

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.3.10>

УДК: 621.3.01; 512.62

## МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПО АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

Н.В. Коровкин<sup>1</sup>, А.Ю. Гришенцев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая, д.29 литера Б

<sup>2</sup>Университет ИТМО, 197101, г. Санкт-Петербург, Кронверкский пр-кт, д. 49, лит. А.

Статья поступила в редакцию 26 ноября 2024 г.

**Аннотация.** Изложены результаты исследований и разработки методов решения задач идентификации величин комплексных сопротивлений пассивных линейных электрических цепей по амплитудно-частотным характеристикам, представляемым в работе в виде полиномов от нескольких переменных (неизвестных) и частоты. Целью исследований является разработка и систематизация методов идентификации параметров пассивных линейных электрических цепей по амплитудно-частотным характеристикам. Актуальность подтверждается необходимым и естественным развитием теории линейных электрических цепей и востребованностью результатов исследований в значительном спектре практических приложений. В работе сформулирована и доказана теорема оценки верхней границы числа независимых уравнений при решении задачи идентификации. Предлагается производить оценку на основании числа независимых уравнений формируемых из исходного полинома на различных частотах. Предложены методы решения полученных уравнений, в том числе за счёт замены произведений неизвестных на новые аргументы, что позволяет свести систему нелинейных уравнений к системе линейных

уравнений. Сформулирована и доказана теорема о формировании новых уравнений за счёт дифференцирования по частоте комплексных проводимостей или сопротивлений и выраженных в аналитическом виде, и в виде отношения измеренных токов и напряжений. Производные от измеренных токов и напряжений предлагается брать за счёт известных свойств операторных преобразований Фурье или Лапласа. Доказанные теоремы снабжены следствиями и замечаниями, уточняющими возможности и границы применимости теорем. В ходе исследований обоснованно, что для синтеза новых уравнений, с точки зрения снижения сложности вычислений, предпочтительное использование дифференцирования, а не интегрирование, т.к. при дифференцировании сохраняется полиномиальная форма уравнений, что для поиска решения обеспечивает возможность применения развитой теории полиномиальных уравнений. При этом и интеграл, и производная, от комплексных сопротивлений и проводимостей могут быть применены для синтеза независимых уравнений. Приведены компактные демонстрационные примеры поясняющие применение разработанных методов. В заключении исследований сформулированы выводы.

**Ключевые слова:** обратные задачи, линейные электрические цепи, идентификация параметров линейных электрических цепей, частотный метод анализ электрических цепей, частотные характеристики, математическое обеспечение САПР.

**Автор для переписки:** Гришенцев Алексей Юрьевич, [agrishentsev@yandex.ru](mailto:agrishentsev@yandex.ru)

## Введение

Значительная часть задач радиофизики, радиоэлектроники, схемотехники, электротехники и ряда других теоретических дисциплин и практических приложений сводится к решению прямых и обратных задач теории электрических цепей. Разработка методов решения обратных задач определения параметров линейных электрических цепей по значениям амплитуд и фаз токов и напряжений на зажимах, является значимым направлением для развития радиоэлектронного приборостроения. Особенно интересны методы, позволяющие выполнять подобные расчёты в реальном времени или со скоростью обеспечивающей относительно оперативное получение результата.

Практически во всех учебниках по теоретическим основам электротехники [1-3] можно найти ставшие классическими методы решения обратных задач идентификации параметров линейных T- и П-образных четырёх полюсников по экспериментально определенным передаточным характеристикам в режимах холостого хода и короткого замыкания. Значительный вклад в развитие задач синтеза и анализа линейных цепей выполнен в работах Крона Г., Бутырина П.А., Филаретова В.В., Курганова С.А. и других отечественных и зарубежных учёных-исследователей [4-7].

Разработанные и развиваемые в настоящей работе методы охватывают и идентификацию параметров слоистых сред, при моделировании которых широко используются цепные модели [8-10]. Предлагаемые методы могут быть математической основой определения параметров групп датчиков расположенных в активных средах или труднодоступных частях устройств и сооружений [11], для анализа и синтеза антенно-фидерных устройств [12] и фильтров радиотехнических приборов.

На практике нелинейной цепи, в тех сегментах, где её характеристики близки к линейным, можно сопоставить линейную схему замещения, методы анализа и синтеза линейных цепей применяют для решения широкого круга нелинейных задач. Так в схемотехнике известны линейные схемы замещения

транзисторов для режимов малых сигналов [13], в геофизике применяют линейные схемы замещения ионосферы [14] и толщи геологических пород [15]. Линейные модели активно используются в металлообработке в частности в индукционной термообработке [16], существуют биофизические модели электропроводности биологических тканей на основе линейных схем замещения [17,18] и др.

Сама задача разработки математического аппарата решения прямых и обратных задач или задач анализа синтеза технических устройств, в том числе устройств радиоэлектроники и схемотехники так же относится к классу задач разработки математического обеспечения систем автоматизированного проектирования (САПР) [19,20], и машинного расчёта электронных и электрических схем [21-23].

Таким образом, востребованность и актуальность развития и разработки методов решения обратных задач линейных электрических цепей достаточно обоснована и не вызывает у авторов сомнений. При этом исследования показывают, что некоторые общие и частные вопросы решения задач идентификации параметров изучены не достаточно, например:

- методы синтеза и оценка верхней границы числа независимых уравнений соответствующих линейной цепи, в частности, при исследованиях может сложиться ошибочное мнение, что выполняя эксперименты на различных частотах, можно получить сколь угодно много независимых уравнений для идентификации параметров цепи;

- получение новых независимых уравнений за счёт модификации исходных и извлечения дополнительной информации по амплитудно-частотным характеристикам токов и напряжений на зажимах полюсов  $n$ -полюсника;

- разработка методов идентификации параметров линейных цепей на одной частоте при невозможности и/или затруднения её значимого изменения, что актуально для большого числа задач в электроэнергетике, где практически единственной доступной частотой является частота 50 Гц;

– объяснение физического смысла и практического применения производных и интегралов комплексного сопротивления и проводимости.

Часть данных вопросов исследована в работах [24,25]. Некоторые результаты развития и продолжения исследований, их систематизация и обобщение впервые изложены в данной работе.

Разработаны следующие методы:

– метод оценки верхней границы числа независимых уравнений, получаемых при изменении частоты, для определения параметров линейной цепи, соответствующая теорема и её доказательство;

– метод идентификации параметров линейной цепи на основании исходного уравнения и измерения комплексных тока и напряжения на различных частотах;

– метод идентификации параметров линейной цепи на основании измерения комплексных тока и напряжения на одной частоте;

– метод синтеза дополнительных независимых уравнений за счёт дифференцирования и интегрирования комплексного сопротивления или проводимости и заменой интерполяционным полиномом произведения числителя и знаменателя дробно-рациональной функции полученной в результате измерения тока и напряжения на зажимах цепи;

– метод решения избыточной системы нелинейных уравнений с применением упрощения их формы за счёт сведения к линейной системе алгебраических уравнений.

В данной работе, изложенные методы объединены идеологией максимального извлечения информации о параметрах цепи при измерениях тока и напряжения в одной ветви. Рассматривая методологию как совокупность методов объединённых общей идеологией, авторы считают, что данная работа носит методологический характер. Предлагаемые методы способствуют развитию теоретических основ соответствующих дисциплин, и могут быть использованы: в качестве элементов математического обеспечения САПР; математической основы построения измерительно-аналитических приборов,

производственно-технологических и эксплуатационных систем мониторинга; при решении задач идентификации параметров линейных систем автоматического управления.

## 1. Постановка задачи

Дан пассивный двухполюсник с известной топологией (рис. 1), часть или все параметры схемы которого неизвестны. По измерению внешней ЭДС  $\dot{E}(\omega)$  на паре зажимов (1,2) и комплексного тока  $\dot{I}(\omega)$  через ветвь, включающую эту пару зажимов необходимо определить величины неизвестных параметров схемы двухполюсника.

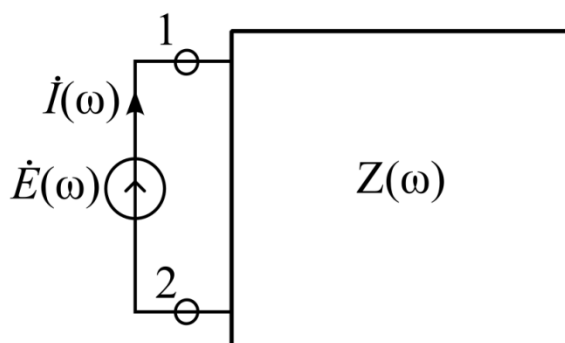


Рис. 1. Двухполюсник с подключенным к зажимам внешним источником ЭДС.

Предполагается принципиальная разрешимость поставленной выше задачи. Так, если в одной из ветвей двухполюсника имеется два неизвестных последовательно включенных резистора, то принципиально возможно определение только их суммы. Аналогичная ситуация будет иметь место и для параллельного включения. Возможны и трех-, и более элементные ситуации, включающие несколько узлов и ветвей, когда один (или несколько) неизвестных параметров принципиально по отдельности определены быть не могут, но могут быть определены как один замещающий их параметр. Подобного рода «вырождения», обычно, достаточно очевидны, поскольку задачи идентификации для схем числом неизвестных элементов более 10 очень сложны, но и в этом случае «вырождения» видны «на глаз». Их полное формальное описание авторам из специализированной литературы неизвестно,

и представляет собой, по мнению авторов, отдельную достаточно интересную задачу, которая планируется к исследованию, но не в рамках данной работы.

Комплексное сопротивление или проводимость между полюсами (1,2) вычислимы из закона Ома:

$$\begin{cases} Z(\omega) = \frac{\dot{E}(\omega)}{\dot{I}(\omega)} \\ Y(\omega) = \frac{\dot{I}(\omega)}{\dot{E}(\omega)} \end{cases} \quad (1)$$

Топология схемы известна и, используя, например, метод контурных токов [26], можно определить аналитическое выражение для сопротивления или проводимости в виде:

$$\begin{cases} Z(\omega) = \frac{P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)}{P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)} \\ Y(\omega) = \frac{P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)}{P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)} \end{cases}, \quad (2)$$

где  $P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)$  и  $P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)$  – полиномы;  $x_k, k = \overline{1, K}$  – множество неизвестных параметров  $R, L, C$  компонентов схемы и  $h_p, p = \overline{1, P}$  – множество известных параметров  $R, L, C$  компонентов схемы;  $\omega = 2\pi f$  – круговая частота.

Задача сводится к отысканию значений элементов множества неизвестных параметров  $\{x_k\}$ . Учитывая  $Y(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)}$ , не имеет принципиального значения с

каким уравнением из систем (1) или (2) работать далее. Если записать второе уравнение из системы (1) в виде  $\dot{I}(\omega) = Y(\omega)\dot{E}(\omega)$ , то получится классическое уравнение описания линейной системы в операторном пространстве с передаточной функцией  $Y(\omega)$ , операторным образом  $\dot{E}(\omega)$  возмущающего воздействия и операторным образом  $\dot{I}(\omega)$  отклика системы. В силу того, что в соответствии с принятой постановкой задачи (рис. 1) в качестве возмущающего воздействия используется источник ЭДС  $\dot{E}(\omega)$ , целесообразнее из (1) использовать уравнение, содержащее комплексную проводимость  $Y(\omega)$ . Если в качестве возмущающего воздействия использовать источник тока  $\dot{J}(\omega)$ , то для

получения уравнения линейной системы  $\dot{U}(\omega) = Z(\omega)\dot{J}(\omega)$ , где  $\dot{U}(\omega)$  – напряжение на зажимах (1,2), целесообразно использовать комплексное сопротивление  $Z(\omega)$ . В целом, оба подхода эквивалентны.

Используя (1) и (2) запишем уравнение исследуемой задачи в общем виде:

$$P(\dot{I}(\omega), \dot{E}(\omega), \{x_k\}, \{h_p\}, \omega) = \dot{I}(\omega)P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) - \dot{E}(\omega)P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) = 0. \quad (3)$$

При решении задачи в ходе натурального эксперимента, или при численном моделировании, значение внешней ЭДС  $\dot{E}(\omega)$  и комплексного тока  $\dot{I}(\omega)$  через ветвь включающую полюса (1,2) характеризуются комплексными числами, которые могут быть различны для разных частот. Как в натурном эксперименте, так и при математическом моделировании значение ЭДС  $\dot{E}(\omega)$  удобно принимать вещественным, что не сложно сделать, положив начальную фазу ЭДС равной нулю на всех частотах, при этом фаза тока  $\dot{I}(\omega)$  может меняться. Так как  $P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)$  и  $P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)$  – полиномы, а  $\dot{E}(\omega)$  и  $\dot{I}(\omega)$  – комплексные числа, то (3) так же является полиномом. Перепишем (3) в следующем виде:

$$P(\dot{I}(\omega), \dot{E}(\omega), \{x_k\}, \{h_p\}, \omega) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_K} A_{l_1, l_2, \dots, l_K}(\omega) \cdot x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_K^{l_K} = 0, \quad (4)$$

где  $A_{l_1, l_2, \dots, l_K}(\omega)$  – коэффициенты полинома, вычисляемые как функции от  $\{\dot{E}(\omega), \dot{I}(\omega), \{h_p\}, \omega\}$ ;  $l_1, l_2, \dots, l_K$  – степени неизвестных и индексы коэффициентов многочлена, соответственно.

В силу того, что все изменяемые параметры заданные символами  $x_k \in \mathbb{R}$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $h_p \in \mathbb{R}$ ,  $p = \overline{1, P}$  и  $\omega \in \mathbb{R}$ , а ЭДС  $\dot{E}(\omega)$  и ток  $\dot{I}(\omega)$  входят в (4) в виде комплексных чисел, полином (4) можно расщепить на вещественную и мнимую части, т.е. на два уравнения: одно будет содержать только вещественные члены, другое – только умноженные на мнимую единицу, т.е. мнимые члены.

Учитывая что  $R, L, C \in \mathbb{R}$ , а значит, преобразование Лапласа для линейных *RLC* схем имеет вид уравнений с вещественными коэффициентами, и при



переходе от преобразования Лапласа к преобразованию Фурье используя замену  $p = j\omega$ , т.е.  $p^0 = 1$ ,  $p^1 = j\omega$ ,  $p^2 = -\omega^2$ ,  $p^3 = -j\omega^3, \dots$ , получим распределение степеней при частоте  $\omega$  в полиноме (4) так, что при вещественной части содержатся только чётные, и, наоборот, при мнимой части только нечётные степени. Свойство распределения степеней при  $\omega$ , по вещественной и мнимой части полинома, сохранится и при расщеплении (4), таким образом, не будет одинаковых степеней в паре уравнений, полученных в результате деления (4) на две части. Следует отметить, что при выполнении некоторых вполне корректных преобразований (например, умножении всего полинома на мнимую единицу  $j$ ) можно получить такой полином вида (4), в котором при вещественной части содержатся только нечётные, а при мнимой части только чётные степени. Не сложно заметить, что при произведении полиномов с одинаковым распределением вещественной и мнимой части по чётным (нечётным) и нечётным (чётным) степеням при  $\omega$ , распределение вещественной и мнимой части по частоте  $\omega$ , для результата произведения останется неизменным. Известно, что вещественная и мнимая части полиномов связаны интегральным соотношением [27], где также показано использование этого свойства для синтеза фазосдвигающих цепей. Тематика эта, однако, стоит в стороне от рассматриваемых в работе вопросов и каких-либо упрощений в решении задачи в указанной выше постановке не дает, и потому далее рассматриваться не будет.

Задавая различные частоты на основе (4) можно получить неограниченное число уравнений для определения множества неизвестных параметров  $\{x_k\}$ . При этом возникают вопросы: о числе независимых уравнений; о достаточности числа независимых уравнений для решения поставленной задачи; о возможности решения задачи, в случае если ЭДС  $\dot{E}(\omega)$  и ток  $\dot{I}(\omega)$  известны только для одной частоты; о способах извлечения данных и при необходимости получения новых независимых уравнений. Исследования, проведённые авторами и изложенные в данной работе, отвечают на поставленные вопросы.

## 2. Теорема о верхней границе числа независимых уравнений

Исследуем свойства уравнения (3) с точки зрения оценки верхней границы числа независимых уравнений [24], которые можно получить из (3), используя различные значения  $\omega$ .

Положим, что значения множества  $\{x_k\}$  известны, при этом множество компонентов с известными параметрами дополнится на  $K$ , т.е.:  $h_s, s = \overline{1, P+K}$ , а множество  $\{x_k\}$  станет пустым  $\{x_k\} = \emptyset$ , используя (1) и (2) выразим значение тока  $\dot{I}(\omega)$  в аналитическом виде:

$$\dot{I}(\omega) = Y(\omega)\dot{E}(\omega) = \frac{P_I(\{h_s\}, \omega)}{P_U(\{h_s\}, \omega)} \dot{E}(\omega). \quad (5)$$

Таким, образом, за счёт выражения (5) предоставляется возможность моделирования тока  $\dot{I}(\omega)$  при модельных расчётах.

Аналогичным образом, положив, что параметры всех компонентов схемы неизвестны, т.е.  $x_s, s = \overline{1, P+K}$ , получим выражение для комплексной проводимости:

$$Y(\omega) = \frac{P_I(\{x_s\}, \omega)}{P_U(\{x_s\}, \omega)}. \quad (6)$$

Далее, используя (5,6), получим:

$$P_I(\{h_s\}, \omega)P_U(\{x_s\}, \omega) - P_U(\{h_s\}, \omega)P_I(\{x_s\}, \omega) = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) является полиномом, т.к. образованно произведением и разностью полиномов. В (7) выражение тока  $\dot{I}(\omega)$  содержится в неявном виде через известные компоненты  $h_s, s = \overline{1, P+K}$ . Упорядочим выражение (7) по степеням  $\nu, \nu = \overline{0, V}$  при круговой частоте  $\omega$ :

$$\sum_{\nu=0}^V \left( \sum_{l_1^{\nu}, l_2^{\nu}, \dots, l_K^{\nu}} b_{l_1^{\nu}, l_2^{\nu}, \dots, l_K^{\nu}} \cdot x_1^{l_1^{\nu}} x_2^{l_2^{\nu}} \dots x_K^{l_K^{\nu}} \right) \cdot \omega^{\nu} = 0. \quad (8)$$

Обозначим  $\Lambda = (0, 1, \dots, V)$  – упорядоченное множество всевозможных степеней при  $\omega$ , тогда подмножество  $\Omega \subseteq \Lambda$ , образованно степенями  $v$  при  $\omega$

для которых частичная сумма  $\left( \sum_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_K^v} b_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_K^v} \cdot x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_K^{l_K^v} \right)$  не равна нулю, т.е.:

$\left( \sum_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_K^v} b_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_K^v} \cdot x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_K^{l_K^v} \right) \neq 0$ . Следовательно,  $\text{card}(\Omega)$  – мощность множества  $\Omega$

есть число различных степеней при  $\omega$  вошедших в (7,8).

Теорема I. Для различных значений  $\omega$  из (8) можно получить число независимых уравнений не более  $\text{card}(\Omega)$ .

Доказательство. Для доказательства упростим выражение (8) введя новую индексруемую переменную  $y_m, m = \overline{0, M}$  которая заменит всевозможные уникальные комбинационные произведения  $x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_K^{l_K^v}$  вошедшие в (8), включая  $y_0 = 1$ , в результате такой замены выражение (8) можно записать в виде линейного уравнения от  $y_m$ :

$$\sum_{v=0}^V \left( \sum_{m=0}^M b_{v,m} \cdot y_m \right) \cdot \omega^v = 0. \quad (9)$$

Изменив порядок суммирования в уравнении (9) получим:

$$P(\omega_d, y_m) = \sum_{m=0}^M \left( \sum_{v=0}^V b_{v,m} \cdot \omega_d^v \right) \cdot y_m = 0, \quad (10)$$

основу для синтеза системы  $M$  линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), за счёт изменения частот  $\omega_d, d = \overline{1, M}$ .

С помощью прямого хода метода Гаусса, покажем, что максимально возможное число линейно независимых уравнений вида (10) не превышает  $\text{card}(\Omega)$ . Для этого вычтем первое уравнение, полученное при  $\omega = \omega_1$  из всех

последующих:  $P^1(\omega_d, \omega_1, y_m) = P(\omega_d, y_m) - \frac{\omega_d^{\Omega_1}}{\omega_1^{\Omega_1}} P(\omega_1, y_m), d = \overline{2, M}$ , где  $\Omega_1 \in \Omega$

есть первый элемент множества  $\Omega$ , при этом обнуляться значения слагаемых

содержащие  $\omega^{\Omega_1}$ . Очевидно, что если  $\Omega_1 = 0$ , то множитель  $\frac{\omega_d^{\Omega_1}}{\omega_1^{\Omega_1}} = 1$  можно не учитывать. Аналогичную операцию, при условии сохранения уравнений с ненулевыми коэффициентами, можно выполнить не более  $card(\Omega) - 1$  раз. Следовательно, включая рассмотренную первую разность, число независимых уравнений в (8) не превышает  $card(\Omega)$ , ч.т.д.

Следствие I.I. Необходимый критерий решения. Задача (4) может иметь решение для линейного двухполюсника, если число неизвестных  $x_k, k = \overline{1, K}$  не превосходит  $card(\Omega)$ .

Замечание I.I. В теореме указан критерий определения верхней границы  $card(\Omega)$ . Если в уравнении (3) в составе полиномиальных компонентов  $P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega), P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)$  при некоторой степени  $\Omega_g \in \Omega, g = \overline{1, card(\Omega)}$  содержится коэффициент образованный как функция от компонентов только с известными параметрами из множества  $\{h_p\}$ , то в силу разностной формы (3) данный коэффициент обратится в ноль, а значит, степень  $\Omega_g$  будет исключена из уравнения (3).

Следствие I.II. Полином вида (7) будет иметь максимальное значение величины  $card(\Omega)$  для исследуемой задачи.

### 3. Методы решения

Предлагается два способа решения уравнений вида (3). При всех способах решения исходными данными являются: измеренные значения ЭДС  $\dot{E}(\omega_d)$  и тока  $\dot{I}(\omega_d)$  на заданных частотах; топология схемы; множество известных  $\{h_p\}$  и неизвестных  $\{x_k\}$  параметров схемы.

Первый способ вполне очевиден и основан на составлении  $K$ , в общем случае нелинейных уравнений вида:

$$P(\dot{I}(\omega_d), \dot{E}(\omega_d), \{x_k\}, \{h_p\}, \omega_d), d = \overline{1, K}, \quad (11)$$

причём полученная система, в соответствии с доказанной ранее теоремой, может иметь решение, в случае если  $K \leq \text{card}(\Omega)$ , т.е. когда число неизвестных меньше или равно числу независимых уравнений.

Второй способ основан на использованной ранее идее замены всевозможных уникальных произведений  $x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_K^{l_K^v}$  на  $y_m$ ,  $m = \overline{0, M}$ , включая  $y_0 = 1$  для свободного от любых произведений из  $\{x_k\}$  члена, что позволяет свести в общем случае нелинейное уравнение вида (4) к СЛАУ вида (10). При замене произведений  $x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_K^{l_K^v}$  их необходимо упорядочить, таким образом, что бы для  $y_m$  и  $y_{m+1}$ ,  $m = \overline{1, M-1}$  выполнялось условие  $w_m \prec w_{m+1}$ , где  $w_m = \text{DL}(x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_K^{l_K^v} = y_m)$  и  $w_{m+1} = \text{DL}(x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_K^{l_K^v} = y_{m+1})$  – весовые характеристики строк аргументов, DL – функция (от англ. Degree Lexicographic) вычисления веса. Функция DL работает следующим образом: всем возможным произведениям  $x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_K^{l_K^v}$  в которых переменные упорядочены в лексикографическом порядке ставится в соответствие кортеж, содержащий  $K$  элементов, в каждый элемент кортежа содержит значение степени соответствующего элемента из  $x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_K^{l_K^v}$ , сумма элементов кортежа есть значение функции DL [28].

За счёт такого упорядочивания при дальнейшем выполнении прямого хода метода Гаусса удаётся избавиться от произведений с наибольшими значениями суммы степеней в произведении неизвестных  $x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_K^{l_K^v}$ , т.е. от произведений  $x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_K^{l_K^v}$  в наиболее сложных формах. Для большинства задач в результате выполнения прямого хода метода Гаусса получается блочно-треугольная матрица. После приведения к блочно-треугольному виду полученной СЛАУ, не нулевые уравнения будут содержать более простые, чем исходные уравнения, формы произведений  $x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_K^{l_K^v}$ , что значительно упрощает вычисление искомых корней  $x_k, k = \overline{1, K}$ . Сформированная СЛАУ решается, и по полученным значениям  $y_m, m = \overline{0, M}$  вычисляются значения

$x_k, k = \overline{1, K}$ . Корни уравнения могут быть найдены, если  $K \leq \text{card}(\Omega)$ . Данный способ позволяет избежать прямого решения, в общем случае достаточно сложных, систем нелинейных уравнений вида (7) сводя их сначала к линейным, а затем к относительно простым нелинейным, и способствует значительному повышению эффективности использования машинных ресурсов. Кроме того, по числу ненулевых строк, в полученной прямым ходом Гаусса блочно-треугольной матрице, предлагаемый метод позволяет определить число независимых уравнений, которое ограничено сверху по критерию, сформулированному в теореме I.

Каждый из двух изложенных методов может содержать дополнительную операцию: расщепления исходного уравнения на вещественную и мнимую часть, что позволяет дополнительно упростить уравнения. Операция расщепления не позволяет увеличить число независимых уравнений в соответствии с доказанной ранее теоремой I и тем свойством, что четные и нечетные степени при  $\omega$  распределены не пересекаясь по мнимой и вещественной части исходного уравнения, соответственно.

Отделение посторонних корней в двух методах производится на основании того, что параметры компонентов должны быть вещественными числами больше нуля, т.е.:  $x_k \in \mathbb{R} \ \& \ x_k > 0, k = \overline{1, K}$  из чего следует  $y_m \in \mathbb{R} \ \& \ y_m > 0, m = \overline{0, M}$ .

#### 4. Синтез новых уравнений I

Обратимся к исходным уравнениям (1,2) и запишем выражение для сопротивления  $Z(\omega)$  и проводимости  $Y(\omega)$  в виде:

$$\begin{cases} Z(\omega) = \frac{\dot{E}(\omega)}{\dot{I}(\omega)} = \frac{P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)}{P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)} \\ Y(\omega) = \frac{\dot{I}(\omega)}{\dot{E}(\omega)} = \frac{P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)}{P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)} \end{cases} \quad (12)$$

Уравнения (12) интересны тем, что в правой части содержится аналитическая функция в виде отношения полиномов, а в левой отношение числовых величин ЭДС  $\dot{E}(\omega)$  и тока  $\dot{I}(\omega)$  полученных в результате измерений при некоторых значениях круговой частоты  $\omega$ . Предлагается получение новых уравнений за счёт дифференцирования или интегрирования уравнений вида (12) по частоте  $\omega$ .

В частотном пространстве сопротивление  $Z(\omega) = \frac{\dot{U}(\omega)}{\dot{I}(\omega)}$  и проводимость

$Y(\omega) = \frac{\dot{I}(\omega)}{\dot{U}(\omega)}$  имеют вид отношения, поэтому производные для них вычисляются

в соответствии с выражением:  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ . Замечая, что  $\frac{u}{v} = u \cdot \frac{1}{v}$  для

определения производных высших порядков от отношения  $\frac{u}{v}$ , можно

воспользоваться известным правилом Лейбница:

$$\left(u \cdot \frac{1}{v}\right)^{(n)} = u^{(n)}\left(\frac{1}{v}\right) + C_n^1 u^{(n-1)}\left(\frac{1}{v}\right)' + C_n^2 u^{(n-2)}\left(\frac{1}{v}\right)^{(2)} + \dots + u\left(\frac{1}{v}\right)^{(n)}, \text{ где } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Запишем выражение для первой производной комплексного сопротивления:

$$Z'(\omega) = \frac{\dot{U}'(\omega)\dot{I}(\omega) - \dot{U}(\omega)\dot{I}'(\omega)}{\dot{I}^2(\omega)}, \tag{13}$$

и комплексной проводимости:

$$Y'(\omega) = \frac{\dot{I}'(\omega)\dot{U}(\omega) - \dot{I}(\omega)\dot{U}'(\omega)}{\dot{U}^2(\omega)}. \tag{14}$$

Причём несложно заметить, что:

$$\frac{Y'(\omega)}{Z'(\omega)} = \frac{(\dot{I}'(\omega)\dot{U}(\omega) - \dot{I}(\omega)\dot{U}'(\omega))\dot{I}^2(\omega)}{(\dot{U}'(\omega)\dot{I}(\omega) - \dot{U}(\omega)\dot{I}'(\omega))\dot{U}^2(\omega)} = -\frac{\dot{I}^2(\omega)}{\dot{U}^2(\omega)} = -\left(\frac{Y(\omega)}{Z(\omega)}\right) = -Y^2(\omega). \tag{15}$$

Для отношения производных высших порядков проводимости к сопротивлению, свойство наличия производной в левой части и отсутствия в правой (как в (15)) не сохраняется. Из выражения (15) можно получить следующие связи:

$$\begin{cases} Y'(\omega) = -\frac{\dot{I}^2(\omega)}{\dot{U}^2(\omega)} Z'(\omega), \\ Y'(\omega) = -Y^2(\omega) Z'(\omega) \end{cases}, \quad (16)$$

которые могут быть полезны для упрощения вычисления производной проводимости по известному значению производной сопротивления и наоборот.

Не сложно заметить, что уравнения (16) могут быть получены как производная произведения  $(Z(\omega)Y(\omega))'$ , учитывая что  $\frac{\dot{I}^2(\omega)}{\dot{U}^2(\omega)} = Y^2(\omega)$ , запишем первое уравнение из (16) в виде:

$$Y'(\omega) = -Y^2(\omega) Z'(\omega) \Rightarrow Y'(\omega) = -\frac{Y(\omega)}{Z(\omega)} Z'(\omega) \Rightarrow Y'(\omega) Z(\omega) = -Y(\omega) Z'(\omega),$$

из чего следует выражение для производной произведения взаимнообратных функций:

$$(Z(\omega)Y(\omega))' = Y'(\omega)Z(\omega) + Y(\omega)Z'(\omega) = 0. \quad (17)$$

Выражение (17) можно получить другим способом, если учесть, что  $Z(\omega)Y(\omega) = 1$  и что производная от константы равна нулю.

Анализ выражений (13), (14) и (16), (17) показывает, что в результате взятия производной от (12) вполне справедливо ожидание повышения мощности множества  $\Omega$  по отношению к (4), а значит в соответствии с теоремой I увеличение числа независимых уравнений. Кроме того ожидается, что вся совокупность уравнений полученных по (13), (14) будет независимой по отношению к (3). Аналогичные ожидания имеются относительно интегрирования уравнений (12). Исследуем вопросы подтверждения или опровержения этих ожиданий.

Учитывая (5), запишем общую форму производной по частоте  $\omega$  от первого уравнения из (12):



$$\begin{aligned} & \frac{P'_U(\{h_s\}, \omega)P_I(\{h_s\}, \omega) - P_U(\{h_s\}, \omega)P'_I(\{h_s\}, \omega)}{P_I^2(\{h_s\}, \omega)} = \\ & = \frac{P'_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) - P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)P'_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)}{P_I^2(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Приведём (18) к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} & P_I^2(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) \cdot [P'_U(\{h_s\}, \omega)P_I(\{h_s\}, \omega) - P_U(\{h_s\}, \omega)P'_I(\{h_s\}, \omega)] - \\ & - P_I^2(\{h_s\}, \omega) \cdot [P'_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) - P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)P'_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Аналогично запишем общую форму производной по частоте  $\omega$  от второго уравнения из (12):

$$\begin{aligned} & \frac{P'_I(\{h_s\}, \omega)P_U(\{h_s\}, \omega) - P_I(\{h_s\}, \omega)P'_U(\{h_s\}, \omega)}{P_U^2(\{h_s\}, \omega)} = \\ & = \frac{P'_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) - P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)P'_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)}{P_U^2(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Приведём (20) к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} & P_U^2(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) \cdot [P'_I(\{h_s\}, \omega)P_U(\{h_s\}, \omega) - P_I(\{h_s\}, \omega)P'_U(\{h_s\}, \omega)] - \\ & - P_U^2(\{h_s\}, \omega) \cdot [P'_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) - P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)P'_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)] = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Из (5) понятно, что пары  $P_I(\{h_s\}, \omega)$  и  $P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)$ , а так же  $P_U(\{h_s\}, \omega)$  и  $P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)$ , фактически одинаковые полиномы от  $\omega$  различия заключаются в том, что  $P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)$  и  $P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)$  содержат неизвестные, а  $P_I(\{h_s\}, \omega)$  и  $P_U(\{h_s\}, \omega)$  – не содержат неизвестных, т.к.  $\{h_s\}, s = \overline{1, P+K}$  (см. (5)). Поэтому пара полиномов  $P_I(\{h_s\}, \omega)$  и  $P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)$  имеют одинаковое число различных степеней при  $\omega$ ; и пара полиномов  $P_U(\{h_s\}, \omega)$  и  $P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)$  так же имеют одинаковое число различных степеней при  $\omega$ . Поэтому если число неизвестных в  $P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)$  и  $P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)$  равно нулю, т.е.  $\{x_k\} = \emptyset$ , то выражение (19) путём элементарных преобразований обращается в ноль, при наличии неизвестных выражение (19) тождественно равно нулю как уравнение. Исследуем некоторые варианты включения степеней при  $\omega$  в полиномиальные

компоненты на примере (6,19,21), для систематизации исследования воспользуемся таблицей 1.

Таблица 1. Распределение степеней при  $\omega$  в полиномах и их компонентах

Степени $\omega$ содержащиеся в различных полиномах				
в $P_U(\{h_s\}, \omega)$ и $P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)$	в $P_I(\{h_s\}, \omega)$ и $P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)$	в полиноме (19)	в полиноме (21)	в полиноме (6)
$\omega^0$	$\omega^0$	0	0	$\omega^0$
$\omega^0$	$\omega^1$	$\omega^2$	$\omega^0$	$\omega^1$
$\omega^0$	$\omega^0, \omega^1$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2$	$\omega^0$	$\omega^0, \omega^1$
$\omega^0$	$\omega^2$	$\omega^5$	$\omega^1$	$\omega^2$
$\omega^0$	$\omega^0, \omega^2$	$\omega^1, \omega^3, \omega^5$	$\omega^1$	$\omega^0, \omega^2$
$\omega^0$	$\omega^1, \omega^2$	$\omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5$	$\omega^0, \omega^1$	$\omega^1, \omega^2$
$\omega^0$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5$	$\omega^0, \omega^1$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2$
$\omega^1$	$\omega^0$	$\omega^0$	$\omega^2$	$\omega^1$
$\omega^1$	$\omega^1$	$\omega^3$	$\omega^3$	$\omega^2$
$\omega^1$	$\omega^0, \omega^1$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3$	$\omega^2, \omega^3$	$\omega^1, \omega^2$
$\omega^1$	$\omega^2$	$\omega^6$	$\omega^4$	$\omega^3$
$\omega^1$	$\omega^0, \omega^2$	$\omega^0, \omega^2, \omega^4, \omega^6$	$\omega^2, \omega^4$	$\omega^1, \omega^3$
$\omega^1$	$\omega^1, \omega^2$	$\omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6$	$\omega^3, \omega^4$	$\omega^2, \omega^3$
$\omega^1$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6$	$\omega^2, \omega^3, \omega^4$	$\omega^1, \omega^2, \omega^3$
$\omega^0, \omega^1$	$\omega^0$	$\omega^0$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2$	$\omega^0, \omega^1$
$\omega^0, \omega^1$	$\omega^1$	$\omega^2, \omega^3$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3$	$\omega^1, \omega^2$
$\omega^0, \omega^1$	$\omega^0, \omega^1$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2$
$\omega^0, \omega^1$	$\omega^2$	$\omega^5, \omega^6$	$\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4$	$\omega^2, \omega^3$
$\omega^0, \omega^1$	$\omega^0, \omega^2$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3$
$\omega^0, \omega^1$	$\omega^1, \omega^2$	$\omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4$	$\omega^1, \omega^2, \omega^3$
$\omega^0, \omega^1$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3$
$\omega^2$	$\omega^0$	$\omega^1$	$\omega^5$	$\omega^2$
$\omega^2$	$\omega^1$	$\omega^4$	$\omega^6$	$\omega^3$
$\omega^2$	$\omega^2$	$\omega^7$	$\omega^7$	$\omega^4$
$\omega^2$	$\omega^0, \omega^1$	$\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4$	$\omega^5, \omega^6$	$\omega^2, \omega^3$
$\omega^2$	$\omega^0, \omega^2$	$\omega^1, \omega^3, \omega^5, \omega^7$	$\omega^5, \omega^7$	$\omega^2, \omega^4$
$\omega^2$	$\omega^1, \omega^2$	$\omega^4, \omega^5, \omega^6, \omega^7$	$\omega^6, \omega^7$	$\omega^3, \omega^4$
$\omega^2$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2$	$\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6, \omega^7$	$\omega^5, \omega^6, \omega^7$	$\omega^2, \omega^3, \omega^4$
$\omega^0, \omega^2$	$\omega^0$	$\omega^1$	$\omega^1, \omega^3, \omega^5$	$\omega^0, \omega^2$
$\omega^0, \omega^2$	$\omega^1$	$\omega^2, \omega^4$	$\omega^0, \omega^2, \omega^4, \omega^6$	$\omega^1, \omega^3$
$\omega^0, \omega^2$	$\omega^2$	$\omega^5, \omega^7$	$\omega^1, \omega^3, \omega^5, \omega^7$	$\omega^2, \omega^4$
$\omega^0, \omega^2$	$\omega^0, \omega^1$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6$	$\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3$

Вычисление степеней при  $\omega$  в полиномах (6,19,21) для общего случая несложно реализовать, за счёт свойств производной  $(c\omega^n)' = nc\omega^{n-1}$ , где  $c = const$  и свойств произведения многочленов. Результаты вычислений (табл. 1) и анализ, на примере (19,21) подтверждают, что за исключением случаев, для (19) когда  $P_I(\dots)$  и для (21) когда  $P_U(\dots)$  содержат одну единственную степень при  $\omega$ , при увеличении числа степеней при  $\omega$  в  $P_I(\dots)$  и  $P_U(\dots)$  наблюдается устойчивая тенденция к росту  $card(\Omega)$  в полиномах (19, 21). Что можно доказать методом математической индукции используя в качестве начального элемента данные таблицы 1. Ограничить возможные варианты распределения степеней при  $\omega$ , в  $P_I(\dots)$  и  $P_U(\dots)$ , а значит и в (19, 21), можно на основании условий физической реализуемости передаточных функций  $Z(\omega)$  и  $Y(\omega)$  о которых будет сказано далее.

Теорема II. Увеличение числа  $card(\Omega)$  по отношению к исходным уравнениям записанных в виде полиномов на основании (12), возможно за счёт вычисления производных различных порядков по частоте  $\omega$  для (12).

Замечание II.I. Не для всех уравнений (12) возможно увеличение мощности множества  $\Omega$ , за счёт взятия производной, так если  $P_U(\dots)$  и  $P_I(\dots)$  содержат по одной степени при  $\omega$ , пусть даже различных, мощность множества  $\Omega$  не увеличивается.

Замечание II.II. Уточняющее. Если  $P_I(\dots)$  содержит единственную степень при  $\omega$ , то мощность  $card(\Omega)$  для (19) не превосходит  $card(\Omega)$  для (6). Если  $P_U(\dots)$  содержит единственную степень при  $\omega$ , то мощность  $card(\Omega)$  для (21) не превосходит  $card(\Omega)$  для (6).

Замечание II.III. Следует отметить, что во многих случаях производные от уравнений (12) позволяют получить большее число  $card(\Omega)$ , чем  $card(\Omega)$  для (6), но при этом уравнения вырождаются за счёт нелинейности, т.е. наличия произведений  $x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_K^{l_K}$  и отсутствия свободного от неизвестных члена.

Сделаем поясняющий комментарий к замечанию II.III. Пусть в результате взятия производной получено уравнение, не содержащее свободного от неизвестных  $\{x_k\}$  члена, т.е. нет такого произведения  $q_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_k^v} \cdot x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_k^{l_k^v}$ , для которого все степени при  $x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_k^{l_k^v}$  равны нулю и при этом  $q_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_k^v} \neq 0$ :

$$\sum_{v=0}^V \left( \sum_{l_1, l_2, \dots, l_k} q_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_k^v} \cdot x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_k^{l_k^v} \right) \cdot \omega^v = 0. \quad (22)$$

Корнями такого уравнения будут нули образующие единственную или не единственную комбинацию из неизвестных, дающую ноль в результате каждого отдельного произведения  $q_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_k^v} \cdot x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_k^{l_k^v}$  из суммы (22), т.е.  $q_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_k^v} \cdot x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_k^{l_k^v} = 0$  для всех  $q_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_k^v}$ , те неизвестные, которые не влияют (при выбранной комбинации) на значение  $q_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_k^v} \cdot x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_k^{l_k^v} = 0$  могут принимать любые значения. Уравнение (22) при условии, что нет такого произведения  $q_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_k^v} \cdot x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_k^{l_k^v}$ , для которого все степени при  $x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_k^{l_k^v}$  равны нулю и при этом  $q_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_k^v} \neq 0$  будем называть вырожденными.

Следствие II.I. Если уравнения из (12) эквивалентны друг другу, то производные от них дают различные уравнения, т.е.  $card(\Omega)$  для производной от первого уравнения из (12) может отличаться от  $card(\Omega)$  для второго уравнения из (12).

Следствие II.II. Если взятие первой производной для уравнения из (12) привело к увеличению мощности  $card(\Omega)$ , то взятие последующих (второй, третьей и т.д.) производных для данного уравнения также приведёт к дальнейшему увеличению мощности  $card(\Omega)$ .

Анализ значительного числа различных схем показывает, что практически во всех случаях взятие производной от (12) хоть и приводит к увеличению  $card(\Omega)$  по сравнению с (6) и позволяет получить соответствующее число линейно независимых уравнений относительно  $y_m = x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_k^{l_k^v}$ ,  $m = \overline{0, M}$ , но за

счёт нелинейности, т.е. наличия различных произведений  $x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_K^{l_K}$  и отсутствия ненулевого свободного члена, полученные уравнения вырождаются, так что фактическое число независимых нелинейных уравнений меньше или равно числу независимых уравнений (6). Причём совместное использование уравнений (6) и полученных в результате взятия производной от (12) на различных частотах не позволяет увеличить число независимых нелинейных уравнений более чем  $\text{card}(\Omega)$  для (6). Эксперимент показывает, что взятие производной не позволяет получить число невырожденных независимых уравнений больше чем число независимых уравнений для (6). Таким образом, максимальное число неизвестных  $x_k, k = \overline{1, K}$ , которые можно найти из (6) и уравнений полученных за счёт производных от (12) ограничено условием верхней границы в соответствии с теоремой I.

Пожалуй, самая значительная возможность, которую предоставляет получение новых уравнений за счёт взятия производных от уравнений (12), это поиск решений для более чем двух, но не более  $\text{card}(\Omega)$  неизвестных на одной частоте. Причём исходное уравнение (6) и каждая производная от (12) добавляют пару новых уравнений, а общее число независимых уравнений на одной частоте не превышает  $\text{card}(\Omega)$  для (6). Отметим, что т.к. исходные уравнения являются комплекснозначными и их можно расщепить на пару независимых уравнений, о чём было сказано ранее, а значит две неизвестные вещественные величины вычислимы на одной частоте за счёт одного уравнения: вида (6) или полученных как производные от (12).

## 5. Синтез новых уравнений II

Второй подход к задаче синтеза новых уравнений основан на использовании комплексной мощности:

$$\dot{S}(\omega) = \dot{U}(\omega) \dot{I}^*(\omega), \quad (23)$$

где  $\dot{I}^*(\omega)$  – ток комплексно сопряжённый с  $\dot{I}(\omega)$ .

Из уравнений (12), например (12.1):

$$\frac{\dot{E}(\omega)}{\dot{I}(\omega)} = \frac{P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)}{P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)}, \quad (24)$$

несложно получить следующее выражение

$$P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) P_I^*(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) = \dot{E}(\omega) \dot{I}^*(\omega), \quad (25)$$

равенство правой и левой части (25) с точностью до постоянного множителя подтверждается равенством дробей (24), а с точностью до значений подтверждается эквивалентностью физического смысла числителей и знаменателей правой и левой части (24).

Собственно (25) уже является полиномом решение, которого на разных частотах, учитывая ограничения теоремы I, позволяет найти искомые значения  $\{x_k\}$ , но на примере (25) исследуем альтернативный подход к решению задачи, позволяющий синтезировать новые уравнения. Для этого исследуем некоторые свойства (25) используя его аналог в виде, когда ЭДС  $\dot{E}(\omega)$  и ток  $\dot{I}(\omega)$ , заданы с помощью выражений, а не измерены. Запишем выражение (25) в виде:

$$P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) P_I^*(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) - P_U(\{h_s\}, \omega) P_I^*(\{h_s\}, \omega) = 0, \quad (26)$$

где  $\{h_s\}$ ,  $s = \overline{1, P+K}$ .

Пусть полином (26) упорядочен по степеням  $\nu$ ,  $\nu = \overline{0, V}$  при круговой частоте  $\omega$ , аналогично тому, как это сделано в (8) и (22), тогда для (26) можно записать:

$$\sum_{\nu=0}^V \left( \sum_{l_1^{\nu}, l_2^{\nu}, \dots, l_K^{\nu}} g_{l_1^{\nu}, l_2^{\nu}, \dots, l_K^{\nu}} \cdot x_1^{l_1^{\nu}} x_2^{l_2^{\nu}} \dots x_K^{l_K^{\nu}} \right) \cdot \omega^{\nu} = 0. \quad (27)$$

Теорема III. Частичная сумма  $\sum_{l_1^{\nu}, l_2^{\nu}, \dots, l_K^{\nu}} g_{l_1^{\nu}, l_2^{\nu}, \dots, l_K^{\nu}} \cdot x_1^{l_1^{\nu}} x_2^{l_2^{\nu}} \dots x_K^{l_K^{\nu}}$  из полинома (27)

при заданном показателе степени  $\nu$ ,  $\nu = \overline{0, V}$  при  $\omega$  тождественно равна нулю.

Доказательство. Частичная сумма из (27) при  $\omega^0$  равна нулю

$$\left( \sum_{l_1^0, l_2^0, \dots, l_K^0} g_{l_1^0, l_2^0, \dots, l_K^0} \cdot x_1^{l_1^0} x_2^{l_2^0} \dots x_K^{l_K^0} \right) \omega^0 = 0, \text{ т.к. не зависит от } \omega \text{ и при любой степени } \omega,$$

включая  $\omega=0$ , и обращается в ноль в силу того, что выражение (27) равно

нулю. Исключив сумму  $\left( \sum_{l_1^0, l_2^0, \dots, l_K^0} g_{l_1^0, l_2^0, \dots, l_K^0} \cdot x_1^{l_1^0} x_2^{l_2^0} \dots x_K^{l_K^0} \right) \omega^0$  из (27) как равную нулю,

получим выражение  $\sum_{v=1}^V \left( \sum_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_K^v} g_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_K^v} \cdot x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_K^{l_K^v} \right) \cdot \omega^v = 0$ , которое после

деления на  $\omega$  приобретает вид:

$$\sum_{v=1}^V \left( \sum_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_K^v} g_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_K^v} \cdot x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_K^{l_K^v} \right) \cdot \omega^{v-1} = 0, \quad (28)$$

для полученного выражения (28) можно применить рассуждения аналогичные предыдущим, т.е. доказать что частичная сумма из (27) при  $\omega^1$  равна нулю.

Следуя указанным действиям несложно доказать что все частичные суммы

$\sum_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_K^v} g_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_K^v} \cdot x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_K^{l_K^v}$  для всех  $\omega^v, v = \overline{0, V}$  из (27) равны нулю, т.е.:

$$\sum_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_K^v} g_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_K^v} \cdot x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_K^{l_K^v} = 0, \text{ ч.т.д.}$$

Следствие III.I. Каждая частичная сумма  $\sum_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_K^v} g_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_K^v} \cdot x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_K^{l_K^v}$  из (27)

образует уравнение  $\sum_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_K^v} g_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_K^v} \cdot x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_K^{l_K^v} = 0$ .

Следствие III.II. Число уравнений вида  $\sum_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_K^v} g_{l_1^v, l_2^v, \dots, l_K^v} \cdot x_1^{l_1^v} x_2^{l_2^v} \dots x_K^{l_K^v} = 0$

которые можно получить из (27) не превышает  $card(\Omega)$  для (27).

Вернёмся к выражению (25). Дело в том, что т.к. правая часть  $\dot{E}(\omega) \dot{I}^*(\omega)$  в (25) является произведением измеренных значений ЭДС  $\dot{E}(\omega)$  и тока  $\dot{I}(\omega)$ , и они зависят от частоты как  $P_U(\{h_s\}, \omega)$  и  $P_I(\{h_s\}, \omega)$  соответственно, то из (25) нет возможности непосредственно синтезировать уравнения по закону сформулированному в теореме III и следствии III.I. Но для выражения  $\dot{E}(\omega) \dot{I}^*(\omega)$  при условии известных по измерениям ЭДС  $\dot{E}(\omega)$  и току  $\dot{I}(\omega)$  с помощью

методов интерполяции можно получить полином (интерполяционный полином):

$$\dot{E}(\omega)\dot{I}^*(\omega) = P(\{\dot{E}(\omega)\}, \{\dot{I}(\omega)\}, \omega) = \sum_{v=0}^V r_v \omega^v, \quad (29)$$

где  $r_v$  – коэффициенты интерполяционного полинома.

Тогда, учитывая (29) выражение (25) можно переписать в виде:

$$P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) P^*(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) - \sum_{v=0}^V r_v \omega^v = 0, \quad (30)$$

получив полином, который пригоден для синтеза уравнений в соответствии с теоремой III и следствием III.1.

Следует отметить, что с алгебраической точки зрения вполне приемлем синтез уравнений без комплексного сопряжения тока, т.е.:

$$P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) P(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) - \tilde{P}(\{\dot{E}(\omega)\}, \{\dot{I}(\omega)\}, \omega) = 0, \quad (31)$$

в таком случае интерполяционный полином  $\tilde{P}(\{\dot{E}(\omega)\}, \{\dot{I}(\omega)\}, \omega)$  необходимо рассчитывать так же для произведения  $\dot{E}(\omega)\dot{I}(\omega)$  без комплексного сопряжения тока:

$$\dot{E}(\omega)\dot{I}(\omega) = \tilde{P}(\{\dot{E}(\omega)\}, \{\dot{I}(\omega)\}, \omega) = \sum_{v=0}^V \tilde{r}_v \omega^v. \quad (32)$$

При этом выражение (31) утратит смысл разности комплексных мощностей, но не потеряет алгебраического смысла, которого в общем случае достаточно для составления корректных уравнений и решения задачи.

Аналогичный подход можно применить для составления уравнений на основе производных от уравнений (12). Например, уравнения по аналогии с (30,31) могут быть получены для производных от (12) первого порядка следующим образом. Запишем уравнения производных (12):



$$\left[ \begin{aligned} & \frac{\dot{E}'(\omega)\dot{I}(\omega) - \dot{E}(\omega)\dot{I}'(\omega)}{\dot{I}^2(\omega)} = \\ & = \frac{P'_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) - P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)P'_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)}{P_I^2(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)} \\ & \frac{\dot{I}'(\omega)\dot{E}(\omega) - \dot{I}(\omega)\dot{E}'(\omega)}{\dot{E}^2(\omega)} = \\ & = \frac{P'_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) - P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)P'_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)}{P_U^2(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)} \end{aligned} \right]. \quad (33)$$

Выражение в левой части уравнений (33) получено на основе расчёта производной по данным измерений ЭДС и тока на зажимах двухполюсника, с правой стороны уравнений (33) содержится выражение, полученное в результате взятия производной от аналитической формы, тогда используя изложенный ранее принцип и теорему III запишем следующие уравнения:

$$\left[ \begin{aligned} & (\dot{E}'(\omega)\dot{I}(\omega) - \dot{E}(\omega)\dot{I}'(\omega))\dot{I}^2(\omega) = \\ & = \left( \begin{aligned} & P'_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) - \\ & - P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)P'_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) \end{aligned} \right) P_I^2(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) \\ & (\dot{I}'(\omega)\dot{E}(\omega) - \dot{I}(\omega)\dot{E}'(\omega))\dot{E}^2(\omega) = \\ & = \left( \begin{aligned} & P'_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) - \\ & - P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega)P'_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) \end{aligned} \right) P_U^2(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) \end{aligned} \right]. \quad (34)$$

Выражения  $(\dot{E}'(\omega)\dot{I}(\omega) - \dot{E}(\omega)\dot{I}'(\omega))\dot{I}^2(\omega)$  и  $(\dot{I}'(\omega)\dot{E}(\omega) - \dot{I}(\omega)\dot{E}'(\omega))\dot{E}^2(\omega)$  стоящие в левой части уравнений (34) являются результатом взятия производных от численных измерений и зависят от  $\omega$ , и в силу того, что зависимость эта имеет полиномиальную форму (что очевидно из правой части (34)), несложно с помощью методов интерполяции вычислить соответствующие полиномы:

$$\left[ \begin{aligned} & (\dot{E}'(\omega)\dot{I}(\omega) - \dot{E}(\omega)\dot{I}'(\omega))\dot{I}^2(\omega) = \sum_{v=0}^{V_{Z,1}} a_v \omega^v \\ & (\dot{I}'(\omega)\dot{E}(\omega) - \dot{I}(\omega)\dot{E}'(\omega))\dot{E}^2(\omega) = \sum_{v=0}^{V_{Y,1}} b_v \omega^v \end{aligned} \right], \quad (35)$$

где  $\sum_{v=0}^{V_{Z,1}} a_v \omega^v$  – интерполяционный полином для первой производной от комплексного сопротивления  $Z(\omega)$ ;  $\sum_{v=0}^{V_{Y,1}} b_v \omega^v$  – интерполяционный полином для первой производной от комплексной проводимости  $Y(\omega)$ ; и  $a_v$  и  $b_v$  – полиномиальные коэффициенты;  $V_{Z,1}$  и  $V_{Y,1}$  – максимальная степень при  $\omega$  для интерполяционных полиномов, подбираются исходя из максимальных степеней при  $\omega$  соответствующих правых частей выражения (34), причём для случая, когда номинальные значения всех компонентов схемы неизвестны, т.е.  $x_s, s=1, P+K$ , т.к. в таком случае  $card(\Omega)$  для правых частей (34) будут иметь максимальное значение и интерполяционные полиномы (35) будет соответствовать форме полинома в левой части (35).

Учитывая (34,35) запишем итоговые уравнения:

$$\begin{cases} \left[ \begin{array}{l} P'_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) - \\ - P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) P'_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) \end{array} \right] P_I^2(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) - \sum_{v=0}^{V_{Z,1}} a_v \omega^v = 0 \\ \left[ \begin{array}{l} P'_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) P_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) - \\ - P_I(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) P'_U(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) \end{array} \right] P_U^2(\{x_k\}, \{h_p\}, \omega) - \sum_{v=0}^{V_{Y,1}} b_v \omega^v = 0 \end{cases} \quad (36)$$

Применяя вышеизложенный принцип не сложно получить уравнения на основании производных  $Z^{(n)}(\omega)$  и  $Y^{(n)}(\omega)$  более высоких порядков. Отметим, что если для уравнения (30) использование комплексного сопряжения было полезно для придания выражению физического смысла в виде разности комплексных мощностей, то для уравнений (36) такая необходимость отпадает. Так же следует отметить, что если уравнение (30) будет иметь одинаковую форму, не зависимо того, что получено оно из комплексного сопротивления  $Z(\omega)$  или проводимости  $Y(\omega)$ , то начиная с первой производной и для производных более высоких порядков уравнения, полученные на основании  $Z^{(n)}(\omega)$  и  $Y^{(n)}(\omega)$ , будут различны.

Исследования и практика решения задач показывает, что уравнения типа (36) а так же полученные на основании производных более высоких порядков,

являются независимыми от уравнений типа (30), что позволяет находить число неизвестных превышающее  $card(\Omega)$  для (30) и для (7).

## 6. Формализация метода дифференцирования

Методы дифференцирования и интегрирования правых (аналитических) частей уравнений (12) вполне известны, методы дифференцирования и интегрирования левых (числовых) частей имеются в математической литературе, например [29-31] но в теории и практике радиофизики, схемотехники и электротехники обойдены вниманием и их использование в практических приложениях соответствующих дисциплин авторами не обнаружено. Поэтому требуется уделить им отдельную часть данной работы.

Для тока  $i(t)$  и напряжения  $u(t)$  изменяющихся по произвольному закону, не обязательно по гармоническому и удовлетворяющих условиям Дирихле [29], образы в частотном пространстве  $\dot{I}(\omega)$  и  $\dot{U}(\omega)$  имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{I}(\omega) = F \{i(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt \\ \dot{U}(\omega) = F \{u(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt \end{cases} \quad (37)$$

Используя известное выражение [29] для производных произвольного порядка через пару преобразования Фурье запишем:

$$\begin{cases} \frac{d^{(n)} \dot{I}(j\omega)}{d\omega^{(n)}} = (-j)^n F \{i(t)t^n\} = (-j)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i(t)t^n e^{-j\omega t} dt \\ \frac{d^{(n)} \dot{U}(j\omega)}{d\omega^{(n)}} = (-j)^n F \{u(t)t^n\} = (-j)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)t^n e^{-j\omega t} dt \end{cases} \quad (38)$$

Очевидно, что полученные уравнения (38) позволяют вычислить производную порядка (n) от частотных образов токов  $\dot{I}(\omega)$  и напряжений  $\dot{U}(\omega)$  по частоте при известном изменении тока  $i(t)$  и/или напряжения  $u(t)$  во времени, в том числе, в частном случае, когда изменение тока и/или напряжения происходит по гармоническому закону, а частота тока и/или напряжения неизменна или изменяется в малых пределах. Следует отметить,

что при расчётах значение производной по (38) вычислимо только в области частот, в пределах которых изменяется ток и напряжение, соответственно.

С другой стороны, когда известны измерения  $\dot{I}(\omega)$  и/или  $\dot{U}(\omega)$ , полученные, например, с помощью векторного анализатора спектра, решение задачи определения производной по времени от тока  $i(t)$  и напряжения  $u(t)$  при известных их частотных образах  $\dot{I}(\omega)$  и  $\dot{U}(\omega)$ , соответственно, имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d^{(n)}i(t)}{dt^{(n)}} = (j)^n F^{-1} \{ \dot{I}(j\omega) \omega^n \} = (j)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{I}(\omega) \omega^n e^{j\omega t} d\omega \\ \frac{d^{(n)}u(t)}{dt^{(n)}} = (j)^n F^{-1} \{ \dot{U}(j\omega) \omega^n \} = (j)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(\omega) \omega^n e^{j\omega t} d\omega \end{cases} \quad (39)$$

Выражения (38,39) позволяют вычислить в общем виде производные произвольного порядка ( $n$ ) для любых аналитически заданных функций.

При решении рассматриваемых задач приходится иметь дело с цифровыми (дискретными) сигналами, соответствующими измерениям токов или напряжений во временном пространстве, или в частотном пространстве. Таким образом, актуальным является вывод дискретных форм эквивалентных выражениям (38,39).

Левую часть запишем в конечно разностном виде, а правую в виде дискретного преобразования Фурье для производной  $n$ -го порядка, эквивалент выражения (28) будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\Delta^{(n)}\dot{I}(2\pi k)}{\Delta\omega^{(n)}} = (-j)^n \frac{1}{\sqrt{N}} \left( \sum_{m=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} (m\Delta t)^n i[m] e^{\frac{-j2\pi mk}{N}} + \sum_{m=\lfloor N/2 \rfloor + 1}^{N-1} ((m-N)\Delta t)^n i[m] e^{\frac{-j2\pi mk}{N}} \right) \\ \frac{\Delta^{(n)}\dot{U}(2\pi k)}{\Delta\omega^{(n)}} = (-j)^n \frac{1}{\sqrt{N}} \left( \sum_{m=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} (m\Delta t)^n u[m] e^{\frac{-j\omega k}{N}} + \sum_{m=\lfloor N/2 \rfloor + 1}^{N-1} ((m-N)\Delta t)^n u[m] e^{\frac{-j2\pi mk}{N}} \right) \end{cases} \quad (40)$$

где  $\Delta t = \frac{T}{N}$  – шаг дискретизации по времени при оцифровке тока  $i(t)$  и напряжения  $u(t)$ ;  $m$  – номер отсчёта тока в дискретном представлении тока  $i[m]$  и напряжения  $u[m]$ ;  $T$  – длительность измерения тока и напряжения;  $N$  – число отсчётов;  $k$  – номер отсчёта круговой частоты  $\omega$ ;  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$  – приращение круговой частоты. Выражения (40) позволяют вычислить производные по

частоте в точке  $\omega$  для тока  $\dot{I}(\omega)$  и напряжения  $\dot{U}(\omega)$ , даже в случае если электрический сигнал в цепи монохроматический.

Дискретный аналог выражения (39) имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta^{(n)}i(m\Delta t)}{\Delta t^{(n)}} &= (j)^n \frac{1}{\sqrt{N}} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} (k\Delta\omega)^n \dot{I}[k] e^{\frac{j2\pi mk}{N}} + \sum_{k=\lfloor N/2 \rfloor+1}^{N-1} ((k-N)\Delta\omega)^n \dot{I}[k] e^{\frac{j2\pi mk}{N}} \right) \\ \frac{\Delta^{(n)}u(m\Delta t)}{\Delta t^{(n)}} &= (j)^n \frac{1}{\sqrt{N}} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} (k\Delta\omega)^n \dot{U}[k] e^{\frac{j2\pi mk}{N}} + \sum_{k=\lfloor N/2 \rfloor+1}^{N-1} ((k-N)\Delta\omega)^n \dot{U}[k] e^{\frac{j2\pi mk}{N}} \right) \end{aligned} \right. \quad (41)$$

## 7. Алгебраический и физический смысл производной комплексного сопротивления и проводимости по частоте

В связи с тем, что вопрос вычисления производной от комплексных сопротивлений  $Z(\omega)$  и проводимостей  $Y(\omega)$  по частоте  $\omega$  не рассмотрен в тематической литературе по радиофизике, радиоэлектронике и электротехнике, следует уделить ему отдельное внимание. Вопрос исследования комплекснозначных функций при помощи производных в общем случае достаточно подробно изложен в литературе по математическому анализу [32], поэтому пользуясь известными свойствами производных [33] свяжем их с математическими и физическими свойствами производных функций комплексных сопротивлений  $Z(\omega)$  и проводимостей  $Y(\omega)$ . Дело в том, что функции комплексных сопротивлений  $Z(\omega)$  и проводимостей  $Y(\omega)$  сами являясь комплекснозначными, имеют аргумент который полагают либо вещественным  $\omega \in \text{Re}(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$ , либо мнимым  $j\omega \in \text{Im}(\mathbb{C}) = j\mathbb{R}$ . Таким образом, положив аргумент вещественным  $\omega \in \text{Re}(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$ , производная  $Z'_\omega(\omega)$  комплексного сопротивления  $Z(\omega)$  представляет собой сумму производных вещественной и мнимой части  $Z(\omega)$ :

$$Z'_\omega(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta Z(\omega)}{\Delta\omega} = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\text{Re}(\Delta Z(\omega))}{\Delta\omega} + j \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\text{Im}(\Delta Z(\omega))}{\Delta\omega}. \quad (47)$$

Аналогичное выражение, в силу тех же соображений, несложно получить для комплексной проводимости  $Y(\omega)$ :

$$Y'_{\omega}(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta Y(\omega)}{\Delta\omega} = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(\Delta Y(\omega))}{\Delta\omega} + j \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Im}(\Delta Y(\omega))}{\Delta\omega}. \quad (48)$$

Выражения (47,48) обосновывают возможность отдельного исследования  $Z(\omega)$  и  $Z'_{\omega}(\omega)$  по вещественным и мнимым компонентам. Таким образом, алгебраический и геометрический смысл производных комплексных сопротивлений  $Z(\omega)$  и проводимостей  $Y(\omega)$  удобно дать для вещественной и мнимой частей  $Z(\omega)$  и  $Y(\omega)$ . Для комплексных сопротивлений  $Z(\omega)$  величина  $\operatorname{Re}(Z'_{\omega}(\omega))$ , является производной  $\operatorname{Re}(Z(\omega))$ , полагая функцию  $\operatorname{Re}(Z(\omega))$  гладкой без разрывов, что справедливо для физически реализуемых функций  $Z(\omega)$ , производная в точках экстремума  $\operatorname{Re}(Z(\omega))$  обращается в ноль  $\operatorname{Re}(Z'_{\omega}(\omega))=0$ , в области возрастания  $\operatorname{Re}(Z(\omega))$  производная  $\operatorname{Re}(Z'_{\omega}(\omega))>0$ , в области убывания  $\operatorname{Re}(Z(\omega))$  производная  $\operatorname{Re}(Z'_{\omega}(\omega))<0$ . По второй производной  $\operatorname{Re}(Z''_{\omega\omega}(\omega))$  можно определить направления выпуклости  $\operatorname{Re}(Z(\omega))$ . Таким образом, за счёт взятия производной можно выполнить анализ функции  $\operatorname{Re}(Z(\omega))$ . Аналогичные объяснения можно дать для:  $\operatorname{Im}(Z'_{\omega}(\omega))$ ,  $\operatorname{Re}(Y'_{\omega}(\omega))$  и  $\operatorname{Im}(Y'_{\omega}(\omega))$ .

Физический смысл производной от комплексного сопротивления  $Z(\omega)$  по частоте, заключается в том, что первая производная  $\operatorname{Re}(Z'_{\omega}(\omega))$  показывает мгновенную скорость изменения  $\operatorname{Re}(Z(\omega))$  с приращением частоты  $\omega$ , а производная  $\operatorname{Im}(Z'_{\omega}(\omega))$  показывает мгновенную скорость изменения мнимой компоненты  $\operatorname{Im}(Z(\omega))$  комплексного сопротивления  $Z(\omega)$ . Анализ мгновенной скорости изменения  $\operatorname{Re}(Y(\omega))$  и  $\operatorname{Im}(Y(\omega))$  можно получить, исследуя соответствующие производные  $\operatorname{Re}(Y'_{\omega}(\omega))$  и  $\operatorname{Im}(Y'_{\omega}(\omega))$ .

Физический смысл, например, производной от проводимости

$$Y'(\omega) = \frac{I'(\omega)\dot{U}(\omega) - I(\omega)\dot{U}'(\omega)}{\dot{U}^2(\omega)} \text{ или иначе:}$$

$$\dot{I}'(\omega)\dot{U}(\omega) - \dot{I}(\omega)\dot{U}'(\omega) = Y'(\omega)\dot{U}^2(\omega), \quad (49)$$

можно интерпретировать как передаточную функцию, связывающую возмущающее воздействие  $\dot{U}^2(\omega)$  с откликом  $\dot{I}'(\omega)\dot{U}(\omega) - \dot{I}(\omega)\dot{U}'(\omega)$ . Умножив левую и правую части (49) на проводимость  $Y(\omega)$ , получим:

$$\dot{I}'(\omega)\dot{I}(\omega) - \dot{I}(\omega)\dot{U}'(\omega)Y(\omega) = Y'(\omega)[\dot{U}^2(\omega)Y(\omega)], \quad (50)$$

учитывая, что  $\dot{I}(\omega) = \dot{U}(\omega)Y(\omega)$  и комплексная мощность  $S(\omega) = \dot{U}(\omega)\dot{I}^*(\omega) = \dot{U}(\omega)(\dot{U}(\omega)Y(\omega))^* = \dot{U}(\omega)\dot{U}^*(\omega)Y^*(\omega) = |\dot{U}(\omega)|^2 Y^*(\omega)$ , отделим в левой и правой части выражения (50) ток:

$$[\dot{I}'(\omega) - \dot{U}'(\omega)Y(\omega)]\dot{I}(\omega) = Y'(\omega)\dot{U}(\omega)\dot{I}(\omega), \quad (51)$$

далее выполнив комплексное сопряжение тока в левой и правой части выражения, и учитывая, что  $\dot{I}^*(\omega) = \dot{U}^*(\omega)Y^*(\omega)$  и  $\dot{U}(\omega)\dot{U}^*(\omega) = |\dot{U}(\omega)|^2$ , получим:

$$(\dot{I}'(\omega) - \dot{U}'(\omega)Y(\omega))\dot{I}^*(\omega) = Y'(\omega)[|\dot{U}(\omega)|^2 Y^*(\omega)], \quad (52)$$

где  $|\dot{U}(\omega)|^2 Y^*(\omega)$  – есть функция распределения комплексной мощности по частотам, передаваемой в двухполюсник с проводимостью  $Y(\omega)$ ;  $(\dot{I}'(\omega) - \dot{U}'(\omega)Y(\omega))\dot{I}^*(\omega)$  – отклик системы с передаточной функцией  $Y'(\omega)$  на возмущающее воздействие  $|\dot{U}(\omega)|^2 Y^*(\omega)$ .

Если возмущающее напряжение  $\dot{U}(\omega)$  поддерживается постоянным по амплитуде на всех частотах, т.е.  $\dot{U}(\omega) = const$ , что актуально, например, при исследовании двухполюсника за счёт развёртки по частоте (сви핑ирования частоты), следовательно  $\dot{U}'(\omega) = 0$ , тогда выражение (49) имеет вид:

$$\dot{I}'(\omega) = Y'(\omega)\dot{U}(\omega), \quad (53)$$

т.е.  $Y'(\omega)$  – есть передаточная функция системы, преобразующей возмущение  $\dot{U}(\omega) = const$  в отклик  $\dot{I}'(\omega)$ .

Аналогичные преобразования для  $Z(\omega)$  позволяет получить следующее выражение:  $Z'(\omega) = \frac{\dot{U}'(\omega)\dot{I}(\omega) - \dot{U}(\omega)\dot{I}'(\omega)}{\dot{I}^2(\omega)}$ , из которого следует:

$$\dot{U}'(\omega)\dot{I}(\omega) - \dot{U}(\omega)\dot{I}'(\omega) = Z'(\omega)\dot{I}^2(\omega). \quad (54)$$

При поддержании постоянства тока  $\dot{I}(\omega)$  на различных частотах, т.е.  $\dot{I}(\omega) = const$ , получим:

$$\dot{U}'(\omega) = Z'(\omega)\dot{I}(\omega). \quad (55)$$

Отметим, что из полученных выражений (49-55) наиболее удобными для моделирования и исследований являются выражения (53,55).

При этом возникает вопрос о физической реализуемости передаточных функций  $Y'(\omega)$  и  $Z'(\omega)$ , т.е. о возможности синтеза схемы имеющей комплексную проводимость  $Y'(\omega)$  или комплексное сопротивление  $Z'(\omega)$  на основе линейных  $RLC$  компонентов. Ответ на данный вопрос может быть получен и исследован с помощью свойств и критериев физической реализуемости линейной электрической цепи известной из теоретической электротехники и теории автоматического управления [34,36].

Комплексное сопротивление и проводимость физически реализуемого пассивного двухполюсника на основе линейных  $RLC$  компонентов является дробно-рациональной функцией в виде отношения двух строгих полиномов Гурвица. Однако не каждая дробно-рациональная функция, физически реализуема в виде сопротивления или проводимости.

Критерии физической реализуемости были исследованы Отто Бруне (Otto Brune) в его диссертации опубликованной в 1931 году [36]. Отто Бруне доказал, что, если дробно-рациональна функция комплексной переменной  $p = \sigma + j\omega$  – в общем случае и  $p = j\omega$  – при установившемся режиме и гармонических токах и напряжениях в цепи, является положительной вещественной функцией, то она всегда может быть реализована в виде пассивного двухполюсника. Такие функции удовлетворяют следующим свойствам:

1) коэффициенты полиномов числителя и знаменателя должны быть положительными вещественными числами;

2) степени полиномов числителя и знаменателя должны отличаться не более чем на единицу;



3) полюса и нули физически реализуемых функций должны располагаться в левой полуплоскости.

Схему пассивного двухполосника на основе заданного комплексного сопротивления (проводимости) позволяет синтезировать методы Фостера, Кауэра и др. известные из теории синтеза.

Так же следует уделить внимание физической реализуемости  $\dot{I}'(\omega)$ ,  $\dot{U}'(\omega)$  и  $\dot{I}^2(\omega)$  и  $\dot{U}^2(\omega)$ , исходные токи  $i(t)$  и напряжения  $u(t)$  во временном пространстве являются гладкими вещественными функциями, ограниченными по амплитуде и не имеющие разрывов, т.е. удовлетворяющие условиям Дирихле, поэтому преобразование Фурье для них определено. Как известно из теории цифровой обработки сигналов [37] спектр вещественного сигнала может содержать вещественную и мнимую часть, причём вещественная часть спектра – симметрична относительно нулевой частоты, а мнимая часть спектра – инвертирована по знаку относительно нулевой частоты, говоря другими словами амплитудный спектр симметричен относительно нулевой частоты, а фазовый спектр антисимметричен относительно нулевой частоты:  $\dot{I}(j\omega) = \dot{I}^*(-j\omega)$  и  $\dot{U}(j\omega) = \dot{U}^*(-j\omega)$ , где звездочка (\*) означает комплексное сопряжение. Из чего следует, что квадраты спектральных функций  $\dot{I}^2(\omega)$  и  $\dot{U}^2(\omega)$  всегда физически реализуемы во времени, т.к. всегда сохраняют свойства вещественных функций во временной области. Производные  $\dot{I}'(\omega)$ ,  $\dot{U}'(\omega)$  спектральных функций в общем случае физически не реализуемы в виде вещественных токов  $i(t)$  и напряжений  $u(t)$ .

## 8. Аналитические и численные примеры

Для пояснения и демонстрации применения, полученных теоретических результатов рассмотрим примеры. Основной целью численных примеров является демонстрация разработанных методов, поэтому в численных примерах будем использовать такие (номинальные) значения параметров линейных компонентов RLC и частот которые обеспечат более удобное восприятие

материала, за счёт небольшого числа разрядов в записи рассчитанных коэффициентов уравнений.

В качестве первого примера исследуем цепь (рис. 2) содержащую три ветви с  $RL$  компонентами и источником ЭДС  $\dot{E}(\omega)$ .

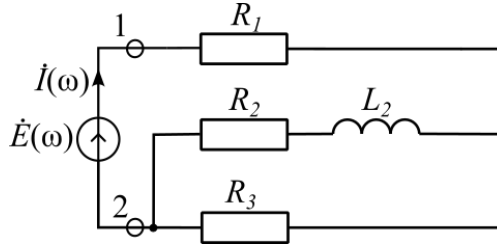


Рис. 2. Схема принципиальная.

Запишем в операторной форме выражение для проводимости между зажимами (1,2):

$$Y(\omega) = \frac{\dot{I}(\omega)}{\dot{E}(\omega)} = \frac{R_2 + R_3 + jL_2\omega}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 + jL_2R_1\omega + jL_2R_3\omega}. \quad (56)$$

Полагая неизвестными:  $R_1 = x_1$ ,  $R_2 = x_2$  и  $R_3 = x_3$  запишем уравнение для проводимости:

$$Y(\omega) = \frac{\dot{I}(\omega)}{\dot{E}(\omega)} = \frac{x_2 + x_3 + jL_2\omega}{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + jL_2x_1\omega + jL_2x_3\omega}. \quad (57)$$

Далее используя (33,34) не сложно получить полином:

$$\dot{I}(\omega)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + jL_2x_1\omega + jL_2x_3\omega) - \dot{E}(\omega)(x_2 + x_3 + jL_2\omega) = 0, \quad (58)$$

который, очевидно, имеет две степени при частоте  $\omega$ :  $\{\omega^0, \omega^1\}$ , данный вид полинома аналогичен виду (3). Учитывая (56,57) запишем (58) в виде аналогичном виду (7):

$$(R_2 + R_3 + jL_2\omega)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + jL_2x_1\omega + jL_2x_3\omega) - (R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 + jL_2R_1\omega + jL_2R_3\omega)(x_2 + x_3 + jL_2\omega) = 0. \quad (59)$$

Раскрыв скобки и сгруппировав по степеням при  $\omega$  преобразуем (59) к виду (8):

$$(R_2 + R_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - (R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)(x_2 + x_3) + jL_2 \left( (R_2 + R_3)(x_1 + x_3) + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - (x_2 + x_3)(R_1 + R_3) - (R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3) \right) \omega + -L_2^2(x_1 + x_3 - R_1 - R_3)\omega^2 = 0 \quad (60)$$

Полином (60) имеет уже три степени при  $\omega: \{\omega^0, \omega^1, \omega^2\}$ , т.е.  $card(\Omega) = 3$ .

Количество степеней при  $\omega$  в полиноме возросло в результате включения в его состав ЭДС и тока в аналитическом виде. Полином вида (60) позволяет принять решение о максимальном числе независимых уравнений при различных значениях частот  $\omega_d$ ,  $d = \overline{1,3}$  в соответствии с теоремой I и следствием I. II. При экспериментальном измерении тока и ЭДС и использовании их в решении в виде комплексных чисел форма полинома будет иметь вид (58) но информация которая в явном виде отображена в (60), в (58) содержится в неявном виде, за счёт зависимости тока  $\dot{I}(\omega)$  и ЭДС  $\dot{E}(\omega)$  от частоты (как было сказано ранее для эксперимента и моделирования ЭДС удобнее выдерживать неизменной  $\dot{E}(\omega) = const$ ) число независимых уравнений для (58) и (60) одинаково. В случае рассматриваемого примера для извлечения информации о максимальном числе независимых уравнений необходимо использовать полином вида (60), а в общем случае полином вида (7).

Далее рассмотрим численное решение исследуемой задачи. Пусть параметры компонентов схемы имеют значения:  $R_1 = 1$  Ом,  $R_2 = 2$  Ом,  $R_3 = 3$  Ом и  $L_2 = 1$  Гн (значения выбраны для получения относительно компактной формы уравнений в численном виде). Тогда уравнение (60) перегруппированное относительно неизвестных  $\{x_1, x_2, x_3\}$ , упорядоченных по произведениям  $\mathbf{X} = (x_1 x_2 \quad x_1 x_3 \quad x_2 x_3 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T$ , будет иметь вид:

$$\begin{aligned} (5 + j\omega)x_1 x_2 + (5 + j\omega)x_1 x_3 + (5 + j\omega)x_2 x_3 + (5j\omega - \omega^2)x_1 + \\ + (-11 - 4j\omega)x_2 + (-11 + j\omega - \omega^2)x_3 = 11j\omega - 4\omega^2 \end{aligned} \quad (61)$$

Сделав замену соответствующих значений неизвестных  $(x_1 x_2 \quad x_1 x_3 \quad x_2 x_3 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T$  на  $(y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \quad y_5 \quad y_6)^T$ , получим линейное уравнение вида:

$$\begin{aligned} (5 + j\omega)y_1 + (5 + j\omega)y_2 + (5 + j\omega)y_3 + (5j\omega - \omega^2)y_4 + \\ + (-11 - 4j\omega)y_5 + (-11 + j\omega - \omega^2)y_6 = 11j\omega - 4\omega^2 \end{aligned} \quad (62)$$

Расцепив уравнение на вещественную и мнимую части и используя подстановку различных частот  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ рад/с}$ , по числу неизвестных  $(y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \ y_5 \ y_6)^T$ , получим СЛАУ и запишем в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & -1 & -11 & -12 \\ 2 & 2 & 2 & 10 & -8 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & -9 & -11 & -20 \\ 4 & 4 & 4 & 20 & -16 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & -25 & -11 & -36 \\ 6 & 6 & 6 & 30 & -24 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 22 \\ -36 \\ 44 \\ -100 \\ 66 \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Следует отметить, т.к. после расщепления (62) полученные вещественная и мнимая части исходного уравнения являются независимыми, то для получения СЛАУ достаточно использовать три различных частоты, в данном примере использованы шесть частот.

Выполнив прямой ход метода Гаусса, получим СЛАУ следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (64)$$

в которой матрица коэффициентов имеет блочно-треугольную форму, а число линейно независимых уравнений равно  $card(\Omega)$  для (60), т.е. три. Причём упорядочивание неизвестных  $\mathbf{X} = (x_1 x_2 \ x_1 x_3 \ x_2 x_3 \ x_1 \ x_2 \ x_3)^T$  способствовало исключению из полученных уравнений некоторого числа произведений. Используя (64) и выполняя подстановку исходных неизвестных  $\mathbf{X}$ , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 11 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 = 5 \end{cases}, \quad (65)$$

решением, которой будут следующие корни:

$\{x_1 = 7, x_2 = 8, x_3 = -3\}$  и  $\{x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3\}$ , первая тройка корней является посторонней т.к. содержит отрицательное значение, следовательно, корнями является тройка:  $\{x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3\}$ .

Теперь произведём решение задачи на одной частоте  $\omega$ , два независимых уравнения можно получить из исходного (62), для получения ещё одного уравнения вычислим производные и далее выполним их преобразование в полином. В данном случае более компактная форма производной получается для комплексного сопротивления:

$$Z(\omega) = \frac{\dot{E}(\omega)}{\dot{I}(\omega)} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + jL_2 R_1 \omega + jL_2 R_3 \omega}{R_2 + R_3 + jL_2 \omega},$$

её и будем использовать, учитывая, что  $\dot{E}(\omega) = const$  положим  $\dot{E}(\omega) = 1$  и получим выражение для производной:

$$Z'(\omega) = \frac{\dot{E}'(\omega)\dot{I}(\omega) - \dot{E}(\omega)\dot{I}'(\omega)}{\dot{I}^2(\omega)} = \frac{jL_2 R_3^2}{(R_2 + R_3 + jL_2 \omega)^2}. \quad (66)$$

Для части выраженной через неизвестные, получим:

$$Z'(\omega) = \frac{jL_2 x_3^2}{(x_2 + x_3 + jL_2 \omega)^2}. \quad (67)$$

Отметим, что полученная дробно-рациональная функция (67) физически нереализуема в виде комплексного сопротивления пассивного двухполюсника на линейный  $RLC$  компонентах, т.к. степень числителя и знаменателя по степени при  $\omega$ , отличаются более чем на единицу. Полином, полученный на основании вычисленных производных, имеет вид:

$$\begin{aligned} & jL_2 R_3^2 x_2^2 + 2jL_2 R_3^2 x_2 x_3 - 2L_2^2 R_3^2 \omega x_2 - 2L_2^2 R_3^2 \omega x_3 - jL_2^3 R_3^2 \omega^2 - \\ & - (jL_2 R_2^2 + 2jL_2 R_2 R_3 - 2L_2^2 R_2 \omega - 2L_2^2 R_3 \omega - jL_2^3 \omega^2) x_3^2 = 0 \end{aligned} \quad (68)$$

Обратим внимание, что (67,68) не содержит  $x_1$ . Пусть необходимо определить значения тех же неизвестных  $\{x_1, x_2, x_3\}$  что и в предыдущем примере, т.е. активных сопротивлений  $R_1, R_2, R_3$  причём используя только одну фиксированную частоту. Для компактности записи выражений примем круговую частоту  $\omega = 1$ , после подстановки известных значений в полиномы

(59) и (68), с последующим расщеплением каждого на вещественную часть и упрощением за счёт замены произведений неизвестных, преобразования в СЛАУ и прямого хода Гаусса, получим две пары уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - \frac{59}{26}x_2 - \frac{59}{26}x_3 = \frac{9}{26} \\ x_1 - \frac{9}{26}x_2 + \frac{17}{26}x_3 = \frac{59}{26} \\ x_2^2 + 2x_2x_3 - 3x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_3^2 - \frac{9}{5}x_2 - \frac{9}{5}x_3 = 0 \end{array} \right. . \quad (69)$$

Используя наиболее компактные формы уравнений (три нижних из (69)), находим корни, из которых, исключив посторонние, используя условие  $x_k \in \mathbb{R} \ \& \ x_k > 0, k = \overline{1,3}$ , оставляем решение:  $\{x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3\}$ .

Как было показано выше уравнение вида (7) для исследуемой схемы (рис. 2), позволяет найти не более трёх неизвестных  $\{x_1, x_2, x_3\}$ . Применим теорему III и следствие III.I для решения задачи и составления дополнительных уравнений, так что бы найти число неизвестных, превышающее  $card(\Omega)$  для исходного уравнения.

Как было показано ранее, для уравнения (60) составленного по схеме (рис. 2)  $card(\{\omega^0, \omega^1, \omega^2\}) = 3$ , при этом в схеме содержится четыре компонента.

Полагая, что номинальные значения всех компонентов схемы (рис. 2) неизвестны, и используя выражение (57) запишем полином комплексной мощности следующего вида:

$$\begin{aligned} P_U(\{x_k\}, \omega) P_I^*(\{x_k\}, \omega) &= \\ &= (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + jx_1x_4\omega + jx_3x_4\omega)(x_2 + x_3 - jx_4\omega) = \quad . \quad (70) \\ &= x_1x_2^2 + 2x_1x_2x_3 + x_2^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 + (x_3^2x_4)j\omega + (x_1x_4^2 + x_3x_4^2)\omega^2 \end{aligned}$$

Интерполяционный полином, полученный на основе измеренных (в рассматриваемом случае на основании численно моделированных) тока  $\dot{I}(\omega)$  и ЭДС  $\dot{E}(\omega)$ , имеет следующий вид:

$$\dot{E}(\omega)\dot{I}^*(\omega) = P(\{\dot{E}(\omega)\}, \{\dot{I}(\omega)\}, \omega) = 55 + 9j\omega + 4\omega^2 . \quad (71)$$

Тогда на основании теоремы III и её следствия III.1, используя (70, 71) составим три уравнения:

$$\begin{cases} x_1x_4^2 + x_3x_4^2 = 4 \\ x_3^2x_4 = 9 \\ x_1x_2^2 + 2x_1x_2x_3 + x_2^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 = 55 \end{cases} . \quad (72)$$

Получено три уравнения (72) но имеется четыре неизвестных, синтезируем дополнительные уравнения, используя производную от проводимости:

$$Y'(\omega) = \frac{\dot{I}'(\omega)\dot{E}(\omega) - \dot{I}(\omega)\dot{E}'(\omega)}{\dot{E}^2(\omega)} = -\frac{jx_3^2x_4}{(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + jx_1x_4\omega + jx_3x_4\omega)^2} . \quad (73)$$

Тогда полином будет иметь вид (комплексное сопряжение второго множителя не используем, на сохранение алгебраической тождественности уравнения это не влияет):

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, x_3, x_4, \omega) &= -(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + jx_1x_4\omega + jx_3x_4\omega)^2 (jx_3^2x_4) = \\ &= -(x_1^2x_2^2x_3^2x_4 + 2x_1^2x_2x_3^3x_4 + 2x_1x_2^2x_3^3x_4 + x_1^2x_3^4x_4 + 2x_1x_2x_3^4x_4 + x_2^2x_3^4x_4)j + \\ &+ (2x_1^2x_2x_3^2x_4^2 + 2x_1^2x_3^3x_4^2 + 4x_1x_2x_3^3x_4^2 + 2x_1x_3^4x_4^2 + 2x_2x_3^4x_4^2)\omega + \\ &+ (x_1^2x_3^2x_4^3 + 2x_1x_3^3x_4^3 + x_3^4x_4^3)j\omega^2 \end{aligned} . \quad (74)$$

Интерполяционный полином имеет вид:

$$\dot{E}^2(\omega)(\dot{I}'(\omega)\dot{E}(\omega) - \dot{I}(\omega)\dot{E}'(\omega)) = -1089j + 792\omega + 144j\omega^2 . \quad (75)$$

Теперь используя (74,75) можно записать дополнительные уравнения:

$$\begin{cases} x_1^2x_3^2x_4^3 + 2x_1x_3^3x_4^3 + x_3^4x_4^3 = 144 \\ 2x_1^2x_2x_3^2x_4^2 + 2x_1^2x_3^3x_4^2 + 4x_1x_2x_3^3x_4^2 + 2x_1x_3^4x_4^2 + 2x_2x_3^4x_4^2 = 792 \\ x_1^2x_2^2x_3^2x_4 + 2x_1^2x_2x_3^3x_4 + 2x_1x_2^2x_3^3x_4 + x_1^2x_3^4x_4 + 2x_1x_2x_3^4x_4 + x_2^2x_3^4x_4 = 1089 \end{cases} . \quad (76)$$

Выбрав наиболее простые формы уравнений (72,76) получим итоговую систему:

$$\begin{cases} x_1x_4^2 + x_3x_4^2 = 4 \\ x_3^2x_4 = 9 \\ x_1x_2^2 + 2x_1x_2x_3 + x_2^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 = 55 \\ x_1^2x_3^2x_4^3 + 2x_1x_3^3x_4^3 + x_3^4x_4^3 = 144 \end{cases} , \quad (77)$$

решив которую и затем, исключив посторонние корни, используя условие  $x_k \in \mathbb{R} \ \& \ x_k > 0, k = \overline{1,4}$ , получим итоговый ответ:  $\{x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 1\}$ . Таким образом, предлагаемый подход позволил получить дополнительные независимые уравнения и найти неизвестные общим числом превышающие  $card(\Omega)$  для исходного уравнения (70), а так же и для (60).

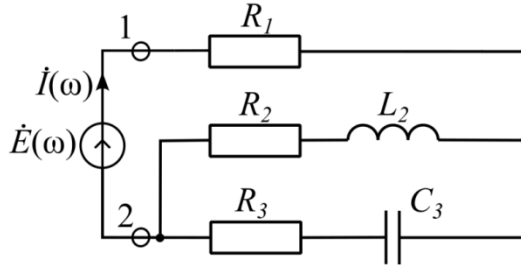


Рис. 3. Схема принципиальная.

Рассмотрим следующую линейную схему, содержащую  $RLC$  компоненты (рис.3). Пусть необходимо определить значения всех пяти компонентов используя измерение (моделирование) ЭДС  $\dot{E}(\omega)$  и тока  $\dot{I}(\omega)$  на одной фиксированной частоте. Запишем уравнение для проводимости:

$$Y(\omega) = \frac{\dot{I}(\omega)}{\dot{E}(\omega)} = \frac{-1 - j\omega C_3 R_2 - j\omega C_3 R_3 + \omega^2 C_3 L_2}{-R_1 - R_2 - j\omega L_2 - j\omega C_3 R_1 R_2 - j\omega C_3 R_1 R_3 - j\omega C_3 R_2 R_3 + \omega^2 C_3 L_2 R_1 + \omega^2 C_3 L_2 R_3} \quad (78)$$

Введя следующие обозначения  $R_1 = x_1, R_2 = x_2, R_3 = x_3, L_2 = x_4$  и  $C_3 = x_5$ ,

запишем полином:

$$\begin{aligned} & R_1 + R_2 - x_1 - x_2 + \\ & + j\omega \left( -L_2 - C_3 R_1 R_2 - C_3 R_1 R_3 - C_3 R_2 R_3 + C_3 R_2 x_1 + C_3 R_3 x_1 + C_3 R_2 x_2 + C_3 R_3 x_2 + \right) + \\ & + \omega^2 \left( \begin{aligned} & +x_4 - R_1 x_2 x_5 - R_2 x_2 x_5 + x_1 x_2 x_5 - R_1 x_3 x_5 - R_2 x_3 x_5 + x_1 x_3 x_5 + x_2 x_3 x_5 \\ & - C_3 L_2 R_1 - C_3 L_2 R_3 + C_3 L_2 x_1 + C_3 L_2 x_2 + C_3 R_2 x_4 + C_3 R_3 x_4 - L_2 x_2 x_5 - C_3 R_1 R_2 x_2 x_5 - \\ & - C_3 R_1 R_3 x_2 x_5 - C_3 R_2 R_3 x_2 x_5 + C_3 R_2 x_1 x_2 x_5 + C_3 R_3 x_1 x_2 x_5 - L_2 x_3 x_5 - C_3 R_1 R_2 x_3 x_5 - \\ & - C_3 R_1 R_2 x_3 x_5 - C_3 R_1 R_3 x_3 x_5 - C_3 R_2 R_3 x_3 x_5 + C_3 R_2 x_1 x_3 x_5 + C_3 R_3 x_1 x_3 x_5 + C_3 R_2 x_2 x_3 x_5 + \\ & + C_3 R_3 x_2 x_3 x_5 - R_1 x_4 x_5 - R_2 x_4 x_5 + x_1 x_4 x_5 + x_3 x_4 x_5 \end{aligned} \right) + \quad (79) \\ & + j\omega^3 \left( \begin{aligned} & - C_3 L_2 x_4 + C_3 L_2 R_1 x_2 x_5 + C_3 L_2 R_3 x_2 x_5 - C_3 L_2 x_1 x_2 x_5 + C_3 L_2 R_1 x_3 x_5 + C_3 L_2 R_3 x_3 x_5 - \\ & - C_3 L_2 x_1 x_3 x_5 - C_3 L_2 x_2 x_3 x_5 + L_2 x_4 x_5 + C_3 R_1 R_2 x_4 x_5 + C_3 R_1 R_3 x_4 x_5 + C_3 R_2 R_3 x_4 x_5 - \\ & - C_3 R_2 x_1 x_4 x_5 - C_3 R_3 x_1 x_4 x_5 - C_3 R_2 x_3 x_4 x_5 - C_3 R_3 x_3 x_4 x_5 \end{aligned} \right) + \\ & + \omega^4 (C_3 L_2 R_1 x_4 x_5 + C_3 L_2 R_3 x_4 x_5 - C_3 L_2 x_1 x_4 x_5 - C_3 L_2 x_3 x_4 x_5) = 0 \end{aligned}$$

Полученный полином позволяет сделать вывод, что максимальное число независимых уравнений не превышает  $card(\Omega) = 5$ , т.к.  $\Omega = \{\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$ .



Пусть необходимо найти значения параметров всех компонентов схемы, используя одну фиксированную частоту  $\omega$ . Общее число компонентов пять, не превышает максимальное число независимых уравнений, это означает, что задача может иметь решение.

Вычислим первую и вторую производную от проводимости  $Y(\omega)$  и сопротивления  $Z(\omega)$ . Сравнительный анализ показывает, что выражения для комплексного сопротивления  $Z(\omega)$  имеет более компактный вид и позволяет получить более компактную форму полинома.

Первая производная от комплексного сопротивления:

$$Z'(\omega) = \frac{-jL_2 + jC_3R_2^2 - 2\omega C_3L_2R_2 + 2\omega C_3L_2R_3 - j\omega^2 C_3L_2^2 + j\omega^2 C_3^2L_2R_3^2}{(-j + \omega C_3R_2 + \omega C_3R_3 + j\omega^2 C_3L_2)^2}. \quad (80)$$

Вторая производная от комплексного сопротивления:

$$Z''(\omega) = \frac{2C_3 \left( -jC_3R_2^2(R_2 + R_3) - C_3L_2^3\omega^3 + L_2R_2(2j + 3C_3R_2\omega) + L_2^2\omega(-3 + C_3\omega(3jR_2 + R_3(-3j + C_3R_3\omega))) \right)}{(-j + \omega C_3R_2 + \omega C_3R_3 + j\omega^2 C_3L_2)^3}. \quad (81)$$

Для моделирования значений производных зададим номиналы компонентов:  $R_1 = 1$  Ом,  $R_2 = 2$  Ом,  $R_3 = 3$  Ом,  $L_2 = 2$  Гн и  $C_3 = \frac{1}{10}$  Ф. Произведём составление полиномов на основе выражения для  $Z'(\omega)$  и  $Z''(\omega)$ . Далее, из каждого полученного полинома, включая (79), за счёт расщепления на вещественную и мнимую части синтезируем пару уравнений на частоте  $\omega = 1$  рад/с, и произведём упрощение каждой пары с помощью прямого хода метода Гаусса, в результате получим систему образованную шестью уравнениями, которую разбив на пары запишем:

$$\begin{cases} x_1x_3x_5 + x_2x_3x_5 + x_1x_2x_5 - \frac{331}{89}x_2x_5 - \frac{331}{89}x_3x_5 + \frac{138}{89}x_4x_5 + x_4 = \frac{138}{89} \\ x_1x_4x_5 + x_3x_4x_5 - \frac{138}{89}x_2x_5 - \frac{138}{89}x_3x_5 - \frac{331}{89}x_4x_5 - x_1 - x_2 = -\frac{331}{89} \end{cases}, \quad (82)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3^2 x_4 x_5^2 - \frac{8681}{1625} x_2 x_4 x_5^2 - \frac{8681}{1625} x_3 x_4 x_5^2 - x_4^5 x_5 - \frac{5149}{3250} x_3 x_4 x_5 + \frac{5149}{3250} x_2 x_4 x_5 - \\ - \frac{8681}{1625} x_3 x_5 + x_2^2 x_5 - x_4 = 0 \\ - x_4^2 x_5^2 - \frac{5149}{3250} x_3 x_4 x_5^2 - \frac{5149}{3250} x_2 x_4 x_5^2 + x_3^2 x_5^2 + 2x_2 x_3 x_5^2 + x_2^2 x_5^2 - \frac{7921}{6500} x_3 x_4 x_5 + \\ + \frac{7921}{6500} x_2 x_4 x_5 + 2x_4 x_5 + \frac{5149}{3250} x_3 x_5 + \frac{5149}{3250} x_2 x_5 = 1 \end{array} \right. , \quad (83)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3^2 x_4^2 x_5^3 + \frac{77401}{30572} x_4^3 x_5^3 - \frac{232203}{30572} x_3^2 x_4 x_5^3 - \frac{232203}{15286} x_2 x_3 x_4 x_5^3 - \frac{232203}{30572} x_2^2 x_4 x_5^3 - \\ - x_4^3 x_5^2 - \frac{597075}{122288} x_3 x_4^2 x_5^2 - \frac{597075}{122288} x_2 x_4^2 x_5^2 - \frac{232203}{30572} x_4^2 x_5^2 + 3x_2^2 x_4 x_5^2 + \frac{232203}{30572} x_3^2 x_5^2 - \\ - \frac{199025}{122288} x_2^2 x_3 x_5^2 + \frac{232203}{15286} x_2 x_3 x_5^2 - \frac{199025}{122288} x_3^2 x_5^2 + \frac{232203}{15286} x_2^2 x_5^2 - 3x_4^2 x_5 + \\ + \frac{199025}{61144} x_2 x_4 x_5 = \frac{77401}{30572} \\ \frac{199025}{122288} x_4^3 x_5^3 - 3x_3 x_4^2 x_5^2 - 3x_2 x_4^2 x_5^2 - \frac{597075}{122288} x_3^2 x_4 x_5^3 - \frac{597075}{61144} x_2 x_3 x_4 x_5^3 - \\ - \frac{597075}{122288} x_2^2 x_4 x_5^3 + x_3^3 x_5^3 + 3x_2 x_3^2 x_5^3 + 3x_2^2 x_3 x_5^3 + x_2^2 x_5^3 - \frac{704969}{489152} x_2^2 x_3 x_5^2 \\ - \frac{2144907}{489152} x_3 x_4^2 x_5^2 + \frac{2144907}{489152} x_2 x_4^2 x_5^2 - \frac{597075}{122288} x_4^2 x_5^2 + 6x_3 x_4 x_5^2 + 6x_2 x_4 x_5^2 + \\ + \frac{597075}{61144} x_2 x_3 x_5^2 + \frac{597075}{122288} x_3^2 x_5^2 - \frac{704969}{489152} x_2^2 x_5^2 + \frac{597075}{122288} x_2^2 x_5^2 + \frac{704969}{244576} x_2 x_4 x_5 + \\ + \frac{597075}{122288} x_4 x_5 - 3x_3 x_5 - 3x_2 x_5 = \frac{199025}{122288} \end{array} \right. . \quad (84)$$

Выберем пять наиболее компактных уравнений, из полученной системы и найдём точное решение  $\left\{ x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 2, x_5 = \frac{1}{10} \right\}$ , при этом посторонние корни отбрасываются на основании условия  $x_k \in \mathbb{R} \ \& \ x_k > 0, k = \overline{1,5}$ .

## 9. Обсуждение

Полученные в ходе исследований результаты предоставляют новые возможности идентификации параметров линейных электрических цепей. Отличительной особенностью предлагаемых методов является возможность идентификации параметров схемы по току и напряжению измеренным только в одной ветви, что открывает перспективы, особенно в свете стремительного развития современного приборостроения. При этом использование нескольких

внешних ветвей так же возможно и в свою очередь позволяет получить дополнительные уравнения, обычно в более простой форме, чем например, уравнения, полученные за счёт взятия производной от комплексного сопротивления и проводимости. С одной стороны современная инструментальная база позволяет с достаточно высокой точностью произвести измерения необходимых для решения задачи идентификации токов и напряжений, а с другой произвести оперативное решение уравнений и тем самым выполнить решение задачи идентификации в режиме реального времени или в режиме почти реального времени. Значительную часть вычислений, таких как формирование уравнений и даже решений (или части решений) в общем виде, можно выполнить заранее при известной топологии схемы, за счёт чего потенциально обеспечивается существенное повышение скорости решения задачи идентификации. В случае необходимости массового и постоянного решения задач идентификации, возможно создание библиотек и баз знаний, содержащих заранее сформированные уравнения и полные или частичные решения в общем виде для значительного числа распространённых топологий.

В работе предложены методы идентификации более чем двух параметров линейной схемы на одной частоте за счёт первого метода синтеза уравнений. Второй метод синтеза уравнений позволяет получить независимые уравнения относительно исходных уравнений, что в свою очередь предоставляет возможность определения параметров компонентов линейной схемы превышающее число независимых уравнений получаемых на основе базового полинома. Во всех случаях измерения проводятся во временной области, для чего достаточно одного из самых распространённых приборов – цифрового осциллографа, обладающего достаточной точностью дискретизации, как по амплитуде, так и по числу отсчётов.

В качестве дальнейших перспектив исследований авторы видят исследование особенностей практической реализации предлагаемой теории.

## Заключение

Разработаны методы идентификации параметров линейной электрической цепи. Сформулированы и доказаны три теоремы, а так же следствия и замечания, уточняющие возможности и границы применимости теорем. Предложен метод идентификации параметров линейной электрической цепи по измерению ЭДС и тока в одной ветви. Предложен метод идентификации более двух параметров линейного пассивного двухполюсника на одной частоте за счёт измерения токов и напряжений на зажимах и синтеза дополнительных уравнений с помощью вычисления производных. Предложен метод синтеза дополнительных независимых уравнений за счёт взятия производной и замены комплексной мощности зависящей от частоты интерполяционным полиномом. Предложен метод решения нелинейных систем уравнений с применением упрощения за счёт их сведения к системе линейных алгебраических уравнений. Исследованы свойства производных по частоте от комплексного сопротивления и проводимости. В заключении работы приведены некоторые относительно простые примеры использования предлагаемых методов.

Разработанные методы способствуют развитию методологии решения обратных задач в области радиофизики, радиоэлектроники и электротехники, а так же развитию теории идентификации параметров линейных систем исследуемых в рамках теории автоматического управления.

## Литература

1. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники. 4-е изд. Т. 2. СПб: Питер. 2006.
2. Жуховицкий Б.Я., Негневицкий И.Б. Линейные электрические цепи. Т.2. М.: Энергия. 1972.
3. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил С.В. Основы теории цепей. М.: Энергия. 1975.
4. Крон Г. Исследование сложных систем по частям – диакоптика. М.: Наука. 1972.

5. Бутырин П.А., Гришкевич А.А. Минимальные структуры математических моделей электрических цепей // Электричество. – 1992. – №. 2. – С. 1-8.
6. Бутырин П.А., Васьковская Т.А. Принципы декомпозиции сложных электрических цепей при их диагностике по частям // Электричество. – 2001. – №. 6. – С. 41-48.
7. Курганов С.А., Филаретов В.В. Неявный принцип наложения воздействий в линейных электрических цепях // Электричество. – 2005. – №. 1. – С. 45-60.
8. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Метод обобщенного импеданса для расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 1. Последовательный пересчет импедансов и амплитуд // Журнал радиоэлектроники. – 2023. – №. 1. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.1.1>
9. Гришенцев А.Ю., Горошков В.А., Чернов Р.И. Оценка границ применимости и методов модуляции ближнепольной магнитной связи // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2023. – Т. 23. – №. 1. – С. 169-177.
10. Инкин А.И., Бланк А.В. Объемная ячейка-многополюсник и пространственная схема замещения трехмерного электромагнитного поля // Электричество. – 2017. – №. 10. – С. 53-57.
11. Коровкин Н.В., Миневич Т.Г., Соловьева Е.Б. Определение электромагнитных параметров группы датчиков, предназначенных для измерений в активных средах или труднодоступных частях устройств и сооружений // Электротехника. – 2023. – № 3. – С. 40-44.
12. Ротхаммель К., Кришке А. Энциклопедия антенн. М.: ДМК-Пресс. 2016.
13. Титце У., Шенк К. Полупроводниковая схемотехника. 12-е изд. Т.1. М.: ДМК-Пресс. 2015.
14. Гришенцев А.Ю., Коробейников А.Г. Разработка модели распределения плотности токов при возбуждении ионосферы высокочастотным облучением // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2010. – Т. 53. – №. 12. – С. 41-47.

15. Иванов А.А., Новиков П.В., Новиков К.В. Электроразведка. М.: МГРИ, 2019.
16. Инкин А.И., Алифёров А.И., Бланк А.В. Каскадные ЕН-схемы замещения для расчёта магнитоэлектрических установок индукционного нагрева // Электротехника. – 2011. – №. 6. – С. 36-41.
17. Самойлов В.О. Медицинская биофизика. СПб.: СпецЛит. 2007.
18. Зуев А.Л. и др. Эквивалентные электрические модели биологических объектов // Российский журнал биомеханики. – 2012. – №. 1. – С. 110-120.
19. Корячко В.П., Курейчик В.М., Норенков И.П. Теоретические основы САПР. М.: Энергоатомиздат. 1987.
20. Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М., Лебедев Б.К., Лебедев О.Б., Щеглов С.Н. Концепция поиска оптимальных решений при проектировании. Таганрог: ЮФУ. 2010.
21. Анисимов В.И. Топологический расчёт электронных схем. Л.: Энергия. 1977.
22. Гридин В.Н., Анисимов В.И., Алмаасали С.А. Применение метода диакоптики для моделирования и расчета больших систем // Проблемы управления. – 2014. – №. 4. – С. 9-13.
23. Герасимов И.В., Кузьмин С.А., Лозовой Л.Н., Никитин А.В. Основания технологии комплементарного проектирования наукоемких изделий. СПб.: ЛЭТИ. 2010.
24. Коровкин Н.В., Гришенцев А.Ю. Определение параметров элементов линейного N-полюсника по входным частотным характеристикам // Электричество. – 2024. – №. 6. – С. 48-57.
25. Коровкин Н.В., Миневич Т.Г., Соловьева Е.Б. Идентификация параметров схем замещения четырехполюсников по измерениям на границах их каскадного соединения // Электротехника. – 2022. – №. 3. – С. 2-9.
26. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники, 4-е изд. Т. 1. СПб: Питер. 2006.
27. Vinberg E.V. A course in algebra. American Mathematical Soc. 2003.

28. Бодде Г. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. М.: Изд-во иностр. лит. 1948.
29. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. II. М.: Наука, Физматлит. 1998.
30. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука. 1971.
31. Иванов В.А., Медведев В.С., Чемоданов Б.К., Ющенко А.С. Математические основы теории автоматического регулирования. Т.2. – М.: Высшая школа. 1977.
32. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, Физматлит. 1999.
33. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс, 9-е изд. М.: Айрис-пресс. 2010.
34. Гиллемин Э.А. Синтез пассивных цепей. М.: Связь. 1970.
35. Зиборов С.Р. Синтез линейных радиотехнических цепей. Севастополь: Изд-во СевНТУ. 2013.
36. Brune O. Synthesis of a finite two-terminal network whose driving-point impedance is a prescribed function of frequency: Massachusetts Institute of Technology. 1931.
37. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов: Второе издание. М.: ООО «Бином-Пресс». 2009.

**Для цитирования:**

Коровкин Н.В., Гришенцев А.Ю. Методы решения задач идентификации параметров линейных электрических цепей по амплитудно-частотным характеристикам. // Журнал радиоэлектроники. – 2025. – №. 3. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.3.10>