DOI: https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.3.12
УДК: 621.396

ОБОБЩЁННОЕ НЕРАВЕНСТВО КРАМЕРА – РАО В СЛУЧАЕ СОВМЕСТНОГО ПЕЛЕНГОВАНИЯ ПО АЗИМУТУ И УГЛУ МЕСТА В УСЛОВИЯХ СЛОЖНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ОБСТАНОВКИ

М.П. Сличенко, О.Н. Завалишина

АО «Концерн «Созвездие»
394018, Воронеж, ул. Плехановская, 14

Статья поступила в редакцию 6 февраля 2024 г.

Аннотация. В работе получено обобщённое выражение для нижней границы дисперсии неравенства Крамера – Рао в случае совместной оценки азимута и угла места в произвольной системе координат, в которой определена векторная комплексная диаграмма направленности, в условиях сложной электромагнитной обстановки, в том числе при наличии корреляции шума в пространственных каналах и различиях в его интенсивности. Сформулирована теорема для информации Фишера совместных оценок азимута и угла места в случае многоканального обнаружителя-пеленгатора с антенной системой, описываемой в выбранной системе координат векторной комплексной диаграммой направленности. Получены зависимости среднеквадратической ошибки пеленгования по азимуту и углу места от отношения сигнал/шум и истинных направлений на источник радиоизлучения, рассчитанные по используемым и обобщённым выражениям для нижней границы Крамера – Рао. Получено условие применимости существующего и предложенного в статье выражения для информационной матрицы Фишера. Приведено понятие «энергетического» центра антенной системы. Для подтверждения достоверности полученных обобщённых выражений для нижней границы дисперсии неравенства Крамера – Рао было проведено статистическое моделирование. Использование на практике полученных обобщённых выражений для нижней границы Крамера – Рао позволит решать задачу синтеза пеленгационных АС в зависимости от ее структуры и характеристик направленности, числа антенн и параметров окружающей электромагнитной обстановки.

Ключевые слова: обнаружитель-пеленгатор, метод максимального правдоподобия, пеленгационный рельеф, потенциальные характеристики, неравенство Крамера – Рао, энергетический центр, сложная электромагнитная обстановка.

Автор для переписки: Сличенко Михаил Павлович, m.p.slichenko@sozvezdie.su

Введение

В последние десятилетия при решении задач радиомониторинга широко используются методы статистической обработки сигналов. В существующей литературе [1-3] проведен анализ основных результатов современного решения задач радиомониторинга методами статистической радиотехники. В системах радиомониторинга широкое распространение получили многоканальные обнаружители-пеленгаторы (ОП), в состав которых входят многоканальная антенная система (АС), радиоприемное устройство и аппаратура цифровой обработки сигналов, с помощью которых решается задача обнаружения и пеленгования источника радиоизлучения (ИРИ).

Для оценки потенциальной точности измеренных параметров сигналов широко используется неравенство Крамера – Рао [4-7], которое применительно к задаче пеленгования ИРИ многоканальным ОП по азимуту и (или) углу места рассматривается в [8-16]. В работах [8-11] на основе неравенства Крамера – Рао получены выражения для нижней границы среднеквадратической ошибки (СКО) пеленгования многоканального пеленгатора с плоской антенной решеткой (АР) из ненаправленных антенных элементов (АЭ) на фоне белого гауссовского шума.

Потенциальная точность пеленгования многоканальным ОП в азимутальной и угломестной плоскостях для эквидистантной кольцевой АР рассмотрена в работах [12-14]. Выражения для нижней границы дисперсии ошибки пеленгования в случае сложной помеховой обстановки были получены в [15, 16].

Однако в работах [17-20] показано, что существующие выражения для нижней границы дисперсии ошибки пеленгования [8-16] справедливы лишь при выполнении условия о том, что векторная комплексная диаграмма направленности (ВКДН) АС ОП должна быть определена в системе координат (СК), начало которой совмещено с «энергетическим» центром АС.

В реальных условиях наличие взаимных влияний переотражающих элементов, корпуса носителя и произвольное пространственное размещение ОП приводит к изменению соотношений уровней принимаемого сигнала, а результирующее электромагнитное поле в области размещения элементов АС имеет сложную структуру, что оказывает существенное влияние на характеристики ОП. В общем случае, пространственное положение «энергетического» центра АС является частотно зависимым. Это означает, что для использования выражения [8-16] для неравенства Крамера – Рао необходимо учитывать данную зависимость, иначе, такая оценка потенциальной точности пеленгования будет содержать ошибку. Обобщённое выражение для нижней границы дисперсии неравенства Крамера – Рао, полученное в работах [17-20], не требует отдельного учета положения «энергетического» центра АС. Однако в указанных работах рассматривался случай пеленгования лишь в азимутальной плоскости. Поэтому актуальной задачей является получение обобщённого выражения для нижней границы Крамера – Рао на случай совместной оценки азимута и угла места на ИРИ с учётом сложной электромагнитной обстановки, в том числе проявляющуюся в наличии корреляции шума в пространственных каналах ОП и различиях в его интенсивности.

1. Постановка задачи.

Для оценки потенциальной точности измеренных угловых координат при наличии шума используется матрица Фишера [1-4]

$$\mathbf{\Phi} = -\left\| \left\langle \frac{\partial^2 L\left(\dot{\mathbf{V}}\middle|\mathbf{l}\right)}{\partial l_i \partial l_j^{\mathrm{T}}} \right\rangle \Bigg|_{\substack{l_i = l_i^{(0)} \\ l_j = l_j^{(0)}}} \right\|, \tag{1}$$

где $L\left(\dot{\mathbf{V}}\middle|\mathbf{l}\right)$ – логарифм функции правдоподобия, $\mathbf{l} = \left(l_0, l_1\right)^{\mathrm{T}} = \left(\theta, \beta\right)^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец, составленный из азимута θ и угла места β направления на ИРИ, $l_i^{(0)}$, $l_j^{(0)}$ – истинные значения компонент вектора $\mathbf{l}$, $\dot{\mathbf{V}}$ – вектор наблюдаемых данных, зависящий от вектора $\mathbf{l}$.

В работах [8-14] при совместной оценке потенциальной точности пеленгования по азимуту и углу места используется следующее выражение для информационной матрицы Фишера:

$$\mathbf{\Phi} = 2\sum_{q=1}^{Q} \left|\dot{E}_q\right|^2 \left\| \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{l})^{\mathrm{H}}}{\partial l_i} \dot{\mathbf{K}}^{-1} \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{l})}{\partial l_j} \right) \Bigg|_{\substack{l_i = l_i^{(0)} \\ l_j = l_j^{(0)}}} \right\|, \tag{2}$$

в соответствии с которым дисперсии оценок азимута и угла места имеют вид

$$\sigma_\theta^2 = \frac{1}{2\sum\limits_{q=1}^{Q} \left|\dot{E}_q\right|^2 \left(1 - \left|\dot{r}_{\theta\beta}\right|^2\right) \dfrac{\partial \dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}}{\partial \theta} \dot{\mathbf{K}}^{-1} \dfrac{\partial \dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}{\partial \theta}}, \tag{3}$$

$$\sigma_\beta^2 = \frac{1}{2\sum\limits_{q=1}^{Q} \left|\dot{E}_q\right|^2 \left(1 - \left|\dot{r}_{\theta\beta}\right|^2\right) \dfrac{\partial \dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}}{\partial \beta} \dot{\mathbf{K}}^{-1} \dfrac{\partial \dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}{\partial \beta}}, \tag{4}$$

где $\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)$ – ВКДН АС, $\dot{\mathbf{K}}$ – матрица ковариации шума.

Далее в работе будет научно обосновано, что данное выражение справедливо лишь в том случае, когда ВКДН определена в СК с началом, совмещенным с положением «энергетического» центра АС. В остальных случаях данное выражение даёт ошибочную завышенную оценку элементов матрицы

Фишера (и, как следствие, заниженное значение дисперсии совместных оценок азимута и угла места).

Рассмотрим задачу совместного оценивания азимута и угла места на ИРИ на фоне белого гауссовского шума многоканальным ОП с произвольной структурой и характеристиками направленности АС. Максимально правдоподобный пеленгационный рельеф в случае пеленгования по азимуту и углу места имеет известный вид [9-13]

$$M\left(\theta,\beta\right)=\frac{\dot{\mathbf{H}}\left(\theta,\beta\right)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{W}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}\left(\theta,\beta\right)}{\dot{\mathbf{H}}\left(\theta,\beta\right)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}\left(\theta,\beta\right)}, \tag{5}$$

где $\dot{\mathbf{W}}=\sum_{q=1}^{Q}\dot{\mathbf{W}}_q=\sum_{q=1}^{Q}\dot{\mathbf{V}}_q\dot{\mathbf{V}}_q^H$ – матрица размера $N\times N$ взаимных энергий сигналов, накопленная по серии из Q реализаций, $q=\overline{1,Q}$, $\dot{\mathbf{V}}_q=\dot{E}_q\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)+\dot{\boldsymbol{\xi}}_q$ – вектор-столбец комплексных амплитуд напряжений на выходах антенных элементов (АЭ), измеренных по серии из Q, $\dot{E}_q$ – комплексные амплитуды напряженности электрической составляющей электромагнитного поля радиоволны, приходящей с азимута θ в q-м наблюдении; $\dot{\boldsymbol{\xi}}_q$ – N-мерный вектор шума, элементами которого являются комплексные случайные величины с произвольной одинаковой для всех измерений эрмитовой матрицей ковариации $\dot{\mathbf{K}}$ размера $N\times N$, где $\dot{\mathbf{K}}=\left\langle\dot{\xi}_q\dot{\xi}_q^{\mathrm{H}}\right\rangle$.

2. Вывод обобщенного выражения для нижней границы Крамера – Рао.

По результатам исследований авторов настоящей работы можно сформулировать следующую теорему для матрицы Фишера максимально правдоподобных оценок направлений на ИРИ в произвольной СК, в которой определена ВКДН.

Теорема. В случае многоканального обнаружителя-пеленгатора, АС которого описывается ВКДН $\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)$ матрица Фишера $\dot{\mathbf{\Phi}}'$ совместных оценок азимута и угла места на ИРИ:

$$\mathbf{\Phi}' = \mathbf{\Phi} - \Delta\mathbf{\Phi}, \tag{6}$$

где матрицы

$$\mathbf{\Phi} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{q=1}^{Q}\left|\dot{E}_q\right|^2\begin{pmatrix}\mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12}\\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22}\end{pmatrix}, \quad \Delta\mathbf{\Phi} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{q=1}^{Q}\left|\dot{E}_q\right|^2\begin{pmatrix}\Delta\mathbf{F}_{11} & \Delta\mathbf{F}_{12}\\ \Delta\mathbf{F}_{21} & \Delta\mathbf{F}_{22}\end{pmatrix},$$

элементы которых определяются выражениями

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{\partial\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}}{\partial l_i}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}{\partial l_j},$$

$$\Delta\mathbf{F}_{ij} = \frac{\partial\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}}{\partial l_i}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{\Pi}}(\theta,\beta)\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}{\partial l_j}, \quad i,j = 1,2,$$

где $\hat{\mathbf{\Pi}}(\theta,\beta) = \dfrac{\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}}{\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}$ – матрица-проектор. Далее для сокращения записи выражений опустим аргументы θ, β и матрицу-проектор будем обозначать $\hat{\mathbf{\Pi}}$.

Доказательство. В [11, 16] показано, что логарифм функции правдоподобия в случае совместного пеленгования по азимуту и углу места может быть представлен в виде

$$L\left(\dot{\mathbf{V}}\middle|\mathbf{l}\right) = \ln\left(\frac{1}{\pi^N\left|\dot{\mathbf{K}}\right|}\right) + \left(-\mathrm{Tr}(\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{W}}) + M(\theta,\beta)\right), \tag{7}$$

где используемое слагаемые $\left(\ln\left(\dfrac{1}{\pi^N\left|\dot{\mathbf{K}}\right|}\right) - \mathrm{Tr}(\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{W}})\right)$ не зависит от азимута θ и угла места β.

Введем $\Psi\left(\dot{\mathbf{V}}\middle|\mathbf{l}\right) = -L\left(\dot{\mathbf{V}}\middle|\mathbf{l}\right)$ и перепишем матрицу Фишера (1),

$$\mathbf{\Phi} = \left.\begin{pmatrix}\left\langle\dfrac{\partial^2\Psi\left(\dot{\mathbf{V}}\middle|\theta,\beta\right)}{\partial\theta^2}\right\rangle & \left\langle\dfrac{\partial^2\Psi\left(\dot{\mathbf{V}}\middle|\theta,\beta\right)}{\partial\theta\partial\beta}\right\rangle\\ \left\langle\dfrac{\partial^2\Psi\left(\dot{\mathbf{V}}\middle|\theta,\beta\right)}{\partial\beta\partial\theta}\right\rangle & \left\langle\dfrac{\partial^2\Psi\left(\dot{\mathbf{V}}\middle|\theta,\beta\right)}{\partial\beta^2}\right\rangle\end{pmatrix}\right|_{\substack{\theta=\theta_0\\ \beta=\beta_0}}.$$

После подстановки (5) в (7), с учетом результатов работ [14-16], среднее значение частных производных второго порядка функции $\Psi\left(\dot{\mathbf{V}}\middle|\mathbf{l}\right)$ можно представить в виде

$$\left\langle \frac{\partial^2 \Psi\left(\dot{\mathbf{V}}\middle|\mathbf{l}\right)}{\partial\theta^2} \right\rangle = 2\sum_{q=1}^{Q}\left|\dot{E}_q\right|^2 \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}}{\partial\theta}\left(\dot{\mathbf{K}}^{-1} - \frac{\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}}{\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}\right)\frac{\partial \dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}{\partial\theta}, \quad (8)$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \Psi\left(\dot{\mathbf{V}}\middle|\mathbf{l}\right)}{\partial\beta^2} \right\rangle = 2\sum_{q=1}^{Q}\left|\dot{E}_q\right|^2 \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}}{\partial\beta}\left(\dot{\mathbf{K}}^{-1} - \frac{\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}}{\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}\right)\frac{\partial \dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}{\partial\beta}. \quad (9)$$

Далее найдем смешанную производную $\dfrac{\partial^2 \Psi\left(\dot{\mathbf{V}}\middle|\theta,\beta\right)}{\partial\theta\partial\beta} = -\dfrac{\partial^2 M(\theta,\beta)}{\partial\theta\partial\beta}$.

С учетом (5) производные $M(\theta,\beta)$ первого и второго порядков:

$$\frac{\partial M(\theta,\beta)}{\partial\theta} = \frac{\partial \dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}}{\partial\theta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{W}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\theta,\beta) + \dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{W}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\frac{\partial \dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\theta,\beta)}{\partial\theta},$$

$$\frac{\partial^2 M(\theta,\beta)}{\partial\theta\partial\beta} = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial^2 \dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}}{\partial\theta\partial\beta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{W}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\theta,\beta) + \frac{\partial \dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}}{\partial\theta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{W}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\frac{\partial \dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\theta,\beta)}{\partial\beta}\right),$$

где $\dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\theta,\beta) = \dfrac{\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}{\sqrt{\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}}$.

В предположении, что аддитивный шум имеет нулевое среднее, справедливо соотношение

$$\left\langle \mathbf{W} \right\rangle = \left\langle \sum_{q=1}^{Q}\dot{\mathbf{V}}_q\dot{\mathbf{V}}_q^{\mathrm{H}} \right\rangle = \left\langle \sum_{q=1}^{Q}\left[\dot{E}_q\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta) + \dot{\boldsymbol{\xi}}_q\right]\left[\dot{E}_q\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta) + \dot{\boldsymbol{\xi}}_q\right]^{\mathrm{H}} \right\rangle =$$
$$= \sum_{q=1}^{Q}\left|\dot{E}_q\right|^2\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}} + Q\dot{\mathbf{K}}.$$

с учётом которого усредненное значение второй производной $M(\theta,\beta)$

$$\left\langle \frac{\partial^2 M(\theta,\beta)}{\partial\theta\partial\beta} \right\rangle = 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial^2 \dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}}{\partial\theta\partial\beta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\left(\sum_{q=1}^{Q}\left|\dot{E}_q\right|^2\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}} + Q\dot{\mathbf{K}}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\theta,\beta) + \frac{\partial \dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}}{\partial\theta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\left(\sum_{q=1}^{Q}\left|\dot{E}_q\right|^2\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}} + Q\dot{\mathbf{K}}\right)\dot{\mathbf{K}}^{-1}\frac{\partial \dot{\tilde{\mathbf{H}}}(\theta,\beta)}{\partial\beta}\right\}. \quad (10)$$

Введём обозначение $b=\left(\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)\right)^{-\frac{1}{2}}$, и далее для сокращения записи выражений будем использовать $\dot{\mathbf{H}}=\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)$. Тогда представим (10) в следующем виде

$$\left\langle \frac{\partial^2 M(\theta,\beta)}{\partial\theta\partial\beta}\right\rangle = 2\operatorname{Re}\left\{\left(\frac{\partial^2\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}}{\partial\theta\partial\beta}b+\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}\frac{\partial^2 b}{\partial\theta\partial\beta}+\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}}{\partial\theta}\frac{\partial b}{\partial\beta}+\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}}{\partial\beta}\frac{\partial b}{\partial\theta}\right)\dot{\mathbf{K}}^{-1}\times\right.$$
$$\times\left(\sum_{q=1}^{Q}\left|\dot{E}_q\right|^2\dot{\mathbf{H}}b^{-1}+Q\dot{\mathbf{H}}b\right)+\left(\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}}{\partial\theta}b+\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}\frac{\partial b}{\partial\theta}\right)\dot{\mathbf{K}}^{-1}\times \tag{11}$$
$$\left.\times\left(\sum_{q=1}^{Q}\left|\dot{E}_q\right|^2\dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}+Q\dot{\mathbf{K}}\right)\dot{\mathbf{K}}^{-1}\left(\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}}{\partial\beta}b+\dot{\mathbf{H}}\frac{\partial b}{\partial\beta}\right)\right\}=2\operatorname{Re}\left\{\dot{\mathbf{J}}_1+\dot{\mathbf{I}}_1+\dot{\mathbf{J}}_2+\dot{\mathbf{I}}_2\right\}.$$

где

$$\dot{\mathbf{J}}_1=\sum_{q=1}^{Q}\left|\dot{E}_q\right|^2\left(\frac{\partial^2\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}}{\partial\theta\partial\beta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}+\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}\frac{\partial^2 b}{\partial\theta\partial\beta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(b)^{-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}}{\partial\theta}\frac{\partial b}{\partial\beta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(b)^{-1}+\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}}{\partial\beta}\frac{\partial b}{\partial\theta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(b)^{-1}\right),$$

$$\dot{\mathbf{I}}_1=Q\left\{\frac{\partial^2\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}}{\partial\theta\partial\beta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}b^2+\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}\frac{\partial^2 b}{\partial\theta\partial\beta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}b+\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}}{\partial\theta}\frac{\partial b}{\partial\beta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}b+\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}}{\partial\beta}\frac{\partial b}{\partial\theta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}b\right\},$$

$$\dot{\mathbf{J}}_2=\sum_{q=1}^{Q}\left|\dot{E}_q\right|^2\left(\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}}{\partial\theta}b\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}}{\partial\beta}b+\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}\frac{\partial b}{\partial\theta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}\frac{\partial b}{\partial\beta}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}}{\partial\theta}b\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}\frac{\partial b}{\partial\beta}+\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}\frac{\partial b}{\partial\theta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}}{\partial\beta}b\right),$$

$$\dot{\mathbf{I}}_2=Q\left(\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}}{\partial\theta}b\dot{\mathbf{K}}^{-1}\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}}{\partial\beta}b+\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}}{\partial\theta}b\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}\frac{\partial b}{\partial\beta}b+\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}\frac{\partial b}{\partial\theta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}}{\partial\beta}b+\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}\frac{\partial b}{\partial\theta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}\frac{\partial b}{\partial\beta}\right),$$

первая и вторая производные $b=\left(\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{\partial b}{\partial\theta}=-\left(\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}\right)^{-3/2}\operatorname{Re}\left\{\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}}{\partial\theta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}\right\},\ \frac{\partial b}{\partial\beta}=-\left(\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}\right)^{-3/2}\operatorname{Re}\left\{\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}}{\partial\beta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}\right\},$$

$$\frac{\partial^2 b}{\partial\theta\partial\beta}=3\left(\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}\right)^{-5/2}\operatorname{Re}\left\{\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}}{\partial\beta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}\right\}\operatorname{Re}\left\{\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}}{\partial\theta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}\right\}-\left(\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}\right)^{-3/2}\times$$
$$\times\left(\operatorname{Re}\left\{\frac{\partial^2\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}}{\partial\theta\partial\beta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}\right\}+\operatorname{Re}\left\{\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}}{\partial\theta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}}{\partial\beta}\right\}\right).$$

В результате выполнения обратной замены переменных выражение (11) запишем как

$$\left\langle \frac{\partial^2 M(\theta,\beta)}{\partial\theta\partial\beta} \right\rangle = 2\operatorname{Re}\left\{ \sum_{q=1}^{Q} \left|\dot{E}_q\right|^2 \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}}{\partial\theta} \left(\frac{\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}}{\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)} - \dot{\mathbf{K}}^{-1} \right) \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}{\partial\beta} \right\},$$

причем $\dot{\mathbf{I}}_1 + \dot{\mathbf{I}}_2 = \mathbf{0}$. Тогда с учётом (8), (9) матрицу Фишера (1) можем представить в виде

$$\mathbf{\Phi}' = 2\operatorname{Re}\sum_{q=1}^{Q} \left|\dot{E}_q\right|^2 \begin{Vmatrix} \mathbf{F}'_{11} & \mathbf{F}'_{12} \\ \mathbf{F}'_{21} & \mathbf{F}'_{22} \end{Vmatrix},$$

где элементы определяются выражением

$$\mathbf{F}'_{ij} = \mathbf{F}_{ij} - \Delta\mathbf{F}_{ij} = \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}}{\partial l_i} \left(\dot{\mathbf{K}}^{-1} - \frac{\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}}{\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)} \right) \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}{\partial l_j}. \quad (12)$$

Таким образом, **теорема доказана.**

В соответствии с доказанной теоремой, для оценки потенциальной точности пеленгования необходимо вычислять частные производные ВКДН АС по азимуту и по углу места. В случае, если ВКДН задана в аналитическом виде такие вычисления не составляют труда. Однако, во многих ситуациях на практике, ВКДН АС не задана в аналитическом виде и определяется по результатам измерений характеристик направленности АС в дискретных точках по азимуту и углу места. В таких случаях для расчета производной ВКДН может быть эффективно использован подход на основе модифицированного ряда Котельникова, подробно описанный для случаев эквидистантной дискретизации в работах [21-23], для неэквидистантной дискретизации – в [24]. Применение модифицированного ряда Котельникова позволяет представить производные ВКДН произвольных порядков через отсчеты ВКДН. Таким образом, такой подход позволит оценивать потенциальную точность пеленгования ИРИ по результатам измерений ВКДН в дискретных точках по азимуту и углу места в произвольной СК, начало которой в общем случае не совпадает с положением «энергетического» центра АС.

Проанализируем полученное выражение (12) для границы неравенства Крамера – Рао. Преобразуем слагаемые в скобках данного выражения к следующему виду

$$\dot{\mathbf{K}}^{-1}-\frac{\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}}{\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}=\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathbf{I}-\frac{\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}}{\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}\right)\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}.$$

Вычитаемое в скобках является матрицей-проектором:

$$\hat{\mathbf{\Pi}}=\frac{\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}}{\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)},$$

для которой справедливо свойство идемпотентности,

$$\hat{\mathbf{\Pi}}\cdot\hat{\mathbf{\Pi}}=\frac{\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}}{\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}\cdot\frac{\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}}{\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}=\hat{\mathbf{\Pi}}.$$

Тогда выражение для элементов матрицы Фишера (6) можем записать как

$$\mathbf{F}'_{ij}=\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}}{\partial l_i}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{\Pi}}_{\perp}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}{\partial l_j},$$

где $\hat{\mathbf{\Pi}}_{\perp}=\mathbf{I}-\hat{\mathbf{\Pi}}$ – ортогональный проектор.

Нетрудно показать, что определитель матрицы (6)

$$\det\mathbf{\Phi}'=2\sum_{q=1}^{Q}\left|\dot{E}_q\right|^2\mathbf{F}'_{11}\mathbf{F}'_{22}\left(1-r_{\theta\beta}{}^2\right),$$

где

$$r_{\theta\beta}=\frac{\dfrac{\partial\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}}{\partial\theta}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{\Pi}}_{\perp}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\dfrac{\partial\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}{\partial\beta}}{\sqrt{\dfrac{\partial\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}}{\partial\theta}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{\Pi}}_{\perp}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\dfrac{\partial\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}{\partial\theta}}\sqrt{\dfrac{\partial\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}}{\partial\beta}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{\Pi}}_{\perp}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\dfrac{\partial\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}{\partial\beta}}}\qquad(13)$$

– коэффициент корреляции оценок. Тогда обратная матрица Фишера может быть записана как

$$\mathbf{\Phi}'^{-1}=\begin{pmatrix}\sigma_\theta^2 & -r_{\theta\beta}\sigma_\theta\sigma_\beta\\ -r_{\theta\beta}\sigma_\theta\sigma_\beta & \sigma_\beta^2\end{pmatrix},$$

элементами которой являются:

$$\sigma_\theta^2=\frac{1}{2\sum_{q=1}^{Q}\left|\dot{E}_q\right|^2\left(1-\left|r_{\theta\beta}\right|^2\right)\dfrac{\partial\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}}{\partial\theta}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{\Pi}}_{\perp}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\dfrac{\partial\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}{\partial\theta}},\qquad(14)$$

$$\sigma_\beta^2=\frac{1}{2\sum_{q=1}^{Q}\left|\dot{E}_q\right|^2\left(1-\left|r_{\theta\beta}\right|^2\right)\dfrac{\partial\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}}{\partial\beta}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{\Pi}}_{\perp}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\dfrac{\partial\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}{\partial\beta}}\qquad(15)$$

– дисперсии совместных оценок азимута и угла места направления на ИРИ и комплексный коэффициент корреляции оценок (13).

3. Понятие «энергетического» центра.

Условие, при котором полученные выражения (13)-(15) в случае совместной оценки азимута и угла места совпадают с выражениями (2)-(4), соответствует равенству нулю поправки $\Delta\mathbf{\Phi}$ в формуле (6), т.е.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{S}}_{\mathbf{1}}^{\mathrm{H}}\hat{\mathbf{\Pi}}\dot{\mathbf{S}}_{\mathbf{1}} = 0, \\ \dot{\mathbf{S}}_{\mathbf{1}}^{\mathrm{H}}\hat{\mathbf{\Pi}}\dot{\mathbf{S}}_{\mathbf{2}} = 0, \\ \dot{\mathbf{S}}_{\mathbf{2}}^{\mathrm{H}}\hat{\mathbf{\Pi}}\dot{\mathbf{S}}_{\mathbf{2}} = 0. \end{cases} \tag{16}$$

где $\dot{\mathbf{S}}_{\mathbf{1}} = \dfrac{\partial\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}{\partial\theta}, \quad \dot{\mathbf{S}}_{\mathbf{2}} = \dfrac{\partial\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}{\partial\beta}.$

В соответствии с неравенством Буняковского – Шварца для эрмитовых матриц, определитель матрицы (6) удовлетворяет условию

$$\left|\det\mathbf{\Phi}'\right| \geq 0,$$

которое эквивалентно

$$\left|\mathrm{Tr}\left(\dot{\mathbf{S}}_{\mathbf{1}}^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{\Pi}}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\dot{\mathbf{S}}_{\mathbf{2}}\right)\right|^{2} \leq \mathrm{Tr}\left(\dot{\mathbf{S}}_{\mathbf{1}}^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{\Pi}}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\dot{\mathbf{S}}_{\mathbf{1}}\right)\mathrm{Tr}\left(\dot{\mathbf{S}}_{\mathbf{2}}^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{\Pi}}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\dot{\mathbf{S}}_{\mathbf{2}}\right).$$

С учетом последнего неравенства нетрудно заключить, что выполнение любых двух уравнений системы (16) неизбежно приводит к выполнению оставшегося третьего уравнения. Следовательно, вместо (16), условие равенства нулю поправки $\Delta\mathbf{\Phi}$ в формуле (6), соответствует системе двух независимых уравнений

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{S}}_{\mathbf{1}}^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{\Pi}}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\dot{\mathbf{S}}_{\mathbf{1}} = 0, \\ \dot{\mathbf{S}}_{\mathbf{2}}^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{\Pi}}\dot{\mathbf{K}}^{-\frac{1}{2}}\dot{\mathbf{S}}_{\mathbf{2}} = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}(\theta,\beta)}{\partial\theta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta) = 0, \\ \dfrac{\partial\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{H}}(\theta,\beta)}{\partial\beta}\dot{\mathbf{K}}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Введем нормированную на матрицу корреляции шума $\dot{\mathbf{K}}$ ВКДН следующего вида:

$$\hat{\dot{\mathbf{H}}}(\theta,\beta) = \dot{\mathbf{K}}^{-1/2}\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta),$$

и запишем систему уравнений (17) как

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \dot{\hat{\mathbf{H}}}^{\mathrm{H}}(\theta,\beta)}{\partial \theta} \dot{\hat{\mathbf{H}}}(\theta,\beta) = 0, \\ \dfrac{\partial \dot{\hat{\mathbf{H}}}^{\mathrm{H}}(\theta,\beta)}{\partial \beta} \dot{\hat{\mathbf{H}}}(\theta,\beta) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Видно, что записанная система уравнений (18) эквивалентна условию ортогональности вектора нормированной ВКДН $\dot{\hat{\mathbf{H}}}(\theta,\beta)$ с ее первыми частными производными $\dfrac{\partial \dot{\hat{\mathbf{H}}}(\theta,\beta)}{\partial \theta}$ и $\dfrac{\partial \dot{\hat{\mathbf{H}}}(\theta,\beta)}{\partial \beta}$, что проиллюстрировано на рис. 1.

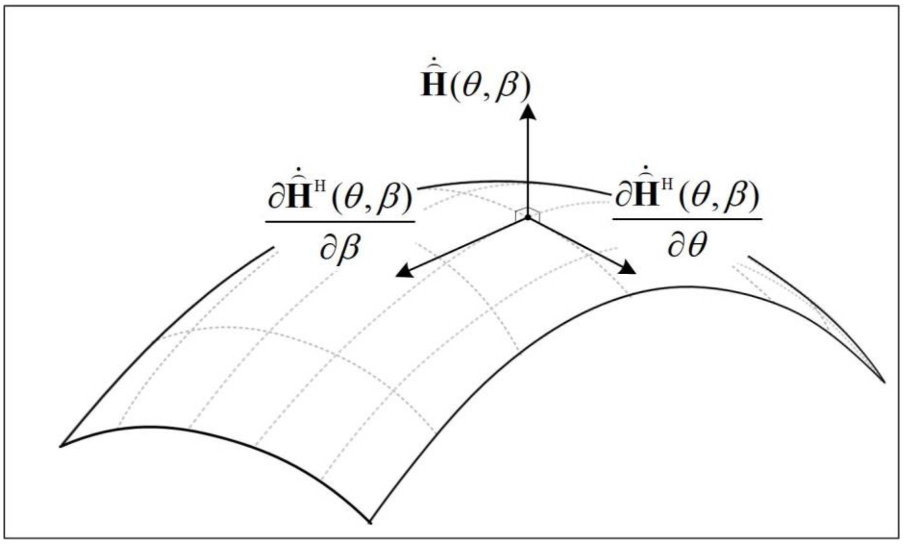

Рис. 1. Иллюстрация условия применимости выражений неравенства Крамера – Рао (2)-(4).

Рассмотрим частный случай невзаимодействующей АС с элементами типа «точечных» датчиков поля и ВКДН вида [9]

$$\dot{\mathbf{H}}_n(\theta,\beta) = a_n \exp\left(i\frac{2\pi R}{\lambda} \mathbf{k}^{\mathrm{T}} \mathbf{r}_n \right),\ \mathbf{r}_n = \left(x_n, y_n \right)^{\mathrm{T}},\ \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\beta \\ \sin\theta\cos\beta \end{pmatrix},\ n = \overline{1,N}, \tag{19}$$

где $\mathbf{k}$ – единичный вектор направления на ИРИ, a_n – амплитудный множитель (модуль n-го элемента ВКДН), $\mathbf{r}_n$ – радиус-вектор n-го АЭ, λ – длина пеленгуемой радиоволны, N – количество антенн.

В результате подстановки (19) в (18) получим необходимое и достаточное условие справедливости выражений (2)-(4) для нижней границы Крамера – Рао,

$$\sum_{n,m=1}^{N} \left| a_n \right|^2 \mathbf{r}_n \left(\dot{\mathbf{K}}^{-1} \right)_{nm} = 0,$$

что эквивалентно условию равенства нулю радиус-вектора точки «энергетического» центра АС,

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{n,m=1}^{N} \left|\dot{\mathbf{H}}_n(\theta,\beta)\right|^2 \mathbf{r}_n \left(\dot{\mathbf{K}}^{-1}\right)_{nm}}{\sqrt{\sum_{n,m=1}^{N} \left|\dot{\mathbf{H}}_n(\theta,\beta)\right|^2 \left(\dot{\mathbf{K}}^{-1}\right)_{nm}}} = \frac{\sum_{n,m=1}^{N} \left|a_n\right|^2 \mathbf{r}_n \left(\dot{\mathbf{K}}^{-1}\right)_{nm}}{\sqrt{\sum_{n,m=1}^{N} \left|a_n\right|^2 \left(\dot{\mathbf{K}}^{-1}\right)_{nm}}}. \quad (20)$$

Таким образом, *для АС с элементами типа «точечных» датчиков поля и ВКДН вида (19) выражения для нижней границы дисперсии неравенства Крамера – Рао (2)-(4) справедливы лишь в том случае, когда начало СК ВКДН определено в «энергетическом» центре АС. В противном случае следует использовать обобщённые выражения (13)-(15), учитывающее поправку* $\Delta\mathbf{\Phi}$ *для информационной матрицы Фишера.*

Заметим, что выражение для радиус-вектора «энергетического» центра АС (20) в общем случае зависит от значений азимута и угла места. Поэтому, при расчёте по формулам (2)-(4) необходимо для каждого значения азимута и угла места на ИРИ дополнительно вычислять положение «энергетического» центра АС, после чего переопределять ВКДН в соответствующую СК, что требует дополнительных вычислительных затрат. Напротив, при использовании полученных формул (13)-(15), данная поправка уже учтена, что позволяет выполнять вычисления независимо от положения «энергетического» центра АС.

4. Результаты расчета среднеквадратической ошибки пеленгования.

Рассмотрим случай пространственно некоррелированного шума с одинаковой в различных каналах интенсивностью σ^2, т.е. $\dot{\mathbf{K}} = \sigma^2\mathbf{I}$, тогда выражения (16) и (17) для СКО совместной оценки азимута и угла места примут вид:

$$\sigma_\theta = \sqrt{\mu^{-1} \frac{1}{2\left(1-\left|r_{\theta\beta}\right|^2\right) \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}}{\partial\theta} \hat{\mathbf{\Pi}}_\perp \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}{\partial\theta}}},$$

$$\sigma_\beta = \sqrt{\mu^{-1}\frac{1}{2\left(1-\left|r_{\theta\beta}\right|^2\right)\dfrac{\partial\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)^{\mathrm{H}}}{\partial\beta}\hat{\mathbf{\Pi}}_\perp\dfrac{\partial\dot{\mathbf{H}}(\theta,\beta)}{\partial\beta}}}, \qquad (21)$$

где $\hat{\mathbf{\Pi}}_\perp = \mathbf{I} - \hat{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{I} - \dfrac{\dot{\mathbf{H}}(\theta)\dot{\mathbf{H}}(\theta)^{\mathrm{H}}}{\dot{\mathbf{H}}(\theta)^{\mathrm{H}}\dot{\mathbf{H}}(\theta)}$, $\mu = \dfrac{\left|\dot{E}\right|^2}{\sigma^2}$ – ОСШ в одном канале ОП при эффективной действующей длине антенны, равной 1 м.

На рис. 2а схематически изображена объемная 8-элементная АР, 7 элементов которой расположены в составе плоской эквидистантной кольцевой АР и один элемент расположен над центром кольцевой решетки. Синим крестом обозначено положение геометрического центра АР, а красным – положение «энергетического» центра, сдвиг которого обусловлен положением седьмого элемента АР. В качестве ВКДН рассматривалась невзаимодействующая точечная АР с элементами типа «точечных» датчиков поля, всенаправленных по азимуту и углу места. На рис. 2б изображена зависимость относительной погрешности $\sigma_\Delta = \dfrac{\left|\sigma_\beta^{(1)} - \sigma_\beta^{(2)}\right|}{\sigma_\beta^{(2)}} \cdot 100\%$ СКО пеленгования от значений угла места, где $\sigma_\beta^{(1)}$ обозначена СКО пеленгования в угломестной плоскости, рассчитываемая по известному выражению (3), а $\sigma_\beta^{(2)}$ – СКО пеленгования в угломестной плоскости, рассчитываемая по обобщённому выражению (21). Представленные зависимости получены при отношении радиуса кольцевой АР к длине волны $R/\lambda = 1$ и различных значениях отношениях h/R высоты расположения седьмого элемента к радиусу АР.

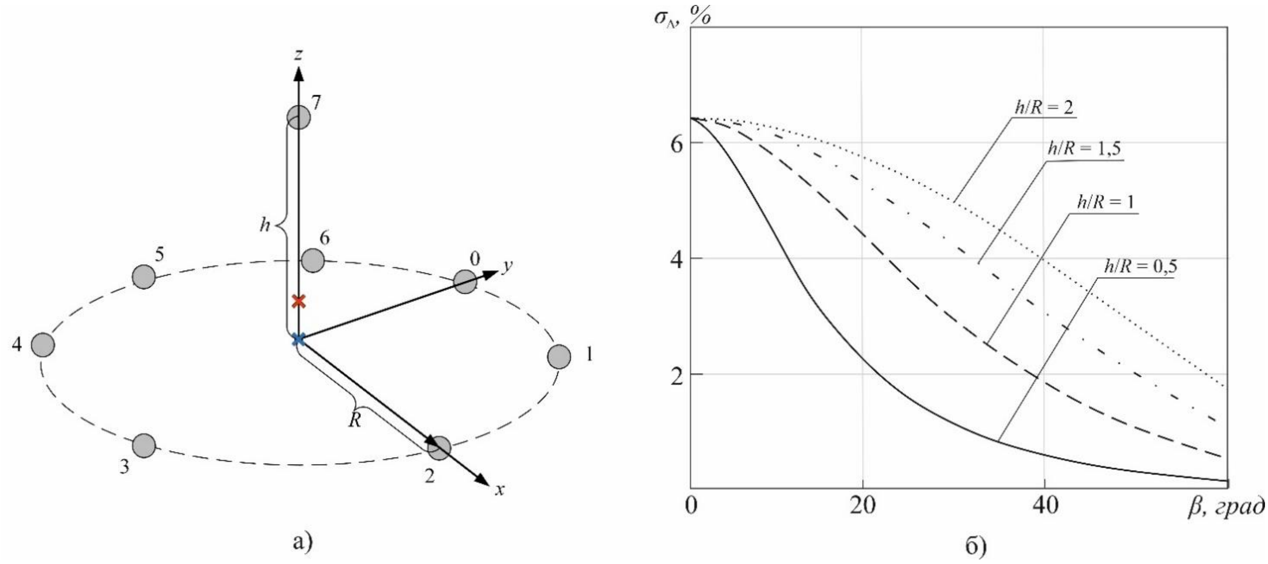

Рис. 2. Объемная 8-элементная АР (а) и зависимость относительной погрешности СКО пеленгования σ_Δ в угломестной плоскости (б) от значений угла места

Результаты расчета, изображенные на рис. 2б показывают, что с ростом отношения h/R относительная погрешность СКО пеленгования по углу места увеличивается, что обусловлено большим смещением «энергетического» центра АР относительно геометрического в угломестной плоскости, при этом при $h/R = 0$ относительная погрешность $\sigma_\Delta = 0$. Таким образом, результаты расчета СКО по обобщенному выражению (15), отличаются от результатов расчета по известному выражению (3), не учитывающему смещение центра СК ВКДН относительно «энергетического» центра АС. В случае плоской АР (кольцевой решетки с центральным элементом), результаты расчетов по выражениям (2) и (14) одинаковы, что обусловлено совпадением «энергетического» и геометрического центров в азимутальной плоскости.

Заключение

Для антенных решеток с элементами типа «точечных» датчиков поля широко применяемое выражение для информационной матрицы Фишера справедливо лишь в том случае, если начало СК ВКДН определено в «энергетическом» центре решётки. Показано, что для использования такого выражения необходимо дополнительно вычислять положение «энергетического» центра АС, после чего переопределять ВКДН в соответствующую СК, что требует дополнительных вычислительных затрат. Обобщённое выражение для «энергетического» центра АР с произвольной структурой и характеристиками направленности АЭ в условиях сложной электромагнитной обстановки получено в настоящей работе.

В общем случае многоканального ОП с АС произвольной структуры и характеристиками направленности, при оценке потенциальной точности пеленгования по азимуту и углу места следует использовать полученное обобщённое выражение для информационной матрицы Фишера, позволяющее рассчитывать потенциальные характеристики ОП для ВКДН, определенной в произвольной СК, независимо от расположения «энергетического» центра АС. Сформулирована теорема для информации Фишера совместных оценок азимута и угла места в случае многоканального обнаружителя-пеленгатора с антенной системой произвольной структуры в условиях сложной электромагнитной обстановки, в том числе при наличии корреляции шума в пространственных каналах и различиях в его интенсивности.

Использование на практике полученных обобщённых выражений для нижней границы Крамера – Рао позволит решать задачу синтеза пеленгационных АС в зависимости от ее структуры и характеристик направленности, числа антенн и параметров окружающей электромагнитной обстановки.

Литература

1. Артёмов М.Л. Методы статистической радиотехники в современном решении задач радиомониторинга / М.Л. Артемов, О.В. Афанасьев, М.П. Сличенко // Антенны. – 2016. – №6 (226). – С. 55-62.
2. Артемов М.Л. Современный подход к развитию методов пеленгования радиоволн источников радиоизлучения / М.Л. Артемов, М.П. Сличенко // Антенны. – 2018. – № 5 (249). – С. 31-37.

3. Артемов М.Л. Обнаружение и пеленгование источников радиоизлучений в рамках теории статистической радиотехники / М.Л. Артемов, О.В. Афанасьев, М.П. Сличенко // Радиотехника. – 2016. – № 5. – С. 4-18.
4. Куликов Е.И. Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е.И. Куликов, А.П. Трифонов – М.: Советское радио, 1978 – 295 с.
5. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применения: Пер. с англ. / Под ред. академика Ю.В. Линника / С.Р. Рао. – М.: Наука, 1968. – 548 с.
6. Репин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1977. 432 с.
7. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин – 3-е изд. перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1989. 656 с.
8. Уфаев В.А. Способы определения местоположения и пространственной идентификации источников радиоизлучений: Монография / В.А. Уфаев. – Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА», 2017. – 431 с.
9. Артёмов М.Л. Предельная пеленгационная чувствительность пеленгационной антенной системы / М.Л. Артёмов, А.Д. Виноградов, И.С. Дмитриев, М.Ю. Ильин // Антенны. – 2010. – № 12 (163). – С. 13-19.
10. Виноградов А.Д. Потенциальная точность многоканального пеленгатора с антенной решеткой из ненаправленных невзаимодействующих антенных элементов / А.Д. Виноградов, И.С. Дмитриев // Антенны. – 2008. – № 3 (130). – С. 60-63.
11. Виноградов А.Д. Предельная чувствительность широкодиапазонных радиопеленгаторов с эквидистантными кольцевыми антенными решетками из ненаправленных антенн / А.Д. Виноградов, И.С. Дмитриев, М.Ю Ильин., М.И. Козлов, М.П. Сличенко, Е.С. Соломко // Антенны. – 2013. – №5. – С. 18-29.

12. Артемов М.Л. Потенциальная точность оценивания направлений прихода и амплитуд напряженности поля нескольких плоских монохроматичсеких радиоволн многоканальным радиопеленгатором с антенной системой произвольной конфигурации / М.Л. Артемов, О.В. Афанасьев, И.С. Дмитриев, В.В. Попов, М.П. Сличенко // Радиотехника. – 2013. – № 3. – С. 69-75.
13. Дмитриев И.С. Максимально правдоподобное обнаружение и оценивание направления прихода и амплитуды напряженности радиоволны с помощью многоканального радиопеленгатора с антенной системой произвольной конфигурации / И.С. Дмитриев, М.П. Сличенко // Антенны. – 2011. – №5. – С. 59-64.
14. Артемов М.Л. Потенциальная точность совместного оценивания азимута и угла места направления прихода радиоволн от источника радиоизлучения / М.Л. Артемов, О.В. Афанасьев, М.П. Сличенко // Антенны. – 2018. – № 5 (249). – С. 38-46.
15. Артемов М.Л. Автоматизированные системы управления, радиосвязи и радиоэлектронной борьбы. Основы теории и принципы построения. / Под. ред. М.Л. Артемова / М.Л. Артемов, В.И. Борисов, В.А. Маковий, М.П. Сличенко. – М.: Радиотехника, 2021. – 556 с.
16. Артемов М.Л. Особенности функционирования максимально правдоподобного алгоритма обнаружения и оценивания параметров плоской монохроматической радиоволны в условиях сложной помеховой обстановки / М.Л. Артемов, О.В. Афанасьев, И.С. Дмитриев, М.П. Сличенко // Радиотехника. – 2013. – №3. – С. 62-68.
17. Соломко Е.С. Адаптивный алгоритм обнаружения и пеленгования плоской монохроматической радиоволны многоканальным многошкальным несинфазным радиопеленгатором / Е.С. Соломко // Радиотехника. 2013. №12. С. 129-135.

18. Сличенко М.П. Обобщенное неравенство Крамера – Рао для пеленгования источников радиоизлучения в условиях сложной электромагнитной обстановки / М.П. Сличенко, О.Н. Завалишина // Теория и техника радиосвязи. – 2022. – №4. – С. 41-45.
19. Сличенко М.П. Обобщенная оценка потенциальной точности пеленгования источников радиоизлучения многоканальным обнаружителем-пеленгатором в условиях сложной электромагнитной обстановки / М.П. Сличенко, О.Н. Завалишина // Сборников трудов XXIX Международной научно-технической конференции «Радиолокация, навигация, связь», посвященной 70-летию кафедры радиофизики ВГУ. – 2023. – Т.1. – С. 192-199.
20. Афанасьев О.В. Теорема о количестве информации Фишера в случае азимутального пеленгования многоканальным обнаружителем-пеленгатором с антенной системой произвольной структуры / О.В. Афанасьев, М.П. Сличенко, О.Н. Завалишина // Радиотехника. – 2023. – Т.87. – №5. – С. 143-156. https://doi.org/10.18127/j00338486-202305-15
21. Дмитриев И.С. Представление периодических функций с финитным спектром Фурье модифицированным рядом Котельникова / И.С. Дмитриев, М.П. Сличенко // Радиотехника и электроника. – 2015. – Т. 60. – № 5. – С. 529-534. https://doi.org/10.7868/S0033849414090071
22. Сличенко М.П. Представление многомерных периодических функций в виде конечной взвешенной суммы отсчетных значений / М.П. Сличенко // Радиотехника и электроника. – 2014. – Т. 59. – № 10. – С. 1042-1049. https://doi.org/10.7868/S0033849414090071
23. Дмитриев И.С. Особенности интерполяции 2π-периодических функций с финитным спектром Фурье на основе теоремы отсчетов / И.С. Дмитриев, М.П. Сличенко // Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. – 2014. – №1.

24. Сличенко М.П. Представление периодических функций с финитным спектром Фурье модифицированным неэквидистантным рядом Котельникова / М.П. Сличенко // Радиотехника. – 2023. Т. 87. – № 5. – С. 123-133. https://doi.org/10.18127/j00338486-202305-13

Для цитирования:

Сличенко М.П., Завалишина О.Н. Обобщённое неравенство Крамера – Рао в случае совместного пеленгования по азимуту и углу места в условиях сложной электромагнитной обстановки. // Журнал радиоэлектроники. – 2024. – №. 3. https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.3.12