

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.5.7>

УДК: 537.874; 537.624

**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ
СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ В УСЛОВИЯХ КУБИЧЕСКОЙ
НЕЛИНЕЙНОСТИ И КУБИЧЕСКОЙ СВЯЗИ.
ЧАСТЬ 2. ВАРИАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ**

А.П. Иванов ¹, В.Г. Шавров ², В.И. Щеглов ²

¹ Сыктывкарский государственный университет им. П. Сорокина
167001, Сыктывкар, Октябрьский пр-т, 55

² Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
125009, Москва, ул. Моховая, 11, к.7

Статья поступила в редакцию 28 марта 2023 г.

Аннотация. Рассмотрена задача о возбуждении магнитоупругих колебаний в геометрии магнестрикционного преобразователя, содержащего нормально намагниченную ферритовую пластину, возбуждаемую переменным полем. Динамика преобразователя рассмотрена на основе системы уравнений для нелинейных колебаний двух связанных осцилляторов – магнитного и упругого. Уравнение для магнитного осциллятора является нелинейным, а для упругого – линейным. Нелинейность и связь между осцилляторами имеют кубический характер. В соответствии с уровнем возбуждения имеют место пять базовых режимов: синхронизм, утроение частоты, хаос, гигантские осцилляции и задержанная стабилизация. Первые два режима являются стабильными, беспороговыми и полностью детерминированными. Остальные три режима являются нестабильными и отделены от стабильных резким порогом по уровню возбуждения. Показано, что при увеличении уровня возбуждения амплитуда колебаний, стремясь к насыщению, претерпевает по величине скачки до полутора-двух раз. Исследована зависимость порога возбуждения нестабильных

колебаний от частоты возбуждения. Показано, что при увеличении частоты возбуждения порог нестабильных колебаний с весьма высокой точностью растет по степенному закону третьего или четвертого порядка. Исследован характер колебаний при вариации диссипации осцилляторов. Установлено, что на характер колебаний первого осциллятора преимущественное влияние оказывает диссипация не первого, а именно второго осциллятора. Исследована вариация собственных частот осцилляторов. Показано, что увеличение собственных частот приводит систему к хаосу, а далее – к регуляризации колебаний. Уменьшение собственных частот осцилляторов приводит к режиму поджатой синусоиды со смещением центра и к уходу системы на бесконечность. Исследована вариация кубической нелинейности первого осциллятора. Отмечена сильная несимметричность изменения характера колебаний при изменении параметра нелинейности в ту или другую сторону. Уменьшение параметра нелинейности приводит к режиму поджатой синусоиды со смещенным центром с дальнейшим уходом системы на бесконечность. Увеличение параметра нелинейности приводит к хаосу и регуляризации. Исследована вариация связи между осцилляторами. Установлено, что изменение параметров связи любого из осцилляторов приводит к одинаковому порядку смены режимов – от регуляризации к хаосу, гигантским осцилляциям, поджатой синусоиде и уходу на бесконечность. На плоскости в координатах того и другого параметров связи построены области существования различных режимов колебаний. Для интерпретации описанных явлений предложена модель динамического потенциала. Показано, что потенциал первого осциллятора имеет минимум, положение которого определяется величиной смещения второго осциллятора. Причиной хаотического характера колебаний в нестабильных режимах является рассогласование по фазе между колебаниями осциллятора и скачками потенциала, в котором эти колебания происходят. Рассмотрен кольцевой характер возбуждения колебаний в системе в целом. Приведена аналогия с автоколебаниями в радиотехнической системе с положительной обратной связью. Приведены рекомендации для дальнейшего развития работы.

Ключевые слова: нелинейные колебания, связанные осцилляторы, кубическая нелинейность.

Финансирование: Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

Автор для переписки: Щеглов Владимир Игнатьевич, vshcheg@cplire.ru

Введение

Важнейшей частью современного учения о колебаниях является рассмотрение динамических свойств нелинейной системы с несколькими степенями свободы [1-5]. Особое разнообразие являют нелинейные процессы в магнитных средах, имеющие место в диапазоне СВЧ [6-9]. Дополнительные возможности открывает включение в игру кроме магнитной еще и упругой системы, обеспечивающей дополнительную степень свободы. [10-12].

Магнитные структуры, обладающие упругостью, находят широкое применение в магнитострикционных преобразователях, работающих в диапазоне частот до десятков ГГц [13]. Возбуждение таких преобразователей в нелинейном режиме позволяет повысить мощность упругих колебаний по сравнению с линейным режимом в десятки раз [14-16].

В работах [17-20] показано, что при высоком уровне возбуждения колебания могут приобретать нестационарный характер, вплоть до хаотического. Математический аппарат, описывающий такие колебания содержит связанную систему уравнений движения для намагниченности и упругого смещения с соответствующими граничными условиями [14-16].

Ввиду высокой сложности такого аппарата, в работах [21-30] предложена упрощенная математическая модель магнитострикционного преобразователя, использующая квадратичное приближение по намагниченности. Преобразователь представлен состоящим из двух осцилляторов – магнитного и упругого. Колебания полученной структуры описываются системой из двух

связанных уравнений второго порядка, первое из которых является нелинейным, а второе линейным.

В работе [31] рассмотрены колебания структуры с учетом кубической нелинейности и квадратичной связи. В широком диапазоне амплитуд возбуждения выявлены два мультигармонических режима колебаний: регуляризованный и квазихаотический.

В работе [32] (первая часть настоящей работы) данные работы [31] дополнены рассмотрением кубической связи. Получены пять новых режимов: синхронизма, утроения частоты, хаоса, гигантских осцилляций и задержанной стабилизации.

Настоящая работа, являющаяся продолжением [32], посвящена подробному рассмотрению этих режимов при различных вариациях параметров системы.

1. Геометрия задачи и основные уравнения

Общая геометрия задачи, сходная с традиционной схемой магнитострикционного преобразователя [13,14], показана на рис. 1.

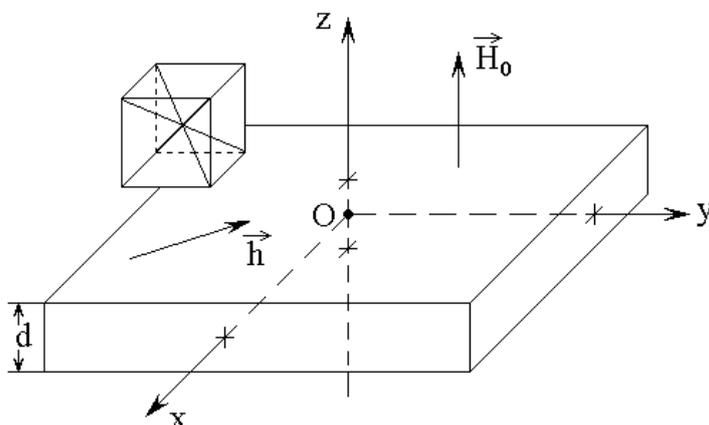


Рис. 1. Общая геометрия задачи. Слева – схема кристаллографической ячейки

В основе геометрии лежит плоскопараллельная пластина толщины d , обладающая магнитными, упругими и магнитоупругими свойствами. Внешнее постоянное магнитное поле \vec{H}_0 перпендикулярно плоскости пластины, переменное магнитное поле \vec{h} – лежит в ее плоскости. Задача решается в

декартовой системе координат $Oxyz$, плоскость Oxy которой совпадает с плоскостью пластины, а оси Ox , Oy и Oz параллельны ребрам куба кристаллографической ячейки. Центр системы координат O находится в центре пластины, так что ее плоскости соответствуют координатам $z = \pm d/2$.

Система уравнений движения для нормированных компонент намагниченности $m_{x,y,z}$, имеет вид:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = - \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \cdot \left[(m_y + \alpha m_x m_z) \cdot H_{ez} - (m_z - \alpha m_y m_x) \cdot H_{ey} - \alpha \cdot (m_y^2 + m_z^2) \cdot H_{ex} \right], \quad (1)$$

где уравнения для m_y и m_z получаются циклической перестановкой x, y, z .

Входящие в эти уравнения эффективные поля имеют вид:

$$H_{ex} = h_x + H_{ax}; \quad (2)$$

$$H_{ey} = h_y + H_{ay}; \quad (3)$$

$$H_{ez} = H_0 - 4\pi M_0 m_z + H_{az}; \quad (4)$$

где:

$$H_{ax} = - \frac{B_2}{M_0} \left[m_y \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + m_z \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right], \quad (5)$$

где \hat{A}_2 – константа магнитоупругого взаимодействия. Поля H_{ay} и H_{az} получаются из (5) циклической перестановкой x, y, z .

Уравнения для компонент упругого смещения $u_{x,y}$ имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial t^2} = - 2\beta \frac{\partial u_{x,y}}{\partial t} + \frac{c_{44}}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial z^2}; \quad (6)$$

граничные условия:

$$c_{44} \frac{\partial u_{x,y}}{\partial z} \Big|_{z=\pm d/2} = -B_2 m_{x,y} m_z. \quad (7)$$

В уравнении (1) α – параметр затухания Гильберта, в уравнении (6) β – параметр затухания упругих колебаний, c_{33} – модуль упругости, ρ – плотность магнитной пластины.

В работах [21-25] показано, что с помощью квадратичного разложения намагниченности в виде:

$$m_z = 1 - \frac{1}{2} m_x^2 - \frac{1}{2} m_y^2. \quad (8)$$

систему (1)-(7) можно свести к упрощенной системе для двух связанных осцилляторов вида:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{d x_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \delta_1 \cdot x_1^3 + \mathcal{G}_1 \cdot x_2^3 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (9)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{d x_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0, \quad (10)$$

где x_1, x_2 – координаты смещения первого и второго осцилляторов соответственно, β_1, β_2 – их параметры затухания, ω_1, ω_2 – частоты собственных колебаний осцилляторов, δ_1 – параметр нелинейности первого осциллятора, \mathcal{G}_1 – коэффициент связи первого осциллятора со вторым, γ_2 – коэффициент связи второго осциллятора с первым, A_0 – амплитуда и ω_0 – частота возбуждения.

В этой системе первый осциллятор соответствует магнитной части задачи, а второй – упругой. Первое уравнение имеет кубическую нелинейность вида $\delta_1 \cdot x_1^3$, связь этого уравнения со вторым также имеет кубический характер

$\vartheta_1 \cdot x_2^3$. Второе уравнение является линейным, связь его с первым обеспечивается линейным слагаемым $\gamma_2 \cdot x_1$.

Связь между параметрами приведенных здесь уравнений (9)-(10) и параметрами исходной системы (1)-(7) приведена в работе [21] и в монографии [30, стр. 92-95].

Замечание. Заметим, что в приведенной там трактовке параметр кубической связи получается равным нулю (форм. (4.55) на стр. 93 в [30]). Однако можно полагать, что при разложении намагниченности (8) по степеням выше второй параметр кубической связи будет отличен от нуля, поэтому здесь, чтобы не исключать общности системы (9)-(10), мы рассматриваем этот параметр наряду с другими отличным от нуля.

2. Базовые параметры задачи

В основу дальнейшего рассмотрения положим базовые значения параметров задачи в наипростейшем виде, принятом в работе [32]:

$$\omega_1 = 1; \omega_2 = 1; \omega_0 = 1; \beta_1 = 0,05; \beta_2 = 0,05; \delta_1 = 1; \vartheta_1 = 1; \gamma_2 = 1.$$

Амплитуду возбуждения A_0 будем менять в пределах от 0,001 до 10000. Шаг по времени для всех разверток, кроме отдельно указанных, возьмем равным $\Delta t = 0.01$. В ходе настоящего рассмотрения эти базовые параметры будем варьировать в пределах, допустимых физическим и математическим содержанием задачи. Как и в работе [32], все параметры будем задавать в безразмерных единицах (называемых далее «относительными единицами»), сохраняющими пропорциональные соотношения относительно друг друга.

3. Основные режимы колебаний

В работе [32] выявлены пять основных режимов колебаний системы, которые будем считать базовыми. Эти режимы получены при вариации уровня возбуждения при базовых значениях параметров, приведенных в разделе 2. В

рамках настоящей работы ограничимся рассмотрением колебаний только первого осциллятора, так как колебания второго в определенной мере отражают колебания первого в упрощенном виде. Такое ограничение принято для упрощения решения поставленной задачи, так как в большинстве случаев, имея в руках колебания первого осциллятора и пользуясь набором базовых режимов, приведенных в работе [32], можно, по крайней мере качественно, судить о характере колебаний второго осциллятора.

Согласно работе [32] в рамках базовой «линейки» параметров по мере увеличения уровня возбуждения можно выделить следующие режимы:

режим №1 – $0.001 < A_0 \leq 0.08$ отн.ед. – синхронизм;

режим №2 – $0,08 \leq A_0 \leq 0,17$ отн.ед. – утроение частоты;

режим №3 – $0,17 \leq A_0 \leq 2,0$ отн.ед. – хаос;

режим №4 – $2,0 \leq A_0 \leq 70,0$ отн.ед. – гигантские осцилляции;

режим №5 – $70,0 \leq A_0 \leq 3000,0$ отн.ед. – задержанная стабилизация.

При этом режимы №1 и №2 являются стабильными, то есть полностью детерминированными, а режимы №3-№5 – нестабильными, колебания в них проявляют стохастичность, при малом изменении начальных условий меняются значительным образом и относительно величины шага развертки по времени имеют фрактальный характер. Колебания в стабильных режимах являются беспороговыми и имеют амплитуду сравнительно малую. Для возбуждения первого нестабильного режима – хаоса, уровень возбуждения должен преодолеть значительный порог, в результате прохождения которого амплитуда колебаний резким скачком увеличивается на два-три порядка. Между собой нестабильные режимы являются беспороговыми, то есть по мере увеличения уровня возбуждения переходят друг в друга плавным образом. Итак, при плавном увеличении уровень возбуждения должен преодолеть только один резкий порог – между режимом №2 утроением частоты и режимом №3 – хаосом. Во всех остальных случаях режимы переходят друг в друга достаточно плавно.

Ввиду малого различия между режимами №1 и №2 в рамках настоящей работы объединим их в один класс стабильных режимов, дадим ему новое название – «регуляризованных колебаний» и присвоим двойной номер №1-2. Для нестабильных режимов названия и номера оставим прежними.

Следуя работе [32], на рис. 2 приведем типичные развертки во времени колебаний первого осциллятора в основных режимах.

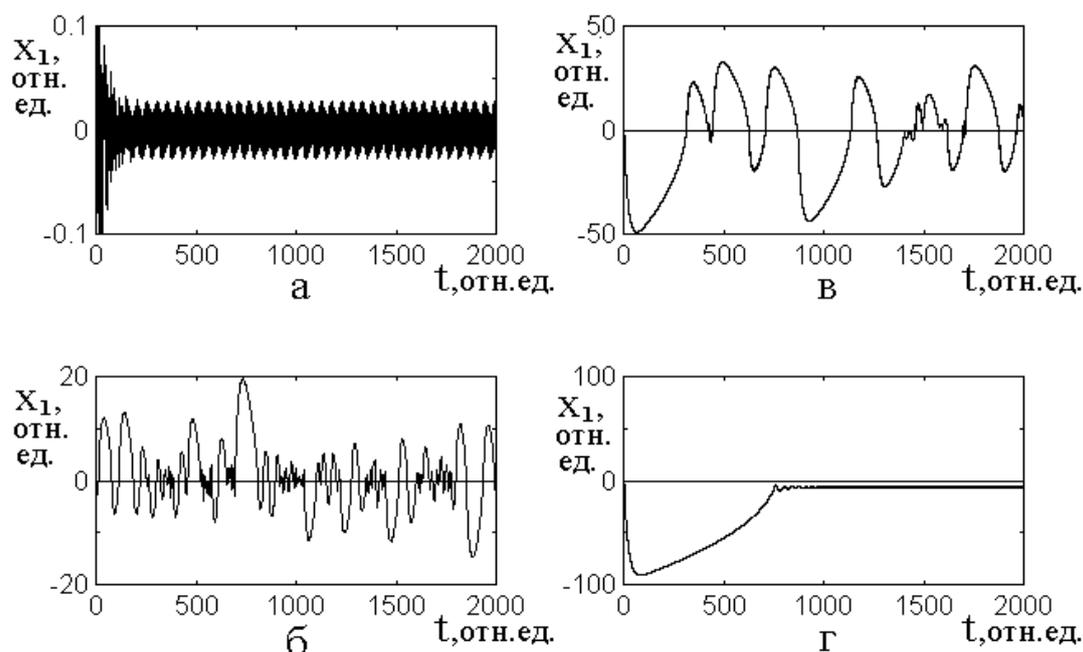


Рис. 2. Развертки по времени для базовых режимов колебаний первого осциллятора при различных уровнях возбуждения.

а – $A_0 = 0.10$ отн.ед., режим №1-2 – регуляризация;

б – $A_0 = 1.0$ отн.ед., режим №3 – хаос;

в – $A_0 = 10$ отн.ед., режим №4 – гигантские осцилляции;

г – $A_0 = 90$ отн.ед., режим №5 – задержанная стабилизация

Здесь режим регуляризации №1-2 (рис. 2а) является стабильным, так что после начального времени около 200 отн.ед., когда в формировании колебаний принимают участие процессы релаксации, колебания принимают стационарную амплитуду и становятся полностью регулярными с частотой, равной частоте возбуждения.

Замечание. Наблюдаемые на (рис. 2а) осцилляции амплитуды с периодом около 50 отн.ед. вызваны стробоскопическим эффектом из-за сочетания между периодом возбуждающих колебаний и цикличностью машинного вывода

амплитуды через определенное число шагов по времени (вывод через 200 шагов при шаге 0.01 отн.ед и периоде возбуждения 6.28 отн.ед). При выводе на каждом шаге амплитуда колебаний остается постоянной и период равным периоду возбуждения. Принятый здесь вывод через 200 шагов обусловлен удобством машинного счета, малым временем и малым объемом выводимого файла. Проверка показывает, что стробоскопический эффект проявляется только при периоде колебаний, сравнимым с периодом возбуждения, тогда как во всех рассматриваемых здесь нестабильных режимах период колебаний значительно больше периода возбуждения, так что стробоскопический эффект отсутствует.

Режим хаоса №3 (рис. 2б) является нестабильным, то есть для его реализации уровень возбуждения должен преодолеть определенный порог. Амплитуда колебаний резко возрастает сразу с 0.02 отн.ед. на рис. 2а до около 10 отн.ед. и более на рис. 2б, причем меняется от колебания к колебанию случайным образом. Период хаотических колебаний в среднем составляет около 100 отн.ед., то есть превышает период возбуждения почти на два порядка.

Режим гигантских осцилляций №4 (рис. 2в) также является нестабильным, однако колебания на вид значительно более упорядочены, чем в режиме хаоса. Отдельные колебания имеют крупный округлый вид, амплитуда увеличивается в среднем до 20-30 отн.ед., а период также увеличивается, составляя около 300 отн.ед.

Последний из реализующихся на линейке базовых параметров – режим задержанной стабилизации (рис. 2г), также является нестабильным. Из множества гигантских осцилляций здесь остается только одна, точнее, ее отрицательная половина, а амплитуда такой осцилляции еще больше возрастает, достигая почти 100 отн.ед., при длительности более 700 отн.ед. По окончании этой осцилляции смещение осциллятора выходит на стационарный отрицательный уровень около 5 отн.ед.

Дальнейшее увеличение уровня возбуждения приводит только к некоторому количественному изменению параметров (амплитуды, времени

задержки, уровня стабилизации) режима задержанной стабилизации, оставляя общий характер явления неизменным.

Отметим также, что все нестабильные режимы сопровождаются наложением на основные колебания «сопутствующих» осцилляций, имеющих правильный синусоидальный характер, крайне низкую амплитуду (порядка 0.1 отн.ед. и менее) и крайне высокую частоту (на два порядка выше частоты возбуждения, так что период их составляет около 0.09 отн.ед.). Для уверенного наблюдения сопутствующих осцилляций шаг развертки по времени следует выбирать не более $\Delta t = 0,001$ отн.ед. Более подробно сопутствующие осцилляции рассмотрены в разделах 14, 15 работы [32]. Значительная роль сопутствующим осцилляциям принадлежит в формировании производных от основных колебаний смещения осцилляторов, а также их параметрических портретов. В рамках настоящей работы производные и портреты не рассматриваются, поэтому сопутствующим осцилляциям, кроме некоторых особых случаев, должное внимание не уделяется. Однако авторы считают роль этих осцилляций в формировании нестационарных режимов весьма значительной, поэтому предполагают рассмотреть их в отдельной работе.

4. Пороговый характер возбуждения нестабильных нелинейных колебаний

В предыдущем разделе отмечено, что возбуждение нестабильных колебаний по амплитуде возбуждения имеет пороговый характер. Ввиду сходства и более простого характера колебаний второго осциллятора в рамках настоящей работы ограничимся рассмотрением только первого осциллятора.

Обратимся к рис. 3, где приведены зависимости смещения x_1 и производной dx_1/dt от амплитуды возбуждения A_0 .

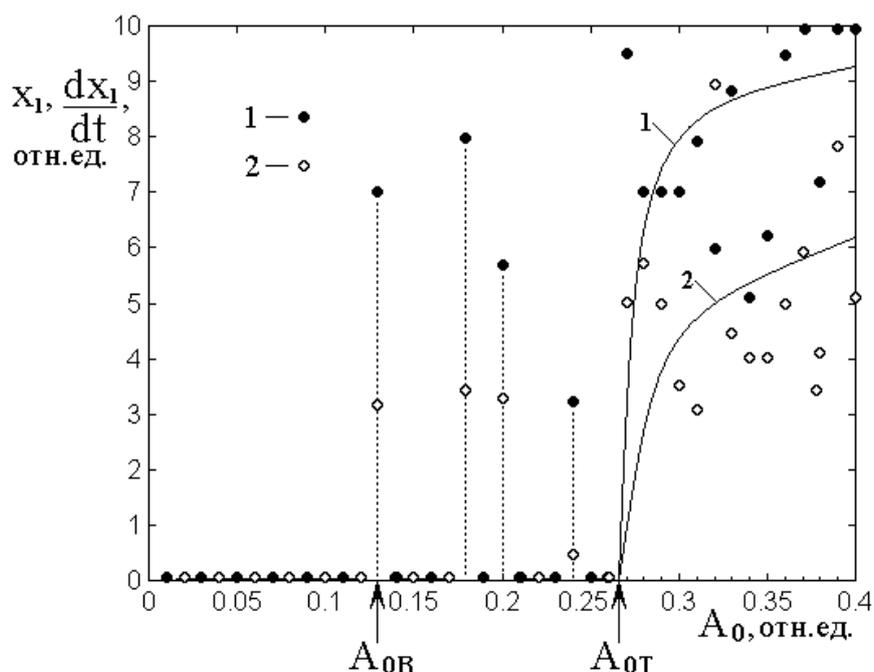


Рис. 3. Зависимости смещения и производной от амплитуды возбуждения для первого осциллятора.

1, сплошные точки – смещение x_1 ; 2, открытые точки – производная dx_1/dt .

Все точки – результаты машинного эксперимента. Разброс точек обусловлен нестабильностью соответствующих режимов (№3-№5). Кривые построены приближенно, так что отражают усредненные значения.

Параметры – приведены в разделе 2

Из рисунка видно, что при малых значениях A_0 амплитуда колебаний как смещения, так и производной крайне мала. Это продолжается только до определенного значения A_0 , где амплитуда возбуждаемых колебаний резким скачком увеличивается сразу на несколько порядков, после чего далее увеличивается, но уже довольно плавно. Амплитуда колебаний производной, как правило, несколько меньше амплитуды смещения, однако такое отличие не носит однозначного характера.

Весь диапазон изменения уровня возбуждения A_0 можно условно разделить на три части.

Первая область изменения A_0 , в которой имеют место только стабильные колебания, то есть режимы №1 и №2 (или режим №1-2). Эта область простирается от нуля до величины A_{0B} . В этой области амплитуды как

смещения x_1 , так и производной dx_1/dt составляют сотые доли относительной единицы.

Вторая область изменения A_0 , в которой при плавном увеличении возбуждения области стабильных (режим №2) и нестабильных (режимы №3, №4) колебаний чередуются с неравными промежутками. Эта область простирается от A_{0B} до A_{0T} . Здесь в режиме №2 амплитуды смещения и производной по-прежнему составляют сотые доли относительной единицы, а в режимах №3 и №4 достигают нескольких относительных единиц. На рисунке такие колебания отмечены точками, из которых спускаются вниз пунктирные прямые. Таким образом, можно считать, что здесь порог имеет «дробный» характер, а амплитуда и режим возбуждаемых колебаний определяется конкретным значением A_0 между A_{0B} и A_{0T} . Для удобства дальнейшего обращения будем называть A_{0B} «нижним порогом» нестабильных колебаний, а A_{0T} – «верхним порогом» тех же колебаний.

Третья область изменения A_0 , в которой при любых значениях возбуждения имеют место только нестабильные колебания (режимы №3, №4, №5). Эта область простирается от A_{0T} до бесконечности (проверено до $A_0 = 3000$ отн.ед., после чего система уходит на бесконечность). Здесь в режиме №4 амплитуды смещения и производной составляют десятки и сотни относительных единиц. Режим №3 по A_0 занимает сравнительно узкую область (порядка нескольких сотых относительной единицы), где-то сразу после A_{0T} , а режим №5 начинается весьма далеко (при A_0 более 70 отн.ед.), Так что промежуточную часть изменения A_0 , которой в настоящей работе уделено основное внимание, занимает режим гигантских осцилляций №4.

Зависимости, приведенные на рис. 3, в явной степени отражают наличие порога и его дробный характер. В то же время, поведение амплитуды колебаний как смещения, так и производной, до порога и после него остаются неясными.

Для более подробного выяснения этого вопроса рассмотрим эти области по отдельности.

На рис. 4 показаны зависимости смещения и производной от амплитуды возбуждения для первого осциллятора в области до порога, то есть при $A_0 < A_{0B}$.

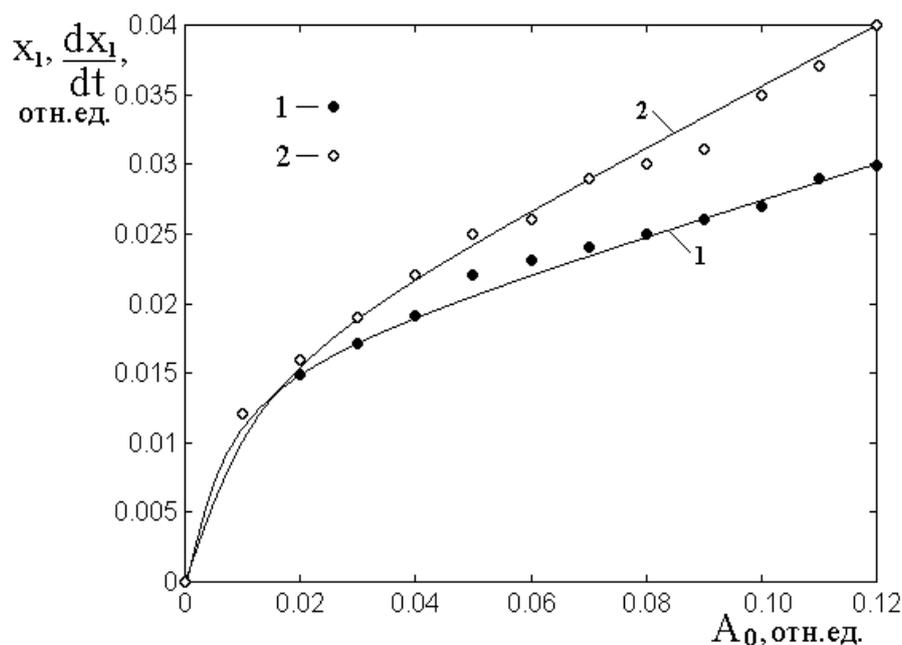


Рис. 4. Зависимости смещения и производной от амплитуды возбуждения для первого осциллятора в области до порога.

1, сплошные точки – смещение x_1 ; 2, открытые точки – производная dx_1/dt .

Все точки- результаты машинного эксперимента. Разброс точек обусловлен нестабильностью соответствующих режимов (№3-№5). Кривые построены приближенно, так что отражают усредненные значения.

Параметры – приведены в разделе 2

Из рисунка видно, что обе зависимости по мере увеличения A_0 , начинаясь с нуля, плавно возрастают, причем их рост, будучи сначала весьма быстрым, после $A_0 \approx 0.02$ замедляется и становится почти линейным. Такое поведение соответствует сначала колебаниям в режиме №1, где амплитуда растет пропорционально уровню возбуждения, с последующим переходом к режиму №2, где рост амплитуды замедляется из-за постепенного оттока поступающей энергии на возбуждение третьей гармоники. Какой-либо разброс точек, характерный для области возбуждения выше порога, то есть при $A_0 > A_{0T}$ (рис.

3) здесь отсутствует, что как раз соответствует стабильному состоянию нелинейных колебаний.

Обратимся теперь к рис. 5, где показаны зависимости смещения и производной от амплитуды возбуждения для первого осциллятора в области выше порога, то есть при $A_0 > A_{0B}$. Участок, представленный на рис. 4 (режимы №1 и №2), здесь сливается с нулевой вертикальной линией, так что не рассматривается. То же касается режима №3, который также занимает весьма узкую область и заметных особенностей не проявляет. Таким образом, приведенные здесь кривые относятся главным образом к режиму №4 (гигантские осцилляции). Заметим также, что на рис.4 амплитуда производной выше амплитуды смещения, а здесь – ниже. Можно полагать, что такая «перемена мест» обусловлена сильным разбросом точек в области сразу выше порога, показанной в правой части рис. 3, где из-за дробности явления отдельные точки перескакивают вверх и вниз в почти хаотическом порядке.

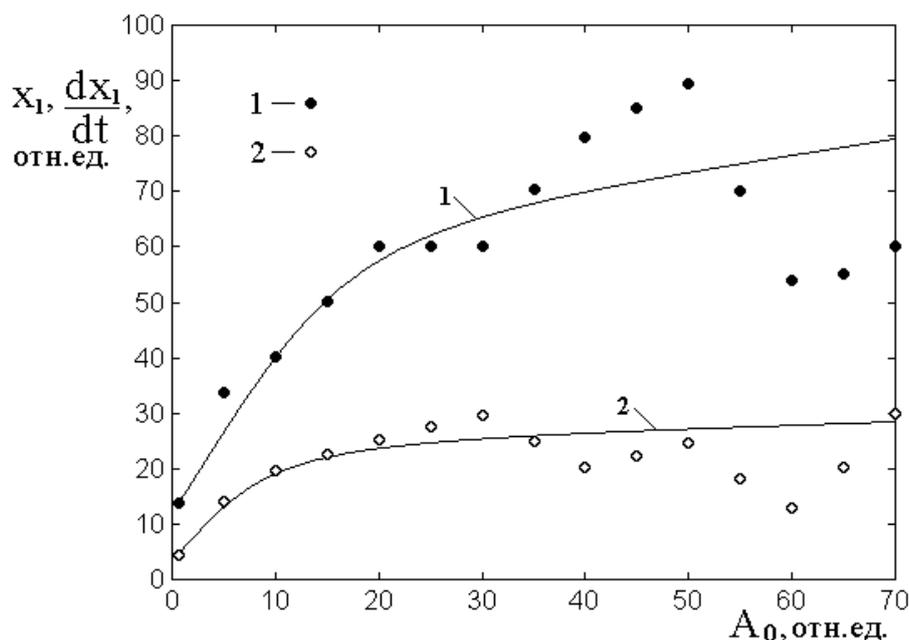


Рис. 5. Зависимости смещения и производной от амплитуды возбуждения для первого осциллятора в области выше порога.

1, сплошные точки – смещение x_1 ; 2, открытые точки – производная $d x_1 / d t$.

Все точки – результаты машинного эксперимента. Разброс точек обусловлен нестабильностью соответствующих режимов (№3-№5). Кривые построены приближенно, так что отражают усредненные значения.

Параметры – приведены в разделе 2

Из рисунка видно, что здесь, как и в предыдущем случае, обе зависимости растут, причем рост по мере увеличения уровня возбуждения все более замедляется, постепенно стремясь к постоянному уровню, что особенно заметно для производной (кривая 2). Такое поведение соответствует увеличению неустойчивости колебаний в режиме гигантских осцилляций, когда энергия возбуждения все более «размазывается» на более широкий спектр частот. Обе зависимости, начиная с $A_0 \approx 30$ отн.ед. приобретают скачкообразный характер, причем скачки с ростом A_0 увеличиваются, что соответствует увеличению неустойчивости нелинейных колебаний.

В режиме №5 (задержанная стабилизация) гигантские осцилляции вырождаются, так что осцилляция остается всего одна – для смещения – глубокий спад с последующим сравнительно медленным выходом на стационарный уровень (рис. 2г). Амплитуда, то есть «глубина» такой единственной осцилляции, приходя через ряд скачков, постепенно увеличивается, хотя весьма медленно, достигая при $A_0 \approx 3000$ отн.ед. уровня порядка – 100 отн.ед. При дальнейшем увеличении возбуждения система уходит на бесконечность. Производная во всем интервале изменения возбуждения имеет характер сопутствующих колебаний с постоянной весьма малой амплитудой.

5. Зависимость порога от частоты возбуждения

В предыдущем разделе выявлен пороговый характер возбуждения неустойчивых колебаний (режимов №3-№5). Рассмотрим теперь некоторые свойства порога неустойчивости. Согласно принятым условиям (раздел 2), собственные частоты обоих резонаторов совпадают и равны $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1$. Можно ожидать, что вынужденные колебания структуры в целом должны иметь резонансный характер. Однако проверка показывает, что это не так. Для пояснения обратимся к рис. 6, где приведена зависимость верхнего порога возбуждения неустойчивых колебаний (режимов №3-№5) A_{0T} от частоты возбуждения ω_0 . Проверка показывает, что пороги неустойчивости для обоих

осцилляторов всегда совпадают, поэтому, как и ранее, ограничимся рассмотрением только первого осциллятора.

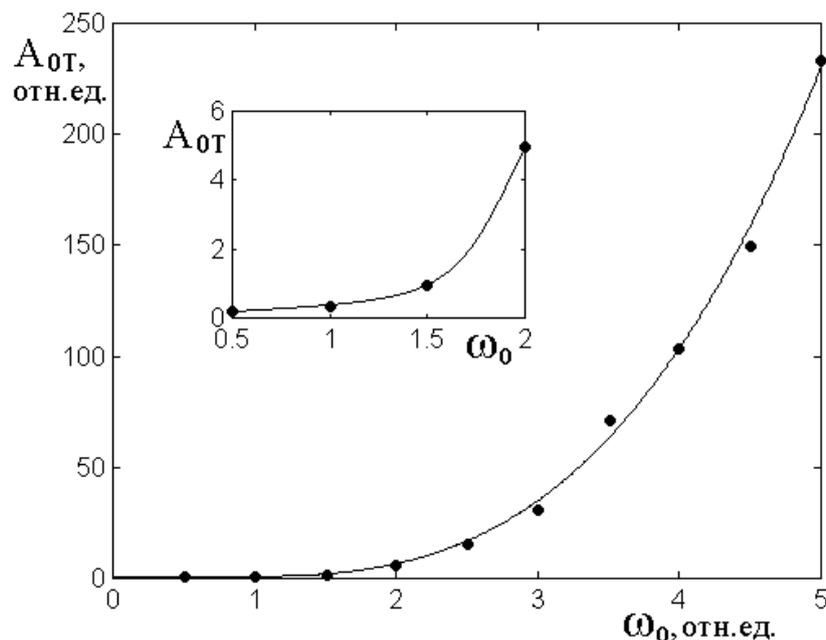


Рис. 6. Зависимость верхнего порога гигантских осцилляций от частоты возбуждения. Точки – результат машинного эксперимента.

Аппроксимирующая кривая построена по формуле (11).

На врезке – начальный участок той же кривой.

Параметры – те же, что на рис. 3

Из рисунка видно, что зависимость имеет возрастающий характер, то есть по мере увеличения частоты возбуждения порог возрастает, причем тем скорее, чем частота выше. Такой нарастающий вид имеет место во всем диапазоне исследованных частот (от $\omega_0 = 0.1$ до 5.0 отн. ед.), причем при $\omega_0 = 1$ никаких особенностей резонансного характера не наблюдается. Для исследования возможности аппроксимации наблюдаемой зависимости степенной функцией были опробованы многочлены второй, третьей и четвертой степеней. Проверка показала, что наиболее подходящей является аппроксимация многочленом третьей степени вида:

$$A_{0T} = 2.9258 \omega_0^3 - 6.2301 \omega_0^2 + 3.9681 \omega_0 + 0.2560. \quad (11)$$

Именно по этому многочлену построена кривая на рис. 6.

Возможны еще два вида аппроксимации, имеющие более простой вид и дающие почти такую же точность (в пределах 5%):

$$A_{0T} = 3(\omega_0 - 0.7)^3 + 1.1; \quad (12)$$

$$A_{0T} = 0.4\omega_0^4. \quad (13)$$

При ω_0 больше 5 отн.ед. измерения осложняются высокой дробностью порогов. Так при $\omega_0 = 8.0$ отн.ед. нижний порог равен $A_{0B} = 1200$ отн.ед., а верхний $A_{0T} = 2900$ отн.ед. При этом формула (12) дает $A_{0T} = 1680$, а формула (13) – $A_{0T} = 1640$. То есть обе формулы дают близкие значения, причем они оба оказываются в пределах интервала дробности порога. При $\omega_0 = 10.0$ отн.ед. нижний и верхний пороги равны 2400 отн.ед. и 4800 отн.ед. соответственно, а расчетные значения получаются равными 2400 и 4000 отн.ед. То есть здесь, хотя оба значения находятся пределах дробности, но теперь уже заметно различаются. Однозначный вывод относительно качества аппроксимации зависимости порога от частоты возбуждения, то есть выбора между формулами (12) и (13), требует более подробного исследования. В любом случае в пользу выбора той или другой формулы, то есть третьей или четвертой степени должно решить построение качественной модели неустойчивых колебаний. Ввиду крайне высокой сложности явления построение такой модели авторы предполагают рассмотреть в отдельной работе.

6. Вариация диссипации осцилляторов

В предыдущих разделах варьировался только один параметр – амплитуда возбуждения. Однако форма возбуждаемых колебаний и соответствующие режимы в значительной степени зависят от других параметров. Рассмотрим сначала влияние диссипации, для чего обратимся к рис. 7, демонстрирующему характер колебаний первого осциллятора при вариации параметров затухания осцилляторов – первого (левый столбец) и второго (правый столбец). Для каждого осциллятора рассмотрены три величины параметра затухания: малая – 0.005 отн.ед., средняя – 0.05 отн.ед и большая – 0.5 отн.ед. При этом малая степень затухания соответствует высокой добротности осциллятора, когда

амплитуда его колебаний в свободном состоянии уменьшается на порядок при 100-200 периодах, средняя – когда амплитуда спадает на порядок при 10-20 колебаниях и высокая соответствует – почти аperiodическому режиму, когда осциллятор совершает не более 1-2 колебаний.

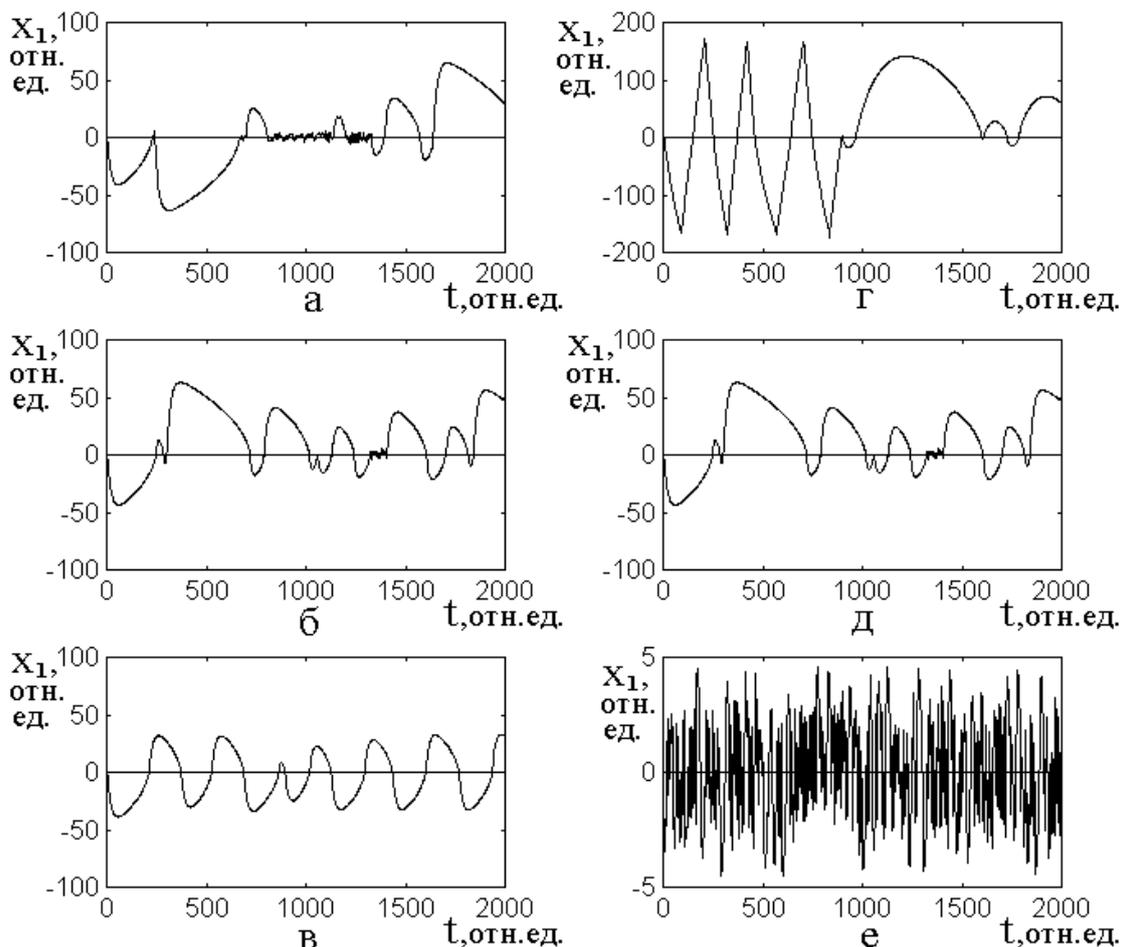


Рис. 7. Характер колебаний при вариации затухания осцилляторов.

Амплитуда возбуждения – $A_0 = 7$ отн.ед.

Левый столбец (а,б,в) – изменение β_1 , правый столбец (г,д,е) – изменение β_2

а – $\beta_1 = 0.005$; $\beta_2 = 0.05$; б – $\beta_1 = 0.05$; $\beta_2 = 0.05$; в – $\beta_1 = 0.5$; $\beta_2 = 0.05$;

г – $\beta_1 = 0.05$; $\beta_2 = 0.005$; д $\beta_1 = 0.05$; $\beta_2 = 0.05$; е – $\beta_1 = 0.05$; $\beta_2 = 0.5$.

Остальные параметры – те же, что приведены в разделе 2

Из рисунка видно, что изменение затухания первого осциллятора в пределах двух порядков меняет характер колебаний в довольно малой степени. Так, во всех случаях (рис. 7а, б, в) остается режим гигантских осцилляций, причем как длительность отдельных осцилляций, так и их амплитуда, в пределах полутора-двух раз сохраняются. Однако изменение затухания второго

осциллятора в тех же пределах меняет характер колебаний в значительной степени. Так, при малом затухании (рис. 7г) и среднем (рис. 7д) затухании остается режим гигантских осцилляций, а при большом затухании (рис. 7е) гигантские осцилляции сменяются режимом хаоса. Амплитуда осцилляций при малом затухании (рис. 7г) больше амплитуды при среднем затухании (рис. 7д) в 3-4 раза, причем часть гигантских осцилляций вместо округлого приобретает пилообразный характер с резко выраженными зубьями. Амплитуда хаоса (рис. 7е) – крайне мала и более чем порядок меньше амплитуды при среднем затухании (рис. 7д).

Проверка показывает, что колебания второго осциллятора во всех рассмотренных случаях являются отражением в горизонтально оси колебаний первого (как на рис. 6а1 и рис. 6а2, а также на соответствующих эпюрах рис. 8 и 10 в работе [32]), однако при малом и среднем затухании (рис. 7г,д) такое отражение является точным, а при большом затухании (рис. 7е), то есть в режиме хаоса, на колебания первого осциллятора накладываются еще сопутствующие колебания (разделы 14, 15 работы [32]) с амплитудой в 4-5 раз меньше амплитуды основных колебаний. В этом случае колебания второго осциллятора являются зеркальным отражением колебаний первого осциллятора за вычетом сопутствующих колебаний. В то же время, более подробная проверка показывает, что и при малом и среднем затухании сопутствующие колебания в первом осцилляторе также присутствуют, но из-за крайней малости их амплитуды (на два-три порядка меньше амплитуды основных колебаний) на развертках типа показанных на рис. 7 явно не проявляются. Для их явного выявления следует использовать развертку в малом интервале времени, как это было сделано при построении рис. 12 в работе [32].

Таким образом, из проделанного рассмотрения можно сделать вывод, что в характере колебаний первого осциллятора затухание второго осциллятора играет значительно более существенную роль, чем его собственное затухание. Можно полагать, что причиной такого «усиления» влияния второго осциллятора является кубическая связь первого осциллятора со вторым, описываемая

слагаемым $\mathcal{G}_1 \cdot x_2^3$ в уравнении (9). При этом колебания второго осциллятора возбуждаются слагаемым $\gamma_2 \cdot x_1$, содержащем только первую степень x_1 . То есть, первый осциллятор возбуждает второй, а второй в свою очередь возвращает колебания первому, возведенными в третью степень, что существенным образом отличается от линейного возвращения при линейной связи. Заметим, что принятое в данном рассмотрении равенство параметров $\mathcal{G}_1 = \gamma_1 = 1$, как раз обеспечивает зеркальный характер колебаний осцилляторов, так что первый осциллятор получает обратно свои же колебания с амплитудой, возведенной в третью степень, что при достаточной их амплитуде (то есть выше порога) значительно превышает исходные колебания и способствует их значительному росту.

Замечание. Проверка показывает, что отмеченное выше равенство параметров связи $\mathcal{G}_1 = \gamma_1 = 1$ является довольно критичным. Так, изменение одного из этих параметров уже на 5-10% в ту или иную сторону приводит к резкому изменению порога и даже иногда характера колебаний. Ввиду сложности рассматриваемого явления авторы здесь ограничиваются приведенным равенством, а возможные отклонения предполагают рассмотреть в отдельной работе.

7. Вариация собственных частот осцилляторов

В предыдущем разделе варьировалась диссипация осцилляторов, а собственных их частоты сохранялись постоянными, равными частоте возбуждения. Было выявлено значительное разнообразие возбуждаемых колебаний. Рассмотрим теперь, как будут меняться колебания при вариации собственных частот осцилляторов. Оба параметра затухания положим одинаковыми: $\beta_1 = \beta_2 = 0.05$ отн.ед., амплитуду и частоту возбуждения положим теми, что в прошлом случае: $A_0 = 7.0$ отн.ед., $\omega_0 = 1.0$ отн.ед. Будем менять собственные частоты осцилляторов, отходя в обе стороны от частоты возбуждения ω_0 , то есть будем полагать $\omega_1 \rightarrow \omega_0 \pm \Delta\omega_1$, $\omega_2 \rightarrow \omega_0 \pm \Delta\omega_2$, где приращения частот $\Delta\omega_1$ и $\Delta\omega_2$ будем менять в интервалах, ограничиваемых режимами регулярных колебаний или уходом системы на бесконечность. Обратимся к рис. 8, демонстрирующему характер колебаний первого осциллятора при вариации частоты первого (левый столбец) и второго (правый столбец) осцилляторов. Приращения частот $\Delta\omega_1$ и $\Delta\omega_2$ выбраны соответствующими наиболее типичным случаям. В отсутствие вариаций, то есть при $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = 0$ колебания имеют характер гигантских осцилляций, показанных на рис. 7б и рис. 7д, так что здесь для экономии места не приводятся.

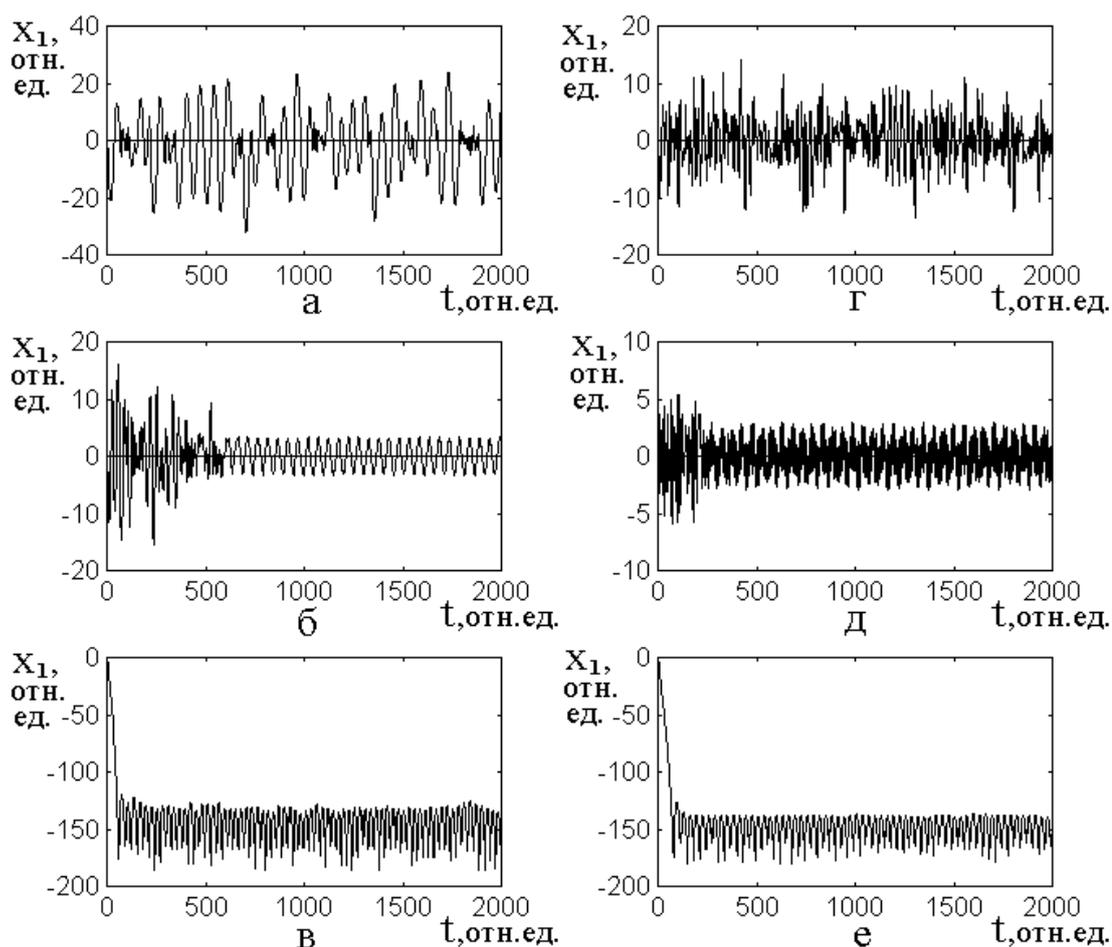


Рис. 8. Характер колебаний при вариации собственных частот осцилляторов.
Амплитуда возбуждения – $A_0 = 7$ отн.ед.

Левый столбец (а,б,в) – изменение ω_1 , правый столбец (г,д,е) – изменение ω_2 .

$$а - \Delta\omega_1 = +0.01; \Delta\omega_2 = 0; б - \Delta\omega_1 = +0.05; \Delta\omega_2 = 0;$$

$$в - \Delta\omega_1 = -0.005; \Delta\omega_2 = 0;$$

$$г - \Delta\omega_1 = 0; \Delta\omega_2 = +0.03; д - \Delta\omega_1 = 0; \Delta\omega_2 = +0.60;$$

$$е - \Delta\omega_1 = 0; \Delta\omega_2 = -0.001.$$

Остальные параметры – те же, что приведены в разделе 2

Из левого столбца рис. 8 видно, что увеличение частоты первого осциллятора ω_1 на $\Delta\omega_1 = +0.01$ отн.ед., то есть на 10% уже приводит к режиму хаоса (рис. 8а) а дальнейшее увеличение до +0.05 отн.ед. приводит к регуляризации колебаний (рис. 8б).

Замечание. Наблюдаемые на рис. 8б регулярные колебания имеют вид чистой синусоиды с периодом около 50 отн.ед., однако такая величина

обусловлена техникой машинного расчета с выводом конечных значений через 200 шагов по времени, при котором имеет место стробоскопический эффект. Проверка показывает, что при более частом выводе регулярный характер колебаний сохраняется, а период уменьшается, так что при выводе на каждом шаге период становится равным 6.28 отн.ед, то есть регулярные колебания происходят с частотой возбуждения.

Полностью регулярные колебаний в виде чистой синусоиды наступают после небольшого периода установления, связанного с первичной релаксацией осциллятора при его включении и заканчивающегося при времени около 600 отн.ед. Дальнейшее увеличение частоты первого осциллятора приводит к сокращению времени установления до 400 отн.ед., после чего колебания остаются полностью регулярными при любом значении отклонения $\Delta\omega_1$ с монотонным уменьшением их амплитуды. Так, при $\Delta\omega_1 = +1.0$ отн.ед., то есть при частоте вдвое выше первоначальной, амплитуда по сравнению с рис. 8б уменьшается в два раза и при дальнейшем увеличении $\Delta\omega_1$ продолжает падать, стремясь к нулю (проверено до $\Delta\omega_1 = +10.0$ отн.ед.).

Однако так хорошо колебания ведут себя только при увеличении собственной частоты первого осциллятора, тогда как при ее уменьшении ниже $\omega_1 = 1.0$ отн.ед. характер колебаний существенно меняется, являясь относительно частоты возбуждения ω_0 резко несимметричным. Уже при $\Delta\omega_1 = -0.005$ колебания приобретают вид, показанный на рис. 8в. То есть координата осциллятора сначала падает резким скачком в отрицательном направлении оси координат до величины порядка минус 150 отн.ед., после чего возникают периодические колебания в виде «поджатой кверху синусоиды», центральная линия которой приходится на минус 150 отн.ед, а полный размах составляет около 50 отн.ед. Период такой «синусоиды» составляет около 50 отн.ед. и от величины шага вывода колебаний не зависит. Дальнейшее

уменьшение собственной частоты первого осциллятора на величину $\Delta\omega_1 = -0.010$ отн.ед. приводит к уходу системы на бесконечность (то есть уже при первых шагах по времени x_1 стремится к минус бесконечности и колебания прекращаются).

Колебания вида, показанного на рис. 8в, можно считать отдельным режимом, имеющим собственные свойства, такие как смещение центра колебания вниз на значительную величину и следующие за резким рывком вниз квазирегулярные колебания в виде «поджатой синусоиды», период которой значительно превышает период частоты возбуждения. Условно можно назвать его «режимом поджатой синусоиды со смещенным центром». Однако в последовательной «линейке» режимов, соответствующих увеличению уровня возбуждения при сохранении остальных параметров, описанной в разделе 3, этот режим отсутствует, а имеет место только при расстройке осцилляторов относительно частоты возбуждения. Поэтому на данном этапе авторы не исследуют этот режим более подробно, оставляя такое исследование в качестве предмета для отдельной работы.

Обратимся теперь к левому столбцу на рис. 8, где показаны колебания первого осциллятора при изменении собственной частоты второго. Из рис. 8г видно, что при $\Delta\omega_2 = +0.03$ отн.ед. Колебания имеют вид хорошо развитого хаоса, частота которого заметно выше частоты хаоса на рис. 8а. Переход к более или менее регулярному режиму наступает только при $\Delta\omega_2$ больше 0.60 отн.ед., причем регулярные колебания все равно остаются «замазанными» хаосом, как это видно из рис. 8д. Тем не менее, характер регуляризации, по крайней мере по огибающей, также имеет место. При дальнейшем снижении частоты при $\Delta\omega_2 = -0.001$ отн.ед. колебания приобретают такой же вид «поджатой синусоиды», как на рис. 8в, а при $\Delta\omega_2 = -0.002$ отн.ед. система уходит на бесконечность.

Таким образом, изменение характера колебаний первого осциллятора при вариации собственных частот того и другого осцилляторов вверх и вниз происходит резко несимметричным образом. При увеличении частот обоих осцилляторов режим гигантских осцилляций сменяется хаосом, который при дальнейшем увеличении переходит в регулярные колебания с частотой возбуждения. При этом вариация частоты второго осциллятора вызывает более развитый хаос и большее «засорение» хаосом регулярных колебаний, чем вариация частоты первого осциллятора. При уменьшении частот того и другого осцилляторов гигантские осцилляции, минуя режим хаоса, резко сменяются режимом поджатой синусоиды со смещенным центром, после чего система уходит на бесконечность.

8. Вариация нелинейности первого осциллятора

В предыдущих разделах, посвященных вариации параметров осцилляторов (разделы 6, 7), рассматривалось затухание и собственные частоты осцилляторов. При этом, в соответствии с уравнениями (9), (10), полагалось, что второй осциллятор является линейным, а первый – нелинейным, причем нелинейность является кубической и описывается слагаемым $\delta_1 x_1^3$ в уравнении (9), где $\delta_1 > 0$ (при любых значениях $\delta_1 \leq 0$ система уходит на бесконечность). В проведенном выше рассмотрении параметр δ_1 всегда полагался равным единице (раздел 2). Рассмотрим теперь вариации этого параметра в обе стороны от единицы, для чего обратимся к рис. 9, где показан характер колебаний первого осциллятора при таких вариациях. В левом столбце параметр δ_1 меньше единицы, в правом – равен единице и ее превышает. В обоих столбцах параметр нелинейности по рисункам сверху вниз возрастает. Как и ранее, отмечены наиболее типичные случаи.

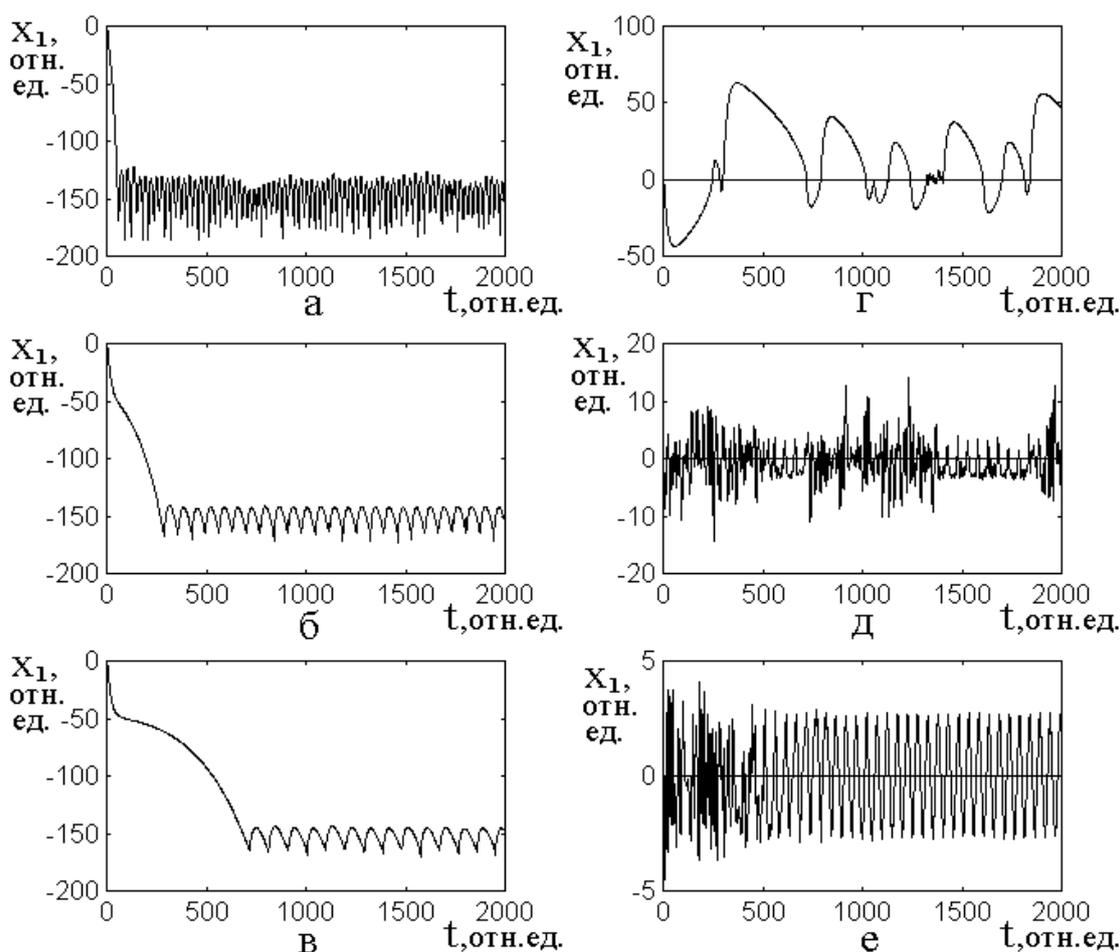


Рис. 9. Характер колебаний первого осциллятора при вариации параметра его нелинейности δ_1 . Амплитуда возбуждения – $A_0 = 7$ отн.ед. Левый столбец

(а,б,в) – $\delta_1 < 1$, правый столбец (г,д,е) – $\delta_1 \geq 1$.

а – $\delta_1 = 0.9900$; б – $\delta_1 = 0.9990$; в – $\delta_1 = 0.9995$;

г – $\delta_1 = 1.0000$; д – $\delta_1 = 1.2000$; е – $\delta_1 = 1.7900$.

Остальные параметры – те же, что приведены в разделе 2

Изменение характера колебаний по обе стороны от единицы резко несимметрично. Так, при $\delta_1 < 1$ (левый столбец) при величине δ_1 меньше 0.9900 отн.ед. система уходит на бесконечность. То есть колебания существуют только в узком интервале изменения δ_1 от 0.9900 отн.ед. до 1.0000 отн.ед., то есть в пределах 0.0100 отн.ед. При изменении параметра между 0.9900 и 1.0000 везде имеет место режим поджатой синусоиды со смещением центральной линии. При этом смещение всегда одно и то же, равное – 150 отн.ед., а размах поджатых колебаний при приближении δ_1 к единице несколько убывает:

с 50 отн.ед. при $\delta_I = 0.9900$ (рис. 9а) до 25 отн.ед. при $\delta_I = 0.9995$ (рис. 9в). При этом запаздывание развития поджатых колебаний в то же время увеличивается с 50 отн.ед. (рис. 9а) до 700 отн.ед. (рис. 9в). Период поджатой синусоиды также увеличивается с 10 отн.ед. (рис. 9а) до 120 отн.ед. (рис. 9в).

Следует заметить, что значение δ_I равное 0.990 отн.ед. не является предельным. Так, при $\delta_I = 0.9890$ отн.ед. система уходит на бесконечность, но в интервале δ_I от 0.9870 до 0.9880 отн.ед. колебания снова появляются в виде той же поджатой синусоиды. При $\delta_I = 0.9860$ отн.ед. колебания отсутствуют, а при $\delta_I = 0.9850$ отн.ед. поджатая синусоида снова появляется, но при $\delta_I = 0.9840$ отн.ед. колебания исчезают совсем и при дальнейшем уменьшении δ_I система всегда уходит на бесконечность. То есть нижняя граница допустимого значения δ_I является «дробной», подобной по характеру границе «дробности» порога возбуждения нестабильных режимов, показанной на рис. 3. Можно полагать, что в обоих случаях дробный характер границы обусловлен стохастическим характером колебаний в нестационарных режимах.

При $\delta_I \geq 1$ интервал существования колебаний с верхней стороны не ограничен (проверено до $\delta_I = 10^{10}$ отн.ед.). Сначала, то есть при $\delta_I = 1$, имеет место режим гигантских осцилляций (рис. 9г), совпадающий с представленным ранее на рис. 7б и рис. 7д. При увеличении параметра нелинейности до $\delta_I = 1.2$ отн.ед. этот режим сменяется хаосом (рис. 9д), а при дальнейшем увеличении δ_I до 1.7 отн.ед. (рис. 9е) хаос сменяется регулярными колебаниями, развивающимися после небольшого периода установления (около 500 отн.ед.). Эти колебания имеют тот же характер, что и приведенные на рис. 8б, то есть их период равен периоду возбуждения (с учетом стробоскопического эффекта).

При дальнейшем увеличении параметра δ_1 регулярный характер колебаний сохраняется, а амплитуда их постепенно уменьшается при $\delta_1 = 10$ отн.ед. составляя около 1.5 отн.ед. Начиная с $\delta_1 = 30$ отн.ед, где амплитуда их падает до 0.9 отн.ед., регулярные колебания приобретают хаотическую составляющую (подобно показанным на рис. 8д) после чего их амплитуда постепенно растет, при $\delta_1 = 100$ отн.ед. достигая 2.5 отн.ед., однако при дальнейшем увеличении δ_1 снова падает, при $\delta_1 = 1000$ отн.ед. составляя 0.2 отн.ед. При увеличении δ_1 до 100000 отн.ед. амплитуда колебаний не меняется, оставаясь вблизи 0.2 отн.ед, а регулярность пропадает, заменяясь сплошным густым хаосом. Проверка увеличения δ_1 до величины 10^{10} выявила уменьшение амплитуды колебаний до 10^{-3} отн.ед. и принятие ими частоты возбуждения. Можно полагать, что при столь высокой нелинейности собственная колебательная природа осцилляторов подавляется, а остаются только вынужденные колебания, повторяющие колебания возбуждения.

Таким образом, характер колебаний при изменении степени нелинейности первого осциллятора является резко несимметричным. Если параметр нелинейности меньше единицы, область существования колебаний крайне узка и ограничена снизу критическим значением 0.9850 отн.ед, ниже которого система уходит на бесконечность. При этом колебания всегда имеют вид поджатой синусоиды. Если параметр нелинейности выше единицы, то никакого ограничения для его значения нет, причем колебания, начинаясь, когда это параметр равен единице с гигантских осцилляций, постепенно проходят режим хаоса, сменяющийся далее регулярными колебаниями с частотой возбуждения.

9. Вариация связи между осцилляторами

Рассмотрим теперь наиболее сложный для вариации случай, а именно – вариацию параметров связи между осцилляторами. Сложность здесь определяется тем, что меняться могут одновременно два параметра, так что изменение одного, приводящее к смене характера режима колебаний, при изменении второго может вернуть получившийся режим обратно. Поэтому ограничимся рассмотрением вариации каждого из параметров по отдельности при условии сохранения другого параметра постоянным.

Рассмотрение вариации частот, параметров затухания и нелинейности (разделы 6-8) выполнено при постоянном значении уровня возбуждения $A_0 = 7$ отн.ед. Такой уровень был выбран из соображения получения достаточно полного набора основных режимов колебаний, принимая за основу режим гигантских осцилляций №4. Не охваченными остались только режимы утроения частоты №2 и задержанной стабилизации №5. Однако первый из них проявляется только при достаточно низком уровне возбуждения, где нелинейность еще не успела проявить свой нестабильный характер, а второй – при крайне высоком уровне возбуждения, когда колебательный характер системы уже в значительной степени подавлен и преобладает навязанный возбуждением почти стабильный уровень. То есть оба эти режима выходят за рамки наибольшего разнообразия колебаний и в случае необходимости могут быть рассмотрены отдельно.

Здесь же, подобно предыдущим случаям, ограничимся тем же единым уровнем возбуждения, равным $A_0 = 7.0$ отн.ед.

Проверка показывает, что во всех случаях изменения того или другого параметров существенно отличные от прежних режимы колебаний не возникают, а имеет место лишь чередование тех или иных режимов, ранее уже рассмотренных.

Рассмотрим сначала изменение параметра кубической связи первого осциллятора \mathcal{G}_1 . При этом полагаем параметр связи второго осциллятора $\gamma_2 = 1$.

Приведем интервалы изменения \mathcal{G}_1 , в пределах которых возбуждаются соответствующие режимы. В скобках отметим рисунки, на которых приведены развертки колебаний, типичные для этих режимов:

$0 < \mathcal{G}_1 < 0.5$ – регулярные осцилляции;

$0.5 < \mathcal{G}_1 < 0.9$ – хаос;

$0.9 < \mathcal{G}_1 < 1.0$ – гигантские осцилляции;

$1.0 < \mathcal{G}_1 < 1.010$ – поджатая синусоида;

$1.010 < \mathcal{G}_1 < +\infty$ – уход системы на бесконечность.

Теперь приведем интервалы изменения параметра линейной связи второго осциллятора γ_2 при $\mathcal{G}_1 = 1$:

$0 < \gamma_2 < 0.9$ – регулярные осцилляции;

$0.90 < \gamma_2 < 0.98$ – хаос;

$0.98 < \gamma_2 < 1.0$ – гигантские осцилляции;

$1.0 < \gamma_2 < 1.005$ – поджатая синусоида;

$1.005 < \gamma_2 < +\infty$ – уход системы на бесконечность.

Соответствующие развертки по времени показаны на рис. 10. В левом столбце (рис. 10а, б, в, г) приведены развертки при вариации \mathcal{G}_1 и сохранении $\gamma_2 = 1$ отн.ед.. В правом столбце (рис. 10д, е, ж, з) – развертки при вариации γ_2 и сохранении $\mathcal{G}_1 = 1$ отн.ед.

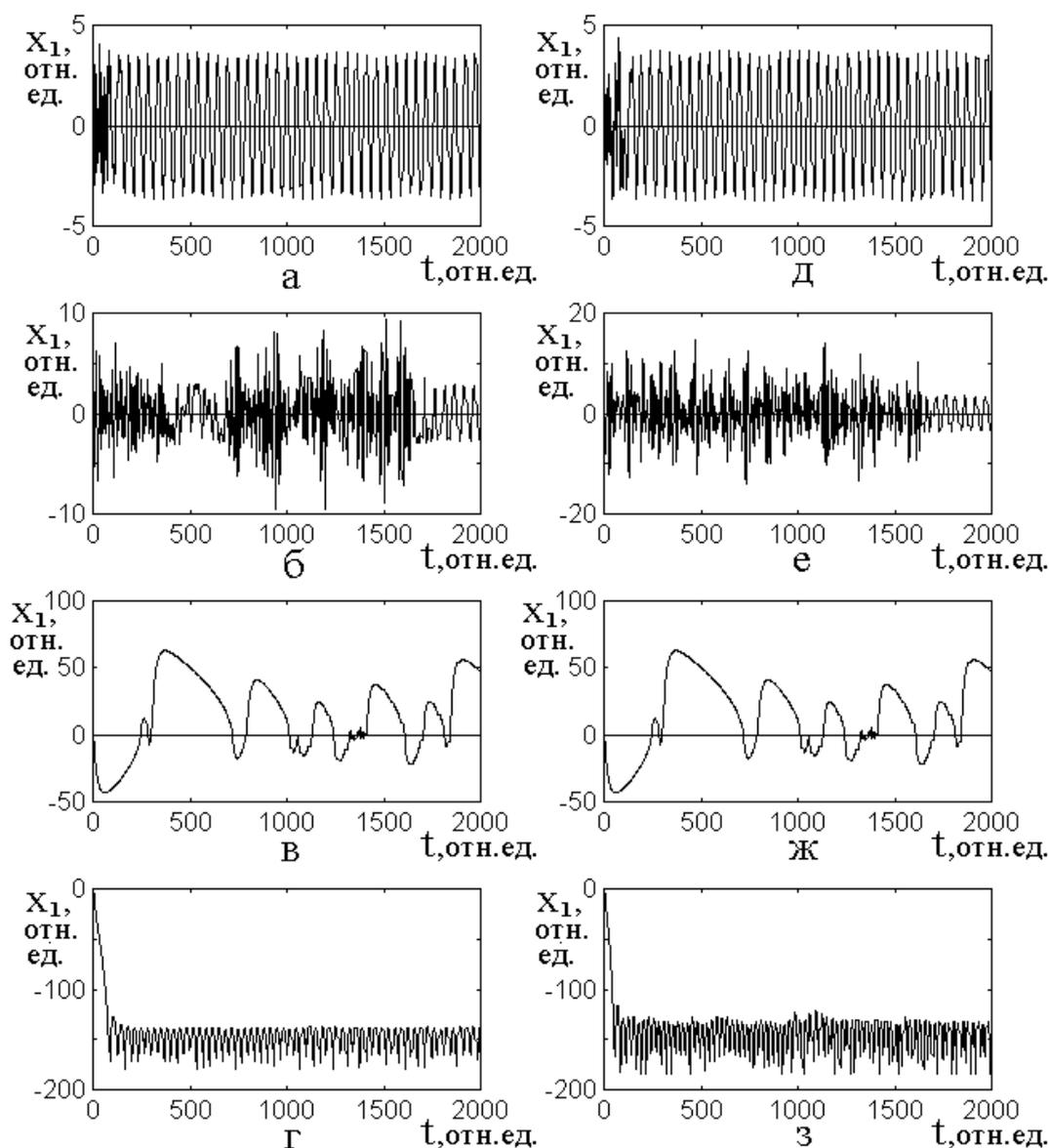


Рис. 10 Развертки по времени колебаний первого осциллятора при вариации параметров связи первого γ_1 (левый столбец) и второго γ_2 (правый столбец) осцилляторов. Амплитуда возбуждения – $A_0 = 7$ отн.ед.

а – $\gamma_1 = 0.3$ отн.ед., $\gamma_2 = 1.0$ отн.ед.; б – $\gamma_1 = 0.7$ отн.ед., $\gamma_2 = 1.0$ отн.ед.;
 в – $\gamma_1 = 1.0$ отн.ед., $\gamma_2 = 1.0$ отн.ед.; г – $\gamma_1 = 1.005$ отн.ед., $\gamma_2 = 1.0$ отн.ед.;
 д – $\gamma_1 = 1.0$ отн.ед., $\gamma_2 = 0.5$ отн.ед.; е – $\gamma_1 = 1.0$ отн.ед., $\gamma_2 = 0.92$ отн.ед.;
 ж – $\gamma_1 = 1.0$ отн.ед., $\gamma_2 = 1.0$ отн.ед.; з – $\gamma_1 = 1.0$ отн.ед., $\gamma_2 = 1.004$ отн.ед.

Из таблиц и рисунка можно видеть, что последовательная смена режимов по мере увеличения одного из параметров связи и сохранения другого в обоих случаях одна и та же, По мере увеличения того или иного параметра сначала идет регулярный режим, затем он сменяется хаосом, который переходит в гигантские

осцилляции, на смену которым приходит поджатая синусоида, после чего система уходит на бесконечность.

Интервал режима гигантских осцилляций вместе с хаосом при вариации связи второго осциллятора заметно уже, чем при вариации связи первого, что говорит о том, что роль первого осциллятора в формировании этого режима важнее, чем роль второго. Режим поджатой синусоиды со смещением центра в обоих случаях крайне узкий, то есть как бы является переходным к уходу системы на бесконечность от режима гигантских осцилляций.

Заметим, что поджатая синусоида возбуждается здесь в условиях совпадения частот ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$), что было исключено при вариации частоты в условиях $\mathcal{G} = 1$, $\gamma = 1$ (раздел 7).

Таким образом, во всех случаях по мере увеличения связи происходит последовательно развитие одних и тех же режимов колебаний: на смену регулярным колебаниям приходит хаос, затем – гигантские осцилляции и после всего – поджатая синусоида. Заметим, что увеличение уровня возбуждения при базовом наборе параметров (раздел 2) приводит к такой же последовательности режимов: регуляризация – хаос – гигантские осцилляции – задержанная стабилизация, с тем, что вместо поджатой синусоиды возбуждается задержанная стабилизация. Однако оба эти последних режима характеризуются во-первых задержкой, во-вторых – стабильным уровнем состояния системы. Можно полагать, что более подробное рассмотрение «линейки» последовательной смены режимов, а также замещением в этой линейке последнего режима, представляет интерес в качестве отдельной задачи.

Рассмотрим теперь области существования режимов в более широком диапазоне изменения параметров связи. На рис. 11 показана приближенная (без точных масштабов) схема расположения областей существования режимов при изменении параметров связи \mathcal{G} и γ . Сплошные линии – границы между областями.

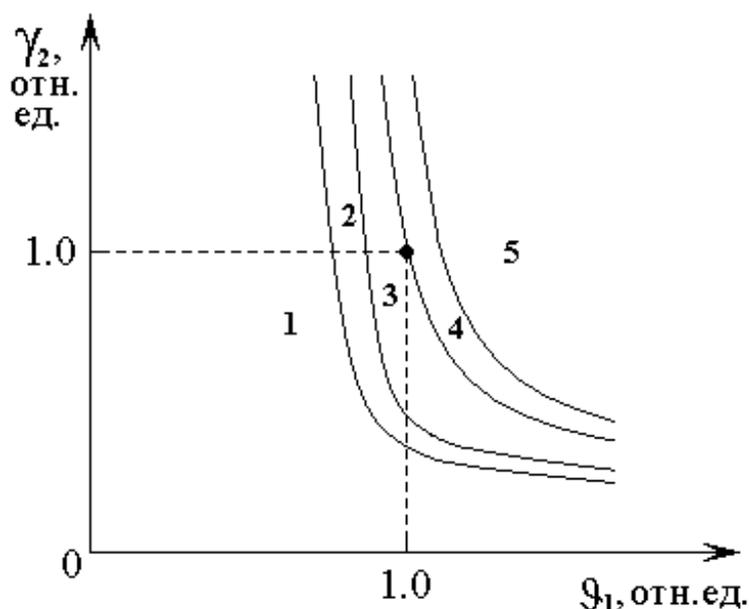


Рис. 11. Схема областей существования режимов на плоскости изменения параметров связи \mathcal{G}_1 и γ_2 . Сплошные линии – границы между областями. Цифры – номера областей по следующему списку: 1 – регулярные осцилляции; 2 – хаос; 3 – гигантские осцилляции; 4 – поджатая синусоида; 5 – уход на бесконечность. Пунктирные линии отмечают значения $\mathcal{G}_1 = 1$ и $\gamma_2 = 1$

В начале координат, где параметры связи достаточно малы, имеют место регулярные колебания (область 1). При увеличении того или другого параметров колебания проходят последовательно через хаос (область 2), гигантские осцилляции (область 3) и поджатую синусоиду (область 4), после чего, то есть при достаточно большой величине того и другого параметров связи, система уходит на бесконечность (область 5)..

Из рисунка видно, что границы между областями имеют вид кривых обратной пропорциональности, сдвинутых в сторону больших значений параметра связи первого осциллятора \mathcal{G}_1 . В то же время, для параметра связи второго осциллятора такого сдвига нет.

Можно полагать, что значительный сдвиг по горизонтальной оси при отсутствии сдвига по вертикальной обусловлен тем, что связь по мере увеличения \mathcal{G}_1 растет пропорционально кубу амплитуды колебаний, тогда как связь за счет параметра γ_2 растет только пропорционально первой степени амплитуды, а кубический рост при параметре большем единицы преобладает над

линейным. То есть при $\mathcal{G}_1 < 1$ рост за счет \mathcal{G}_1 отстает от роста за счет γ_2 , а при $\mathcal{G}_1 > 1$ его обгоняет.

Замечание. В проведенном здесь рассмотрении оба параметра связи \mathcal{G}_1 и γ_2 полагались положительными (то есть $\mathcal{G}_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$). Проверка показывает, что в случае, если один из этих параметров является положительным, а другой отрицательным (то есть при $\mathcal{G}_1 > 0$, $\gamma_2 < 0$. или $\mathcal{G}_1 < 0$, $\gamma_2 > 0$), то система уходит на бесконечность. Однако, когда оба параметра одновременно равны минус единице (то есть при $\mathcal{G}_1 = -1$ и $\gamma_2 = -1$) колебания снова возникают в виде гигантских осцилляций. Более подробному изучению отрицательных значений параметров связи авторы предполагают посвятить отдельную работу.

10. Динамический потенциал

Проведенное рассмотрение, в совокупности с данными работы [32], показывает, что колебания принятой здесь системы (кубическая нелинейность и кубическая связь) имеют весьма сложный характер. Построение полной модели существенно осложняется тем обстоятельством, что производные от смещений того и другого осцилляторов не соответствуют прямому дифференцированию зависимости смещения от времени, а являются результатом значительно влияния сопутствующих колебаний. Поэтому авторы в рамках настоящей работы ограничиваются далее только некоторыми соображениями, относящимися к отдельным характерным деталям явления.

Поскольку колебания всегда происходят в определенной потенциальной яме, приведем выражения для потенциалов осцилляторов [26], соответствующих уравнениям их движения (9)-(10). Так, следуя работе [32], получаем:

потенциал для первого осциллятора:

$$U_{P1} = \frac{1}{2} \omega_{01}^2 x_1^2 + \frac{1}{4} \delta_1 x_1^3 + \mathcal{G}_1 x_1 x_2^3; \quad (14)$$

потенциал для второго осциллятора:

$$U_{P2} = \frac{1}{2} \omega_{02}^2 x_2^2 + \gamma_2 x_1 x_2. \quad (15)$$

Из (14)-(15) видно, что потенциал первого осциллятора U_{P1} зависит от величины смещения второго осциллятора x_2 через слагаемое $\mathcal{G}_1 x_1 x_2^3$. Поскольку во втором осцилляторе тоже происходят колебания, то потенциал первого осциллятора зависит от состояния второго осциллятора, то есть является динамическим. Положим смещение второго осциллятора заданным, равным величине X_2 . При этом мгновенное значение потенциала первого осциллятора может быть определено по формуле:

$$U_{P1}(X_2) = \frac{1}{2} \omega_{01}^2 x_1^2 + \frac{1}{4} \delta_1 x_1^3 + \mathcal{G}_1 x_1 X_2^3 + 10^4, \quad (16)$$

где слагаемое 10^4 введено для того, чтобы потенциал при принятых параметрах оставался положительным. В силу определения любого потенциала с точностью до постоянного слагаемого, характер колебаний x_1 от этого слагаемого не зависит.

На рис. 12 показаны возможные варианты потенциала первого осциллятора U_{P1} при заданном значении смещения второго X_2 . Амплитуда возбуждения в вычислении потенциала не участвует, а здесь приведена для того, чтобы напомнить, что рассматривается режим гигантских осцилляций, при котором смещение второго осциллятора может быть порядка 10-20 отн.ед. и более. Итак, на рисунке приведены две кривые потенциала, соответствующие $X_2 = 10$ отн.ед. и $X_2 = -10$ отн.ед. Рисунок построен в логарифмическом

масштабе по формуле (16), где положительность выражения под логарифмом обеспечивается слагаемым 10^4 отн.ед.

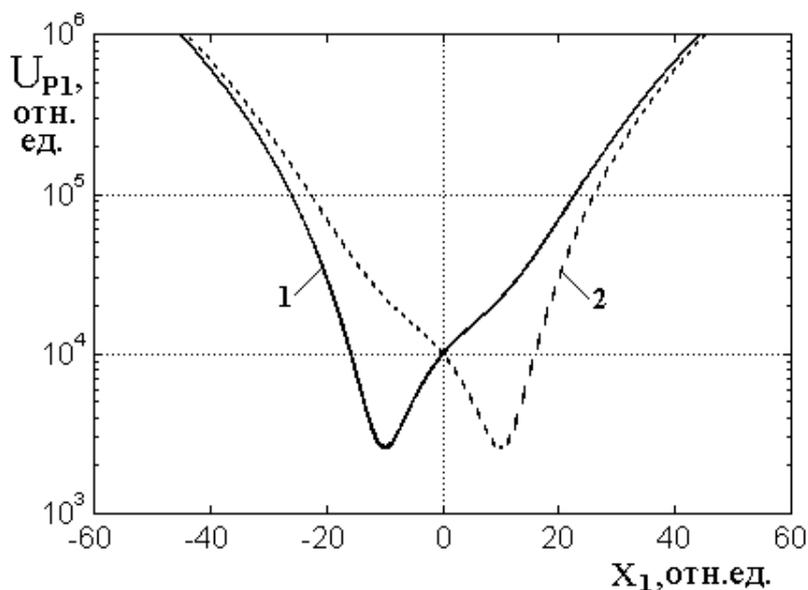


Рис. 12. Динамический потенциал первого осциллятора U_{P1} при различных значениях моделирующей величины смещения второго осциллятора X_2 .

Амплитуда возбуждения – $A_0 = 7$ отн.ед.

1 – $X_2 = 10$ отн.ед.; 2 – $X_2 = -10$ отн.ед.

Остальные параметры приведены в разделе 2

Из рисунка видно, что потенциал первого осциллятора всегда имеет минимум, причем, в зависимости от величины смещения второго осциллятора, этот минимум перескакивает туда-сюда в ту или другую сторону. То есть колебания первого осциллятора происходят в таком «прыгающем» потенциале. Амплитуда колебаний первого осциллятора определяется размахом ветвей потенциала и при $U_{P1} = 10^5$ отн.ед. составляет около ± 20 отн.ед. Таким образом, приведенный потенциал как раз обеспечивает амплитуду колебаний первого осциллятора, соответствующую режиму гигантских осцилляций.

В общем случае колебания смещения второго осциллятора, благодаря релаксационным свойствам структуры в целом, могут не попадать «в такт» с колебаниями первого осциллятора, так что будет какое-то рассогласование по фазе, что и может явиться причиной хаотического характера колебаний, наблюдаемых в нестационарных режимах.

11. Кольцевое возбуждение

Колебания в системе происходят таким образом, что внешнее возбуждение $A_0 \cos(\omega_0 t)$ вызывает колебания только первого осциллятора. Второй же осциллятор получает возбуждение от первого через последнее слагаемое уравнения (10) вида $\gamma_2 x_1$, так что смещение первого осциллятора x_1 является для второго возбуждающей силой. В то же время, на первый осциллятор действие не только возбуждение $A_0 \cos(\omega_0 t)$, но и дополнительный сигнал, поступающий от второго осциллятора посредством слагаемого $\vartheta_1 x_2^3$. То есть возбуждение замыкается в кольцо: первый осциллятор, получая энергию извне, возбуждает второй, который затем возвращает возбуждение первому, что характерно для систем с обратной связью [33, стр. 365]. При этом возбуждающий сигнал $A_0 \cos(\omega_0 t)$ является как бы источником энергии для системы в целом, которая, возбуждая кольцевые колебания, поглощается за счет релаксационных параметров осцилляторов с коэффициентами β_1 и β_2 . Пороговое значение A_0 , соответствующее переходу от стабильных колебаний к нестабильным, также характерно для систем с обратной связью в качестве условия жесткого самовозбуждения [33, стр. 368-370].

12. Влияние параметров системы

Можно полагать, что в такой кольцевой структуре, питаемой извне постоянным источником энергии $A_0 \cos(\omega_0 t)$, могут существовать колебания, параметры которых, в первую очередь их частота, задаются не частотой источника ω_0 , а параметрами самой системы. Здесь важную роль играют условия, рассмотренные в предыдущих разделах 6-9.

Следует однако заметить, что полученные в упомянутых разделах данные не являются исчерпывающими. Так, получены только режимы в некоторых точках, соответствующих определенным значениям параметров. Таким образом,

встает задача о более полном изучении этих условий, в первую очередь получении плавных зависимостей. Кроме того, все полученные данные относятся только к одному уровню возбуждения $A_0 = 7$ отн.ед. Такой выбор был сделан авторами, чтобы не утонуть в ворохе получающихся данных. Тем не менее, можно полагать, что исследование при других уровнях возбуждения также представляет заметный интерес.

13. Некоторые дополнительные особенности

В проделанном рассмотрении можно уловить некоторые характерные особенности, привлекающие внимание, но не находящие должного объяснения. Приведем некоторые из них, особенно ярко бросающиеся в глаза.

В разделе 5 с помощью рис. 6 показано, что порог возбуждения гигантских осцилляций, или точнее – нестабильного режима, зависит от частоты возбуждения степенным образом, где показатель степени равен трем или четырем. Высокая точность степенной зависимости говорит о ее фундаментальном характере, однако вопрос о конкретном значении показателя степени остается открытым.

Другой особенностью, наблюдавшейся в работе [32], можно считать «зеркальный» характер колебаний второго осциллятора относительно колебаний первого, что особенно хорошо заметно в работе [32] на рис. 6, 8, 10 с этюрами a_1 , a_2 . При этом «зеркальность» соблюдается только для колебаний смещения, тогда как для колебаний производных на тех же рисунках с этюрами b_1 , b_2 – полностью отсутствует. Здесь точность зеркальных отображений также чрезвычайно высока (просто «один в один»), так что зеркальность также можно считать фундаментальным свойством колебаний системы. Открытым кроме природы пока остается вопрос, является ли зеркальность свойством только линейки базовых параметров, использовавшихся в работе [32], или она имеет место при других вариациях параметров, рассмотренных здесь в разделах 6-9.

Важнейшей особенностью результатов, приведенных в настоящей работе и в ее первой части [32], является существование крайне высокочастотных, но

малоамплитудных колебаний сопутствующего характера [32, разделы 14, 15]. Проверка показывает, что во всех описанных в настоящей работе режимах такие колебания существуют. Кроме общей причины их существования остается выяснить, сохраняют ли они свои характеристики, частоту и амплитуду при чередовании режимов, а также какими параметрами системы эти характеристики определяются. Ввиду всеобщего существования и крайне необычных свойств, а также определяющей роли этих колебаний в формировании производных от смещения осцилляторов, сопутствующие колебания также можно считать фундаментальным свойством системы, требующим детального рассмотрения.

Заключение

Основные результаты настоящей работы сводятся к следующему.

Рассмотрена задача о возбуждении магнитоупругих колебаний в геометрии магнестрикционного преобразователя, содержащего нормально намагниченную ферритовую пластину, на которую воздействует переменное магнитное поле. Частота переменного поля близка к частоте ферромагнитного резонанса пластины, а толщина пластины выбрана соответствующей упругому резонансу на той же частоте.

Записана система связанных уравнений движения для намагниченности и упругого смещения. Путем введения квадратичного приближения представлена возможность описания динамики преобразователя на основе системы уравнений для нелинейных колебаний двух связанных осцилляторов – магнитного и упругого. Оба уравнения кроме инерционного, диссипативного и потенциального членов содержат слагаемые связи и нелинейности. В уравнении для магнитного осциллятора нелинейность и связь имеют третий порядок по координате смещения, а в уравнении для упругого осциллятора нелинейность отсутствует, а связь имеет первый порядок. Внешнее возбуждение (переменное поле) действует только на магнитный осциллятор.

Введена система относительных единиц, в рамках которой приведен базовый набор параметров: все частоты, параметры нелинейности и связи

положены равными единице, параметры затухания – пять сотых от единицы, а уровень возбуждения оставлен произвольным с возможностью изменения в широких пределах.

Отмечено, что в условиях базовой системы параметров по мере увеличения уровня возбуждения имеют место последовательно сменяющие друг друга пять базовых режимов: синхронизм, утроение частоты, хаос, гигантские осцилляции и задержанная стабилизация, совокупность которых принята в качестве «линейки» базовых режимов. Первые два режима – синхронизм и утроение частоты являются стабильными, беспороговыми и полностью детерминированными начальными условиями. Остальные три режима – хаос, гигантские осцилляции и задержанная стабилизация являются нестабильными, отделены от стабильных резким порогом по уровню возбуждения, причем характер колебаний при малом изменении начальных условий меняется в значительной степени.

Ввиду близости характера колебаний обоих осцилляторов между собой, а также подчиненной роли второго осциллятора относительно первого (так как внешнее возбуждение действует только на первый осциллятор), основное внимание далее уделено колебаниям первого осциллятора.

Рассмотрены возможные вариации параметров системы, приводящие к деформации областей существования и основного характера базовых режимов. Выявлен не входящий в базовую линейку дополнительный режим «поджатой синусоиды со смещенным центром».

Подробно исследован пороговый характер возбуждения нестабильных колебаний. Показано, что по уровню возбуждения характер колебаний можно разделить на три части. Первая область, в которой имеют место только стабильные колебания. В этой области колебания полностью детерминированы, а амплитуды как смещения, так и производных от смещения по времени крайне малы и составляют сотые доли от относительной единицы. Вторая область, в которой при плавном увеличении уровня возбуждения имеют место интервалы существования как стабильных, так и нестабильных режимов, чередующиеся

друг с другом. Здесь амплитуды колебаний в стабильных режимах по-прежнему низки, а в нестабильных – выше на два-три порядка и достигают нескольких относительных единиц. Таким образом, порог в ряде случаев достигается, но имеет «дробный» характер, то есть области, где он достигнут, перемежаются с областями, где уровень возбуждения еще недостаточен. Начало второй области возбуждения названо «нижним порогом» возбуждения нестационарных колебаний. Третья область, где порог достигнут уже безусловно, то есть при плавном изменении уровня возбуждения колебания всегда имеют нестационарный характер. Начало третьей области возбуждения названо «верхним порогом» возбуждения нестационарных колебаний, который далее рассматривается в первую очередь.

Отмечено, что наиболее распространенным и обладающим наибольшим числом особенностей является режим гигантских осцилляций, на базе которого проведена дальнейшая вариация параметров системы.

Исследованы зависимости амплитуды колебаний в первой и третьей областях от уровня возбуждения. Показано, что в первой области при увеличении уровня возбуждения амплитуда колебаний растет плавно, почти линейно, а в третьей области рост амплитуды колебаний, в целом стремясь к насыщению, претерпевает по величине скачки до полутора-двух раз.

Исследована зависимость верхнего порога возбуждения нестабильных колебаний от частоты возбуждения. Показано, что при увеличении частоты возбуждения порог нестабильных колебаний с весьма высокой точностью растет по степенному закону третьего или четвертого порядка. Такой рост сохраняется при изменении частоты возбуждения от одной десятой до пяти значений частоты собственного резонанса осцилляторов. Предложены эмпирические формулы, описывающие такой характер роста порога с точностью не менее 5%.

Исследован характер колебаний при вариации диссипации осцилляторов в пределах на порядок выше и на порядок ниже базовых значений параметров затухания. Показано, что, при вариации параметра затухания первого осциллятора в условиях сохранения базового затухания второго, колебания, в

основном, сохраняют режим гигантских осцилляций без серьезного изменения амплитуды и периода колебаний. При вариации параметра затухания второго осциллятора в условиях сохранения базового затухания первого, характер колебаний меняется значительно более сильным образом. Так, при малом затухании второго осциллятора колебания сохраняют режим гигантских осцилляций, однако амплитуда их увеличивается в два-три раза и сами осцилляции вместо округлых частично становятся пилообразными. При большом затухании второго осциллятора режим гигантских осцилляций заменяется режимом хаоса с падением амплитуды на порядок и более. Таким образом, установлено, что на характер колебаний первого осциллятора преимущественное влияние оказывает диссипация не первого, а именно второго осциллятора. Отмечено, что причиной такого «усиления» влияния второго осциллятора является кубическая связь первого осциллятора со вторым, то есть, первый осциллятор возбуждает второй, а второй в свою очередь возвращает колебания первому, возведенными в третью степень, причем «эффективность» такого возвращения в значительной степени зависит от параметров второго осциллятора.

Исследована вариация собственных частот осцилляторов. Показано, что увеличение собственных частот как первого, так и второго осцилляторов уже на единицы процентов приводит к переходу от гигантских осцилляций к хаосу, а далее – к регуляризации колебаний при достаточно малой амплитуде. Уменьшение собственных частот того или другого осцилляторов уже на доли процента приводит к переходу от гигантских осцилляций к режиму поджатой синусоиды со смещением центра, а дальнейшее уменьшение частот уводит систему на бесконечность.

Исследована вариация кубической нелинейности первого осциллятора. Отмечена сильная несимметричность изменения характера колебаний при изменении параметра нелинейности в ту или другую сторону. Так, уменьшение параметра нелинейности всего на единицы процентов приводит к замене гигантских осцилляций поджатой синусоидой со смещенным центром, причем

период такой синусоиды по мере уменьшения параметра нелинейности также уменьшается. Уменьшение параметра нелинейности более чем на 10% приводит к уходу системы на бесконечность. Увеличение же параметра нелинейности допустимо в значительно более широких пределах. Так, увеличение до полутора-двух раз хотя также выводит систему из режима гигантских осцилляций, но в другую сторону – через хаос к регуляризации.

Исследована вариация связи между осцилляторами. Установлено, что при уровне возбуждения, соответствующем режиму гигантских осцилляций, изменение параметра связи первого осциллятора при сохранении связи второго и изменение параметров второго при сохранении связи первого приводит к одинаковому порядку смены режимов, без заметного преимущества вариации параметра связи одного осциллятора над вариацией параметра связи другого. Так, при малой связи (значительно меньше относительной единицы) колебания имеют регулярный характер и малую амплитуды (несколько относительных единиц). При увеличении параметров связи до 0.7-0.9 относительных единиц наступает режим хаоса с увеличением амплитуды в несколько раз, который при достижении параметром связи единицы переходит в режим гигантских осцилляций с амплитудой до нескольких десятков единиц. Увеличение связи в пределах половины процента выше единицы приводит к режиму поджатой синусоиды, а дальнейшее увеличение уводит систему на бесконечность.

На плоскости в координатах того и другого параметров связи построены области существования различных режимов колебаний. Отмечены границы между областями регулярных осцилляций, хаоса, гигантских осцилляций, поджатой синусоиды и ухода системы на бесконечность. В начале координат, где параметры связи достаточно малы, имеют место регулярные колебания. При увеличении того или другого параметров колебания проходят последовательно через хаос, гигантские осцилляции и поджатую синусоиду, после чего, то есть при достаточно большой величине того и другого параметров связи, система уходит на бесконечность. Показано, что границы между областями

существования имеют вид кривых обратной пропорциональности, сдвинутых в сторону больших значений параметра связи первого осциллятора.

Для интерпретации описанных явлений предложена модель динамического потенциала. Получен потенциал для первого осциллятора. Показано, что он имеет минимум, положение которого определяется величиной смещения второго осциллятора, так что колебания второго осциллятора вызывают перескакивание минимума потенциала первого в ту или другую сторону. Причиной хаотического характера колебаний в нестабильных режимах является рассогласование по фазе между колебаниями осциллятора и скачками потенциала, в котором эти колебания происходят.

Рассмотрен кольцевой характер возбуждения колебаний в системе в целом. Приведена аналогия с автоколебаниями в радиотехнической системе с положительной обратной связью, работающей в условиях жесткого самовозбуждения.

В качестве рекомендации для дальнейшего развития работы отмечена важность получения непрерывных зависимостей характера колебаний системы от ее параметров. Приведены некоторые особенности колебаний системы, требующие более подробного рассмотрения. В качестве таковых отмечена степенная зависимость верхнего порога нестабильности от частоты возбуждения, зеркальный характер колебаний второго осциллятора относительно колебаний первого, а также природа высокочастотных осцилляций сопутствующего характера, в том числе их роль в формировании колебаний производных от смещения осцилляторов.

Финансирование: Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

Литература

1. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. *Колебания, волны, структуры*. Москва, Физматлит. 2003. 496 с.
2. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. *Введение в нелинейную физику*. Москва, Наука. 1988. 379 с.
3. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. *Нелинейные волны*. Москва, Наука-Физматлит. 2000. 272 с.
4. Кузнецов С.П. *Динамический хаос (курс лекций)*. Москва, Физматлит. 2001. 296 с.
5. Дмитриев А.С., Панас А.И. *Динамический хаос: новые носители информации для систем связи*. Москва, Физматлит, 2002. 251 с.
6. Гуревич А.Г. *Ферриты на сверхвысоких частотах*. Москва, Гос. Изд. физ.-мат. лит. 1960. 409 с.
7. Гуревич А.Г. *Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках*. Москва, Наука. 1973. 588 с.
8. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. *Магнитные колебания и волны*. Москва, Физматлит. 1994. 464 с.
9. Моносов Я.А. *Нелинейный ферромагнитный резонанс*. Москва, Наука. 1971. 376 с.
10. Ле-Кроу Р., Комсток Р. Магнитоупругие взаимодействия в ферромагнитных диэлектриках. В кн.: У. Мэзон (ред.): *Физическая акустика. Т.3Б. Динамика решетки*. Москва, Мир. 1968. С.156.
11. Моносов Я.А., Сурин В.В., Щеглов В.И. Возбуждение резонансных упругих колебаний при нелинейном ферромагнитном резонансе. *Письма в ЖЭТФ*. 1968. Т.7. №9. С.315-317.
12. Зубков В.И., Моносов Я.А., Щеглов В.И. Спиновый эффект Мандельштама-Бриллюэна. *Письма в ЖЭТФ*. 1971. Т.13. №5. С.229-232.

13. Голямина И.П. Магнитострикционный преобразователь. В кн.: *Ультразвук. Маленькая энциклопедия. Глав.ред. И.П. Голямина.* Москва, Советская энциклопедия. 1979. С.196-200.
14. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. *Радиотехника и электроника.* 2009. Т.54. №7. С.863.
15. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре. *Журнал радиоэлектроники [электронный журнал].* 2013. №2. <http://jre.cplire.ru/jre/feb13/10/text.pdf>
16. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре при ферромагнитном резонансе. *Радиотехника и электроника.* 2014. Т.59. №5. С.482.
17. Власов В.С., Иванов А.П., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Автоколебания в системе двух связанных осцилляторов, один из которых является гирромагнитным. *Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы».* Москва, НИУ МЭИ. 2012. С.248.
18. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ линейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов. *Журнал радиоэлектроники [электронный журнал].* 2013. №11. <http://jre.cplire.ru/jre/nov13/3/text.pdf>
19. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Автоколебания в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. *Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы».* Москва, НИУ МЭИ. 2013. С.188.
20. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа работы магнитострикционного преобразователя. *Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы».* Москва, «НИУ МЭИ». 2013. С.199.

21. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ нелинейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов в квадратичном приближении. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2014. №1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/11/text.pdf>
22. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ колебаний в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами на основе модели квадратичного приближения. *Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. Москва, ИНФРА-М. 2015. С.202.
23. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 1. Основные уравнения. *Радиотехника и электроника*. 2015. Т.60. №1. С.79.
24. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 2. Некоторые нелинейные явления. *Радиотехника и электроника*. 2015. Т.60. №3. С.297.
25. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ автомодуляционных колебаний в магнитоупругой среде на основе модели связанных магнитного и упругого осцилляторов. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2015. №5. <http://jre.cplire.ru/jre/may15/4/text.pdf>
26. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ автомодуляционных явлений в системе связанных магнитного и упругого осцилляторов на основе модели потенциала. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2015. №6. <http://jre.cplire.ru/jre/jun15/9/text.pdf>
27. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 1. Динамический потенциал. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2017. №7. <http://jre.cplire.ru/jre/jul17/6/text.pdf>

28. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 3. Нелинейная связь. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2017. №8. <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/6/text.pdf>
29. Шавров В.Г., Щеглов В.И., Иванов А.П. *Нелинейные колебания в задаче возбуждения гиперзвука*. Сыктывкар, ООО «Коми республиканская типография». 2021. 192 с.
30. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Вынужденные колебания в системе из двух связанных осцилляторов в условиях кубической нелинейности и квадратичной связи. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2020. №8. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.8.7>
31. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарные колебания в системе из двух связанных осцилляторов в условиях кубической нелинейности и кубической связи. Часть 1. Мультирежимный характер колебаний. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2023. №5. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.5.6>
32. Харкевич А.А. *Основы радиотехники*. Москва, Физматлит. 2007. 512 с.

Для цитирования:

Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарные колебания в системе из двух связанных осцилляторов в условиях кубической нелинейности и кубической связи. Часть 2. Вариация параметров системы. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2023. №5. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.5.7>