

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.5.5>

УДК: 537.874; 537.624

# МЕТОД ОБОБЩЕННОГО ИМПЕДАНСА ДЛЯ РАСЧЕТА ОТРАЖЕНИЯ И ПРОХОЖДЕНИЯ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ МНОГОСЛОЙНУЮ СТРУКТУРУ. ЧАСТЬ 4. КРИТЕРИЙ ПРИМЕНИМОСТИ СТУПЕНЧАТОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

И.В. Антонец <sup>1</sup>, В.Г. Шавров <sup>2</sup>, В.И. Щеглов <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Сыктывкарский государственный университет им. П.Сорокина  
167001, Сыктывкар, Октябрьский пр-т, 55

<sup>2</sup> Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН  
125009, Москва, ул. Моховая, 11, к.7

Статья поступила в редакцию 28 марта 2023 г.

**Аннотация.** Рассмотрена корректность применения ступенчатого приближения для расчета коэффициентов отражения, прохождения и поглощения при падении волны на многослойную структуру. Исходным распределением является линейное нарастание волнового числа от начальной до конечной точек структуры. В качестве приближения использовано представление структуры в виде совокупности слоев, в каждом из которых волновое число сохраняется постоянным, а от слоя к слою возрастает ступенчатым образом. Сформированы 12 распределений с возрастающей дробностью разбиения структуры на ступеньки. Показано, что зависимость коэффициента отражения от степени дробности структуры при фиксированной ее длине имеет сильно изрезанный резонансный характер. Показано, что для исключения возможности возбуждения резонансов половина минимальной по структуре длины волны должна быть больше длины структуры в целом. Из такого требования получено критическое значение волнового числа, равное отношению числа «пи» к длине структуры в

целом. Установлено, что корректным приближением линейного роста ступенчатым является такое, при котором максимальное по длине структуры волновое число меньше критического. Отмечено, что на практике вблизи критического значения для достижения корректности (в пределах 5%) достаточно разбиения структуры на семь ступенек равной высоты и протяженности. При превышении максимальным волновым числом критического значения никакое увеличение дробности разбиения (то есть увеличение числа ступенек) к повышению точности приближения линейной структуры ступенчатой не приводит.

**Ключевые слова:** распространение волн, многослойная структура, импеданс.

**Финансирование:** Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

**Автор для переписки:** Щеглов Владимир Игнатьевич, [vshcheg@cplire.ru](mailto:vshcheg@cplire.ru)

## Введение

Вопросы распространения волн различной природы в неоднородных средах привлекают значительное внимание исследователей [1-10].

Среди важнейших областей применения таких явлений следует упомянуть просветление оптики [2, стр. 91-99], создание интерференционных светофильтров [2, стр. 99-104] и слоистой звукоизоляции [2, стр. 104-110]. Значительное прикладное значение имеют задачи синтеза, управления и диагностики пространственно неоднородных сред и многослойных структур [3, стр. 77-96, 687-693]. Важную роль играет исследование тонкослойных интерференционных структур с двух-, трех- и многослойным периодом, а также аперодических многослойных структур, использование матричного математического аппарата для которых позволяет определить такие эффективные параметры, как оптическую толщину [9] и оптический показатель преломления [10].

Важнейшими задачами являются получение коэффициентов отражения и прохождения по энергии, характеризующие структуру в целом [3, стр. 85-87].

Традиционным приемом для решения многих из перечисленных задач является представление исследуемой среды в виде слоистой структуры, в пределах каждого слоя которой параметры среды остаются однородными [2,3,11,12]. В большинстве практических случаев рассматривается падение волны на небольшое число слоев, как правило, не более двух-трех, после чего указывается на возможность распространения применяемого аппарата на произвольное число слоев. Таким образом, плавная среда заменяется ступенчатой, причем, как правило, ограничения такого приближения подробно не рассматриваются, а просто постулируется, что длина каждого слоя и длина структуры в целом должны быть значительно меньше длины волны [6, стр. 162].

Наиболее общим методом решения задач о распространении волн в слоистых структурах является прямой метод, состоящий в независимом решении волновых уравнений в каждом слое с последующим сшиванием полученных решений на основе граничных условий [13-15]. Значительная громоздкость применения такого метода для числа слоев более пяти вынуждает использовать методы последовательного пересчета решений из одного слоя в другой по всей структуре. В числе наиболее употребительных здесь следует отметить метод матрицы [3,15,16] и метод импеданса [2,17].

В работах [18-20] метод матрицы применен для расчета падения волны на наклонный барьер. Предложен алгоритм расчета, удобный для машинной реализации, рассмотрены случаи различной крутизны барьера, выявлены зависимости коэффициентов отражения и прохождения от параметров структуры.

Работы [21-23] посвящены применению метода импеданса для расчета распространения волн через структуру со ступенчатой неоднородностью. В работе [21] на примере одномерной волны введено понятие обобщенного импеданса, характеризующего зависимость амплитуд волн прямого и встречного направлений от координаты с учетом параметров среды и частоты волны. В работе [22] приведен алгоритм расчета отражения и прохождения, состоящий в

применении рекуррентных формул последовательного пересчета импедансов и амплитуд. Рассчитаны входные импедансы слоев структуры, а также коэффициенты отражения и прохождения при падении волны на прямоугольный барьер различной высоты и протяженности. В работе [23] методом импеданса в варианте пересчета амплитуд рассмотрено падение волны на ступенчато нарастающий барьер. Получен критерий применимости метода импеданса для расчета коэффициентов отражения и прохождения.

Настоящая работа является продолжением и дальнейшим развитием работ [21-23]. Рассмотрено приближение плавно нарастающей неоднородности ступенчатой структурой в виде наклонного барьера с различной степенью дробности разбиения на ступеньки. Выявлена корректность использования ступенчатого приближения и приведены оптимальные условия его реализации.

## 1. Общая геометрия задачи

Общая геометрия задачи показана на рис. 1. Структура представляет собой единый слой или «барьер», ограниченный плоскими границами, обозначенными буквами А и В. Ось координат  $Ox$  ориентирована перпендикулярно плоскостям границ слоя. Начало структуры соответствует координате  $x_0$ , конец – координате  $x_N$ . Внутри структуры в целом параметры среды могут плавно меняться произвольным образом. В общем случае слой разбит на множество частичных слоев, внутри каждого из которых параметры среды полагаются постоянными. Разбиение структуры на частичные слои и предположение о постоянстве среды внутри каждого такого слоя является «ступенчатым» приближением, применимость которого рассматривается далее. Частичные слои будем считать пронумерованными от нуля до  $N$ , так что поверхность раздела между слоями  $n$  и  $n + 1$  соответствует граница с координатой  $x_n$ .

На структуру со стороны начала координат падает волна 1, отражается от слоя в обратном направлении волна 2, проходит через структуру волна 3. Внутри каждого частичного слоя распространяются две волны прямого

(в положительном направлении оси  $Ox$ ) и обратного (в отрицательном направлении той же оси) направлений. Все волны будем считать имеющими гармонический характер, то есть описываемыми экспонентами с мнимым показателем или тригонометрическими функциями типа синуса или косинуса.

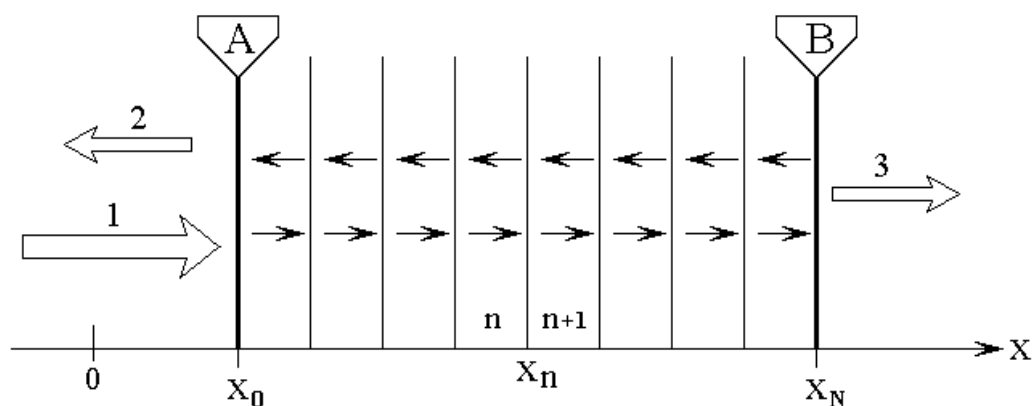


Рис. 1. Общая геометрия задачи. Границы структуры обозначены буквами А и В. Внизу показана схема частичных слоев с номерами  $n$  и  $n + 1$ , разделенных границей при координате  $x_n$ . Стрелками внутри слоев показаны волны прямого и обратного направлений. Большие стрелки вне структуры соответствуют волне падающей (1), отраженной (2) и проходящей (3)

## 2. Ступенчатое приближение

Будем считать, что параметры среды внутри структуры полностью определяют волновое число волны, распространяющейся в структуре. Другим параметром волны будем считать ее амплитуду. Для гармонических волн такое определение можно считать исчерпывающим. Для амплитуд волн, распространяющихся в положительном направлении оси  $Ox$ , введем обозначения  $A_n$ , для амплитуд волн, распространяющихся в отрицательном направлении той же оси – обозначения  $B_n$  с соответствующими индексами слоев  $n$ .

На рис. 2 показана схема представления линейной неоднородности в виде ступенчатой структуры. За параметр частичных сред считаем волновое число. Составляющие части рисунка сверху вниз иллюстрируют последовательное приближение линейной зависимости волнового числа от координаты (а)

ступенчатой зависимостью волнового числа от той же координаты (б,в).  
 Рассмотрим части рисунка более подробно.

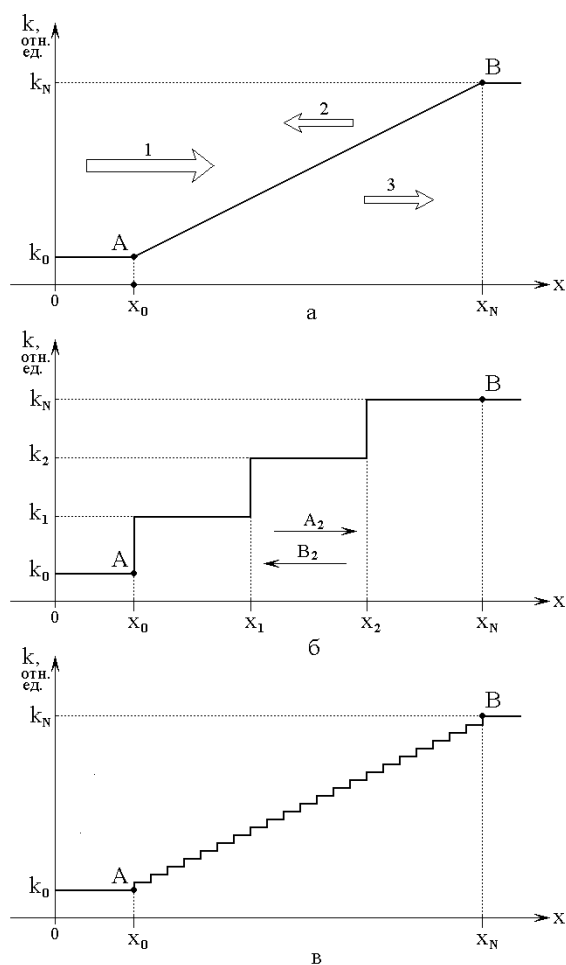


Рис. 2. Представление линейной неоднородности в виде ступенчатого приближения. а – исходная структура между точками А и В; б – разбиение исходной структуры на три ступеньки; в – разбиение исходной структуры на 22 ступеньки

На рис. 2а показано распределение волнового числа по длине структуры в случае, когда такое число зависит от координаты линейным образом в соответствии с формулой:

$$k = k_0 + \frac{k_N - k_0}{x_N - x_0} \cdot x. \quad (1)$$

На рис. 2б показано приближение зависимости волнового числа от координаты в виде трех ступенек. Такое приближение соответствует изменению волнового числа в тех же пределах в том же интервале координат, выполненному в виде трех подобных друг другу прямоугольных ступенек. В слое, заключенном

между координатами  $x_1$  и  $x_2$ , распространяются две волны: в прямом направлении волна  $A_2$ , в обратном – волна  $B_2$ . В других ступеньках волны распространяются аналогичным образом.

На рис. 2в показано разбиение исходной структуры на 22 ступеньки, так что приближение зависимости волнового числа от координаты можно считать значительно более близким, чем при всего трех ступеньках. Волны внутри каждой ступеньки распространяются аналогично показанным на рис. 2б. Можно полагать, что с увеличением числа ступенек, то есть с уменьшением их относительного размера, приближение становится все более точным и в пределе стремится к наклонной линии, определяемой формулой (1).

### 3. Схема ступенчатой структуры

В качестве базовой возьмем ту же структуру ступенчато нарастающего барьера, что рассматривалась в работе [23]. Схема структуры, совпадающая с принятой в той же работе, показана на рис. 3.

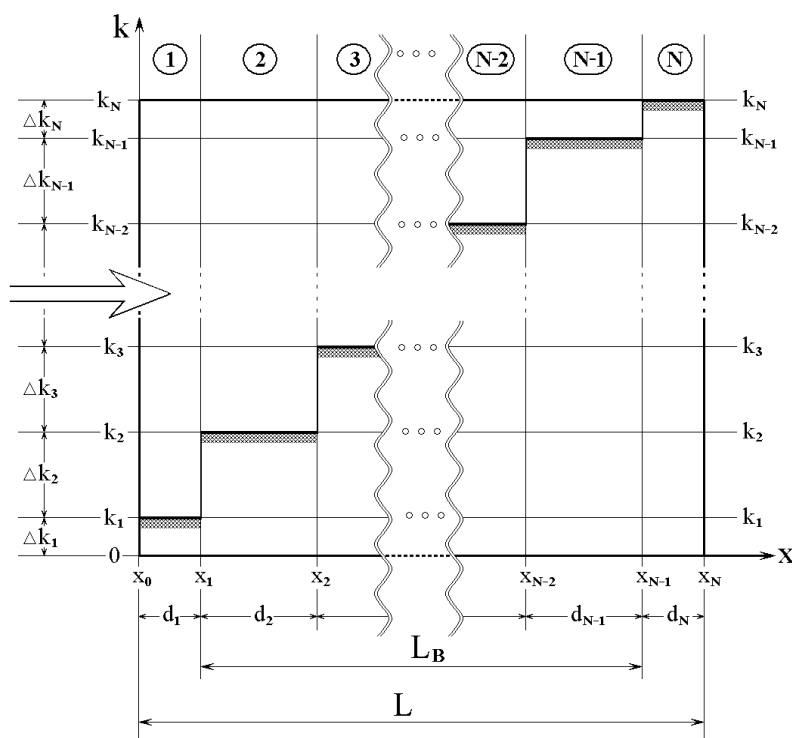


Рис. 3. Схема базовой ступенчатой структуры. Вверху в кругах – номера частичных слоев. По горизонтали отложены координаты границ между слоями. По вертикали отложены соответствующие значения волнового числа. Слева стрелкой показано направление падения исходной волны

Структура содержит  $N$  ступенек или частичных слоев, пронумерованных от  $1$  до  $N$ . Ось координат  $Ox$  перпендикулярна плоскостям слоев. Границы между слоями имеют координаты от  $x_0$  до  $x_N$ . Длины участков, соответствующих отдельным слоям структуры, определяются по формуле:

$$d_n = x_n - x_{n-1}, \quad (2)$$

где  $n$  – номер участка, меняющийся от  $1$  до  $N$ .

Внутри каждого слоя среда является однородной, однако параметры сред в различных слоях могут между собой различаться.

Внутри каждой среды вдоль оси  $Ox$  могут распространяться волны в обоих направлениях. Будем считать заданными для этих волн волновые числа, номера которых установим теми же, что и номера частичных слоев.

Началом структуры будем считать внешнюю сторону первой среды, соответствующую координате  $x_0$ . Концом структуры будем считать внешнюю сторону последней среды, соответствующую координате  $x_N$ .

Будем считать структуру, состоящей из трех основных участков: входного, выходного и барьера между ними. От начала структуры, то есть от координаты  $x_0$  до окончания первой среды, то есть до координаты  $x_1$  – входной участок структуры. На конце структуры, то есть от координаты  $x_{N-1}$  до  $x_N$  – выходной участок структуры. Часть структуры между входным и выходным участками, то есть от координаты  $x_1$  до координаты  $x_{N-1}$  будем называть «барьером» между входным и выходным участками. Этот барьер может состоять из нескольких отдельных сред (слоев), число которых будет определяться конкретными условиями задачи. Полную длину структуры обозначим через  $L$ , а длину барьера – через  $L_B$ .

Параметры входного и выходного участков структуры, то есть их длины и волновые числа распространяющихся в них волн будем считать неизменными, заданными начальными условиями задачи. Параметры составляющих барьер участков будем задавать в соответствии с данными конкретной задачи.



Падающей волной в структуре будем считать волну, распространяющуюся в слое  $I$  в положительном направлении оси  $Ox$ . Отраженная от структуры волна – в том же слое  $I$ , но распространяющаяся в отрицательном направлении оси  $Ox$ . Проходящей волной будем считать волну, распространяющуюся в слое  $N$  в положительном направлении оси  $Ox$ .

Будем считать, что на обоих концах структуры, то есть при координатах  $x_0$  и  $x_N$  отражение волн того и другого направлений отсутствует.

Для удобства рассмотрения для каждого слоя введем «приращение» волнового числа, равное разности между волновым числом данного участка и предыдущего:

$$\Delta k_n = k_n - k_{n-1}, \quad (3)$$

где  $n$  – номер слоя.

#### 4. Общие характеристики распространяющихся волн

В структуре распространяются волны прямого и встречного направлений вдоль оси  $Ox$ . Те и другие волны подчиняются одномерному волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \quad (4)$$

где  $G$  – волновая функция,  $a$  – фазовая скорость волны.

При гармонической зависимости от времени типа

$$G = U e^{i\omega t} \quad (5)$$

координатная часть этого уравнения принимает вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + k^2 U = 0, \quad (6)$$

где  $k = \frac{\omega}{a} \quad (7)$

волновое число.

Решение этого уравнения представляет собой две волны – прямую, распространяющуюся в положительном направлении оси  $Ox$  и обратную, распространяющуюся в отрицательном направлении той же оси. Полное решение имеет вид:

$$U = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}, \quad (8)$$

где  $A$  и  $B$  – постоянные, которые должны быть определены из граничных условий, причем первое слагаемое соответствует прямой волне, второе – обратной.

Далее амплитуды волн прямого направления будем обозначать буквой  $A$  с соответствующим индексом внизу, амплитуды волн обратного направления – буквой  $B$  также с индексом внизу. Таким образом, например,  $A_1$  – волна прямого направления в среде  $1$ ,  $A_n$  – амплитуда волны прямого направления в среде с номером  $n$ ,  $B_1$  и  $B_n$  – амплитуды волн обратного направления в тех же средах.

Для дальнейшего рассмотрения будет важен нулевой и обобщенный импеданс распространяющихся волн. Нулевой импеданс в среде с номером  $n$ , согласно [22, форм. (5)], является величиной, обратной к волновому числу в этой среде:

$$Z_{n0} = \frac{1}{k_n}. \quad (9)$$

Обобщенный импеданс [21, форм. (26)] в той же среде равен:

$$Z_n = Z_{n0} \frac{A_n e^{-ik_n x} + B_n e^{ik_n x}}{A_n e^{-ik_n x} - B_n e^{ik_n x}}. \quad (10)$$

При расчете будем пользоваться полученными в работе [21] рекуррентными формулами (105), (106) для пересчета амплитуд от конца структуры к ее началу:

$$A_{n-1} = \frac{A_n(Z_{(n-1)0} + Z_{n0}) - B_n(Z_{(n-1)0} - Z_{n0}) \cdot e^{-ik_n d_n}}{2Z_{n0}} \cdot e^{ik_{n-1} d_{n-1}}; \quad (11)$$

$$B_{n-1} = \frac{-A_n(Z_{(n-1)0} - Z_{n0}) + B_n(Z_{(n-1)0} + Z_{n0}) \cdot e^{-ik_n d_n}}{2Z_{n0}}. \quad (12)$$

Для расчета коэффициентов отражения и прохождения будем использовать приведенные в работе [21] формулы (124), (125): .

$$R_e = \left| \frac{B_I(A_I)}{A_I} \right|^2; \quad (13)$$

$$T_e = \left| \frac{A_N(A_I)}{A_I} \right|^2 \cdot Re \left( \frac{k_{N0}}{k_{I0}} \right). \quad (14)$$

При этом коэффициент поглощения, в соответствии с законом сохранения энергии, имеет вид (работа [22], форм. (13)):

$$A_e = I - R_e - T_e. \quad (15)$$

## 5. Базовые распределения волновых чисел

Основной целью настоящей работы является выявление условий применимости ступенчатого приближения. Можно полагать, что с увеличением числа ступенек по волновому числу, то есть по мере увеличения дробности разбиения исходной структуры, точность приближения должна возрастать. Для проверки такого предположения рассмотрим последовательное увеличение дробности разбиения исходной структуры на ступеньки по волновому числу. Используемые далее схемы распределений волновых чисел показаны на рис. 4.

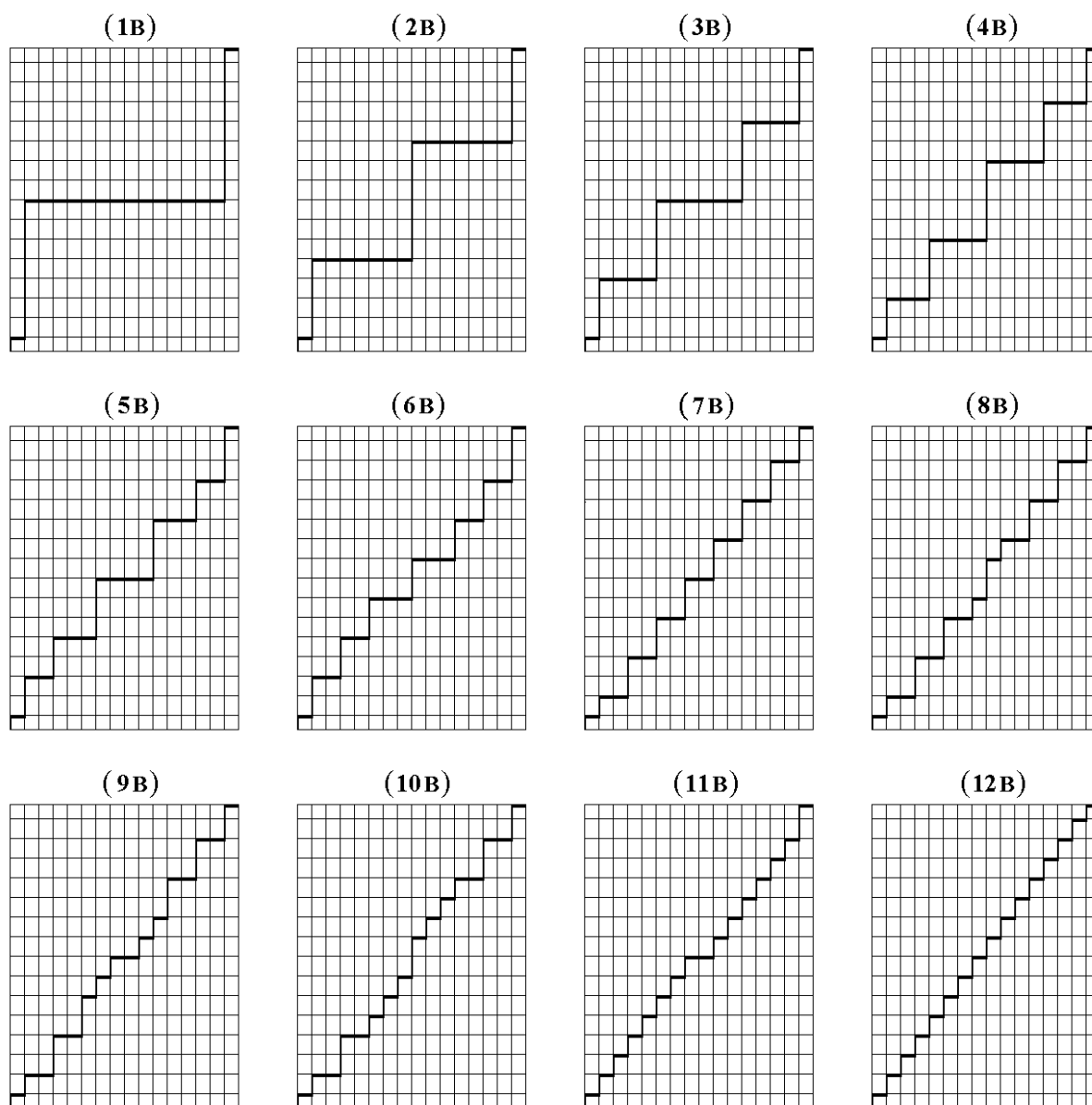


Рис. 4. Схемы базовых распределений волновых чисел. Все схемы представлены в двух координатах: по горизонтали – координата  $x$ , по вертикали – волновое число  $k$ . Клетки на рисунках соответствуют единичным шагам по координате и по волновому числу. Рассматривается 12 распределений пронумерованных от  $1B$  до  $12B$ .

В представленных на рис. 4 распределениях ступеньки как по координате, так и по волновому числу внутри каждого распределения сохраняются одинаковыми. Некоторые отклонения, составляющие в пределах одной ступенчатой единицы, вызваны желанием работать с целыми числами.

Значения волновых чисел в пределах соответствующих распределений приведены в таблице №1. Все числа приведены в относительных единицах.

Таблица №1. Базовые распределения волновых чисел

		НОМЕРА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ											
		1В	2В	3В	4В	5В	6В	7В	8В	9В	10В	11В	12В
НОМЕРА СЛОЕВ	1S	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2S	8	5	4	3	3	3	2	2	2	2	2	2
	3S	8	5	4	3	3	3	2	2	2	2	3	3
	4S	8	5	4	3	5	5	4	4	4	4	4	4
	5S	8	5	4	6	5	5	4	4	4	4	5	5
	6S	8	5	8	6	5	7	6	6	6	5	6	6
	7S	8	5	8	6	8	7	6	6	7	6	7	7
	8S	8	5	8	6	8	7	8	7	8	7	8	8
	9S	8	11	8	10	8	9	8	9	8	9	8	9
	10S	8	11	8	10	8	9	10	10	9	10	9	10
	11S	8	11	8	10	11	9	10	10	10	11	10	11
	12S	8	11	12	10	11	11	12	12	12	12	11	12
	13S	8	11	12	13	11	11	12	12	12	12	12	13
	14S	8	11	12	13	13	13	14	14	14	14	13	14
	15S	8	11	12	13	13	13	14	14	14	14	14	15
	16S	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16

Вертикальные столбцы таблицы, пронумерованные от *1В* до *12В* соответствуют различным распределениям. Горизонтальные строки таблицы, пронумерованные от *1S* до *16S* соответствуют порядковым значениям волновых чисел в различных распределениях.

Из таблицы видно, что при распределении *1В* волновые числа только в пределах первого и последнего слоев (по координатам от  $x_0$  до  $x_1$  и от  $x_{15}$  до  $x_{16}$ ) имеют крайние значения 1 и 16 отн.ед., соответствующие точкам А и В на рис. 2а, тогда как во всех остальных слоях волновые числа равны 8 отн.ед. Такое распределение представлено на рис. 4 под номером *1В*.

При распределении *2В* вся промежуточная часть структуры между первым и последним слоями уже содержит две ступеньки одинаковой длины по 7 отн.ед. с волновыми числами 5 и 11 отн.ед. Такое распределение представлено на рис. 4 под номером *2В*.

Дальнейшие распределения соответствуют последовательному разбиению внутреннего участка структуры (между  $x_1$  и  $x_{15}$ ) на все более мелкие участки,

вплоть до распределения  $I2S$ , когда длина каждого частичного участка по координате и по волновому числу принимает единичное значение.

**Замечание.** Рассмотренные здесь распределения волновых чисел не являются единственно возможными, а обусловлены лишь принятым в рамках настоящей работы требованием их целочисленного характера. В общем случае ступенчатое приближение может выполняться при любых других, в том числе дробных градациях по координате и волновому числу. Необходимо лишь, чтобы по мере увеличения числа ступенек получающаяся ступенчатая кривая все более приближалась к линейной, показанной на рис. 2а.

## 6. Критическое значение максимального волнового числа

Рассмотрим теперь, как меняется коэффициент отражения при изменении дробности ступенчатой структуры.

В принятом масштабе относительных единиц базовые значения волнового числа, приведенные в таблице №1 и на рис. 4, по отношению к полной длине структуры, равной 16 отн.ед., слишком велики. При этом волна в процессе распространения испытывает многократные переотражения, приводящие к сильной изрезанности зависимости коэффициента отражения от длины структуры. Пример результата интерференционного наложения переотраженных волн можно видеть на рис. 3 (кривые 1, 2) в работе [23]. Интерференция прекращается тогда, когда длина структуры становится того же порядка, что и длина волны. В настоящей работе длина структуры принята единой, равной 16 отн.ед., так что имеется возможность выбора только длины волны или волнового числа. Резонанс, обеспечивающий интерференционную картину, соответствует возбуждению первой моды, пространственная длина которой определяется половиной длины волны.

Если половина длины волны становится больше длины структуры, то условия для резонанса для такой волны отсутствуют (рис. 2а в работе [23]). Таким образом, все волны, длина которых превышает удвоенную длину структуры, резонансных переотражений не испытывают, так что в образовании

изрезанной картины не участвуют. Это обстоятельство накладывает ограничение на минимальную длину волны, то есть на максимальное волновое число. В рассматриваемой геометрии (рис. 2а) максимальное значение волнового числа равно 16 отн.ед., что соответствует длине волны 0,3927 отн.ед. Половина такой длины волны укладывается на полной длине структуры (16 отн.ед.) много раз, что приводит к многочисленным переотражениям волны внутри структуры. Чтобы избежать таких переотражений следует уменьшить максимальное волновое число, для чего введем нормирующий коэффициент  $G$ , заведомо меньший единицы, при котором максимальное волновое число получается равным:

$$k^{(max)} = k_B^{(max)} \cdot G. \quad (16)$$

Величина  $k_B^{(max)}$  получается как крайнее наибольшее значение волновых чисел, достигаемое при любом распределении. Это значение равно 16 отн.ед. (табл.№1, рис. 4). На рис. 5 показаны зависимости коэффициента отражения  $R$  от нормировочного коэффициента  $G$  при различных распределениях волновых чисел. Обозначения распределений соответствуют приведенным на рис. 4 и в таблице №1.

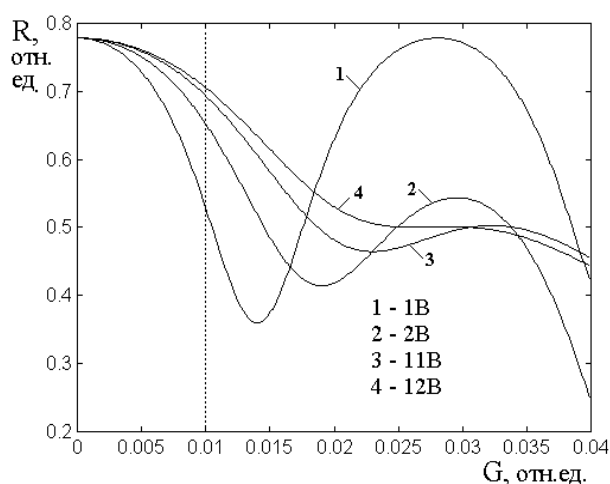


Рис. 5. Зависимости коэффициента отражения  $R$  от нормировочного коэффициента максимального волнового числа  $G$  при различных распределениях волновых чисел: 1 – 1В, 2 – 2В, 3 – 11В, 4 – 12В. Кривые получены по формуле (13) с учетом (11), (12) при использовании распределений, приведенных в таблице №1.

Из рисунка можно видеть, что все зависимости начинаются в одной точке при  $R_{e0} = 0.7785$  отн.ед., соответствующей  $k \rightarrow 0$  (раздел 5 в работе [23]). Далее, по мере увеличения параметра  $G$ , то есть величины  $k^{(max)}$  зависимости  $R$  от  $G$  при всех распределениях волновых чисел спадают, испытывая определенные осцилляции. Можно ожидать, что увеличение дробности распределения, то есть по мере перехода от распределения 1В к распределению 12В, значение коэффициента отражения при каждом заданном значении параметра  $G$  должно приходить к насыщению. Однако, задавая фиксированные значения параметра  $G$  и сопоставляя последовательные значения коэффициента отражения по кривым от 1 до 4, можно видеть, что устойчивое насыщение наблюдается только на начальном участке кривых при  $G \leq 0,01$  отн.ед. Так, при  $G = 0,01$  отн.ед (вертикальная точечная линия на рис5) последовательно проходимые по распределениям кривые 1 – 4 дают значения  $R$  равные 0,55, 0,64, 0,71 0,72 отн.ед., то есть по мере увеличения дробности распределения коэффициент отражения, монотонно возрастая, стремится к величине 0,72 отн.ед. При  $G = 0,02$  отн.ед. те же значения равны: 0,61, 0,41, 0,42, 0,54 отн.ед, то есть здесь насыщения не наблюдается. При  $G = 0,03$  отн.ед. для  $R$  получаем: 0,77, 0,53, 0,48, 0,48 отн.ед., а для  $G = 0,04$  получаем: 0,43, 0,26, 0,46, 0,45 отн.ед.

В последних трех случаях, то есть при  $G \geq 0,01$  отн.ед. насыщения  $R$  не происходит, так что здесь увеличение дробности ступенчатой структуры к улучшению приближения линейной зависимости ступенчатой не приводит.

Таким образом, критическим значением максимального волнового числа, при котором приближение достаточно корректно, можно считать величину  $k_c^{(max)} = 0,16$  отн.ед., что соответствует длине волны 39,27 отн.ед., половина которой равна 19,64 отн.ед. Полная длина структуры равна 16 отн.ед., так что половина критической длины волны эту величину превышает, то есть условия



для резонанса, приводящего к изрезанности зависимости  $R$  от длины структуры  $L$ , отсутствуют, что и обеспечивает корректность приближения.

Найдем оценку максимального волнового числа, исходя из условия, чтобы половина соответствующей ему длины волны  $\lambda_c$  была больше длины структуры.

Так, полагаем:

$$\frac{\lambda_{\tilde{n}}}{2} > L. \quad (17)$$

Учитывая связь между длиной волны и волновым числом в виде:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (18)$$

из (17) получаем:

$$k_c^{(max)} < \frac{\pi}{L}, \quad (19)$$

что дает  $k_c^{(max)} < 0,1963$  отн.ед. что довольно близко соответствует найденному выше эмпирическим путем значению  $0,16$  отн.ед.

Коэффициент прохождения  $T_e$  в отсутствие диссипации является дополнением коэффициента отражения  $R_e$  до единицы, так что все приведенные оценки остаются прежними. Введение затухания, то есть коэффициента поглощения  $A_e$  в соответствии с соотношением (15), также такого положения не изменяет, то есть критическое значение волнового числа  $k_c^{(max)}$  остается тем же самым.

## 7. Степень приближения линейной структуры ступенчатой

Рассмотрим степень приближения линейной структуры ступенчатой более подробно. Сначала обратимся к значениям волнового числа меньшим критического, то есть при  $G \leq 0,01$ . На рис. 6 приведены зависимости

коэффициента отражения  $R$  от номера распределения волновых чисел  $N_B$  при различных значениях нормирующего коэффициента  $G$ .

Из рисунка видно, что все зависимости по мере увеличения дробности структуры, то есть при переходе от распределения 1В к распределению 12В, стремятся к насыщению. При этом такое стремление выражено тем сильнее, чем величина параметра  $G$  меньше. Так, раньше всего насыщается кривая 1, для которой  $G = 0,002$  отн.ед., а позже всего – кривая 5, для которой  $G = 0,010$  отн.ед.

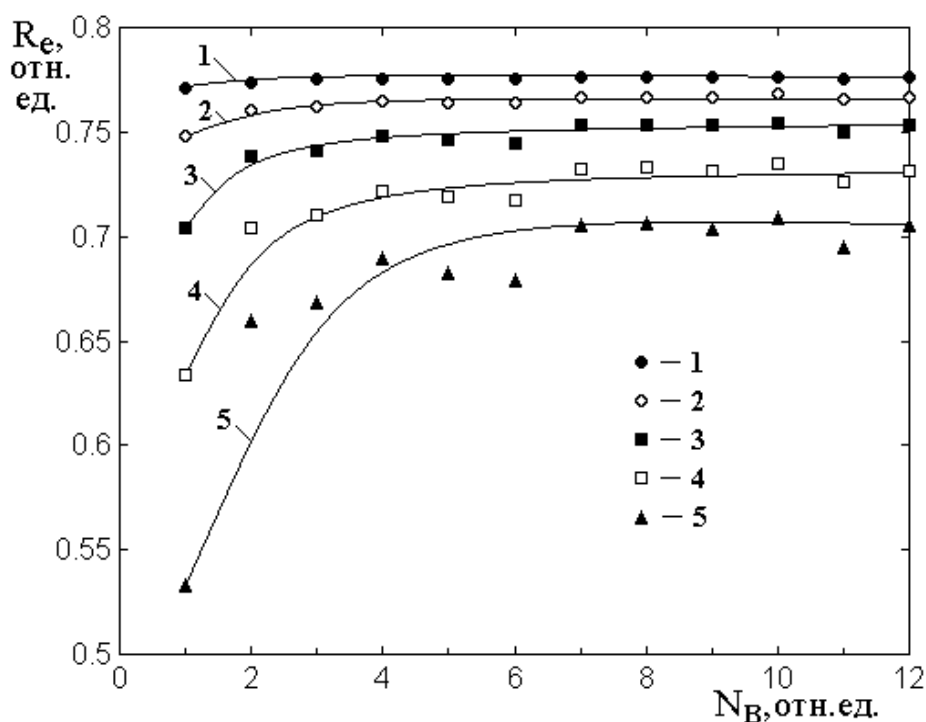


Рис. 6. Зависимости коэффициента отражения  $R$  от номера распределения волновых чисел  $N_B$  при различных значениях нормирующего коэффициента  $G$ : 1 – 0,002 отн.ед.; 2 – 0,004 отн.ед.; 3 – 0,006 отн.ед.; 4 – 0,008 отн.ед.; 5 – 0,010 отн.ед. Точки – результаты расчета по формуле (13) с учетом (11), (12) при использовании распределений, приведенных в таблице №1. Линии проведены, исходя из максимального приближения к точкам

Характер всех кривых одинаков: сначала по мере увеличения дробности они нарастают, после чего, начиная с некоторого значения  $N_B$  выходят на горизонтальный участок. Будем считать началом насыщения выход на горизонтальный участок с точностью около 5%. Насыщение соответствует

такому распределению ступенек, при котором приближение линейной структуры ступенчатой является достаточно корректным.

Можно видеть, что по мере увеличения параметра  $G$ , то есть максимального значения волнового числа, номер распределения, требуемый для начала насыщения, увеличивается. На рис. 7 приведена построенная по данным рис. 6 зависимость номера распределения  $N_B$  от параметра  $G$ , при котором кривые на рис. 6 выходят на насыщение. Точки соответствуют номерам распределений (с точностью до целых чисел), при которых кривые на рис. 6 выходят на горизонтальный участок.

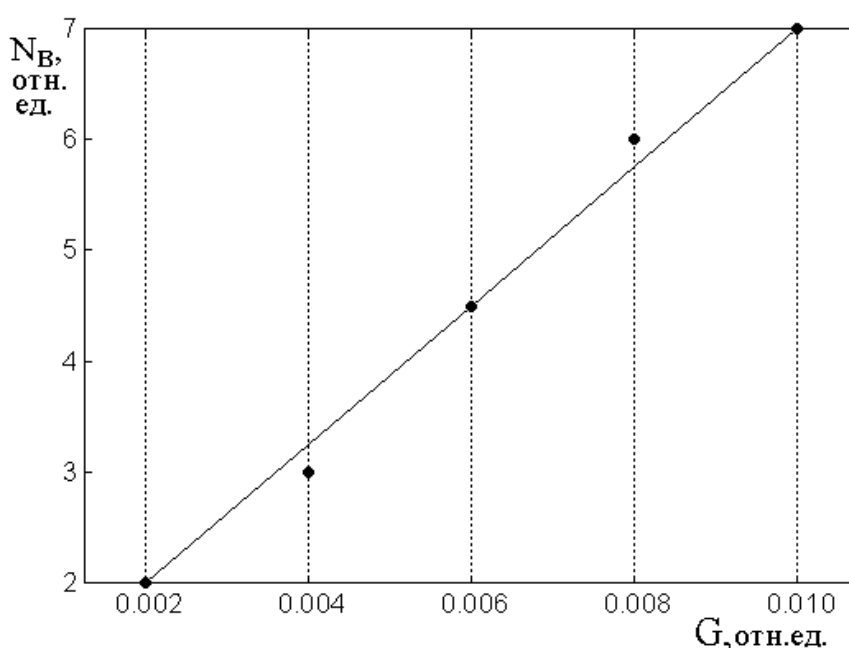


Рис. 7. Зависимость номера распределения  $N_B$  от параметра  $G$ , при котором кривые на рис. 6 выходят на насыщение. Наклонная прямая линия построена по формуле (20)

Из рисунка видно, что точки по мере увеличения  $G$  располагаются выше и выше, причем эти точки лежат вблизи прямой линии, определяемой формулой:

$$N_B = 0,75 + 625 \cdot G. \quad (20)$$

Таким образом, чем больше максимальное волновое число (формула (16)), тем дробность распределения ступенек структуры, требуемая для корректности приближения, должно быть более высокой (то есть, чем максимальное волновое число больше, тем ступенек требуется больше). При этом зависимость между

максимальным волновым числом и степенью дробности (то есть требуемым количеством ступенек) является линейной.

Рассмотрим теперь случай, когда значение волнового числа превышает критическое, то есть при  $G \geq 0,01$ . На рис. 8 приведены некоторые зависимости, подобные приведенным на рис. 6, построенные при  $k^{(max)} \geq k_c^{(max)}$ . Значения параметра  $G$  для соответствующих кривых приведены в подписи к рисунку.

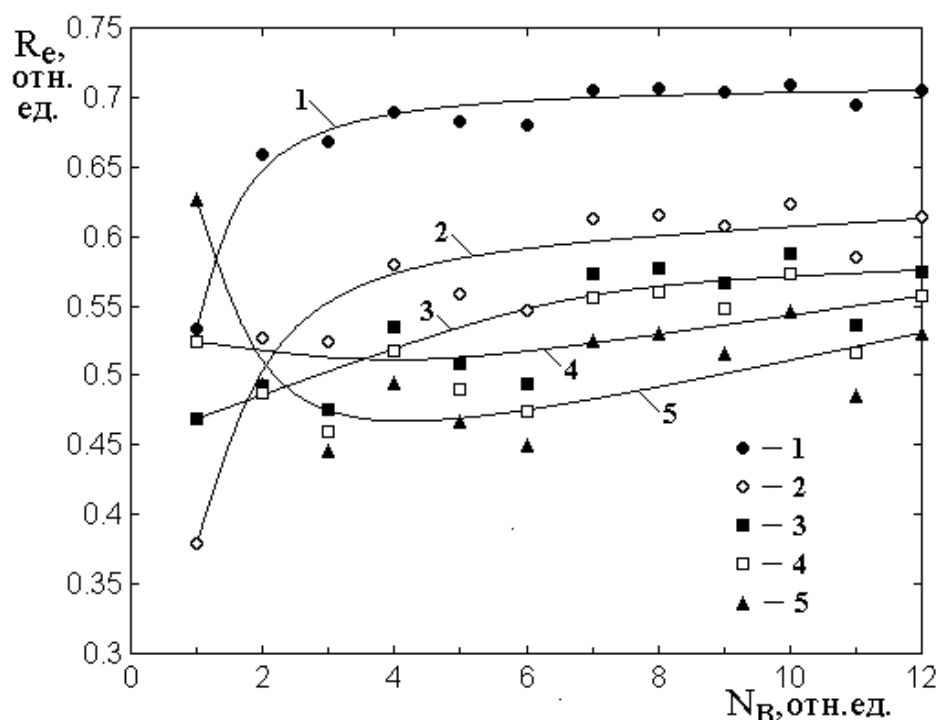


Рис. 8. Зависимости коэффициента отражения  $R$  от номера распределения волновых чисел  $N_B$  при различных значениях нормирующего коэффициента  $G$ : 1 – 0,010 отн.ед.; 2 – 0,015 отн.ед.; 3 – 0,017 отн.ед.; 4 – 0,018 отн.ед.; 5 – 0,020 отн.ед. Методика построения – та же, что для рис. 6

Из рисунка можно видеть, что кривые по-прежнему остаются монотонными, но теперь их вид значительно изменяется. Кривая 1 (сплошные точки) с точностью до масштаба по вертикали совпадает с кривой 5 на рис. 6. Кривая 2 (открытые точки) ведет себя еще сходным образом, то есть сначала возрастает, после чего стремится к насыщению, хотя точки при  $N_B \geq 10$  отн.ед. уже испытывают заметный разброс. Кривая 3 (сплошные квадраты), хотя и возрастает, но к насыщению не стремится, что можно видеть из сильного

разброса точек уже при  $N_B \geq 5$  отн.ед. Кривая 4 уже не возрастает а точки (открытые квадраты) испытывают разброс прямо с самого начала, то есть уже при  $N_B \geq 2$  отн.ед. Кривая 5 (сплошные треугольники) с самого начала не возрастает, а убывает, достигает минимума и возрастает с  $N_B \geq 5$  отн.ед. Разброс точек кривой 5 на всем ее протяжении довольно значительный.

Таким образом, корректным приближением линейного роста ступенчатым можно считать только значение максимального волнового числа меньше критического. Вблизи критического значения на практике для достижения корректности (в пределах 5%) достаточно разбиения  $7B$  (то есть из 9 близких по величине ступенек, как это видно из рис. 4). Дальнейшее более дробное разбиение к улучшению приближения не приводит, то есть является излишним.

## **Заключение**

Основные результаты настоящей работы сводятся к следующему. Рассмотрена корректность применения ступенчатого приближения для расчета коэффициентов отражения, прохождения и поглощения при падении волны на многослойную структуру. В качестве параметра, определяющего распространение волны в структуре, принято волновое число. Исходным распределением считалось линейное нарастание волнового числа от начальной до конечной точек структуры. В качестве приближения использовано представление структуры в виде совокупности слоев, в каждом из которых волновое число сохраняется постоянным, а от слоя к слою возрастает ступенчатым образом. В применении к ступенчато нарастающей структуре кратко описан математический аппарат метода импеданса в варианте пересчета амплитуд. Приведены выражения, определяющие коэффициенты отражения, прохождения и поглощения. Принято базовое распределение волновых чисел, состоящее в их ступенчатом нарастании в пределах 16 слоев структуры. Для величин волновых чисел принято также 16 градаций. В таких рамках сформированы 12 распределений с возрастающей дробностью разбиения

структуры на ступеньки. Первое распределение насчитывало 2 ступеньки, последнее – 16 ступенек. Базовое распределение введено в относительных единицах, по отношению к полной длине структуры в целом. Приведена схема распространения волн в такой структуре. В каждом слое присутствуют две волны: одна прямого направления и другая – обратного. Полное отражение и прохождение волны через структуру в целом формируется в результате суперпозиции таких волн, выходящих из структуры в прямом и обратном направлениях. Показано, что зависимость коэффициента отражения от степени дробности структуры при фиксированной ее длине имеет сильно изрезанный характер, обусловленный интерференционным взаимодействием распространяющихся волн. Основной причиной изрезанности является возможность возбуждения резонансов стоячих волн, когда на длине структуры укладывается несколько полуволен длины, соответствующей максимальному значению волнового числа в конечной точке структуры. Отмечено, что изрезанный характер отражения не позволяет выполнить корректное приближение линейной структуры ступенчатой. Показано, что для исключения возможности возбуждения резонансов половина минимальной длина волны должна быть больше длины структуры в целом. Из такого требования получено критическое, то есть максимальное значение волнового числа, равное отношению числа «пи» к длине структуры в целом. Для решения практических задач, требующих корректного подхода (то есть отсутствия резонансных явлений), введена нормировка волнового числа путем умножения его на численный коэффициент, приводящий к условию, чтобы половина минимальной длины волны была больше длины структуры. Для ступенчатой структуры рассмотрена зависимость коэффициента отражения от степени дробности распределения волновых чисел. Установлено, что корректным приближением линейного роста ступенчатым является такое, при котором максимальное волновое число меньше критического. Отмечено, что на практике вблизи критического значения для достижения корректности (в пределах 5%) достаточно разбиения структуры на семь ступенек равной высоты и

протяженности. При превышении максимальным волновым числом критического значения никакое увеличение дробности разбиения (то есть увеличение числа ступенек) к повышению точности приближения линейной структуры ступенчатой не приводит.

**Финансирование:** Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

### Литература

1. Хвольсон О.Д. *Курс физики. Т.2.* Берлин, Госиздат РСФСР. 1923. 776 с.
2. Бреховских Л.М. *Волны в слоистых средах.* Москва, Наука. 1973. 343 с.
3. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики.* Москва, Наука. 1970. 721 с.
4. Ландсберг Г.С. *Оптика.* Москва, Наука. 1976. 928 с.
5. Кизель В.А. *Отражение света.* Москва, Наука. 1973. 352 с.
6. Бреховских Л.М., Годин О.А. *Акустика слоистых сред.* Москва, Наука. 1989. 416 с.
7. Oksanen M.I., Hanninen J., Tretyakov S.A. Vector circuit method for calculating reflection and transmission of electromagnetic waves in multilayered chiral structures. *IEEE Proceedings. H.* 1991. V.138. №7. P.513-520.
8. Sarychev A.K., Bergman D.J., Yagil Y. Theory of the optical and microwave properties of metal-dielectric films. *Phys. Rev. B.* 1995. V.51. №8. P.5366-5385.
9. Козарь А.В. Оптические свойства аперриодических тонкослойных структур: эффективный показатель преломления. *Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия.* 2009. Т.64. №3. С.54-56.
10. Козарь А.В. Оптические свойства аперриодических тонкослойных структур: эффективная оптическая толщина. *Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия.* 2018. Т.73. №6. С.61-66.
11. Бриллюэн Л., Пароди М. *Распространение волн в периодических структурах.* Москва, Изд-во иностр. лит. 1959. 457 с.
12. Шавров В.Г., Щеглов В.И. *Магнитостатические и электромагнитные волны в сложных структурах.* Москва, Физматлит. 2017. 358 с.

13. Антонец И.В., Щеглов В.И. *Распространение волн через тонкие слои и пленки*. Сыктывкар, ИПО СыктГУ. 2010. 132 с.
14. Антонец И.В., Щеглов В.И. *Распространение волн через многослойные структуры. Часть первая. Прямой метод*. Сыктывкар, ИПО СыктГУ. 2011. 134 с.
15. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. *Волны в многослойных структурах. Часть 1. Методы расчета: прямой, усреднения, матрицы*. МОСКВА, Физматлит. 2022. 424 с.
16. Антонец И.В., Щеглов В.И. *Распространение волн через многослойные структуры Часть вторая. Метод матрицы*. Сыктывкар, ИПО СыктГУ. 2012. 123 с.
17. Антонец И.В., Щеглов В.И. *Распространение волн через многослойные структуры. Часть третья. Метод импеданса*. Сыктывкар, ИПО СыктГУ. 2012. 139 с.
18. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Матричный алгоритм расчета коэффициентов отражения и прохождения при падении двух встречных волн на многослойную структуру. *Радиотехника и электроника*. 2022. Т.67. №9. С.908-915.
19. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Алгоритмический метод расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 1. Матричный алгоритм. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2022. №8. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.8.8>
20. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Алгоритмический метод расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 2. Падение волны на наклонный барьер. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2022. №8. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.8.9>



21. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Метод обобщенного импеданса для расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 1. Последовательный пересчет импедансов и амплитуд. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2023. №1. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.1.1>
22. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Метод обобщенного импеданса для расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 2. Падение волны на прямоугольный барьер. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2023. №1. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.1.2>
23. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Метод обобщенного импеданса для расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 3. Падение волны на ступенчато нарастающий барьер. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2023. №1. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.1.3>

**Для цитирования:**

Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Метод обобщенного импеданса для расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 4. Критерий применимости ступенчатого приближения для неоднородной среды. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2023. №5. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.5.5>