

УДК 621.382.2

ПРОЦЕССЫ В ПОЛУПРОВОДНИКОВОМ ДИОДЕ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Д. В. Лосев, Д. С. Бардашов, А. Г. Быков

Томский государственный университет

Статья поступила в редакцию 21 апреля 2016 г.

Аннотация. В статье на основе применения методов теории функций комплексной переменной получено решение задачи об отклике полупроводникового р-п перехода на воздействие гармонического сигнала высокой частоты. Предложенное решение демонстрирует более точное описание переходных процессов (в частности уровней кратных гармоник исходного сигнала) по сравнению с классическим рассмотрением.

Ключевые слова: полупроводниковый р-п переход, переходные процессы, диффузионное приближение.

Abstract. The solution of the problem of the response of semiconductor p-n junction on the impact of the harmonic signal of high frequency is obtained in the work. The proposed solution was created by methods of complex variable functions theory. It demonstrates a more accurate description of transient processes (in particular, levels of multiple harmonics of the original signal) in comparison with classical consideration.

Key words: semiconductor p-n junction, transient processes, diffusion approximation.

Введение

Существующая теория взаимодействия полупроводникового р-п перехода с электромагнитным полем разработана, в основном, для случая приложенного постоянного напряжения после того, как переходные процессы завершились. В случае же быстро изменяющегося сигнала, когда влияние переходных процессов является определяющим, теория развита существенно слабее и

ограничивается случаями гармонического сигнала в приближении его малой амплитуды и бесконечной длительности [1] и исследованием процессов включения/ выключения или переключения диода при изменении полярности напряжения на противоположную [2].

Математическое описание переходных процессов состоит в решении дифференциальных уравнений классическим или операционным методом. Это сложная проблема, которая допускает решение только для простейших электрических цепей, в основном линейных. В случаях же цепей, содержащих большое количество элементов (особенно нелинейных), точный расчет становится невозможным, и поведение системы определяется лишь опытным путем.

В предлагаемой работе делается попытка более точного учета переходных процессов при воздействии на р-п переход гармонического сигнала высокой частоты.

Решение дифференциального уравнения

Для исследования процессов в диоде необходимо решать уравнение непрерывности в диффузионном приближении [1]

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = D_p \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2} - \frac{\Delta p}{\tau_p}.$$

Здесь рассматривается случай плоскостного несимметричного р-п перехода с полуограниченной базой, где $\Delta p(x, t)$ – избыточная концентрация дырок в базе, превышающая равновесную концентрацию p_n за счет приложенного электрического поля, D_p – коэффициент диффузии дырок, τ_p – время жизни дырок, определяющее среднюю длительность рекомбинационных процессов в базе. Используем условие на границе р-п перехода [1]

$$\Delta p(0, t) = p_n \cdot \left[e^{\frac{qu(t)}{kT}} - 1 \right], \quad (1)$$

где $u(t)$ – воздействующее на диод напряжение.

Решение поставленной краевой задачи легко получается с помощью метода интегральных преобразований:

$$\Delta p(x,t) = \int_0^t \frac{x e^{-\frac{t-\tau}{\tau_p}}}{2\sqrt{\pi D_p} (t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4D_p(t-\tau)}} p_n \left[e^{\frac{qu(\tau)}{kT}} - 1 \right] d\tau.$$

В диффузионном приближении плотность тока через р-п переход определяется его диффузионной составляющей [1]

$$j_p = -qD_p \left. \frac{\partial \Delta p}{\partial x} \right|_{x=0},$$

т.е.

$$j_p = -\frac{q\sqrt{D_p} p_n}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-(t-\tau)/\tau_p}}{(t-\tau)^{3/2}} \left[e^{\frac{qu(\tau)}{kT}} - 1 \right] d\tau. \quad (2)$$

Случай гармонического воздействующего сигнала

Исследуем теперь зависимость плотности тока от времени при воздействии на р-п переход гармонического сигнала

$$u(t) = u_m \sin \omega t, \quad (3)$$

период колебаний которого много меньше постоянной релаксации среды, роль которой играет время жизни дырок. Для этого случая непосредственное вычисление интеграла (2) численными методами приводит к неверному результату. Это связано со сложной структурой подынтегральной функции – быстрые осцилляции в показателе экспоненты соседствуют с особенностью в знаменателе на верхнем пределе, наличие больших (u_m, ω) и малых (t, τ_p) параметров не позволяет воспользоваться простыми асимптотическими приближениями. Непосредственное аналитическое вычисление интеграла наталкивается на отсутствие известных интегралов, хотя бы как-то соответствующих (2). Поэтому используем метод вычисления, основанный на применении интегрального преобразования Лапласа к интегралу (2), рассматриваемому как свертка оригиналов.

Применение прямого преобразования Лапласа к

$$V(t) = -\frac{2\sqrt{\pi}j_p}{q\sqrt{D_p}p_n} = \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-(t-\tau)/\tau_p} \left[e^{A \sin \omega \tau} - 1 \right] d\tau, \quad A = \frac{qu_m}{kT}. \quad (4)$$

дает

$$\bar{V}(s) = \bar{F}_1(s)\bar{F}_2(s),$$

где [3]

$$\bar{F}_1(s) = \int_0^\infty \frac{1}{\tau^{3/2}} e^{-\tau/\tau_p} e^{-s\tau} d\tau = -2\sqrt{\pi(s+1/\tau_p)},$$

$$\bar{F}_2(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} \left[e^{A \sin \omega \tau} - 1 \right] d\tau = \frac{2}{\omega^2} \sum_{k=1}^\infty \frac{s}{(s/\omega)^2 + k^2} J_k\left(\frac{kA\omega}{s}\right),$$

где $J_k(x)$ – функции Бесселя порядка k . Обратное преобразование Лапласа приводит к выражению

$$V(t) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}i\omega^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} \sqrt{s+1/\tau_p} \sum_{k=1}^\infty \frac{s}{(s/\omega)^2 + k^2} J_k\left(\frac{kA\omega}{s}\right) ds. \quad (5)$$

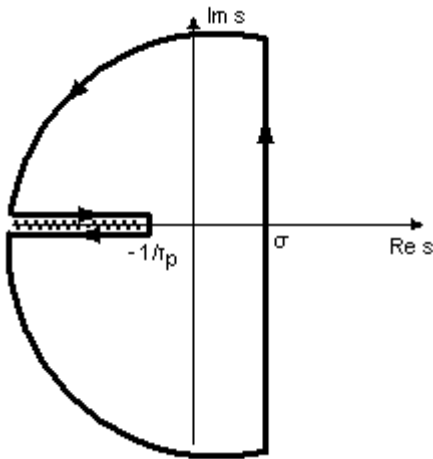


Рис. 1. Контур для вычисления интеграла (5).

Вычисление этого интеграла производится с помощью теории вычетов [4]. Замкнем контур так, как показано на рис. 1, и учтем, что интеграл по дуге бесконечно большого радиуса вследствие леммы Жордана равен нулю [4], а интегралы вдоль верхнего и нижнего берегов разреза, соединяющего точки ветвления $s = -1/\tau_p$ и $s = \infty$ многозначной функции $\sqrt{s+1/\tau_p}$,

проходятся в противоположных

направлениях, и значения квадратного корня отличаются знаком. Тогда, согласно теореме о вычетах, $V(t)$ равен сумме вычетов в полюсах первого

порядка $s = \pm ik\omega$

$$2\pi i \operatorname{Res}_{s=\pm ik\omega} e^{st} \bar{F}_1(s) \bar{F}_2(s) = -2\sqrt{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (\mp i)^k I_k(A) e^{\pm ik\omega t} \sqrt{\pm ik\omega + 1/\tau_p}, \quad (6)$$

в существенно особой точке $s = 0$ и удвоенного интеграла вдоль верхнего берега разреза, на котором принято арифметическое значение корня,

$$\frac{4}{\sqrt{\pi} i \omega^2} \int_{-\infty}^{-1/\tau_p} e^{st} \sqrt{s + 1/\tau_p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s}{(s/\omega)^2 + k^2} J_k\left(\frac{kA\omega}{s}\right) ds.$$

Последний интеграл с помощью замены $y = -\frac{s + 1/\tau_p}{\omega}$ приводится к удобной для численного интегрирования форме

$$-\frac{4e^{-t/\tau_p} \sqrt{\omega}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{y} e^{-y\omega t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k [y + 1/(\omega\tau_p)]}{[y + 1/(\omega\tau_p)]^2 + k^2} J_k\left(\frac{kA\omega}{y + 1/(\omega\tau_p)}\right) dy.$$

Подчеркнем, что в отличие от интеграла (2) данный интеграл не содержит особенности на промежутке интегрирования и, благодаря быстро убывающей экспоненциальной функции, допускает быстрое и устойчивое к погрешностям численное интегрирование.

Для вычисления вычета в существенно особой точке необходимо разложить подынтегральную функцию в (5) в ряд Тейлора и выделить коэффициенты при степени s^{-1} . В приближении $\omega\tau_p \gg 1$ последовательно получаем:

$k = 1$.

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{A\omega}{2}\right)^3 \frac{1}{2\sqrt{\tau_p}} \left(t + \frac{1}{2}\tau_p\right) + \left(\frac{A\omega}{2}\right)^5 \frac{1}{12\sqrt{\tau_p}} \left(\frac{t^3}{6} + \frac{\tau_p^3}{16} + \frac{t^2\tau_p}{4} - \frac{1}{8}\tau_p^2 t - \frac{2t + \tau_p}{2\omega^2}\right) + \dots \approx \\ & \approx \frac{\tau_p^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{A\omega}{2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{A\omega\tau_p}{2}\right)^{2m} \frac{(-1)^m \Gamma(2m - 3/2)}{m!(m+1)!\Gamma(2m)}. \end{aligned}$$

$k = 2$.

$$\begin{aligned} & (A\omega)^2 \frac{1}{8\sqrt{\tau_p}} - (A\omega)^4 \frac{1}{24\sqrt{\tau_p}} \left(-\frac{\tau_p^2}{8} - \frac{1}{(2\omega)^2} + \frac{t^2}{2} + \frac{t\tau_p}{2} \right) + \\ & + (A\omega)^6 \frac{1}{192\sqrt{\tau_p}} \left(\frac{t^4}{24} - \frac{5\tau_p^4}{128} + \frac{1}{(2\omega)^4} + \frac{t\tau_p^3}{16} + \frac{t^3\tau_p}{12} - \frac{t^2\tau_p^2}{16} + \frac{\tau_p^2 - 4t^2}{8(2\omega)^2} \right) + \dots \approx \\ & \approx -\frac{(A\omega)^2}{8\sqrt{\pi\tau_p}} \sum_{m=0}^{\infty} (A\omega\tau_p)^{2m} \frac{(-1)^m \Gamma(2m-1/2)}{m!(m+2)!\Gamma(2m+1)}. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, приходим к выражению для вычета в форме

$$\begin{aligned} 2\pi i \operatorname{Res}_{s=0} e^{st} \bar{F}_1(s) \bar{F}_2(s) = R = & \frac{2}{\omega^2 \tau_p^{5/2}} \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{kB}{2} \right)^{2m+k} \frac{(-1)^m}{m!(k+m)!} \cdot \right. \\ & \left. \frac{\Gamma(2m+k-5/2)}{\Gamma(2m+k-1)} - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{B}{2} \right)^{2m+1} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \frac{\Gamma(2m-3/2)}{\Gamma(2m)} \right\}, \end{aligned}$$

где $B = A\omega\tau_p$.

Полученные ряды слишком сложны для точного вычисления, поэтому сделаем небольшое приближение

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(2m+k-5/2)}{\Gamma(2m+k-1)} & \approx \frac{\Gamma(2m+k-2)}{\Gamma(2m+k-1)} = \frac{1}{2m+k-2} \quad (\text{для } k \geq 3), \\ \frac{\Gamma(2m+k-5/2)}{\Gamma(2m+k-1)} & \approx \frac{\Gamma(2m+k-5/2)}{\Gamma(2m+k-3/2)} = \frac{1}{2m+k-5/2} \quad (\text{для } k < 3). \end{aligned}$$

Тогда, используя очевидное тождество $\frac{x^\alpha}{\alpha} = \int_0^x x^{\alpha-1} dx$, можно представить

вычет в виде

$$\begin{aligned} R = & \frac{2}{\omega^2 \tau_p^{5/2}} \left\{ \left(\frac{B}{2} \right)^2 \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(k+m)!} \int_0^{kB/2} x^{2m+k-3} dx + \right. \\ & \left. + \sqrt{2} \left(\frac{B}{2} \right)^{5/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+2)!} \int_0^B x^{2m-3/2} dx - \left(\frac{B}{2} \right)^{5/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \int_0^{B/2} x^{2m-5/2} dx - \frac{B}{3} \right\}. \end{aligned}$$

Меняя порядки суммирования и интегрирования и используя формулу [3]

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{m!(k+m)!} = x^{-k} J_k(2x),$$

получаем

$$R = \frac{2}{\omega^2 \tau_p^{5/2}} \left\{ \left(\frac{B}{2} \right)^2 \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \int_0^{kB/2} x^{-3} J_k(2x) dx + \right. \\ \left. + \sqrt{2} \left(\frac{B}{2} \right)^{5/2} \int_0^B x^{-7/2} J_2(2x) dx - \left(\frac{B}{2} \right)^{5/2} \int_0^{B/2} x^{-7/2} J_1(2x) dx - \frac{B}{3} \right\}.$$

Не совершая большой погрешности, заменим верхний предел интегралов на бесконечный, и воспользуемся формулой [5]

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} J_k(2x) dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha+k}{2}\right) / \Gamma\left(1 + \frac{k-\alpha}{2}\right).$$

Тогда

$$R = \frac{1}{\omega^2 \tau_p^{5/2}} \left\{ \left(\frac{B}{2} \right)^2 \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k/2-1)}{\Gamma(k/2+2)} + \sqrt{2} \left(\frac{B}{2} \right)^{5/2} \frac{\Gamma(-1/4)}{\Gamma(13/4)} - \left(\frac{B}{2} \right)^{5/2} \frac{\Gamma(-3/4)}{\Gamma(11/4)} - \frac{B}{3} \right\}.$$

Производя замену индекса суммирования $l = k - 3$, используя основное свойство гамма-функции $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ и выражение для ряда [3]

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l+1)(l+3)(l+5)} = -\frac{5}{96},$$

а также значения $\Gamma(1/4) = 3.625$, $\Gamma(3/4) = 1.225$ [6], окончательно получаем

$$R = \frac{1}{\omega^2 \tau_p^{5/2}} \left\{ \left(\frac{B}{2} \right)^2 \frac{5}{48} + \left(\frac{B}{2} \right)^{5/2} \left(\frac{1}{6} \Gamma(1/4) - \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma(3/4) \right) - \frac{B}{3} \right\} \approx -0.1A^{5/2} \sqrt{2\omega}.$$

Численный расчет показывает [7], что при выполнении условия $\omega\tau_p \gg 1$ преимущественный вклад в $V(t)$ дает сумма вычетов (6), и

$$V(t) \approx -4\sqrt{\pi} \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-i)^k I_k(A) e^{ik\omega t} \sqrt{ik\omega + 1/\tau_p} \right],$$

где $I_k(A)$ – модифицированная функция Бесселя [6].

Пренебрегая малым слагаемым $1/\tau_p$ в последнем выражении и учитывая,

что $\sqrt{ik\omega} = \sqrt{k\omega/2}(1+i)$, $(-i)^k e^{ik\omega t} = \cos k[\omega t - \pi/2] + i \sin k[\omega t - \pi/2]$,

его можно представить как

$$V(t) \approx -4\sqrt{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} I_k(A) \sqrt{k\omega/2} (\cos k[\omega t - \pi/2] - \sin k[\omega t - \pi/2]),$$

а плотность тока (2), протекающего через диод –

$$j_p \approx 2q\sqrt{D_p} p_n \sqrt{\omega} \sum_{k=1}^{\infty} I_k(A) \sqrt{k} \cos(k[\omega t - \pi/2] + \pi/4). \quad (7)$$

Численное моделирование и анализ результатов

На рис. 2 представлена рассчитанная с помощью пакета Mathcad зависимость для сигнала (3). При этом использованы значения $u_m = 10kT/q = 0.25 \text{ В}$, $\omega = 50 \text{ ГГц}$, $D_p = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$, $\tau_p = 1 \text{ мкс}$, $p_n = 2 \cdot 10^8 \text{ м}^{-3}$. Также для сравнения штриховой линией указана статическая характеристика диода, пропорциональная (1), в которой напряжение u заменено на сигнал (3). Для удобства восприятия она умножена на масштабный множитель $\sqrt{\omega\tau_p}/4$.

Отметим прежде всего существенную роль переходных процессов при быстром переключении диода, за счет чего зависимость приобретает сложный функциональный вид. При изменении полярности приложенного сигнала с положительной на отрицательную в начале имеет место резкий отрицательный выброс тока, который затем стремится к значению тока насыщения. Этот эффект давно известен, и ему дается следующее объяснение [2]: при быстром переключении дырки не успевают рекомбинировать, и поэтому обратный ток, который обычно мал за счет незначительного количества неосновных для n -области носителей заряда, в этом случае имеет существенную величину. Постепенно избыток дырок в n -области уменьшается за счет рекомбинации и вытекания в p -область, и обратный ток приходит к своему статическому, малому значению. Поскольку в момент прохождения импульса $p-n$ переход пропускает ток в обе стороны практически одинаково и фактически не обладает выпрямляющими свойствами, то площади под кривыми в верхней и нижней полуплоскостях приблизительно равны.

Также интерес вызывает существенное увеличение значения тока по сравнению с низкочастотным сигналом (на величину порядка $\sqrt{\omega\tau_p}$, при используемых параметрах приблизительно в 200 раз). Здесь имеет место похожая трактовка [2]: за счет наличия большого количества носителей заряда, не успевающих рекомбинировать, повышается удельная проводимость полупроводника $\sigma = q(n\mu_n + p\mu_p)$, (μ_n, μ_p – подвижности электронов и дырок), и, согласно закону Ома, плотность тока.

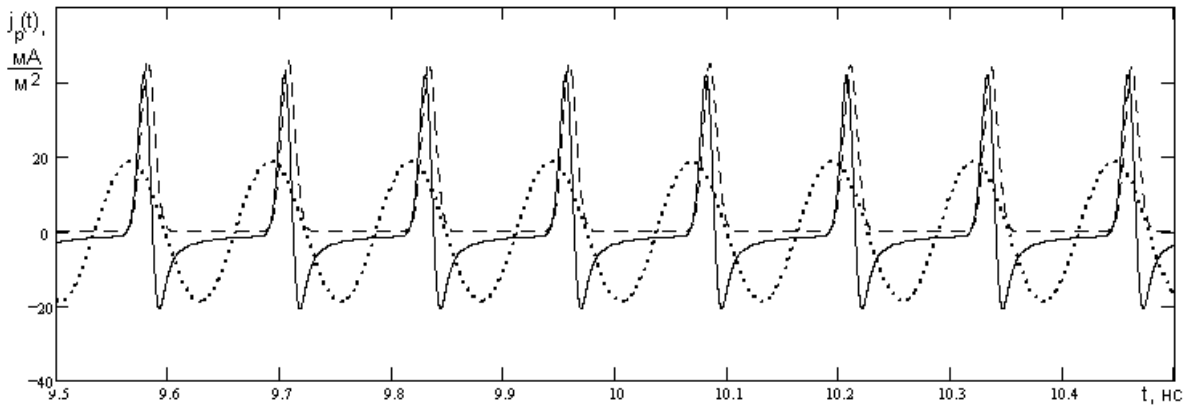


Рис. 2. Зависимость $j_p(t)$ для сигнала (3).

В заключение сравним представленное решение (7) с классическим решением, изложенным, например, в [1]. Оно получено методом комплексных амплитуд в предположении малости амплитуды воздействующего сигнала, в результате чего можно ограничиться линейными членами ряда Тейлора для экспоненты

$$e^{\frac{qu_m \sin \omega t}{kT}} \approx 1 + \frac{qu_m \sin \omega t}{kT}.$$

Приведем результат для сигнала (3) при условии $\omega\tau_p \gg 1$:

$$j_p \approx \frac{q\mu_p p_n u_m}{\sqrt{D_p}} \sqrt{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right), \quad (8)$$

что совпадает с решением (7) при достаточно малых $A = \frac{qu_m}{kT}$, для которых можно считать $I_k(A) \approx (A/2)^k / k!$. При этом учтено соотношение Эйнштейна

$D_p = kT\mu_p/q$. Таким образом, классическое решение (8) справедливо только при очень малых величинах входного сигнала $u_m \ll 0.026 V$ (при этом $A \ll 1$). При более высоких уровнях сигнала проявляются гармоники на кратных частотах, благодаря чему зависимость обостряется и теряет гармоническую форму.

Результат расчета по формуле (8), умноженный на $\sqrt{\omega\tau_p}/4$, также показан на рис. 2 пунктирной линией.

Таким образом, применение методов теории функции комплексной переменной позволяет точнее описывать характеристики полупроводниковых приборов при различных видах воздействующего сигнала.

Литература

1. Гаман В.И. Физика полупроводниковых приборов: Учебное пособие. – Томск: Изд-во НТЛ, 2000. – 426 с.
2. Носов Ю.Р. Полупроводниковые импульсные диоды. – М.: Сов. радио, 1965.–224 с.
3. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-лит., 1981. – 800 с.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука. Гл. ред. физ. -мат. лит. 1973. – 749 с.
5. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. – 753 с.
6. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
7. Быков А.Г., Лосев Д.В., Бардашов Д.С. Нелинейные свойства полупроводникового диода в импульсном режиме // Сборник статей IV Всероссийской научно-технической конференции «Электроника и микроэлектроника СВЧ». СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2015, Т. 2. – С.16-20.