

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.5.6>

УДК: 537.874; 537.624

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ В УСЛОВИЯХ КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ И КУБИЧЕСКОЙ СВЯЗИ. ЧАСТЬ 1. МУЛЬТИРЕЖИМНЫЙ ХАРАКТЕР КОЛЕБАНИЙ

А.П. Иванов <sup>1</sup>, В.Г. Шавров <sup>2</sup>, В.И. Щеглов <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Сыктывкарский государственный университет им. П.Сорокина  
167001, Сыктывкар, Октябрьский пр-т, 55

<sup>2</sup> Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН  
125009, Москва, ул. Моховая, 11, к.7

Статья поступила в редакцию 28 марта 2023 г.

**Аннотация.** Рассмотрена задача о возбуждении магнитоупругих колебаний в геометрии магнестрикционного преобразователя, содержащего нормально намагниченную ферритовую пластину, возбуждаемую переменным полем. Предложено модельное представление преобразователя в виде двух связанных осцилляторов, один из которых соответствует магнитной части структуры, а второй – упругой. Первый осциллятор является нелинейным, второй – линейным. Нелинейность и связь имеют кубический характер. В зависимости от уровня возбуждения выделены пять основных режимов колебаний: №1 – синхронизм, №2 – утроении частоты, №3 – хаос, №4 – гигантские осцилляции, №5 – задержанная стабилизация. В этих режимах исследованы развертки колебаний во времени, их параметрические портреты в координатах – смещение – производная от смещения, а также частотные спектры возбужденных колебаний. Режимы №1, №2 являются стабильными, колебания в них близки к гармоническим и полностью детерминированы. Режимы №3-№5 являются

нестабильными, колебания в них имеют хаотический или близкий к хаотическому характер. По уровню возбуждения стабильные режимы отделены от нестабильных резким порогом, при преодолении которого амплитуда колебаний скачком увеличивается на два-три порядка. При возбуждении нестабильных режимов установлено наложение на основные колебания сопутствующих высокочастотных осцилляций, частота которых выше частоты возбуждения на два-три порядка, а амплитуда ниже амплитуды основных колебаний более чем на два порядка. Предложена модель возбуждения сопутствующих колебаний, на основе которой получена количественная оценка характера колебаний в нестационарных режимах. Приведены рекомендации для дальнейшего развития работы.

**Ключевые слова:** нелинейные колебания, связанные осцилляторы, кубическая нелинейность.

**Финансирование:** Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

**Автор для переписки:** Щеглов Владимир Игнатьевич, [vshcheg@cplire.ru](mailto:vshcheg@cplire.ru)

## Введение

Учение о нелинейных явлениях различной природы составляет важнейшую часть современной физики [1-5]. Значительным разнообразием обладают нелинейные колебания в магнитных материалах, в том числе в ферритах, где прецессия намагниченности при высоком уровне возбуждения проявляет квадратичный характер [6-9]. Многие дополнительные особенности нелинейных колебаний намагниченности вносит магнитоупругое взаимодействие, обеспечивающее включение в игру наряду с основной колебательной системой – магнитной, вторую колебательную систему – упругую, что дает дополнительную степень свободы. Важнейшей задачей здесь является возбуждение упругих колебаний в схеме магнитоупругого преобразователя с частотами до десятков гигагерц [10-12], мощность которых в сильно нелинейном режиме увеличивается на порядок и более [13-15]. Другой

возможностью введения дополнительной степени свободы является помещение феррита в электромагнитный резонатор, что обеспечивает возможность генерации шумового сигнала с широким спектром [16,17]. В работе [18] показано родство магнитных колебаний в обоих этих случаях, причем специфичность задач (возбуждение упругих или электромагнитных колебаний) обеспечивается конкретным видом эффективных полей, воздействующих на прецессирующую намагниченность.

В силу единства магнитной части колебательной системы нелинейность колебаний обеспечивается нелинейными свойствами именно колебаний намагниченности, тогда как упругая или электромагнитная части проявляют себя как нагрузка, обладающая однако резонансными свойствами с соответствующей релаксацией. Математическое представление таких колебаний в виде системы связанных уравнений при магнитоупругой связи включает в себя семь нелинейных уравнений первого порядка: три для намагниченности и четыре для упругости, в совокупности с четырьмя граничными условиями [13]. При электромагнитной связи – пять уравнений – три для намагниченности и два для электрического и магнитного полей, а также четыре граничных условия. Для двухслойной магнитной системы количество уравнений возрастает до десяти, а граничных условий – до шести [14,15].

Сложность математического аппарата вынуждает искать приближенные способы решения задачи. Одним из таких, впервые предложенным в работе [19] и развитым в работах [20-22], является представление связанной магнитоупругой системы в виде системы из двух связанных осцилляторов – магнитного и упругого. В этой работе успех такого представления позволил интерпретировать многие свойства связанных колебаний, в том числе их хаотический характер. В работе [18] отмечена возможность аналогичного представления для связи магнитной системы с электродинамической.

В работах [23-31], частично обобщенных в монографии [32], для прецессии намагниченности при большой амплитуде предложено квадратичное разложение, что позволило параметры системы осцилляторов выразить через

параметры магнитного материала. Получена система уравнений второго порядка для двух связанных осцилляторов, содержащая различные варианты нелинейности и магнитоупругой связи. Для интерпретации полученных результатов предложена модель динамического потенциала.

В работе [18] рассмотрен случай кубической нелинейности и квадратичной связи. В широком диапазоне амплитуд возбуждения выявлены два основных режима колебаний: режим №1 – мультигармонический регуляризованный; режим №2 – мультигармонический квазихаотический. Показано, что по мере увеличения амплитуды возбуждения, начиная с регулярного, имеет место чередование того и другого режимов. Рассмотрены области формирования хаотического режима при различных уровнях возбуждения для трех основных случаев: первый – отсутствие связи между осцилляторами, второй – наличие линейной связи и третий – наличие квадратичной связи. Построены параметрические портреты и спектральные характеристики обоих режимов, выполнена их модельная интерпретация. Выявлен сценарий формирования хаотического режима, состоящий в последовательной смене гармоник при увеличении возбуждения. Установлено, что по мере увеличения уровня возбуждения амплитуда колебаний возрастает с постепенным замедлением, причиной которого является кубическая нелинейность.

Настоящая работа является развитием работы [18] для случая кубической нелинейности и кубической связи.

## **1. Задача для магнитоупругих колебаний**

В качестве примера приведем геометрию первой из упомянутых выше задач, а именно – возбуждение СВЧ упругих колебаний на основе магнитострикционного преобразователя [19-22]. Такая геометрия, совпадающая с принятой в работах [13, 18-28], представлена на рис. 1.

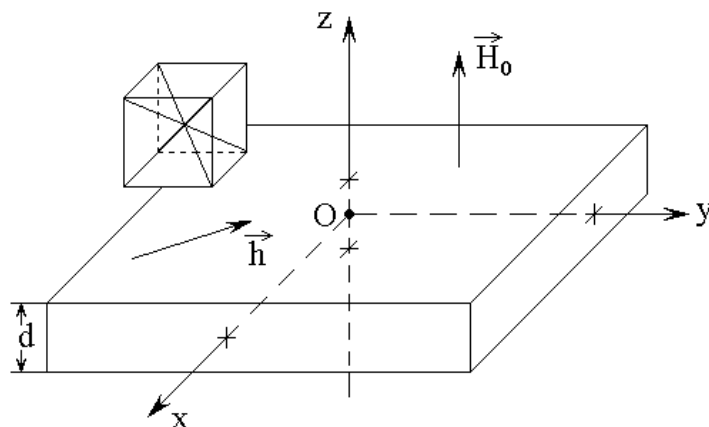


Рис. 1. Общая геометрия задачи. Слева – схема кристаллографической ячейки

В основе геометрии лежит плоскопараллельная пластина толщины  $d$ , обладающая магнитными, упругими и магнитоупругими свойствами. Внешнее постоянное магнитное поле  $\vec{H}_0$  приложено перпендикулярно плоскости пластины, переменное магнитное поле  $\vec{h}$  действует в плоскости пластины. Задача решается в декартовой системе координат  $Oxyz$ , плоскость  $Oxy$  которой совпадает с плоскостью пластины, а оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  параллельны ребрам куба кристаллографической ячейки. Центр системы координат  $O$  находится в центре пластины, так что ее плоскости соответствуют координатам  $z = \pm d/2$ .

Система уравнений движения для нормированных компонент намагниченности  $m_{x,y,z}$ , имеет вид:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = - \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \cdot \left[ (m_y + \alpha m_x m_z) \cdot H_{ez} - (m_z - \alpha m_y m_x) \cdot H_{ey} - \alpha \cdot (m_y^2 + m_z^2) \cdot H_{ex} \right], \quad (1)$$

где уравнения для  $m_y$  и  $m_z$  получаются циклической перестановкой  $x, y, z$ .

Входящие в эти уравнения эффективные поля имеют вид:

$$H_{ex} = h_x + H_{ax}; \quad (2)$$

$$H_{ey} = h_y + H_{ay}; \quad (3)$$

$$H_{ez} = H_0 - 4\pi M_0 m_z + H_{az}; \quad (4)$$

где:

$$H_{ax} = -\frac{B_2}{M_0} \left[ m_y \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + m_z \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right], \quad (5)$$

где  $\hat{A}_2$  – константа магнитоупругого взаимодействия. Поля  $H_{ay}$  и  $H_{az}$  получаются из (5) циклической перестановкой  $x, y, z$ .

Уравнения для компонент упругого смещения  $u_{x,y}$  имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial t^2} = -2\beta \frac{\partial u_{x,y}}{\partial t} + \frac{c_{44}}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial z^2}; \quad (6)$$

граничные условия:

$$c_{44} \frac{\partial u_{x,y}}{\partial z} \Big|_{z=\pm d/2} = -B_2 m_{x,y} m_z. \quad (7)$$

В уравнении (1)  $\alpha$  – параметр затухания Гильберта, в уравнении (6)  $\beta$  – параметр затухания упругих колебаний,  $c_{33}$  – модуль упругости,  $\rho$  – плотность магнитной пластины.

## 2. Квадратичное приближение

Прецессионное движение вектора намагниченности происходит вокруг оси  $Oz$ , так что основными составляющими такого движения являются компоненты  $m_x$  и  $m_y$ . В предположении сохранения длины вектора намагниченности, компонента этого вектора, параллельная направлению постоянного поля, может быть представлена в виде:

$$m_z = \sqrt{1 - m_x^2 - m_y^2}. \quad (8)$$

В работах [23,24] показано, что при условии  $m_{x,y} \ll 1$  компоненту  $m_z$  путем разложения в ряд Тейлора можно представить в виде:

$$m_z = 1 - \frac{1}{2} m_x^2 - \frac{1}{2} m_y^2. \quad (9)$$

Такое квадратичное приближение позволяет свести исходную систему уравнений для намагниченности и упругого смещения с учетом граничных условий (1)-(7) к системе для двух связанных осцилляторов – магнитного  $m$  и упругого  $v$ , в обобщенных обозначениях имеющей вид [23, форм.(71), (72)]:

уравнение для магнитного осциллятора:

$$\begin{aligned}
 & a_{11} \cdot \frac{\partial^2 m}{\partial t^2} + a_{12} \cdot \frac{\partial m}{\partial t} + a_{13} \cdot m + a_{14} \cdot v + a_{15} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \\
 & \quad + b_{11} \cdot m^3 + b_{12} \cdot m^2 v + b_{13} \cdot m v^2 + \\
 & + c_{11} \cdot m \left( \frac{\partial m}{\partial t} \right)^2 + c_{12} \cdot m \left( \frac{\partial m}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) + c_{13} \cdot v \left( \frac{\partial m}{\partial t} \right)^2 = \\
 & \quad = g_{11} \cdot h_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \tag{10}
 \end{aligned}$$

уравнение для упругого осциллятора:

$$\begin{aligned}
 & a_{21} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a_{22} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + a_{23} \cdot v + a_{24} \cdot m + a_{25} \cdot \frac{\partial m}{\partial t} + \\
 & \quad + b_{21} \cdot m^3 + b_{22} \cdot m^2 v + b_{23} \cdot m v^2 + \\
 & + c_{21} \cdot m \left( \frac{\partial m}{\partial t} \right)^2 + c_{22} \cdot m \left( \frac{\partial m}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) + c_{23} \cdot v \left( \frac{\partial m}{\partial t} \right)^2 = 0. \tag{11}
 \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты  $a_{ik}$ ,  $b_{ik}$ ,  $c_{ik}$  выражаются через параметры материала и магнитного поля в соответствии с формулами (69)-(118) в работе [23].

### 3. Обобщенная система уравнений

Система уравнений (10)-(11) представляет собой частный вид более полной обобщенной симметричной системы [23, форм. (122)-(123)], [32, стр. 92-93, форм. (4.45), (4.46)]:

$$\begin{aligned}
 & p_{11} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + p_{12} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + p_{13} \cdot x_1 + q_{11} \cdot x_2 + q_{12} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + \\
 & \quad + r_{11} \cdot x_1^3 + r_{12} \cdot x_1^2 x_2 + r_{13} \cdot x_1 x_2^2 + r_{14} \cdot x_2^3 + \\
 & + s_{11} \cdot x_1 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 + s_{12} \cdot x_1 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right) + s_{13} \cdot x_1 \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right)^2 + \\
 & + s_{14} \cdot x_2 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 + s_{15} \cdot x_2 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right) + s_{16} \cdot x_2 \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right)^2 = \\
 & \quad = A_{11} \cdot \cos(\omega_0 t) + A_{12} \cdot \sin(\omega_0 t); \tag{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & p_{21} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + p_{22} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + p_{23} \cdot x_2 + q_{21} \cdot x_1 + q_{22} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \\
 & \quad + r_{21} \cdot x_2^3 + r_{22} \cdot x_2^2 x_1 + r_{23} \cdot x_2 x_1^2 + r_{24} \cdot x_1^3 + \\
 & + s_{21} \cdot x_2 \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right)^2 + s_{22} \cdot x_2 \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) + s_{23} \cdot x_2 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 + \\
 & + s_{24} \cdot x_1 \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right)^2 + s_{25} \cdot x_1 \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) + s_{26} \cdot x_1 \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 = \\
 & \quad = A_{21} \cdot \cos(\omega_0 t) + A_{22} \cdot \sin(\omega_0 t). \tag{13}
 \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты  $p_{ik}$ ,  $r_{ik}$ ,  $s_{ik}$  выражаются через параметры материала и магнитного поля в соответствии с формулами (4.47)-(4.86) в работе [32, стр. 93-95].



Еще более полный вид подобной связанной системы должен включать в себя слагаемые, состоящие из произведений трех производных. Однако в решаемой здесь реальной задаче о вынужденных магнитоупругих колебаниях в ферритовой пластине такие слагаемые отсутствуют, поэтому на данном этапе не рассматриваются.

#### 4. Обобщенный потенциал

Можно полагать, что концепция представления намагниченности в виде разложения в ряд Тейлора, приемлема не только для двух упомянутых задач, а также имеет более широкое применение, особенно при учете не только квадратичного, но и более высоких порядков.

Универсальным способом описания в этом случае является введение обобщенного потенциала [20-28], позволяющего представить разложение до любой желаемой степени.

Будем полагать, что система уравнений движения для осцилляторов имеет вид [18,28]:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial U_S}{\partial x_1} = A \cdot \cos(\omega t); \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial U_S}{\partial x_2} = 0, \quad (15)$$

где  $U_S(x_1, x_2)$  – обобщенный потенциал системы в целом, а третьи слагаемые левой части представляют собой обобщенные силы (знак для удобства учтен заранее).

В рамках ограничения степенью входящих в потенциал переменных не выше четвертой, обобщенный потенциал принимает вид:

$$U_S = U_S^{(1)} + U_S^{(2)} + U_S^{(3)} + U_S^{(4)}, \quad (16)$$

где

$$U_S^{(1)} = \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2; \quad (17)$$

$$U_S^{(2)} = \zeta_1 x_1^2 + \zeta_2 x_1 x_2 + \zeta_3 x_2^2; \quad (18)$$

$$U_S^{(3)} = \xi_1 x_1^3 + \xi_2 x_1^2 x_2 + \xi_3 x_1 x_2^2 + \xi_4 x_2^3; \quad (19)$$

$$U_S^{(4)} = \eta_1 x_1^4 + \eta_2 x_1^3 x_2 + \eta_3 x_1^2 x_2^2 + \eta_4 x_1 x_2^3 + \eta_5 x_2^4. \quad (20)$$

Из этих выражений обобщенные силы получаются путем дифференцирования по переменным  $x_{1,2}$ .

Первое выражение (17) дает статическую постоянную силу, которая на колебаниях никак не сказывается, так что  $\psi_{1,2} = 0$ , то есть заведомо можно положить  $U_S^{(1)} = 0$ .

Второе выражение (18) дает в уравнениях линейные слагаемые, пропорциональные  $x_{1,2}$ , то есть собственные частоты осцилляторов  $\omega_{1,2}$  в линейном приближении, а также линейные связи между ними.

Третье выражение (19) через слагаемые с  $\xi_1$  и  $\xi_4$  дает параметры квадратичной нелинейности для обоих осцилляторов. Такая нелинейность, вследствие своей нечетности, при отрицательном значении переменной может вызвать уход системы на бесконечность. Другие два слагаемых с  $\xi_2$  и  $\xi_3$  обеспечивают нелинейную связь между осцилляторами низшего порядка, которая в силу своей нечетности также может привести к расходимости.

Четвертое выражение (20) через слагаемые с  $\eta_1$  и  $\eta_5$  дает параметры кубической нелинейности для каждого из осцилляторов. Потенциал в этом случае является четным, что уход на бесконечность полностью исключает. При достаточной величине констант  $\eta_1$  и  $\eta_5$  такая четность четвертого порядка может компенсировать нечетность более низких порядков, в частности, третьего, то есть предотвратить обеспечивающий низшими порядками уход на бесконечность. Остальные слагаемые выражения (20) дают различные виды нелинейной связи между осцилляторами, такие как  $x_1^2 x_2$  и  $x_1 x_2^2$ . Кроме того,

они дают кубические виды связи для первого уравнения вида  $x_2^3$  и для второго вида  $x_1^3$ .

Соответственно уравнения (14) и (15) принимают вид:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + 2\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + 3\xi_1 x_1^2 + 2\xi_2 x_1 x_2 + \xi_3 x_2^2 + 4\eta_1 x_1^3 + 3\eta_2 x_1^2 x_2 + 2\eta_3 x_1 x_2^2 + \eta_4 x_2^3 = A \cdot \cos(\omega t); (21)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + \zeta_2 x_1 + 2\zeta_3 x_2 + \xi_2 x_1^2 + 2\xi_3 x_1 x_2 + 3\xi_4 x_2^2 + \eta_2 x_1^3 + 2\eta_2 x_1^2 x_2 + 3\eta_4 x_1 x_2^2 + 4\eta_5 x_2^3 = 0. (22)$$

## 5. Система уравнений с кубической связью

В работе [18, форм. (28),(29)] рассмотрен частный вид системы (21)-(22), с соответствующей заменой обозначений имеющий вид:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{d x_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \delta_1 x_1^3 + \gamma_1 \cdot x_2^2 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); (23)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{d x_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. (24)$$

Здесь  $x_{1,2}$ ,  $\beta_{1,2}$ ,  $\omega_{1,2}$  – координатные переменные, параметры затухания и собственные частоты осцилляторов,  $\delta_1$  – параметр нелинейности первого осциллятора,  $\gamma_{1,2}$  – коэффициенты связи,  $A_0$  и  $\omega_0$  – амплитуда и частота возбуждающей силы.

Нелинейным является только первое уравнение, тогда как второе остается линейным (как в магнитоупругой системе, где нелинейной является только магнитная часть). Связь второго уравнения с первым также линейная (через  $\gamma_2$ ), а первого со вторым – нелинейная (через  $\gamma_1$ ).

Такая связь между осцилляторами имеет квадратичный характер и обеспечивается слагаемым первого уравнения вида  $\gamma_1 \cdot x_2^2$ , соответствующего слагаемому  $\xi_3 x_2^2$  уравнения (21), то есть получено из слагаемого  $\xi_3 x_1 x_2^2$  потенциала (19). Однако подобную конструкцию с более высокой степенью  $x_2$  имеет слагаемое  $\eta_4 x_1 x_2^3$  потенциала (20). Такое слагаемое может обеспечить нелинейную связь между осцилляторами уже не квадратичного, а кубического характера. Если при этом оставить только кубическую связь, то система уравнений (23)-(24) принимает вид:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{d x_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \delta_1 x_1^3 + \mathcal{G}_1 \cdot x_2^3 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (25)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{d x_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0, \quad (26)$$

где  $\mathcal{G}_1$  соответствует  $\eta_4$  выражения (20).

Рассмотрим далее именно этот случай, то есть кубическую связь между осцилляторами.

## 6. Параметры задачи

Параметры системы выберем исходя из их максимальной простоты. Так, положим собственные частоты обоих осцилляторов равными друг другу, параметры затухания для обоих осцилляторов также положим равными друг другу, а нелинейность будем учитывать только для первого осциллятора. Подобно [23,32] все параметры будем задавать в безразмерных единицах (называемых далее «относительными единицами»), сохраняющими пропорциональные соотношения относительно друг друга.

Итак, для дальнейшего рассмотрения примем следующие параметры:  $\omega_1 = 1$ ;  $\omega_2 = 1$ ;  $\omega_0 = 1$ ;  $\beta_1 = 0,05$ ;  $\beta_2 = 0,05$ ;  $\delta_1 = 1$ ;  $\mathcal{G}_1 = 1$ ;  $\gamma_2 = 1$ . Частоту возбуждения, кроме особо оговоренных случаев, положим равной

$\omega_0 = 1$  (то есть собственным частотам осцилляторов), что соответствует периоду  $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 6.28$ . Амплитуду возбуждения  $A_0$  будем менять в пределах от 0,001 до 10000. Шаг по времени для всех разверток, кроме отдельно указанных, возьмем равным  $\Delta t = 0.01$ .

Такой выбор параметров обусловлен принятым в работах [23,32] наиболее удобным их соотношением, обеспечивающим уверенную реализацию хаотического характера колебаний.

## 7. Режимы колебаний связанной системы

Система уравнений (25)-(26) решалась численно методом Рунге-Кутты. Рассматривалось развитие колебаний после включения возбуждения. Было установлено, что связь при  $\mathcal{G}_1 x_2^3$ , наряду с режимами, наблюдаемыми при  $\xi_3 x_2^2$  [18], позволяет дополнительно реализовать ряд новых принципиально отличных режимов. При заданной величине связи  $\mathcal{G}_1$  эти режимы определяются специфическим выбором уровня возбуждения  $A$ .

По характеру колебаний в порядке нарастания уровня возбуждения можно выделить пять основных режимов:

- 1 – синхронизм – при  $0,001 \leq A_0 \leq 0,08$ ;
- 2 – утроение частоты – при  $0,08 \leq A_0 \leq 0,171$ ;
- 3 – хаос – при  $0,171 \leq A_0 \leq 2,0$ ;
- 4 – гигантские осцилляции – при  $2,0 \leq A_0 \leq 70,0$ ;
- 5 – задержанная стабилизация – при  $70,0 \leq A_0 \leq 3000,0$ .

Приведем краткие характеристики этих режимов.

## 8. Режим №1 – синхронизм

Этот режим имеет место при амплитуде возбуждения от нуля до  $A_0 = 0,08$ . На рис. 2 приведены развертки по времени колебаний смещения (а), развертки производных от смещения по времени (б) и соответствующие параметрические портреты (в) для первого и второго осцилляторов. Для первого осциллятора буквенные обозначения частей рисунка снабжены цифрой «1», для второго – цифрой «2». Шаг по времени  $\Delta t = 0,01$  ед. времени. Период частоты возбуждения  $\tau = 6,28$  ед. времени. Развертки на рис. 2 начинаются со времени 300 отн.ед., при котором процесс начальной релаксации, определяемый параметрами  $\beta_{1,2}$ , уже закончен.

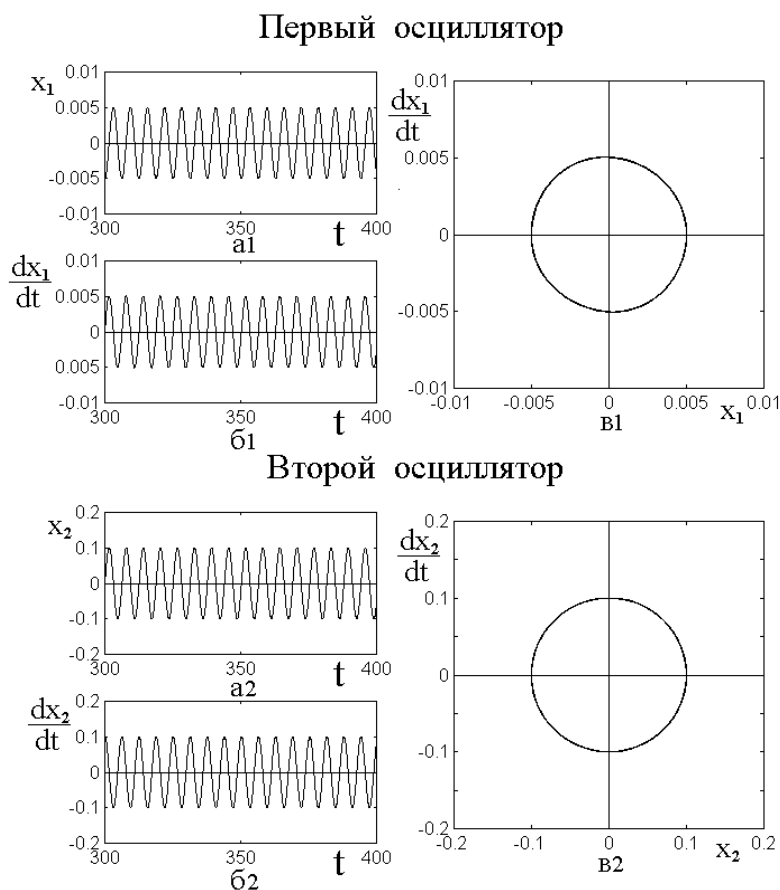


Рис. 2. Развертки по времени колебаний смещения (а), развертки производных от смещения по времени (б) и соответствующие параметрические портреты (в) для первого и второго осцилляторов. Амплитуда возбуждения  $A_0 = 0,001$ .

Остальные параметры приведены в разделе 6

Из рис. 2а1 и рис. 2а2 можно видеть, что колебания смещения того и другого осцилляторов имеют правильный синусоидальный характер с частотой, совпадающей с частотой возбуждения. То же касается производных, приведенных на рис. 2б1 и рис. 2б2. Параметрические портреты для обоих осцилляторов, приведенные на рис. 2в1 и рис. 2в2 представляют собой правильные окружности, центры которых совпадают с началом координат. Определенной особенностью является тот факт, что амплитуда колебаний первого осциллятора составляет 0,005 отн.ед, тогда как амплитуда колебаний второго – 0,100 отн.ед, то есть в 20 раз больше. Подобное же соотношение имеет место и для производных. В то же время, поскольку возбуждающая сила действует именно на первый осциллятор, то и его амплитуда должны быть больше, чем амплитуда второго. Можно полагать, что наблюдаемое здесь обратное соотношение, обусловлено спецификой связи осцилляторов, ибо первый воздействует на второй линейным образом через слагаемое  $\gamma_2 \cdot x_1$  уравнения (2Б), а получает в ответ кубическое воздействие через слагаемое  $\vartheta_1 \cdot x_2^3$  уравнения (25), то есть оба воздействия эквивалентными не являются. Для более подробного рассмотрения надо учитывать энергетические параметры колебаний обоих осцилляторов, что может явиться предметом для отдельной работы.

Обратимся теперь к рис. 3, где представлены частотные спектры колебаний (а) и их производных (б) для обоих осцилляторов при тех же параметрах, что на рис. 2.

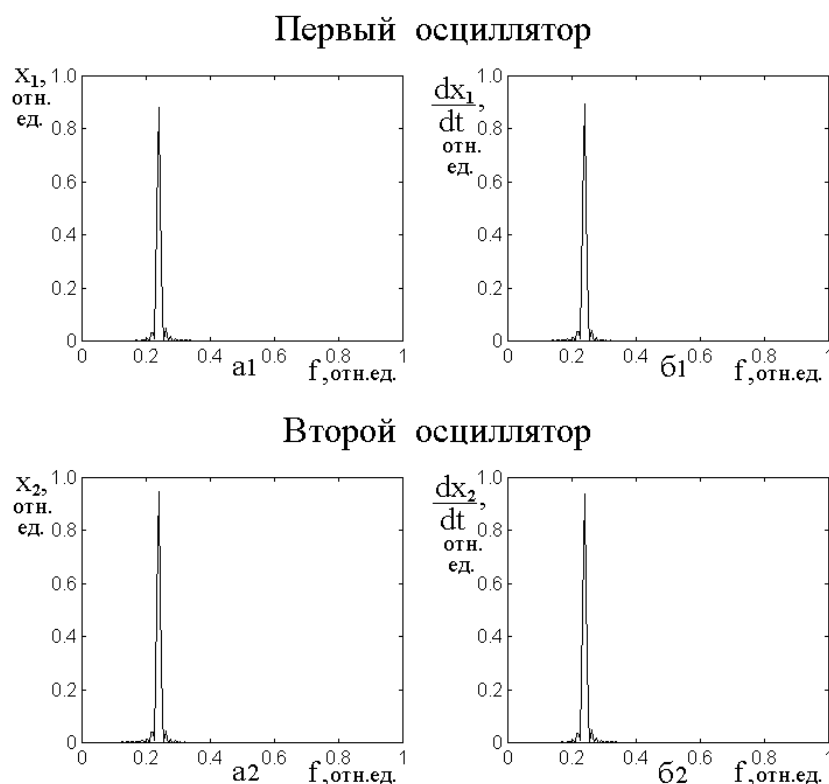


Рис. 3. Частотные спектры колебаний (а) и их производных (б) для первого и второго осцилляторов. Параметры по осям приведены в относительных единицах. Параметры – те же, что на рис. 2

Из рисунка видно, что все спектры как основных колебаний, так и их производных имеют одну единственную узкую линию, что соответствует четкому синусоидальному характеру колебаний, представленных на рис. 2а1, б1, а2, б2.

## 9. Режим №2 – утроение частоты

Этот режим имеет место при амплитуде возбуждения от  $A_0 = 0,080$  до  $A_0 = 0,171$ . При увеличении уровня возбуждения режим утроения частоты возникает без какого-либо порога, просто путем плавного перехода из режима синхронизма. На рис. 4 приведены развертки по времени колебаний смещения (а), развертки производных от смещения по времени (б) и соответствующие параметрические портреты (в) для первого и второго осцилляторов. Для первого осциллятора буквенные обозначения частей рисунка снабжены цифрой «1», для второго – цифрой «2». Шаг по времени  $\Delta t = 0,01$  ед. времени. Период частоты



возбуждения  $\tau = 6,28$  ед. времени. Подобно рис. 2, развертки начинаются со времени 300 отн.ед., при котором процесс начальной релаксации, определяемый параметрами  $\beta_{1,2}$ , уже закончен.

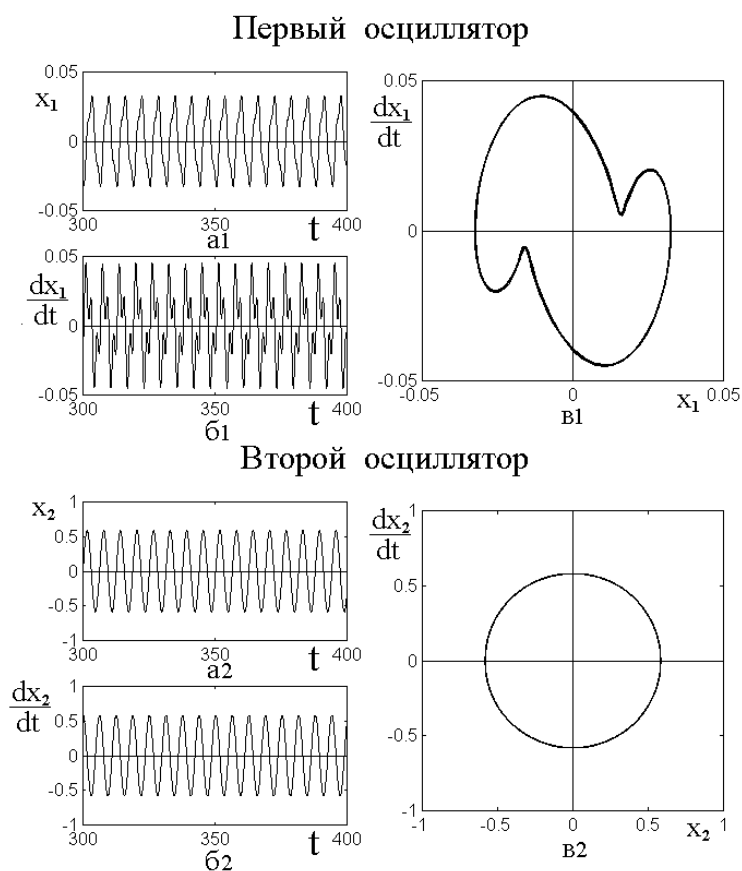


Рис. 4. Развертки по времени колебаний смещения (а), развертки производных от смещения по времени (б) и соответствующие параметрические портреты (в) для первого и второго осцилляторов. Амплитуда возбуждения  $A_0 = 0,15$ .

Остальные параметры приведены в разделе 6

Из рисунка можно видеть, что колебания обоих осцилляторов во многом сходны с наблюдаемыми в режиме синхронизма. Так, частота основных колебаний по-прежнему совпадает с частотой возбуждения и значительное превышение амплитуды колебаний второго осциллятора над амплитудой колебаний первого также сохраняется. Вследствие увеличения уровня возбуждения амплитуды колебаний как смещений, так и производных для обоих осцилляторов превышают амплитуды таких же колебаний на рис. 2 в 5-10 раз.

Колебания смещения первого осциллятора (рис. 4а1) близки к синусоидальным с небольшой склонностью к обострению максимумов. Колебания смещения и производной второго осциллятора (рис. 4а2, б2) сохраняются чисто синусоидальными.

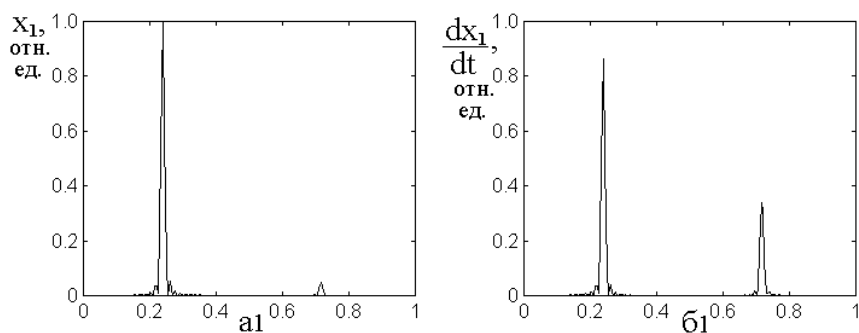
Существенным отличием является «расщепление» колебаний производной первого осциллятора, наблюдаемое на рис. 4б1. Четко видно появление малых максимумов, располагающихся по два между большими, причем первый из промежуточных максимумов больше нуля, а второй меньше нуля. Модельная проверка показывает, что такое «обрамление» каждого большого максимума двумя малыми с противоположными знаками амплитуды относительно нулевой линии свойственно примеси третьей гармоники основной частоты. Следует полагать, что причиной такого «расщепления» синусоиды на рис. 4б1 является проявление нелинейности первого осциллятора, описываемой слагаемым  $\delta_1 x_1^3$  в уравнении (25). В уравнении для второго осциллятора (26) подобное слагаемое и вообще нелинейность отсутствует, поэтому форма колебаний этого осциллятора (рис. 4а2, б2) остается неискаженной синусоидальной.

Параметрический портрет для второго осциллятора (рис. 4в2) сохраняет правильную круговую форму, тогда как на портрете для первого осциллятора (рис. 4в1) появляются две симметрично относительно центра расположенные глубокие «зазубрины», отражающие расщепление синусоиды на рис. 4б1.

Критерием перехода к этому режиму от режима синхронизма можно считать появление этих зазубрин, что соответствует началу расщепления синусоиды на рис. 4б1.

На рис. 5 представлены частотные спектры колебаний (а) и их производных (б) для обоих осцилляторов при тех же параметрах, что на рис. 4.

## Первый осциллятор



## Второй осциллятор

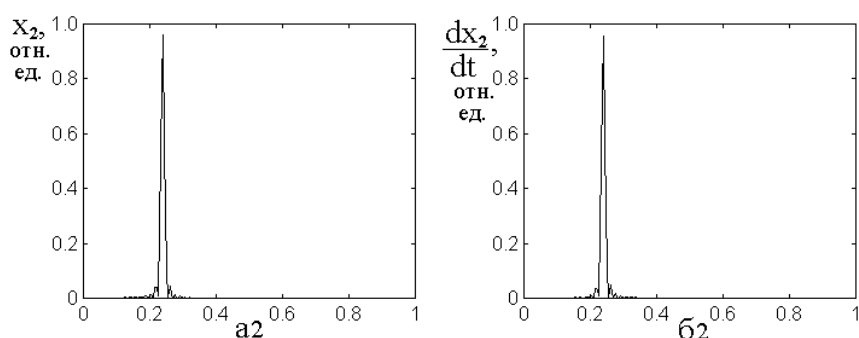


Рис. 5. Частотные спектры колебаний (а) и их производных (б) для первого и второго осцилляторов. Параметры по осям приведены в относительных единицах. Параметры – те же, что на рис. 4

Из рисунка видно, что все спектры как основных колебаний, так и их производных имеют ту же узкую линию, соответствующую частоте возбуждения, что и на рис. 3. Для первого осциллятора спектр производной сопровождается еще одной линией, частота которой в три раза больше частоты основной, что как раз соответствует утроению частоты.

Примечательно отметить, что в спектре колебаний смещения первого осциллятора (рис. 5а1) амплитуда линии на тройной частоте значительно менее выражена, чем в спектре производной (рис. 5б1), а составляющая удвоенной частоты в спектрах как смещения (рис. 5а1), так и производной (рис. 5б1) полностью отсутствует.

В спектрах колебаний для второго осциллятора (рис. 5а2, б2) спектральные составляющие на двойной и тройной частотах отсутствуют, что обусловлено его линейностью.

### 10. Режим №3 – хаос

Этот режим имеет место при амплитуде возбуждения от  $A_0 = 0,172$  до  $A_0 = 2,0$  отн.ед. Увеличение уровня возбуждения с  $A_0 = 0,171$  до  $A_0 = 0,172$  отн.ед, то есть всего менее чем на 1% приводит к резкому возрастанию амплитуды колебаний смещения и производной более чем на два порядка с одновременной хаотизацией того и другого. Таки образом, возбуждение режима хаоса имеет ярко выраженный порог как по амплитуде, так и по характеру колебаний.

На рис. 6 приведены развертки по времени колебаний смещения (а), развертки производных от смещения по времени (б) и соответствующие параметрические портреты (в) для первого и второго осцилляторов. Буквенные и цифровые обозначения частей рисунка – те же самые, что на рис. 2 и рис. 4. Развертка колебаний начинается сразу поле включения возбуждения (то есть с  $t = 0$  ед. времени), так как первоначальные процессы релаксации заметного изменения в характер колебаний не вносят.

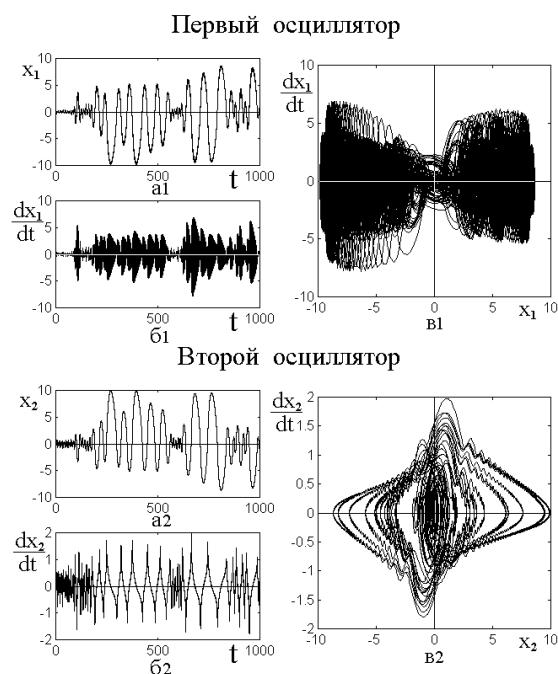


Рис. 6. Развертки по времени колебаний смещения (а), развертки производных от смещения по времени (б) и соответствующие параметрические портреты (в) для первого и второго осцилляторов. Амплитуда возбуждения  $A_0 = 0,20$ .

Остальные параметры приведены в разделе 6.

Из рис. 6а1 можно видеть, что колебания смещения первого осциллятора представляют собой крупные нерегулярные осцилляции, перемежающиеся участками малоамплитудных частых осцилляций шумового характера. Средние расстояния между максимумами крупных колебаний составляют около  $70 \pm 10$  ед. времени, средняя амплитуда составляет около  $7 \pm 2$  отн.ед. Обе эти величины превышают подобные в режимах синхронизма и утроения частоты более чем на два порядка. Колебания производной первого осциллятора (рис. 6б1) имеют сплошной шумовой характер, какие-либо следы периодичности отсутствуют. Частота таких шумовых колебаний более чем на порядок превышает частоту колебаний смещения (рис. 6а1), причем какие-либо следы дифференцирования колебаний смещения (рис. 6а1) в колебаниях производной (рис. 6б1) отсутствуют. Амплитуда колебаний производной на протяжении промежутков времени, соответствующих высокоамплитудным колебаниям смещения, составляет около  $3 \pm 1$  отн.ед., а в местах, где высокоамплитудные колебания смещения перемежаются низкоамплитудными, падает до  $0,5$  отн.ед.

Параметрический портрет для первого осциллятора (рис. 6в1) имеет вид нечетко локализованной сильно искаженной «горизонтальной восьмерки», внутренние «крылья» которой полностью замазаны из-за сплошного шумового характера производной.

Колебания смещения второго осциллятора (рис. 6б1) повторяют колебания смещения первого осциллятора с точностью до изменения знака на обратный. То есть такие колебания являются «зеркальным отражением» первых в горизонтальной оси по рисунку. Колебания производной смещения второго осциллятора (рис. 6б2) имеют значительно более регулярный характер, чем такие же колебания производной первого осциллятора (рис. 6б1). Амплитуда их также меньше в 2-3 раза. Здесь, по крайней мере на участках регуляризации, можно говорить о близком к дифференциальному характеру колебаний производной относительно колебаний смещения. Можно полагать, что более высокая склонность к регуляризации для второго осциллятора по сравнению с первым обусловлена его линейным характером.

Параметрический портрет для второго осциллятора (рис. 6в2) имеет вид неразвившейся горизонтальной восьмерки, середину которой образует сильно замазанный вытянутый по вертикали эллипс, образованный колебаниями в местах перемежаемости, а боковые крылья восьмерки образованы недостаточно развитыми участками регуляризованных колебаний, стремящихся сформировать эллипс, ориентированный по горизонтали. Таким образом, портрет представляет собой совокупность двух сильно размазанных эллипсов, длинные оси которых перпендикулярны друг другу.

На рис. 7 представлены частотные спектры колебаний (а) и их производных (б) для обоих осцилляторов при тех же параметрах, что на рис. 6.

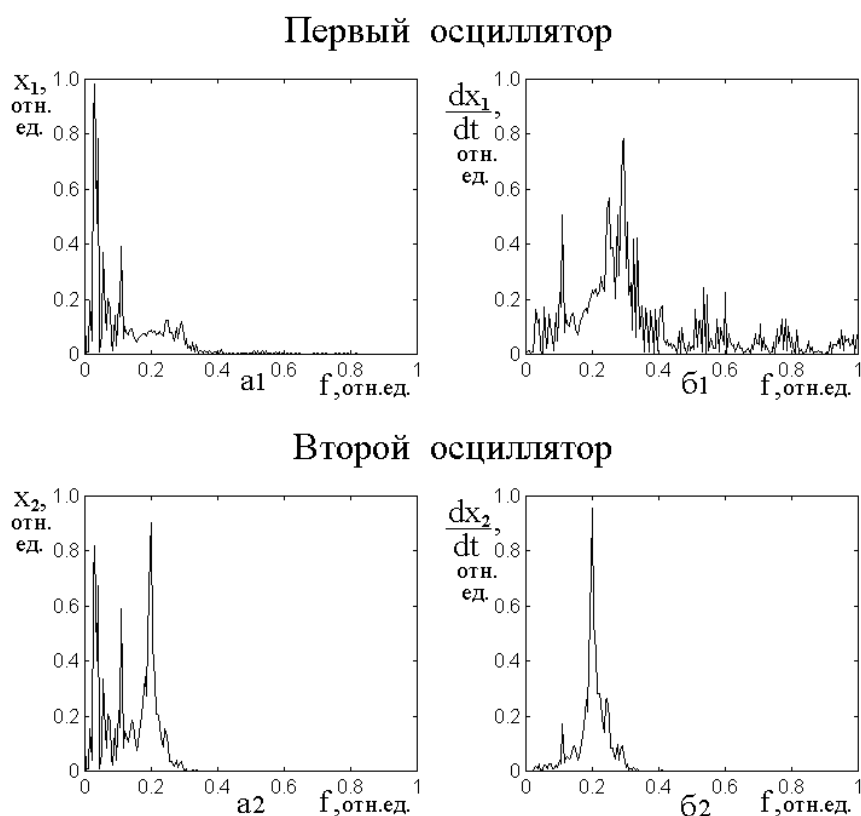


Рис. 7. Частотные спектры колебаний (а) и их производных (б) для первого и второго осцилляторов. Параметры по осям приведены в относительных единицах. Параметры – те же, что на рис. 6

Из рисунка видно, что все спектры как основных колебаний, так и их производных для обоих осцилляторов имеют богатый шумовой характер, однако спектр колебаний второго осциллятора (рис. 7а2, б2) имеет четко выраженную линию, соответствующую частоте возбуждения, тогда как в спектрах колебаний

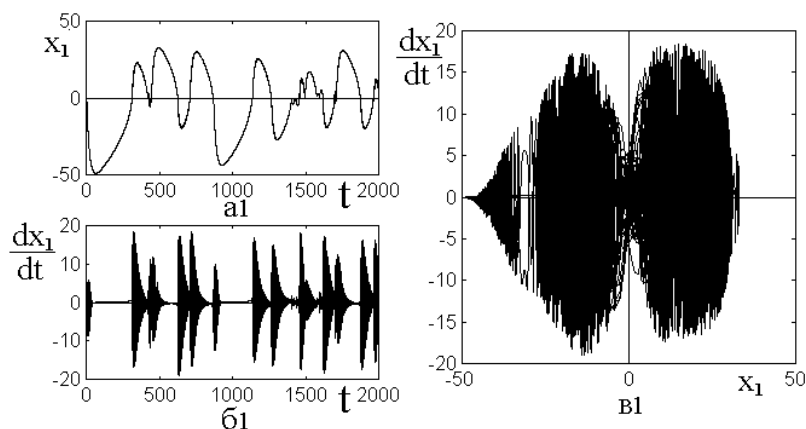
первого осциллятора (рис. 7а1,б1) выделение такой линии из общего хаоса отсутствует. То есть, второй осциллятор ведет себя более упорядоченным образом, чем первый, что, как и ранее, связано с его линейным характером. Спектры колебаний смещения обоих осцилляторов (рис. 7а1, а2) имеют четко выраженную линию в низкочастотной области (около 0,03 отн.ед. частоты), что соответствует крупным колебаниям на рис. 6а1,б1). В спектрах колебаний производных обоих осцилляторов такая линия отсутствует или является крайне слабой, не выделяющейся из окружающих ее составляющих спектра. Особенно богатый спектр имеют колебания производной для первого осциллятора (рис. 7б1), что связано с сильно выраженным шумовым характером колебаний такой производной (рис. 6б1). Здесь присутствуют колебания довольно высоких частот (в том числе за правым краем рисунка), причем какая-либо кратность с частотой возбуждения отсутствует. Можно полагать, что столь сложный характер спектра обусловлен сочетанием кубической нелинейности первого осциллятора с кубической же связью его со вторым.

## 11. Режим №4 – гигантские осцилляции

Этот режим имеет место при амплитуде возбуждения от  $A_0 = 2,0$  до  $A_0 = 70,0$  отн.ед. При увеличении уровня возбуждения режим гигантских осцилляций возникает без какого-либо порога, просто путем плавного перехода из режима хаоса. Различие между этими режимами состоит главным образом в изменении характера колебаний производных смещений обоих осцилляторов.

На рис. 8 приведены развертки по времени колебаний смещения (а), развертки производных от смещения по времени (б) и соответствующие параметрические портреты (в) для первого и второго осцилляторов. Для первого осциллятора буквенные обозначения частей рисунка снабжены цифрой «1», для второго – цифрой «2». Шаг по времени  $\Delta t = 0,01$ . Период частоты возбуждения  $\tau = 6,28$  ед. времени.

## Первый осциллятор



## Второй осциллятор

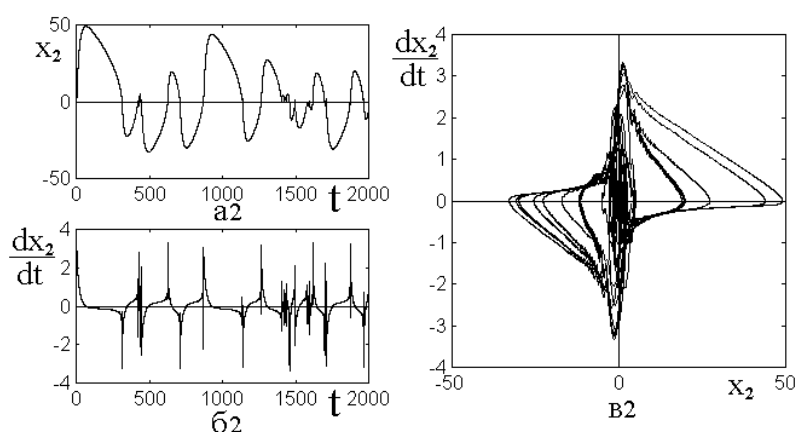


Рис. 8. Развертки по времени колебаний смещения (а), развертки производных от смещения по времени (б) и соответствующие параметрические портреты (в) для первого и второго осцилляторов. Амплитуда возбуждения  $A_1 = 10$ .

Остальные параметры приведены в разделе 6

Из рис. 8a1 можно видеть, что колебания смещения первого осциллятора представляют собой крупные осцилляции нерегулярного характера. Будем называть такие колебания «гигантскими осцилляциями». Рассмотрение на более продолжительном промежутке времени показывает, что длина осцилляций меняется хаотическим образом. Среднее расстояние между максимумами осцилляций составляет около 300 ед. времени, что почти в 50 раз превышает период частоты возбуждения. Для простоты рассмотрения можно считать, что характер осцилляций близок к синусоидальному с периодом, меняющимся вокруг средней величины хаотическим образом.

На рис. 8б1 приведены производные по времени от тех же колебаний. Следовало бы ожидать, что характер производных должен соответствовать



простому дифференцированию кривых, приведенных на рис. 8а1, то есть также иметь близкий к синусоидальному характер с тем же периодом по времени. Однако из сравнения рис. 8б1 с рис. 8а1 видно, что подобное соответствие отсутствует.

Производные по времени имеют вид резкого начального всплеска, подобного ударному, в результате которого возбуждаются колебания крайне высокой частоты (на два порядка выше частоты колебаний смещения). Амплитуда таких частых колебаний со временем спадает релаксационным образом, близким к экспоненциальному. Начальные всплески производных приходятся на прохождение через нуль колебаний смещения. Релаксационный спад огибающих производных заканчивается, как правило, до прохождения смещения через нуль.

Прецессионный портрет, приведенный на рис. 8в1 имеет вид сильно замазанной горизонтальной восьмерки, центры колец которой близки к  $x_1 = \pm 20$ . Перетяжка на восьмерке при  $x_1 = 0$  получается потому, что на каждый отдельный полупериод колебаний смещения приходятся по два прохождения через нуль (по разные стороны от максимума), то есть по два всплеска производных. Сильная замазанность портрета соответствует следующим за всплеском частым колебаниям производных, смещенных по времени друг относительно друга хаотическим образом.

На рис. 8а2-в2 приведены подобные зависимости для второго осциллятора.

Из рис. 8а2 видно, что зависимость колебаний второго осциллятора от времени полностью повторяет такую же зависимость для первого осциллятора с точностью до изменения знака на обратный. То есть эта зависимость представляет собой зеркальное отражение зависимости на рис. 8а1 относительно горизонтальной оси.

Следует отметить, что такое совпадение имеет место только в рассматриваемом здесь случае кубической связи и отсутствует при квадратичной, где колебания осцилляторов существенно различаются (работа [18, рис. 3а1, 3а2]).

Проверка показывает, что зеркальная симметричность колебаний первого и второго осцилляторов, а также гигантские осцилляции являются свойством высокой симметричности параметров обоих осцилляторов. Так, при изменении параметров связи на 5% в ту или другую сторону приводит к хаотическим колебаниям или к уходу системы на бесконечность. Во всех случаях зеркальная симметрия колебаний осцилляторов нарушается. Для четкого проявления зеркальной симметричности требуется сохранение обоих параметров связи в пределах не более 2% отклонения от принятых здесь значений  $\gamma_1 = 1$ ;  $\gamma_2 = 1$ .

**Замечание.** Предварительная проверка показала, что увеличение степени связи первого осциллятора со вторым с третьей на четвертую или пятую вообще не позволяют получить режим гигантских осцилляций, хотя хаос и уход на бесконечность по-прежнему наблюдаются, особенно в небольших пределах изменения параметров связи. При уменьшении параметров связи более чем на 20% колебания становятся близкими к гармоническим с частотой, равной частоте возбуждения. По-видимому, подробное исследование этого вопроса может составить предмет для отдельной работы.

Производные колебаний второго осциллятора, показанные на рис. 8б2, в отличие от производных для первого осциллятора, тонкой структуры не имеют, хотя взрывной характер сохраняется. Можно видеть, что такие производные становятся близкими к огибающей производных на рис. 8б1. Соответственно параметрический портрет для второго осциллятора, представленный на рис. 8в2, уже не является замазанной горизонтальной восьмеркой, а состоит из отдельных извивающихся пучков траекторий, образующих крестообразную фигуру, с горизонтальной и вертикальной осями.

Обратимся теперь к рис. 9, где представлены частотные спектры колебаний (а) и их производных (б) для обоих осцилляторов при тех же параметрах, что на рис. 8.

## Первый осциллятор

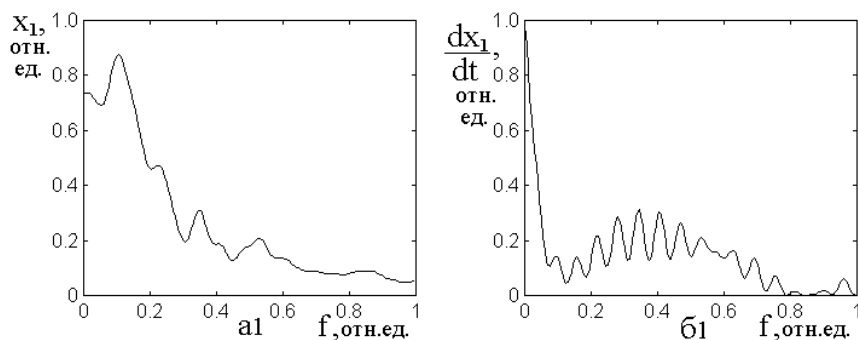


Рис. 9. Частотные спектры колебаний (а) и их производных (б) для первого и второго осцилляторов. Параметры по осям приведены в относительных единицах. Масштаб по частоте на рис. (б1),(б2) – тот же, что на предшествующих рисунках, а на рис. (а1), (а2) – в 100 раз крупнее. Это сделано для того, чтобы выявить структуру низкочастотной составляющей спектра. Амплитуда производной на рис. (б2) составляет 0,4 от амплитуды производной на рис. (б1). Параметры – те же, что на рис. 8

Из рис. 9а1, а2 видно, что спектры в области низких частот для обоих осцилляторов совпадают, что обусловлено тождественностью (с точностью до знака) разверток колебаний на рис. 8а1 и рис. 8а2. Колебания имеют одну сильно размазанную линию с максимумом вблизи 0,11 отн.ед. Этот максимум соответствует преобладающей составляющей частоты колебаний на рис. 8а1 и рис. 8а2. Период таких колебаний, то есть собственно гигантских осцилляций, составляет около 300 ед. времени, то есть частота равна 0,0033 ед. частоты. Максимум размазан из-за непостоянства периода гигантских осцилляций.

На рис. 9б1 показан спектр колебаний производной первого осциллятора. Видно, что максимум соответствует 0,40 отн.ед. Благодаря различию масштабов, линия, соответствующая максимуму на рис. (а), то есть частоте 0,0033 ед. частоты здесь почти совпадает с вертикальной осью рисунка. Однако именно эта

составляющая спектра задает масштаб по вертикали. Максимум вблизи частоты 0,40 отн.ед. соответствует частым колебаниям производных на рис. 8б1, которые наступают после взрывного роста амплитуды и образуют релаксационный «хвост» с экспоненциальным спадом. На кривой присутствует значительное количество сопутствующих максимумов, соответствующих тонкой структуре релаксационных колебаний.

На рис. 9б2 подобная зависимость для второго осциллятора, в основном, повторяет огибающую кривой на рис. 9б1, однако здесь максимум, соответствующий частоте релаксационных колебаний, отсутствует, что связано с относительно плавным спадом производных на рис. 8б2.

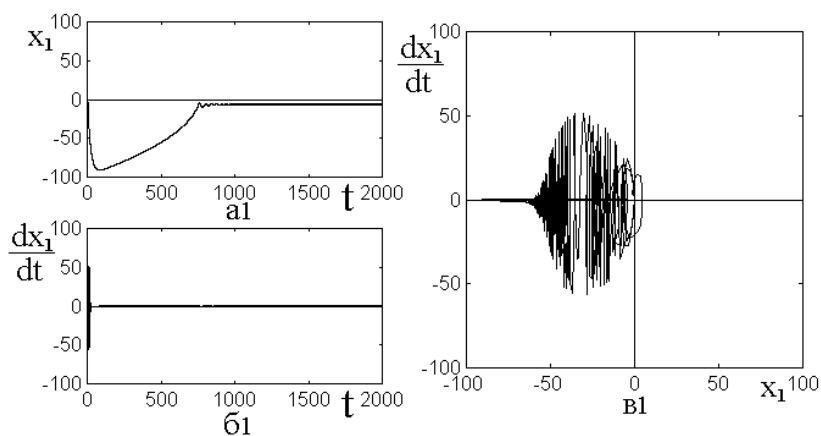
## 12. Режим №4 – задержанная стабилизация

Этот режим имеет место при амплитуде возбуждения от  $A_0 = 70,0$  до  $A_0 = 3000,0$  отн.ед. Дальнейшее увеличение уровня возбуждения приводит к уходу системы на бесконечность.

Режим стабилизации возникает из режима гигантских осцилляций путем плавного перехода. По мере увеличения уровня возбуждения с уровня  $A_0 = 64,0$  при довольно большом времени, порядка 1700 – 1900 ед., появляется участок стабилизации, простирающийся до бесконечности, начало которого при увеличении уровня возбуждения до  $A_0 = 70,0$  отн.ед. плавно переходит к временам 700 – 900 ед.времени, полностью вытесняя гигантские осцилляции.

Типичная картина колебаний осцилляторов в режиме задержанной стабилизации иллюстрируется рис. 10.

## Первый осциллятор



## Второй осциллятор

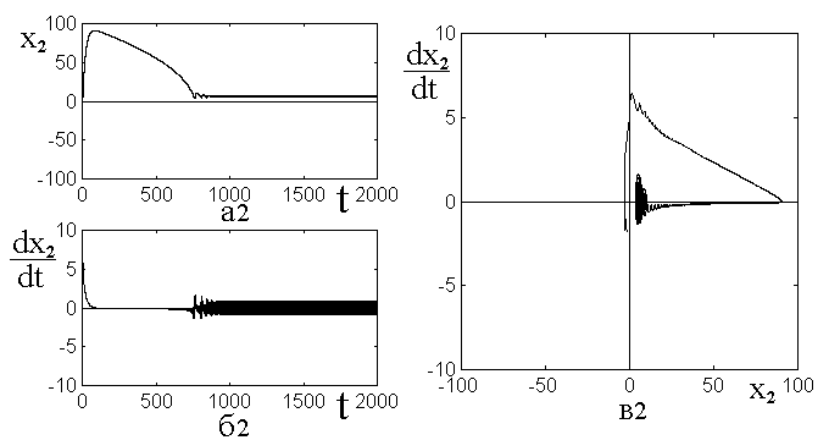


Рис. 10. Развертки по времени колебаний смещения (а), развертки производных от смещения по времени (б) и соответствующие параметрические портреты (в) для первого и второго осцилляторов. Амплитуда возбуждения  $A_0 = 90,0$  отн.ед. Остальные параметры приведены в разделе 6

Из рисунка видно, что смещение первого осциллятора (рис. 10а1), оставаясь все время отрицательным, сначала резко падает, достигая минимума при 70 ед. времени, после чего плавно возрастает, при времени 770 ед. резко выходя на горизонтальный участок, простирающийся до бесконечности. Этот горизонтальный участок и есть режим стабилизации. При этом смещение от интенсивности возбуждения далее не зависит и всегда остается на уровне около 7 отн.ед. Производная от смещения (рис. 10б1) после резкого скачка в области малых времен, соответствующих резкому спаду смещения на рис. 10а1, принимает палые значения вблизи нуля, что соответствует медленности изменения смещения в этом диапазоне.

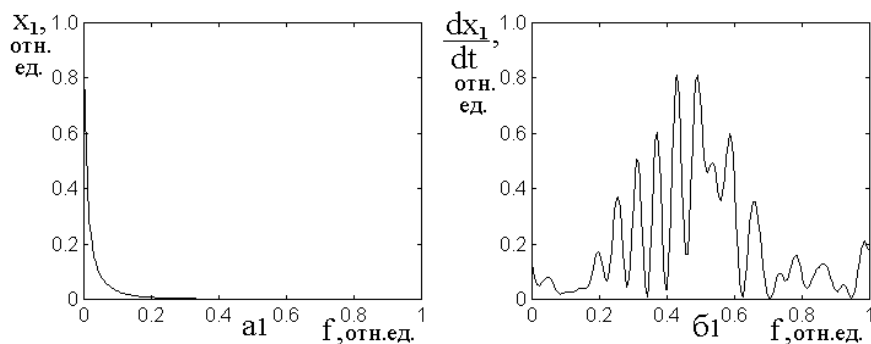
Параметрический портрет (рис. 10в1) имеет вид вертикально ориентированного эллипса, образованного густой сетью вертикальных линий, соответствующих колебаниям производной. Амплитуда таких колебаний достигает 50 отн.ед., то есть соответствует начальному участку (до времени порядка 30 ед.) кривой на рис. 10б1. Отсутствие видимых колебаний на кривой рис. 10б1 связано с чрезвычайно высокой густотой колебаний в этой области, так что на рис. 10б1 все они слились в единую массу, не различимую в масштабе рисунка. Размах портрета по горизонтальной оси, равный 50 отн.ед. в отрицательной области, как раз соответствует единственному резкому колебанию на рис. 10а1.

Колебания смещения второго осциллятора (рис. 10а2) повторяют колебания первого (рис. 10а1) с точностью до зеркального отражения. Однако колебания производной (рис. 10б2) здесь имеют характер, существенно отличный приведенных на рис. 10б. Так, до времени порядка 70 ед., где колебания на рис. 10б1 имеют весьма густой характер, здесь производная плавно спадает стремясь к нулю. Однако при времени около 770 ед. амплитуда колебаний производной резко возрастает до величины около 2 отн.ед. и далее остается неизменной. При этом частота колебаний в этой области является крайне высокой, так что все колебания сливаются в сплошную массу.

Параметрический портрет для второго осциллятора (рис. 10в2) здесь также значительно отличается от портрета для первого осциллятора (рис. 10в1), что обусловлено в первую очередь отличием колебаний производной. Большой треугольник в положительной области, как и ранее, соответствует размаху колебаний смещения, а густая замазанная область вблизи нуля отвечает частым колебаниям производной при времени выше 770 ед.

Обратимся теперь к рис. 11, где представлены частотные спектры колебаний (а) и их производных (б) для обоих осцилляторов при тех же параметрах, что на рис. 10.

## Первый осциллятор



## Второй осциллятор

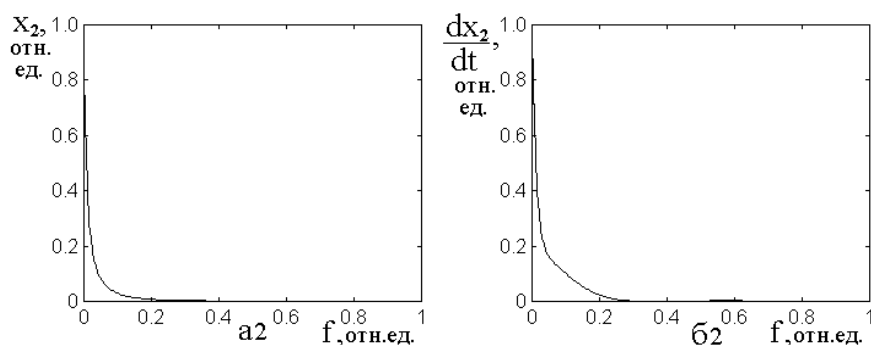


Рис. 11. Частотные спектры колебаний (а) и их производных (б) для первого и второго осцилляторов. Параметры по осям приведены в относительных единицах. Масштаб по частоте на рис. (б1),(б2) – тот же, что на предшествующих рисунках, а на рис. (а1), (а2) – в 100 раз крупнее (такой же, как на рис. 9. Это сделано для того, чтобы выявить структуру низкочастотной составляющей спектра. Параметры – те же, что на рис. 8

Из рисунка видно, что спектры имеют примерно такой же характер, как и для режима гигантских осцилляций (рис. 9). Спектры для смещений рис. 11а1, рис. 11а2 здесь отличаются от приведенных на рис. 9а1 и рис. 9а2 потому, что там для выявления структуры низкочастотных составляющих введен крупный масштаб. Это было оправдано тем, что гигантские осцилляции совершают несколько колебаний с различными продолжительностями, то есть имеют достаточно богатый спектр. Здесь же колебание смещения всего одно, так его спектр однообразен и подробного рассмотрения не требует, поэтому масштаб – тот же, что на рис. 3, рис. 5, рис. 7. Других существенных отличий спектры задержанной стабилизации от спектров гигантских осцилляций не имеют.

### 13. Общие замечания о характере режимов

Из приведенных здесь режимов только режим синхронизма (№1) является чисто линейным, а все остальные – нелинейными. Режим утроения частоты (№2) относится к стабильным нелинейным процессам, а все остальные (№3-№5) к нестабильным. Резкий порог имеет только переход от режима стабильного №2 к нестабильному №3, а все остальные режимы переходят друг в друга довольно плавным образом. Приведенные выше границы переходов между режимами определены с точностью не выше 10%. Колебания в стабильных режимах №1 и №2 являются полностью детерминированными, то есть, начиная с достаточно малой величины шага развертки по времени при дальнейшем уменьшении шага их вид не меняется. При этом можно определить критическое значение шага, меньше которого вид колебаний не меняется. Колебания в нестабильных режимах имеют фрактальный характер, так что при изменении шага их вид меняется и критического значения шага не существует (во всяком случае, при уменьшении шага по сравнению с критическим для стационарных режимов на четыре-пять порядков). При этом, однако, общий характер колебаний, в том числе их спектральные характеристики сохраняются. Более подробному изучению фрактального характера колебаний в нестационарных режимах авторы предполагают посвятить отдельную работу.

Среди многообразия рассмотренных режимов можно отметить некоторые общие закономерности. Так, колебания в режимах №1 (синхронизм) и №2 (утроение частоты) имеют довольно плавный характер без признаков шума. При этом режим №1 является чисто линейным, а режим №2 уже заметно нелинейным. Спектр колебаний первого осциллятора имеет одну узкую линию, а спектр колебаний в режиме №2 – две линии, одна из которых соответствует основной частоте (то есть частоте возбуждения), а вторая – частоте в три раза выше (то есть утроенной частоте возбуждения). При этом колебания обоих осцилляторов, а также их производных сдвинуты по фазе относительно друг друга на 90 градусов. Порог по уровню возбуждения между режимами отсутствует.



Параметрический портрет имеет плавный четко выраженный характер и состоит из узких линий, отражающих повторение колебаний от периода к периоду.

Таким образом, с точки зрения нелинейности режимы №1 и №2 можно считать принадлежащими одной группе – стабильно нелинейных режимов.

Остальные режимы от этой группы имеют значительные отличия. Уже в режиме №3 (хаос) регулярные колебания сравнительно низкой частоты нарушаются разрывами с колебаниями значительно более высокой частоты. При этом частота первых лежит ниже частоты возбуждения, а вторых – выше. Колебания смещения первого и второго осцилляторов становятся полностью одинаковыми с точностью до отражения в горизонтальной оси. Колебания производных имеют сильно замазанный вид, обусловленный присутствием высоких частот, значительно превышающих частоту возбуждения. Параметрический портрет для первого осциллятора приобретает вид «горизонтальной восьмерки», сильно замазанной траекториями с хаотически меняющимися параметрами. Портрет для второго осциллятора имеет «крестообразный» вид, образуемый траекториями, на которые накладывается сетка малоамплитудных частых осцилляций. Спектры колебаний того и другого осцилляторов обогащаются значительным количеством новых частот. При этом подъемы на частоте возбуждения сохраняются, однако сильно искажаются и почти теряются, будучи окруженными линиями других частот.

В режиме №4 (гигантские осцилляции) разрывы, нарушающие ход колебаний низкой частоты почти пропадают, а в картине хаотических колебаний производных, свойственных режиму №3, появляются четкие разграничения. Более или менее округлые беспорядочные огибающие колебаний производных сменяются четкими резкими всплесками, начинающимися с почти отвесных фронтов и заканчивающимися регулярными спадающими экспонентами, то есть возбуждение колебаний производных приобретает ударный характер. Заполнение огибающих производных для первого осциллятора происходит частыми колебаниями крайне высоких частот, тогда как для второго осциллятора такое заполнение отсутствует. Параметрический портрет для первого

осциллятора имеет вид сильно замазанной горизонтальной восьмерки, тогда как для второго – крестообразной фигуры с мелкими резкими колебаниями траекторий. В спектрах выделение на частоте возбуждения полностью пропадает, огибающие спектров для первого осциллятора приобретают регулярный почти синусоидальный характер с общим плавным подъемом выше частоты возбуждения, а для второго – плавный спад в сторону высоких частот.

В режиме №5 (гигантская стабилизация) гигантские осцилляции сменяются единственной осцилляцией, после которой колебания, как таковые, прекращаются и смещение приобретает полностью стабильный характер на постоянном уровне. Смещение первого и второго осцилляторов по-прежнему имеют зеркальную симметрию друг относительно друга, то есть отражаются в горизонтальной оси. Амплитуда колебаний производных для первого осциллятора с течением времени сначала резко падает, после чего стабилизируется на уровне вблизи нуля. Амплитуда производных второго осциллятора сначала также резко падает, обращается почти в нуль, а при переходе смещений к стабилизации возобновляет колебания на крайне высокой частоте, сохраняя постоянную амплитуду. Параметрические портреты для обоих осцилляторов имеют сильно замазанные участки, обусловленные крайне высокочастотными колебаниями производных. В спектрах выделение на частоте возбуждения по-прежнему отсутствует, а плавный подъем в области высоких частот, свойственный режиму №4, сохраняется.

Общим для режимов №4-№5 можно считать сильно нелинейный характер с присутствием частот, значительно отличающихся от частоты возбуждения, причем колебания являются близкими к хаотическим или полностью хаотическими. Возбуждение этой группы режимов по уровню возбуждения имеет ярко выраженный пороговый характер, что говорит о вступлении в игру резервуара мод нестационарного характера.

Таким образом, с точки зрения нелинейности режимы №3 – №5 можно считать принадлежащими одной группе – нестабильных нелинейных режимов.

## 14. Высокочастотные осцилляции

Общим свойством режимов №3-№5 является наложение на главные колебания мелкой сетки из осцилляций весьма высокой частоты, на несколько порядков превышающей частоту возбуждения и частоту основных колебаний. Будем называть далее такие колебания «сопутствующими». В режимах №1 и №2 сопутствующие колебания отсутствуют. Наиболее сильно сопутствующие колебания проявляются для первого осциллятора, хотя и для второго осциллятора остаются заметными. Пример сопутствующих колебаний для первого осциллятора в режиме гигантских осцилляций показан на рис. 12.

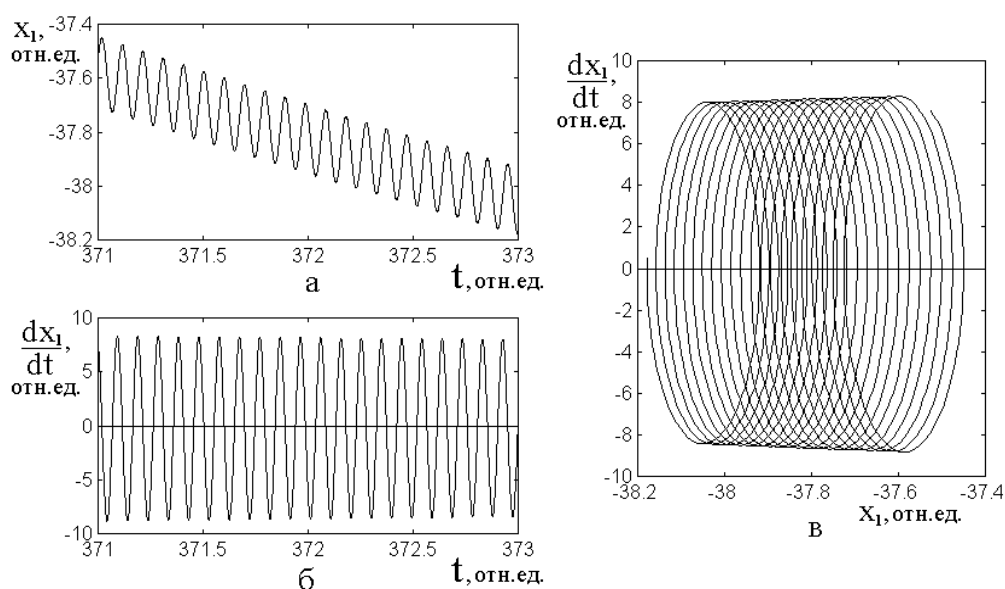


Рис. 12. Пример развертки по времени сопутствующих колебаний смещения (а) и производной от смещения по времени (б), а также их параметрический портрет (в). Режим гигантских осцилляций при  $A_0 = 7.0$  отн.ед. Шаг по времени  $\Delta t = 0,001$  отн.ед. Остальные параметры – те же, что на рис. 8

Из рисунка видно, что сопутствующие колебания имеют чисто синусоидальный характер, причем производная (б) четко соответствует результату дифференцирования основных колебаний (а) (как косинус соответствует синусу). Параметрический портрет представляет собой ряд последовательно развивающихся правильных эллипсов, смещение которых по горизонтальной оси с левой стороны направо соответствует спадающему по вертикальной оси характеру развертки смещения (а).

**Замечание.** Представленный на рис. 12в параметрический портрет в геометрическом отношении является «дрейфом», по характеру напоминающим движение заряженных частиц в неоднородном магнитном поле при наличии слабого электрического поля [33, стр.383-388, рис. 241-216]. Эллиптический характер колец такого дрейфа определяется синусоидальными развертками колебаний смещения (а) и производной (б), сдвинутых по фазе на 90 градусов, а поступательное перемещение «ведущего центра» определяется линейным спадом центральной линии колебаний смещения (а).

Некоторое изменение вертикальных размеров эллипсов отражает соответствующее изменение амплитуды производных (б) (по развертке на глаз не заметное, но на портрете (в) проявляющееся явным образом). Из рис. 12а (или рис. 12б) можно видеть, что период сопутствующих колебаний равен  $T_S = 0.0952$  отн.ед., так что частота их равна  $\omega_S = 66.0$  отн.ед., то есть выше частоты возбуждения в 66 раз.

Амплитуда сопутствующих колебаний смещения в режимах №3-№5 всегда на два-три порядка меньше амплитуды основных колебаний, причем такая амплитуда сохраняется постоянной на всем интервале развития основных колебаний. Вследствие малости амплитуды на развертках по времени основных колебаний (рис. 6, 8, 10) сопутствующие колебания на глаз не заметны. Однако эти колебания весьма сильно проявляются на развертках производных. Так, резкое замазывание производных на рис. 6б1 и рис. 8б1, а также замазывание соответствующих портретов происходит на частоте именно сопутствующих колебаний. То же касается рис. 10, где в условиях стабилизации сопутствующие колебания все же остаются, хотя и с весьма малой амплитудой. Таким образом, несмотря на кажущуюся малой амплитуду и крайне высокую частоту, сопутствующие колебания воздействуют на основные колебания весьма заметным образом.

**Замечание.** Из сравнения рис. 12а с рис. 8а1 можно видеть, что на первом смещение отрицательно (около минус 38 отн.ед.), тогда как на втором в том же интервале времени положительно (около плюс 25 отн.ед.). Такое различие не должно вызывать недоумения, так как рис. 12а построен при шаге по времени  $\Delta t = 0,001$ , рис. 8а1 – при шаге  $\Delta t = 0,01$ . Проверка показывает, то при изменении шага по времени конфигурация колебаний (при условии сохранения их общего характера) может меняться, что является проявлением их фрактального характера [34, 35]. Более подробно фрактальный характер рассматриваемых колебаний и вообще колебаний, описываемых системой (25)-(26), авторы предполагают рассмотреть в отдельной работе.

## 15. Модельная иллюстрация роли сопутствующих колебаний

Подробное рассмотрение сопутствующих колебаний показывает, что они как бы «накладываются» на основные колебания. То есть наблюдаемые колебания являются арифметической суммой основных и сопутствующих колебаний. Пример такого суммирования схематически показан на рис. 13. Здесь роль основных колебаний, то есть гигантских осцилляций играет синусоида, построенная по формуле:

$$x_B = \sin(t), \quad (27)$$

а роль сопутствующих – синусоида, построенная по формуле:

$$x_G = 0.1 \cdot \sin(50 \cdot t). \quad (28)$$

Результирующие колебания являются суммой:

$$x_I = x_B + x_G = \sin(t) + 0.1 \cdot \sin(50 \cdot t). \quad (29)$$

Именно эта сумма представлена на рис. 13.

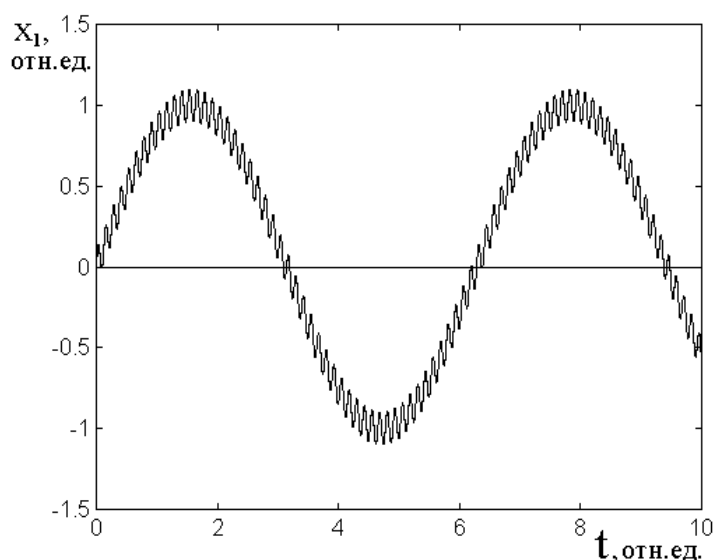


Рис. 13. Схема суммы колебаний основных и сопутствующих, построенная в соответствии с форм. (29)

Рассмотрим теперь количественную сторону явления, опираясь на данные машинных экспериментов, представленных на рис. 8 и рис. 12. Для удобства используем временные зависимости с виде экспонент. Положим:

$$x_1 = B e^{i\Omega t} + G e^{i p t}, \quad (30)$$

где  $\Omega$  – средняя частота гигантских осцилляций,  $B$  – их амплитуда,  $p$  – частота сопутствующих колебаний,  $G$  – их амплитуда. Частоту возбуждения по-прежнему обозначим через  $\omega$ , причем положим  $\omega = 1$  отн.ед.

Из приведенных в разделах 11 и 14 рис. 8 и рис. 12 следует, что:  $\Omega = \omega / 50$ ,  $p = \omega \cdot 66$ , так что:  $\Omega \ll \omega \ll p$ .

Из тех же рисунков можно видеть, что  $B = 50$ ,  $G = 0.14$ , то есть:

$$x_1 = 50 e^{i\Omega t} + 0.15 e^{i p t}, \quad (31)$$

так что амплитуда колебаний основной частоты значительно (около 360 раз) больше амплитуды сопутствующих колебаний.

Производная (30) имеет вид:

$$\frac{d x_1}{d t} = i \Omega B e^{i \Omega t} + i p G e^{i p t}. \quad (32)$$

Используя числовые значения, находим:  $\Omega B = \omega = 1$ ,  $pG = 9\omega = 9$ , так что (32) принимает вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = i(1 e^{i\Omega t} + 9 e^{i p t}), \quad (33)$$

то есть амплитуда производной сопутствующих колебаний значительно преобладает над амплитудой основных колебаний (превышает ее в 9 раз).

Из рис. 12б видно, что амплитуда производной сопутствующих колебаний равна около 8 отн.ед., что как раз соответствует полученному значению.

Из рис. 8а1 и рис. 8б1 видно, что при амплитуде основных колебаний около 50 отн.ед. амплитуда колебаний производной составляет около 15 отн.ед., что также удовлетворительно согласуется с полученным значением 9 отн.ед.

Таким образом, можно видеть, что в режиме гигантских осцилляций в формировании производных от основных колебаний (рис. 8б1) главную роль играют не столько сами эти колебания (рис. 8а1), сколько высокочастотные колебания, сопутствующие основным. Крайне высокая частота сопутствующих колебаний, в рассматриваемом случае превышающая частоту основных колебаний в 360 раз, сплошное объясняет замазывание вертикальными траекториями параметрического портрета, приведенного на рис. 8в1. То есть за то время, когда основное колебание пройдет от одного края портрета до другого и вернется обратно, сопутствующее колебание прочертит вертикальную траекторию 360 раз.

## 16. Замечание об аналогии с нелинейным ферромагнитным резонансом

По характеру нелинейности рассматриваемых режимов напрашивается аналогия с возбуждением колебания при нелинейном ферромагнитном резонансе в феррите [6,8,9]. Так, при низком уровне возбуждения имеют место стабильные нелинейные процессы, такие как умножение частоты или детектирование. При высоком уровне возбуждения, начиная с некоторого порога, возникает параметрическое возбуждение обменных спиновых волн, которому свойственны нестабильности типа «дополнительного поглощения» и

«автомодуляции» [9]. То есть имеется весьма емкий резервуар обменных волн, возбуждение которого однородной накачкой происходит только тогда, когда возникают условия для параметрического возбуждения волн этого резервуара. Вследствие значительной емкости и разнообразия волн резервуара, процесс возбуждения колебаний носит стохастический характер, проявляющийся в хаотизации возбуждаемых колебаний.

В качестве аналогии такого резервуара волн можно полагать возбуждения «сопутствующие», рассмотренные в разделах 14, 15. Однако существенное отличие резервуара сопутствующих мод от резервуара обменных состоит в том, что обменные волны имеют большое разнообразие частот и волновых чисел, тогда как сопутствующие – только одну частоту и одно волновое число. Кроме того, обменные волны имеют четко определенный резонансный характер, то есть в магнитном материале имеется «резонатор», для которого обменные волны являются собственными модами, тогда как для сопутствующих возбуждений такой резонатор в явном виде не просматривается.

Тем не менее, авторы полагают, что приведенная аналогия описываемых здесь явлений с нелинейным ферромагнитным резонансом требует более подробного рассмотрения.

## **17. Замечание о возможности других режимов**

Рассмотренные выше режимы представляю собой «линейку» вариаций колебаний системы при изменении только уровня возбуждения. При этом значения всех остальных параметров остаются фиксированными (раздел 6). Ввиду разнообразия возможных вариаций параметров можно допустить существование также и других режимов. Однако проверка показывает, что такие вариации в большинстве случаев приводят только к некоторому изменению приведенного набора режимов без серьезных качественных отличий. В первую очередь меняются интервалы существования соответствующих режимов по уровню возбуждения. Таким образом, в основном, повторяется тот же набор режимов в различных сочетаниях. Полностью сохраняется деление режимов на



две принципиально различные группы – стабильных и нестабильных. Тем не менее, авторы не берут на себя смелость утверждать, что другие режимы невозможны, так что поиск их может составить предмет для отдельной задачи.

## **Заключение**

Основные результаты настоящей работы сводятся к следующему.

Рассмотрена задача о возбуждении магнитоупругих колебаний в геометрии магнестрикционного преобразователя, представляющей собой нормально намагниченную ферритовую пластину, на которую подается переменное поле частоты, близкой к частоте ферромагнитного резонанса. Записана система связанных уравнений для намагниченности и упругого смещения. Отмечено, что введение квадратичного приближения позволяет свести задачу к рассмотрению модельной системы из двух связанных осцилляторов – магнитного и упругого. В рамках рассматриваемой задачи магнитный осциллятор предполагается нелинейным с нелинейностью третьего порядка, а упругий – линейным, причем связь между осцилляторами имеет кубический характер. Приведен динамический потенциал системы, позволяющий путем дифференцирования найти обобщенные силы, действующие на осциллятор, выявлены слагаемые потенциала, ответственные за кубическую нелинейность первого осциллятора и кубическую связь между осцилляторами. Приведена полученная на основе потенциала система из двух связанных уравнений второго порядка, отражающая кубической нелинейностью и кубическую связь осцилляторов.

Для численного решения задачи о развитии колебаний во времени выбраны параметры системы, обеспечивающие максимальную простоту задачи: собственные частоты обоих осцилляторов положены равными друг другу и частоте возбуждения, параметры затухания для обоих осцилляторов также положены равными друг другу, кубическая нелинейность и кубическая связь учтены только для первого осциллятора. В относительных единицах все частоты, параметры нелинейности и связи положены равными единице, а параметры

затухания составляющими пять сотых от единицы. Произвольным оставлен только уровень возбуждения, который меняется в широких пределах.

Установлена мультирежимность возбуждаемых колебаний, определяемая уровнем возбуждения. В зависимости от такого уровня выделены пять основных режимов колебаний осцилляторов. В этих режимах исследованы развертки колебаний во времени, частотные спектры возбужденных колебаний и их параметрические портреты в координатах – смещение – производная от смещения.

Краткие характеристики режимов следующие.

Режим №1 – синхронизм. Этот режим имеет место при низком уровне возбуждения, когда колебания обоих осцилляторов остаются полностью линейными. Колебания обоих осцилляторов имеют вид правильных синусоид на частоте возбуждения, а спектры имеют единственную линию на той же частоте. Параметрические портреты для обоих осцилляторов имеют вид четко очерченных правильных окружностей.

Режим №2 – утроение частоты, Этот режим имеет место при несколько большем уровне возбуждения, когда колебания становятся слабо нелинейными. При этом основная частота колебаний остается равной частоте возбуждения, а синусоида приобретает небольшое расщепление, обусловленное примесью третьей гармоники. Такое расщепление особенно заметно на колебаниях первого осциллятора. В остальном колебания обоих осцилляторов подобны друг другу, а в спектре первого осциллятора кроме основной появляется дополнительная линия на тройной частоте возбуждения. На параметрическом портрете первого осциллятора появляются симметрично расположенные две выемки, соответствующие расщеплению синусоиды за счет третьей гармоники, а параметрически портрет второго осциллятора остается близким к окружности. По мере увеличения уровня возбуждения режим №1 переходит в режим №2 без какого-либо порога полностью плавным образом.

Режим №3 – хаос. Этот режим возникает при увеличении уровня возбуждения настолько, что колебания становятся неустойчивыми. Режим имеет

ярко выраженный пороговый характер, так что возникает скачком, при котором амплитуда колебаний по сравнению с режимом №2 возрастает на два-три порядка. Характер колебаний – хаотический с произвольными скачками величины и длительности перепадов амплитуды. Колебания второго осциллятора являют собой зеркальное отражении колебаний первого в горизонтальной оси развертки по времени. Производные от смещения колебаний того и другого осцилляторов имеют весьма сильный хаотический характер, намного более ярко выраженный, чем хаотичность колебаний смещения. Графический характер разверток производных не соответствует графическому характеру смещений, причем развитие производных имеет вид резких скачков, после которых возбуждаются колебания весьма высокой частоты, амплитуда которых спадает во времени по характерному для релаксации закону. Последовательное появление во времени таких скачков производных с последующей релаксацией имеет случайный характер, в некоторой степени привязанный к моментам прохождения через нуль колебания смещения. Такой характер производных наиболее выражен для первого осциллятора, а для второго – заметно слабее, так что заполнение релаксирующего спада высокочастотными колебаниями почти отсутствует. Параметрический портрет для первого осциллятора имеет вид сильно замазанной горизонтальной восьмерки, а для второго – размытой крестообразной фигуры, образованной изломанными траекториями. Спектр колебаний первого осциллятора, оставаясь частично сгруппированным около основной частоты, имеет по обе стороны сильные «крылья», заполненные случайными линиями. Спектр колебаний второго осциллятора также сильно размазан, однако заметно слабее, чем спектр первого. Интервал по уровню возбуждения для режима хаоса довольно небольшой, составляет несколько процентов от самого уровня, после чего это режим сменяется следующим – гигантскими осцилляциями, то есть хаос можно считать переходным режимом к следующему.

Режим №4 – гигантские осцилляции. Этот режим возникает тогда, когда хаос сменяется длительными по времени и большими по амплитуде

осцилляциями, по-прежнему имеющими хаотический характер. Длительность гигантских осцилляций превышает величину периода колебаний возбуждении на два-три порядка и более. Амплитуда по сравнению с амплитудной при хаосе возрастает, однако незначительно – не более чем на 20%, оставаясь больше амплитуд при режиме №2 на два-три порядка. Порог при переходе от режима №3 явно не выражен, расширение скачков хаоса до длительности гигантских осцилляций происходит плавным образом. Основной характер колебаний обоих осцилляторов, их производных и параметрических портретов остается тем же, что при хаосе, однако здесь колебания становятся значительно более чистыми, освобождаясь от примеси шума. Спектры колебаний теперь окончательно отвязываются от частоты возбуждения и имеют широкий хаотический характер. Интервал уровня возбуждения, соответствующий этому режиму довольно широкий и превышает в несколько (до трех) десятков уровень возбуждения режима хаоса.

Режим №5 – задержанная стабилизация. Этот режим по мере увеличения уровня возбуждения приходит на смену режиму №4, также без порога, то есть достаточно плавно и далее не меняется при увеличении уровня возбуждения до четырех-пяти порядков по сравнению с порогом возбуждения хаоса (то есть можно считать, до физической бесконечности). Переход от режима гигантских осцилляций состоит в том, что из всех осцилляций остается только одна, после которой заметные осцилляции прекращаются и смещение осцилляторов выходит на стабильный уровень, весьма малой амплитуды, но превышающий амплитуду колебаний в режиме №2 вблизи порога перехода к режиму №3 на порядок и более. Такая единственная осцилляция имеет высокую амплитуду, ту же или несколько больше амплитуды гигантских осцилляций) и значительную длительность, превышающую длительность гигантских осцилляций в несколько раз. Колебания второго осциллятора по-прежнему остаются зеркальным отражением колебаний первого в горизонтальной оси времени, а производные смещений того и другого имеют амплитуду близкую к амплитуде в режиме №4, но теперь скачкообразные осцилляции отсутствуют. Однако в колебаниях обоих

осцилляторов и особенно первого по-прежнему присутствуют осцилляции весьма высокой частоты с амплитудой на два-три порядка меньшей амплитуды основных колебаний. Параметрические портреты становятся значительно беднее траекториями, чем в режиме гигантских осцилляций, так для первого осциллятора портрет утрачивает одно из крыльев горизонтальной восьмерки, однако единственное оставшееся крыло остается замазанным по-прежнему. Параметрический портрет для второго осциллятора содержит всего одну траекторию с небольшим сгустком на ее конце за счет высокочастотных осцилляций малой амплитуды. Спектр колебаний по-прежнему полностью отвязан от частоты возбуждения и имеет ярко выраженную низкочастотную линию, соответствующую выходу смещения на стабильный уровень. Остальная часть спектра подобна спектру при режиме №4, однако при амплитуде на один-два порядка меньшей амплитуды низкочастотной составляющей.

Отмечены некоторые общие свойства, характерные для всех режимов. Так полный набор режимов можно разбить на две характерные группы – стабильные колебания – режимы №1, №2 и нестабильные – режимы №3-№5. Эти две группы по уровню возбуждения разделены ярко выраженным порогом, по прохождении которого амплитуда колебаний скачком увеличивается на два-три порядка. Внутри каждой группы пороги при переходе между режимами отсутствуют. Колебания в стабильных режимах полностью детерминированы, имеют правильный синусоидальный характер, спектры имеют четко выраженные одну-две линии, соответствующие кратные частоте возбуждения, а параметрические портреты – четко очерченные траектории в виде круга, в котором могут присутствовать четкие симметричные выемки. Колебания в нестабильных режимах имеют хаотический характер, спектры шумовые без привязки к частоте возбуждения, параметрические портреты – горизонтальные восьмерки сильно замазанные нерегулярными траекториями. Характерной особенностью нестабильных режимов является наложение на основные колебания дополнительных осцилляций крайне высокой частоты и малой амплитуды. Развертки колебаний во времени в нестабильных режимах имеют фрактальный

характер, проявляющийся в отсутствии детерминированности колебаний при изменении шага по времени.

Выполнено отдельное исследование высокочастотных колебаний, сопутствующих режимам нестабильной группы. Установлено, что такие колебания имеют четкий синусоидальный характер, причем частота их превышает частоту возбуждения почти на три порядка и амплитуда в течение развертки по времени сохраняется постоянной на уровне на два порядка ниже амплитуды основных колебаний. Параметрический портрет имеет вид последовательно сдвинутых по оси смещения правильных эллипсов, в геометрическом отношении напоминая траекторию дрейфа заряженных частиц в неоднородном магнитном поле при наличии слабого продвигающего электрического поля.

Установлено, что сопутствующие колебания особенно сильно проявляются на развертках производных от смещения, что и обеспечивает сильное замазывание параметрических портретов нестабильных режимов вертикальными траекториями.

Выполнена модельная иллюстрация общего характера нестабильного режима, основанная на представлении нестационарных колебаний в виде суммы основных и сопутствующих колебаний. На основании дифференцирования приведенной суммы получена количественная оценка параметров разверток по времени и параметрических портретов гигантских осцилляций, совпадающая с данными оригинального расчета.

Приведена качественная аналогия нестационарных режимов с возбуждением колебаний намагниченности при нелинейном ферромагнитном резонансе. Отмечена роль сопутствующих колебаний, подобная роли спин-волнового резервуара обменных волн.

Отмечена неполнота решенной задача, состоящая в ограничении рассмотрения только фиксированной «линейкой» параметров осцилляторов. В качестве предмета для дальнейших исследований предложено расширение постановки задачи и отмечена возможность существования других режимов, в

то же время, укладываемых в две основные группы – стабильных и нестабильных.

**Финансирование:** Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

### Литература

1. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. *Колебания, волны, структуры*. Москва, Физматлит. 2003. 496 с.
2. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. *Введение в нелинейную физику*. Москва, Наука. 1988. 379 с.
3. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. *Нелинейные волны*. Москва, Наука-Физматлит. 2000. 272 с.
4. Кузнецов С.П. *Динамический хаос (курс лекций)*. Москва, Физматлит. 2001. 296 с.
5. Дмитриев А.С., Панас А.И. *Динамический хаос: новые носители информации для систем связи*. Москва, Физматлит, 2002. 251 с.
6. Гуревич А.Г. *Ферриты на сверхвысоких частотах*. Москва, Гос. Изд. физ.-мат. лит. 1960. 409 с.
7. Гуревич А.Г. *Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках*. Москва, Наука. 1973. 588 с.
8. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. *Магнитные колебания и волны*. Москва, Физматлит. 1994. 464 с.
9. Моносов Я.А. *Нелинейный ферромагнитный резонанс*. Москва, Наука. 1971. 376 с.
10. Ле-Кроу Р., Комсток Р. Магнитоупругие взаимодействия в ферромагнитных диэлектриках. В кн.: У. Мэзон (ред.): *Физическая акустика. Т.3Б. Динамика решетки*. Москва, Мир. 1968. С.156.
11. Моносов Я.А., Сурин В.В., Щеглов В.И. Возбуждение резонансных упругих колебаний при нелинейном ферромагнитном резонансе. *Письма в ЖЭТФ*. 1968. Т.7. №9. С.315-317.

12. Зубков В.И., Моносов Я.А., Щеглов В.И. Спиновый эффект Мандельштама-Бриллюэна. *Письма в ЖЭТФ*. 1971. Т.13. №5. С.229-232.
13. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. *Радиотехника и электроника*. 2009. Т.54. №7. С.863.
14. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре. *Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]*. 2013. №2. <http://jre.cplire.ru/jre/feb13/10/text.pdf>
15. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре при ферромагнитном резонансе. *Радиотехника и электроника*. 2014. Т.59. №5. С.482.
16. Вейсс М. Сверхвысокочастотные и низкочастотные колебания, вызванные нестабильностью резонанса в ферритах. В кн.: *Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Сборник статей по ред. А.Г. Гуревича*. Москва, ИЛ. 1961. С.281.
17. Щеглов В.И., Шавров В.Г., Зубков В.И., Власов В.С., Котов Л.Н. Автомодационный режим нелинейных вынужденных колебаний намагниченности феррита в резонаторе. *Сборник трудов XII Международной конференции «Магнетизм, дальнее и ближнее спин-спиновое взаимодействие»*. Москва-Фирсановка, Издание МЭИ. 2009. С.100.
18. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Вынужденные колебания в системе из двух связанных осцилляторов в условиях кубической нелинейности и квадратичной связи. *Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]*. 2020. №8. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.8.7>
19. Власов В.С., Иванов А.П., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Автоколебания в системе двух связанных осцилляторов, один из которых является гирромагнитным. *Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. Москва, НИУ МЭИ. 2012. С.248.



20. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ линейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2013. №11. <http://jre.cplire.ru/jre/nov13/3/text.pdf>
21. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Автоколебания в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. *Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. Москва, НИУ МЭИ. 2013. С.188.
22. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа работы магнитострикционного преобразователя. *Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. Москва, «НИУ МЭИ». 2013. С.199.
23. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ нелинейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов в квадратичном приближении. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2014. №1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/11/text.pdf>
24. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ колебаний в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами на основе модели квадратичного приближения. *Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. Москва, ИНФРА-М. 2015. С.202.
25. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 1. Основные уравнения. *Радиотехника и электроника*. 2015. Т.60. №1. С.79.

26. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 2. Некоторые нелинейные явления. *Радиотехника и электроника*. 2015. Т.60. №3. С.297.
27. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ автомодуляционных колебаний в магнитоупругой среде на основе модели связанных магнитного и упругого осцилляторов. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2015. №5. <http://jre.cplire.ru/jre/may15/4/text.pdf>
28. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ автомодуляционных явлений в системе связанных магнитного и упругого осцилляторов на основе модели потенциала. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2015. №6. <http://jre.cplire.ru/jre/jun15/9/text.pdf>
29. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 1. Динамический потенциал. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2017. №7. <http://jre.cplire.ru/jre/jul17/6/text.pdf>
30. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 2. Линейная связь. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2017. №8. <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/5/text.pdf>
31. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 3. Нелинейная связь. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2017. №8. <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/6/text.pdf>
32. Шавров В.Г., Щеглов В.И., Иванов А.П. *Нелинейные колебания в задаче возбуждения гиперзвука*. Сыктывкар, ООО «Коми республиканская типография». 2021. 192 с.
33. Сивухин Д.В. *Общий курс физики. Т.3. Электричество*. Москва, Наука. 1977. 704 с.

34. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание развития колебаний магнотриксционного преобразователя в условиях умножения частоты возбуждения. *Радиотехника и электроника*. 2023. Т.68. №5.
35. Мандельброт Б.Б. *Фрактальная геометрия природы*. Москва, Наука. 2002, 656 с.

**Для цитирования:**

Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарные колебания в системе из двух связанных осцилляторов в условиях кубической нелинейности и кубической связи. Часть 1. Мультирежимный характер колебаний. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2023. №5. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.5.6>