

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.3.11>

УДК: 537.876.23

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПРЕЛОМЛЕНИЯ ТРОПОСФЕРЫ НА ОСНОВЕ АВТОМАТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

М.С. Лытаев

Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН,
199178, Санкт-Петербург, 14 линия, дом 39

Статья поступила в редакцию 6 декабря 2024 г.

Аннотация. Предложен метод определения вертикального профиля коэффициента преломления тропосферы. Метод основан на анализе искажений радиосигнала при прохождении вблизи земной поверхности от известного источника к массиву приёмников. В качестве базовой прямой модели выбран метод параболического уравнения. К конечно-разностной численной схеме решения указанного уравнения применяется метод автоматического дифференцирования по неизвестным параметрам искомого профиля. Это позволяет эффективно вычислять градиент, необходимый для решения оптимизационной задачи. Вычислительные эксперименты, проведенные для различных профилей и частот, демонстрируют адекватность и эффективность предложенного метода.

Ключевые слова: обратная задача, коэффициент преломления тропосферы, параболическое уравнение, тропосферный волновод.

Финансирование: Исследование выполнено за счет гранта РФФИ № 23-71-01069.

Автор для переписки: Лытаев Михаил Сергеевич, mlytaev@yandex.ru

Введение

Хорошо известно, что пространственные вариации коэффициента преломления тропосферы оказывают решающее влияние на дальность распространения радиоволн в тропосфере [1, 2, 3]. Эти вариации вызваны изменениями температуры, давления и влажности воздуха, которые, в свою очередь, зависят от метеорологических и географических условий. Преломление радиоволн в тропосфере определяется коэффициентом преломления, который может изменяться как в вертикальном, так и в горизонтальном направлениях. Это приводит к таким явлениям, как сверхдальнее распространение, образование зон затухания и радиотени.

Было создано большое количество математических моделей [4], предсказывающих характеристики распространения в зависимости от конкретного профиля. Они принимают на вход параметры источника излучения и среды распространения, включая профиль коэффициента преломления, и возвращают уровень и фазу сигнала в необходимой точке пространства. Однако удобных методов прямого измерения профиля до сих пор не создано. Имеется лишь небольшое количество экспериментальных данных [5, 6], в той или иной мере подтверждающих адекватность существующих моделей распространения. Учитывая огромный размер трассы распространения сигнала и сложность прямого измерения, гораздо более перспективным видится определение профиля по некоторым косвенным данным.

С математической и алгоритмической точек зрения, задача тропосферной инверсии является некорректной по Адамару [7, 8]. Этим и объясняется ее сложность. Наиболее перспективным методом инверсии является анализ сигнала, излучаемого известным источником и получаемого массивом приёмников. Источник и приёмник должны быть разнесены в пространстве [9, 10, 11], чтобы сигнал смог достаточно исказиться под действием рефракции. В методе “рефракции из помех” (англ. refractivity from clutter, RFC) [12] источник и приёмник находятся рядом, при этом анализируется сигнал, отраженный от поверхности моря. Разработка эффективных алгоритмов все еще является

актуальной. В частности, предыдущие работы были сосредоточены в основном на инверсии статического профиля. В данной работе рассматривается динамика коэффициента преломления во времени.

Работа построена следующим образом. В следующем разделе представлена формальная постановка задачи. В разделе 2 показано, что численный метод решения прямой задачи можно представить в виде графа вычислений. Раздел 3 посвящен дифференцированию графа вычислений и сведению обратной задачи к задаче минимизации функционала. Также предложен метод отслеживания изменения коэффициента преломления в реальном времени. В разделе 4 проведены численные эксперименты с предложенным методом.

1. Постановка задачи

Массив приёмников получает сигнал от известного источника радиоизлучения. Характеристики сигнала претерпевают изменения, вызванные неоднородностями коэффициента преломления тропосферы. Остальные параметры трассы распространения (рельеф, тип подстилающей поверхности, затухание) считаются известными. Задача состоит в определении вертикального профиля коэффициента преломления тропосферы по измерениям амплитуды и фазы радиосигнала на массиве приёмников. При этом учитывается тот факт, что коэффициент преломления может плавно изменяться с течением времени [13].

Схематичное описание постановки задачи показано на рис. 1. N приемников расположены в точках (x_i, z_i) , $i \in [1..N]$ и принимают комплекснозначный сигнал v_i^j в моменты времени t_j . Ограничений на взаимное расположение приёмников не накладывается: они могут быть расположены вертикально, горизонтально или в любом другом порядке.

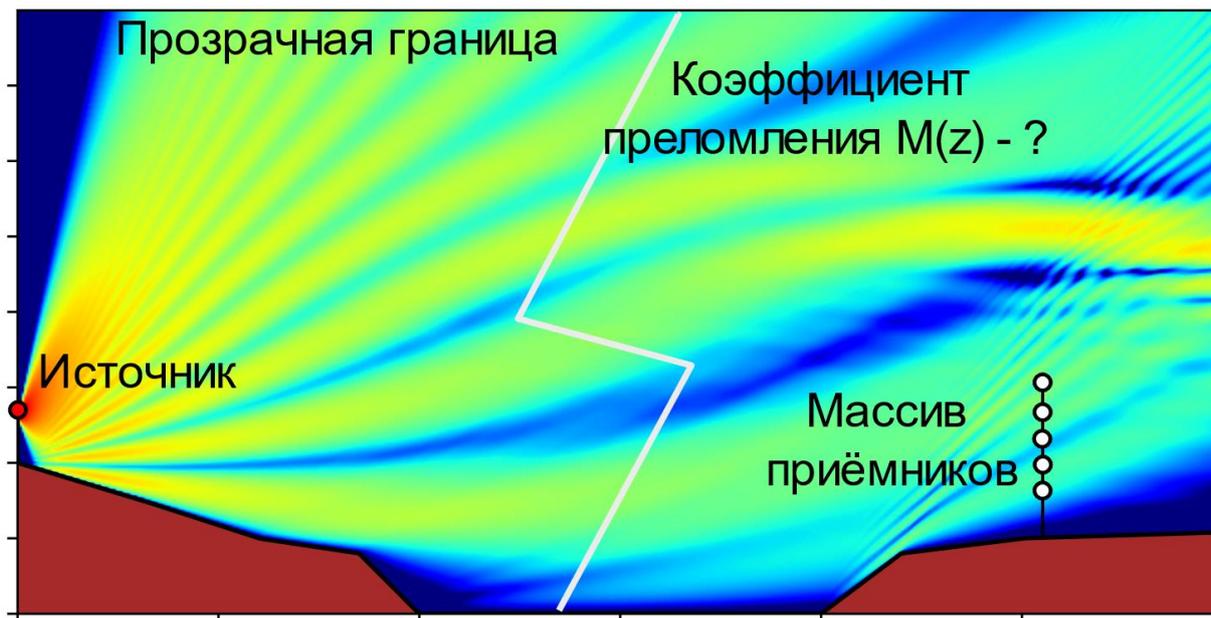


Рис. 1. Схематичное описание задачи инверсии коэффициента преломления.

2. Метод параболического уравнения для решения прямой задачи

Практически любой метод невыпуклой оптимизации заключается в многократном решении прямой задачи для подбора оптимальных искомым параметров. В данной работе для решения прямой задачи используется метод параболического уравнения (ПУ) [4,14], который в двумерном случае записывается следующим образом

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = i \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 m^2(x, z)} \psi,$$

$$m^2(z) = n^2(z) + 2z/R_e,$$

$$\psi(z) = Q \psi_0(z),$$

где $\psi(x, z)$ – двумерное комплекснозначное распределение электромагнитного поля; $n(z)$ – коэффициент преломления тропосферы; R_e – радиус Земли, $\psi_0(z)$ – начальное условие, отвечающее диаграмме направленности излучателя; Q – неизвестная константа, отвечающая амплитуде и фазе излучателя. Хотя формально мы знаем параметры источника, его синхронизация с приёмниками по амплитуде и фазе может оказаться затруднением с инженерной точки зрения, так что Q мы считаем неизвестным. Функция $n(z)$ считается финитной.

Для численного решения используем метод конечно-разностной аппроксимации Паде [4, 15, 16]. Совершая замену $u(x, z) = e^{-ikx}\psi(x, z)$, пошаговое решение записывается следующим образом

$$u(x + \Delta x, z) = P(L)u(x, z),$$

$$P(L)u = \exp\left(ik\Delta x(\sqrt{1+L}-1)\right)u \approx \prod_{l=1}^q \frac{1+a_l L}{1+b_l L}u,$$

$$Lu = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (n^2(x, z) - 1)u \approx \frac{\delta^2 u}{k^2 \Delta z^2} + (n^2(x, z) - 1)u,$$

где оператор второй разности определяется как

$$\delta^2 u = u(x, z + \Delta z) - 2u(x, z) + u(x, z - \Delta z),$$

a_l и b_l – некоторые комплексные константы.

Хорошо видно, что фактически пошаговое решение состоит из последовательного применения следующей типовой операции

$$u_{i+1} = (1 + b_l L)^{-1}(1 + a_l L)u_i,$$

которая при дискретизации по z сводится к трехдиагональной системе линейных уравнений, которая решается методом прогонки за линейное время. Таким образом, фактически данная численная схема представляет собой последовательное применение линейных операторов к вектору. Такого рода алгоритмы естественным образом представляются в виде графа вычислений [17]. Можно провести аналогию с последовательным применением слоев нейронной сети. Схематично граф вычислений для рассматриваемого алгоритма показан на рис. 2.

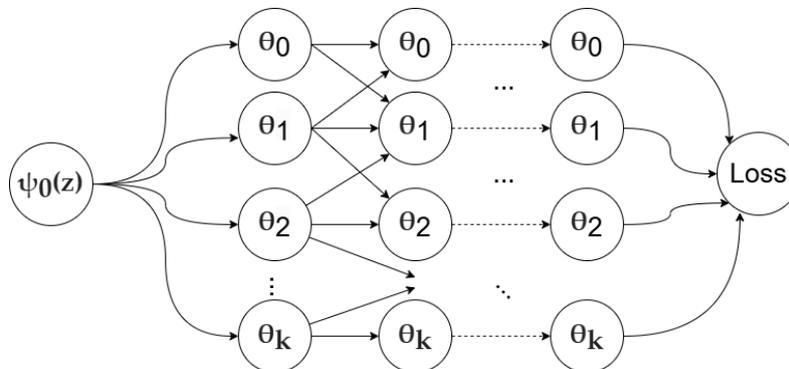


Рис. 2. Схематичное описание графа вычислений для параболического уравнения.

Преимуществом метода конечных разностей перед спектральными методами, такими как метод расщепления Фурье [4] или Вейвлет метод [18], является возможность точного моделирования верхнего прозрачного граничного условия [19].

Решение строится во всем интересующем пространстве. Значит, можно легко получить значения электромагнитного поля на узлах массива приёмников для любого профиля коэффициента преломления. Формально, мы построили нелинейный оператор $G: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$, отображающий множество возможных профилей коэффициента преломления (\mathcal{N}) во множество возможных значений на приёмниках (\mathcal{M}).

3. Определение коэффициента преломления тропосферы

Требуется построить обратный оператор $G^{-1}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, который мы определим как

$$G^{-1}v = \arg \min_{Q \in \mathcal{C}, n \in \mathcal{N}} \|QGn - v\|^2 = \arg \min_{n \in \mathcal{N}} J(n, v),$$

$$J = \frac{\|Gn\|^2}{|v^H Gn|^2} + \gamma \left\| \frac{dn}{dz} \right\|^2,$$

где γ – параметр регуляризации [20]. Здесь использован метод Бартлетта [21], который позволяет считать Q неизвестной. Случай, когда доступна только амплитуда измерения, может быть рассмотрен аналогичным образом, используя несколько иную функцию потерь [22]. Решение указанной оптимизационной задачи ищется на пространстве кусочно-линейных функций, определенных на заранее выбранной конечной сетке. Далее считаем, что искомая функция определяется конечным числом вещественных параметров $\theta_0 \dots \theta_k$, относительно которых и будет выполняться оптимизация.

3.1 Автоматическое дифференцирование для вычисления градиента

Наиболее эффективные методы многомерной оптимизации основаны на вычислении градиента целевой функции J . В частности, в данной работе используется метод оптимизации L-BFGS-B [23]. В предыдущих работах, посвященных задаче инверсии в похожей постановке, для вычисления градиента целевой функции используется метод сопряженных уравнений [9, 11, 24]. Указанный метод вводит дополнительное сопряженное уравнение и интегральное выражение для вычисления градиента. Это ведет к дополнительным математическим выкладкам и необходимости численной реализации дополнительных уравнений и выражений, а также их тестирования. Это также может вызывать численные сложности, т.к. значение и градиент вычисляются разными методами с разной точностью.

В данной работе предлагается вычислять градиент непосредственно для рассматриваемой выше численной схемы. Современные фреймворки для автоматического дифференцирования [17], такие как TensorFlow или JAX [25], позволяют вычислять градиент автоматически по программной реализации прямого метода. Как показано выше, пошаговые численные методы решения ПУ естественным образом представляются в виде графа вычислений, который затем дифференцируется. Получаемый таким методом градиент согласован с численной схемой, а многочисленные применения метода автоматического дифференцирования для обучения глубоких нейронных сетей позволяют быть уверенным в его точности и устойчивости. Аналогичный подход ранее уже показал хорошие результаты в задаче акустической томографии профиля скорости звука [26]. Автоматическое дифференцирование численных схем для решения обратных задач также рассматривалось в работах [27, 28].

Еще одним преимуществом представления численной схемы в виде графа вычислений является высокая производительность. Граф вычислений автоматически транслируется в низкоуровневый высокопроизводительный код, адаптируясь под конкретную вычислительную платформу [27]. Это позволяет

получать на языке Python производительность, сравнимую низкоуровневыми реализациями.

Предложенный метод реализован [29] при помощи фреймворка для автоматического дифференцирования JAX на языке Python 3. Данный фреймворк является наиболее предпочтительным для реализации дифференцируемых численных схем, т.к. его программный интерфейс максимально близок к библиотекам NumPy и SciPy [30]. Это позволяет писать простой и поддерживаемый код. В принципе, тоже самое можно реализовать и на других фреймворках, таких как TensorFlow или PyTorch, однако их интерфейс больше подходит для представления нейронных сетей.

Отметим, что предложенный метод автоматического дифференцирования полностью совместим и со спектральными методами численного решения ПУ.

3.2 Реконструкция в реальном времени

Ранее было неоднократно показано [9, 11], что градиентные методы оптимизации работают при условии, что начальное приближение находится близко от истинного профиля. На первый взгляд может показаться, что такие методы бесполезны – зачем нужен метод, который не ищет профиль, а лишь немного корректирует? В данной работе предлагается практическое применение такого метода. Дело в том, что коэффициент преломления изменяется с течением времени [13]. Значит, измеренный или вычисленный в момент времени t_{j-1} профиль будет отличным начальным приближением для следующей итерации инверсии в момент времени t_j . Таким образом, можно поддерживать актуальную информацию о профиле в реальном времени. Имея в виду, что построенный таким образом обратный оператор имеет дополнительную зависимость от начального приближения, итеративный процесс инверсии в реальном времени записывается как

$$\tilde{n}_i = G^{-1}(\tilde{n}_{i-1}, v^i).$$

Отметим, что минимизация также может осуществляться стохастическими методами глобальной оптимизации [10, 31], такими как метод имитации отжига

или генетические алгоритмы. К сожалению, без априорной информации они сходятся чрезвычайно медленно – порядка нескольких часов или дней, и данные к моменту их сходимости уже теряют актуальность.

4. Анализ результатов численного моделирования

Как и в работах [9, 11], в данном исследовании используются синтетические данные измерений, полученные методом ПУ. К синтетическим измерениям добавляется случайный шум, и затем они передаются алгоритму инверсии

$$\tilde{n}_i = G^{-1}(\tilde{n}_{i-1}, G(n_i) + noise),$$

где n_i и \tilde{n}_i – соответственно исходные и реконструированные профили коэффициента преломления.

В всех примерах используется массив из 11 вертикально расположенных точечных приёмников, равномерно расположенных на высотах от 2 до 100 м. Излучатель горизонтальной поляризации с шириной диаграммы направленности 3° расположен на высоте 10 м. Вертикальный профиль далее изображается в виде М-профиля [4], определяемого как

$$M(z) = (m(z) - 1)10^6.$$

Во всех примерах была использована аппроксимация Паде порядка [7/8]. Искомый профиль ищется в виде кусочно-линейной функции, определенной на равномерной сетке размера 20.

Метод реализован в рамках разрабатываемой автором библиотеки с открытым исходным кодом PyWaveProp [29].

На рис. 3 изображена симулируемая динамика изменения профиля с течением времени. Поверхностный волновод переходит в приповерхностный, а затем исчезает. Рис. 3 также демонстрирует результат инверсии. Для удобства, сравнение истинного и инвертированного профилей для отдельных временных шагов также изображено на рис. 4. Хорошо видно, реконструированный профиль весьма точно повторяет исходный на всем временном отрезке.

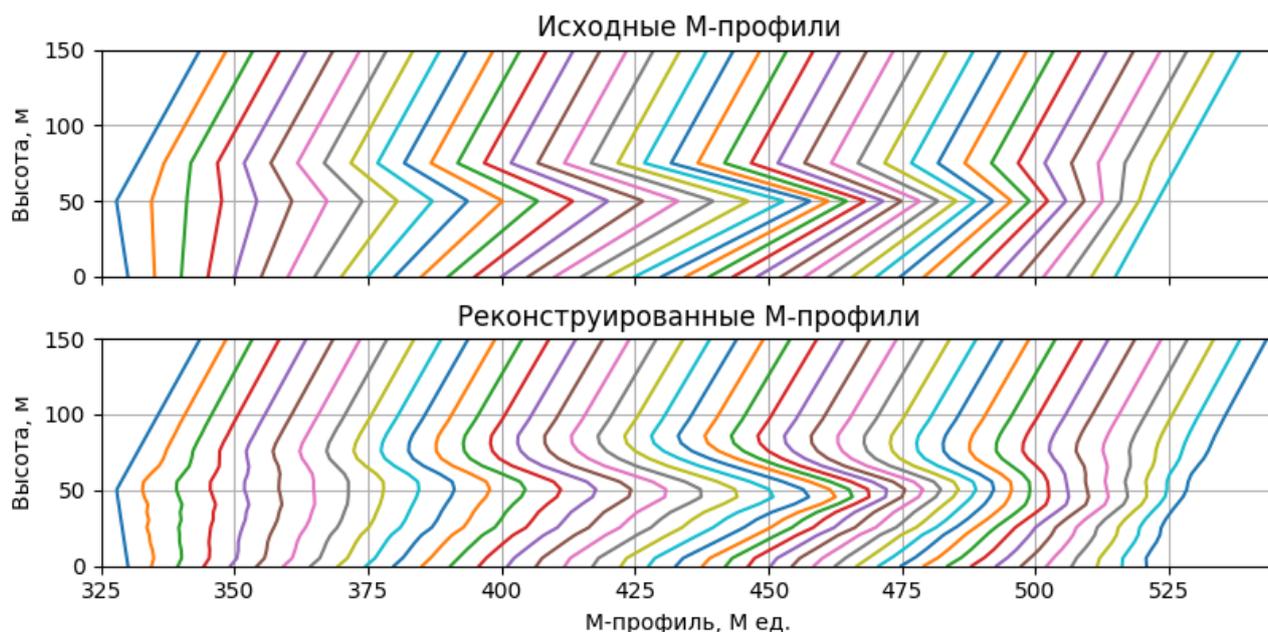


Рис. 3. Сравнение истинных и инвертированных профилей,
 $f = 3$ ГГц, $R = 5$ км, $SNR = 30$ дБ.

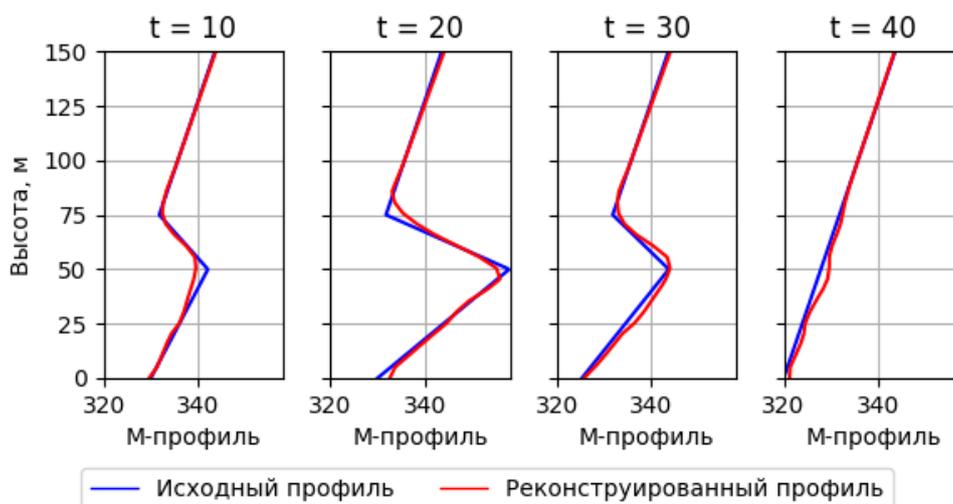


Рис. 4. Сравнение исходных и реконструированных профилей,
 $f = 3$ ГГц, $R = 5$ км, $SNR = 30$ дБ.

На рис. 5 показано сравнение двумерных распределений поля, рассчитанных по исходному и реконструированному профилям. Видно, что они едва отличимы. Качественно картина не изменилась, количественно изменилась лишь несущественно. А значит, достигнутая точность вполне достаточна для задач радиофизики. Также следует заметить, что если располагать массив приёмников на слишком большом отдалении от источника (более 15 км), то может сложиться ситуация, когда он окажется в зоне радиотени и не будет принимать сигнал от источника. Соответственно, инверсия станет невозможной.

Оценим далее относительную ошибку между исходным (M_i^{true}) и инвертированным (M_i^{inv}) профилями

$$err_i = \frac{\|M_i^{true} - M_i^{inv}\|}{\|M_i^{true}\|}.$$

Из рис. 6 видно, что относительная ошибка незначительно растет с уменьшением величины отношения сигнал-шум (SNR). Вместе с тем, во всех случаях ошибка остается ограниченной с течением времени. Таким образом, точность алгоритма не имеет тенденции к ухудшению с течением времени.

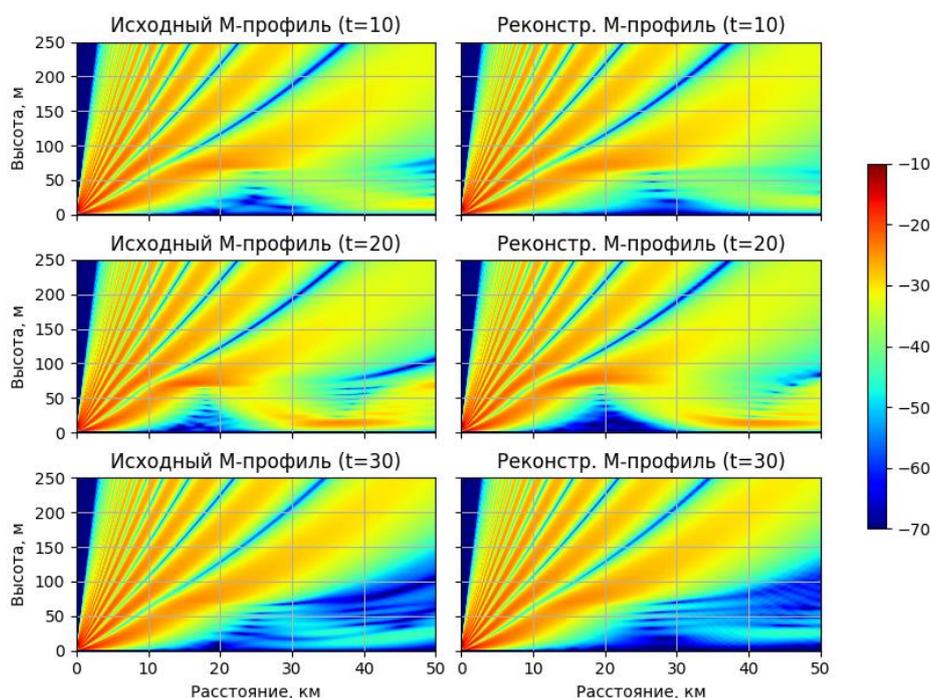


Рис. 5. Двумерные распределения электромагнитного поля ($20 \log(|\psi|)$), рассчитанные для исходных и реконструированных профилей.

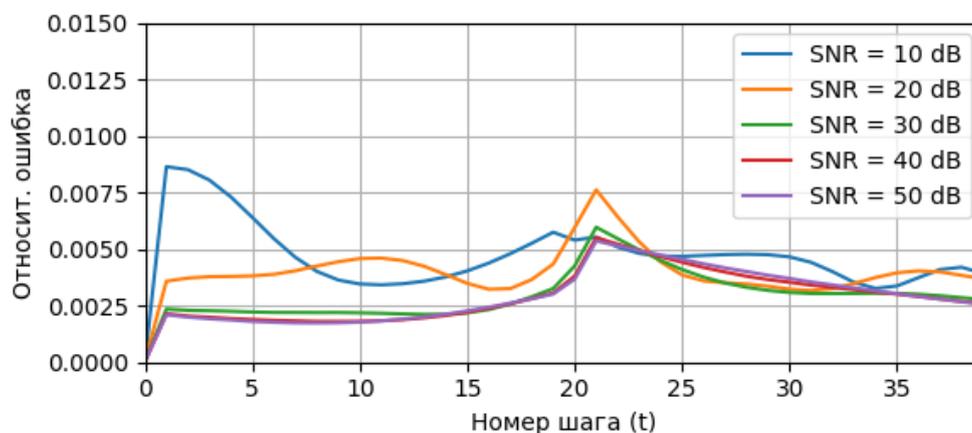


Рис. 6. Зависимость ошибки инверсии от шага по времени (t) для различных значений SNR.

Наконец, оценим производительность предложенного метода. В таблице 1 приведены параметры численной схемы и сходимости в зависимости от частоты. Средние значения взяты по инверсиям всех 40 рассматриваемых профилей коэффициента преломления. Метод L-BFGS-B состоит из последовательных вычислений прямой задачи (методом ПУ) и градиента. Видно, что время вычисления градиента примерно в два раза превышает вычисление прямой задачи, что аналогично методу сопряженных уравнений [1]. Хотя метод автоматического дифференцирования требует хранения всей численной схемы для вычисления градиента, затрачиваемый объем памяти незначителен. Время инверсии практически не зависит от профиля и варьируется лишь в небольших пределах от среднего значения. Во всех случаях ошибка остается приемлемой, при этом точность, как и время инверсии, увеличивается с ростом частоты. Оптимальный размер расчетной сетки выбирался, используя алгоритмы из работ [32, 33].

Таблица 1. Параметры численной схемы и инверсии.

Частота, ГГц	0.5	1	3	5
Δx , м	50	50	50	50
Δz , м	1	1	0.25	0.15
Время решения ПУ, с	0.015	0.015	0.06	0.09
Время вычисления градиента, с	0.03	0.03	0.12	0.17
Среднее число итераций L-BFGS-B	16	33	45	46
Требуемая память, Мб	3.05	3.05	12.2	20.34
Среднее время реконструкции профиля, с	0.72	1.5	8.1	12.4
Относительная ошибка	2.9E-3	2.5E-3	1.3E-3	1.2E-3

Заключение

Производительность предложенного подхода не уступает методу сопряженных уравнений. Можно легко брать производную по любому параметру численной схемы. Например, аналогичным образом можно произвести инверсию параметров грунта, найти оптимальные параметры излучающей антенны и т.д. При этом не требуются дополнительные математические выкладки и численные схемы. Метод позволяет искать неизвестную функцию в любом виде: как кусочно-линейную функцию на любой сетке, в виде разложения по некоторому базису или в виде нейронной сети. Это открывает простор для дальнейших исследований. Отметим, что метод использует современные инструменты машинного обучения, и при этом остается интерпретируемым.

Невозможно уместить все многообразие эффектов распространения в одной статье, но предложенный метод и его программная реализация [29] помогут в проектировании реальных стендов.

Актуальным направлением дальнейших исследований является решение обратной задачи без необходимости в начальном приближении. Также следует изучить другие способы представления искомого профиля и проанализировать алгоритмы регуляризации.

Финансирование: Исследование выполнено за счет гранта РФФ № 23-71-01069.

Литература

1. Лытаев М.С. Численный анализ влияния неопределенности высоты волновода испарения на тропосферное распространение радиоволн // Журнал радиоэлектроники. – 2024. – № 1.
2. Wang S. и др. Long-term over-the-horizon microwave channel measurements and statistical analysis in evaporation ducts over the yellow sea // *Frontiers in Marine Science*. – 2023. – Т. 10.

3. Dinc E., Akan O. B. Channel model for the surface ducts: Large-scale path-loss, delay spread, and AOA // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 2015. – Т. 63. – №. 6. – С. 2728-2738.
4. Levy M. Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation. – IET, 2000.
5. Wang Q. и др. CASPER: Coupled air–sea processes and electromagnetic ducting research // *Bulletin of the American Meteorological Society*. – 2018. – Т. 99. – №. 7. – С. 1449-1471.
6. Wang S. и др. Observations of anomalous over-the-horizon propagation in the evaporation duct induced by Typhoon Kompasu (202118) // *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*. – 2022. – Т. 21. – №. 5. – С. 963-967.
7. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. – М. Наука, 1995.
8. Tarantola A. Inverse problem theory and methods for model parameter estimation. – SIAM, 2005.
9. Zhao X., Huang S., Du H. Theoretical analysis and numerical experiments of variational adjoint approach for refractivity estimation // *Radio Science*. – 2011. – Т. 46. – №. 01.
10. Pastore D. et al. Refractivity inversions from point-to-point X-band radar propagation measurements // *Radio Science*. – 2022. – Т. 57. – №. 2.
11. Karabaş U., Diouane Y., Douvenot R. A variational adjoint approach on wide-angle parabolic equation for refractivity inversion // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 2021. – Т. 69. – №. 8. – С. 4861-4870.
12. Karimian A. et al. Refractivity estimation from sea clutter: An invited review // *Radio science*. – 2011. – Т. 46. – №. 06.
13. Базарова А.С. и др. Суточная динамика градиента рефракции в нижнем десятиметровом слое приземной тропосферы // *Вестник Поволжского государственного технологического университета. Серия «Радиотехнические и инфокоммуникационные системы»* – 2023. – Т. 29. – №. 3. – С. 21-32.

14. Ахияров В.В. Вычисление множителя ослабления при обратном рассеянии от земной поверхности методом параболического уравнения // Журнал радиоэлектроники. – 2019. – №. 11.
15. Lytaev M.S., Vladyko A.G. Split-step Padé approximations of the Helmholtz equation for radio coverage prediction over irregular terrain // 2018 Advances in Wireless and Optical Communications (RTUWO). – IEEE, 2018. – С. 179-184.
16. Lytaev M. S. Rational interpolation of the one-way Helmholtz propagator // Journal of Computational Science. – 2022. – Т. 58.
17. Baydin A.G. и др. Automatic differentiation in machine learning: a survey // Journal of machine learning research. – 2018. – Т. 18. – №. 153. – С. 1-43.
18. Zhou H., Chabory A., Douvenot R. A fast wavelet-to-wavelet propagation method for the simulation of long-range propagation in low troposphere // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2021. – Т. 70. – №. 3. – С. 2137-2148.
19. Lytaev M.S. Numerov-Padé scheme for the one-way Helmholtz equation in tropospheric radio-wave propagation // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. – 2020. – Т. 19. – №. 12. – С. 2167-2171.
20. Zhao X., Wang D. Ocean acoustic tomography from different receiver geometries using the adjoint method // The Journal of the Acoustical Society of America. – 2015. – Т. 138. – №. 6. – С. 3733-3741.
21. Mantzel W., Romberg J., Sabra K. Compressive matched-field processing // The Journal of the Acoustical Society of America. – 2012. – Т. 132. – №. 1. – С. 90-102.
22. Mecklenbräuker C.F., Gerstoft P. Objective functions for ocean acoustic inversion derived by likelihood methods // Journal of Computational Acoustics. – 2000. – Т. 8. – №. 02. – С. 259-270.
23. Liu D.C., Nocedal J. On the limited memory BFGS method for large scale optimization // Mathematical programming. – 1989. – Т. 45. – №. 1. – С. 503-528.
24. Марчук Г.И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. – М. Наука, 1992.

25. Lin M. Automatic Functional Differentiation in JAX // The Twelfth International Conference on Learning Representations. – 2023.
26. Lytaev M. Automatically Differentiable Higher-Order Parabolic Equation for Real-Time Underwater Sound Speed Profile Sensing // Journal of Marine Science and Engineering. – 2024. – Т. 12. – №. 11. – С. 1925.
27. Xue T. и др. JAX-FEM: A differentiable GPU-accelerated 3D finite element solver for automatic inverse design and mechanistic data science // Computer Physics Communications. – 2023. – Т. 291.
28. Ataei M., Salehipour H. XLB: A differentiable massively parallel lattice Boltzmann library in Python // Computer Physics Communications. – 2024. – Т. 300.
29. PyWaveProp. URL: <https://github.com/mikelytaev/wave-propagation> (дата обращения: 12.12.2024)
30. Scopatz A., Huff K.D. Effective computation in physics: Field guide to research with python. – O'Reilly Media, Inc., 2015.
31. Douvenot R. et al. A duct mapping method using least squares support vector machines // Radio Science. – 2008. – Т. 43. – №. 06.
32. Lytaev M. Mesh optimization for the acoustic parabolic equation // Journal of Marine Science and Engineering. – 2023. – Т. 11. – №. 3.
33. Lytaev M.S. Computational Grid Optimization for the 3D Higher-Order Parabolic Equation // International Conference on Computational Science and Its Applications. – Cham: Springer Nature Switzerland, 2023. – С. 170-185.

Для цитирования:

Лытаев М.С. Метод определения коэффициента преломления тропосферы на основе автоматического дифференцирования параболического уравнения // Журнал радиоэлектроники. – 2025. – №. 3. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.3.11>