

УДК 621.391.01

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК БЛОКОВЫХ ТУРБО-КОДОВ НА ОСНОВЕ НИЗКОПЛОТНОСТНЫХ КОДОВ КОНЕЧНЫХ ГЕОМЕТРИЙ

Л. Е. Назаров, П. В. Шишкин

Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова
РАН, 141190, Московская область, г. Фрязино, пл. академика Введенского, д.1

Статья поступила в редакцию 16 апреля 2018 г.

Аннотация. Приведены результаты исследований характеристик блочных турбо-кодов, формируемых с использованием составляющих низкоплотностных кодов на основе конечных геометрий (Евклидова геометрия, проективная геометрия). Показано, что при приеме этих турбо-кодов можно применить алгоритмы итеративного приема, разработанные для общего класса низкоплотностных кодов. Даны результаты моделирования алгоритмов итеративного приема для ряда рассматриваемых турбо-кодов.

Ключевые слова: помехоустойчивые низкоплотностные коды, блочные турбо-коды, Евклидова геометрия, проективная геометрия.

Abstract. The theme of this paper is investigation of the characteristics of error-correcting block turbo-codes which enable communication at relatively low received signal/noise and provide very high power efficiency. Specific feature of investigated turbo-codes is construction with application of low-density parity-check codes (LDPC) and these turbo-codes are LDPC too. According to this fact the considered block turbo-codes have symbol-by-symbol decoding algorithms developed for common class LDPC codes, namely, BP (belief propagation) and BP modification (mBP) decoding algorithms. The BP and mBP decoding algorithms are iterative and for implementation the signal/noise is not required. The resulted characteristics of block turbo-codes constructed with application of LDPC based on finite Euclidean and projective geometries (namely, duration of code words, information volume, code rate, error performances) are presented. These component LDPC codes are

cyclic and have encoding and decoding algorithms with low complexity implementation. The computer simulations for encoding and iterative decoding algorithms for the number of turbo-codes with different code rate and information volumes are performed. The results of computer simulations have shown that the mBP decoding algorithm is more effective than BP decoding algorithm (difference between signal/noise is more 0.2 dB). The simulations have shown that the error performances of investigated turbo-codes are better than that for convolutional codes with equivalent code rate 1/3, the degradation is about 2 dB for bit-error 0.00001.

Key words: block product codes, low-density parity-check codes, iterative decoding.

Введение

Помехоустойчивые (корректирующие ошибки) коды используются для повышения надежности передачи информации по проводным и беспроводным каналам [1]. Кодовые конструкции под общим названием блочные турбо-коды (БТК) рассматриваются как одни из наиболее эффективных относительно вероятностных характеристик и сложности алгоритмов приема [2]. Эти турбо-коды являются базовыми для ряда стандартов, например, для IESS-15, IESS-315, IESS-316e (спутниковые системы связи Intelsat), для стандарта широкополосного доступа IEEE 802.16.

Рассматриваемые БТК формируются на основе последовательного объединения составляющих блочных кодов [2]. Суть алгоритмов приема БТК - декомпозиция оптимального правила приема на совокупность этапов обработки, соответствующих составляющим блочным кодам, что приводит к существенному упрощению результирующих процедур приема [2,3].

Класс составляющих блочных кодов ограничен - используются блочные коды Хэмминга, простые коды с обобщенной проверкой на четность [2-4]. Актуальной является проблема разработки и исследования характеристик БТК на основе составляющих кодов из других классов с простыми алгоритмами формирования и приема, в частности, для класса составляющих блочных низкоплотностных кодов на основе конечных геометрий [1,5,6]. Для этих кодов

известны алгоритмы формирования и приема, характеризуемые низкой сложностью реализации [1,5-7].

1. Постановка задачи

Кодовые слова блочного турбо-кода на основе составляющих двоичных кодов C_1 , C_2 с параметрами (n_1, k_1, d_1) и (n_2, k_2, d_2) эквивалентны двумерной матрице [1,2]. Строки матрицы - кодовые слова кода C_1 , столбцы матрицы - кодовые слова кода C_2 . Здесь n, k, d - длительность, информационный объем и минимальный вес Хэмминга кодовых слов составляющих кодов. Длительность кодовых слов БТК равна $N = n_1 n_2$, объем информационного блока $K = k_1 k_2$, минимальный вес Хэмминга $D_{\text{мин}} = d_1 d_2$, кодовая скорость $R = \frac{K}{N}$.

Алгоритмы оптимального приема сигналов, соответствующих помехоустойчивым кодам, основаны на вычислении множества 2^K корреляций входной реализации с этими сигналами [1,6]. Для $K \gg 1$ исполнение алгоритмов оптимального приема представляет трудноразрешимую проблему.

Для рассматриваемых турбо-кодов, формируемых с использованием простых составляющих блочных кодов (коды Хэмминга, коды с обобщенной проверкой на четность) разработаны алгоритмы итеративного приема [2-7]. По отношению к оптимальному приему эти алгоритмы имеют существенно меньшую сложность реализации при незначительных энергетических потерях. Итерация итеративного приема включает два этапа. На первом этапе на основе отсчетов входной реализации и априорных вероятностей относительно кодовых символов вычисляются апостериорные вероятности приема для символов кода C_1 (прием по горизонтали) [2, 8]. Функционалы от вычисленных апостериорных вероятностей принимаются как априорные вероятности для кодовых символов и используются на втором этапе итерации при вычислении апостериорных вероятностей символов кода C_2 (прием по вертикали). После выполнения задаваемого числа итераций принимаются решения относительно

кодовых символов БТК с использованием вычисленных апостериорных символьных вероятностей.

Анализ и моделирование алгоритмов итеративного приема рассматриваемых БТК показали их эффективность относительно вероятностных характеристик по сравнению с известными схемами помехоустойчивого кодирования, включая сверточные коды [9]. При увеличении информационных объемов $K = k_1 k_2$ достигаются вероятностные характеристики при приеме, близкие к предельным теоретическим характеристикам [5].

Для БТК, формируемых с использованием составляющих низкоплотностных кодов, можно применить алгоритмы итеративного приема, разработанные для общего класса низкоплотностных кодов. Обоснование этого утверждения основано на том факте, что данные БТК также входят в класс низкоплотностных кодов [1]. Ниже рассматриваются составляющие низкоплотностные коды конечных геометрий (Евклидова геометрия, проективная геометрия) [1,10], которые являются циклическими кодами и характеризуются низкой сложностью алгоритмов формирования и итеративного приема.

Суть задачи - разработка и исследование вероятностных характеристик алгоритмов итеративного приема БТК, формируемых с использованием составляющих низкоплотностных кодов на основе конечной Евклидовой геометрии и конечной проективной геометрии. Приведены описания алгоритмов итеративного приема данных кодовых конструкций и результаты их компьютерного моделирования при наличии канального аддитивного белого гауссовского шума (АБГШ)

2. Низкоплотностные коды конечных геометрий и БТК на их основе

Ниже приведены описания и свойства низкоплотных кодов на основе конечной Евклидовой геометрии и конечной проективной геометрии.

Пусть $EG(m, 2^s)$ - m -мерная конечная Евклидова геометрия над полем $GF(2^s)$, m, s - положительные целые числа [1]. Эта геометрия содержит 2^{ms} точек в виде векторов с m компонентами поля $GF(2^s)$. $EG(m, 2^s)$ содержит $2^{(m-1)s}(2^{ms} - 1)/(2^s - 1)$ линий с 2^s точками в своем составе.

Геометрия $EG(m, 2^s)$ рассматривается как расширение поля $GF(2^{ms})$ над $GF(2^s)$ [1,10]. Пусть α - примитивный элемент поля $GF(2^{ms})$, множество $0, \alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^{2^{ms}-2}$ эквивалентно 2^{ms} точкам геометрии $EG(m, 2^s)$. Пусть α^i, α^j - линейно независимые точки, множество точек, задаваемых соотношениями $\{\alpha^i + \beta\alpha^j; \beta \in GF(2^s)\}$, определяет линию (линия инцидентности), проходящую через 1 и α^i . Пусть $H_{EG}(m, s)$ - матрица с элементами из $GF(2)$, строки которой эквивалентны линиям инцидентности геометрии $EG(m, 2^s)$. Эта матрица является проверочной матрицей низкоплотностного кода геометрии $EG(m, 2^s)$, она содержит $J = (2^{(m-1)s} - 1)/(2^s - 1)$ строк и $n = 2^{ms} - 1$ столбцов. Строки и столбцы матрицы $H_{EG}(m, s)$ имеют вес Хэмминга $J_N = 2^s$ и $J_D = (2^{ms} - 1)/(2^s - 1) - 1$.

Низкоплотностные коды Евклидовой геометрии $EG(m, 2^s)$ являются циклическими кодами с порождающим многочленом $g_{EG}(x)$ [1]. Длина кодовых слов равна $n = 2^{ms} - 1$, минимальный вес Хэмминга $d \geq J_D + 1$, размерность k определяется степенью порождающего многочлена $g_{EG}(x)$. Пусть α - примитивный элемент поля $GF(2^{ms})$, элемент α^h является корнем $g_{EG}(x)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие [1]:

$$0 < \max_{0 \leq l < s} \left(W_{2^s}(h^{(l)}) \right) \leq (m-1)(2^s - 1). \quad (1)$$

$$W_{2^s}(h) = \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{m-1}, \quad (2)$$

$$h = \delta_0 + \delta_1 2^s + \dots + \delta_{m-1} 2^{(m-1)s}, \quad 0 \leq \delta_i < 2^s, 0 \leq i < m. \quad (3)$$

Здесь $0 \leq \delta_i < 2^s$, $0 \leq i < m$ - коэффициенты при разложении (3) показателя степени h элемента α ; $h^{(l)}$ - остаток величины $h2^l$ по модулю $(2^{ms} - 1)$.

Приведем описание класса низкоплотностных кодов проективной геометрии $PG(m, 2^s)$ над полем $GF(2^s)$. Пусть α - примитивный элемент поля $GF(2^{(m+1)s})$, являющийся расширением поля $GF(2^s)$. Рассмотрим элемент

$\beta = \alpha^n$, здесь $n = \frac{2^{(m+1)s} - 1}{2^s - 1}$. Порядок элемента β равен $(2^s - 1)$, множество

элементов $\{0, 1, \beta, \dots, \beta^{2^s-2}\}$ представляет поле $GF(2^s)$. Рассмотрим

множество элементов $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$ и разбиение поля $GF(2^{(m+1)s})$ на непересекающиеся подмножества $(\alpha^i) = \{\alpha^i, \beta\alpha^i, \dots, \beta^{2^s-2}\alpha^i\}$, $0 \leq i < n$.

Геометрия $PG(m, 2^s)$ содержит n точек, эквивалентных элементам (α^i) в виде вектора с $(m+1)$ компонентами поля $GF(2^s)$. Множество точек $(\eta_1\alpha^i + \eta_2\alpha^j)$ определяет линию, проходящую через линейно независимые точки $(\alpha^i), (\alpha^j)$.

Здесь η_1, η_2 - элементы поля $GF(2^s)$, не равные нулю одновременно. В составе

$PG(m, 2^s)$ находятся $J = \frac{(2^{(m+1)s} - 1)(2^{ms} - 1)}{(2^s + 1)(2^s - 1)^2}$ линий, содержащих $2^s + 1$ точек

в своем составе. Пусть $H_{PG}(m, s)$ матрица над полем $GF(2)$, строки которой эквивалентны векторам инцидентности линий геометрии $PG(m, 2^s)$. Матрица $H_{PG}(m, s)$ является проверочной матрицей низкоплотностного кода геометрии $PG(m, 2^s)$, она содержит J строк и n столбцов. Строки и столбцы $H_{PG}(m, s)$ имеют вес Хэмминга $J_N = 2^s + 1$ и $J_D = (2^{ms} - 1)/(2^s - 1)$.

Низкоплотностные коды на основе конечной проективной геометрии $PG(m, 2^s)$ с проверочной матрицей $H_{PG}(m, s)$ являются циклическими и определяются порождающим многочленом $g_{PG}(x)$. Пусть α - примитивный элемент поля $GF(2^{(m+1)s})$, элемент α^h ($0 < h < 2^{(m+1)s} - 1$, h кратно $2^s - 1$) является корнем $g_{PG}(x)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$0 < \max_{0 \leq l < s} (W_{2^s}(h^{(l)})) \leq j(2^s - 1). \quad (4)$$

Здесь $0 \leq j \leq m - 1$, $h^{(l)}$ - остаток деления $h2^l$ на $(2^{(m+1)s} - 1)$; вес $W_{2^s}(h^{(l)})$ определяется соотношениями (2), (3).

Таблица 1. Параметры низкоплотностных кодов $EG(m, 2^s)$ и $PG(m, 2^s)$ (α - примитивный элемент поля $GF(2^{ms})$).

$(m, 2^s)$	n	k	d	J_N	J_D	Показатели степеней α^i
EG $(2, 2^2)$	15	7	5	4	4	1,3
EG $(2, 2^3)$	63	37	9	8	8	1,3,5,7,21
PG $(3, 2^2)$	21	11	6	5	5	1,3,9
PG $(3, 2^3)$	73	45	10	9	9	7,21,35

Таблица 2. Параметры блочных турбо-кодов, формируемых с использованием низкоплотностных кодов $EG(m, 2^s)$ и $PG(m, 2^s)$.

Составляющий код	N	K	$D_{\text{мин}}$	J_N	J_D	R
EG $(2, 2^2)$	225	49	25	4	8	0.22
EG $(2, 2^3)$	3969	1369	81	8	16	0.34
PG $(3, 2^2)$	441	121	36	5	10	0.27
PG $(3, 2^3)$	5329	2025	100	9	18	0.38

В таблице 1 приведены параметры n, k, d, J_N, J_D , а также показатели степеней примитивного элемента α для порождающих многочленов $g_{EG}(x)$ и $g_{PG}(x)$, полученные с использованием соотношений (1)-(4) для ряда кодов Евклидовой геометрии $EG(m, 2^s)$ и проективной геометрии $PG(m, 2^s)$ [7]. В таблице 2 приведены параметры N, K, D_{\min}, J_N, J_D для БТК на основе этого ряда низкоплотностных кодов.

Приведем описание алгоритма итеративного приема ВР (belief propagation) низкоплотностных кодов [5,6,10].

Обозначим $H = (h_{li}; 0 \leq l < n - k; 0 \leq i < n)$ проверочную матрицу низкоплотностного кода (n, k) , n - длительность кодовых слов $\vec{B} = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$, k - размерность кода. Пусть $\vec{Y} = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ - дискретная реализация с выхода демодулятора сигналов, поступающая на вход декодера, отсчеты реализации \vec{Y} задаются в виде $y_i = s_i + n_i$, где s_i - сигнальные составляющие, n_i - помеховые составляющие, $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Введем обозначение $\vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ - последовательность “жестких” решений, т.е. $x_i = 0$ при условии $y_i \geq 0$ и $x_i = 1$ в противном случае.

Рассматриваемые низкоплотностные коды на основе конечных геометрий обладают свойством организации множества ортогональных проверочных соотношений для каждого кодового символа b_i кодовых слов \vec{B} [1,6]. Пусть $N(m) = (i : h_{mi} = 1)$ - множество номеров позиций кодовых символов объемом $J_N(m)$, образующих m -е проверочное соотношение; $N(m)/l$ - множество $N(m)$ без l -го символа; $D(l) = (m : h_{ml} = 1)$ - множество проверочных ортогональных соотношений относительно кодового символа b_l объемом $J_D(l)$; $D(l)/m$ - множество ортогональных проверок $D(l)$ без m -ой проверки. Для рассматриваемых низкоплотностных кодов выполняются условия $J_N(m) = J_N$ и $J_D(l) = J_D$ для всех m, l .

Алгоритм итеративного приема ВР использует описание низкоплотных кодов в виде двуслойного графа Таннера, задаваемого проверочной матрицей H [11]. Вершины первого слоя графа соответствуют кодовым символам, вершины второго слоя ортогональным проверочным соотношениям. На рис.1 в качестве примера приведен вид графа, соответствующего низкоплотному EG коду $(15,7)$ с параметрами $J_N = J_D = 4$.

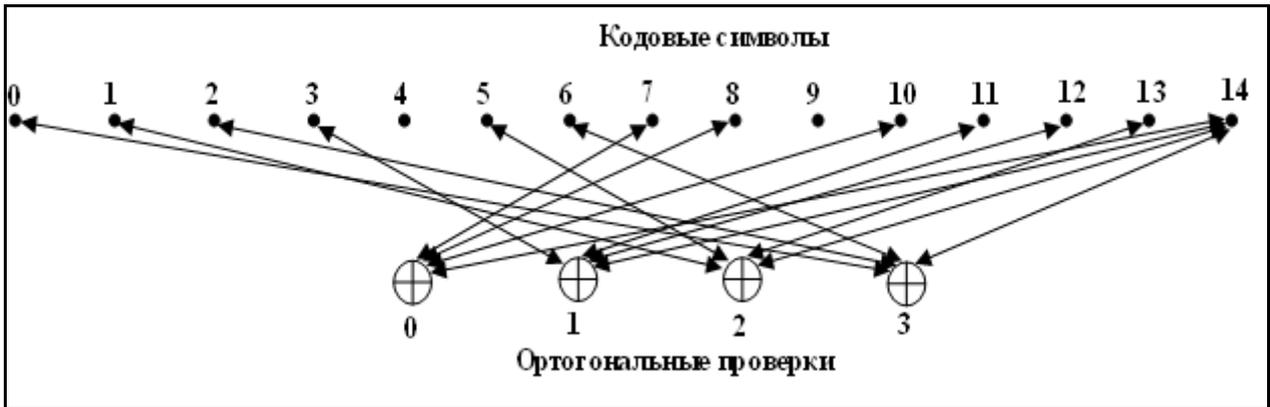


Рис.1. Вид графа Таннера для низкоплотного кода $EG(2,2^2)$ с параметрами $J_N = J_D = 4$ (\oplus - сложение в поле $GF(2)$).

Алгоритм ВР включает инициализацию и три этапа обработки при выполнении итерации [1,6,10].

Инициализация. Устанавливаются начальные значения величин $z_{mi} = y_i, m \in J_D(i); i = 0, 1, \dots, n - 1$.

Шаг 1. Вычисляются “жесткие” решения

$$\sigma_{mi} = \begin{cases} 1, & z_{mi} > 0, \\ 0, & z_{mi} \leq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Для каждой ортогональной проверки m вычисляются величины σ_m, L_{mi}

$$\sigma_m = \sum_{i \in N(m)} \sigma_{mi} \pmod{2}, \quad (5)$$

$$L_{mi} = (-1)^{\sigma_m \oplus \sigma_{mi} \oplus 1} \min_{i' \in N(m)/i} (|z_{mi'}|). \quad (6)$$

Шаг 2. На основе значений L_{mi} вычисляются величины z_{mi} для последующей итерации

$$z_{mi} = y_i + \sum_{m' \in D(i)/m} L_{m'i} \quad (7)$$

Шаг 3. При невыполнении требуемого числа итераций выполняется шаг 1 последующей итерации, иначе принимается решение относительно передаваемых кодовых символов b_i с использованием величин z_i

$$z_i = y_i + \sum_{m \in D(i)} L_{mi} \quad (8)$$

Принимается решение $b_i = 0$, если $z_i \geq 0$, иначе $b_i = 1$.

Приведенный алгоритм итеративного приема ВР осуществляет параллельное использование величин L_{ml} для вычисления значений z_{ml} при реализации соотношения (8), т.е. на шаге 1 вычисляется полное множество $\{L_{ml}\}$ и после этого реализуется шаг 2. Модификация этого алгоритма (m-ВР) заключается в реализации последовательного использования величин L_{ml} при вычислении z_{ml} , т.е. шаг 2 реализуется после вычисления очередного значения L_{ml} , $l = 0, 1, \dots, n-1$, не требуя вычисления полного множества $\{L_m\}$. В этом случае не требуется дополнительной памяти для хранения полного множества $\{L_{ml}\}$, что упрощает сложность технической реализации алгоритма m-ВР по отношению к исходному алгоритму ВР.

При реализации итерации алгоритмов приема ВР и m-ВР объем требуемых вычислительных операций определяется вычислением выражений (4)-(8) и оценивается общим соотношением $V_{BP} \cong 4J_D J_N n$. При этом объем требуемой памяти равен $\Pi_{BP} \cong 3J_D J_N n$ и $\Pi_{mBP} \cong 2J_D J_N n$.

Рассматриваемые турбо-коды, формируемые с использованием низкоплотностных кодов с параметрами J_N и J_D , входят в класс низкоплотностных кодов с параметрами J_N и $2J_D$ [1], поэтому при их приеме можно применять алгоритмы ВР и m-ВР.

3. Результаты моделирования

На рис.2-6 приведены результаты компьютерного моделирования алгоритмов итеративного приема ВР и m-ВР для ряда БТК на основе низкоплотностных EG и PG кодов, параметры которых приведены в таблице 2. Кривые на этих рисунках соответствуют зависимостям вероятности ошибки на бит P_6 от параметра сигнал/помеха $\frac{E_6}{N_0}$ при наличии АБГШ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Здесь E_6 - энергия сигналов на информационный бит. Число испытаний при моделировании ограничивалось достижением не менее 1000 ошибок.

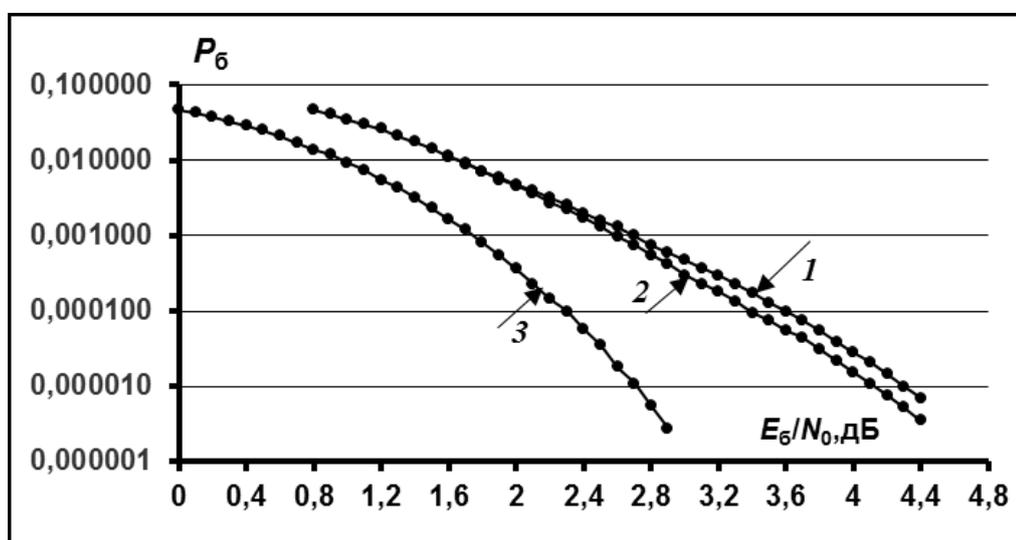


Рис.2. Вероятности ошибки на бит итеративного приема БТК на основе низкоплотностного EG кода (15,7) (длина кодовых слов $N = 225$, размерность $K = 49$, $D_{\text{мин}} = 25$, кодовая скорость $R = 0.22$, пятьдесят итераций): 1 – алгоритм итеративного приема ВР; 2 - алгоритм итеративного приема m-ВР; 3 – граница случайного кодирования.

На рис.2 приведены вероятности P_6 для БТК на основе низкоплотностного EG кода (15,7) (длина кодовых слов $N = 225$, размерность $K = 49$, $D_{\text{мин}} = 49$, кодовая скорость $R = 0.22$). Кривая 1 соответствует алгоритму ВР, кривая 2 соответствует алгоритму итеративного приема m-ВР. Кривая 3 соответствует известной границе P_6 случайного

кодирования [1,9] для данного турбо-кода, которая показывает существование кода с параметрами (N, K) с граничными вероятностными характеристиками

$$P_{out} \leq \frac{D_{\text{МИН}}}{N} \exp(-NE_r(R)), \quad (9)$$

$$R = \frac{LnK}{N}, \quad (10)$$

$$E_r(R) = \max_{0 \leq \rho \leq 1} \max_Q (E_0(\rho, Q) - \rho R), \quad (11)$$

$$E_0(\rho, R) = -Ln \left(\sum_{j=0}^1 \left[\sum_{k=0}^1 Q(k) (Pr(j|k))^{1/(1+\rho)} \right]^{(1+\rho)} \right). \quad (12)$$

Здесь $Q(0) = Q(1) = 0.5$, переходные вероятности $Pr(j|k)$ определяются вероятностями ошибки для дискретно-непрерывного канала АБГШ.

Видно, что применение алгоритма m-ВР определяет энергетический выигрыш до 0.1 дБ по отношению к алгоритму приема ВР. Подобные результаты относительно энергетического выигрыша до 0.1...0.2 дБ при использовании алгоритма m-ВР по отношению к алгоритму ВР получены также и для других рассматриваемых БТК, параметры которых приведены в таблице 2. Видно также, что вероятностная кривая 2 для алгоритма приема m-ВР близка к теоретической границе P_{σ} случайного кодирования - для $P_{\sigma} = 10^{-5}$ различие не превышает 1.4 дБ.

На рис.3 приведены вероятности ошибки P_{σ} при использовании алгоритма m-ВР для рассматриваемого БТК на основе низкоплотного EG кода (15,7). Кривые соответствуют применению пяти (кривая 1), десяти (кривая 2) и пятидесяти итераций (кривая 3). Видно, что увеличение числа итераций приводит к уменьшению вероятностей ошибки P_{σ} при фиксированном значении $\frac{E_{\sigma}}{N_0}$ - при $\frac{E_{\sigma}}{N_0} = 4.1$ дБ вероятность $P_{\sigma} = 0.00001$ для пятидесяти итераций, вероятность $P_{\sigma} = 0.00004$ для десяти итераций и $P_{\sigma} = 0.000072$ для

пяти итераций. Увеличение числа итераций, превышающем пятьдесят, не приводит к дальнейшему уменьшению вероятности ошибки P_b .

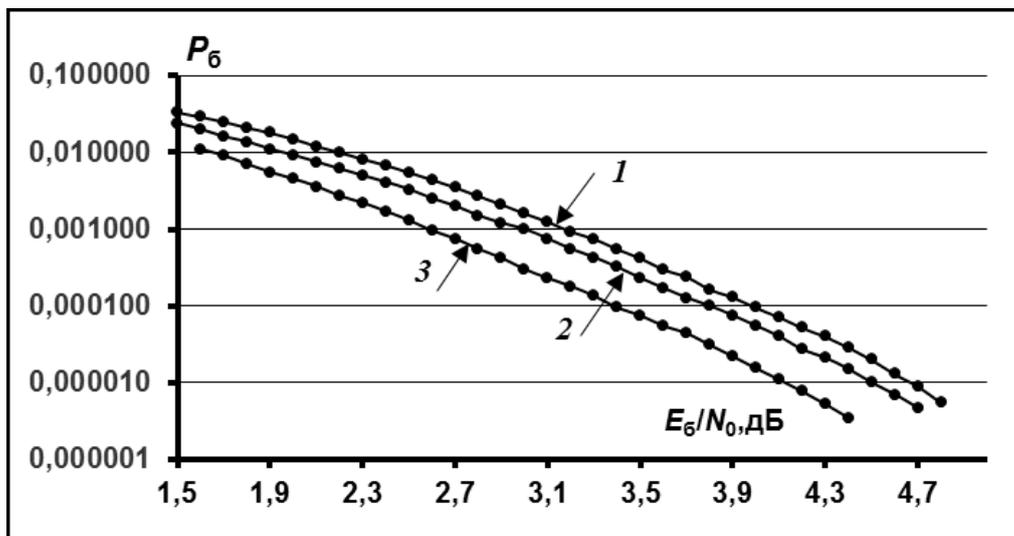


Рис.3. Вероятности ошибки на бит для БТК на основе низкоплотного EG кода (15,7) при использовании алгоритма приема m-ВР (длина кодовых слов $N = 225$, размерность $K = 49$, $D_{\text{мин}} = 25$, кодовая скорость $R = 0.22$): 1 - пять итераций; 2 - десять итераций; 3 - пятьдесят итераций.

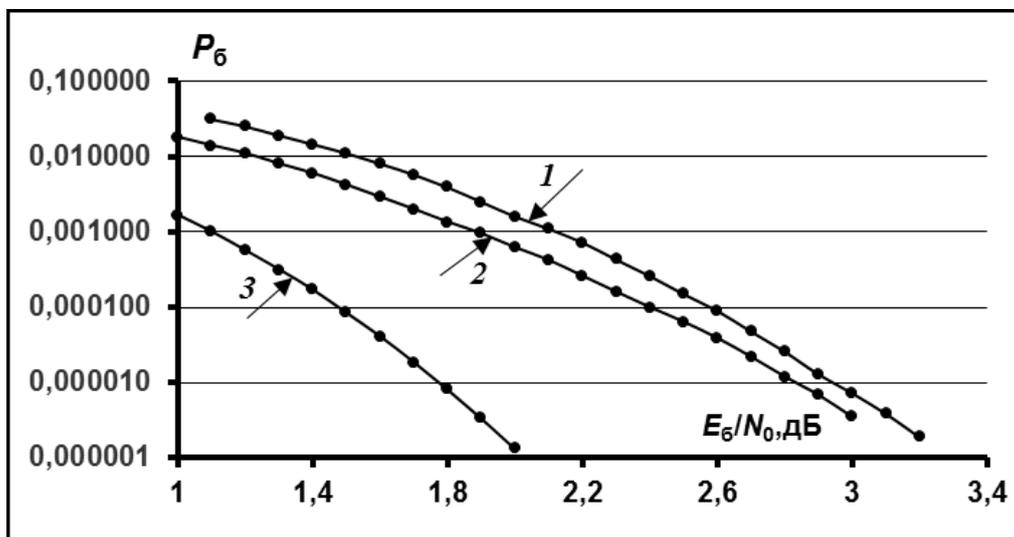


Рис.4. Вероятности ошибки на бит для БТК на основе низкоплотного PG кода (21,11) при использовании алгоритма приема m-ВР (длина кодовых слов $N = 441$, размерность $K = 121$, $D_{\text{мин}} = 36$, кодовая скорость $R = 0.27$): 1 - десять итераций; 2 - пятьдесят итераций; 3 - граница вероятности ошибки.

На рис.4 приведены вероятности P_b для БТК на основе низкоплотного PG кода (21,11) (длина кодовых слов $N = 3969$,

размерность $K = 1369$, $D_{\text{мин}} = 36$, кодовая скорость $R = 0.34$). Кривые 1 и 2 соответствуют применению десяти и пятидесяти итераций алгоритма приема m-ВР. Для десяти итераций значение $P_6 = 10^{-5}$ достигается при $\frac{E_6}{N_0} = 3.0$ дБ, для пятидесяти итераций достигается при $\frac{E_6}{N_0} = 2.85$ дБ. Кривая 3 соответствует границе P_6 случайного кодирования для данного турбо-кода - для $P_6 = 10^{-5}$ различие вероятностной кривой 2 по отношению к границе случайного кодирования не превышает 1.15 дБ.

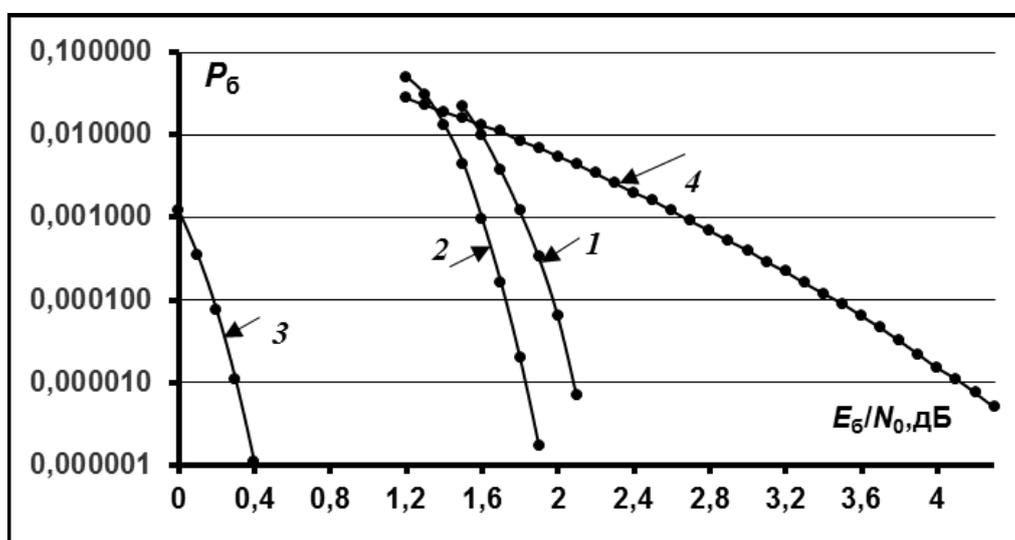


Рис.5. Вероятности ошибки на бит для БТК на основе низкоплотного EG кода (63,37) при применении алгоритма приема m-ВР (длина кодовых слов $N = 3969$, размерность $K = 1369$, $D_{\text{мин}} = 81$, кодовая скорость $R = 0.34$): 1 - десять итераций; 2 - пятьдесят итераций; 3 - граница вероятности ошибки; 4 - вероятность ошибки для сверточного кода с кодовой скоростью $1/3$, алгоритм приема Витерби.

На рис.5 приведены вероятности P_6 для БТК на основе низкоплотного EG кода (63,37) (длина кодовых слов $N = 3969$, размерность $K = 1369$, $D_{\text{мин}} = 81$, кодовая скорость $R = 0.34$). Кривые 1 и 2 соответствуют реализации десяти и пятидесяти итераций алгоритма приема m-ВР. Кривая 3 соответствует границе P_6 случайного кодирования для данного БТК. Видно, что вероятностные кривые близки к теоретической границе - для

$P_b = 10^{-5}$ и реализации пятидесяти итераций различие не превышает 1.5 дБ. В этом случае вероятность ошибки $P_b = 10^{-5}$ достигается при $\frac{E_b}{N_0} = 1.8$ дБ. Кривая 4 соответствует сверточному коду с эквивалентной кодовой скоростью $R = 1/3$ (длина кодового ограничения 7, алгоритм приема Витерби) [9]. Для $P_b = 10^{-5}$ и реализации пятидесяти итераций энергетический выигрыш рассматриваемого БТК по отношению к сверточному коду составляет 2.4 дБ.

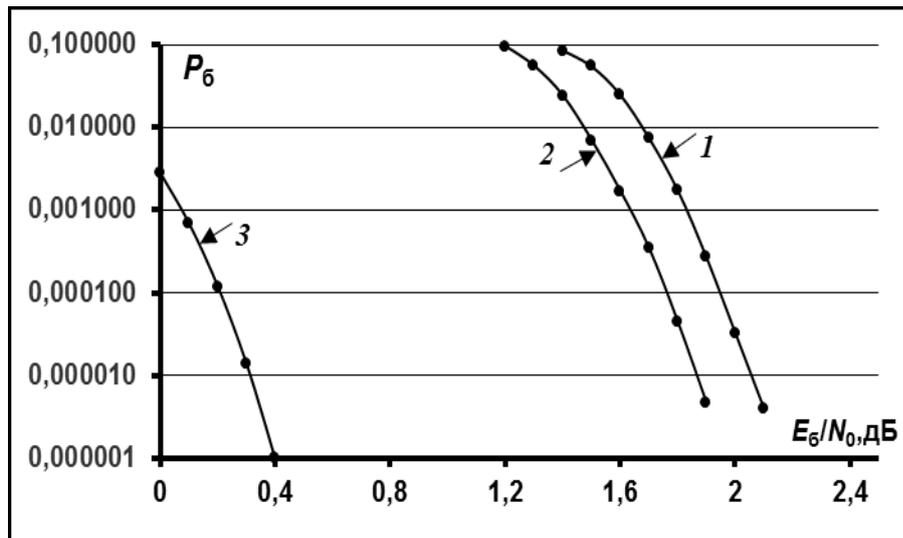


Рис.6. Вероятности ошибки на бит для БТК на основе низкоплотного PG кода (73,45) при применении алгоритма приема m-ВР (длина кодовых слов $N = 5329$, размерность $K = 2025$, $D_{\text{мин}} = 100$, кодовая скорость $R = 0.38$): 1 - десять итераций; 2 - пятьдесят итераций; 3 - граница вероятности ошибки.

На рис.6 приведены вероятности P_b для БТК на основе низкоплотного PG кода (73,45) (длина кодовых слов $N = 3969$, размерность $K = 1369$, $D_{\text{мин}} = 100$, кодовая скорость $R = 0.38$). Кривые 1 и 2 соответствуют реализации десяти и пятидесяти итераций алгоритма итеративного приема m-ВР, кривая 3 соответствует границе P_b случайного кодирования для данного БТК. Вероятностные кривые 1, 2 близки к теоретической границе 3 - для $P_b = 10^{-5}$ и реализации пятидесяти итераций различие не превышает 1.15 дБ. В этом случае вероятность ошибки $P_b = 10^{-5}$

достигается при $\frac{E_b}{N_0} = 1.85$ дБ, что практически совпадает с вероятностными характеристиками наиболее эффективного низкоплотного кода AR4J с кодовой скоростью $1/2$ и с параметрами (4096,2048) в составе класса помехоустойчивых кодов CCSDS, рекомендованных для использования в спутниковых системах связи.

Заключение

Приведены результаты исследований блоковых турбо-кодов, особенностью которых является то, что они формируются на основе составляющих низкоплотных кодов и также являются низкоплотными кодами. Вследствие этого при их приеме можно применить алгоритмы итеративного приема, разработанные для общего класса низкоплотных кодов, в частности, алгоритм ВР и его модификацию m-ВР.

Приведены результирующие характеристики рассматриваемых БТК (длительность кодовых слов, информационный объем, минимальный вес Хэмминга, кодовая скорость, вероятностные характеристики при приеме), формируемых с использованием ряда составляющих низкоплотных кодов на основе конечной Евклидовой геометрии и проективной геометрии, которые входят в класс циклических кодов и характеризуются низкой сложностью алгоритмов формирования и итеративного приема.

Для ряда рассматриваемых БТК проведено моделирование алгоритмов приема ВР и m-ВР, при их использовании не требуется знание относительно значений энергетического параметра сигнал/помеха. Путем моделирования показано, что алгоритм m-ВР более эффективен по сравнению с алгоритмом ВР (энергетический выигрыш достигает $0.1 \dots 0.2$ дБ).

Путем компьютерного моделирования показано, что энергетический выигрыш для БТК по отношению к сверточному коду с эквивалентной кодовой скоростью $R \approx 1/3$ для $P_b = 10^{-5}$ составляет 2.4 дБ.

Разработка эффективных алгоритмов итеративного приема БТК на основе низкоплотностных кодов конечных геометрий и сравнительный анализ их вероятностных характеристик с характеристиками рассмотренных алгоритмов приема ВР и m-ВР представляет перспективное направление исследований.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №16-07-00746).

Литература

1. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. М.: Мир. 1976. 594 с.
2. Pyndiah R.M. "Near-optimum decoding of product-codes: block turbo-codes". // IEEE Transactions on Communications. 1998. Vol.46. No.8. P.1003-1010.
3. Назаров Л.Е., Головкин И.В. Реализация алгоритмов итеративного приема блочных турбо-кодов. // Цифровая обработка сигналов. 2009. № 2. С. 2-6.
- 4 Назаров Л.Е., Батанов В.В., Кузнецов О.О. Алгоритмы итеративного посимвольного приема блочных турбо-кодов на основе кодов с проверкой на четность. // Журнал радиоэлектроники. 2014. №9. Режим доступа <http://jre.cplire.ru/jre/sep14/1/text.pdf>.
5. MacKay D.J.C., Neal R.M. Near Shannon limit performance of low density parity check codes. // Electronics Letters. 1997. V,33. P.457-458.
6. Johnson S.J. Iterative Error Correction: Turbo, Low-Density Parity-Check and Repeat-Accumulate Codes. Cambridge: Univ. Press, 2010.
7. Назаров Л.Е., Щеглов М.А. Характеристики полных и укороченных помехоустойчивых низкоплотностных кодов на основе конечных геометрий. // Успехи современной радиоэлектроники. 2017. №6. Стр. 23-30.
8. Головкин И.В., Назаров Л.Е. Разработка и реализация алгоритмов итеративного декодирования блочных турбо-кодов. Алгоритмы посимвольного приема сигналов. // // Цифровая обработка сигналов. 2009. № 4. С. 37-40.
9. Зюко А.Г., Фалько А.И., Панфилов И.П., Банкет В.Л., Иващенко П.В. Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации. М.: Радио и связь. 1985.

10. Liu Z., Pados D.A. A decoding algorithms for finite-geometry LDPC codes. // IEEE Transactions on Communications. 2005. V. 53. N 3. P.415-421.
11. Tanner R.M. A recursive approach to low complexity codes. // IEEE Transactions on Information Theory. 1981. V.27. N 9. P. 533-547.
12. Назаров Л.Е., Щеглов М.А. Вероятностные характеристики итеративного приема дискретных сигналов на основе помехоустойчивых блочных низкоплотностных кодов. // Журнал радиоэлектроники. 2015. №4. <http://jre.cplire.ru/jre/apr15/5/text.pdf>.

Для цитирования:

Л. Е. Назаров, П. В. Шишкин. Исследование вероятностных характеристик блочных турбокодов на основе низкоплотностных кодов конечных геометрий. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2018. № 5. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/may18/1/text.pdf>
DOI 10.30898/1684-1719.2018.5.1