

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.3.15>

УДК: 621.391.6

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕННОЙ ЗАДЕРЖКИ РАДИОСИГНАЛА,
РЕТРАНСЛИРОВАННОГО ОСНОВНЫМ И СМЕЖНЫМ
КОСМИЧЕСКИМИ АППАРАТАМИ**

В.В. Севидов

**Военная орденов Жукова и Ленина Краснознаменная академия связи
имени Маршала Советского Союза С.М. Буденного
194064, Санкт-Петербург, Тихорецкий пр., д. 3**

Статья поступила в редакцию 20 декабря 2024 г.

Аннотация. В настоящее время интенсивно развиваются методы координатометрии земных станций, функционирующих через космические аппараты. Указанные методы основаны на приеме и обработке радиосигналов земных станций после их ретрансляции космическими аппаратами. При этом в наземном комплексе координатометрии оцениваются временные задержки одних и тех же реализаций радиосигналов, обусловленных различными пройденными траекториями. От точности оценивания этих временных задержек во многом зависит точность определения координат земных станций. Сформулированы и доказаны теоремы и их следствия, в совокупности, обеспечивающие повышение точности оценки временных задержек радиосигнала, ретранслированного основным и смежным космическими аппаратами. В качестве иллюстрации разработанной модели представлен разностно-дальномерный метод оценки координат земных на базе четырех малых космических аппаратов. Научная новизна разработанного технического решения заключается в расширении теории сплайн-алгебраического гармонического анализа и распространении ее на пространства производных

радиосигналов, производных корреляционных функций радиосигналов. При этом частные случаи расширенной теории сплайн-алгебраического гармонического анализа совпадают с полученными ранее результатами.

Ключевые слова: космический аппарат, земная станция, базисы функций сплайн-характеров, сплайн-алгебраический гармонический анализ, интерполяция, разностно-дальномерный метод.

Автор для переписки: Севидов Владимир Витальевич, v-v-sevidov@mail.ru

Введение

В настоящее время, разработаны и совершенствуются методы координатометрии, позволяющие оценить координаты земных станций (ЗС) по радиосигналам, принимаемым станцией координатометрии (СКМ) от космических аппаратов (КА) [1-3]. Основопологающей предпосылкой таких методов является наличие помимо основного КА, через который организуется канал связи, смежного(ых) КА, способного(ых) ретранслировать те же радиоизлучения пусть с большим ослаблением и другой частотой переноса.

При этом в наземной СКМ оцениваются координатно-информативные параметры – временные задержки одних и тех же реализаций радиосигналов, обусловленные различными длинами пройденных траекторий. От точности оценивания этих координатно-информативных параметров во многом зависит точность определения координат ЗС [4].

В настоящей статье представлена разработанная модель определения временной задержки радиосигнала, ретранслированного основным и смежным космическими аппаратами предназначенная для высокоточного определения временных задержек. Разработанная модель основана на развитии теории сплайн-алгебраического гармонического анализа (САГА), распространяющейся как на радиосигналы, так и на производные радиосигналов, производные корреляционных функций радиосигналов. Центральное место в теории САГА занимают сплайн-функции (в дальнейшем сплайны), являющиеся по определению непрерывными функциями, но построенные по дискретным данным [5].

Постановка задачи исследования

Среди множества известных в настоящее время сплайнов [6-21] наиболее интересными с точки зрения синтеза и обработки сигналов являются те из них, которые имеют максимальную гладкость и непрерывные производные, как наиболее отвечающие природе радиоизлучений. Это так называемые сплайны дефекта 1. Согласно [15-22] дефект сплайна есть разность между степенью функции и ее гладкостью, в частности, сплайн 4-й степени дефекта 1 должен иметь три непрерывные производные.

По отношению к классическому аппарату аппроксимации дискретных данных многочленами, сплайны обладают, по крайней мере, тремя важными преимуществами [24]. Наиболее значимым является то, что они имеют лучшие свойства аппроксимации. Причем, как при вычислении функций, так и их производных.

Из [24] известны интерполяционные свойства глобальных сплайнов (см. таблицу 1). В таблице 1 введены обозначения: h – интервал интерполяции; $z_{\max}^{(l)}$ – максимальное значение производной l -го порядка сигнала z ; C^p – пространство функций заданной степени гладкости; $o(*)$ – оценка точности остатка интерполяции функции.

Таблица 1. Интерполяционные свойства глобальных сплайнов.

№ п/п	Метод интерполяции	Потенциальная точность интерполяции	Требование к функции
1	Добавление нулей	$1/2h$	C^1
2	Квадратичная интерполяция	$< o(h^4 z_{\max}^{(4)})$	C^4
3	Кубическая интерполяция	$< o(h^5 z_{\max}^{(5)})$ $5 / 384(h^4 z_{\max}^{(4)})$	C^5
4	Интерполяция сплайном 4-й степени	$< o(h^6 z_{\max}^{(6)})$	C^6
5	Интерполяция сплайном 5-й степени	$< o(h^7 z_{\max}^{(7)})$	C^7

Анализ таблицы 1 показывает, что чем выше степень гладкости функции p , соответственно и степень гладкости сплайна, тем лучше $o(*)$ – точность интерполяции [24]. Так, например, если $h = 0.1$, то точность кубической интерполяции с использованием глобальных сплайнов будет пропорциональна величине 0.0001. В тоже время, при классическом подходе точность интерполяции пропорциональна интервалу интерполяции равному $h / 2 = 0.05$, что равносильно увеличению требуемого объема производимых вычислений.

Основное отличие локальных сплайнов от глобальных состоит в том, что для интерполяции используется значительно меньший объем информации. Например, для поиска экстремума достаточно данных лишь о вблизи расположенных отсчетах сигнала. Это относится к простейшим сплайнам, сплайнам минимального шаблона (СМШ) квадратичным и кубическим, квазиинтерполяционным сплайнам (КИС) [10, 11].

Однако обеспечиваемая ими точность ниже по сравнению с глобальными сплайнами (см. таблицу 2).

Таблица 2. Интерполяционные свойства локальных сплайнов.

№ п/п	Метод интерполяции	Потенциальная точность интерполяции	Требование к функции
1	Добавление нулей	$1 / (2h)$	C^1
2	Интерполяция квадратичным СМШ	$0.047 h^3 z_{\max}^{(3)}$	C^4
	Интерполяция квадратичным КИС	$< 0.047 h^3 z_{\max}^{(3)}$	C^4
3	Интерполяция кубическим СМШ	$35 / 1152 h^4 z_{\max}^{(4)}$	C^5
	Интерполяция кубическим КИС	$< 35 / 1152 h^4 z_{\max}^{(4)}$	C^5
4	Интерполяция СМШ 4-й степени	$132677 / 13271040 h^5 z_{\max}^{(5)}$	C^5
	Интерполяция КИС 4-й степени	$< 132677 / 13271040 h^5 z_{\max}^{(5)}$	C^6
5	Интерполяция СМШ 5-й степени	$59 / 5120 h^6 z_{\max}^{(6)}$	C^7
	Интерполяция КИС 5-й степени	$< 59 / 5120 h^6 z_{\max}^{(6)}$	C^7

В теории САГА [23, 24] используются как локальные, так и глобальные периодические сплайны, которые отличаются повышенной точностью, однако, не используются пространства производных функций.

В настоящей статье представлены разработанные математические модели для описания функций, радиосигналов, корреляционных функций, объединяющих в себе не только свойства характеров и сплайнов, но и их производных (в том числе, и с точки зрения точности интерполяции).

В общем случае для определения временной задержки копий одной и той же реализации радиосигнала τ^s , ретранслированного основным и смежным КА возможно воспользоваться следующее выражение:

$$\tau^s = \arg[{}_{L(H,K)}B^{(1)}(\tau) = 0], \quad (1)$$

где ${}_{L(H,K)}B(\tau)$ – взаимокорреляционная функция (ВКФ) копий одной и той же реализации радиосигнала, ретранслированного основным и смежным КА; τ – переменная ВКФ – взаимный сдвиг двух радиосигналов; ${}_{L(H,K)}B^{(1)}(\tau)$ – первая производная ВКФ в базисах функций сплайн-характеров (БФСХ); $\arg[\bullet]$ – аргумент производной ВКФ при выполнении условия, указанного в квадратных скобках.

Классический подход к нахождению временной задержки τ_1^s демонстрирует рисунок 1а. Точность определения такого подхода будет относительно невысокой и определяется половиной шага дискретизации h_1 . Высокоточное определение временной задержки τ_2^s возможно на основе расширенной теории САГА (см. рисунок 1б).

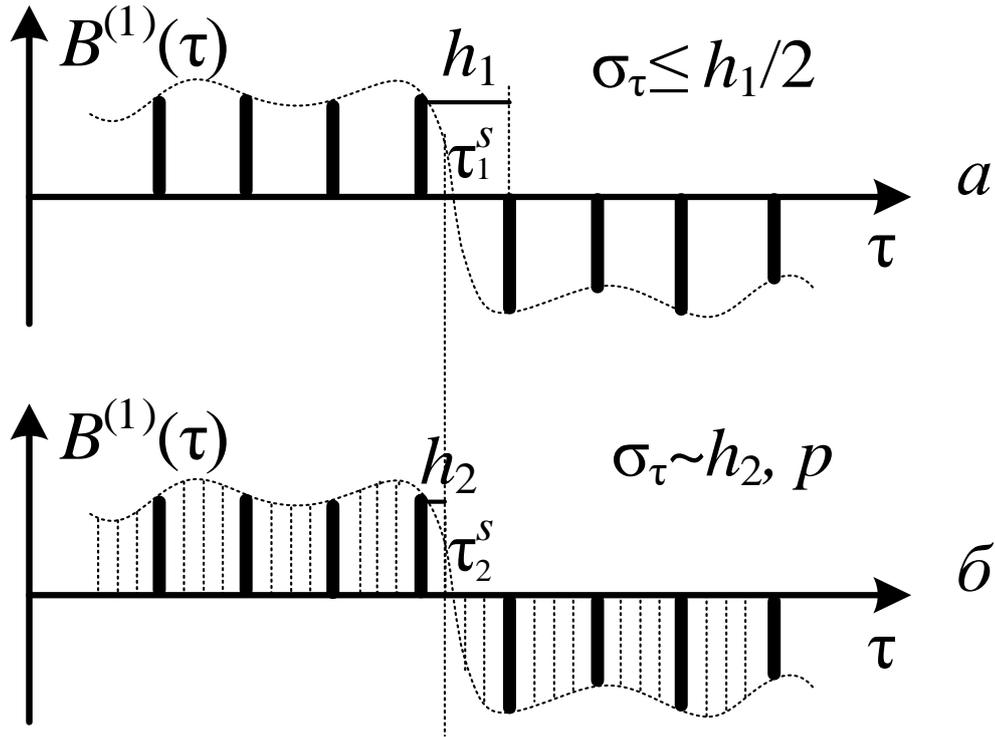


Рис. 1. Определение временной задержки:

a – классическим подходом τ_1^s ; *б* – на основе расширенной теории САГА τ_2^s .

Введем пространство $L_{(H,K)} G_n^p$ периодических сплайнов в БФСХ и сформируем в этом пространстве математическую модель радиосигнала $L_{(H,K)} S^p(t)$:

$$L_{(H,K)} S^p(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} L_{(H,K)} q_k M_{\mu}^p(t \Theta_{\mu} t_k),$$

где $L(H,K)$ – пространство всех функций, заданных на абелевой группе H с областью значений в кольце K [25]; N – количество дискретных отчетов; $k = 0, N - 1$ – номер текущего отчета; $L_{(H,K)} q_k$ – коэффициенты сплайна, соответствующий текущему отчету k ; $M_{\mu}^p(t \Theta_{\mu} t_k)$ – B -сплайны порядка p ($p \geq 1$) и заданной гладкости $p - 1$; μ – модуль представления сигнала [26, 27]; Θ_{μ} – алгебраическая операция сдвига по модулю μ ; n – номер частоты сигнала; t_k – дискретные отсчеты времени.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Математическая модель производной радиосигнала в базисах функций сплайн-характеров

Если радиосигнал ${}_{L(H,K)}S^p(t) \in {}_{L(H,K)}G_n^p$ и

$${}_{L(H,K)}S^p(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} {}_{L(H,K)}q_k M^p(t \ominus_{\mu} t_k),$$

то его s -я ($s \leq p$) производная ${}_{L(H,K)}S^{p,(s)}(t) \in {}_{L(H,K)}G_n^{p-s}$ и имеет вид:

$${}_{L(H,K)}S^{p,(s)}(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} {}_{L(H,K)}q_k^s M^{p-s}(t \ominus_{\mu} t_k).$$

Если обозначить векторами следующие наборы ${}_{L(H,K)}\mathbf{q}^s = \left\{ {}_{L(H,K)}q_k^s \right\}_0^{N-1}$,

${}_{L(H,K)}\mathbf{S}^{p,(s)} = \left\{ {}_{L(H,K)}S^{p,(s)}(t_k) \right\}_0^{N-1}$, то справедливы выражения:

$${}_{L(H,K)}F_n ({}_{L(H,K)}\mathbf{q}^s) = {}_{L(H,K)}F_n ({}_{L(H,K)}\mathbf{q})(iN {}_{L(H,K)}v_n)^s;$$

$${}_{L(H,K)}F_n ({}_{L(H,K)}\mathbf{S}^{p,(s)}) = {}_{L(H,K)}F_n ({}_{L(H,K)}\mathbf{q})(iN {}_{L(H,K)}v_n)^s {}_{L(H,K)}\mathbf{u}_n^{p-s};$$

где $F_n(\bullet)$ – дискретное преобразование Фурье (ДПФ); i – мнимая единица;

${}_{L(H,K)}v_n = {}_{L(H,K)}F_n(F_n^{-1}(\mathbf{V}))$ – n -й спектральный коэффициент в БФСХ;

$F_n^{-1}(\bullet)$ – обратное ДПФ (ОДПФ); $\mathbf{V} = \{v_n\}_0^{N-1}$ – набор v_n ;

$v_n = 2 \sin(\pi n / N)$ – n -й спектральный коэффициент в базисе Фурье;

${}_{L(H,K)}\mathbf{u}_n^{p-s} = {}_{L(H,K)}F_n(\mathbf{M}^{p-s}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{\chi}(n,k) M^{p-s}(t_k)$ – ДПФ от B -сплайна порядка

$p-s$ в БФСХ; $\mathbf{M}^{p-s} = \left\{ M^{p-s}(t_k) \right\}_0^{N-1}$ – набор дискретных отчетов $M^{p-s}(t_k)$;

$\bar{\chi}(n,k)$ – характеры;

$\mathbf{u}_n^p = F_n(\mathbf{M}^p) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{-nk} M^p(t_k)$ – ДПФ от B -сплайна порядка p в базисе Фурье;

$\omega = e^{2\pi i/N}$ – круговая частота;

$M^p(t_k)$ – дискретные отсчеты B -сплайнов порядка p ; π – число Пи.

Доказательство теоремы 1:

Из [15, 17] следует, что коэффициенты Фурье c_n от сплайна S^p равны:

$$c_n(S^p) = \int_0^1 e^{-2\pi i n t} S^p(t) dt = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} q_k \int_0^1 e^{-2\pi i n t} M^p(t - t_k) dt = F_n(\mathbf{q}) V_n^p, \quad (2)$$

где $V_n^p = \left(\frac{\sin(\pi n / N)}{\pi n / N} \right)^p$ – n -й коэффициент Фурье B -сплайна порядка p .

Из [23, 24] известно, что

$${}_{L(H,K)}F_n({}_{L(H,K)}\mathbf{S}^p) = {}_{L(H,K)}F_n({}_{L(H,K)}\mathbf{q}) {}_{L(H,K)}u_n^p, \quad (3)$$

где ${}_{L(H,K)}\mathbf{S}^p = \left\{ {}_{L(H,K)}S^p(t_k) \right\}_0^{N-1}$.

Тогда

$$\begin{aligned} {}_{L(H,K)}c_n {}_{L(H,K)}S^{p,(s)}(t) &= \left(\int_0^1 {}_{L(H,K)}e^{-2\pi i n t} {}_{L(H,K)}S^p(t) dt \right)^{(s)} = \\ &= (2\pi n i)^s {}_{L(H,K)}F_n({}_{L(H,K)}\mathbf{q}) {}_{L(H,K)}v_n^p = \\ &= (iN {}_{L(H,K)}v_n)^s {}_{L(H,K)}F_n({}_{L(H,K)}\mathbf{q}) {}_{L(H,K)}v_n^{p-s}, \end{aligned} \quad (4)$$

где ${}_{L(H,K)}e^{-2\pi i n t} = \lim_{p \rightarrow \infty} {}_{L(H,K)}\lambda_n^p(t)$;

${}_{L(H,K)}\lambda_n^p(t) = {}_{L(H,K)}m_n^p(t) / \sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2p}}$ – ортонормированная базисная функция из

БФСХ; ${}_{L(H,K)}m_n^p(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{\chi}(n, k) M^p(t \ominus_{\mu} t_k)$ – ортогональная базисная функция из

БФСХ; ${}_{L(H,K)}v_n^p = {}_{L(H,K)}F_n(F_n^{-1}(\mathbf{V}^p))$ – n -й спектральный коэффициент B -сплайна

порядка p в БФСХ; $\mathbf{V}^p = \left\{ v_n^p \right\}_0^{N-1}$ – набор v_n^p .

Из сравнения (2) и (4) получают

$${}_{L(H,K)}F_n({}_{L(H,K)}\mathbf{q}^s) = {}_{L(H,K)}F_n({}_{L(H,K)}\mathbf{q}) (iN {}_{L(H,K)}v_n)^s. \quad (5)$$

Из (3) следует, что

$${}_{L(H,K)}F_n({}_{L(H,K)}\mathbf{S}^{p,(s)}) = {}_{L(H,K)}F_n({}_{L(H,K)}\mathbf{q}) (iN {}_{L(H,K)}v_n)^s {}_{L(H,K)}u_n^{p-s}. \quad (6)$$

Что и требовалось доказать. ■

Ниже для примера приведены несколько следствий теоремы 1.

Следствие 1 теоремы 1

При $s = 0$ получаем результат, представленный в [23, 24].

$$\begin{aligned} {}_{L(H,K)}S^{p,(s)}(t)|_{s=0} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} {}_{L(H,K)}q_k^s M^{p-s}(t \Theta_{\mu} t_k) = \\ &= {}_{L(H,K)}S^p(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} {}_{L(H,K)}q_k M^p(t \Theta_{\mu} t_k), \end{aligned}$$

при этом

$$\begin{aligned} {}_{L(H,K)}F_n({}_{L(H,K)}\mathbf{q}^s)|_{s=0} &= {}_{L(H,K)}F_n({}_{L(H,K)}\mathbf{q}), \\ {}_{L(H,K)}F_n({}_{L(H,K)}\mathbf{S}^{p,(s)})|_{s=0} &= {}_{L(H,K)}F_n({}_{L(H,K)}\mathbf{q}) {}_{L(H,K)}u_n^p. \end{aligned}$$

Доказательство следствия 1 теоремы 1:

Из (5) известно, что ${}_{L(H,K)}F_n({}_{L(H,K)}\mathbf{q}^s) = {}_{L(H,K)}F_n({}_{L(H,K)}\mathbf{q})(iN {}_{L(H,K)}v_n)^s$.

При $s = 0$ получают $(iN {}_{L(H,K)}v_n)^s|_{s=0} = (iN {}_{L(H,K)}v_n)^0 = 1$, тогда,

$${}_{L(H,K)}F_n({}_{L(H,K)}\mathbf{q}^s)|_{s=0} = {}_{L(H,K)}F_n({}_{L(H,K)}\mathbf{q}).$$

Из (6) известно, что

$${}_{L(H,K)}F_n({}_{L(H,K)}\mathbf{S}^{p,(s)}) = {}_{L(H,K)}F_n({}_{L(H,K)}\mathbf{q})(iN {}_{L(H,K)}v_n)^s {}_{L(H,K)}u_n^{p-s}.$$

При $s = 0$ получают ${}_{L(H,K)}u_n^{p-s}|_{s=0} = {}_{L(H,K)}u_n^p$, следовательно

$${}_{L(H,K)}F_n({}_{L(H,K)}\mathbf{S}^{p,(s)})|_{s=0} = {}_{L(H,K)}F_n({}_{L(H,K)}\mathbf{q}) {}_{L(H,K)}u_n^p.$$

Что и требовалось доказать. ■

Следствие 1 подтверждает, что результат, представленный в [23, 24], является частным случаем представленной теоремы 1.

Следствие 2 теоремы 1

Для пространства сплайн – Понтрягина – Виленкина – Крестенсона $L(H_{\mu_1+H_{\mu_2}+\dots+H_{\mu_j},C)} G_n^p$, полученного из пространства Понтрягина – Виленкина – Крестенсона $L(H_{\mu_1} + H_{\mu_2} + \dots H_{\mu_j}, C)$, где $H := H_{\mu_1} + H_{\mu_2} + \dots H_{\mu_j}$ и $K = C$ – поле комплексных чисел, а μ_1, \dots, μ_j – произвольные целые числа справедливо

$$L(H,K) S^{p,(s)}(t) \Big|_{L(H_{\mu_1+H_{\mu_2}+\dots+H_{\mu_j},C)} G_n^p} = L(H_{\mu_1+H_{\mu_2}+\dots+H_{\mu_j},C)} S^{p,(s)}(t).$$

при этом

$$\begin{aligned} L(H,K) F_n(L(H,K) \mathbf{q}^s) \Big|_{L(H_{\mu_1+H_{\mu_2}+\dots+H_{\mu_j},C)} G_n^p} &= L(H_{\mu_1+H_{\mu_2}+\dots+H_{\mu_j},C)} F_n(L(H_{\mu_1+H_{\mu_2}+\dots+H_{\mu_j},C)} \mathbf{q}), \\ L(H,K) F_n(L(H,K) \mathbf{S}^{p,(s)}) \Big|_{L(H_{\mu_1+H_{\mu_2}+\dots+H_{\mu_j},C)} G_n^p} &= \\ = L(H_{\mu_1+H_{\mu_2}+\dots+H_{\mu_j},C)} F_n(L(H_{\mu_1+H_{\mu_2}+\dots+H_{\mu_j},C)} \mathbf{q}) L(H_{\mu_1+H_{\mu_2}+\dots+H_{\mu_j},C)} u_n^p. \end{aligned}$$

Доказательство следствия 2 теоремы 1:

Пространство $L(H_{\mu_1} + H_{\mu_2} + \dots + H_{\mu_j}, C)$ есть частный случай пространства $L(H, K)$, а $L(H_{\mu_1+H_{\mu_2}+\dots+H_{\mu_j},C)} G_n^p$ – частный случай пространства $L(H,K) G_n^p$, откуда и следует искомое утверждение, а $L(H,K) F_n(L(H,K) \mathbf{q}^s)$ и $L(H,K) F_n(L(H,K) \mathbf{S}^{p,(s)})$ в свою очередь равны:

$$\begin{aligned} L(H,K) F_n(L(H,K) \mathbf{q}^s) \Big|_{L(H_{\mu_1+H_{\mu_2}+\dots+H_{\mu_j},C)} G_n^p} &= \\ = L(H_{\mu_1+H_{\mu_2}+\dots+H_{\mu_j},C)} F_n(L(H_{\mu_1+H_{\mu_2}+\dots+H_{\mu_j},C)} \mathbf{q}) (iN_{L(H_{\mu_1+H_{\mu_2}+\dots+H_{\mu_j},C)} v_n)^s, \\ L(H,K) F_n(L(H,K) \mathbf{S}^{p,(s)}) \Big|_{L(H_{\mu_1+H_{\mu_2}+\dots+H_{\mu_j},C)} G_n^p} &= \\ = L(H_{\mu_1+H_{\mu_2}+\dots+H_{\mu_j},C)} F_n(L(H_{\mu_1+H_{\mu_2}+\dots+H_{\mu_j},C)} \mathbf{q}) \times \\ \times (iN_{L(H_{\mu_1+H_{\mu_2}+\dots+H_{\mu_j},C)} v_n)^s L(H_{\mu_1+H_{\mu_2}+\dots+H_{\mu_j},C)} u_n^{p-s}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. ■

Следствие 3 теоремы 1

Для пространства сплайн – Виленкина – Крестенсона $L(H_\mu+H_\mu+\dots+H_\mu, C)G_n^p$, полученного из пространства Виленкина – Крестенсона $L(H_\mu + H_\mu + \dots + H_\mu, C)$, где $H := H_\mu + H_\mu + \dots + H_\mu$ и $K = C$ – поле комплексных чисел, а μ – произвольное целое число, справедливо:

$$L(H, K)S^{p, (s)}(t) \Big|_{L(H_\mu+H_\mu+\dots+H_\mu, C)G_n^p} = L(H_\mu+H_\mu+\dots+H_\mu, C)S^{p, (s)}(t).$$

Доказательство следствия 3 теоремы 1:

Пространство $L(H_\mu + H_\mu + \dots + H_\mu, C)$ есть частный случай пространства $L(H, K)$, а $L(H_\mu+H_\mu+\dots+H_\mu, C)G_n^p$ – частный случай пространства $L(H, K)G_n^p$, откуда и следует искомое утверждение, а $L(H, K)F_n(L(H, K)\mathbf{q}^s)$ и $L(H, K)F_n(L(H, K)\mathbf{S}^{p, (s)})$ в свою очередь равны:

$$\begin{aligned} & L(H, K)F_n(L(H, K)\mathbf{q}^s) \Big|_{L(H_\mu+H_\mu+\dots+H_\mu, C)G_n^p} = \\ & = L(H_\mu+H_\mu+\dots+H_\mu, C)F_n(L(H_\mu+H_\mu+\dots+H_\mu, C)\mathbf{q})(iN_{L(H_\mu+H_\mu+\dots+H_\mu, C)}\mathbf{v}_n)^s, \\ & L(H, K)F_n(L(H, K)\mathbf{S}^{p, (s)}) \Big|_{L(H_\mu+H_\mu+\dots+H_\mu, C)G_n^p} = L(H_\mu+H_\mu+\dots+H_\mu, C)F_n(L(H_\mu+H_\mu+\dots+H_\mu, C)\mathbf{q}) \times \\ & \times (iN_{L(H_\mu+H_\mu+\dots+H_\mu, C)}\mathbf{v}_n)^s L(H_\mu+H_\mu+\dots+H_\mu, C)\mathbf{u}_n^{p-s}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. ■

Следствие 4 теоремы 1

Для пространства сплайн-Крестенсона $L(H_\rho+H_\rho+\dots+H_\rho, C)G_n^p$, полученного из пространства Крестенсона $L(H_\rho + H_\rho + \dots + H_\rho, C)$, где $H = H_\rho + H_\rho + \dots + H_\rho$ и $K = C$ – поле комплексных чисел, а ρ – простое целое число, справедливо:

$$L(H, K)S^{p, (s)}(t) \Big|_{L(H_\rho+H_\rho+\dots+H_\rho, C)G_n^p} = L(H_\rho+H_\rho+\dots+H_\rho, C)S^{p, (s)}(t).$$

Доказательство следствия 4 теоремы 1:

Пространство $L(H_\rho + H_\rho + \dots H_\rho, C)$ есть частный случай пространства $L(H, K)$, а ${}_{L(H_\rho+H_\rho+\dots H_\rho, C)}G_n^p$ – частный случай пространства ${}_{L(H, K)}G_n^p$,

откуда и следует искомое утверждение, а ${}_{L(H, K)}F_n({}_{L(H, K)}\mathbf{q}^s)$ и ${}_{L(H, K)}F_n({}_{L(H, K)}\mathbf{S}^{p, (s)})$ в свою очередь равны:

$$\begin{aligned}
 {}_{L(H, K)}F_n({}_{L(H, K)}\mathbf{q}^s) \Big|_{{}_{L(H_\rho+H_\rho+\dots H_\rho, C)}G_n^p} &= {}_{L(H_\rho+H_\rho+\dots H_\rho, C)}F_n({}_{L(H_\rho+H_\rho+\dots H_\rho, C)}\mathbf{q}) \times \\
 &\times (iN_{{}_{L(H_\rho+H_\rho+\dots H_\rho, C)}\nu_n})^s. \\
 {}_{L(H, K)}F_n({}_{L(H, K)}\mathbf{S}^{p, (s)}) \Big|_{{}_{L(H_\rho+H_\rho+\dots H_\rho, C)}G_n^p} &= {}_{L(H_\rho+H_\rho+\dots H_\rho, C)}F_n({}_{L(H_\rho+H_\rho+\dots H_\rho, C)}\mathbf{q}) \times \\
 &\times (iN_{{}_{L(H_\rho+H_\rho+\dots H_\rho, C)}\nu_n})^s {}_{L(H_\rho+H_\rho+\dots H_\rho, C)}\mathbf{u}_n^{p-s}.
 \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. ■

Следствие 5 теоремы 1

Для пространства сплайн-экспоненциальных ${}_{L(H_N, C)}G_n^p$, полученного из пространства экспоненциальных функций $L(H_N, C)$, где $H := H_N$, $\mu = N$ и $K = C$, справедливо:

$${}_{L(H, K)}\mathbf{S}^{p, (s)}(t) \Big|_{{}_{L(H_N, C)}G_n^p} = {}_{L(H_N, C)}\mathbf{S}^{p, (s)}(t).$$

Доказательство следствия 5 теоремы 1:

Пространство $L(H_N, C)$ есть частный случай пространства $L(H, K)$, а ${}_{L(H_N, C)}G_n^p$ – частный случай пространства ${}_{L(H, K)}G_n^p$, откуда и следует искомое утверждение, а ${}_{L(H, K)}F_n({}_{L(H, K)}\mathbf{q}^s)$ и ${}_{L(H, K)}F_n({}_{L(H, K)}\mathbf{S}^{p, (s)})$ в свою очередь равны:

$$\begin{aligned}
 {}_{L(H, K)}F_n({}_{L(H, K)}\mathbf{q}^s) \Big|_{{}_{L(H_N, C)}G_n^p} &= {}_{L(H_N, C)}F_n({}_{L(H_N, C)}\mathbf{q})(iN_{{}_{L(H_N, C)}\nu_n})^s, \\
 {}_{L(H, K)}F_n({}_{L(H, K)}\mathbf{S}^{p, (s)}) \Big|_{{}_{L(H_N, C)}G_n^p} &= {}_{L(H_N, C)}F_n({}_{L(H_N, C)}\mathbf{q})(iN_{{}_{L(H_N, C)}\nu_n})^s {}_{L(H_N, C)}\mathbf{u}_n^{p-s}.
 \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. ■

Следствие 6

Для пространства сплайн-Галуа ${}_{L(H_{2^j}, GF(r^\nu))} G_n^p$, полученного из пространства Галуа $L(H_{2^j}, GF(r^\nu))$, где $H := H_{2^j}$ и $K = GF(r^\nu)$ – поле Галуа, $\nu = 1, j = 1, 2, \dots$, справедливо:

$${}_{L(H,K)} S^{p,(s)}(t) \Big|_{{}_{L(H_{2^j}, GF(r^\nu))} G_n^p} = {}_{L(H_{2^j}, GF(r^\nu), C)} S^{p,(s)}(t).$$

Доказательство следствия 6 теоремы 1:

Пространство $L(H_{2^j}, GF(r^\nu))$ есть частный случай пространства $L(H, K)$, а ${}_{L(H_{2^j}, GF(r^\nu))} G_n^p$ – частный случай пространства ${}_{L(H,K)} G_n^p$, откуда и следует искомое утверждение, а ${}_{L(H,K)} F_n({}_{L(H,K)} \mathbf{q}^s)$ и ${}_{L(H,K)} F_n({}_{L(H,K)} \mathbf{S}^{p,(s)})$ в свою очередь равны:

$$\begin{aligned} {}_{L(H,K)} F_n({}_{L(H,K)} \mathbf{q}^s) \Big|_{{}_{L(H_{2^j}, GF(r^\nu))} G_n^p} &= {}_{L(H_{2^j}, GF(r^\nu))} F_n({}_{L(H_{2^j}, GF(r^\nu))} \mathbf{q})(iN {}_{L(H_{2^j}, GF(r^\nu))} \nu_n)^s, \\ &= {}_{L(H_{2^j}, GF(r^\nu))} F_n({}_{L(H_{2^j}, GF(r^\nu))} \mathbf{q})(iN {}_{L(H_{2^j}, GF(r^\nu))} \nu_n)^s \Big|_{{}_{L(H_{2^j}, GF(r^\nu))} G_n^p} = \\ &= {}_{L(H_{2^j}, GF(r^\nu))} F_n({}_{L(H_{2^j}, GF(r^\nu))} \mathbf{q})(iN {}_{L(H_{2^j}, GF(r^\nu))} \nu_n)^s {}_{L(H_{2^j}, GF(r^\nu))} u_n^{p-s}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. ■

На основе теоремы 1 формулируется и доказывается теорема 2, которая дает возможность определить производную ВКФ.

Пусть

$$\begin{aligned} {}_{L(H,K)} S_1^p(t) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} {}_{L(H,K)} q_1(k) M^p(t \Theta i) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k {}_{L(H,K)} L^p(t \Theta t_k) \in \sigma^p; \\ {}_{L(H,K)} S_1^b(t) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} {}_{L(H,K)} q_1(k) M^b(t \Theta i) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k {}_{L(H,K)} L^b(t \Theta t_k) \in \sigma^b. \end{aligned}$$

Если два радиосигнала ${}_{L(H,K)}S_1^p(k)$ и ${}_{L(H,K)}S_2^b(k)$, имеющих порядки p и b соответственно, принадлежат пространству функций $L(H,K)$, заданных на абелевой группе H с областью значений в кольце K :

$${}_{L(H,K)}S_1^p(k), {}_{L(H,K)}S_2^b(k) \in L(H,K),$$

то функция ${}_{L(H,K)}B_{{}_{L(H,K)}S_1^p, {}_{L(H,K)}S_2^b}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} {}_{L(H,K)}S_1^p(k) {}_{L(H,K)}\bar{S}_2^b(k \ominus \tau)_{\mu}$ – является HK -взаимнокорреляционной (HK -ВКФ) функцией двух радиосигналов ${}_{L(H,K)}S_1^p(k)$ и ${}_{L(H,K)}S_2^b(k)$ [23, 24].

Если ${}_{L(H,K)}S_1^p(k) = {}_{L(H,K)}S_2^b(k)$, то функция

$$\begin{aligned} & {}_{L(H,K)}B_{{}_{L(H,K)}S_1^p, {}_{L(H,K)}S_2^b}(\tau) \Big|_{{}_{L(H,K)}S_2^b(k) = {}_{L(H,K)}S_1^p(k)} = \\ & = {}_{L(H,K)}B_{{}_{L(H,K)}S_1^p, {}_{L(H,K)}S_1^p}(\tau) = {}_{L(H,K)}B(\tau) \end{aligned}$$

есть HK -автокорреляционная функция радиосигнала ${}_{L(H,K)}S_1^p(k)$ [23, 24].

Теорема 2. Математическая модель спектра производной HK -ВКФ

Изображение s -й производной HK -ВКФ радиосигналов ${}_{L(H,K)}S_1^p(k)$ и ${}_{L(H,K)}S_2^b(k)$ есть s -я производная произведения спектров этих радиосигналов:

$$\begin{aligned} & {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}B_{{}_{L(H,K)}S_1^p(k), {}_{L(H,K)}S_2^b(k)}^{(s)}(\tau) \right) = {}_{L(H,K)}F_n(\mathbf{q}_B) (iN {}_{L(H,K)}v_n)^s {}_{L(H,K)}u_n^{p-s} = \\ & = \left({}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}S_1^p(k) \right) {}_{L(H,K)}\bar{F}_n \left({}_{L(H,K)}S_2^b(k) \right) \right) (iN {}_{L(H,K)}v_n)^s {}_{L(H,K)}u_n^{p-s} = \\ & = {}_{L(H,K)}u_n^p {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}q_1(k) \right) {}_{L(H,K)}\bar{u}_n^b {}_{L(H,K)} \times \\ & \times \bar{F}_n \left({}_{L(H,K)}q_2(k) \right) (iN {}_{L(H,K)}v_n)^s {}_{L(H,K)}u_n^{p-s} = \\ & = \frac{\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2p}}}{{}_{L(H,K)}u_n^p} {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}z_1(k) \right) \frac{\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2b}}}{{}_{L(H,K)}u_n^b} \times \\ & \times {}_{L(H,K)}\bar{F}_n \left({}_{L(H,K)}z_2(k) \right) (iN {}_{L(H,K)}v_n)^s \frac{{}_{L(H,K)}u_n^{p+b-s}}{\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2(p+b-s)}}}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2:

Используя результат теоремы 1, получаем:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & {}_{L(H,K)}B_{L(H,K)S_1^p, L(H,K)S_2^b}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_k {}_{L(H,K)}S_1^p(k) {}_{L(H,K)}\bar{S}_2^b(k \ominus \tau) \\
 & {}_{L(H,K)}S^p(t_k) *_{\mu} {}_{L(H,K)}S^b(t) = \sum_{t_k=0}^{N-1} {}_{L(H,K)}S^p(t_k) {}_{L(H,K)}S^b(t \ominus_{\mu} t_k) = \\
 & = \sum_{t_k=0}^{N-1} {}_{L(H,K)}q_k M^p(t_k) {}_{L(H,K)}a_k M^b(t \ominus_{\mu} t_k) = \\
 & = \sum_{t_k=0}^{N-1} {}_{L(H,K)}q_k {}_{L(H,K)}a_k M^{p+b}(t \ominus_{\mu} t_k) \in {}_{L(H,K)}G^{p+b}.
 \end{aligned}$$

где $*_{\mu}$ – знак, обозначающий свертку по модулю μ .

$$\begin{aligned}
 2) \quad & {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}B_{L(H,K)S_1^p(k), L(H,K)S_2^b(k)}^{(s)}(\tau) \right) = \\
 & = \left(\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} {}_{L(H,K)}B_{L(H,K)S_1^p(k), L(H,K)S_2^b(k)}^{(s)}(\tau) \bar{\chi}(n, \tau) \right) (iN {}_{L(H,K)}v_n)^s u_n^{p+b-s} = \\
 & = \left(\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} {}_{L(H,K)}S_1^p(k) {}_{L(H,K)}\bar{S}_2^b(k \ominus l) \bar{\chi}(n, l) \underbrace{\bar{\chi}(n, k) \chi(n, k)}_1 \right) \times \\
 & \quad \times (iN {}_{L(H,K)}v_n)^s {}_{L(H,K)}u_n^{p+b-s} = \\
 & = \left(\frac{1}{N} \sum_k {}_{L(H,K)}S_1^p(k) \bar{\chi}(n, k) \frac{1}{N} \sum_{\tau} {}_{L(H,K)}\bar{S}_2^b(k \ominus \tau) \chi(n \ominus_{\mu} \tau) \right) \times \\
 & \quad \times (iN {}_{L(H,K)}v_n)^s {}_{L(H,K)}u_n^{p+b-s} = \\
 & = {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}S_1^p(k) \right) {}_{L(H,K)}\bar{F}_n \left({}_{L(H,K)}S_2^b(k) \right) (iN {}_{L(H,K)}v_n)^s {}_{L(H,K)}u_n^{p+b-s} = \\
 & = {}_{L(H,K)}u_n^p {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}q_1(k) \right) {}_{L(H,K)}\bar{u}_n^b {}_{L(H,K)}\bar{F}_n \left({}_{L(H,K)}q_2(k) \right) \times \\
 & \quad \times (iN {}_{L(H,K)}v_n)^s {}_{L(H,K)}u_n^{p+b-s} = \\
 & = \frac{\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2p}}}{{}_{L(H,K)}u_n^p} {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}z_1(k) \right) \frac{\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2b}}}{{}_{L(H,K)}u_n^b} {}_{L(H,K)}\bar{F}_n \left({}_{L(H,K)}z_2(k) \right) \times \\
 & \quad \times (iN {}_{L(H,K)}v_n)^s \frac{{}_{L(H,K)}u_n^{p+b-s}}{\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2(p+b-s)}}}.
 \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. ■

Ниже для примера приведены несколько следствий теоремы 2.

Следствие 1 теоремы 2

При $s = 0$ получаем результат, представленный в [23, 24]:

$$\begin{aligned} {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}B_{L(H,K)S_1^p(k), L(H,K)S_2^b(k)}^{(s)}(\tau) \right) \Big|_{s=0} &= \frac{\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2p}}}{u_n^p} {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}z_1(k) \right) \times \\ &\times \frac{\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2b}}}{u_n^b} {}_{L(H,K)}\overline{F}_n \left({}_{L(H,K)}z_2(k) \right) \frac{u_n^{p+b}}{\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2(p+b)}}}. \end{aligned}$$

Доказательство следствия 1 теоремы 2:

$$\begin{aligned} & {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}B_{L(H,K)S_1^p(k), L(H,K)S_2^b(k)}^{(s)}(\tau) \right) \Big|_{s=0} = \\ &= {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}B_{L(H,K)S_1^p(k), L(H,K)S_2^b(k)}^{(0)}(\tau) \right) = \\ &= {}_{L(H,K)}F_n(\mathbf{q}_B) (iN_{L(H,K)}v_n)^0 u_n^{p+b-0} = \\ &= u_n^p {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}q_1(k) \right) u_n^b {}_{L(H,K)}\overline{F}_n \left({}_{L(H,K)}q_2(k) \right) u_n^{p+b} = \\ &= \frac{\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2p}}}{u_n^p} {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}z_1(k) \right) \frac{\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2b}}}{u_n^b} {}_{L(H,K)}\overline{F}_n \times \\ &\quad \times \left({}_{L(H,K)}z_2(k) \right) \frac{u_n^{p+b}}{\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2(p+b)}}}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. ■

Тем самым показано, что результат, представленный в [23, 24], является частным случаем представленной теоремы 2.

Следствие 2 теоремы 2

При $s = 0, b = p = 1$:

$$\begin{aligned} & {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}B_{L(H,K)S_1^p(k), L(H,K)S_2^b(k)}^{(s)}(\tau) \right) \Big|_{s=0, b=p=1} = \\ &= F_n \left({}_{L(H,K)}q_1(k) \right) {}_{L(H,K)}\overline{F}_n \left({}_{L(H,K)}q_2(k) \right) F_n(\mathbf{q}_B) = \\ &= {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}z_1(k) \right) {}_{L(H,K)}\overline{F}_n \left({}_{L(H,K)}z_2(k) \right). \end{aligned}$$

Доказательство следствия 2 теоремы 2:

$$\begin{aligned} {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}B_{L(H,K)S_1^p(k),L(H,K)S_2^b(k)}^{(s)}(\tau) \right) &= {}_{L(H,K)}F_n(\mathbf{q}_B)(iN_{L(H,K)}v_n)^s {}_{L(H,K)}u_n^{p+b-s} = \\ &= {}_{L(H,K)}u_n^p {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}q_1(k) \right) {}_{L(H,K)}\overline{u_n^b} {}_{L(H,K)}\overline{F_n} \left({}_{L(H,K)}q_2(k) \right) {}_{L(H,K)}u_n^{p+b-s}. \end{aligned}$$

Т.к. $u_n^p = u_n^b = 1$, то получаем:

$$\begin{aligned} {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}B_{L(H,K)S_1^p(k),L(H,K)S_2^b(k)}^{(s)}(\tau) \right) \Big|_{s=0,b=p=1} &= \\ &= {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}z_1(k) \right) {}_{L(H,K)}\overline{F_n} \left({}_{L(H,K)}z_2(k) \right). \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. ■

Тем самым показано, что результат, представленный в [25], является частным случаем представленной теоремы 2.

Следствие 3 теоремы 2

Изображение s -й производной НК-автокорреляционной функции определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}B_{L(H,K)S_1^p(k),L(H,K)S_1^p(k)}^{(s)}(\tau) \right) &= \\ &= \left| {}_{L(H,K)}u_n^p {}_{L(H,K)}F_n(\mathbf{q}) \right|^2 (iN_{L(H,K)}v_n)^s {}_{L(H,K)}u_n^{2p-s}. \end{aligned}$$

Доказательство следствия 3 теоремы 2:

$$\begin{aligned} {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}B_{L(H,K)S_1^p(k),L(H,K)S_1^p(k)}^{(s)}(\tau) \right) &= {}_{L(H,K)}F_n(qB)(iN_{L(H,K)}v_n)^s {}_{L(H,K)}u_n^{2p-s} = \\ &= {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}S_1^p(k) \right) {}_{L(H,K)}\overline{F_n} \left({}_{L(H,K)}S_1^p(k) \right) (iN_{L(H,K)}v_n)^s {}_{L(H,K)}u_n^{2p-s} = \\ &= \left| {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}S_1^p(k) \right) \right|^2 (iN_{L(H,K)}v_n)^s {}_{L(H,K)}u_n^{2p-s} = \\ &= \left| {}_{L(H,K)}u_n^p {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}q \right) \right|^2 (iN_{L(H,K)}v_n)^s {}_{L(H,K)}u_n^{2p-s} = \\ &= {}_{L(H,K)}D_n (iN_{L(H,K)}v_n)^s {}_{L(H,K)}u_n^{2p-s} = \\ &= \left| \frac{\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2p}}}{{}_{L(H,K)}u_n^p} {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}z_1(k) \right) \right|^2 (iN_{L(H,K)}v_n)^s \frac{{}_{L(H,K)}u_n^{2p-s}}{\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2(2p-s)}}}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. ■

Следствие 3.1 теоремы 2

При $s = 0$ получаем результат, представленный в [23, 24]:

$$\begin{aligned} {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}B^{(s)} \right. & \left. {}_{L(H,K)S_1^p(k), L(H,K)S_1^p(k)}(\tau) \right) \Big|_{s=0} = \left| {}_{L(H,K)}u_n^p {}_{L(H,K)}F_n(\mathbf{q}) \right|_{L(H,K)u_n^p}^2 = \\ & = \left| \frac{\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2p}}}{{}_{L(H,K)}u_n^p} {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}z_1(k) \right) \right|^2 \frac{{}_{L(H,K)}u_n^{2p}}{\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{4p}}}. \end{aligned}$$

Доказательство следствия 3.1 теоремы 2:

$$\begin{aligned} & {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}B^{(s)} \right. & \left. {}_{L(H,K)S_1^p(k), L(H,K)S_1^p(k)}(\tau) \right) \Big|_{s=0} = \\ & = {}_{L(H,K)}F_n \left(qB \right) (iN {}_{L(H,K)}v_n)^s {}_{L(H,K)}u_n^{2p-s} = \\ & = {}_{L(H,K)}F_n \left(qB \right) (iN {}_{L(H,K)}v_n)^0 {}_{L(H,K)}u_n^{2p-0} = \\ & = {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}S_1^p(k) \right) {}_{L(H,K)}\overline{F_n} \left({}_{L(H,K)}S_1^p(k) \right) {}_{L(H,K)}u_n^{2p} = \\ & = \left| {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}S_1^p(k) \right) \right|_{L(H,K)u_n^{2p}}^2 = \\ & = \left| {}_{L(H,K)}u_n^p {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}q \right) \right|_{L(H,K)u_n^{2p}}^2 = \\ & = \left| \frac{\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2p}}}{{}_{L(H,K)}u_n^p} {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}z_1(k) \right) \right|^2 \frac{{}_{L(H,K)}u_n^{2p}}{\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{4p}}}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. ■

Следствие 3.2 теоремы 2

При $s = 0, p = 1$ получаем результат, представленный в [23, 24].

$$\begin{aligned} & {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}B^{(s)} \right. & \left. {}_{L(H,K)S_1^p(k), L(H,K)S_1^p(k)}(\tau) \right) \Big|_{s=0, p=1} = \\ & = \left| {}_{L(H,K)}u_n^p {}_{L(H,K)}F_n(\mathbf{q}) \right|_{L(H,K)u_n^{2p}}^2 = \\ & = \left| F_n \left({}_{L(H,K)}\mathbf{q} \right) \right|^2 = \left| {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}z_1(k) \right) \right|^2, \end{aligned}$$

Доказательство следствия 3.2 теоремы 2:

$$\begin{aligned} & {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}B^{(s)}_{L(H,K)S_1^p(k), L(H,K)S_1^p(k)}(\tau) \right) \Big|_{s=0} = \\ & = \left| \frac{\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2p}}}{{}_{L(H,K)}u_n^p} {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}z_1(k) \right) \right|^2 \frac{{}_{L(H,K)}u_n^{2p}}{\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{4p}}}. \end{aligned}$$

при $p = 1$:

$${}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}B^{(s)}_{L(H,K)S_1^p(k), L(H,K)S_1^p(k)}(\tau) \right) \Big|_{s=0, p=1} = \left| {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}z_1(k) \right) \right|^2.$$

Что и требовалось доказать. ■

Теорема 2 позволяет получить математическую модель определения временной задержки радиосигнала, ретранслированного основным и смежным КА τ^s , в соответствии с выражением (1):

$$\tau^s = \arg[{}_{L(H,K)}B^{(1)}(\tau) = 0],$$

где

$${}_{L(H,K)}B^{(1)}(\tau) = F_n^{-1} \left(\begin{aligned} & \frac{\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2p}}}{{}_{L(H,K)}u_n^p} {}_{L(H,K)}F_n \left({}_{L(H,K)}z_1(k) \right) \frac{\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2b}}}{{}_{L(H,K)}u_n^b} \times \\ & \times {}_{L(H,K)}\overline{F}_n \left({}_{L(H,K)}z_2(k) \right) (iN_{L(H,K)}v_n)^s \frac{{}_{L(H,K)}u_n^{p+b-s}}{\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2(p+b-s)}}} \end{aligned} \right).$$

Точность определения временной задержки радиосигнала τ^s будет определяться гладкостями p и b (Таблица 1).

Пример реализации разработанных технических решений

Для иллюстрации разработанной модели выбран разностно-дальномерный метод оценки координат ЗС с использованием четырех малых КА на низких орбитах (НО), схема которого представлена на рисунке 2. Выбранная топология КА позволит определять координаты ЗС в трехмерном пространстве. Введены следующие обозначения: S_1 – основной КА; S_2, S_3, S_4 – смежные КА; I – ЗС, координаты которой необходимо определить; K – КРМ.

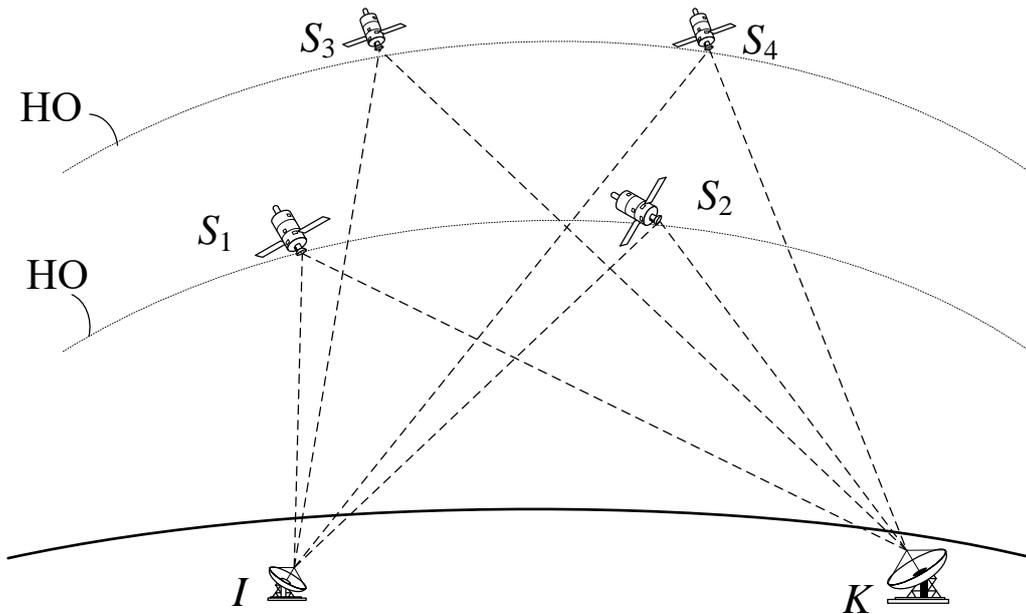


Рис. 2. Схема разностно-дальномерного метод оценки координат ЗС на базе четырех малых КА.

КРМ принимает одну и ту же реализацию радиосигнала ЗС I после ее ретрансляции каждым из четырех КА. Поскольку длины дистанций ЗС-КА-КРМ для каждого из КА разные, то одна и та же реализация радиосигнала ЗС I достигнет КРМ в различные моменты времени. Если взять за точку отчета время приема радиосигнала от основного КА S_1 , то в КРМ возможно измерить три временные задержки радиосигнала, ретранслированного основным и каждым из смежных КА $\tau_{1,2}, \tau_{1,3}, \tau_{1,4}$.

Оценка координат ЗС x_I, y_I, z_I сводится к составлению и решению системы квадратных уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{(x_{S_1} - x_I)^2 + (y_{S_1} - y_I)^2 + (z_{S_1} - z_I)^2} - \\ - \sqrt{(x_{S_2} - x_I)^2 + (y_{S_2} - y_I)^2 + (z_{S_2} - z_I)^2} = \tau'_{1,2}c, \\ \sqrt{(x_{S_1} - x_I)^2 + (y_{S_1} - y_I)^2 + (z_{S_1} - z_I)^2} - \\ - \sqrt{(x_{S_3} - x_I)^2 + (y_{S_3} - y_I)^2 + (z_{S_3} - z_I)^2} = \tau'_{1,3}c, \\ \sqrt{(x_{S_1} - x_I)^2 + (y_{S_1} - y_I)^2 + (z_{S_1} - z_I)^2} - \\ - \sqrt{(x_{S_4} - x_I)^2 + (y_{S_4} - y_I)^2 + (z_{S_4} - z_I)^2} = \tau'_{1,4}c, \end{cases}$$

где $x_{S_w}, y_{S_w}, z_{S_w}$ – декартовы координаты w -го КА; $w = 1-4$;

$\tau'_{1,2}, \tau'_{1,3}, \tau'_{1,4}$ – временные задержки, пересчитанные с учетом известных координат КА и КРМ так, если бы измерения проводились не в КРМ, а на КА;
 c – скорость распространения радиосигнала в свободном пространстве.

Указанную систему квадратных уравнений решают, например, итерационным методом Ньютона-Рафсона с разложением функций в ряды Тейлора с точностью до первых производных.

В качестве исходные данные выбраны следующие:

Координаты КРМ $\varphi_K = 47.2^\circ$ с.ш.; $\lambda_K = 39.7^\circ$ в.д.; $h_K = 39$ м, соответствующие координатам г. Ростов-на-Дону (выбраны так, чтобы они попадали в зону радиовидимости каждого из КА).

Координаты КА в географической системе координат (ГСК) и в декартовой системе координат (ДСК) представлены в таблице № 1.

Таблица 1 – Координаты КА в ГСК и в ДСК.

№ п/п	КА	Координаты КА в ГСК			Координаты КА в ДСК		
		$\varphi_S, ^\circ$	$\lambda_S, ^\circ$	$h_S, \text{ км}$	$x_S, \text{ км}$	$y_S, \text{ км}$	$z_S, \text{ км}$
1	S_1	51.6	39.2	400	3269.021	2667.148	5288.758
2	S_2	52.6	34.2	400	3411.778	2318.642	5361.396
3	S_3	50	29	400	3691.271	2496.389	5091.302
4	S_4	49	34	400	3820.536	2114.682	5167.732

Широты и долготы исследуемых координат предполагаемого размещения ЗС выбраны в соответствии с совместной ЗРВ всех четырех КА с градацией 1° . Высоты предполагаемого размещения ЗС в каждой из исследуемых точек выбраны равными 100 м.

Погрешности измерения координат каждого из КА $\sigma_S = 10$ м (для каждой их 3-х координат),

При указанных равных условиях, для определения временных задержек использованы три разные модели определения временных задержек

радиосигнала: конечных разностей; локальной производной; глобальной производной.

Для каждой из выбранных точек предполагаемого размещения ЗС провели следующие процедуры:

- для текущей точки размещения ЗС и каждого из трех смежных рассчитывали идеальные временные задержки, то есть такие, какие были бы измерены при нулевых погрешностях измерений;
- вводились погрешности измерения координат каждого из КА и измерения временных задержек (для каждой модели в отдельности) с учетом их нормального распределения;
- по полученным значениям временных задержек, используя вышеописанный метод рассчитывали координаты ЗС для текущей исследуемой точки;
- усредняли координаты ЗС по результатам 1000 экспериментов;
- сравнивали заданные и рассчитанные координаты ЗС, получали погрешность измерения (для каждой модели отдельно);
- по результатам расчета погрешностей для всех исследуемых точек предполагаемого размещения ЗС строили изолинии СКО оценки координат ЗС (в км) для разных моделей определения временных задержек радиосигнала (см. рисунок 3).

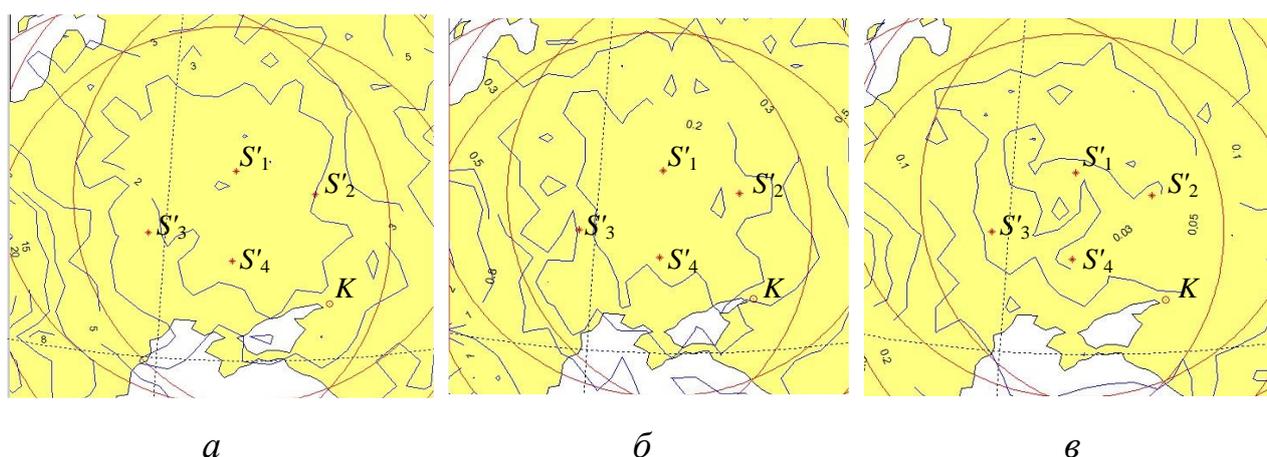


Рис. 3. Изолинии точностей оценки координат ЗС (в км) для разных моделей определения временных задержек радиосигнала: *a* – конечных разностей; *б* – локальной производной; *в* – глобальной производной

На рисунке 3 введены обозначения: S'_1, S'_2, S'_2, S'_4 – подспутниковые точки основного и смежных КА; K – КРМ; элементы красных окружностей – зоны радиовидимостей основного и смежных КА; синие ломанные линии – изолинии точностей оценки координат ЗС (в км).

Анализ изолиний точностей оценки координат ЗС, представленных на рисунке 3 показывает, что методы координатометрии земных станций с использованием модели локальной производной для определения временной задержки радиосигналов, ретранслированного основным и смежным КА могут давать выигрыш в точности оценки координат ЗС по сравнению с использованием модели конечных разностей на порядок. Использование же модели глобальной производной для определения временной задержки радиосигнала, ретранслированного основным и смежным КА может дать выигрыш в точности оценки координат ЗС еще на порядок.

Заключение

В статье сформулированы и доказаны теорема 1 и следствия к ней, представляющие собой математическую модель для производной радиосигнала. Тем самым показано, что результат для радиосигнала, представленный ранее в теоремах по теории САГА, является частным случаем представленной теоремы 1.

Теорема 1 дала возможность определить производную ВКФ двух радиосигналов. Этому посвящена теорема 2 и следствия из нее, сформулированные и доказанные в статье.

Анализ результатов, представленных в статье, показывает, что методы координатометрии земных станций с использованием модели локальной производной для определения временной задержки радиосигналов, ретранслированного основным и смежным КА могут давать выигрыш в точности оценки координат ЗС по сравнению с использованием модели конечных разностей на порядок. Использование же модели глобальной производной для определения временной задержки радиосигнала, ретранслированного основным

и смежным КА может дать выигрыш в точности оценки координат ЗС еще на порядок.

Литература

1. Волков Р.В., Севидов В.В., Чемаров А.О. Точность геолокации разностно-дальномерным методом с использованием спутников-ретрансляторов на геостационарной орбите // Известия СПбГЭТУ ЛЭТИ. – 2014. – №. 9. – С. 12.
2. Fokin G., Sevidov V. Model for 5G UDN Positioning System Topology Search Using Dilution of Precision Criterion // 2021 International Conference on Electrical Engineering and Photonics (EExPolytech). – IEEE, 2021. – С. 32-36.
3. Fokin G., Sevidov V. Topology Search Using Dilution of Precision Criterion for Enhanced 5G Positioning Service Area // 2021 13th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). – IEEE, 2021. – С. 131-136.
4. Волков Р.В., Саяпин В.Н., Севидов В.В. Модель измерения временной задержки и частотного сдвига радиосигнала, принятого от спутника-ретранслятора при определении местоположения земной станции // Т-Comm-Телекоммуникации и Транспорт. – 2016. – Т. 10. – №. 9. – С. 14-18.
5. Алберг Д. и др. Теория сплайнов и ее приложения: Пер. с англ. – Мир, 1972.
6. Schoenberg I.J. On spline functions. Inequalities. – N.Y.: Acad. Press, 1967.
7. Schoenberg I.J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part B. On the problem of osculatory interpolation. A second class of analytic approximation formulae // Quarterly of Applied Mathematics. – 1946. – Т. 4. – №. 2. – С. 112-141.
8. Schoenberg I.J. Cardinal interpolation and spline functions // Journal of Approximation theory. – 1969. – Т. 2. – №. 2. – С. 167-206.
9. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. – 1976.

10. Желудев В.А. Восстановление функций и их производных по сеточным данным с погрешностью при помощи локальных сплайнов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1987. – Т. 27. – №. 1. – С. 22-34.
11. Желудев В.А. Локальная сплайн-аппроксимация на равномерной сетке // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1987. – Т. 27. – №. 9. – С. 1296-1310.
12. Kamada M., Toraichi K., Mori R. Periodic spline orthonormal bases // Journal of Approximation theory. – 1988. – Т. 55. – №. 1. – С. 27-34.
13. Желудев В.А. Локальные сглаживающие сплайны с регулирующим параметром // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1991. – Т. 31. – №. 2. – С. 193-211.
14. Желудев В.А. Представление остаточного члена аппроксимации и точные оценки для некоторых локальных сплайнов // Математические заметки. – 1990. – Т. 48. – №. 3. – С. 54-65.
15. Желудев В.А. Операционное исчисление, связанное с периодическими сплайнами // Доклады Академии наук. – Российская академия наук, 1990. – Т. 313. – №. 6. – С. 1309-1315.
16. Zheludev V.A. Periodic splines and wavelets // Contemporary Mathematics. – 1995. – Т. 190. – С. 339-339.
17. Желудев В.А. Периодические сплайны и быстрое преобразование Фурье // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1992. – Т. 32. – №. 2. – С. 179-198.
18. Wahba G. Practical approximate solutions to linear operator equations when the data are noisy // SIAM journal on numerical analysis. – 1977. – Т. 14. – №. 4. – С. 651-667.
19. Wahba G. Smoothing noisy data with spline functions // Numerische mathematik. – 1975. – Т. 24. – №. 5. – С. 383-393.

20. Graven P., Wahba G. Smoothing noisy data with spline functions estimations the corrections degree of smooth by Cross Validation // Numerische mathematik. 1979. V.31 – pp. 377-403.
21. Агиевич С.Н., Алексеев А.А., Глушанков Е.И. Модели сигналов в базисах сплайнов дефекта 1 и оценивание параметров радиоизлучений // Вісті вищих учбових закладів. Радіоелектроніка. – 1995. – Т. 38. – №. 4. – С. 3-16.
22. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И. Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. Москва: Наука. – 1980.
23. Агиевич С.Н. Теоретические основы сплайн-алгебраического гармонического анализа сигналов систем радиосвязи // Информационные технологии. – 2012. – №. 8. – С. 58-63.
24. Агиевич С.Н., Дворников С.В., Тихонов С.С. Формирование и обработка радиосигналов в базисах функций сплайн-характеров.: Моногр. – СПб.: ВАС, 2015. – 224 с.
25. Вариченко Л.В., Лабунец В.Г., Раков М.А. Абстрактные алгебраические системы и цифровая обработка сигналов. Киев: Наукова думка, 1986. – 247 с.
26. Трахтман А.М. Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М: Советское радио. – 1972. – 352 с.
27. Трахтман А.М., Трахтман В.А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М: Советское радио. – 1975. – 208 с.

Для цитирования:

Севидов В.В. Математическая модель определения временной задержки радиосигнала, ретранслированного основным и смежным космическими аппаратами // Журнал радиоэлектроники. – 2025. – № 3. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.3.15>