DOI: https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.5.2
УДК: 537.87

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ИСТОЧНИКОВ ВБЛИЗИ ГЛАДКОЙ ВЫПУКЛОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

М.В. Инденбом

Всероссийский научно-исследовательский институт радиотехники
105082, Москва, Б. Почтовая, 22

Статья поступила в редакцию 25 ноября 2022 г.

Аннотация. Получены приближенные асимптотические выражения для электромагнитного поля, создаваемого источниками в виде поверхностных магнитных и электрических токов, расположенных вблизи произвольной гладкой выпуклой проводящей поверхности вращения большого размера. Выражения справедливы в приповерхностном слое толщиной порядка длины волны и имеют вид суммы ряда азимутальных гармоник и интеграла по непрерывному спектру собственных функций поля. Коэффициенты ряда выражены интегралами от произведения заданного распределения источников с собственными функциями. Для собственных функций методом параболического уравнения получены как общие интегральные представления, так и замкнутые выражения через функции Эйри, равномерные для случая поверхности вращения с одним полюсом. Выражения поля учитывают неразделимость полного поля на сумму полей E- и H-типа, равномерно справедливы в приповерхностном слое поверхности, исключая окрестности полюсов поверхности вращения, и не имеют разрывов на каустиках поверхностных лучей. Полученные выражения применены для расчета взаимных проводимостей кольцевых щелей на полубесконечной и гладко усеченной конической поверхностях. Проведено сравнение численных результатов, полученных предлагаемым и строгим методами для полубесконечного конуса. Показано, что в случае синфазных кольцевых щелей в полубесконечном конусе полученное асимптотическое выражение для взаимной проводимости совпадает с главным членом асимптотики строгого решения на основе метода собственных функций.

Ключевые слова: электромагнитное поле, поверхность вращения, равномерная асимптотика, параболические уравнения, электрический ток, магнитный ток, собственные функции, функции Эйри, кольцевые щели, взаимные проводимости.

Автор для переписки: Инденбом Михаил Вульфович, mindenbom@mail.ru

Введение

Электромагнитное поле заданных источников, расположенных во внешней области некоторой проводящей поверхности, часто представляют в виде суммы собственных функций уравнений поля во внешней области поверхности [1]. В случае выпуклой поверхности вращения, уходящей одним краем на бесконечность и имеющей один полюс (вершину), такое представление в области, свободной от источников поля, имеет вид:

$$\left(\vec{E},\vec{H}\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}C_m^{(ij)}(t)\left(\vec{E}_m^{(ij)}(t),\vec{H}_m^{(ij)}(t)\right)dt\ , \tag{1}$$

где пространственный спектр разложения непрерывен по t в силу неограниченности области; $\vec{E}_m^{(ij)}(t)$, $\vec{H}_m^{(ij)}(t)$ − собственные функции четырех типов: i = 1 – стоячие волны у поверхности, i = 2 – уходящие от поверхности волны, индекс j = 1, 2 различает волны двух поляризаций. Коэффициенты разложения $C_m^{(ij)}(t)$ могут быть найдены различными способами, например, выражены через распределение заданных электрических и магнитных токов с помощью леммы Лоренца [2]. Представление (1) удобно для описания поля осесимметрично распределенных источников, например, кольцевых токов и осесимметричных антенных решеток [3].

Для некоторого числа поверхностей, таких как конус или параболоид вращения, собственные функции известны и описываются специальными функциями: сферическими, параболического цилиндра. В работе [3] собственные функции построены приближенно асимптотически вблизи произвольной гладкой выпуклой проводящей поверхности вращения большого электрического размера в виде волн электрического и магнитного типа относительно направления нормали к поверхности. Однако, разложение на волны электрического и магнитного типов является приближенным.

Целью настоящей работы является уточнение этого решения с учетом неразделимости собственных функций поля на волны *E*- и *H*-типа. Как поле, так и его источники находятся в приповерхностном слое шириной порядка длины волны, что достаточно для решения большой части антенных задач. Поле в дальней зоне может затем быть получено интегрированием ближнего поля по поверхности.

1. Решение уравнений для электромагнитного поля в пограничном слое поверхности при отсутствии источников

Рассмотрим ортогональную систему координат s, φ, n, где n – длина отрезка внешней нормали от поверхности до координируемой точки, s – длина образующей от полюса поверхности вращения до основания нормали, φ – азимутальный угол, образующей Коэффициенты Ламэ:

$$h_s = 1 + k_1 n,\ h_\varphi = \rho(1 + k_2 n),\ h_n = 1, \tag{1}$$

где k_1 – кривизна образующей (главная кривизна поверхности вдоль касательного к образующей орта $\hat{s}$), k_2 – главная кривизна поверхности вдоль орта $\hat{\varphi}$, ρ – радиус направляющей окружности.

Упрощенные дифференциальные уравнения поля и потенциалов. Электромагнитное поле в отсутствие источников может быть выражено через потенциалы U и V:

$$\left.\begin{aligned}
&E_s = \frac{1}{h_s}\frac{\partial^2 U}{\partial s \partial n} - \frac{jk}{h_\varphi}\frac{\partial V}{\partial \varphi}, \qquad && ZH_s = \frac{jk}{h_\varphi}\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{1}{h_s}\frac{\partial^2 V}{\partial s \partial n},\\
&E_\varphi = \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial n} + \frac{jk}{h_s}\frac{\partial V}{\partial s}, \qquad && ZH_\varphi = \frac{-jk}{h_s}\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial n},\\
&E_\text{n} = k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}, \qquad && ZH_\text{n} = k^2 V + \frac{\partial^2 V}{\partial n^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Потенциалы U и V в первом приближении удовлетворяют общему дифференциальному уравнению [3]. В следующем приближении для них получается система из двух связанных дифференциальных уравнений. Для получения этих приближенных уравнений воспользуемся волновым уравнением для ковариантных компонент электрического поля1[)] $\left(\nabla^l \nabla_l + k^2\right) E_i = 0$ или в развернутом виде:

$$g^{mj}\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^m \partial x^j} - g^{mj}\left(2\Gamma^l_{ij}\frac{\partial E_l}{\partial x^m} + \Gamma^l_{mj}\frac{\partial E_i}{\partial x^l}\right) + g^{mj}\left(\Gamma^n_{mj}\Gamma^l_{in} + \Gamma^n_{im}\Gamma^l_{nj}\right)E_l + k^2 E_i = 0, \tag{3}$$

и аналогичного уравнения для магнитного поля, где $x^1 = s$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = n$. Компоненты метрического тензора $g^{mj} = \delta_{mj}/(h_m)^2$. Отличные от нуля символы Кристоффеля в координатах вращения:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{dk_1}{ds}n, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}, \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{h_\varphi}{h_s}\frac{\partial h_\varphi}{\partial s},$$

$$\Gamma^3_{11} = -k_1, \quad \Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = \frac{k_1}{(1+k_1 n)^2}, \quad \Gamma^3_{22} = -h_\varphi \frac{\partial h_\varphi}{\partial n}, \tag{4}$$

$$\Gamma^1_{33} = -h_s\frac{\partial h_s}{\partial s} = -(1+k_1 n)\frac{dk_1}{ds}n, \quad \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial h_\varphi}{\partial n} = \frac{1}{k_2^{-1} + n}.$$

Вблизи поверхности с большими радиусами кривизны ($n \sim \lambda$, $k_{1,2} << k$) и вдали от полюсов ($k\rho >> 1$), пренебрегая малым третьим слагаемым в (3), запишем уравнение для основной компоненты E_3 в виде:

1[)] По дважды повторяющимся один раз сверху, один раз снизу индексам подразумевается суммирование.

$$\begin{gathered}\frac{1}{h_s^2}\frac{\partial^2 E_3}{\partial s^2}+\frac{1}{h_\varphi^2}\frac{\partial^2 E_3}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 E_3}{\partial n^2}-\frac{2}{h_s^2}\Gamma_{31}^1\frac{\partial E_1}{\partial s}-\frac{2}{h_\varphi^2}\Gamma_{32}^2\frac{\partial E_2}{\partial \varphi}-2\Gamma_{33}^1\frac{\partial E_1}{\partial n}-\\ -\frac{1}{h_\varphi^2}\Gamma_{22}^1\frac{\partial E_3}{\partial s}-\left(\frac{1}{h_s^2}\Gamma_{11}^3+\frac{1}{h_\varphi^2}\Gamma_{22}^3\right)\frac{\partial E_3}{\partial n}+k^2E_3=0\end{gathered}. \qquad (5)$$

Применим это уравнение к m-й азимутальной гармонике поля, для которой $\frac{\partial}{\partial \varphi}=-jm$. Раскрывая символы Кристоффеля и коэффициенты Ламэ, получим:

$$\begin{gathered}\frac{1}{(1+k_1 n)^2}\frac{\partial^2 E_3}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 E_3}{\partial n^2}+\frac{1}{\rho(1+k_1 n)^2}\frac{d\rho}{ds}\frac{\partial E_3}{\partial s}+\left(\frac{k_1}{(1+k_1 n)^2}+\frac{k_2}{(1+k_2 n)^2}\right)\frac{\partial E_3}{\partial n}+\\ +k^2\left(1-\frac{\kappa^2}{(1+k_2 n)^2}\right)E_3=-2\Gamma_{33}^1\frac{\partial E_1}{\partial n}+\frac{2}{h_s^2}\Gamma_{31}^1\frac{\partial E_1}{\partial s}+\frac{2}{h_\varphi^2}\Gamma_{32}^2\frac{\partial E_2}{\partial \varphi}\end{gathered}. \qquad (6)$$

Достаточно рассмотреть переходную («полутеневую») область, где $\frac{\partial E_3}{\partial n}\sim\frac{E_3}{M}$,

$$M=\left(\frac{kR}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (7)$$

– большой параметр задачи [3],

$$R=\frac{1}{k_1(1-\kappa^2)+k_2\kappa^2} \qquad (8)$$

– радиус кривизны нормального сечения поверхности вдоль направления, задаваемого параметром:

$$\kappa=\kappa_m=\frac{m}{k\rho}. \qquad (9)$$

Тогда четвертым слагаемым в левой части и первым слагаемым в правой части (6) можно пренебречь. Оставшиеся члены правой части малы и с помощью (2), (4) их можно приближенно выразить следующим образом:

$$\frac{1}{h_s^2}\Gamma_{31}^1\frac{\partial E_1}{\partial s}+\frac{1}{h_\varphi^2}\Gamma_{32}^2\frac{\partial E_2}{\partial \varphi}\cong k^2\kappa(k_2-k_1)\frac{\partial V}{\partial s}.$$

Теперь можно выполнить замену $E_3\cong k^2U$, $ZH_3\cong k^2V$, в результате которой получим первое уравнение для потенциалов:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\frac{\partial U}{\partial s} + k^2\left(1 - \kappa^2 + \frac{2n}{R}\right)U = 2\kappa\left(k_2 - k_1\right)\frac{\partial V}{\partial s}. \qquad (10)$$

Заменой неизвестных функций

$$U = \frac{\Psi}{\sqrt{\rho}},\ V = \frac{\Omega}{\sqrt{\rho}} \qquad (11)$$

и переменной n на безразмерную переменную:

$$z = \frac{kn}{M}, \qquad (12)$$

уравнение приводится к виду:

$$\frac{M^2}{k^2}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} + k^2(1-\kappa^2)\Psi - 2\kappa(k_2 - k_1)\frac{\partial \Omega}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + z\Psi\right) = 0. \qquad (13)$$

Это уравнение отличается от приближенного дифференциального уравнения для потенциала, полученного в [3], наличием дополнительного малого слагаемого, содержащего неизвестную функцию Ω. Аналогичным преобразованием волнового уравнения для основной компоненты H_3 получается второе дифференциальное уравнение:

$$\frac{M^2}{k^2}\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial s^2} + k^2(1-\kappa^2)\Omega + 2\kappa(k_2 - k_1)\frac{\partial \Psi}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} + z\Omega\right) = 0. \qquad (14)$$

Решение системы упрощенных дифференциальных уравнений. Система уравнений (13), (14) решается методом разделения переменных. Представим неизвестные функции в виде произведения двух функций одной переменной $\Psi = \mathrm{Z(z)}S(\mathrm{s})$ и $\Omega = \mathrm{Z(z)}W(\mathrm{s})$. Для Z получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$Z'' - (t - z)Z = 0, \qquad (15)$$

частными решениями которого являются функции Эйри $w_{1,2}(t - z)$, t – произвольная постоянная разделения. Для S и W получается система обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2S}{ds^2}+k^2\nu^2 S-2k\varepsilon\frac{dW}{ds}=0\\ \frac{d^2W}{ds^2}+k^2\nu^2 W+2k\varepsilon\frac{dS}{ds}=0\end{aligned}\right\}, \tag{16}$$

где для краткости записи введены обозначения:

$$\varepsilon=\varepsilon(s)=\frac{\kappa}{k}(k_2-k_1), \tag{17}$$

$$\nu=\sqrt{1-\kappa^2+\frac{t}{M^2}}, \tag{18}$$

заменим в (16) $\frac{d}{ds}\to -jkp$ и получим символическую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\left(\nu^2-p^2\right)S+j2\varepsilon pW=0\\ -j2\varepsilon pS+\left(\nu^2-p^2\right)W=0\end{aligned}\right\}, \tag{19}$$

которая имеет нетривиальные решения, если равен нулю ее детерминант, т. е. $\nu^2-p^2\mp 2\varepsilon p=0$. Вычитая из левой части этого уравнения пренебрежимо малую в рассматриваемом приближении величину $\varepsilon^2=O(\lambda^2/\rho^2)$, найдем условия разрешимости системы (19):

$$p=\operatorname{sign}\left(p\mp\varepsilon\right)\cdot\nu\mp\varepsilon, \tag{20}$$

где ν является арифметическим значением корня (18). Унитарная матрица собственных векторов матрицы системы уравнений (19):

$$\mathbf{X}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-j & j\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \tag{21}$$

диагонализирует эту систему уравнений заменой неизвестных функций:

$$\begin{pmatrix}S\\ W\end{pmatrix}=\mathbf{X}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}. \tag{22}$$

Новые неизвестные функции удовлетворяют независимым дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d^2y_{1,2}}{ds^2}\mp j2k\varepsilon\frac{dy_{1,2}}{ds}+k^2\nu^2 y_{1,2}=0, \tag{23}$$

знак «–» соответствует y_1, + – y_2.

В соответствии с методом канонического оператора Маслова [4] и с учетом (20) асимптотические частные решения этого дифференциального уравнения:

$$y_{1,2}(s,t)=\sqrt{\frac{k}{4\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\nu_s^2\right)^{-\frac{1}{2}}_{s=\overset{\circ}{s}(p,t)} e^{-jk\Phi_{1,2}(p,s,t)}dp\,, \tag{24}$$

где

$$\Phi_{1,2}(p,s,t)=\int_{s_{01,2}(t)}^{\overset{\circ}{s}_{1,2}(p,t)}\left[\mathrm{sign}(p\mp\varepsilon)\nu(s',t)\mp\varepsilon(s')\right]ds'+p\left[s-\overset{\circ}{s}_{1,2}(p,t)\right], \tag{25}$$

$\overset{\circ}{s}_{1,2}(p,t)$ – решение алгебраического уравнения (20) относительно неизвестной величины *s*; а $s_{01,2}(t)$ определяются из уравнения $\nu(s,t)\pm\varepsilon(s)=0$. Общее решение системы уравнений (13), (14) теперь можно записать как:

$$\begin{pmatrix}\Psi\\ \Omega\end{pmatrix}=\mathbf{X}\sqrt{\frac{k}{4\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\nu_s^2\right)^{-\frac{1}{2}}_{s=\overset{\circ}{s}(p,t)} Z(t-z)\begin{pmatrix}C_1(t)e^{-jk\Phi_1(p,s,t)}\\ C_2(t)e^{-jk\Phi_2(p,s,t)}\end{pmatrix}dpdt\,, \tag{26}$$

где $C_{1,2}(t)$ – произвольные функции. Изменим порядок интегрирования и в верхнем интеграле выполним замену переменной интегрирования $t'=t-x$, в нижнем – $t'=t+x$, где:

$$x=x(\overset{\circ}{s}(p,t),p)=2M^2p\varepsilon=\frac{\kappa p}{M}R(k_2-k_1). \tag{27}$$

В силу стационарности (25) как функционала от $\overset{\circ}{s}$ и малости $x=O(1/M)$, $\overset{\circ}{s}(p,t'\pm x)$ в (25) можно заменить на решение $\overset{\circ}{s}(p,t')$ уравнения:

$$\nu^2\left(\overset{\circ}{s}(p)\right)=p^2. \tag{28}$$

Также $s_0(t'\pm x)$ можно заменить на решение $s_0(t')$ уравнения $\nu(s,t')=0$. В каустической области (s – s_0 ~ km_s) будет справедливо: $k\Phi_{1,2}(p,s,t'\pm x)=k\Phi(p,s,t')+O(1/M^4)$, где:

$$\Phi(p,s)=\mathrm{sign}\,p\int_{s_0}^{\overset{\circ}{s}(p)}\nu(s')ds'+p\left[s-\overset{\circ}{s}(p)\right]. \tag{29}$$

В расширенной каустической области $s - s_0 \sim km_s^2$ погрешность равенства увеличивается до $O(1/M^2)$. Отличием t от t' в амплитудном множителе в (26) можно пренебречь. В результате (опуская штрих у новой переменной t') представим частные решения системы дифференциальных уравнений (13), (14) в виде:

$$\begin{pmatrix} \Psi(s,z,t) \\ \Omega(s,z,t) \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{k}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\nu_s^2\right)^{-\frac{1}{2}}_{s=\overset{\circ}{s}(p,t)} \mathbf{X} \begin{pmatrix} C_1 Z(t+x-z) \\ C_2 Z(t-x-z) \end{pmatrix} e^{-jk\Phi(p,s,t)} dp \,. \tag{30}$$

Проверим, что функции (30) после выполненных манипуляций остаются асимптотическими решениями системы дифференциальных уравнений (13), (14). Для этого подставим их в эти уравнения, изменим порядок интегрирования и дифференцирования и выполним дифференцирование по s. Поскольку точки стационарной фазы интеграла являются решением уравнения $\overset{\circ}{s}(p_0,t) = s$, заменим в медленноменяющихся коэффициентах дифференциальных уравнений аргумент s на $\overset{\circ}{s}(p,t)$. После этого, используя (18) и (27), убедимся, что подынтегральные выражения тождественно равны нулю, что и означает асимптотическое удовлетворение системы уравнений.

Типы волн вблизи поверхности. Касательные к поверхности компоненты поля, соответствующие потенциалам (30), можно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} E_s \\ E_\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{k\rho}} \mathbf{W}_{\mathrm{E}} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Omega \end{pmatrix} e^{-jm\varphi}, \quad \begin{pmatrix} H_s \\ H_\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{k\rho}} \mathbf{W}_{\mathrm{H}} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Omega \end{pmatrix} e^{-jm\varphi}, \tag{31}$$

Где, в соответствии с (2), отбрасывая несущественный множитель $-k^2$,

$$\mathbf{W}_{\mathrm{E}} \cong \begin{pmatrix} \frac{-1}{Mk}\frac{\partial^2}{\partial s \partial z} & \kappa \\ \frac{j\kappa}{M}\frac{\partial}{\partial z} & \frac{-j}{k}\frac{\partial}{\partial s} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_{\mathrm{H}} \cong \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} -\kappa & \frac{-1}{Mk}\frac{\partial^2}{\partial s \partial z} \\ \frac{j}{k}\frac{\partial}{\partial s} & \frac{j\kappa}{M}\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Внося дифференциальные операции под знак интеграла по p, частично заменим их на алгебраические:

$$\tilde{\mathbf{W}}_{\text{E}} = \begin{pmatrix} \dfrac{jp}{M}\dfrac{\partial}{\partial z} & \kappa \\ \dfrac{j\kappa}{M}\dfrac{\partial}{\partial z} & -p \end{pmatrix}, \ \tilde{\mathbf{W}}_{\text{H}} = \frac{1}{Z}\begin{pmatrix} -\kappa & \dfrac{jp}{M}\dfrac{\partial}{\partial z} \\ p & \dfrac{j\kappa}{M}\dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Введем четыре независимых решения в виде стоячих и уходящих от поверхности волн. Для стоячих волн первого типа будем полагать в (30) (индекс волны $j = 1$): $Z(z,t) = \varphi_1(z,t)$ и $C_1(t) = 1$, $\tilde{N}_2(t) = -1$; волн второго типа (индекс волны $j = 2$): $Z(z,t) = \varphi_2(z,t)$ и $C_1(t) = 1$, $\tilde{N}_2(t) = 1$, где

$$\begin{aligned} \varphi_1(z,t) = w_2'(t)w_1(t-z) - w_1'(t)w_2(t-z) \\ \varphi_2(z,t) = w_2(t)w_1(t-z) - w_1(t)w_2(t-z) \end{aligned}. \tag{34}$$

Этим обеспечивается выполнение граничных условий для электрического поля стоячих волн на поверхности $E_{s,\varphi} = 0$ при $z = 0$. Компоненты электромагнитного поля введенных волн представятся в виде спектрального разложения:

$$\left(\vec{E}^{ij}_m, \vec{H}^{ij}_m\right) = \sqrt{\frac{k}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\nu_s^2\right)^{-\frac{1}{2}}_{s=\overset{\circ}{s}(p,t)} \left(\vec{\tilde{e}}^{ij}, \vec{\tilde{h}}^{ij}\right) e^{-jk\Phi(p,s,t)} dp\, e^{-jm\varphi}, \tag{35}$$

где функции $\vec{\tilde{e}}^{ij}, \vec{\tilde{h}}^{ij}$ являются спектральными амплитудами волн, нижним индексом s обозначена частная производная:

$$\nu_s^2 = \frac{d\nu^2}{ds} = \frac{2\kappa^2}{r} - \frac{2}{3}\frac{t}{M^2 r_R}, \tag{36}$$

$$r_R = \left(\frac{d\ln R}{ds}\right)^{-1}, \tag{37}$$

$$r = \left(\frac{d\ln\rho}{ds}\right)^{-1} = \frac{\rho}{\sin\alpha} \tag{38}$$

r – расстояние от точки на поверхности до оси вращения по касательной к образующей ($r \ge \rho$), α – угол между касательной и осью вращения. В медленноменяющемся параметре M можно считать, что $s = \overset{\circ}{s}(p,t)$, так как это равенство определяет точки стационарной фазы. Наиболее простые выражения для касательных компонент спектральных амплитуд волн получаются в проекциях на повернутые вокруг местной нормали касательные орты:

$$\begin{pmatrix} \hat{i}_\xi \\ \hat{i}_\eta \end{pmatrix} = \mathbf{T}\begin{pmatrix} \hat{s} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \tag{39}$$

где

$$\sin\phi = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + p^2}}, \ \cos\phi = \frac{p}{\sqrt{\kappa^2 + p^2}}. \tag{40}$$

Для стоячих волн эти компоненты:

$$\begin{pmatrix} \tilde{e}_\xi^{11} & \tilde{e}_\xi^{12} \\ \tilde{e}_\eta^{11} & \tilde{e}_\eta^{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2Mk\rho}} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \frac{1}{M}\left[\varphi_1'(z,t-x) + \varphi_1'(z,t+x)\right] & -\frac{1}{M}\left[\varphi_2'(z,t-x) - \varphi_2'(z,t+x)\right] \\ \left[\varphi_1(z,t-x) - \varphi_1(z,t+x)\right] & -\left[\varphi_2(z,t-x) + \varphi_2(z,t+x)\right] \end{pmatrix}, \tag{41}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{h}_\xi^{11} & \tilde{h}_\xi^{12} \\ \tilde{h}_\eta^{11} & \tilde{h}_\eta^{12} \end{pmatrix} = \frac{j}{Z\sqrt{2Mk\rho}} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} -\frac{1}{M}\left[\varphi_1'(z,t-x) - \varphi_1'(z,t+x)\right] & \frac{1}{M}\left[\varphi_2'(z,t-x) + \varphi_2'(z,t+x)\right] \\ -\left[\varphi_1(z,t-x) + \varphi_1(z,t+x)\right] & \left[\varphi_2(z,t-x) - \varphi_2(z,t+x)\right] \end{pmatrix}, \tag{42}$$

где штрих означает производную по z. Для уходящих волн будем полагать $Z(z,t) = w_2(t-z)$, а коэффициенты $C_{2j}(t)$ выберем из условий: $\tilde{e}_\eta = 0$ ($j = 1$); $\tilde{e}_\xi = 0$ ($j = 2$) при $z = 0$. Тогда при соответствующей нормировке:

$$\begin{pmatrix} \tilde{e}_\xi^{21} & \tilde{e}_\xi^{22} \\ \tilde{e}_\eta^{21} & \tilde{e}_\eta^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2Mk\rho}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{M}\frac{\partial f_{11}(t,x,z)}{\partial z} & -\frac{1}{M}\frac{\partial f_{12}(t,x,z)}{\partial z} \\ f_{21}(t,x,z) & f_{22}(t,x,z) \end{pmatrix}, \tag{43}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{h}_\xi^{21} & \tilde{h}_\xi^{22} \\ \tilde{h}_\eta^{21} & \tilde{h}_\eta^{22} \end{pmatrix} = \frac{j}{Z\sqrt{2Mk\rho}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{M}\frac{\partial f_{21}(t,x,z)}{\partial z} & -\frac{1}{M}\frac{\partial f_{22}(t,x,z)}{\partial z} \\ f_{11}(t,x,z) & f_{12}(t,x,z) \end{pmatrix}, \tag{44}$$

где

$$f_{11}(t,x,z) = \frac{w_2(t+x-z)w_2(t-x) + w_2(t-x-z)w_2(t+x)}{w_2'(t+x)w_2(t-x) + w_2(t+x)w_2'(t-x)},$$

$$f_{12}(t,x,z) = \frac{w_2(t+x-z)w_2'(t-x) - w_2(t-x-z)w_2'(t+x)}{w_2'(t+x)w_2(t-x) + w_2(t+x)w_2'(t-x)}, \tag{45}$$

$$f_{21}(t,x,z)=\frac{w_2(t+x-z)w_2(t-x)-w_2(t-x-z)w_2(t+x)}{w_2'(t+x)w_2(t-x)+w_2(t+x)w_2'(t-x)},$$

$$f_{22}(t,x,z)=\frac{w_2(t+x-z)w_2'(t-x)+w_2(t-x-z)w_2'(t+x)}{w_2'(t+x)w_2(t-x)+w_2(t+x)w_2'(t-x)}.$$

Дополнительный медленноменяющийся множитель $\left(M\sqrt{\kappa^2+p^2}\right)^{-1/2}$ введен в эти выражения для получения требуемого убывания подынтегрального выражения интегралов для норм этих волн на бесконечности.

Мы рассмотрели решение задачи в переходной $t \sim 1$ и расширенной каустической области $s - s_0 \sim km_s^2$. Однако, легко видеть, что в области $t >> 1$ и вдали от каустики оно переходит в геометрооптическое решение и является, таким образом, приближенным равномерным асимптотическим решением для электромагнитного поля в приповерхностном слое поверхности S. Вывод выражений поля (35), (41) – (44) не зависит от того, имеет ли поверхность вращения один или два полюса. Как мы увидим ниже, для поверхности с одним полюсом эти поля ортогональны и могут рассматриваться как собственные функции поля вблизи поверхности. Для поверхности с двумя полюсами они будут ортогональны для счетного множества значений переменной разделения t. Однако, при больших размерах поверхности можно приближенно считать спектр непрерывным и пользоваться разложением полного поля (1).

Используя малость величины $x = O(1/M)$, разложим функции f_{ij} в ряд Тейлора по x и, ограничиваясь двумя первыми членами, запишем выражения для компонент волн (41) – (44) с точностью до величин $\sim O(1/M^2)$:

$$\begin{pmatrix}\tilde{e}_\xi^{11} & \tilde{e}_\xi^{12}\\ \tilde{e}_\eta^{11} & \tilde{e}_\eta^{12}\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{Mk\rho}}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{M}\varphi_1'(z,t) & \dfrac{x}{M}\dfrac{\partial\varphi_2'(z,t)}{\partial t}\\ -x\dfrac{\partial\varphi_1(z,t)}{\partial t} & \varphi_2(z,t)\end{pmatrix}, \tag{46}$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{h}_\xi^{11} & \tilde{h}_\xi^{12}\\ \tilde{h}_\eta^{11} & \tilde{h}_\eta^{12}\end{pmatrix}=\frac{j\sqrt{2}}{Z\sqrt{Mk\rho}}\begin{pmatrix}\dfrac{x}{M}\dfrac{\partial\varphi_1'(z,t)}{\partial t} & \dfrac{1}{M}\varphi_2'(z,t)\\ -\varphi_1(z,t) & -x\dfrac{\partial\varphi_2(z,t)}{\partial t}\end{pmatrix}, \tag{47}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{e}_\xi^{21} & \tilde{e}_\xi^{22} \\ \tilde{e}_\eta^{21} & \tilde{e}_\eta^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2Mk\rho}} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \dfrac{1}{M}\dfrac{w_2'(t-z)}{w_2'(t)} & -\dfrac{xt}{M}\left(\dfrac{w_2'(t-z)}{w_2'(t)} - \dfrac{w_2(t-z)}{w_2(t)}\right) \\ -x\left(\dfrac{w_2(t-z)}{w_2(t)} - \dfrac{w_2'(t-z)}{w_2'(t)}\right) & \dfrac{w_2(t-z)}{w_2(t)} \end{pmatrix}, \quad (48)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{h}_\xi^{21} & \tilde{h}_\xi^{22} \\ \tilde{h}_\eta^{21} & \tilde{h}_\eta^{22} \end{pmatrix} = \frac{j}{Z\sqrt{2Mk\rho}} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} -\dfrac{x}{M}\left(\dfrac{w_2'(t-z)}{w_2(t)} - \dfrac{tw_2(t-z)}{w_2'(t)}\right) & \dfrac{1}{M}\dfrac{w_2'(t-z)}{w_2(t)} \\ \dfrac{w_2(t-z)}{w_2'(t)} & -x\left(\dfrac{w_2'(t-z)}{w_2(t)} - \dfrac{tw_2(t-z)}{w_2'(t)}\right) \end{pmatrix}, \quad (49)$$

где штрих обозначает производную, $\varphi_i'(z,t) = \partial\varphi_i(z,t)/\partial z$.

Выполнив равномерное асимптотическое интегрирование в (35) и учитывая, что интеграл от четных функций p выражается через функцию Эйри, а от нечетных функций − через ее производную [3,6], получим представление собственных функций, не содержащее операции интегрирования:

$$\left(\vec{E}_m^{ij}(t), \vec{H}_m^{ij}(t)\right) = \left(\vec{e}^{ij}, \vec{h}^{ij}\right) e^{-jm\varphi}, \quad (50)$$

$$\begin{pmatrix} e_s^{i1} & e_s^{i2} \\ e_\varphi^{i1} & e_\varphi^{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{g'}{j\nu}\tilde{e}_s^{i1} & g\tilde{e}_s^{i2} \\ g\tilde{e}_\varphi^{i1} & \dfrac{g'}{j\nu}\tilde{e}_\varphi^{i2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_s^{i1} & h_s^{i2} \\ h_\varphi^{i1} & h_\varphi^{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g\tilde{h}_s^{i1} & \dfrac{g'}{j\nu}\tilde{h}_s^{i2} \\ \dfrac{g'}{j\nu}\tilde{h}_\varphi^{i1} & g\tilde{h}_\varphi^{i2} \end{pmatrix}, \quad (51)$$

где

$$\begin{pmatrix} \tilde{e}_s^{i1} & \tilde{e}_s^{i2} \\ \tilde{e}_\varphi^{i1} & \tilde{e}_\varphi^{i2} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \tilde{e}_\xi^{i1} & \tilde{e}_\xi^{i2} \\ \tilde{e}_\eta^{i1} & \tilde{e}_\eta^{i2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{h}_s^{i1} & \tilde{h}_s^{i2} \\ \tilde{h}_\varphi^{i1} & \tilde{h}_\varphi^{i2} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \tilde{h}_\xi^{i1} & \tilde{h}_\xi^{i2} \\ \tilde{h}_\eta^{i1} & \tilde{h}_\eta^{i2} \end{pmatrix}, \quad (52)$$

в функциях $\tilde{e}_\xi^{ij}$, $\tilde{e}_\eta^{ij}$, $\tilde{h}_\xi^{ij}$, $\tilde{h}_\eta^{ij}$ (43) – (49) и $\mathbf{T}$ (39) аргумент $p = \nu(s)$,

$$g(s,t) = \nu^{-\frac{1}{2}} \varsigma^{\frac{1}{4}} \upsilon(-\varsigma), \quad (53)$$

$$g' = k^{-1}\partial g/\partial s,\ \varsigma = \left(\frac{3}{2}k\int_{s_0}^{s}\nu(s')ds'\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{54}$$

Представление (50) – (52) является равномерным асимптотическим приближением собственных функций поля для поверхности вращения с одним полюсом, так как функция $g(t,\ s)$ (51) является аналитической в том числе на каустике $s = s_0$, на которой $\nu = 0$ [3]. Для выпуклой поверхности с двумя полюсами имеется точка экстремума образующей. При совпадении s_0 с этой точкой, нарушается аналитичность функции $g(t, s)$: она имеет разрыв второго рода. Для получения выражений, справедливых и в этих точках необходимо повысить порядок асимптотического интегрирования в (35). В этом случае место функций Эйри займут функции параболического цилиндра [5]. Мы не рассматриваем это приближение из-за сложности получающихся выражений, а также потому что, как показано в [3], численные результаты можно получить прямо из интегрального представления (35).

Из полученных выше выражений видно, что члены, описывающие отличие собственных функций от E- и H-волн, являются малыми поправками, т. к. они пропорциональны $x = O(1/M)$. Как следует из (27), параметр x обращается в нуль в случае равенства главных кривизн поверхности вращения $k_1 = k_2$, что имеет место только для сферической поверхности. Это соответствует известному факту, что электромагнитное поле над проводящей сферической поверхностью разделяется на сумму E- и H-волн относительно радиальной координаты, совпадающей с направлением нормали к поверхности.

Ортогональность и нормы. Волны (35) ортогональны между собой в смысле леммы Лоренца для поверхности вращения с одним полюсом. Примеры образующей такой поверхности показаны на рис. 1. Интегралы

$$J_{mm'}^{ij,i'j'}(t,t') = -\iint_S \left\{\left[\vec{E}_m^{ij}(t), \vec{H}_{m'}^{i'j'}(t')\right] - \left[\vec{E}_{m'}^{i'j'}(t), \vec{H}_m^{ij}(t')\right]\right\}\vec{n}\,dS, \tag{55}$$

очевидно, равны нулю при $m \neq -m'$. При $t \neq t'$ они равны нулю в силу леммы Лоренца и различного характера зависимости этих полей от z [2]. При $m = -m'$, $t = t'$ подставим сюда (35) и, проинтегрировав по φ, получим:

$$J^{ij,i'j'}_{m(-m)}(t,t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\overset{\circ}{v}{}_s^2\right)^{-\frac{1}{2}}_{s=s(p,t)}\left(\overset{\circ}{v}{}_s^2\right)^{-\frac{1}{2}}_{s=s(p',t)}\tilde{n}^{ij}_{i'j'}\int_0^{\infty} e^{-jk[\Phi(p,s,t)+\Phi(p',s,t)]}dsdpdp', \qquad (56)$$

где

$$\tilde{n}^{ij}_{i'j'}(p,p') = -k\rho\left\{\left[\vec{\tilde{e}}^{ij}_{m}(p,t),\vec{\tilde{h}}^{i'j'}_{-m}(p',t)\right]-\left[\vec{\tilde{e}}^{i'j'}_{-m}(p',t),\vec{\tilde{h}}^{ij}_{m}(p,t)\right]\right\}\vec{n}. \qquad (57)$$

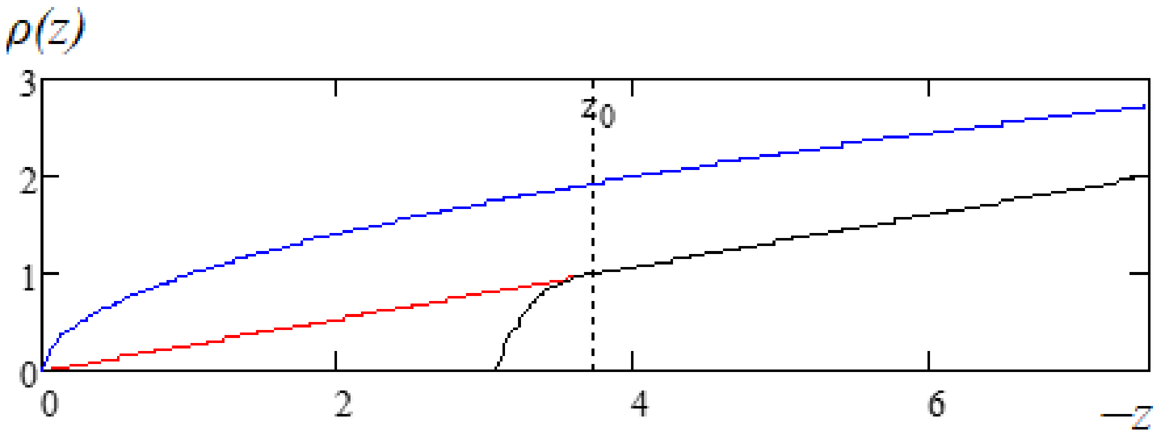

Рис. 1. Образующие поверхностей вращения с одним полюсом: красная линия – конус, чёрная линия – «усеченный» конус с гладкой «шапочкой», синяя линия – параболоид

Если при вычислении внутреннего интеграла в (54) расширить нижний предел интегрирования до $-\infty$ и учесть, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jks(p+p')}ds = \frac{2\pi}{k}\delta(p+p')$, то получим:

$$J^{ij,i'j'}_{m(-m)}(t,t) = \frac{\pi}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\overset{\circ}{v}{}_s^2\right)^{-1}_{s=s(p,t)}\tilde{n}^{ij}_{i'j'}(p,-p)dp. \qquad (58)$$

Так как $x(-m,-p) = x(m,p)$, $|\mathbf{T}| = 1$, то:

$$\tilde{n}^{ij}_{i'j'}(p,-p) = k\rho\left\{\begin{vmatrix}\tilde{e}^{i'j'}_{\xi} & \tilde{h}^{ij}_{\xi}\\ \tilde{e}^{i'j'}_{\eta} & \tilde{h}^{ij}_{\eta}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\tilde{e}^{ij}_{\xi} & \tilde{h}^{i'j'}_{\xi}\\ \tilde{e}^{ij}_{\eta} & \tilde{h}^{i'j'}_{\eta}\end{vmatrix}\right\}, \qquad (59)$$

где аргументы спектральных амплитуд в правой части равенства $p' = p$ и m. Прямой подстановкой (46) − (49) нетрудно убедиться, что все величины $\tilde{n}^{ij}_{i'j'}$, кроме $\tilde{n}^{2j}_{1j} = -\tilde{n}^{1j}_{2j}$, равны нулю, а:

$$\tilde{n}^{2i}_{1j} = \frac{2}{ZM^2} . \tag{60}$$

Для вычисления интегралов (58) в этом случае сначала заменим переменную интегрирования p на s по формуле $s = \overset{\circ}{s}(p,t)$; с учетом (28) $ds = \frac{v_s^2}{2p} dp$. Переходя далее от s к переменной интегрирования:

$$:: \xi = \frac{k}{2} \int_{s_0}^{s} \frac{ds'}{M^2 v} , \tag{61}$$

получим:

$$J^{2j,1j}_{m(-m)}(t,t) = \frac{\pi}{k} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\tilde{n}^{1j}_{2j}}{v} ds = \frac{2\pi}{kZ} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{vM^2} = \frac{4\pi}{Zk^2} \int_{0}^{\infty} d\xi . \tag{62}$$

Вернемся теперь к $t' \neq t$, $t' \approx t$ в фазовом множителе в (56) и используем, что при $t \approx t'$

$$k\sigma' = k\sigma(s,t') \cong k\sigma(s,t) + k\frac{\partial \sigma}{\partial t}(t-t') = k\sigma + \xi(t-t') .$$

В результате получим:

$$J^{2j,1j}_{m(-m)}(t,t') = \frac{4\pi}{Zk^2} \int_{0}^{\infty} \cos\bigl(\xi(t-t')\bigr) d\xi = \frac{4\pi^2}{Zk^2} \delta(t-t') . \tag{63}$$

Поскольку расширение пределов интегрирования до минус бесконечности не вполне обосновано, получим соотношения для норм также другим путем. С использованием представления волн (50) − (52), запишем:

$$J^{ij,i'j'}_{m(-m)}(t,t) = \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} n^{ij}_{i'j'} ds , \tag{64}$$

где

$$n^{ij}_{i'j'} = k\rho\left\{\begin{vmatrix} e^{i'j'}_{-ms} & h^{ij}_{ms} \\ e^{i'j'}_{-m\varphi} & e^{ij}_{m\varphi} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} e^{ij}_{ms} & h^{i'j'}_{-ms} \\ e^{ij}_{m\varphi} & e^{i'j'}_{-m\varphi} \end{vmatrix}\right\}. \tag{65}$$

Легко проверить, что $n^{ij}_{i'j} = 0$. Далее, с точностью до величин $O(x^2) = O(M^{-2})$:

$$n^{2j}_{1j} = \frac{4}{ZM^2(\kappa^2+\nu^2)}\left(\kappa^2 g^2 + g'^2\right). \tag{66}$$

Выражения (64), (66) совпадают с аналогичным выражением в [3] и аналогично преобразуется к формуле (63). Коэффициент

$$n^{11}_{12} = \frac{2\kappa g g' \varphi_1 \varphi_2}{ZM(\kappa^2+\nu^2)} \tag{67}$$

содержит произведение gg', которое является быстроосциллирующей функцией, так что интеграл от (67) асимптотически равен нулю. Это же произведение gg' содержится в n^{11}_{22} и интеграл от него также асимптотически равен нулю. Таким образом, второй метод расчета дает аналогичный результат, совпадающий с соотношением ортогональности для E- и H-волн [1]:

$$J^{ij,i'j'}_{mm'}(t,t') = \frac{4\pi^2}{Zk^2}(i'-i)\delta_{m'(-m)}\delta_{i'(3-i)}\delta_{j'j}\delta(t-t'). \tag{68}$$

2. Электромагнитное поле источников вблизи поверхности

Наибольший интерес представляют электромагнитное поле поверхностного магнитного поля, описывающего излучение из отверстий в проводящей поверхности S, и электрического тока, описывающего излучение вибраторов и токов поляризации диэлектриков. Выражение для электромагнитного поля заданного поверхностного магнитного тока получено в [3]. Оно получается из (1) при равных нулю коэффициентах, соответствующих стоячим волнам

$$\left(\vec{E},\vec{H}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty} C^{(2l)}_m(t)\left(\vec{e}^{(2l)}_m, \vec{h}^{(2l)}_m\right)dt\, e^{-jm\varphi}. \tag{69}$$

Коэффициенты разложения найдены с помощью леммы Лоренца и равны:

$$C_m^{(2j)}(t) = \frac{Zk^2}{4\pi^2} \int_S \vec{J}^{\mathrm{m}} \vec{h}_{-m}^{(1j)} e^{jm\varphi} dS \ , \tag{70}$$

где $\vec{J}^{\mathrm{m}}$ – поверхностная плотность магнитного тока. Подстановка (70) в (69) приводит к представлению поля в виде:

$$\left(\vec{E},\vec{H}\right) = \int_S \vec{J}^{\mathrm{m}}(s',\varphi')\left(\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}\right)dS' \ , \tag{71}$$

где

$$\left(\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}\right) = \frac{Zk^2}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{h}_{-m}^{(1l)}(s') \cdot \left(\vec{e}_m^{(2l)}(s), \vec{h}_m^{(2l)}(s) \right) dt \ e^{-jm(\varphi-\varphi')}, \tag{72}$$

точка означает прямое (тензорное) произведение векторных функций. Величины $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ представляют собой функции Грина для поверхностных магнитных источников.

Аналогичным образом, применением леммы Лоренца к полю (1) и вспомогательному полю $\vec{E}_{-m}^{(2l)},\vec{H}_{-m}^{(2l)}$ в объеме, ограниченном поверхностями S и $S(n)$: $n' = n$, а затем к полю $\vec{E}_{-m}^{(1l)},\vec{H}_{-m}^{(1l)}$ в объеме, между поверхностью $S(n)$ и поверхностью $S(n_0)$, охватывающей область нахождения токов, с учетом условий ортогональности (68), получим выражение для электромагнитного поля заданных электрических токов:

$$\left(\vec{E},\vec{H}\right) = \int_V \vec{j}^{\mathrm{e}}(s',\varphi')\left(\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}\right)dV' \ , \tag{73}$$

где V – область протекания заданных токов $\vec{j}^{\mathrm{e}}$,

$$\left(\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}\right) = -\frac{Zk^2}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm(\varphi-\varphi')} \sum_{l=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \vec{e}_{-m}^{(2l)}(s') \cdot \left(\vec{e}_m^{(1l)}(s), \vec{h}_m^{(1l)}(s) \right) \\ \vec{e}_{-m}^{(1l)}(s') \cdot \left(\vec{e}_m^{(2l)}(s), \vec{h}_m^{(2l)}(s) \right) \end{matrix} \right\} dt \ , \tag{74}$$

верхний ряд формул соответствует $z < z'$, а нижний ряд формул – $z > z'$. Величины $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ (71) представляют собой функции Грина для электрических токов при отсутствии нормальной составляющей тока. Для электрических токов, ориентированных вдоль нормали, к нормальной составляющей электрического поля (73) необходимо прибавить слагаемое [2]:

$$\Delta E_n = \frac{j}{\omega\varepsilon} j_n^{\mathrm{e}} \qquad (75)$$

В случае достаточно близкой координаты точки наблюдения s к координате точки источника s', можно получить также другое представление электромагнитного поля. Следуя ходу преобразований, приведенных в [3], функции Грина (72), (74) можно представить в виде:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{(1)} - \boldsymbol{E}^{(2)}\ ,\ \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^{(1)} - \boldsymbol{H}^{(2)}, \qquad (76)$$

где $\boldsymbol{E}^{(1)}, \boldsymbol{H}^{(1)}$ физически соответствуют волне, прошедшей в точку наблюдения по кратчайшему пути, а $\boldsymbol{E}^{(2)}, \boldsymbol{H}^{(2)}$ – волне, прошедшей через отражение от каустики поверхностных лучей. Для функции Грина магнитного диполя, касательного к поверхности:

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{E}^{(1)},\boldsymbol{H}^{(1)}\right) &\cong \frac{Zk^2}{8\pi^2} M(s)M(s') \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm(\varphi-\varphi')} \times \\ &\times \sum_{l=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\tilde{h}}^{(1l)}_{-m}(s',p) \cdot \left(\vec{\tilde{e}}^{(2l)}_{m}, \vec{\tilde{h}}^{(2l)}_{m}\right)(s,p) e^{-jk(s-s')p} dp\end{aligned}, \qquad (77)$$

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{E}^{(2)},\boldsymbol{H}^{(2)}\right) &\cong -j\frac{Zk^2}{8\pi^2} M(s)M(s') \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm(\varphi-\varphi')} \times \\ &\times \sum_{l=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\tilde{h}}^{(1l)}_{-m}(s',-p) \cdot \left(\vec{\tilde{e}}^{(2l)}_{m}, \vec{\tilde{h}}^{(2l)}_{m}\right)(s,p) e^{-jk(\sigma+\sigma')} dp\end{aligned}. \qquad (78)$$

Для функции Грина электрического диполя (без слагаемого, учитывающего (75))

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{E}^{(1)},\boldsymbol{H}^{(1)}\right) &\cong -\frac{Zk^2}{8\pi^2} M(s)M(s') \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm(\varphi-\varphi')} \times \\ &\times \sum_{l=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \vec{\tilde{e}}^{(2l)}_{-m}(s',p) \cdot \left(\vec{\tilde{e}}^{(1l)}_{m}, \vec{\tilde{h}}^{(1l)}_{m}\right)(s,p) \\ \vec{\tilde{e}}^{(1l)}_{-m}(s',p) \cdot \left(\vec{\tilde{e}}^{(2l)}_{m}, \vec{\tilde{h}}^{(2l)}_{m}\right)(s,p) \end{matrix} \right\} e^{-jk(s-s')p} dp\end{aligned}, \qquad (79)$$

$$\left(\boldsymbol{E}^{(2)},\boldsymbol{H}^{(2)}\right)\cong j\frac{Zk^2}{8\pi^2}M(s)M(s')\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-jm(\varphi-\varphi')}\times$$
$$\times\sum_{l=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{matrix}\vec{\tilde{e}}_{-m}^{(2l)}(s',-p)\cdot\left(\vec{\tilde{e}}_m^{(1l)},\vec{\tilde{h}}_m^{(1l)}\right)(s,p)\\ \vec{\tilde{e}}_{-m}^{(1l)}(s',-p)\cdot\left(\vec{\tilde{e}}_m^{(2l)},\vec{\tilde{h}}_m^{(2l)}\right)(s,p)\end{matrix}\right\}e^{-jk(\sigma+\sigma')}dp\ , \qquad (80)$$

верхние ряды формул соответствует $z < z'$, а нижние – $z > z'$, а аргумент t в выражениях (43) – (49):

$$t=t(p)=M(s)M(s')\left(p^2+\kappa(s)\kappa(s')-1\right). \qquad (81)$$

3. Взаимная проводимость кольцевых щелей на конусе

Применим полученные выражения для расчета собственной и взаимной проводимости кольцевых щелей (магнитных токов) на поверхности проводящего конуса с m-й гармоникой тока в щели. Большой параметр M:

$$M=k\rho\left(2m^2\cos\alpha\right)^{-1/3}, \qquad (82)$$

где α – угол между осью и образующей конуса,

$$\rho=r\sin\alpha\,, \qquad (83)$$

ρ − радиус направляющей конуса, r − радиальная координата точки на поверхности конуса в сферической системе координат с центром в его вершине. Параметр (27), учитывающий отличие собственных функций от E- и H-волн,

$$x=-\frac{p}{m}\left(2m^2\cos\alpha\right)^{1/3}. \qquad (84)$$

Для бесконечно узких щелей при $m\neq 0$, используя известную общую формулу для взаимной проводимости [7] и выражения магнитного поля (71), (77), найдем вклад прямой волны во взаимную проводимость:

$$Y_{21}^{(1)}=2j\frac{k}{Z}\sqrt{\rho_1\rho_2M_1M_2}\int_0^{\infty}\left\{p^2\frac{w_2(t)}{w_2'(t)}-\frac{\kappa_1\kappa_2}{M_1M_2}\frac{w_2'(t)}{w_2(t)}+xp\left(\frac{\kappa_1}{M_1}+\frac{\kappa_2}{M_2}\right)y(t)\right\}\times$$
$$\times\frac{\cos\left(k(r_2-r_1)p\right)}{\sqrt{\left(\kappa_1^2+p^2\right)\left(\kappa_2^2+p^2\right)}}dp\ , \qquad (85)$$

где ρ_1, ρ_2, κ_1, κ_2, M_1, M_2 означает $\rho(r_1)$, $\rho(r_2)$ и т.д., где r_1, r_2 – радиальные координаты первой и второй щели,

$$t = t(p) = M_1 M_2 \left(p^2 + \kappa_1 \kappa_2 - 1\right), \tag{86}$$

$$y(t) = \frac{w_2'(t)}{w_2(t)} - \frac{t w_2(t)}{w_2'(t)}. \tag{87}$$

Как обычно [9], (85) можно вычислить по теореме о вычетах. Отбрасывая малые порядка $1/\,M_1M_2$, получим:

$$Y_{21}^{(1)} \cong \frac{\pi k}{Z} \frac{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}{\sqrt{M_1 M_2}} \left\{ \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{\infty} p_i' \left(C + \frac{1}{t'_i} \right) \exp\left(- j p'_i k |r_2 - r_1|\right) - \\ &- \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\kappa_1 \kappa_2}{M_1 M_2 p_i} + b p_i \right) \exp\left(- j p_i k |r_2 - r_1|\right) \end{aligned} \right\}, \tag{88}$$

где $p_i = p(t_i)$, $p'_i = p(t'_i)$ – решения уравнения (86), t_i – нули функции Эйри $w_2(t)$, t'_i – нули производной функции Эйри $w_2'(t)$,

$$b = \frac{\left(2m^2 \cos\alpha\right)^{1/3}}{m} \left(\frac{\kappa_1}{M_1} + \frac{\kappa_2}{M_2} \right). \tag{89}$$

При $m = 0$, используя известную формулу для интеграла [8], получим явное выражение:

$$Y_{21}^{(1)} = 2 \frac{k}{Z} \sqrt{\rho_1 \rho_2} \int_0^{\infty} \frac{\cos\left(k (r_2 - r_1) p\right)}{\sqrt{1 - p^2}} dp = \frac{\pi k}{Z} \sqrt{\rho_1 \rho_2} H_0^{(2)}\left(k |r_2 - r_1|\right). \tag{90}$$

В приложении показано, что это выражение может быть получено как главный член асимптотики строгого решения для конуса методом собственных функций. При $r_1 = r_2$ (90) дает собственную проводимость, мнимая часть которой обращается в бесконечность, т.к. щели рассматриваются как бесконечно узкие.

Используя выражения магнитного поля (72), найдем другое выражение для взаимной проводимости кольцевых щелей:

$$Y_{21} = \frac{k}{Z} \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{M_1 M_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} &g'(s_1,t) g'(s_2,t) \frac{w_2(t)}{w_2'(t)} - \frac{\kappa_1 \kappa_2}{M_1 M_2} g(s_1,t) g(s_2,t) \frac{w_2'(t)}{w_2(t)} + \\ &+ x \left(g(s_1,t) g(s_2,t) \frac{\kappa_1}{M_1} + g'(s_1,t) g'(s_2,t) \frac{\kappa_2}{M_2} \right) y(t) \end{aligned} \right\} dt, \tag{91}$$

Применяя для вычисления интеграла теорему о вычетах, получим:

$$
\begin{aligned}
Y_{21} = \frac{j2\pi k}{Z}\sqrt{\frac{\rho_1\rho_2}{M_1M_2}}\Bigg\{\sum_{i=1}^{\infty}\Bigg\{\frac{1}{t'_i}g'(s_{\min},t'_i)g_2'(s_{\max},t'_i) - x\big(\nu(t'_i)\big)\times \\
\times\left(g(s_{\min},t'_i)g_2(s_{\max},t'_i)\frac{\kappa_1}{M_1} + g'(s_{\min},t'_i)g_2'(s_{\max},t'_i)\frac{\kappa_2}{M_2}\right)\Bigg\} - \\
-\sum_{i=1}^{\infty}\Bigg\{\frac{\kappa_1\kappa_2}{M_1M_2}g(s_{\min},t_i)g_{\max}(s_2,t_i) + x\big(\nu(t_i)\big)\times \\
\times\left(g(s_{\min},t_i)g_2(s_{\max},t_i)\frac{\kappa_1}{M_1} + g'(s_{\min},t_i)g_2'(s_{\max},t_i)\frac{\kappa_2}{M_2}\right)\Bigg\}\Bigg\}
\end{aligned}
\quad , \qquad (92)
$$

где ряд сходится тем быстрее, чем больше расстояние между щелями. Формулы (91), (92) применимы при $m \neq 0$.

На рис. 2 приведены зависимости модуля взаимной проводимости кольцевых щелей от $k\rho_2$ при $k\rho_1 = 17{,}92$ для конуса с углом $\alpha = 12°$ для различных номеров гармоники тока, рассчитанные интегрированием по формуле (85). Для сравнения приведены результаты расчета взаимной проводимости щелей методом собственных функций [9].

Некоторое расхождение результатов расчета взаимных проводимостей при малых m обусловлено не учитываемой в асимптотическом методе дифракцией на вершине конуса. При увеличении m каустика поверхностных лучей удаляется от вершины конуса. Так как вершина находится относительно щели за каустикой, то уровень поля, создаваемого щелью на вершине, уменьшается. В результате уменьшается дифрагированное на вершине поле, в результате чего уменьшается расхождение результатов расчета двумя методами. Вклад волны, отраженной от каустики в данном случае мал.

При очень низких уровнях взаимной проводимости (менее −90 дБ) численное интегрирование (85) разрушается из-за ошибок округления. На рис. 3 приведена часть тех же зависимостей, рассчитанных как численным интегрированием, так и суммированием ряда вычетов. Число членов ряда равно I = 50 для m = 1, I = 15 для m = 4, I = 5 для m = 15 и 25. Метод суммирования вычетов гораздо более быстродействующий, чем метод численного интегрирования, и не чувствителен к ошибкам округления.

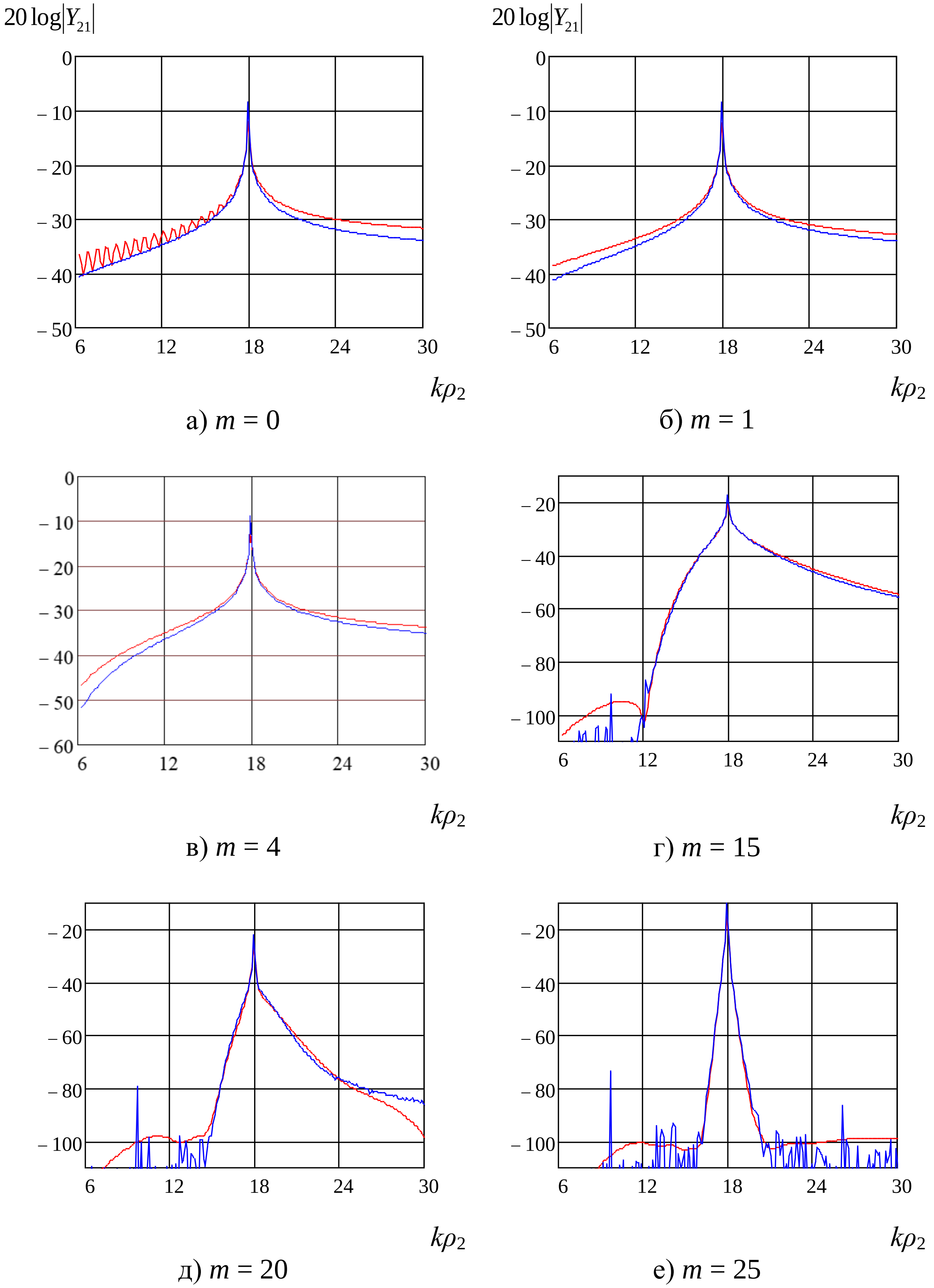

Рис. 2. Модуль взаимной проводимости кольцевых щелей: красная линия – метод собственных функций, синяя линия –вклад прямой волны $Y_{21}^{(1)}$

Однако, этот метод не пригоден для расчета собственной проводимости, а также для расчета взаимной проводимости близко расположенных щелей, так как в этом случае ряд расходится. При m = 0 полюса и, следовательно, ряд вычетов отсутствуют.

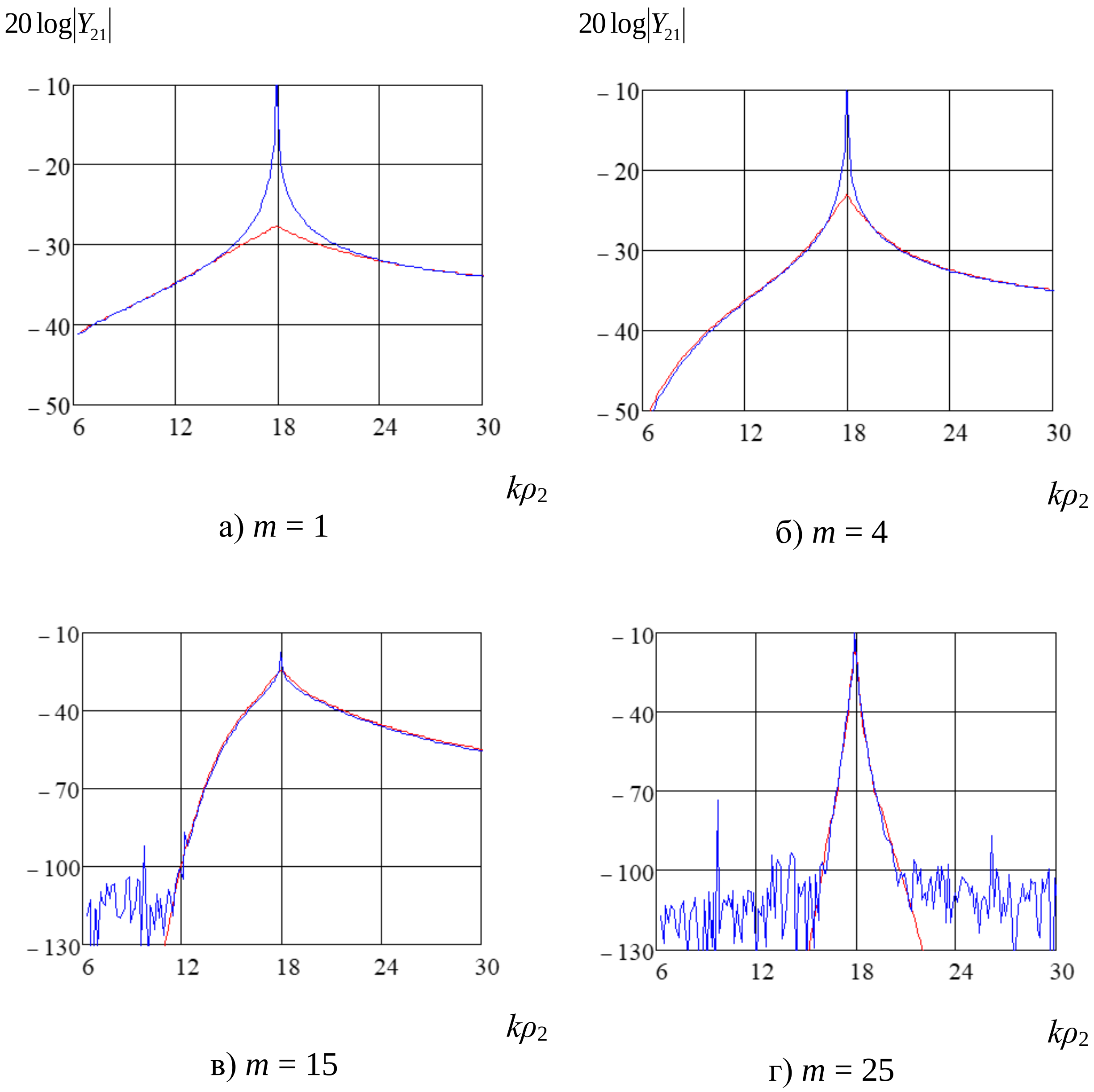

Рис. 3. Модуль взаимной проводимости кольцевых щелей: синяя линия – численное интегрирование; красная линия – сумма ряда вычетов (88)

На рис. 4 приведены результаты расчета взаимного импеданса методом собственных функций и как суммы вычетов по формулам (88) и (92). Использование (92) позволяет уточнить значение взаимной проводимости при большом расстоянии между щелями и совпадением каустики поверхностных лучей с расположением первой щели: $m \approx k\rho_1$, учитывая, что при $m >> 1$ влиянием дифракции на вершине конуса можно пренебречь. Это уточнение происходит на очень низком уровне значений проводимости менее –60 дБ. Кроме того, поскольку выражение (92), в отличие от (88), учитывает и отраженную от поверхностной каустики волну, из рис. 4 видно, что вклад этой волны для конической поверхности очень мал. Отраженная от каустики волна имеет место при $m < k\rho_{\min}$. В явном виде ее вклад может быть выделен наиболее просто из выражения (92) заменой функции g на $jg_2/2$. Как показывают расчеты, уровень вклада $Y_{21}^{(2)}$ в рассматриваемом случае составляет не более −110 дБ.

Рассмотрим взаимную проводимость кольцевых щелей, расположенных на конической части «усеченного» конуса с гладкой образующей, показанной на рис. 1. Для применимости развитой теории необходима непрерывность функции $\rho(z)$, а также ее первой и второй производных в точке стыка $z = z_0$. Как следует из формул (79) и (85), вклад прямой волны во взаимную проводимость щелей, расположенных на конической поверхности, не зависит от параметров поверхности «шапочки», а вклад волны, отраженной от каустики очень мал.

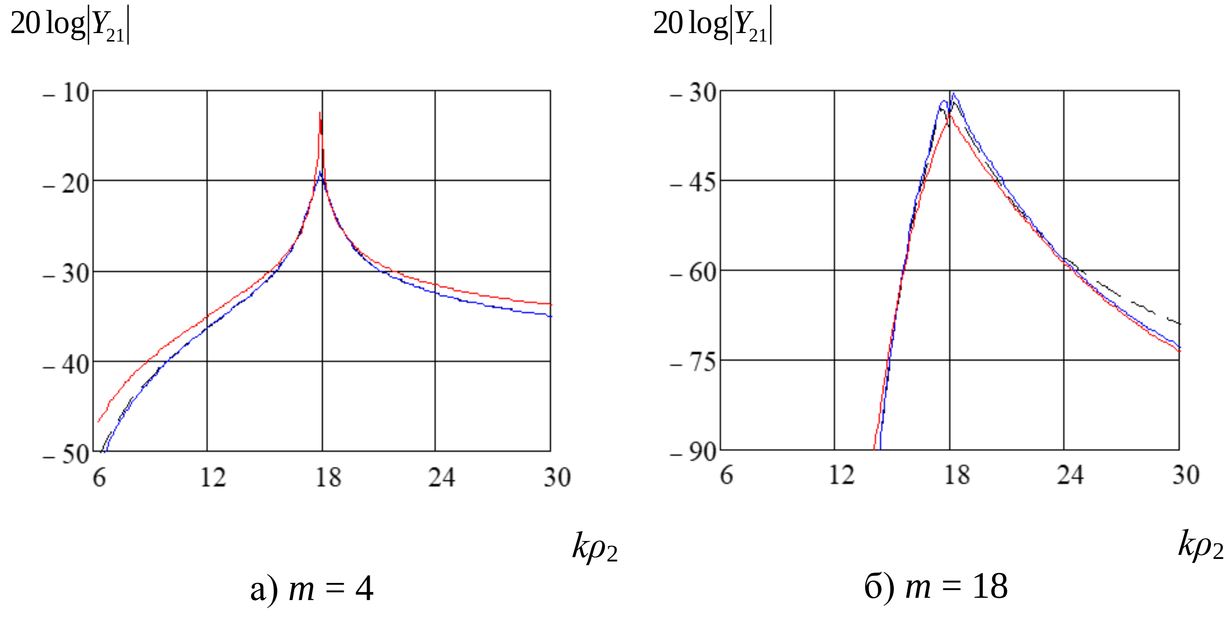

Рис. 4. Модуль взаимной проводимости кольцевых щелей: красная линия – метод собственных функций, синяя линия – сумма ряда вычетов (92), пунктирная линия – сумма ряда вычетов (88)

Таким образом, результаты расчета, полученные для полубесконечного конуса, асимптотически применимы и для плавно усеченного конуса при расположении щелей на конической части поверхности. При нарушении непрерывности первой или второй производной образующей $\rho(z)$ в точке стыка $z = z_0$, на этой неоднородности возникнут вторичные дифракционные лучи.

Приложение. Асимптотика строгого решения для взаимной проводимости кольцевых щелей на конусе

Выражение для взаимной проводимости кольцевых щелей на конусе с нулевой гармоникой магнитного тока $m = 0$ имеет вид [9]

$$Y(r_1, r_2) = 2\pi \frac{kr_1 kr_2}{Z} \sin\theta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\nu_i + 1}{\nu_i(\nu_i + 1)} \left. \frac{\dfrac{\partial P_\nu(\cos\theta)}{\partial\theta}}{\dfrac{\partial P_\nu(\cos\theta)}{\partial\nu}} \right|_{\nu=\nu_i} \cdot j_{\nu_i}(kr_{\min}) h_{\nu_i}^{(2)}(kr_{\max}), \quad (П.1)$$

где P_ν – функция Лежандра, ν_i – ее нули: $P_\nu(\cos\theta) = 0$, $\theta = \pi - \alpha$,

$$j_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(x), \qquad h_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(2)}(x) \quad (П.2)$$

– сферические функции Бесселя. Применив к формуле (П.1) формулу суммирования Пуассона [10], запишем ее в виде:

$$\begin{gathered} Y(r_1, r_2) = 2\pi \frac{kr_1 kr_2}{Z} \sin\theta \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{\nu_1}^{\infty} \frac{2\nu + 1}{\nu(\nu + 1)} \left. \frac{\dfrac{\partial P_\nu(\cos\theta)}{\partial\theta}}{\dfrac{\partial P_\nu(\cos\theta)}{\partial\nu}} \right|_{\theta=\pi-\alpha} \times \\ \times j_\nu(kr_{\min}) h_\nu^{(2)}(kr_{\max}) e^{j2\pi p i(\nu)} \frac{d\nu}{\left(\dfrac{d\nu}{di}\right)} \end{gathered}, \quad (П.3)$$

и заменой переменной интегрирования $\nu \to \nu - 1/2$, получим:

$$\begin{gathered} Y(r_1, r_2) = 2\pi \frac{kr_1 kr_2}{Z} \sin\theta \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{\nu_1+1/2}^{\infty} \frac{2\nu}{\left(\nu^2 - 1/4\right)} \frac{\dfrac{\partial P_{\nu-1/2}(\cos\theta)}{\partial\theta}}{\dfrac{\partial P_{\nu-1/2}(\cos\theta)}{\partial\nu}} \times \\ \times j_{\nu-1/2}(kr_{\min}) h_{\nu-1/2}^{(2)}(kr_{\max}) e^{j2\pi p i(\nu-1/2)} \frac{d\nu}{\left(\dfrac{d\nu}{di}\right)} \end{gathered} \quad (П.4)$$

Главный вклад в проводимость описывает нулевой член ряда с $p = 0$, при этом главный вклад в интеграл дает область $\nu \approx kr\sin\alpha$. Если щели удалены от вершины конуса, то $\nu >> 1$ и можно воспользоваться асимптотикой функций Лежандра [8]:

$$P_{\nu-1/2}(\cos\theta) \cong -\sqrt{\frac{2}{\pi\nu\sin\theta}}\cos\left[\nu\theta - \frac{\pi}{4}\right]. \qquad (П.5)$$

Тогда:

$$\frac{\dfrac{\partial P_{\nu-1/2}(\cos\theta)}{\partial\theta}}{\dfrac{\partial P_{\nu-1/2}(\cos\theta)}{\partial\nu}} \cong \frac{\nu}{\theta}, \qquad (П.6)$$

нули функции Лежандра $P_{\nu-1/2}(\cos\theta)$:

$$\nu_i \approx \frac{\pi}{\theta}\left(i - \frac{1}{4}\right), \qquad (П.7)$$

их производная по номеру:

$$\frac{d\nu_i}{di} \cong \frac{\pi}{\theta}, \qquad (П.9)$$

и обратная функция от (П.7):

$$i = \frac{\theta\nu}{\pi} + \frac{1}{4}. \qquad (П.9)$$

В результате:

$$Y(r_1, r_2) \cong \frac{4kr_1kr_2}{Z}\sin\theta\int_0^\infty j_{\nu-1/2}(kr_{\min})h^{(2)}_{\nu-1/2}(kr_{\max})\,d\nu. \qquad (П.10)$$

Раскрывая сферические функции Бесселя (П.2), получим:

$$Y(r_1, r_2) \cong \frac{2\pi\sqrt{k\rho_1 k\rho_2}}{Z}\int_0^\infty J_\nu(kr_{\min})H^{(2)}_\nu(kr_{\max})\,d\nu. \qquad (П.11)$$

Используем теорему сложения для бесселевых функций [8]:

$$H_0^{(2)}\big(k(r_2 - r_1)\big) = J_0(kr_1)H_0^{(2)}(kr_2) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(kr_1)H_n^{(2)}(kr_2)\ ,\ r_2 > r_1. \qquad (П.12)$$

Применив формулу суммирования Пуассона, отбросив все члены ряда, кроме нулевого, и удваивая первое слагаемое, имеющее порядок $1/k\sqrt{r_1r_2}$, получим:

$$H_0^{(2)}(k|r_2 - r_1|) \cong 2\int_0^\infty J_\nu(kr_{\min})H_\nu^{(2)}(kr_{\max})d\nu\,. \tag{П.13}$$

Сопоставив (П.11) и (П.13), найдем приближенное выражение для взаимной проводимости бесконечно узких кольцевых щелей на конусе при больших $k\rho_{1,2}$:

$$Y(r_1, r_2) \cong \frac{\pi\sqrt{k\rho_1 k\rho_2}}{Z} H_0^{(2)}\left(k|r_2 - r_1|\right). \tag{П.14}$$

Заключение

Получены приближенные асимптотические выражения для электромагнитного поля, создаваемого источниками в виде поверхностных магнитных и электрических токов, расположенных в приповерхностном слое толщиной порядка длины волны, над произвольной гладкой выпуклой проводящей поверхностью вращения большого размера. Эти выражения имеют вид суммы ряда азимутальных гармоник и интеграла по непрерывному спектру собственных функций поля. Выражения для собственных функций получены из решения асимптотически упрощенных уравнений электромагнитного поля и выражаются через функции Эйри. Коэффициенты ряда выражены интегралами от заданного распределения источников с собственными функциями. Асимптотические выражения электромагнитного поля представлены в двух альтернативных формах, соответствующих представлению собственных функций в интегральной и замкнутой форме через функции Эйри, равномерной для случая поверхности вращения с одним полюсом. Выражения поля учитывают неразделимость полного поля на сумму полей *E*- и *H*-типа, равномерно справедливы в приповерхностном слое поверхности, исключая окрестности полюсов поверхности вращения, и не имеют разрывов на каустиках поверхностных лучей.

Полученные выражения применены для расчета взаимных проводимостей кольцевых щелей на конической поверхности, в том числе усеченной без нарушения гладкости. Проведено сравнение результатов расчета взаимной проводимости щелей с результатами строгого расчета методом собственных функций для полубесконечного конуса. Показано, что полученное выражение для взаимной проводимости для полубесконечного конуса в случае нулевой гармоники магнитного тока щели совпадает с главным членом асимптотики строгого решения на основе метода собственных функций.

Финансирование: Оставить пустым если финансирование отсутствует.

Литература

1. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. *Возбуждение электромагнитных волн*. Москва, Радио и связь. 1983. 296 с.
2. Вайнштейн Л.А. *Электромагнитные волны*. Москва, Радио и связь. 1988. 440 с.
3. Инденбом М.В. Приближенные асимптотические выражения для электромагнитного поля и взаимной проводимости щелей в проводящей выпуклой поверхности вращения в виде рядов по азимутальным гармоникам. *Журнал радиоэлектроники* [Электронное издание]. 2021. № 9. https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.9.2
4. Маслов В.П. *Операторные методы*. Москва, Наука, Физматгиз. 1973. 543 с.
5. Фелсен Л., Маркувец Н. *Излучение и рассеяние волн*. Том 1. Пер. с англ. под ред. М.Л. Левина. Москва, Мир. 1978. 547 с.
6. Федорюк М.В. *Асимптотика. Интегралы и ряды*. Москва, Наука. 1987. 544 с.
7. Фельд Я.Н., Бененсон Л.С. *Основы теории антенн*. Москва, Дрофа. 2007. 491 с.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. Москва, Наука, Физматгиз. 1971. 1108 с.
9. Инденбом М.В., Скуратов В.А. Модальный подход в методе расчета осесимметричных антенных решеток с учетом взаимодействия щелевых излучателей на основе разложения электромагнитного поля по

собственным функциям внешней области поверхности антенны. *Радиотехника*. 2021. № 5. С.117-131.

10. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике*. Москва, Наука. 1984. 831 с.

Для цитирования:

Инденбом М.В. Приближенные асимптотические выражения электромагнитного поля источников вблизи гладкой выпуклой проводящей поверхности вращения. *Журнал радиоэлектроники* [Электронное издание]. 2023 №5. https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.5.2