

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.3.1>

УДК: 517.93

ТОМСОНОВСКИЕ АВТОГЕНЕРАТОРЫ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ: СИНТЕЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.В. Зайцев¹, А.В. Карлов²

¹Самарский национальный исследовательский университет имени академика
С.П. Королева, 443086, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

²Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
443010, г. Самара, ул. Л. Толстого, д. 23

Статья поступила в редакцию 08 апреля 2022 г.

Аннотация. Для дискретизации времени в дифференциальном уравнении движения осциллятора (генератора) томсоновского типа предложено использовать сочетание численного метода конечных разностей и асимптотического метода медленно меняющихся амплитуд. Разностные аппроксимации временных производных выбираются таким образом, чтобы, во-первых, сохранить в дискретном времени консервативность и собственную частоту линейного контура автоколебательной системы. Во-вторых, требуется совпадение разностного укороченного уравнения для комплексной амплитуды автоколебаний в дискретном времени с аппроксимацией Эйлера укороченного уравнения для амплитуды автоколебаний в аналоговой системе-прототипе. Показано, что реализация такого подхода позволяет сформировать дискретные отображения осцилляторов томсоновского типа, в частности осциллятора ван дер Поля. Адекватность дискретных моделей аналоговым прототипам подтверждена также численным экспериментом.

Ключевые слова: автоколебательная система, уравнение движения, дискретное время, конечные разности, медленно меняющиеся амплитуды, укороченные уравнения, дискретные отображения томсоновских автогенераторов.

Abstract. A combination of the finite difference method and the method of slowly varying amplitudes to discretize the differential equation of motion of the Thomson oscillator is proposed. The difference approximations of the time derivatives are chosen so as to preserve in discrete time the conservativity and fundamental frequency of the linear loop of the self-oscillating system. It also requires a match of the discrete-time difference shortened equation for the complex amplitude with the Euler approximation of the shortened equation for the auto-oscillation amplitude in the analog prototype system. It is shown that the implementation of such an approach makes it possible to form discrete mappings of Thomson-type oscillators, in particular, the van der Pol oscillator. The consistency of discrete models with analog prototypes is also confirmed by numerical experiment.

Key words: self-oscillatory system, motion equation, the discrete time, finite differences, slowly changing amplitudes, the shortened equations, the discrete mapping of Thomson self-oscillators.

Введение

Автоколебания – фундаментальный процесс, наблюдаемый в природе [1–3]. Среди множества разнообразных временных форм можно выделить квазигармонические (узкополосные) автоколебания. Порождающие их динамические системы – автоколебательные системы в большинстве случаев содержат резонатор, нелинейный активный элемент и положительную обратную связь. Автоколебательная система на основе высокодобротного резонатора и активного элемента с кубической нелинейностью – генератор (осциллятор) ван дер Поля служит универсальной моделью систем различной физической природы [4, 5]. Нелинейности более общего вида образуют класс так называемых систем томсоновского типа [6]. С учетом того, что современная теория колебаний рассматривает эволюцию динамических систем как в непрерывном (НВ), так и дискретном времени (ДВ), представляет интерес временная дискретизация в дифференциальной модели осциллятора, результатом которой является разностное уравнение движения.

Переход к дискретному времени в дифференциальных моделях линейных аналоговых фильтров широко применяется в практике проектирования цифровых фильтров [7]. Помимо решения прикладных задач такой подход позволяет ввести в рассмотрение колебательные ДВ-системы как объекты исследования теории колебаний. Применяемая процедура дискретизации времени накладывает свой отпечаток на характеристики порождаемой ДВ-системы. Поэтому один и тот же аналоговый прототип отображается во множество объектов динамики в дискретном времени. Это утверждение, справедливое для линейных систем, тем более относится к автоколебательным системам.

Один из способов временной дискретизации использует введение нелинейных дельта-воздействий в гамильтониан или уравнение движения НВ-системы. Например, в монографии [8] этим способом построено универсальное и стандартное отображение. В статье [9] анализ дельта-импульсной синхронизации применяется для вывода дискретных отображений неавтономного осциллятора ван дер Поля – Дюффинга. В работе [10] для проектирования ДВ-осциллятора ван дер Поля было предложено использовать условие инвариантности импульсной характеристики линейного резонатора автоколебательной системы относительно дискретизации времени. Принцип импульсной инвариантности можно сформулировать также как замену ядра интегрального уравнения движения нелинейного осциллятора дискретизирующей последовательностью дельта-функций с весовыми коэффициентами из отсчетов импульсной характеристики линейного аналогового контура.

Более традиционные способы основаны на конечно-разностных аппроксимациях временных производных в дифференциальных моделях динамических систем. Например, в статье [11] и монографии [12] дискретизация проведена методом Эйлера. Отмечено, что полученные таким образом дискретные отображения наследуют основные черты аналоговых прототипов, но и приобретают новые свойства. Возможности метода конечных разностей для

проектирования ДВ-осцилляторов томсоновского типа проанализированы в работе [13].

В настоящей работе дискретизацию времени в дифференциальной модели генератора томсоновского типа предлагается провести на основе совместного использования методов конечных разностей и медленно меняющихся амплитуд.

1. Осциллятор в непрерывном времени

Осциллятор томсоновского типа – базовая модель теории нелинейных колебаний – задается уравнением движения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{\omega_0}{Q} (pS(x) - 1) \frac{dx}{dt}. \quad (1)$$

Здесь ω_0 и Q – собственная частота и добротность линейного резонатора, $S(x)$ – дифференциальная крутизна вольт-амперной характеристики активного элемента, p – параметр превышения порога генерации (порог: $p = 1$). Предполагая в дальнейшем дискретизацию времени с интервалом Δ , введем в уравнение (1) безразмерную временную переменную $\tau = t / \Delta$:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 4\pi^2\Omega_0^2 x = 2\pi\nu(pS(x) - 1) \frac{dx}{d\tau}. \quad (2)$$

Здесь $\Omega_0 = \omega_0 / \omega_d$ – собственная частота, измеряемая в единицах частоты дискретизации $\omega_d = 2\pi / \Delta$; $\nu = \Omega_0 / Q$ – полоса резонатора.

Считая, что $\nu \ll 1$, анализ уравнения (2) проведем в приближении метода медленно меняющихся амплитуд (метода ММА), широко используемого при решении прикладных задач теории нелинейных колебаний [14]. В рамках метода осцилляции $x(t)$ представляются в виде

$$x(\tau) = \frac{1}{2} A(\tau) \exp(j2\pi\Omega_0\tau) + \frac{1}{2} A^*(\tau) \exp(-j2\pi\Omega_0\tau) \quad (3)$$

с комплексной амплитудой $A(\tau)$ – медленной по сравнению с $\exp(j2\pi\Omega_0\tau)$ функцией времени. Медленность комплексной амплитуды позволяет пренебречь

второй производной $A''(\tau)$ в левой части уравнения (2) и первой производной $A'(\tau)$ в его правой части.

Дифференциальную крутизну $S(x)$ с осциллирующим аргументом (3) представим ограниченным рядом Фурье, содержащим постоянную составляющую и две первые гармоники:

$$S(x) = S_0(a) + \frac{1}{2}S_1(a)\exp(j2\pi\Omega_0\tau) + \frac{1}{2}S_2(a)\exp(j4\pi\Omega_0\tau).$$

где $a = |A|$ – амплитуда осцилляций. После выделения первой гармоники осцилляций (3) из правой части уравнения (2) и приравнивания амплитудных коэффициентов при $\exp(j2\pi\Omega_0\tau)$ в его правой и левой частях получим так называемое укороченное уравнение вида

$$\frac{dA}{d\tau} = -\pi\nu \left(1 - p \left(S_0(a) - \frac{1}{2}S_2(a) \right) \right) A. \quad (4)$$

На дискретной временной сетке $\tau_n = n\Delta\tau$ с шагом $\Delta\tau = 1$ явный метод Эйлера дает разностную форму укороченного уравнения (4):

$$A_n = A_{n-1} - \pi\nu \left(1 - p \left(S_0(a_{n-1}) - \frac{1}{2}S_2(a_{n-1}) \right) \right) A_{n-1}. \quad (5)$$

Здесь $A_n = A(\tau_n)$ – функция дискретного времени.

2. Осциллятор в дискретном времени

При переходе к дискретному времени в уравнении (2) будем стремиться выполнить два условия. Во-первых, разностный оператор второго порядка, соответствующий левой части уравнения (2), должен быть консервативным и порождать собственные колебания с частотой Ω_0 . Это условие приводит к уравнению собственных колебаний в дискретном времени

$$x_n - 2k_1x_{n-1} + k_2x_{n-2} = 0, \quad (6)$$

в котором действительные коэффициенты разностной аппроксимации k_1 и k_2 таковы, что

$$x_n = A_0 \exp(j2\pi\Omega_0 n) = A_0 Z_0^n.$$

Записав для однородного разностного уравнения (6) характеристическое уравнение

$$Z_0^2 - 2k_1 Z_0 + k_2 = 0,$$

нетрудно получить $|Z_0|^2 = 1 = k_2$ и $\text{Re}(Z_0) = \cos(2\pi\Omega_0) = k_1$.

Теперь полное уравнение движения ДВ-осциллятора представим в виде

$$x_n - 2 \cos(2\pi\Omega_0) x_{n-1} + x_{n-2} = 2\pi\nu(pS(x_{n-1}) - 1)(k_3 x_{n-1} - x_{n-2}). \quad (7)$$

При этом для определения коэффициента k_3 разностной аппроксимации производной в правой части (2) потребуем, чтобы укороченное уравнение для комплексной амплитуды автоколебаний в ДВ-генераторе (7) совпадало эйлеровым приближением (5) укороченного уравнения (4) для комплексной амплитуды автоколебаний в НВ-генераторе (2).

Метод ММА на автоколебания в дискретном времени распространен в статье [15]. Следуя этой работе, автоколебания в (7) запишем в виде

$$x_n = \frac{1}{2} A_n Z_0^n + \frac{1}{2} A_n^* Z_0^{-n}.$$

Теперь медленность комплексной амплитуды A_n позволяет проводить преобразования левой части уравнения (7) с учетом приближенного равенства $A_n - A_{n-1} = A_{n-1} - A_{n-2}$, а в его правой части – считать комплексную амплитуду постоянной. Все остальные шаги ДВ-метода ММА совпадают с аналогичными шагами НВ-метода. В результате приходим к следующему укороченному уравнению для ДВ-осциллятора (7):

$$A_n = A_{n-1} - \pi\nu \frac{(k_3 - Z_0^{-1})}{j \text{Im}(Z_0)} \left(1 - p \left(S_0(a_{n-1}) - \frac{1}{2} S_2(a_{n-1}) \right) \right) A_{n-1}. \quad (8)$$

Нетрудно увидеть, что уравнение (8) совпадает с уравнением (5), если положить $k_3 = \text{Re}(Z_0) = \cos(2\pi\Omega_0)$. Таким образом, искомое дискретное отображение (разностное уравнение движения), определяющее ДВ-осциллятор ван дер Поля, имеет вид

$$x_n - 2 \cos(2\pi\Omega_0) x_{n-1} + x_{n-2} = 2\pi\nu(pS(x_{n-1}) - 1)(\cos(2\pi\Omega_0) x_{n-1} - x_{n-2}). \quad (9)$$

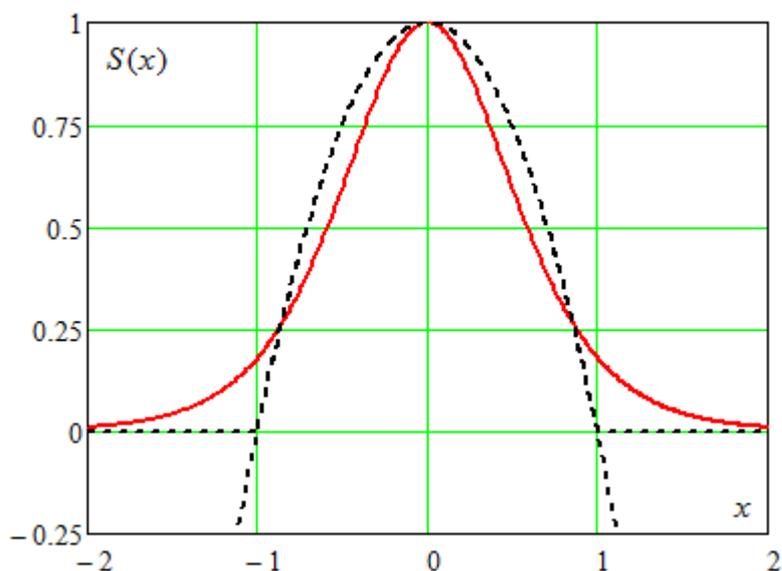


Рис.1. Дифференциальная крутизна активного элемента

При умеренных превышениях порога генерации ($p \leq 10$), когда автоколебания еще можно считать квазигармоническими, отображение (9) воспроизводит в дискретном времени основные характеристики НВ-осциллятора (1). Этот вывод непосредственно следует из способа его формирования. Тем не менее приведем также ряд результатов цифрового анализа временных рядов, генерируемых по алгоритму (9).

3. Численный эксперимент с томсоновским ДВ-осциллятором

В качестве примера рассмотрим автоколебания в ДВ-осцилляторе (9) с нелинейностью дифференциальной крутизны вида

$$S(x) = 1 - th^2\left(\frac{3}{2}x\right) \quad (10)$$

График функции (10) приведен на рис. 1. Для сравнения пунктирной линией показаны графики квадратичной нелинейности дифференциальной крутизны

$$S(x) = 1 - x^2,$$

соответствующей осциллятору ван дер Поля, и ограниченной квадратичной нелинейности.

Энергетические характеристики НВ- и ДВ-осцилляторов можно сопоставить путем сравнения зависимостей амплитуд A_c и A_d первой гармоники

установившихся автоколебаний от величины параметра превышения порога генерации. Соотношение этих зависимостей иллюстрируют графики, приведенные на рис. 2.

Для дискретного осциллятора (9) с параметрами $\Omega_0 = 0.18$, $Q = 20$, $\nu = 9 \cdot 10^{-3}$ график зависимости $A_d(p)$ получен путем оценки амплитуды автоколебаний по формуле

$$A_d(p) = \sqrt{x_N^2(p) + \left(\frac{\cos(2\pi\Omega_0)x_N(p) - x_{N-1}(p)}{\sin(2\pi\Omega_0)} \right)^2} \quad (11)$$

на основе отсчетов x_{N-1} и x_N временного ряда. Отметим, что при записи (11) использована аппроксимация производной $y = dy/d\tau$ вида [15]

$$\text{sinc}(2\pi\Omega_0)y_n = (\cos(2\pi\Omega_0)x_n - x_{n-1}),$$

где $\text{sinc}(2\pi\Omega_0) = \sin(2\pi\Omega_0)/2\pi\Omega_0$ – кардинальный синус.

Оценка амплитуды $A_c(p)$ установившихся автоколебаний томсоновского осциллятора (1) проведена на основе результатов численного интегрирования задачи Коши для уравнения движения (2) методом Рунге – Кутты четвертого порядка с фиксированным шагом $\Delta\tau = 0.125$. Временные ряды для оценки $A_c(p)$ сформированы путем выборки из численного решения $X_n = x_{nM}$, $Y_n = y_{nM} = x'_\tau(\tau_{nM})$ при $M = 8$, а затем использована формула

$$A_c(p) = \sqrt{X_N^2(p) + \left(\frac{Y_N(p)}{2\pi\Omega_0} \right)^2}.$$

В целом, как это следует из рис. 2, зависимости $A_c(p)$ и $A_d(p)$ близки как

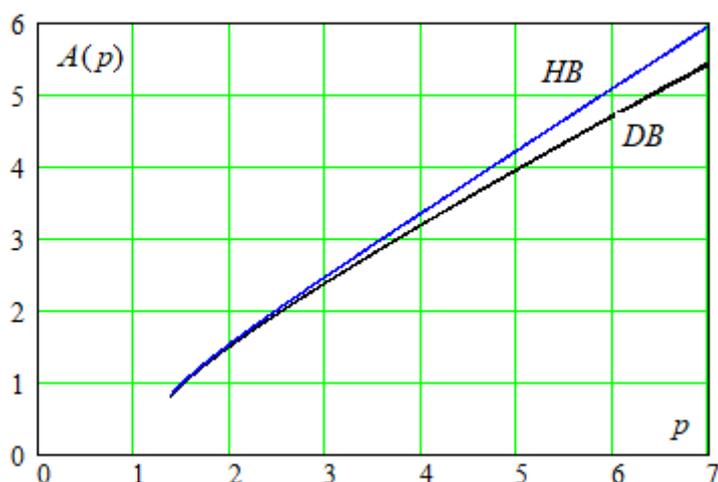


Рис. 2. Огибающие автоколебаний НВ- и ДВ-осцилляторов

качественно, так и количественно – максимальное расхождение их значений в представленном примере составляет 8.4%. Причем причина замедленного роста $A_d(p)$ по сравнению с $A_c(p)$ при увеличении параметра p заключается в повышенном уровне гармоник у ДВ-осциллятора (9). Это подтверждается рис. 3, на котором для $p=3$ сплошной линией показан амплитудный спектр автоколебаний ДВ-осциллятора (9), а пунктирной – НВ-осциллятора (1).

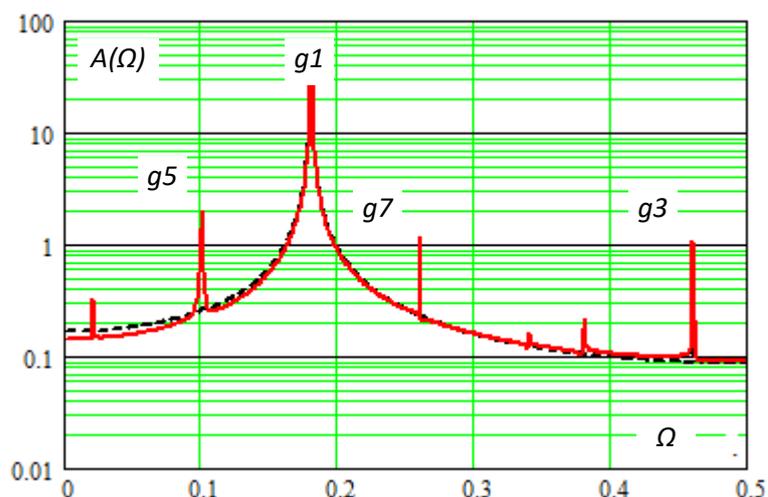


Рис. 3. Амплитудные спектры НВ- и ДВ-осцилляторов

Символами gK отмечены гармоники с номерами K . Здесь следует обратить внимание на неустраняемый эффект подмены частот (наложения

спектров) гармоник автоколебаний в дискретном времени [16]. Что касается основных частот автоколебаний, то они в представленном примере у осцилляторов (1) и (9) весьма близки.

4. Разновидности ДВ-осцилляторов томсоновского типа

Основываясь на дискретном отображении (9), можно предложить еще ряд ДВ-автогенераторов томсоновского типа.

Вариант уравнения движения (9) нетрудно получить, если ввести в рассмотрение параметр консервативности резонатора ДВ-автогенератора:

$$\delta = 1 - \pi\nu \rightarrow \exp(-\pi\nu).$$

Тогда (9) принимает вид

$$x_n - 2\delta \cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} + \delta^2 x_{n-2} = 2\pi\nu p S(x_{n-1})(\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} - x_{n-2}), \quad (12)$$

Очевидно, что при $\delta = 1$ и $S(x) = 1 - x^2$ разностное уравнение

$$x_n - 2\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} + x_{n-2} = 2\pi\nu p(1 - x_{n-1}^2)(\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} - x_{n-2}),$$

представляет собой результат дискретизации времени в уравнении ван дер Поля в его стандартной форме записи [4]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0 \gamma (1 - x^2) \frac{dx}{dt},$$

где $\gamma = p/Q$ – константа глубины обратной связи.

Следует отметить, что представленные выше автоколебательные системы являются изохронными. Неизохронность (зависимость частоты от амплитуды автоколебаний [1]) нетрудно ввести в уравнения движения (9), (12), путем замены в их правых частях

$$\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} - x_{n-2} \rightarrow \kappa x_{n-1} - x_{n-2},$$

где κ – константа $\cos(2\pi\Omega_0) \leq \kappa \leq 1$. Вместо (9), например, получим следующее уравнение ДВ-осциллятора:

$$x_n - 2\delta \cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} + \delta^2 x_{n-2} = 2\pi\nu p S(x_{n-1})(\kappa x_{n-1} - x_{n-2}). \quad (13)$$

Неизохронность и подмена частот [16] существенно усложняют динамику ДВ-автоколебаний. На рис. 4 в качестве примера приведен амплитудный спектр

автоколебаний ДВ-осциллятора (13) с дифференциальной крутизной (10) и параметрами $\Omega_0 = 0.242$, $Q = 20$, $p = 6$, $\kappa = 1$. Качественно спектр автоколебаний соответствует совокупности взаимодействующих монохроматических линий, как это имеет место в лазерах при генерации импульсов в режиме синхронизации мод [18]. Форма осцилляций со спектром на рис. 4 и их огибающая показаны на рис. 5. Отчетливо просматриваются импульсы огибающей.

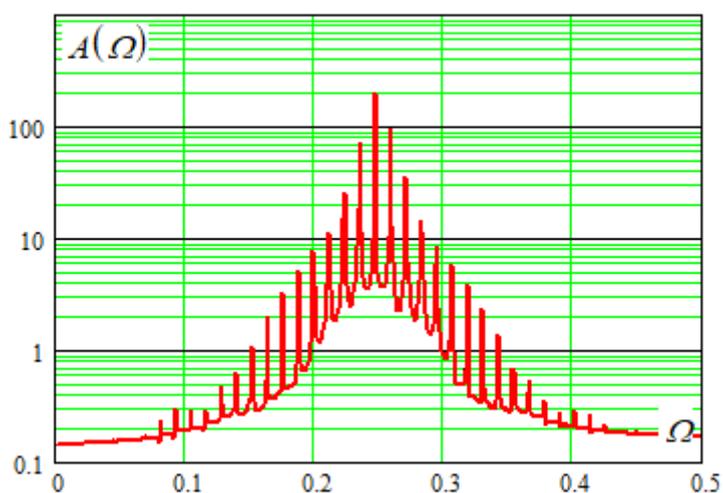


Рис. 4. Амплитудный спектр неизохронного ДВ-автогенератора

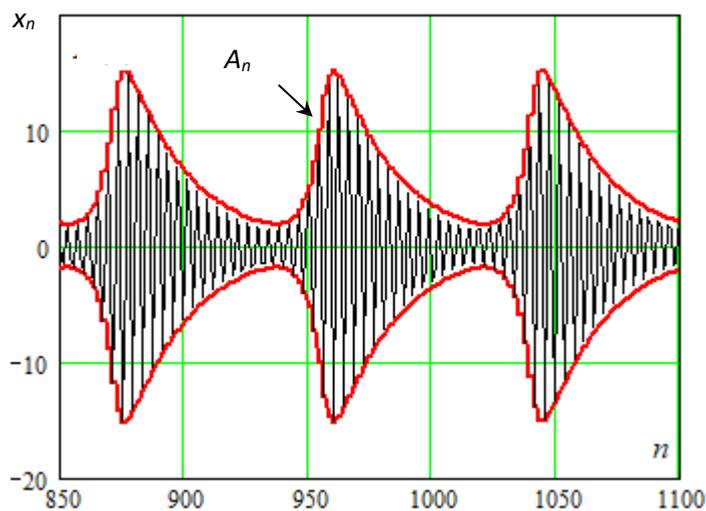


Рис. 5. Форма осцилляций и огибающая ДВ-автоколебаний

Заключение

Предложенный метод дискретизации времени в дифференциальном уравнении системы томсоновского типа (квазигармонической автоколебательной системы) позволяет перейти к рассмотрению дискретных отображений, гарантированно обладающих динамическими характеристиками аналоговых систем-прототипов. Такие отображения можно использовать в качестве нелинейных функциональных узлов в численных моделях сложных радиоэлектронных устройств. Кроме того, они могут служить основой алгоритмов обработки дискретных (цифровых) сигналов, таких, например, как синхронное и частотное детектирование [18].

При значительных превышениях порога генерации, когда перестает выполняться условие квазилинейности исходной автоколебательной системы, дискретные отображения приобретают новые свойства, позволяющие рассматривать их как самостоятельные объекты нелинейной динамики в дискретном времени.

Литература

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. *Теория автоколебаний*. Москва, Наука. 1981. 508 с.
2. Мюррей Дж. *Математическая биология: Т I. Введение*. Москва, Ижевск. НИЦ РХД. Институт компьютерных исследований. 2009. 776 с.
3. Jenkins A. Self-oscillations. *Physics Reports*. 2013. V.525. №2. P.167-222.
4. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. *Нелинейные колебания*. Москва, Физматлит. 2005. 292 с.
5. Кузнецов А.П., Селиверстова Е.С., Трубецков Д.И., Тюрюкина Л.В. Феномен уравнения ван дер Поля. *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2014. Т.22. №4. С.3-42.
6. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. *Основы теории колебаний*. Изд. 2-е. Москва, Наука. 1988. 392 с.
7. Оппенгейм А., Шафер Р. *Цифровая обработка сигналов*. Москва, Техносфера. 2006. 856 с.

8. Заславский Г.М. *Гамильтонов хаос и фрактальная динамика*. Москва, Ижевск. НИЦ РХД. Ижевский институт компьютерных исследований. 2010. 472 с.
9. Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Синхронизация автоколебательной системы Ва дер Поля – Дуффинга короткими импульсами. *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2004. Т.12. №5. С.16-31.
10. Зайцев В.В., Давыденко С.В., Зайцев О.В. Динамика автоколебаний дискретного осциллятора ван дер Поля. *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2000. Т.3. №2. С.64-67.
11. Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В. Бифуркация Богданова – Такенса: от непрерывной к дискретной модели. *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2009. Т.17. №6. С.139-158.
12. Морозов А.Д. *Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах*. Москва, Ижевск. НИЦ РХД. Ижевский институт компьютерных исследований. 2005. 424 с.
13. Зайцев В.В., Федюнин Э.Ю., Шилин А.Н. Конечные разности в задаче синтеза нелинейных ДВ-осцилляторов. *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2017. Т.20. №2. С.35-41.
14. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. *Теория колебаний в радиотехнике*. Москва, Наука. 1984. 320 с.
15. Зайцев В.В. О дискретных отображениях осциллятора ван дер Поля. *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2014. Т.17. №1. С.35-40.
16. Зайцев В.В., Стулов И.В. О влиянии подмененных гармоник на динамику автоколебаний в дискретном времени. *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2015. Т.23. №6. С.40-46. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2015-23-6-40-46>
17. Звелто О. *Принципы лазеров. Изд. 3-е*. Москва, Мир. 1990. 560 с.
18. Линдсей В. *Системы синхронизации в связи и управлении*. Москва, Мир. 1972. 600 с.

Для цитирования:

Зайцев В.В., Карлов А.В. Томсоновские автогенераторы в дискретном времени: синтез динамических систем. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2022. №3. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.3.1>