

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.3.3>

УДК: 621.3.049.774; 004.94

## **ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОГИБАЮЩИХ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СХЕМ С БОЛЬШИМ РАЗБРОСОМ ЧАСТОТ**

**С.Г. Русаков, С.Л. Ульянов**

**Институт проблем проектирования в микроэлектронике РАН,  
124365, г. Москва, ул. Советская, д. 3**

Статья поступила в редакцию 12 апреля 2022 г.

**Аннотация.** Обсуждаются подходы к повышению вычислительной эффективности методов огибающих для расчета переходного процесса и установившегося режима в радиотехнических интегральных схемах. Предложен способ вычисления спектральных компонент выходного сигнала после окончания анализа с помощью метода Фурье огибающих. Представлен адаптивный алгоритм продолжения огибающих, в котором используются традиционные методы для интегрирования уравнений огибающей и одношаговые методы высокого порядка точности для интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений схемы на периоде высокой частоты.

**Ключевые слова:** радиотехнические схемы, схемотехническое моделирование, периодический установившийся режим, метод Фурье огибающих, метод продолжения огибающих.

**Abstract.** Numerical techniques to enhance the computational efficiency of envelope methods for determining steady state and transient response in radio-frequency circuits are discussed. A way of computing spectral components of the output signal after completion of the analysis using Fourier envelope method is suggested. The adaptive

algorithm of envelope following is presented which exploits high order one step methods for integrating circuit differential equations on the period of high frequency.

**Key words:** radio frequency circuits, circuit simulation, periodic steady state, Fourier envelope method, envelope following method.

**Автор для переписки:** Ульянов Сергей Леонидович, ulyas@ippm.ru

## **Введение**

При проектировании интегральных схем радиотехнического назначения широко применяются системы автоматизации схемотехнического проектирования (схемные симуляторы), в которых выполняется математическое моделирование схем на транзисторном уровне. Стандартными видами анализа в схемных симуляторах являются расчет переходного процесса и периодического или квазипериодического установившегося режима. Анализ переходного процесса основан на применении методов интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Для расчета установившегося режима используется метод пристрелки во временной области и метод гармонического баланса (ГБ) в частотной области [1, 2].

Однако существует ряд задач, для решения которых эти методы становятся неэффективными. К таким задачам следует отнести моделирование схем для обработки узкополосных сигналов, которые представляют собой высокочастотный сигнал, модулированный по амплитуде, фазе или частоте низкочастотным информационным сигналом. При этом целью моделирования может быть как расчет переходного процесса, так и определение установившегося режима.

Отношение низшей частоты в модулирующем сигнале к несущей определяет относительное частотное разрешение моделирования. Поэтому применение традиционных методов переходного анализа является чрезвычайно затруднительным, так как высокая частота несущей требует малого шага интегрирования, в то время как низкая частота модуляции определяет относительно большой интервал интегрирования.

При моделировании схем с цифровой модуляцией, расчетах характеристик нелинейных искажений в таких схемах в качестве тестовых сигналов применяются сложные входные воздействия, содержащие большое количество тонов. При этом определение установившегося режима представляет значительные трудности, так как непосредственное применение метода квазипериодического гармонического баланса приводит к неприемлемо большой размерности задачи.

Поэтому для анализа схем с высокочастотными сигналами с медленно меняющимися параметрами предложены методы огибающих (см., например, [1, 2]). Такие методы позволяют значительно ускорить анализ переходного процесса, а также могут применяться для расчета установившегося режима. В основе методов лежит независимое моделирование высокочастотных и низкочастотных компонент сигналов в схеме.

Метод Фурье огибающих (circuit envelope [3], Fourier envelope [2, 4]) применяется для моделирования схем при воздействии модулированного высокочастотного сигнала, когда модулирующий сигнал не является гармоническим или полигармоническим, а может быть, в частности, импульсным. В этом методе высокочастотные компоненты сигналов моделируются в частотной области с помощью гармонического баланса. Данный метод применяется для расчета схем при наличии сложной цифровой модуляции, а также для расчета переходных процессов в радиотехнических схемах [2].

В методах продолжения огибающих [5, 6, 7] высокочастотные компоненты сигналов моделируются во временной области. Первоначально метод продолжения огибающих разработан для решения жестких сильно осциллирующих систем дифференциальных уравнений [8]. Идея метода основана на получении значений решения в моменты времени, кратные периоду. Тогда через полученные точки можно провести плавную кривую (огибающую), медленно меняющуюся со временем, что дает возможность ее продолжения с большим шагом. Так как значения огибающей совпадают с решением исходной системы уравнений в моменты кратные периоду, то это решение может быть

найден из значения огибающей и интегрирования исходной системы уравнений на одном периоде. Основным достоинством метода является значительное сокращение количества периодов моделирования за счет большого шага по огибающей. Вычислительная эффективность метода достигается при условии достаточно медленного изменения огибающей во времени за счет пропуска нескольких периодов высокой частоты и решения граничной задачи только для небольшого количества интервалов.

В алгоритме продолжения огибающих [6], внедренном в коммерческий схемный симулятор Spectre, для получения следующего значения огибающей используется полиномиальная интерполяция по трем временным точкам. Поэтому погрешность такой аппроксимации определяет величину шага. В работах [9, 10] была предложена неявная схема при решении уравнений огибающей, что существенно повысило устойчивость метода. В работах [11, 12] метод продолжения огибающих основан на использовании методов интегрирования Обрешкова.

Таким образом, численные методы интегрирования систем ОДУ применяются как для интегрирования уравнений огибающей, так и для интегрирования исходной системы уравнений на одном периоде. Вычислительная эффективность метода продолжения огибающих существенно зависит от применяемых численных методов интегрирования систем ОДУ.

В данной работе рассматриваются вопросы совершенствования методов огибающих. Для метода Фурье-огибающих предлагается способ вычисления спектральных компонент выходного сигнала после окончания процесса интегрирования. В методе продолжения огибающих используются традиционные методы интегрирования 1-2 порядков для интегрирования уравнений огибающей. Для интегрирования системы ОДУ схемы на одном периоде используются методы интегрирования порядка 1-4, полученные с помощью формулы Обрешкова, которые не требуют вычисления производных высших порядков.

## **1. Метод Фурье огибающих**

Модель схемы во временной области может быть задана в зарядовой форме системой дифференциальных уравнений (см., например, [1, 2]):

$$\frac{dq(v(t))}{dt} + i(v(t)) + u(t) = 0. \quad (1)$$

Здесь в соответствии с узловым методом  $v(t)$ ,  $i(v(t))$ ,  $q(v(t))$  – вектор-функции напряжений в узлах схемы, узловых токов и зарядов, соответственно,  $u(t)$  – вектор входных источников. Размерность всех векторов  $N$ . Если схема содержит источники напряжения или индуктивности, то модель схемы имеет тот же вид системы (1), однако вектор-функции  $v(t)$ ,  $i(v(t))$ ,  $q(v(t))$  содержат дополнительные компоненты в соответствии с расширенным узловым базисом.

При воздействии на схему периодического входного сигнала с периодом  $T$  и частотой  $\omega = 2\pi/T$  установившийся периодический режим в схеме может быть определен методом гармонического баланса, в рамках которого решение (1) представляется в виде ряда Фурье [1]

$$x(t) = \sum_k X_k e^{jk\omega t}, \quad (2)$$

где  $X_k$  – коэффициенты ряда.

При воздействии на схему двух или более периодических входных сигналов установившийся режим в схеме является квазипериодическим. Для двух входных сигналов с частотами  $\omega_1 = 2\pi/T_1$ ,  $\omega_2 = 2\pi/T_2$  и периодами  $T_1$ ,  $T_2$  справедливо представление квазипериодического сигнала в виде ряда Фурье [1]

$$x(t) = \sum_k \sum_l X_{kl} e^{j(k\omega_1 + l\omega_2)t}. \quad (3)$$

Здесь  $X_{kl}$  – коэффициенты ряда,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  – фундаментальные частоты.

Изменяя порядок операций, можно записать

$$x(t) = \sum_k \tilde{X}_k(t) e^{jk\omega_1 t}, \quad (4)$$

где  $\tilde{X}_k(t) = \sum_l X_{kl} e^{jl\omega_2 t}$  – зависящие от времени коэффициенты ряда.

Приведенная запись (4) совпадает с одномерным рядом Фурье за исключением того факта, что сами коэффициенты ряда уже не являются

постоянными, а оказываются периодическими с периодом  $T_2$  функциями времени.

В методе Фурье огибающих периодичность коэффициентов не предполагается. В рамках этого метода требуется, чтобы функции  $\tilde{X}_k(t)$  медленно менялись во времени. Условие медленного изменения функций необходимо, чтобы полосы соседних гармоник не перекрывались и представление (4) было единственным.

Предполагая представление (4) для вектора узловых переменных, токов и зарядов и подставляя их в уравнение (1), можно получить уравнение метода в векторной форме [1, 2]

$$\frac{d\tilde{Q}(\tilde{V}(t))}{dt} + j\Omega\tilde{Q}(\tilde{V}(t)) + \tilde{I}(\tilde{V}(t)) + \tilde{U}(t) = 0. \quad (5)$$

Здесь компоненты векторов  $\tilde{V}(t)$ ,  $\tilde{Q}(\tilde{V}(t))$ ,  $\tilde{I}(\tilde{V}(t))$ ,  $\tilde{U}(t)$  содержат гармоники частоты  $\omega_1$ , с номерами  $k=-K, \dots, 0, \dots, K$ , где  $K$  – число гармоник частоты  $\omega_1$ ;  $\Omega$  – блочно-диагональная матрица с элементами  $k\omega_1$  на диагонали каждого блока. Выражение (5) представляет собой систему ОДУ относительно  $(2K+1)N$  переменных.

Для численного решения системы уравнений (5) необходимо применить метод интегрирования из числа методов, традиционно применяемых в схемотехническом моделировании. При этом, так как система уравнений метода Фурье огибающих, как правило, является жесткой [13], целесообразно использовать соответствующие численные методы, например, методы ФДН порядка не выше 2.

Предположим, что решение известно в точках  $t_i$ ,  $i=0, 1, \dots, n$ , и необходимо получить решение в точке  $t_{n+1}$ . Применяя линейную многошаговую формулу ФДН [14], можно получить

$$\frac{d\tilde{Q}_k(\tilde{V}(t_{n+1}))}{dt} = -\frac{1}{h} \sum_{j=0}^M \alpha_j \tilde{Q}_k(\tilde{V}_{n+1-j}), \quad (6)$$

где  $h = t_{n+1} - t_n$ ,  $\tilde{V}_{n+1-j} = \tilde{V}(t_{n+1-j})$ ,  $M$  – порядок численного метода.

Подставляя (6) в (5), получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно  $\tilde{V}_{n+1}$

$$-\frac{1}{h}\alpha_0\tilde{Q}_k(\tilde{V}_{n+1}) + jk\omega_1\tilde{Q}_k(\tilde{V}_{n+1}) + \tilde{I}_k(\tilde{V}_{n+1}) + \tilde{U}_k(t_{n+1}) - \frac{1}{h}\sum_{j=1}^M\alpha_j\tilde{Q}_k(\tilde{V}_{n+1-j}) = 0, \quad (7)$$

которая решается методом Ньютона.

В результате численного решения системы уравнений (5) получаются комплексные векторы решения  $\tilde{V}_s$ , соответствующие моментам времени  $s=0, 1, \dots, n$ . Предполагая периодическое продолжение дискретных сигналов  $\tilde{V}_s$ , можно предложить эффективный способ вычисления спектральных компонент.

## 2. Вычисление спектральных компонент в методе Фурье огибающих

Для расчета выходных параметров схем необходимо располагать спектрами сигналов. Эти спектры можно получить путем применения дискретного преобразования Фурье к комплексным значениям сигналов, полученных в результате моделирования с помощью метода Фурье огибающих. При этом потребуется интерполяция полученных данных.

Однако для получения коэффициентов Фурье можно применить подход, основанный на вычислении интегралов Фурье [15], который использовался для выполнения Фурье анализа после расчета переходных процессов. Достоинством данного подхода по сравнению с применением дискретного преобразования Фурье является то, что он не требует равномерного распределения точек отсчета и не подвержен влиянию погрешностей интерполяции.

Обозначим полученные в результате анализа векторы  $X(t)$ . Особенностью применения подхода в случае метода Фурье-огибающих является то, что сигналы представлены комплексными векторами

$$X(t) = X^r(t) + jX^i(t), \quad (8)$$

В этом случае коэффициенты Фурье можно рассчитывать для действительной и мнимой частей отдельно. Коэффициенты для действительной части вычисляются по формуле

$$X_k^r = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X^r(t) \exp(-jk\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X^r(t) [\cos(k\omega t) - j \sin(k\omega t)] dt. \quad (9)$$

Формула для мнимой части имеет аналогичный вид.

Введем обозначения

$$X_k^{r,r} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X^r(t) \cos(k\omega t) dt, X_k^{r,i} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X^r(t) \sin(k\omega t) dt, \quad (10)$$

$$X_k^{i,r} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X^i(t) \cos(k\omega t) dt, X_k^{i,i} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X^i(t) \sin(k\omega t) dt. \quad (11)$$

Тогда коэффициенты Фурье

$$X_k = X_k^{r,r} + X_k^{i,i} + j(-X_k^{r,i} + X_k^{i,r}). \quad (12)$$

Для получения  $X_k^r$  необходимо вычислить интегралы (10). Пусть решение уравнений (5) было получено в  $n+1$  точках, тогда интегралы (10) можно представить в виде суммы интегралов по каждому временному подынтервалу [15]

$$X_k^{r,r} = \frac{1}{T} \sum_{s=1}^n \int_{t_{s-1}}^{t_s} X^r(t) \cos(k\omega t) dt, X_k^{r,i} = \frac{1}{T} \sum_{s=1}^n \int_{t_{s-1}}^{t_s} X^r(t) \sin(k\omega t) dt. \quad (13)$$

Предположим, что внутри каждого подынтервала функции  $X^r(t)$  аппроксимируются интегрирующими полиномами вида [14]

$$X^r(\tau) \approx \sum_{m=0}^M d_m \tau^m, \quad (14)$$

Здесь  $M$  – порядок полинома,  $\tau = (t_s - t) / h$ ,  $h = t_s - t_{s-1}$ ,  $d_m$  – коэффициенты полиномов. Подстановка (14) в (13) дает

$$X_k^{r,r} = \frac{1}{T} \sum_{s=1}^n \sum_{m=0}^M d_m I_m^k, I_m^k = \int_{t_{s-1}}^{t_s} \left( \frac{t_s - t}{h} \right)^m \cos(k\omega t) dt, \quad (15)$$

$$X_k^{r,i} = \frac{1}{T} \sum_{s=1}^n \sum_{m=0}^M d_m J_m^k, J_m^k = \int_{t_{s-1}}^{t_s} \left( \frac{t_s - t}{h} \right)^m \sin(k\omega t) dt \quad (16)$$

Интегралы в (15), (16) вычисляются аналитически с помощью интегрирования по частям



$$I_m^k = \int_{t_{s-1}}^{t_s} \left( \frac{t_s - t}{h} \right)^m \cos(k\omega t) dt = -h \cos(k\omega t_s) \int_1^0 \tau^m \cos(k\omega \tau h) d\tau - h \sin(k\omega t_s) \int_1^0 \tau^m \sin(k\omega \tau h) d\tau, \quad (17)$$

$$J_m^k = \int_{t_{s-1}}^{t_s} \left( \frac{t_s - t}{h} \right)^m \sin(k\omega t) dt = -h \sin(k\omega t_s) \int_1^0 \tau^m \cos(k\omega \tau h) d\tau + h \cos(k\omega t_s) \int_1^0 \tau^m \sin(k\omega \tau h) d\tau. \quad (18)$$

Используя известные формулы

$$\int \tau^m \cos(a\tau) d\tau = \begin{cases} \sum_{i=0}^m \frac{m! \tau^i}{i! a^{m-i+1}} \sin(a\tau + \frac{\pi}{2}(m-i)) & a \neq 0 \\ \frac{\tau^{m+1}}{m+1} & a = 0 \end{cases}, \quad (19)$$

$$\int \tau^m \sin(a\tau) d\tau = \begin{cases} -\sum_{i=0}^m \frac{m! \tau^i}{i! a^{m-i+1}} \cos(a\tau + \frac{\pi}{2}(m-i)) & a \neq 0 \\ 0 & a = 0 \end{cases}, \quad (20)$$

после преобразований получаем для  $k \neq 0$  [16]

$$I_m^k = \frac{m!}{(k\omega)^{m+1} h^m} \sin(k\omega t_s - \frac{\pi}{2}m) - \sum_{i=0}^m \frac{m!}{i! (k\omega)^{m-i+1} h^{m-i}} \sin(k\omega t_{s-1} - \frac{\pi}{2}(m-i)), \quad (21)$$

$$J_m^k = -\frac{m!}{(k\omega)^{m+1} h^m} \cos(k\omega t_s - \frac{\pi}{2}m) + \sum_{i=0}^m \frac{m!}{i! (k\omega)^{m-i+1} h^{m-i}} \cos(k\omega t_{s-1} - \frac{\pi}{2}(m-i)) \quad (22)$$

и для  $k = 0$

$$I_m^k = \frac{h}{m+1}, \quad (23)$$

$$J_m^k = 0. \quad (24)$$

$(M+1)$  коэффициентов интегрирующих полиномов порядка  $M$  определяются из условия, что полином принимает значения  $X_s, X_{s-1}, \dots, X_{s-M}$  во временных точках  $t_s, t_{s-1}, \dots, t_{s-M}$ . Это условие может быть записано в виде линейной системы относительно коэффициентов полинома  $d_0, d_1, \dots, d_M$  [14]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \tau_2 & \tau_2^2 & \dots & \tau_2^M \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \tau_M & \tau_M^2 & \dots & \tau_M^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_s \\ X_{s-1} \\ X_{s-2} \\ \dots \\ X_{s-M} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

$$\tau_2 = (h + h_{s-1}) / h, \dots, \tau_M = (h + h_{s-1} + \dots + h_{s-M-1}) / h.$$

Так как коэффициенты линейной системы зависят только от шага по времени и одинаковы для всех узловых переменных, ее решение выполняется только один раз на каждом временном интервале. Для практически важного случая методов интегрирования первого и второго порядка можно получить явные выражения для коэффициентов.

При практической реализации метода Фурье огибающих результаты анализа записываются в файл. При этом, кроме вектора узловых переменных, необходимо сохранять временные точки, шаги по времени и порядки интегрирующих полиномов. Тогда процедура вычисления коэффициентов Фурье может быть оформлена как этап постпроцессорной обработки результатов анализа.

### 3. Метод продолжения огибающей

Колебательный характер сигналов с медленно меняющимися параметрами обусловлен собственной инерционностью схемы при воздействии на схему периодического сигнала  $u(t)$  с периодом  $T$ , либо внешним возбуждением в виде медленно меняющегося периодического сигнала.

Пусть  $v(t)$  – решение системы (1) и  $v(mT)$  – значения этого решения в моменты времени  $t=mT$ , где  $m$  – целое. Введем огибающую функцию  $y(t)$  такую, что  $y(mT) = v(mT)$ . В методе продолжения огибающих предполагается, что огибающая  $y(t)$  удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению, решение которого может быть получено с использованием численных методов [8]. Пусть  $y_m, y_{m+1}$  – значения огибающей в моменты времени  $t=mT, t=(m+1)T$ , т.е.  $y_m = y(mT), y_{m+1} = y((m+1)T)$ .

Эти значения могут быть получены с помощью решения исходной системы уравнений (1) на интервале одного периода  $[mT, (m+1)T]$ .

Тогда значение огибающей  $y_{m+n} = y((m+n)T)$  в момент времени  $t=(m+n)T$  может быть получено с использованием известных методов интегрирования. Обозначая шаг  $H=nT$ , применение обратного метода Эйлера дает [9, 10]

$$y_{m+n} = y_m + \frac{H}{T}(y_{m+n+1} - y_{m+n}). \quad (26)$$

Для метода трапеций имеем [9, 10]

$$y_{m+n} = y_m + \frac{H}{2T}(y_{m+n+1} - y_{m+n} + y_{m+1} - y_m). \quad (27)$$

Формулы интегрирования (26), (27) – неявные, так как содержат неизвестные величины в правой части. В [10] показано, что эти методы сохраняют свойство А-устойчивости исходных обратного метода Эйлера и метода трапеций. Значения  $y_{m+n+1}$  находятся с помощью интегрирования исходной системы уравнений (1) на интервале  $[(m+n)T, (m+n+1)T]$  с начальными условиями  $y_{m+n}$ . Используя эволюционную функцию (функцию переходов), имеем  $y_{m+n+1} = \varphi(y_{m+n})$ . Подставляя  $\varphi(y_{m+n})$  в (26), (27), получим нелинейные алгебраические уравнения относительно неизвестного значения  $y_{m+n}$  [10]

$$r^E(y_{m+n}) = y_{m+n} - \varphi(y_{m+n}) + \frac{T}{H}(y_{m+n} - y_m) = 0, \quad (28)$$

$$r^T(y_{m+n}) = y_{m+n} - \varphi(y_{m+n}) + y_m - \varphi(y_m) + \frac{2T}{H}(y_{m+n} - y_m) = 0. \quad (29)$$

Уравнения (28), (29) решаются методом Ньютона

$$J \Delta y_{m+n}^j = -r(y_{m+n}^j), \quad (30)$$

где  $\Delta y_{m+n}^j$  – ньютоновская поправка,  $j$  – номер итерации. Матрица якобиана имеет вид

$$J = \left(1 + \frac{T}{H}\right)I - \frac{d\varphi}{dy_{m+n}}, \quad (31)$$

$$J = \left(1 + \frac{2T}{H}\right)I - \frac{d\varphi}{dy_{m+n}} \quad (32)$$

для уравнений (28), (29), соответственно.

Вычисление матрицы чувствительностей  $\frac{d\varphi}{dy}$  может быть эффективно

выполнено в процессе интегрирования основной системы ОДУ (1) на интервале  $[(m+n)T, (m+n+1)T]$  [1]. При этом требуется небольшое количество дополнительных операций по решению линейных систем уравнений, так как необходимая для вычислений матрица определяется и декомпозируется в процессе интегрирования основной системы ОДУ (1) с начальными условиями  $v_0 = y_{m+n}$ .

В работе [17] представлен адаптивный алгоритм, который позволяет проводить интегрирование огибающей, оценку шага и интегрирование основной системы ОДУ (1) (анализ переходного процесса). Адаптивный алгоритм продолжения огибающих построен по принципу прогноза-коррекции. В алгоритме используются традиционные методы интегрирования 1–2 порядков для интегрирования уравнений огибающей, интегрирования исходной системы уравнений на одном периоде и стандартного анализа переходного процесса.

#### 4. Применение одношаговых методов высокого порядка

Применение численных методов интегрирования уравнений метода продолжения огибающих порядка выше второго при сохранении свойства А-устойчивости метода должно привести к увеличению величины шага по огибающей и в конечном итоге сокращению временных затрат. В работах [11, 12] предлагается использовать методы, полученные с помощью формулы Обрешкова.

Методы Обрешкова основаны на применении интерполяционной формулы Эрмита, которая позволяет получить линейную связь между  $x_{n+1}$  и их производными по времени  $x_{n+1}^{(i)} = d^{(i)}x(t_{n+1})/dt^{(i)}$ . Для одношаговых методов формула Обрешкова имеет вид [18]

$$x_{n+1} - x_n = -\sum_{i=1}^k \alpha_i h^i x_{n+1}^{(i)} + \sum_{i=1}^l \beta_i h^i x_n^{(i)} + O(h^{l+k+1}), \quad (33)$$

где  $x_n = x(t_n)$ ,  $x_{n+1} = x(t_{n+1})$ ,

$$\alpha_i = (-1)^i \frac{(l+k-i)!}{(l+k)!} \frac{k!}{i!(k-i)!}, \quad \beta_i = \frac{(l+k-i)!}{(l+k)!} \frac{l!}{i!(l-i)!}$$

В формуле (33) используются значения переменных и их  $l$  производных при  $t_n$ , и  $k$  производных при  $t_{n+1}$ . Формула (33) позволяет получить несколько методов различного порядка  $p=l+k$ . Показано, что методы являются А-устойчивыми при условии  $k-2 \leq l \leq k$  [19].

По аналогии с (26), (27) можно записать [11, 12]

$$y_{m+n} - y_m = -\sum_{i=1}^k \alpha_i H^i y_{m+n}^{(i)} + \sum_{i=1}^l \beta_i H^i y_m^{(i)}. \quad (34)$$

Основная трудность применения формулы Обрешкова для численного интегрирования системы ОДУ связана с необходимостью вычисления производных высоких порядков и частных производных для формирования матрицы якобиана. В работе [12]  $k$  производных в точке  $t=(m+n)T$  и  $l$  производных в точке  $t=mT$  предлагается рассчитывать с помощью метода конечных разностей. Для этого необходимо иметь значения решения в точках  $mT$ ,  $(m+1)T$ ...,  $(m+l)T$  и рассчитать решения в точках  $(m+n)T$ ,  $(m+n+1)T$ ...,  $(m+n+k)T$ , что предполагает выполнение переходного анализа на соответствующих интервалах времени. Кроме вычисления решения здесь также необходимо выполнить вычисление матриц чувствительности для каждого из этих интервалов, которые затем используются для формирования матрицы якобиана. Подстановка конечно-разностной аппроксимации производных в (34) с использованием эволюционных функций  $y_{m+n+i} = \varphi(y_{m+n+i-1})$ ,  $i=1, \dots, k$  приводит к системе нелинейных уравнений размерности  $(k+1)N$  относительно вектора  $[y_{m+n} \quad y_{m+n+1} \quad \dots \quad y_{m+n+k}]^T$ , которая решается методом Ньютона [12]. Таким образом, данный подход приводит к существенному росту вычислительной сложности по сравнению с методами 1–2 порядка. Как показано

на примерах в [12], сокращение временных затрат может достигаться за счет большей величины шагов по огибающей и распараллеливания вычислений решения и матриц чувствительностей на разных интервалах.

В отличие от рассмотренного выше подхода в данной работе предлагается алгоритм продолжения огибающей, в котором для интегрирования уравнений огибающей используются традиционные методы интегрирования 1–2 порядка. Для интегрирования исходной системы уравнений на одном периоде используются методы интегрирования порядка 1–4, полученные с помощью формулы Обрешкова, в которых не требуется вычислять производные высших порядков нелинейных членов системы ОДУ схемы [20].

В работе [20] показано, что, ограничиваясь случаем  $l \leq 2, k \leq 2$ , формула (33) позволяет получить методы порядка 1–4. Заметим, что случай  $l=0, k=1$  соответствует обратному методу Эйлера и  $l=k=1$  дает формулу трапеций.

В частности, для  $l=k=2$  (метод 4 порядка) получены нелинейные алгебраические уравнения относительно векторов  $v_{n+1}, \dot{v}_{n+1}$  [20]

$$\begin{aligned} r_1(v_{n+1}, \dot{v}_{n+1}) &= q(v_{n+1}) - q_n + \alpha_1 h [-i(v_{n+1}) - u_{n+1}] + \\ \alpha_2 h^2 [-G(v_{n+1}) \dot{v}_{n+1} - \dot{u}_{n+1}] - \beta_1 h \dot{q}_n - \beta_2 h^2 \ddot{q}_n &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

$$r_2(v_{n+1}, \dot{v}_{n+1}) = i(v_{n+1}) + \frac{C(v_{n+1})}{h} (h \dot{v}_{n+1}) + u_{n+1} = 0. \quad (36)$$

Аналогичные уравнения можно получить для случая  $l=1, k=2$  и  $l=0, k=2$ . Применяя метод Ньютона для решения уравнений (35), (36) и опуская аргументы функций, линейная система на ньютоновской итерации имеет вид [20]

$$\begin{bmatrix} C - \alpha_1 h G & -\alpha_2 h G \\ G & C/h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n+1}^{(j+1)} - v_{n+1}^{(j)} \\ h(\dot{v}_{n+1}^{(j+1)} - \dot{v}_{n+1}^{(j)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_1 \\ -r_2 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Здесь  $j$  – номер итерации и  $C = \frac{\partial q(v(t))}{\partial v}$ ,  $G = \frac{\partial i(v(t))}{\partial v}$ .

В полученных выражениях не требуется вычисление производных высших порядков, поэтому реализация анализа переходного процесса с использованием

одношаговых методов интегрирования на основе формулы Обрешкова основана на использовании существующих в симуляторе моделей элементов схем.

Матрица чувствительностей  $\frac{d\varphi}{dy}$  вычисляется в процессе интегрирования основной системы ОДУ (1) на интервале  $[(m+n)T, (m+n+1)T]$  с начальными условиями  $v_0 = y_{m+n}$ . По окончании интегрирования  $\frac{dv}{dv_0}$  дает значения искомой матрицы.

Адаптивный алгоритм продолжения огибающих построен по принципу прогноза-коррекции и использует методы с переменным шагом и порядком 1–2 для интегрирования уравнений огибающей и методы с порядком 1–4 для интегрирования основной системы ОДУ (1) [21]. На рис. 1 показаны основные шаги алгоритма.

Адаптивный алгоритм позволяет проводить интегрирование огибающей, оценку шага и интегрирование исходной системы уравнений на одном периоде. При условии значительного сокращения шага по огибающей в алгоритме предусмотрен переход на анализ переходного процесса.

- 1) выполнить анализ переходного процесса на интервале  $[0, T]$ . Положить  $m=0, n=0, H=T$ .
- 2) положить  $m = m + n$ . Если  $mT > tstop$ , закончить.
- 3) положить  $n = H/T$ .
- 4) если  $H/T < 2$ , положить  $H = T, n = 1$ .  
Выполнить анализ переходного процесса на интервале  $[(m+n)T, (m+n+1)T]$  с начальным условием  $y_{m+1}$ . Вычислить новый шаг  $H$ .  
Перейти на шаг 2.
- 5) вычислить прогнозируемые значения огибающей  $y_{m+n}^p$  с текущим шагом  $H$  и текущим порядком метода.
- 6) выполнить анализ переходного процесса на интервале  $[(m+n)T, (m+n+1)T]$  с начальным условием  $y_{m+n}^p$ .
- 7) в процессе анализа вычислить  $\varphi(y_{m+n})$  и матрицу чувствительности  $\frac{d\varphi}{dy_{m+n}}$ .
- 8) выполнить коррекцию значения огибающей с помощью решения уравнений (30)
- 9) выполнить оценку локальной погрешности
- 10) если значение локальной погрешности меньше допустимого, принять шаг. Вычислить размер нового шага  $H$ , порядок метода. Перейти на шаг 2.
- 11) если значение локальной погрешности больше допустимого, отклонить шаг. Вычислить новое значение текущего шага  $H$ . Перейти на шаг 3.

Рис. 1. Адаптивный алгоритм продолжения огибающей

## 5. Результаты численного эксперимента

В экспериментальной программе схемотехнического моделирования реализованы метод Фурье огибающих, варианты адаптивного алгоритма продолжения огибающих с использованием традиционных методов интегрирования с переменным шагом и порядком 1–2 (EF) и с использованием методов Обрешкова (EF2).

*Моделирование схемы малошумящего усилителя.* На вход схемы подан гармонический сигнал с частотой 900 МГц и амплитудой 10 мВ, модулированный сигналом с частотой 5 МГц. Моделирование схемы выполнялось с помощью метода Фурье огибающих. Интервал интегрирования



огибающих был выбран равным десятикратному периоду низкой частоты для обеспечения достижения установившегося режима. Число гармоник однотонового гармонического баланса  $K=8$ . Спектральные компоненты рассчитывались на последнем периоде. Анализ потребовал интегрирования в 940 временных точках и 5163 итераций однотонового гармонического баланса.

Так как при данных входных сигналах в схеме устанавливается квазипериодический режим, то выполнялось моделирование с помощью двухтонового гармонического баланса с целью сравнения результатов расчета спектра выходного сигнала. На рис. 2 показан выходной сигнал усилителя во временной области, на рис. 3 – фрагмент спектра выходного сигнала, полученный с помощью метода Фурье огибающих. Получено хорошее согласование с результатами двухтонового гармонического баланса.

*Моделирование RL схемы.* Схема состоит из последовательного соединения R и L элементов. Несмотря на простоту, моделирование этой схемы сопряжено с трудностями. В частности, алгоритм продолжения огибающей программы Spectre приводит к значительной погрешности при вычислении отклика на синусоидальное воздействие с частотой 1кГц.

На рис. 4 показан график переходного процесса в схеме, полученный с помощью предложенного алгоритма (EF2) и анализа переходного процесса (TRAN). Шаг в алгоритмах EF, EF2 включает выполнение анализа переходного процесса на одном периоде при  $H=T$  и шаг по огибающей при  $H=nT$ . Общее число шагов (итераций) дает число периодов моделирования. В табл. 1 приведены значения общего числа шагов (#итераций), числа шагов по огибающей алгоритмов EF, EF2 и суммарное число временных точек. Для анализа TRAN в столбце #итераций указано число периодов моделирования.

Таблица 1. Число шагов алгоритма

| Алгоритм | #итераций | #шаги по огибающей | #врем. точек |
|----------|-----------|--------------------|--------------|
| TRAN     | 200       | -                  | 87259        |
| EF       | 50        | 46                 | 57540        |
| EF2      | 45        | 43                 | 13209        |

*Моделирование схемы умножителя* [10, 21]. На вход схемы подан синусоидальный сигнал с частотой 50 Гц и амплитудой 10 В. Для этой схемы рассчитывался переходной процесс на интервале 1000 периодов для определения периодического установившегося режима. Расчет выполнялся с помощью предложенного алгоритма (EF2), алгоритма EF и анализа переходного процесса (TRAN).

На рис. 5 приведен график переходного процесса в выходном узле схемы, полученный с помощью алгоритма EF2. При этом потребовалось: число итераций алгоритма – 78, общее число шагов по огибающей – 72. Таким образом, отношение числа рассчитанных в алгоритме периодов к их общему числу  $78/1000$ . В алгоритме EF число итераций алгоритма – 88, общее число шагов по огибающей – 78. Общее число временных точек в алгоритме EF2 по сравнению с алгоритмом EF меньше в 4 раза.

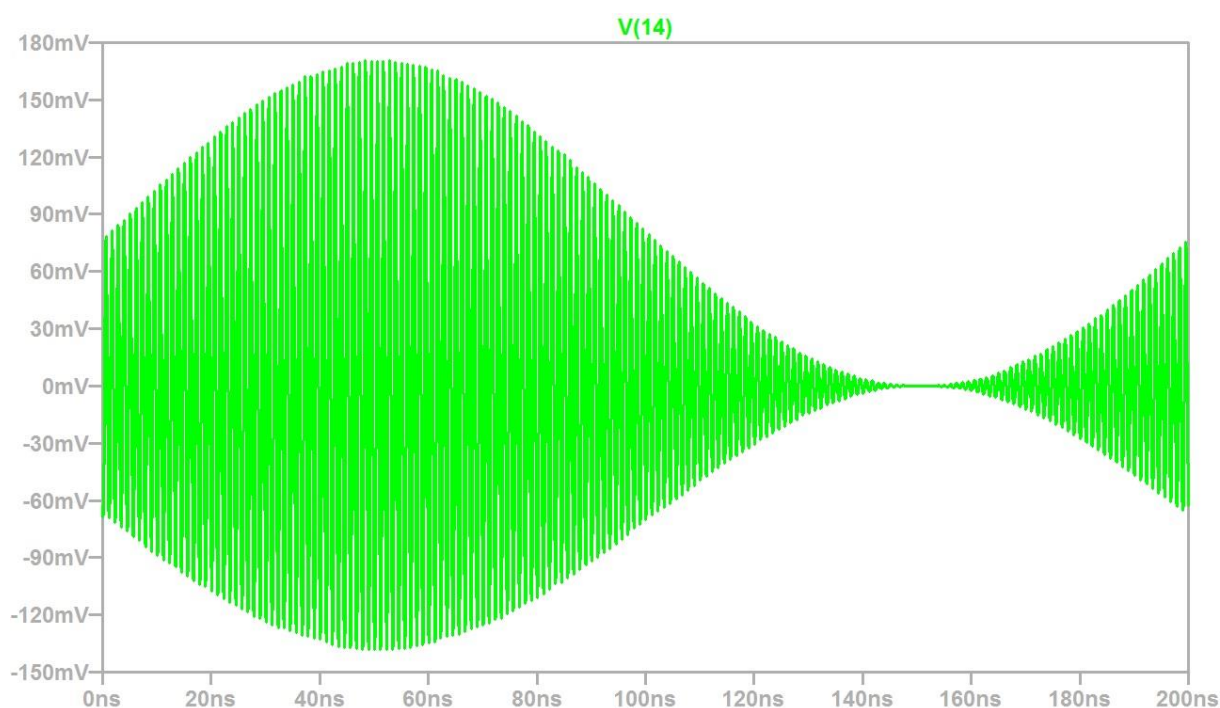


Рис. 2. Выходной сигнал усилителя

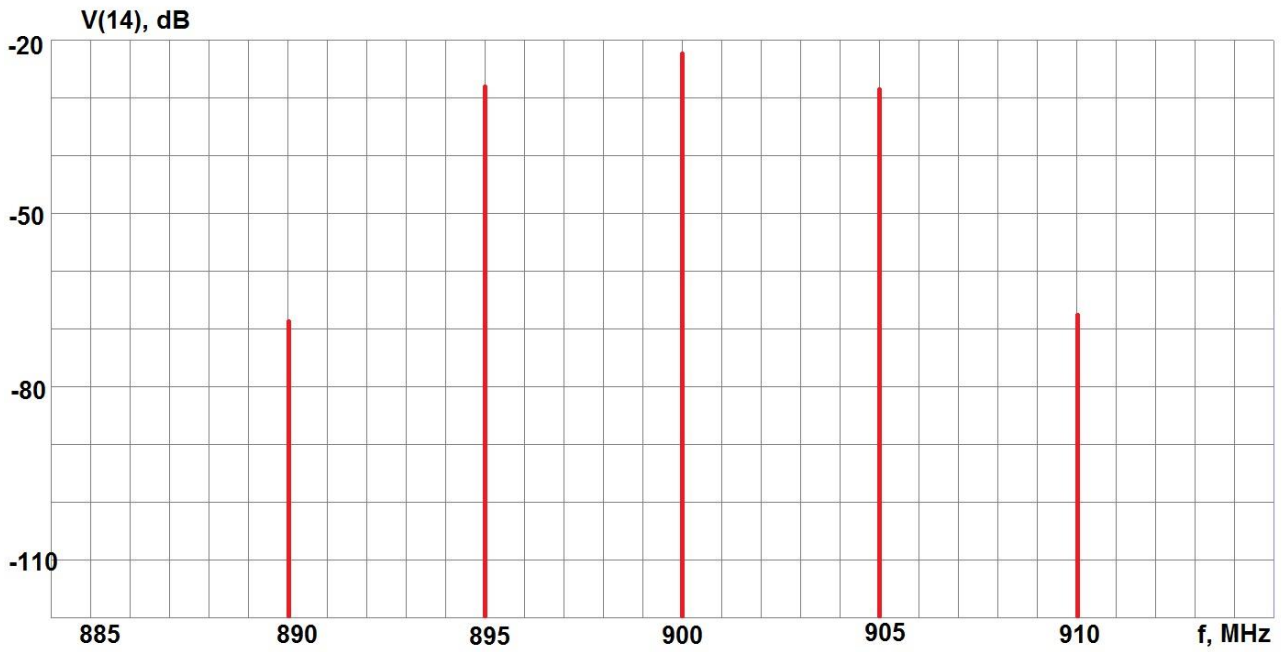


Рис. 3. Фрагмент спектра выходного сигнала усилителя

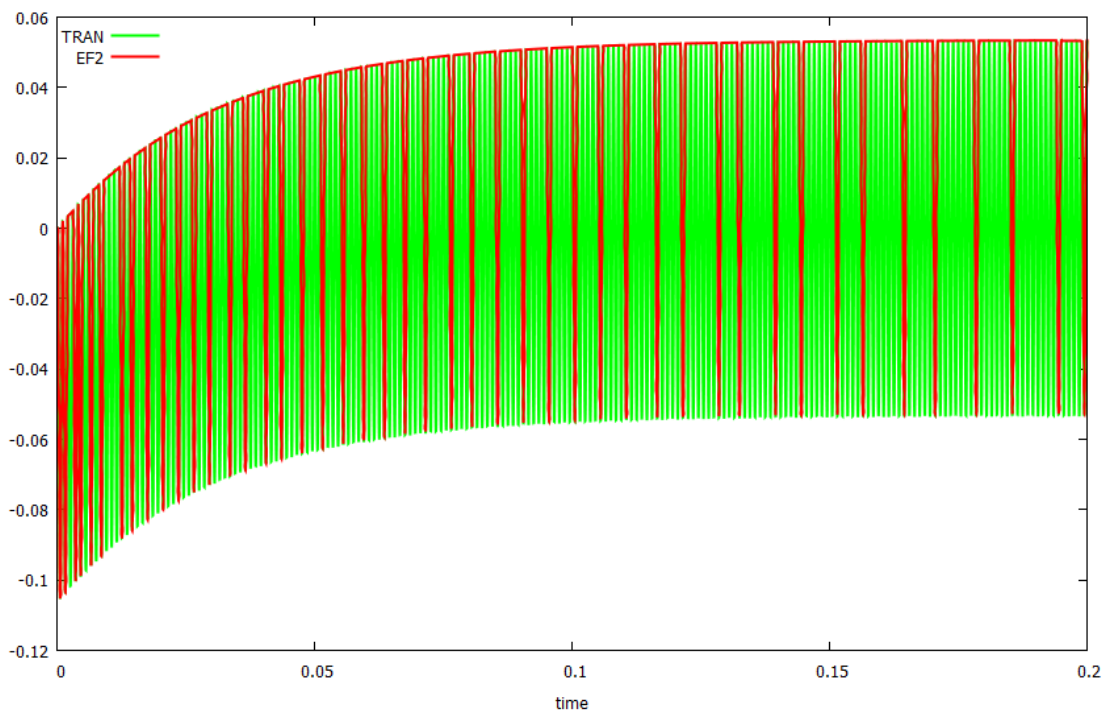


Рис. 4. Графики переходного процесса в RL схеме, полученные с помощью алгоритма EF2 и анализа переходного процесса (TRAN). Число периодов моделирования – 200 (TRAN), 45 (EF2)

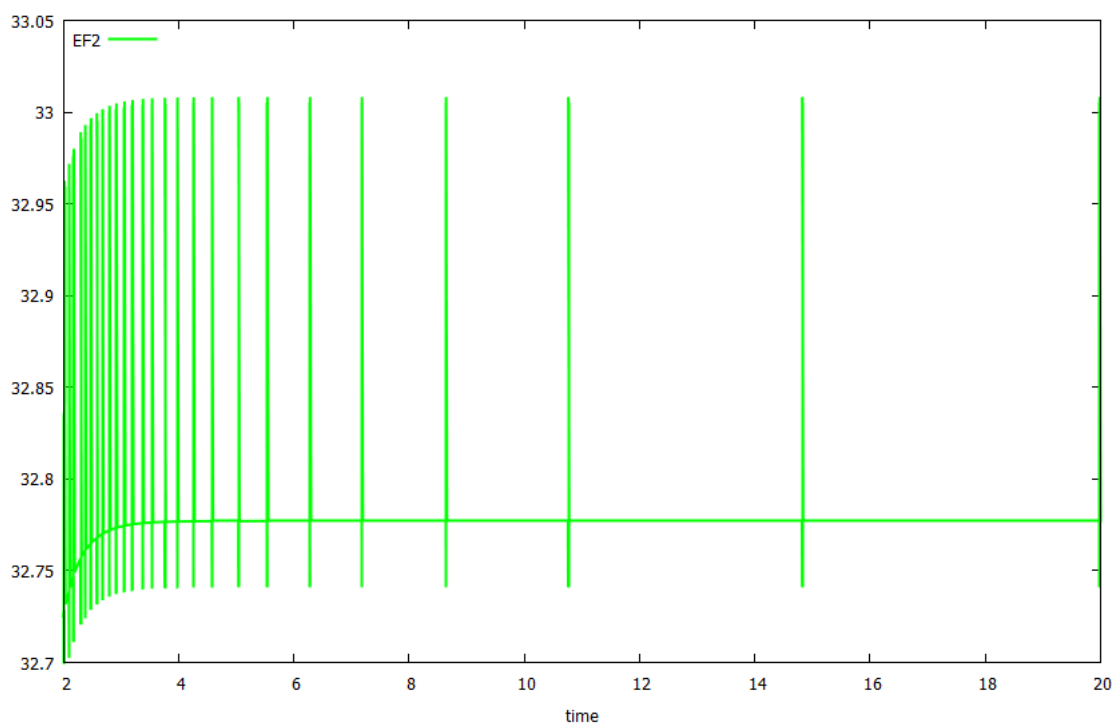


Рис. 5. График переходного процесса в схеме умножителя (алгоритм EF2).  
Число периодов моделирования – 78

## Заключение

Для моделирования радиотехнических схем с помощью метода Фурье огибающих предложен способ вычисления спектральных компонент выходного сигнала, который по сравнению с применением дискретного преобразования Фурье не требует равномерного распределения точек отсчета и не подвержен влиянию погрешностей интерполяции.

Представлен адаптивный алгоритм продолжения огибающих с использованием методов Обрешкова 1–4 порядка точности для интегрирования системы ОДУ схемы на интервале одного периода входного сигнала. По сравнению с алгоритмами, использующими традиционные методы интегрирования, новый вычислительный алгоритм обеспечивает существенное сокращение общего числа временных точек.

**Финансирование:** Оставить пустым если финансирование отсутствует.

**Автор для переписки:** Ульянов Сергей Леонидович, [ulyas@ippm.ru](mailto:ulyas@ippm.ru)

## Литература

1. Глебов А.Л., Гурарий М.М., Жаров М.М. *Актуальные проблемы моделирования в системах автоматизации схемотехнического проектирования*. Под ред. А.Л. Слемповского. Москва, Наука. 2003. 430 с.
2. Kundert K.S. Introduction to RF Simulation and Its Application. *J. of Solid-State Circuits*. 1999. V.34. №9. P.1298-1319.
3. Sharrit D. New method of analysis of communication systems. *Proc. MTTS'96 WMFA: Nonlinear CAD Workshop*. 1996.
4. Feldmann P., Roychowdhury J. Computation of circuit waveform envelopes using an efficient, matrix- decomposed harmonic balance algorithm. *Int. Conf. on Computer Aided Design*. San Jose. CA. 1996. P.295-300.
5. Норенков И.П., Евстифеев Ю.А., Маничев В.Б. Метод ускоренного анализа многопериодных электронных схем. *Радиотехника*. 1987. №2. С.71-74.
6. Kundert K., White J., Sangiovanni-Vincentelli A. An envelope-following method for the efficient transient simulation of switching power and filter circuits. *IEEE/ACM Int. Conf. on Computer Aided Design*. Santa Clara. CA. 1988. P.446-449.
7. Linaro D., del Giudice D., Brambilla A., Bizzarri F. Application of Envelope-Following Techniques to the Shooting Method. *IEEE Open J. Circuits Syst*. 2020. V.1. P.22-33.
8. Petzold L.R. An efficient numerical method for highly oscillatory ordinary differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 1981. V.18. №3. P.455-479.
9. Brambilla A., Maffezzoni P. Envelope following method for the transient analysis of electrical circuits. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*. 2000. V.47. №7. P.999-1008.
10. Brambilla A., Maffezzoni P. Envelope-following method to compute steady-state solutions of electrical circuits. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*. 2003. V.50. №3. P.407-417.

11. Farhan M.A., Gad E., Nakhla M.S., Achar R. High order and A-stable envelope following method for transient simulations of oscillatory circuits. *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 2014. V.62. №12. P.3309-3317.
12. Farhan M.A., Nakhla M.S., Gad E., Achar R. Parallel High-Order Envelope-Following Method for Fast Transient Analysis of Highly Oscillatory Circuits. *IEEE Trans. on very large scale integration (VLSI) systems.* 2017. V.25. №1. P.261-270.
13. Roychowdhury J. Making Fourier-Envelope Simulation Robust. *IEEE/ACM Int. Conf. on Computer Aided Design.* San Jose. CA. 2002. P.240-245.
14. Vlach J., Singhal K. *Computer Methods for Circuit Analysis and Design.* New York, Van Nostrand Reinhold. 1983. 384 p.
15. Kundert K. Accurate Fourier Analysis for Circuit Simulators. *IEEE Custom Integrated Circuits Conf.* San Diego. CA. 1994. P.25-28.
16. Гурарий М.М., Жаров М.М., Ульянов С.Л., Ходош Л.С. Вычислительный метод расчета нелинейных искажений при мультитональных тестовых сигналах. *Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем.* 2012. №1. С.157-162.
17. Гурарий М.М., Жаров М.М., Русаков С.Г., Ульянов С.Л. Адаптивный алгоритм анализа схем с колебательными режимами. *Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем.* 2020. №3. С.28-34.
18. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems.* Berlin, Springer-Verlag. 1993. 530 p.
19. Gad E., Nakhla M., Achar R., and Zhou Y. A-Stable and L-Stable high order integration methods for solving stiff differential equations. *IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circ. Sys.* 2009. V.28. №9. P.1359-1372.
20. Gourary M.M., Rusakov S.G., Ulyanov S.L., Zharov M.M. The Implementation of High-Order Single-Step Integration Technique into Circuit Simulator. *IEEE East-West Design & Test Symposium.* Kazan. Russia. 2018. P.123-128.
21. Гурарий М.М., Жаров М.М., Русаков С.Г., Ульянов С.Л. Анализ схем с колебательными режимами с использованием одношаговых методов

интегрирования высокого порядка точности. *Наноиндустрия*. 2020. Т.13. №S5-2(102). С.437-441.

**Для цитирования:**

Русаков С.Г., Ульянов С.Л. Вычислительные методы огибающих для моделирования радиотехнических интегральных схем с большим разбросом частот. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2022. №3. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.3.3>