает время релаксации системы в целом, определяемое параметром затухания Гильберта  $\alpha$  в соответствии с уравнениями движения для намагниченности (4)-(6). Такое огромное время затухания прецессии равновесия говорит о реализации какого-то другого механизма релаксации, отличного от механизма Гильберта. В [32, стр.406-407, рис.9.9] также отмечено, что прецессия положения может продолжаться при временах, значительно превышающих время собственной релаксации, однако время затухания прецессии равновесия подробно не анализируется. По-видимому, анализ механизма затухания прецессии равновесия в рассматриваемом режиме (№4) может составить заслуживающий внимания предмет для отдельной работы.

**Режим №5** – развернутая круговая прецессия вектора намагниченности (рис.7).

Этот режим реализуется при амплитуде переменного поля, превышающей  $43 \text{ Э}$  вплоть до бесконечности (в физических пределах).

Из рис.7а видно, что развертки по времени здесь имеют чистый периодический характер с постоянной амплитудой, причем колебания происходят на частоте возбуждения. Наблюдаемые на рисунке темные поля обусловлены муаровым наложением синусоид, соответствующим компонентам намагниченности и физического содержания не имеют.

Прецессионный портрет (рис.7б) имеет вид узкого кругового кольца, ширина образующей которого стремится к нулю.

Спектр колебаний, показанный на рис.7в, имеет единственную четко выраженную линию на частоте возбуждения. Спектр в области частот, где можно ожидать существования прецессии равновесия, представляет собой постоянный уровень вблизи нуля. Синусоида, наблюдаемая на рис.7г, по амплитуде лежит на уровне более чем на три порядка ниже соответствующего основному спектру (рис.7в), так что, по-видимому, относится к уровню шума расчетного пакета (Matlab [37]) и серьезного физического содержания не

имеет.

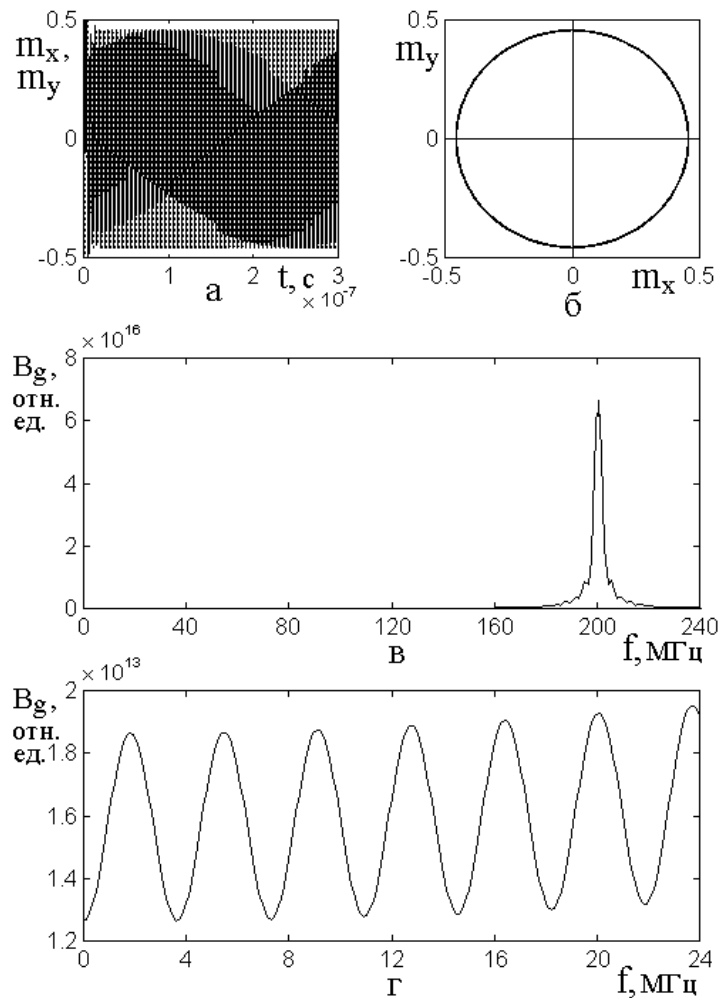


Рис.7. Схема развертки по времени компонент  $m_x$ ,  $m_y$  (а), прецессионного портрета (б) и спектров (в,г) для режима №5. Амплитуда переменного поля – 70 Э.

#### 4. Спектральные параметры прецессии равновесия при различных уровнях возбуждения

Рассмотрим теперь конкретные значения спектральных параметров прецессии равновесия, соответствующие различным уровням возбуждения, для чего обратимся к таблице №1.

В первом столбце таблицы приведены значения амплитуды переменного поля  $h_0$ , определяющей все остальные параметры.

Таблица №1. Спектральные параметры прецессии равновесия при различных уровнях возбуждения

$h_0$ , Э	$B_{S0}$ , отн.ед.	$B_{SD}$ , отн.ед.	$F_c$ , МГц		$A_{S0}$ , отн.ед.	$A_{SD}$ , отн.ед.	$F_{cA}$ , МГц
5	0,1	8,6	0,36		0,80	0,09	0,38
10	0,6	8,9	1,12		0,84	0,19	1,16
15	1,3	10,0	2,48		0,86	0,24	3,12
20	2,4	10,1	4,72		0,84	0,31	5,00
25	3,6	6,2	6,84		0,86	0,38	7,14
30	5,1	3,1	9,00		0,86	0,42	9,09
35	6,7	1,34	10,4		0,80	0,38	11,1
40	8,7	1,30	19,8		0,79	0,08	20,0
45	11,6	-	-		0,80	0,00	-
50	15,1	-	-		0,80	0,00	-

Левая часть таблицы, включающая в себя второй, третий и четвертый столбцы, содержат данные, измеренные по спектрам колебаний, подобным приведенным на эпюрах «в» и «г» рис.3-рис.7. Во втором столбце приведены амплитуды спектральной линии на частоте возбуждения  $B_{S0}$ , в третьем – амплитуды на частоте прецессии равновесия  $B_{SD}$ . Эти значения приведены в относительных единицах, определяемых внутренним алгоритмом получения спектра с помощью пакета Matlab [37], поэтому объективными данными можно считать только относительное соотношение между ними. В четвертом столбце приведены частоты прецессии положения равновесия  $F_c$ . Пятый столбец оставлен пустым, как разделительный между левой и правой частями таблицы.

Правая часть таблицы, включающая в себя шестой, седьмой и восьмой столбцы, содержат данные, измеренные по разверткам колебаний и прецессионным портретам, подобным приведенным на эпюрах «а» и «б» рис.3-7. Эти изменения выполнены в соответствии со схемой, приведенной на

рис.2. В шестом столбце приведены значения полной амплитуды колебаний  $A_{S0}$ , в седьмом – значения амплитуды колебаний на частоте возбуждения  $A_{SD}$  и в восьмом – частоты  $F_c$ , полученные из периодов разверток колебаний  $T_c$ , в соответствии с формулой (13).

Из таблицы можно видеть, что амплитуда спектральной линии на частоте возбуждения  $B_{S0}$ , по мере увеличения поля  $h_0$  возрастает почти линейно. Амплитуда спектральной линии на частоте прецессии равновесия  $B_{SD}$  сперва немного возрастает, после чего, пройдя через слабый максимум в окрестности полей 15-20 Э, убывает, спадая до нуля в поле немного превышающем 40 Э, где прецессия равновесия вырождается в режим развернутой круговой прецессии (№5). Частота прецессии равновесия  $F_c$  по мере увеличения поля возрастает по закону, близкому к квадратичному, причем в поле несколько превышающем 40 Э стремится к бесконечности, что как раз соответствует стремлению к нулю периода прецессии при значительном увеличении  $h_0$ , как это наглядно видно из рис.9.6 в [32, стр.399].

Значение полной амплитуды колебаний или внешнего диаметра прецессионного портрета  $A_{S0}$  от амплитуды поля  $h_0$  почти не зависит, так как эта амплитуда определяется главным образом углом отклонения вектора намагниченности от направления постоянного поля, определяемым формулой (3). Величина параметра  $A_{SD}$ , определяемая шириной образующей прецессионного портрета, то есть от его внешнего края до края свободной сердцевины, до поля  $h_0$  порядка 30 Э возрастает, что отражает рост составляющей на частоте возбуждения в режиме без охвата центра (№2). Однако далее, когда этот режим переходит в режим с охватом центра (№3), так что малое кольцо, соответствующее частоте возбуждения, выходит за центр, образуя сердцевину уже своей внутренней частью, величина параметра  $A_{SD}$  уменьшается, стремясь к нулю при переходе к режиму развернутой прецессии (№5). Частота колебаний прецессии равновесия, определяемая по развертке

колебаний  $F_{cA}$ , по мере увеличения поля  $h_0$  возрастает, подобно тому, как возрастает та же частота, определенная по спектру  $F_c$ .

### 5. Зависимости спектральных составляющих колебаний от амплитуды возбуждения

Рассмотрим, теперь, как меняется амплитуда составляющих спектра в различных режимах при изменении уровня возбуждения более подробно. Поскольку во всех спектрах, представленных на рис.3-7, преобладают две спектральные линии – одна на частоте возбуждения и другая на частоте прецессии положения равновесия, будем следить только за этими составляющими.

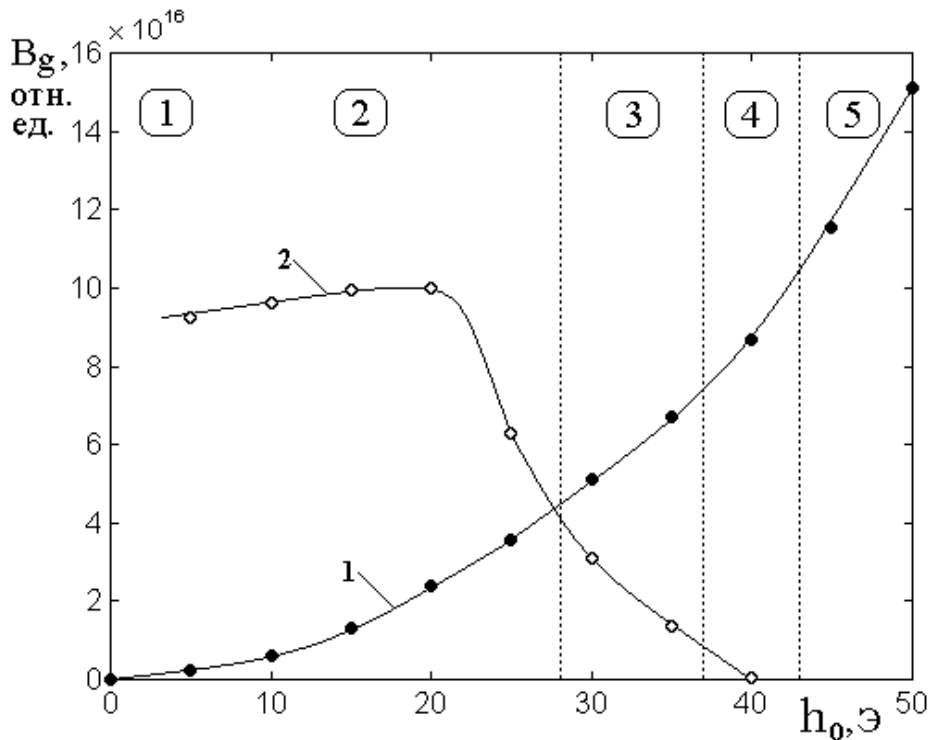


Рис.8. Зависимости амплитуды спектральной составляющей на частоте возбуждения (1) и на частоте прецессии положения равновесия (2) от амплитуды возбуждающего поля. Вертикальные точечные линии – границы между режимами.

Цифры в верхнем ряду – номера режимов.  
Кривые построены по данным таблицы №1.

На рис.8 представлены зависимости амплитуды спектральной составляющей на частоте возбуждения (1) и на частоте прецессии положения равновесия (2) от амплитуды возбуждающего поля, построенные по данным

второго и третьего столбцов таблицы №1. Рисунок приведен здесь для сравнения между амплитудами двух различных составляющих спектра, поэтому кривые приведены без нормировки, то есть взаимное соотношение между амплитудами сохранено.

Из рисунка можно видеть, что амплитуда колебаний на частоте возбуждения по мере увеличения поля  $h_0$  всегда растет, тогда как амплитуда колебаний на частоте прецессии равновесия до полей порядка 28 Э, то есть в режиме №2 превышает амплитуду на частоте возбуждения, после чего падает, стремясь к нулю. Более подробно структуру и характер кривых рассмотрим далее по отдельности. Сначала обратимся к составляющей на частоте возбуждения, а затем на частоте прецессии положения равновесия.

### 6. Составляющая спектра на частоте возбуждения

Обратимся к рис.9, где показаны зависимости амплитуды колебаний на частоте возбуждения от амплитуды возбуждающего поля.

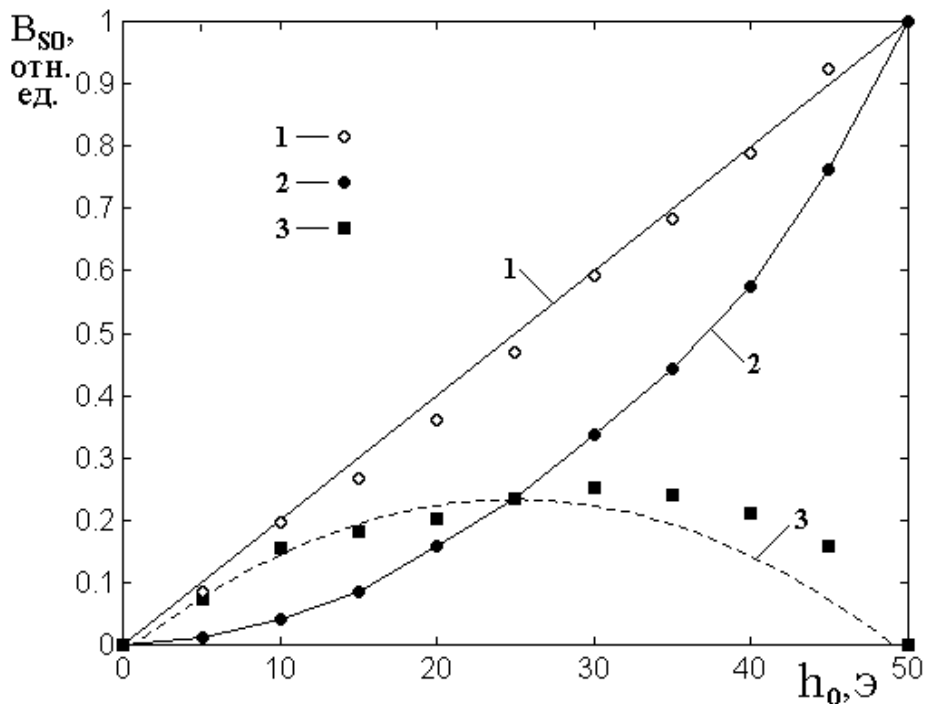


Рис.9. Зависимости амплитуды спектральной составляющей на частоте возбуждения от амплитуды возбуждающего поля, снятые различными способами: 1 – по развертке по времени; 2 – по данным таблицы №1 (по спектрам). Обе зависимости нормированы на значение, соответствующее полю в 50 Э. Линия 1 (прямая) построена по формуле:  $A = k h$ , где  $k = 0,02$ , или  $A = 0,02 h$ . Пунктирная линия 3 построена по формуле (14).

Кривые на рисунке построены по данным второго и шестого столбцов таблицы №1. Все данные нормированы на значение, соответствующее полю 50 Э. Кривая 1 снималась непосредственно по разверткам по времени (параметр  $A_{S0}$ ), кривая 2 строилась по спектрам, снятым с помощью стандартного пакета (параметр  $B_{S0}$ ), кривая 3 – разность между кривыми 1 и 2, смысл которой поясняется далее. Пунктирная кривая, являющаяся приближением точек 3, построена по полиному вида

$$B_S = -0,0004h^2 + 0,0199h - 0,0141. \quad (14)$$

Из рисунка видно, что зависимость, построенная по развертке по времени (кривая 1), является линейной, как того и можно было бы ожидать, исходя из прямой пропорциональности амплитуды прецессии уровню возбуждения, что имеет место при небольшой амплитуде. Здесь, как видно из рис.3-7, максимальный уровень нормированной амплитуды намагниченности при  $h_0$  порядка 50 Э составляет около 0,4 – 0,5, так что рассматриваемая зависимость уже должна заметно отклоняться от прямой линии в сторону насыщения, однако в пределах точности измерения по разверткам такого стремления к насыщению в поле 50 Э еще не наблюдается. Проверка показывает, что в полях  $h_0$  порядка 100 Э рассматриваемая зависимость уже настолько отклоняется от прямой линии в сторону насыщения, что уровень намагниченности приближается к 0,95. Однако поскольку при принятых здесь значениях параметров интересующая нас прецессия положения равновесия имеет место в полях не более 40 Э, не будем рассматривать такое отклонение подробно, а будем считать, что линейный характер зависимости 1, построенной по разверткам, является достаточно достоверным.

**Замечание.** Характер зависимости амплитуды колебаний на частоте возбуждения можно проследить также из рис.9.21 в монографии [32, стр.428], где приведены зависимости внешнего и внутреннего радиусов кольца от амплитуды возбуждающего поля. Для этого надо смотреть разность между



значениями  $m_1$  и  $m_2$ , определяемыми кривыми 3 и 3' (можно и по парам кривых 1, 1' или 2, 2', но для кривых 3 и 3' это более наглядно). Можно видеть, что разность  $m_1 - m_2$  с точностью порядка 10% как раз описывается данными, приведенными в шестом столбце таблицы №1. При этом следует учитывать, что при поле, большем 40 Э, надо ветвь кривой 3' брать с обратным знаком. Видно, что зависимость, как и в соответствии с данными шестого столбца таблицы №1, получается весьма близкой к прямой линии.

Итак, возвращаясь к рис.9, можно видеть, что зависимость, построенная по спектру (кривая 2) проходит несколько ниже и имеет вид, похожий на квадратичный с выпуклостью вниз. Можно полагать, что такой ее характер обусловлен недостаточной точностью расчета спектров с помощью стандартного пакета. Поэтому для большей достоверности получаемых результатов введем корректирующую поправку, равную разности между кривой 1 и кривой 2, представленную на рисунке в виде кривой 3. Практическое значение этой поправки состоит в том, что для получения достаточно достоверного значения зависимости амплитуды от поля, ее следует прибавлять к зависимости, полученной с помощью спектрального пакета. То есть для получения наиболее объективной кривой 1 следует к кривой 2 прибавить поправочную кривую 3.

Из рисунка можно видеть, что во всем интервале поля от 0 до 50 Э в любом случае рост спектральной линии на частоте возбуждения является монотонно возрастающим, то есть никаких более или менее характерных особенностей при переходе от одного режима к другому не наблюдается, что остается в силе для всех режимов, рассмотренных выше (раздел 3).

## **7. Составляющая спектра на частоте прецессии равновесия**

Рассмотрим теперь зависимости от поля возбуждения для спектральной составляющей на частоте прецессии положения равновесия.

Такие зависимости показаны на рис.10. Кривая 1 построена по данным третьего столбца таблицы №1, кривая 2 – по тем же данным с учетом поправки, введенной на рис.9 (кривая 3). Обе кривые нормированы на максимум кривой 2,

имеющий место при поле 20 Э. Поправка в кривую 2 введена путем прибавления к данным кривой 1 значений, соответствующих кривой 3 на рис.9. Прибавление выполнено не по полиному (пунктир на рис.9), а по точкам кривой 3 на рис.9 (сплошные квадраты). Пунктир на рис.10 (кривая 3) соответствует полиному вида:

$$B_S = -0,0109h^2 + 0,2420h + 7,5089. \quad (15)$$

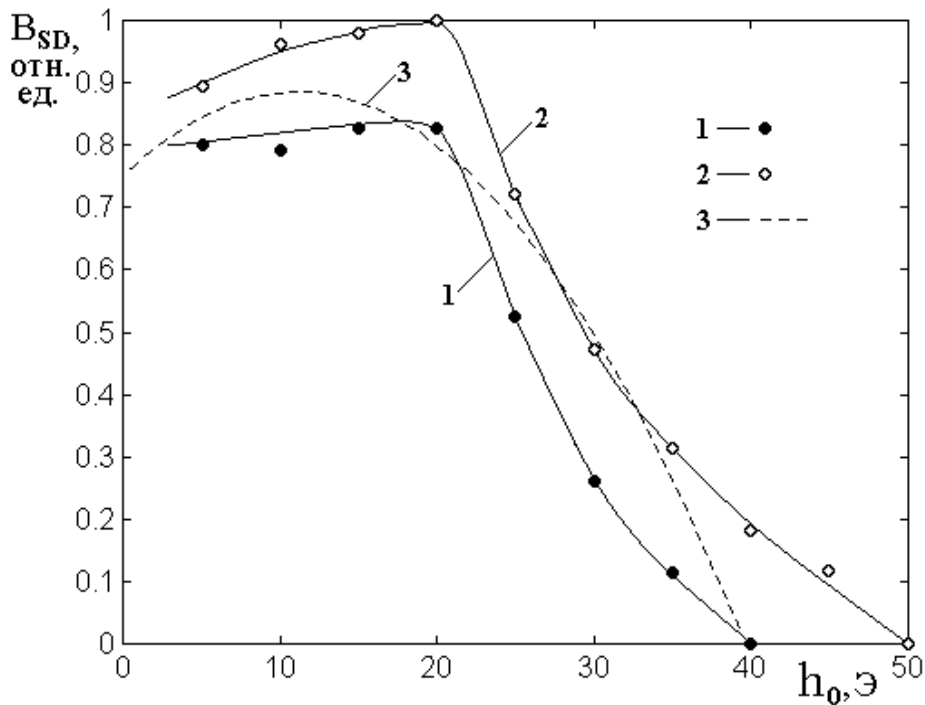


Рис.10. Зависимости амплитуды спектральной составляющей на частоте прецессии положения равновесия от амплитуды возбуждающего поля, построенные следующими способами: 1 – по данным таблицы №1 (по спектрам); 2 – по тем же данным с поправкой, введенной на рис.9; 3 – пунктирная линия, построена по формуле (15). Зависимости 1 и 2 нормированы на значение, соответствующее кривой 2 при поле в 20 Э.

Из рисунка видно, что обе зависимости (исходная 1 и исправленная 2), начинаясь с конечной величины порядка 0,8 – 0,9, сначала идут практически горизонтально, а с поля около 20 Э плавно спадают, стремясь к нулю.

Характерным признаком рассматриваемой зависимости, коренным образом отличающим ее от кривых, соответствующих частоте возбуждения (рис.9), является начальный горизонтальный участок с последующим спадом до нуля.

Механизм образования горизонтального участка состоит в том, что при малой амплитуде прецессии положения равновесия происходит по кругу, определяемому начальным отклонением вектора намагниченности от направления постоянного поля. Такое положение сохраняется до тех пор, пока амплитуда конуса прецессии положения равновесия не превышает радиуса большого кольца прецессионного портрета, то есть в режиме №2 – без охвата центра. То есть до этого момента радиус малого кольца прецессионного портрета не превышает радиуса большого кольца, определяемого отклонением вектора намагниченности от направления постоянного поля, что и дает горизонтальный участок кривых 1, 2 на рис.10.

Когда радиус малого кольца становится больше радиуса большого кольца, то есть в режиме №3 – с охватом центра, малое кольцо перекрывает центр прецессионного портрета. Далее, поскольку центр малого кольца способен двигаться только по большому кольцу, то перекрытие возрастает, малому кольцу становится как бы «некуда деться» так что размах его колебаний, то есть амплитуды прецессии равновесия, постепенно уменьшается.

При дальнейшем увеличении возбуждения малое кольцо уже совсем стремится к перекрытию с большим кольцом, так что в пределе, малое кольцо «вливается» в большое, то есть прецессия равновесия вырождается в простую круговую прецессию (режим №5).

Такой ход зависимости амплитуды колебаний на частоте прецессии равновесия достаточно удобно можно проследить на модели потенциала, представленной в [32, стр.424-425] на рис.9.19. Потенциал относительно плоскости  $Oxy$  имеет вид высокого центрального холма, окруженного кольцевой канавой. При малой амплитуде возбуждения намагниченность прецессирует по малому кругу, целиком уместяющемуся между противоположными склонами канавы (режим №2). При этом амплитуда прецессии положения равновесия определяется радиусом канавы. По мере увеличения возбуждения малый круг прецессии постепенно расширяется, его внутренняя точка налезает на вершину холма потенциала, после чего

перескакивает через нее (переход от режима №2 через режим №3 к режиму №4). Теперь положение равновесия намагниченности уже прецессирует в рамках всей канавы целиком, что ограничивает его колебания, приводя к вырождению в простую развернутую прецессию (режим №5).

**Замечание.** Следует заметить, что при принятых параметрах прецессия положения равновесия прекращается в поле около 40 Э, так что прохождение кривой 2 в области полей от 40 до 50 Э значительно выше нулевой линии нельзя считать достоверным и следует отнести только к недостаточной корректности поправки, введенной при рассмотрении рис.9. То есть в этой области более достоверной следует считать кривую 1. В пределах от нуля до 40 Э с определенной степенью приближения можно ориентироваться на полином (15), представленный на рис.10 пунктирной кривой 3.

## 8. Зависимость частоты прецессии равновесия от амплитуды возбуждения

В разделе 3 при рассмотрении разверток и спектров было отмечено, что увеличение амплитуды возбуждения приводит к увеличению частоты прецессии положения равновесия. Рассмотрим теперь такое изменение частоты более подробно, для чего обратимся к рис.11, где показаны зависимости частоты прецессии положения равновесия от амплитуды возбуждающего поля, построенные различными способами: по спектрам (1), по разверткам (2) и по формуле (13) – кривая (3).

Из рисунка можно видеть, что зависимости, построенные по спектрам и по разверткам, совпадают с точностью в несколько процентов. Можно отметить только некоторое превышение точек 2 над точками 1, которое, скорее всего, можно отнести к погрешности измерений.

Совпадение точек 1 и 2 с кривой 3 в пределах полей от нуля до 25-30 Э, то есть в рамках режима без охвата центра (№2) также можно считать довольно хорошим. То есть в этих пределах формулу (13), полученную на основе векторной модели [32, стр.395-398, форм. (9.19)], можно считать вполне удовлетворительной. Однако в интервале полей 30-40 Э точки 1, 2 лежат несколько ниже кривой 3, построенной по формуле (7). Так для поля в 30 Э

различие составляет 17%, а для поля в 40 Э достигает уже 36%.

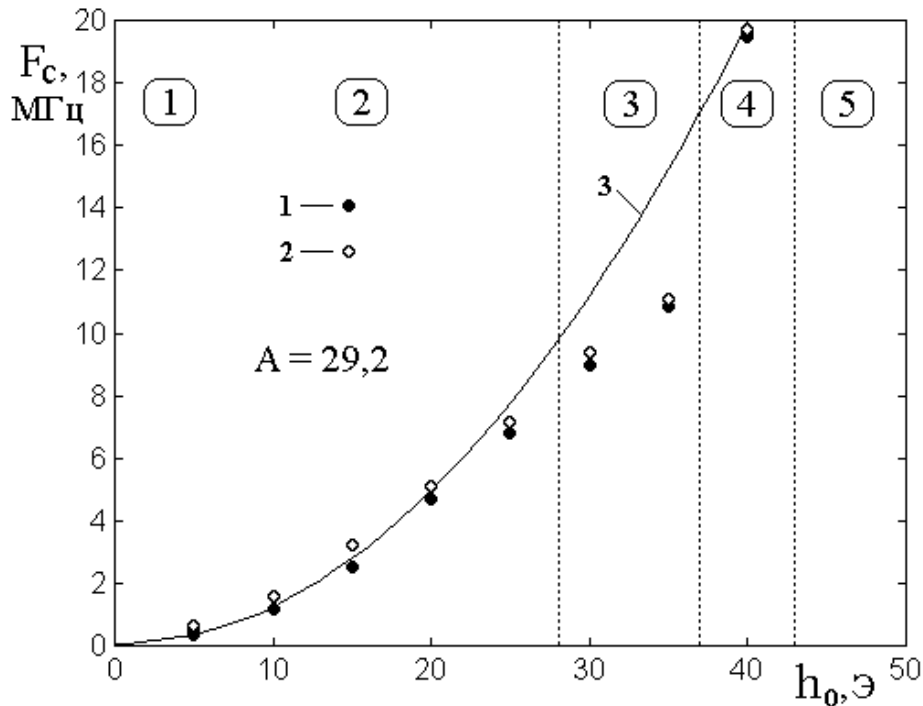


Рис.11. Зависимости частоты прецессии положения равновесия от амплитуды возбуждающего поля, построенные различными способами: 1 – по спектрам (четвертый столбец таблицы №1); 2 – по разверткам (восьмой столбец таблицы №1); 3 – по формуле (13) при  $A = 29,2$ . Вертикальные точечные линии – границы между режимами. Цифры в верхнем ряду – номера режимов.

Можно полагать, что причиной такого расхождения является сделанное при выводе формулы (13) предположение о прямой пропорциональности угла раскрыва конуса прецессии по малому кругу произведению поперечной компоненты намагниченности по этому кругу на величину переменного поля. То есть полагалось, что этот угол раскрыва пропорционален  $M_{x,y}h_0$  [32, стр.397, строка 5 снизу]. Такое выражение, будучи подставленным в полученную в рамках векторной модели формулу (9.16), приводит к квадратичной зависимости скорости прецессии равновесия от амплитуды переменного поля, что и дает квадратичную зависимость частоты прецессии от того же поля. Однако там же указано, что такое предположение справедливо только в линейном приближении, то есть при достаточно малых амплитудах переменного поля. При увеличении амплитуды поля линейность угла раскрыва

прецессии от поля нарушается, раскрыв увеличивается медленнее, так что выражение  $M_{x,y}h_0$  должно быть умножено на коэффициент, несколько меньший единицы. При этом квадратичный рост скорости прецессии равновесия также замедляется (показатель степени при  $h_0$  становится меньше двойки), что и приводит к уменьшению частоты прецессии равновесия. Возвращаясь к рис.11, можно полагать, что в области полей 30-40 Э кривая 3 будет проходить ниже, более приближаясь к точкам 1, 2.

Заметим также, что резкий рост точек 1, 2 в поле 40 Э нельзя считать достаточно объективным, так как в этом поле прецессия равновесия уже практически вырождена в развернутую круговую прецессию (режим №5), так что частота общих колебаний стремится к частоте возбуждения, а колебания прецессии равновесия в этих условиях происходят на уровне шума, то есть амплитуда их в конечном счете стремится к нулю и не выходит за рамки погрешности измерения.

## **9. Некоторые вопросы для дальнейших исследований**

Основной целью настоящей работы является демонстрация возможности и достаточной эффективности использования спектрального анализа для исследования параметров прецессии положения равновесия. Показано, что спектральный анализ позволяет выявить ряд особенностей явления, выпадающих из поля зрения при использовании лишь разверток по времени и прецессионных портретов. Так, по спектрам можно не только выявить основные частотные составляющие процесса, но и сопоставить их амплитуды в зависимости от уровня возбуждения. Исследование частотных свойств по спектрам, ничуть не уступая в точности измерениям по разверткам по времени, является менее трудоемким и более наглядным.

Однако проведенное в настоящей работе исследование затрагивает лишь небольшую часть свойств прецессии положения равновесия. Так, все исследования выполнены только в условиях полной симметрии системы в целом, при которой развертки по времени имеют характер, близкий к

синусоидальному. Однако, как показано в [32, стр.431-464], наличие хотя бы небольшой несимметричности по постоянному или переменному полю приводит к резкому изменению характера развертки по времени: вместо синусоиды она приобретает резко выраженный импульсный вид, причем форма импульсов для двух поперечных составляющих намагниченности ( $m_x$  и  $m_y$ ) сильно различается (см.напр. рис.9.23в на стр.434 или рис.9.32 на стр.452 в [32]). Можно полагать, что в этих условиях спектры на частоте прецессии равновесия вместо одной линии обогатятся множеством боковых составляющих, определение частот которых по разверткам по времени вряд ли возможно. По-видимому, еще большее разнообразие спектров может дать прецессия равновесия в среде с анизотропией [32, стр.572-513]. Развертки по времени здесь приобретают еще более сложный характер (см. напр. рис.10.2 на стр.477 или рис.10.17 на стр.506 в [32]).

Таким образом, в качестве важнейшей задачи для дальнейших исследований можно поставить изучение спектральных характеристик прецессии равновесия в условиях нарушения симметричности и в анизотропной среде. При этом вполне может оказаться, что применение векторной и потенциальной моделей, на основе которых построена интерпретация явлений, описанных в [32], окажется недостаточным и надо будет привлекать какие-то более совершенные модели. Можно полагать, что в этом плане использование спектрального анализа также будет весьма плодотворным.

## **Заключение**

Работа в целом посвящена исследованию спектральных характеристик прецессии положения равновесия намагниченности. Основные результаты, полученные в настоящей работе, сводятся к следующему.

Приведена геометрия задачи, представляющая собой нормально намагниченную ферритовую пластину. Установлено, что в такой геометрии параметрическое возбуждение обменных спиновых волн исключается, в результате чего угол раскрытия прецессии может принимать значения до нескольких десятков градусов. Отмечено, что в условиях ориентационного

перехода, то есть когда величина постоянного поля, приложенного по нормали к плоскости пластины, является несколько меньшей, чем поле размагничивания той же пластины, приложение переменного поля круговой поляризации в плоскости пластины приводит к прецессии положения равновесия намагниченности. При этом вектор намагниченности участвует в двух движениях прецессионного характера – одно по большому кругу, радиус которого определяется углом отклонения намагниченности от поля в равновесном состоянии и другое – по малому кругу, радиус которого определяется углом отклонения намагниченности от равновесного положения, прецессирующего по большому кругу. Получающийся в результате прецессионный портрет представляет собой большое кольцо, заполненное по образующей малыми кольцами.

Выполнена аналитическая оценка угла отклонения вектора намагниченности от направления постоянного поля в условиях ориентационного перехода. Показано, что косинус этого угла равен отношению значения постоянного поля к величине поля размагничивания.

Записано выражение для плотности энергии, представляющей собой сумму взаимодействия намагниченности с постоянным и переменным полями, а также с полем размагничивания. На основе уравнения Ландау-Лифшица с помощью эффективных полей, получаемых путем дифференцирования плотности энергии, записаны нелинейные уравнения движения для трех компонент намагниченности, две из которых лежат в плоскости пластины, а третья ей перпендикулярна.

Путем численного решения этой системы уравнений методом Рунге-Кутты получены развертки колебаний намагниченности по времени, а также соответствующие им прецессионные портреты. Выполнен геометрический анализ разверток по времени и прецессионных портретов, выявлены основные параметры частотно-временного и амплитудного характера.

Продемонстрирована возможность выявления спектральных характеристик прецессии положения равновесия с помощью стандартного



пакета Matlab, использующего быстрое преобразование Фурье. Приведен программный алгоритм получения спектров на основе числовых файлов разверток по времени, полученных из решения системы уравнений движения для намагниченности.

Получены развертки по времени и прецессионные портреты, а также соответствующие спектры прецессии положения равновесия намагниченности в пяти основных режимах: №1 – малоамплитудная круговая прецессия, №2 – прецессия положения равновесия без охвата центра, №3 – незатухающая прецессия положения равновесия с охватом центра, №4 – затухающая прецессия положения равновесия с охватом центра, №5 – развернутая круговая прецессия.

Установлено, что для спектров всех режимов наиболее характерными являются составляющие на двух частотах – частоте возбуждения, соответствующей частоте приложенного переменного поля и частоте прецессии равновесия, значительно более низкой, чем частота возбуждения. При этом спектральная составляющая на частоте возбуждения соответствует прецессии намагниченности по малым кольцам прецессионного портрета, а спектральная составляющая на частоте прецессии равновесия – прецессии по большому кольцу того же портрета.

Сравнительное исследование амплитуд обеих спектральных линий показало, что в режимах №1 и особенно №2 составляющая на частоте прецессии равновесия превышает амплитуду составляющей на частоте возбуждения, причем в режиме №1 наблюдается даже некоторая постоянная составляющая, в режиме №2 пропадающая. В режиме №3 и особенно №4 амплитуда составляющей на частоте возбуждения превышает амплитуду прецессии равновесия, причем в режиме №4 такое превышение достигает двух порядков, а в режиме №5 составляющая на частоте прецессии равновесия вообще отсутствует.

Рассмотрены спектральные параметры прецессии равновесия при различных уровнях возбуждения. Основные измерения выполнены по

спектрам, полученным при исследовании всех пяти режимов. Контрольные измерения проведены путем анализа геометрических параметров разверток по времени и прецессионных портретов.

Выполнено сравнительное исследование зависимостей амплитуд спектральных составляющих колебаний от амплитуды возбуждения. Установлено, что амплитуда колебаний на частоте возбуждения по мере увеличения поля всегда растет, тогда как амплитуда колебаний на частоте прецессии равновесия в режиме №2 превышает амплитуду на частоте возбуждения, после чего, то есть в режимах №3, №4 падает, стремясь к нулю в режиме №5.

Исследованы зависимости амплитуды спектральной составляющей на частоте возбуждения от амплитуды возбуждающего поля, снятые по спектрам в различных режимах. В качестве контрольных выполнены измерения тех же зависимостей по разверткам по времени. Отмечено, что измерения по спектрам в средней части полного интервала полей существования прецессии равновесия (то есть в режимах №2, №3 и частично №4) дают значения, несколько заниженные по сравнению со значениями, полученными по разверткам. Так, зависимость по разверткам является практически линейной, тогда как характер зависимости, снятой по спектрам, приближается к квадратичному с выпуклостью вниз. Высказано предположение, что причиной такого расхождения является недостаточная точность расчета спектров по стандартному пакету, для компенсации чего введена корректирующая поправка, представляющая собой квадратичный полином отрицательного знака с максимумом в области перехода от режима №2 к режиму №3.

Исследованы зависимости амплитуды спектральной составляющей на частоте прецессии равновесия от амплитуды возбуждающего поля, снятые по спектрам в различных режимах. Получены две зависимости – одна в чистом виде по амплитуде наблюдаемых спектральных линий, другая – с учетом корректирующей поправки, введенной при рассмотрении спектров составляющей на частоте возбуждения. Отмечено, что введение поправки

несколько повышает уровень зависимости (примерно на 20%) во всем интервале существования прецессии равновесия, не меняя характера кривой по существу.

Характерным признаком рассматриваемой зависимости является начальный горизонтальный участок, захватывающий большую часть области режима №2, с последующим спадом в областях режимов №3, №4 и с падением до нуля при наступлении режима №5. Механизм образования горизонтального участка рассмотрен на основе векторной модели. Отмечено, что при малой амплитуде возбуждения прецессия равновесия происходит по конусу, раскрыв которого определяется величиной равновесного отклонения вектора намагниченности от поля. При этом прецессия вектора намагниченности вокруг прецессирующего же положения равновесия вносит лишь небольшой вклад в общую амплитуду прецессии, главная величина которой определяется все тем же углом равновесного отклонения, что и дает горизонтальный участок рассматриваемой зависимости. Увеличение поля возбуждения приводит к тому, что раскрыв конуса прецессии вокруг равновесного положения становится сравнимым с раскрывом основного конуса прецессии положения равновесия, так что оба конуса сливаются и амплитуда колебаний на частоте прецессии уменьшается, в конце концов, падая до нуля.

Выполнено исследование зависимости частоты прецессии равновесия от амплитуды возбуждения. Основные измерения выполнены по спектрам, полученным при исследовании всех пяти режимов. Контрольные измерения проведены путем анализа геометрических параметров (периода) разверток по времени. Установлено хорошее совпадение зависимостей полученных обоими методами, расхождение составило не более 5%.

Выполнена проверка полученной зависимости с построенной на основе векторной модели аналитической формулой, имеющей квадратичный характер. Установлено, что в режимах №1 и №2 формула описывает полученные зависимости с точностью не хуже 5%., однако в режиме №3 и №4 квадратичный рост исследуемых зависимостей замедляется, в результате чего

формула дает завышенные значения, в режиме №4 превышающие измеренные на 20% и более. Отмечено, что причиной такого расхождения является ухудшение точности формулы по мере роста угла раскрыва конуса прецессии намагниченности вокруг положения равновесия, так как при выводе формулы принято предположение о малости этого угла. В качестве возможного улучшения формулы предложено введение поправки в показатель степени амплитуды переменного поля, постепенно уменьшающей этот показатель по мере увеличения уровня возбуждения.

Приведены некоторые возможные вопросы для дальнейших исследований. В первую очередь отмечено, что значительное обогащение спектра должно дать нарушение симметричности геометрии прецессии по постоянному или переменному полю. При этом развертки по времени приобретают вид импульсов сложной формы, так что кроме составляющей на основной частоте прецессии равновесия в спектре должно появиться значительное количество дополнительных частот гармонического характера. Существенное разнообразие может внести также исследование спектральных характеристик прецессии равновесия в анизотропной среде. Отмечено, что исследование спектров в таких условиях может потребовать для интерпретации получаемых результатов привлечения новых моделей, отличных от применяемых в полностью симметричном случае.

Работа выполнена в рамках государственного задания.

### **Литература**

1. Гуревич А.Г. *Ферриты на сверхвысоких частотах*. Москва, Гос.Изд.физ.-мат.лит. 1960.
2. Гуревич А.Г. *Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках*. Москва, Наука. 1973.
3. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. *Магнитные колебания и волны*. Москва, Физматлит. 1994.

4. *Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах*. Сб. статей под ред. А.Г.Гуревича. Москва, Иностранная литература. 1961.
5. Пиппин Дж. Удвоение и преобразование частоты в ферритах. В сб. статей: *Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах*. Пер. с англ. под ред. А.Г.Гуревича. Москва, Иностранная литература. 1961. С.41.
6. Скомел Е., Медина М. Исследование многократного преобразования частоты в ферритах. В сб. статей: *Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах*. Пер. с англ. под ред. А.Г.Гуревича. Москва, Иностранная литература. 1961. С.60.
7. Джаффе Д., Качерис Дж., Караянис Н. Ферритовый детектор СВЧ. В сб. статей: *Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах*. Пер. с англ. под ред. А.Г.Гуревича. Москва, Иностранная литература. С.23.
8. Simon J.C., Broussaud G. Detection with microwave ferrites. *Compt. Rend. Acad. Sci.* 1954. Vol.238. No.24. P.2294.
9. Вейсс М. Ферритовый усилитель и генератор СВЧ. В сб. статей: *Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах*. Пер. с англ. под ред. А.Г.Гуревича. Москва, Иностранная литература. 1961. С.346.
10. Сул Г. Теория ферромагнитного резонанса при больших уровнях высокочастотной мощности. В сб. статей: *Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах*. Пер. с англ. под ред. А.Г.Гуревича. Москва, Иностранная литература. 1961. С.163.
11. Моносов Я.А. *Нелинейный ферромагнитный резонанс*. Москва, Наука. 1971.
12. Львов В.С. *Нелинейные спиновые волны*. Москва, Наука. 1987.
13. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения. *УФН*. 1974. Т.114. №4. С.609.
14. Нильсен Дж., Диборн Е. Выращивание монокристаллов магнитных ферритов со структурой граната. В сб. статей: *Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах*. Пер. с англ. под ред. А.Г. Гуревича. Москва, Иностранная литература. 1961. С.400.

15. ЛеКроу Р., Спенсер Е., Портер К. Ширина кривой ферромагнитного резонанса в монокристаллах иттриевого феррита со структурой граната. В сб. статей: *Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах*. Пер. с англ. под ред. А.Г.Гуревича. Москва, Иностранная литература. 1961. С.433.
16. Temiryasev A.G., Tikhomirova M.P., Zil'berman P.E. "Exchange" spin waves in nonuniform yttrium iron garnet films. *JAP*. 1994. Vol.76. No.9. P.5586-5588.
17. Зильберман П.Е., Темирязов А.Г., Тихомирова М.П. Возбуждение и распространение обменных спиновых волн в пленках железо-иттриевого граната. *ЖЭТФ*. 1995. Т.108. №1(7). С.281-302.
18. Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Темирязов А.Г., Тихомирова М.П. Основная мода нелинейного спин-волнового резонанса в нормально намагниченных ферритовых пленках. *ФТТ*. 2000. Т.42. № 6. С.1062-1067.
19. Gerrits Th., Schneider M.L., Kos A.B., Silva T.J. Large-angle magnetization dynamics measured by time-resolved ferromagnetic resonance. *Phys.Rev.B*. 2006. Vol.73. No.9. P.094454(7).
20. Alvarez L.F., Pla O., Chubykalo O. Quasiperiodicity, bistability, and chaos in the Landau-Lifshitz equation. *Phys.Rev.B*. 2000. Vol.61. No.17. P.11613-11617.
21. Шутый А.М., Семенцов Д.И. Нелинейные эффекты прецессионного движения намагниченности в области ферромагнитного резонанса. *ФТТ*. 2000. Т.42. № 7. С.1268-1271.
22. Шутый А.М., Семенцов Д.И. Динамика намагниченности в условиях нелинейного ферромагнитного резонанса в пленке типа (111). *ФТТ*. 2001. Т.43. №8. С.1439-1442.
23. Шутый А.М., Семенцов Д.И. Динамика нелинейного прецессионного движения намагниченности в феррит-гранатовой пленке типа (100). *ФТТ*. 2002. Т.44. №4. С.734-738.
24. Семенцов Д.И., Шутый А.М. Нелинейная регулярная и стохастическая динамика намагниченности в тонкопленочных структурах. *УФН*. 2007. Т.177. №8. С.831-857.

25. Карпачев С.Н., Власов В.С., Котов Л.Н. Нелинейная релаксационная динамика магнитной и упругой подсистем тонкой ферритовой пленки вблизи акустического резонанса. *Вестник МГУ. Сер.3.* 2006. № 6. С.60.
26. Власов В.С. *Исследование релаксационной и нелинейной динамики магнитных и магнитоупругих колебаний пленок и частиц.* Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. Сыктывкар. 2007.
27. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Вынужденная нелинейная прецессия вектора намагниченности в условиях ориентационного перехода. *РЭ.* 2011. Т.56. №1. С.84.
28. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Несимметричная вынужденная нелинейная прецессия намагниченности в условиях ориентационного перехода. *РЭ.* 2011. Т.56. №6. С.719.
29. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Мультирежимный характер нелинейной прецессии намагниченности второго порядка в условиях ориентационного перехода. *РЭ.* 2011. Т.56. №9. С.1120.
30. Белов К.П., Звездин А.К., Кадомцева А.М., Левитин Р.З. *Ориентационные переходы в редкоземельных магнетиках.* М.: Наука. 1979.
31. Власов В.С., Котов Л.Н., Щеглов В.И. *Нелинейная прецессия вектора намагниченности в условиях ориентационного перехода.* Сыктывкар, ИПО СыктГУ. 2013.
32. Шавров В.Г., Щеглов В.И. *Ферромагнитный резонанс в условиях ориентационного перехода.* Москва, Физматлит. 2018.  
[http://jre.cplire.ru/jre/library/Shavrov-Shcheglov\\_3.pdf](http://jre.cplire.ru/jre/library/Shavrov-Shcheglov_3.pdf).
33. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. *РЭ.* 2009. Т.54. №7. С.863.
34. Gulyaev Yu.V., Temiryazev A.G., Tikhomirova M.P., Zilberman P.E. Magnetoelastic interaction in yttrium iron garnet films with magnetic inhomogeneities through the film thickness. *JAP.* 1994. Vol.75. No.10. P.5619.

35. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейная динамика установления намагниченности в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами в условиях ориентационного перехода. *РЭ*. 2010. Т.55. №6. С.689.
36. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. Москва, Наука. 1973.
37. Потёмкин В.Г. *Система MATLAB. Справочное пособие*. Москва, ДИАЛОГ-МИФИ. 1998.
38. Харкевич А.А. *Основы радиотехники*. Москва, Физматлит. 2007.

**Для цитирования:**

Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Спектральные характеристики прецессии положения равновесия намагниченности в нормально намагниченной ферритовой пластине *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2021. №3. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.3.2>