

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.5.4>

УДК: 621.391; 621.396

## ФИЛЬТРАЦИЯ НАВИГАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ В РАДИОНАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Е.И. Глушанков<sup>1</sup>, З.К. Кондрашов<sup>2</sup>, В.Я. Конторович<sup>3</sup>, А.В. Суденкова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, 193232, г. Санкт-Петербург, проспект Большевиков, д. 22, корп. 1, лит. А

<sup>2</sup> АО «НИИМА «Прогресс», 125183, г. Москва, проезд Черепановых, дом 54

<sup>3</sup> Центр исследований и перспективных разработок национального политехнического института Мексики (CINVESTAV-IPN), 07360, Мексика, Мехико, ул. Национальный политехнический институт, д. 2508, кол. Сан-Педро-Сакатенко

Статья поступила в редакцию 13 февраля 2025 г.

**Аннотация.** Основным показателем качества функционирования глобальных спутниковых и локальных радионавигационных систем является получаемая на их основе точность позиционирования, которая определяется погрешностями измерений радионавигационных параметров, то есть параметров радиосигнала, несущих информацию о координатах или скорости объекта. К радионавигационным параметрам в зависимости от способа построения радионавигационной системы относятся временной, частотный или фазовый сдвиг колебаний принимаемого сигнала относительно опорного, угол между направлением на объект и опорным направлением, доплеровское смещение частоты и др. Исходя из неравенства Рао-Крамера, погрешности измерения радионавигационных параметров обратно пропорциональны отношению сигнал / шум на входе навигационного приемника навигационной аппаратуры потребителей. Создание помехоустойчивой навигационной аппаратуры потребителей предполагает использование на входе навигационного приемника методов фильтрации, выделяющих полезный

сигнал из смеси шумов и помех и обеспечивающих повышение отношения сигнал / шум, а соответственно и повышение точности позиционирования. Рассматриваемые радионавигационные параметры на входе приемника вследствие влияния среды распространения радиоволн, тепловых и атмосферных шумов можно представить случайными процессами. Для описания динамических моделей случайных процессов использовано их представление в форме стохастических дифференциальных уравнений. Синтезированы стохастические дифференциальные уравнения для различных типов случайных процессов, описывающих изменение радионавигационных параметров, к которым относятся равномерное распределение для представления временной задержки радионавигационного сигнала, гауссовское и равномерное распределение для доплеровского сдвига частоты, гауссовское, равномерное и распределение фон Мизеса-Тихонова для фазы радиосигнала. Для всех типов распределений случайных процессов определены коэффициенты стохастических дифференциальных уравнений, описывающих их динамические нестационарные модели. При описании уравнения состояния модели шумов на входе навигационных приемников, представляются белым гауссовским и небелым шумом. Для описываемых в форме стохастических дифференциальных уравнений состояния параметров радионавигационных сигналов и моделей уравнения состояния сигналов на входе приемников синтезируются алгоритмы линейной и нелинейной фильтрации.

**Ключевые слова:** сигналы ГНСС, стохастические дифференциальные уравнения, фильтр Калмана, нелинейный фильтр, МАВ, цветной шум.

**Автор для переписки:** Глушанков Евгений Иванович,  
[glushankov57@gmail.com](mailto:glushankov57@gmail.com)

*Памяти Валерия Яковлевича Конторовича посвящается.*

## Введение

Представим уравнение наблюдения относительно радионавигационного сигнала  $s(t)$  на входе приемника навигационной аппаратуры потребителей (НАП) в виде

$$s(t) = A \sin\left(\left(\omega - \omega_d(t)\right)\left(t - \tau_s(t)\right) + \varphi(t)\right) + v(t), \quad (1)$$

где  $\omega_d(t)$ ,  $\tau_s(t)$ ,  $\varphi(t)$  – соответственно доплеровская частота, задержка и фаза (случайные параметры сигнала, подлежащие оценке);  $v(t)$  – шум наблюдения, аппроксимируемый белым гауссовским шумом (БГШ),  $A$  – детерминированная амплитуда сигнала,  $\omega$  – несущая частота радионавигационного сигнала.

Уравнение состояния для случайных параметров радионавигационного сигнала представим следующим стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ):

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) + g(x(t))w(t), \quad (2)$$

где  $f(x(t))$ ,  $g(x(t))$  – коэффициенты СДУ, определяющие поведение системы, которые можно получить из решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова для конкретной плотности распределения вероятностей (ПРВ) случайного процесса [1-4];  $w(t)$  – АБГШ (формирующий шум). Случайные параметры  $\omega_d(t)$ ,  $\tau_s(t)$ ,  $\varphi(t)$  при отсутствии корреляционных связей между ними [5] могут быть описаны каждый своим одномерным СДУ. Обобщенный вектор состояния в таком случае имеет вид:

$$x(t) = \left[ \tau_s(t) \omega_d(t) \varphi(t) \right]^T,$$

все три компоненты которого являются независимыми случайными процессами.

При этом временную задержку будем описывать равномерным распределением, доплеровский сдвиг частоты – гауссовским или равномерным,

фазу – гауссовским, равномерным или распределением фон Мизеса-Тихонова [5, 6].

СДУ для распределения фон-Мизеса-Тихонова, описывающего фазу  $\varphi(t)$  в (2) навигационного радиосигнала, получено в [4] и представляется следующим образом:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -\frac{\sin((\varphi(t) - \mu))}{\tau_c} + \sqrt{\frac{2}{k\tau_c}} w(t), \quad (3)$$

где  $\mu$  – математическое ожидание  $x(t)$ ,  $\tau_c$  – шаг дискретизации по времени,

$k = \frac{1}{\tau_{corr}}$ ,  $\tau_{corr}$  – интервал корреляции, при условии  $k \geq 4$ .

Линейное СДУ для гауссовского распределения доплеровской частоты или фазы представляется в виде (пример для частоты)

$$\frac{d\omega_d(t)}{dt} = -\frac{\omega_d(t)}{\tau_{corr}} + \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\tau_{corr}}} w(t), \quad (4)$$

где  $\sigma$  – СКО гауссовского распределения.

СДУ для равномерного распределения временной задержки можно представить как

$$\frac{d\tau_3(t)}{dt} = \frac{(b-a)^2}{\pi^2\tau_c} \frac{\delta(\tau_3(t)-a) - \delta(\tau_3(t)-b)}{\theta((\tau_3(t)-a)) - \theta(\tau_3(t)-b)} + \frac{b-a}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\tau_c}} w(t),$$

где  $b, a$  – границы области определения равномерной ПРВ,  $\delta(y)$  – дельта-функция,  $\theta(y)$  – функция Хевисайда. Выполнив преобразование данного выражения, можно получить СДУ через аппроксимацию белым шумом следующим образом:

$$\frac{d\tau_3(t)}{dt} = w(t). \quad (5)$$

Для нелинейной модели наблюдения (1) и моделей состояния (3)-(5) рассмотрим следующие алгоритмы линейной и нелинейной фильтрации [7]: фильтры Калмана 1-го и 2-го порядков и фильтр, использующий критерий максимума апостериорной вероятности. Уравнения фильтрации первого и

второго порядков различаются количеством членов разложения нелинейной функции  $f(x(t))$  в ряд Тейлора.

## 1. Алгоритмы фильтрации

### 1.1 Фильтр Калмана 1-го порядка

Приведем синтез фильтра для случая, когда задержка и доплеровский сдвиг частоты имеют равномерное распределение, а фаза изменяется по нормальному закону. Тогда запишем уравнения состояния, наблюдения и фильтр первого порядка.

*Уравнение состояния* для обобщенного вектора состояния:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left[ \frac{d\tau_3(t)}{dt} \quad \frac{d\omega_d(t)}{dt} \quad \frac{d\varphi(t)}{dt} \right]^T,$$

где  $w_{\tau_3}(t), w_{\omega_d}(t), w_{\varphi}(t)$  – белые гауссовские шумы,

$$\frac{d\tau_3(t)}{dt} = w_{\tau_3}(t),$$

$$\frac{d\omega_d(t)}{dt} = w_{\omega_d}(t),$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -\frac{\varphi(t)}{\tau_{corr}} + \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\tau_{corr}}} w_{\varphi}(t),$$

*Уравнение наблюдения:*

$$s(t) = A \sin\left((\omega - \omega_d(t))(t - \tau_3(t)) + \varphi(t)\right) + v(t).$$

Коэффициенты уравнений состояния и наблюдения для оценки  $\hat{x}(t)$  имеют следующий вид:

$$f(\hat{x}(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\hat{\varphi}(t)}{\tau_{corr}} \end{bmatrix},$$

$$h(\hat{x}(t)) = A \sin\left((\omega - \omega_d(t))(t - \tau_3(t)) + \hat{\varphi}(t)\right),$$

$$g(\hat{x}(t)) = \begin{bmatrix} 11 \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\tau_{corr}}} \end{bmatrix}.$$

Уравнение фильтрации:

Для удобства сделаем замену аргумента тригонометрической функции в наблюдаемом сигнале  $s(t)$  следующим образом:

$$M = M(\hat{x}(t)) = (\omega - \omega_d(t))(t - \tau_s(t)) + \hat{\phi}(t).$$

Тогда выражение для оценки будет выглядеть как

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = f(\hat{x}(t)) + V_x(t) \begin{bmatrix} -A(\omega - \omega_d(t))\cos(M) \\ -A(t - \tau_s(t))\cos(M) \\ A\cos(M) \end{bmatrix} \Psi_v^{-1}(t) \{s(t) - h(\hat{x}(t))\}.$$

Вычисление ковариационной матрицы ошибок:

$$\begin{aligned} \frac{dV_x(t)}{dt} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_{corr}} \end{bmatrix} V_x(t) + V_x(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_{corr}} \end{bmatrix} + \\ &+ g(\hat{x}(t)) \Psi_w(t) g^T(\hat{x}(t)) - V_x(t) \begin{bmatrix} -A(\omega - \omega_d(t))\cos(M) \\ -A(t - \tau_s(t))\cos(M) \\ A\cos(M) \end{bmatrix} \times \\ &\times \Psi_v^{-1}(t) \begin{bmatrix} -A(\omega - \omega_d(t))\cos(M) \\ -A(t - \tau_s(t))\cos(M) \\ A\cos(M) \end{bmatrix}^T V_x(t), \end{aligned}$$

где  $\hat{x}(t)$  – оценка вектора  $x$ ;  $V_x(t)$  – ковариационная матрица ошибок оценивания  $x$  размером  $3 \times 3$ .

$$\text{Начальные условия: } x(t_0) = \begin{bmatrix} E(\omega_d(t_0)) \\ E(\tau_s(t_0)) \\ E(\varphi(t_0)) \end{bmatrix}, \quad V_x(t_0) = \text{var}(\hat{x}(t_0)|z(t_0)),$$

где  $E(\cdot)$  – математическое ожидание,  $\text{var}(\cdot)$  – ковариация.  $\Psi_w$ ,  $\Psi_v$  – диагональные матрицы интенсивностей шумов состояния и наблюдения размером  $3 \times 3$  и  $1 \times 1$  соответственно. Математические ожидания шумов наблюдения и состояния равны нулю, шумы дельта-коррелированы друг с другом и с сигналом состояния.

## 1.2 Фильтр Калмана 2-го порядка

В данном случае уравнения состояния, наблюдения и начальные условия аналогичны таковым для фильтра 1-го порядка. При этом получаем:

*Уравнение фильтрации:*

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = f(\hat{x}(t)) + V_x(t) \begin{bmatrix} -A(\omega - \omega_d(t)) \cos(M) \\ -A(t - \tau_s(t)) \cos(M) \\ A \cos(M) \end{bmatrix} \times \Psi_v^{-1}(t) \left\{ s(t) - h(\hat{x}(t)) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -A(\omega - \omega_d(t))^2 \sin(M) & k_1 & A(\omega - \omega_d(t)) \sin(M) \\ k_1 & -A(t - \tau_s(t))^2 \sin(M) & A(t - \tau_s(t)) \sin(M) \\ A(\omega - \omega_d(t)) \sin(M) & A(t - \tau_s(t)) \sin(M) & -A \sin(M) \end{bmatrix} \times V_x(t) \right\}$$

где  $k_1 = A(\cos(M) - (t - \tau_s(t))(\omega - \omega_d(t)) \sin(M))$ .

Ковариационная матрица ошибок:

$$\begin{aligned} \frac{dV_x(t)}{dt} = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\tau_{corr}} \end{bmatrix} V_x(t) + V_x(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\tau_{corr}} \end{bmatrix} g(\hat{x}(t)) \Psi_w(t) g^T(\hat{x}(t)) - \\ & -V_x(t) \times \begin{bmatrix} -A(\omega - \omega_d(t)) \cos(M) \\ -A(t - \tau_s(t)) \cos(M) \\ A \cos(M) \end{bmatrix} \Psi_v^{-1}(t) \begin{bmatrix} -A(\omega - \omega_d(t)) \cos(M) \\ -A(t - \tau_s(t)) \cos(M) \\ A \cos(M) \end{bmatrix}^T \times \\ & \times V_x(t) + \Xi(V_x(t), \hat{x}(t)) \end{aligned}$$

Вычисление тензора:

$$\begin{aligned} \Xi_{k,l} = & \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 [V_{x_{i,k}}(t) V_{x_{i,j}}(t) + V_{x_{k,j}}(t) V_{x_{l,i}}(t)] \times \frac{\partial^2 h(\hat{x}(t))^T}{\partial x_i(t) \partial x_j(t)} \right\}^T \Psi_v^{-1}(t) \left\{ s(t) dt - h(\hat{x}(t)) dt - \right. \\ & \left. - \begin{bmatrix} -A(\omega - \omega_d(t))^2 \sin(M) & k_1 & A(\omega - \omega_d(t)) \sin(M) \\ k_1 & -A(t - \tau_s(t))^2 \sin(M) & A(t - \tau_s(t)) \sin(M) \\ A(\omega - \omega_d(t)) \sin(M) & A(t - \tau_s(t)) \sin(M) & -A \sin(M) \end{bmatrix} \times V_x(t) dt \right\}. \end{aligned}$$

### 1.3 Нелинейный фильтр по критерию МАВ

В данном случае получаем:

Уравнение фильтрации:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = f(\hat{x}(t)) + V_x(t) \begin{bmatrix} -A(\omega - \omega_d(t)) \cos(M) \\ -A(t - \tau_s(t)) \cos(M) \\ A \cos(M) \end{bmatrix} \Psi_v^{-1}(t) \{s(t) - h(\hat{x}(t))\}.$$

Ковариационная матрица ошибок:

$$\begin{aligned} \frac{dV_x(t)}{dt} = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\tau_{corr}} \end{bmatrix} V_x(t) + V_x(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\tau_{corr}} \end{bmatrix} + g(\hat{x}(t)) \Psi_w(t) g^T(\hat{x}(t)) + \\ & + V_x(t) \times \left( \begin{bmatrix} -Ak_4^2 \sin(M) & k_1 & Ak_4 \sin(M) \\ k_1 & -Ak_2^2 \sin(M) & Ak_2 \sin(M) \\ Ak_4 \sin(M) & Ak_2 \sin(M) & -A \sin(M) \end{bmatrix} s(t) - \right. \\ & \left. - \begin{bmatrix} k_5 k_4^2 & k_3 + k_5 k_2 k_4 & -k_5 k_4 \\ k_3 + k_5 k_4 k_2 & k_5 k_2^2 & -k_5 k_2 \\ -k_5 k_4 & -k_5 k_2 & k_5 \end{bmatrix} \right) \Psi_v(t) V_x(t), \end{aligned}$$

где  $k_2 = (t - \tau_s(t))$ ;  $k_3 = 0.5A^2 \sin(2M)$ ;  $k_4 = (\omega - \omega_d(t))$ ;  $k_5 = A^2 \cos(2M)$ .

Для случая небелого шума наблюдения получим СДУ для цветного шума по аналогии с [7]

$$\frac{dv(t)}{dt} = Qv(t) + \zeta(t),$$

где  $v(t)$  – цветной шум,  $Q$  – коэффициент СДУ, выбирается исходя из требуемой спектральной плотности мощности (СПМ) шума,  $\zeta(t)$  – БГШ. СПМ цветного шума можно определить из

$$S = (e^{2\pi i \lambda} - Q)^{-1} E[\zeta(t) \zeta(t)^*] (e^{-2\pi i \lambda} - Q^*)^{-1},$$

где  $\lambda = 2B\tau$ ,  $B$  – полоса частот,  $\tau$  – временной шаг.

## 2. Моделирование СДУ для различных распределений

Проведем моделирование в среде MATLAB полученных СДУ для различных законов распределения и сравним полученные характеристики с теоретическими законами распределения по критерию Колмогорова-Смирнова [8].

## 2.1 Моделирование распределения фон Мизеса-Тихонова

Результаты моделирования СДУ (3) для различных параметров распределения Мизеса-Тихонова представлены на рис. 1, 2.

$P_s$  – мощность шума;  $\sigma$  – СКО;  $x_{MO}$  – математическое ожидание.

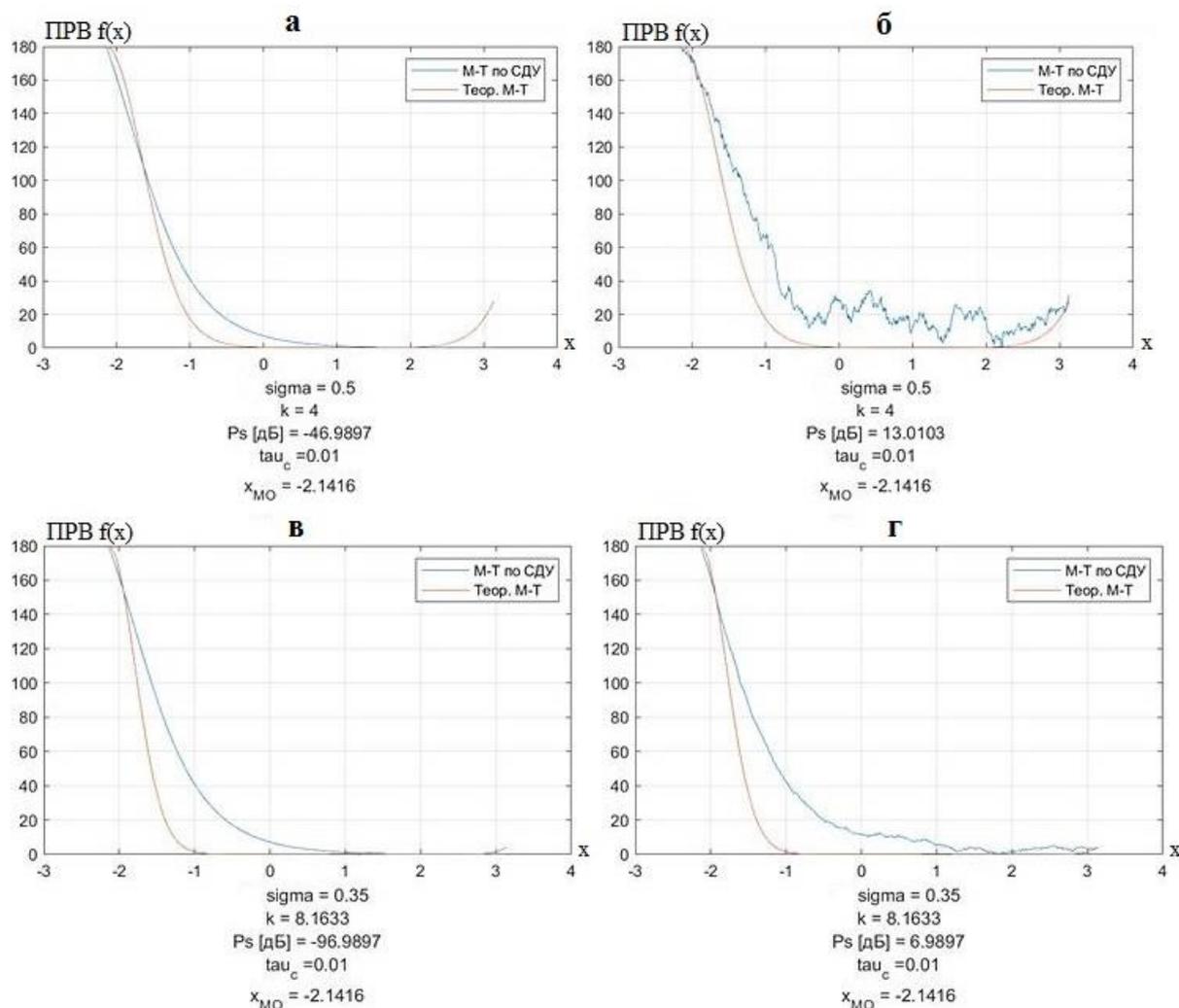


Рис. 1. Распределение фон Мизеса-Тихонова,  $\tau_c = 0.01$  при  $k = 4$ ,  $P_s = -46$  дБ (а);  $k = 4$ ,  $P_s = 13$  дБ (б);  $k = 8.2$ ,  $P_s = -96$  дБ (в);  $k = 8.2$ ,  $P_s = 7$  дБ (г).

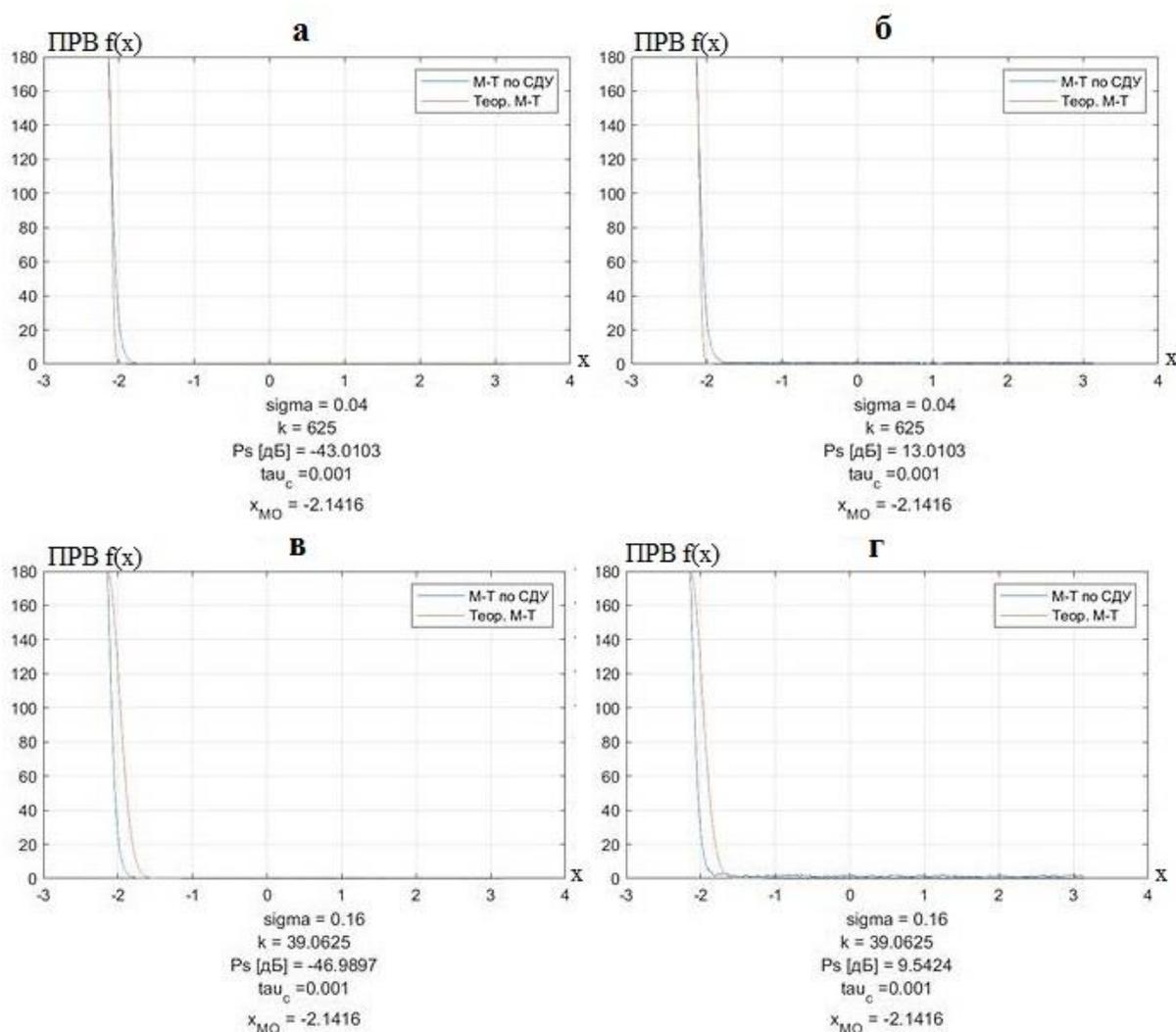


Рис. 2. Распределение фон Мизеса-Тихонова,  $\tau_c = 0.001$  при  $k = 625$ ,  $P_s = -43$  дБ (а);  $k = 625$ ,  $P_s = 13$  дБ (б);  $k = 39$ ,  $P_s = -47$  дБ (в);  $k = 39$ ,  $P_s = 9.54$  дБ (г).

При  $\tau_c = 0.01$  диапазон оптимальных по критерию Колмогорова-Смирнова значений соответствует меньшим  $k$  (при этом  $k$  должно быть меньше 4), чем в случае  $\tau_c = 0.001$ . На граничные значения отношения сигнал / шум это не оказывает влияния. Вероятности попадания в доверительный интервал по критерию Колмогорова-Смирнова для СДУ (3) составляет величину 0,75-0,92, что позволяет сделать вывод о корректности использования СДУ (3) для моделирования случайных процессов, имеющих распределение фон Мизеса-Тихонова.

## 2.2 Моделирование нормального и равномерного распределений

Результаты моделирования СДУ (4), (5) для различных параметров нормального и равномерного распределений представлены на рис. 3.

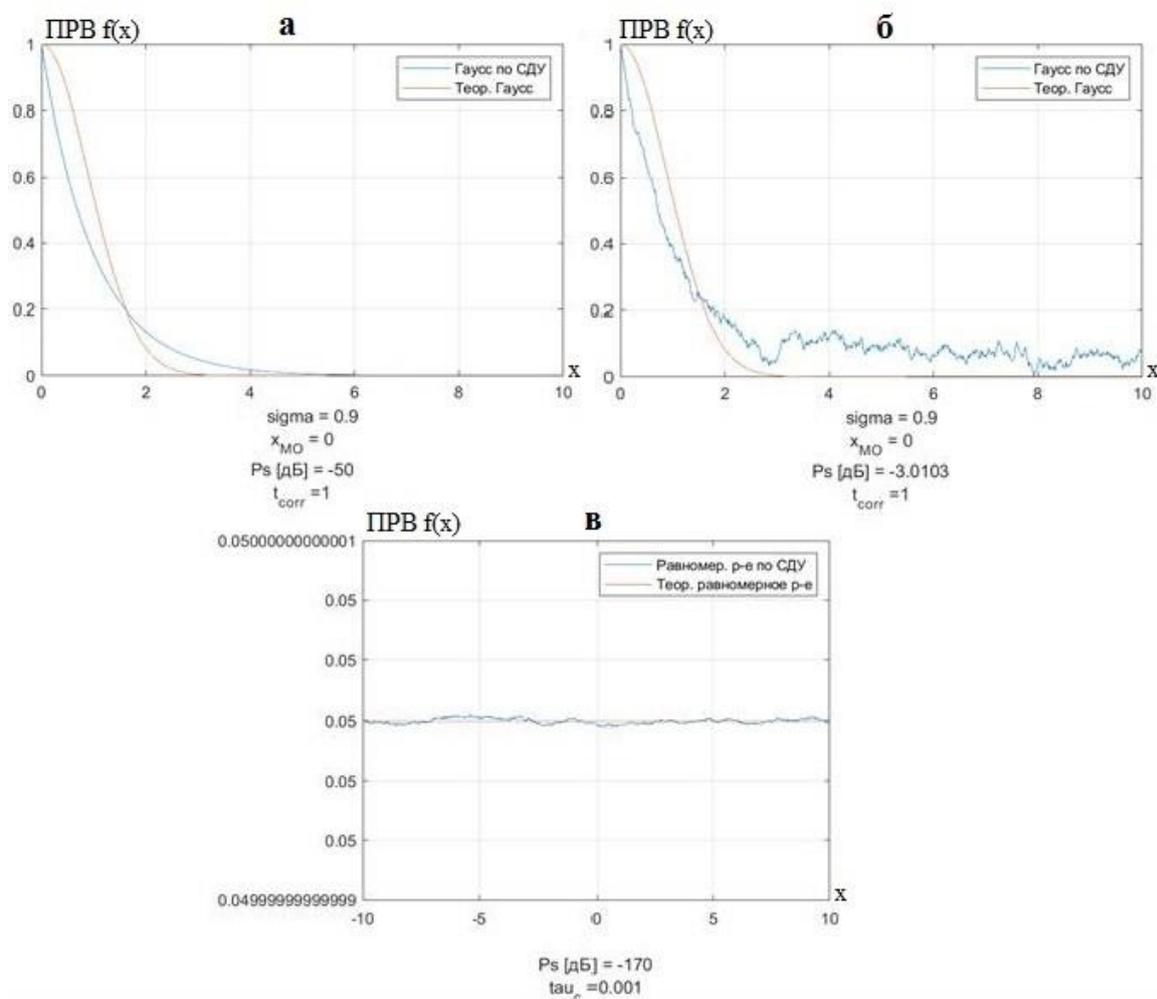


Рис. 3. Гауссово (а, б) и равномерное (в) распределение.

В данном случае равномерное распределение здесь было промоделировано в соответствии с СДУ вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{(b-a)^2}{\pi^2 \tau_c} \frac{\delta(x(t)-a) - \delta(x(t)-b)}{\theta(x(t)-a) - \theta(x(t)-b)} + \frac{b-a}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\tau_c}} w(t).$$

При этом вероятности попадания в доверительный интервал по критерию Колмогорова-Смирнова для СДУ (4) составляет величину 0,78-0,91, а для СДУ (5) – 0,74-0,93, что позволяет сделать вывод о корректности использования СДУ (4) и (5) для моделирования случайных процессов, имеющих нормальное и равномерное распределения.

### 3. Моделирование фильтров Калмана и нелинейного фильтра по критерию МАВ

#### 3.1 Белый гауссовский шум

Результаты анализа алгоритмов фильтрации при БГШ наблюдения представлены в табл. 1 и на рис. 4-9.

Таблица 1. Общая среднеквадратическая ошибка фильтрации при моделировании с БГШ.

	$P_v$ , дБ	MSE1	MSE2	MSE3	$\max$ MSE	$\min$ MSE
$\Phi^{MT}, \omega_d^N$	20	1.019966101	0.01767933	14.7823360	МАВ	ФК2
$\Phi^N, \omega_d^N$	20	0.006207624	0.003442652	0.00566480	ФК1	ФК2
$\Phi^{MT}, \omega_d^U$	10	0.0245885543	0.008416181	0.02213516	ФК1	ФК2
$\Phi^N, \omega_d^U$	20	0.0010912173	9.33130e-04	0.00136694	МАВ	ФК2
$\Phi^U, \omega_d^N$	20	0.0043636277	0.003911606	0.00462411	МАВ	ФК2
$\Phi^U, \omega_d^U$	20	2.781685e-04	2.78168e-04	2.78168e-04	ФК2	МАВ

В таблице обозначены  $\Phi^{MT}$  – фильтрация процесса с распределением фон Мозеса-Тихонова,  $\Phi^N$  – фильтрация процесса с нормальным распределением,  $\Phi^U$  – фильтрация процесса с равномерным распределением,  $P_v$  – СПМ шума наблюдения,  $MSE_i$  – среднеквадратическая ошибка,  $i = 1$  – ФК 1-го порядка,  $i = 2$  – ФК 2-го порядка,  $i = 3$  – МАВ фильтр.

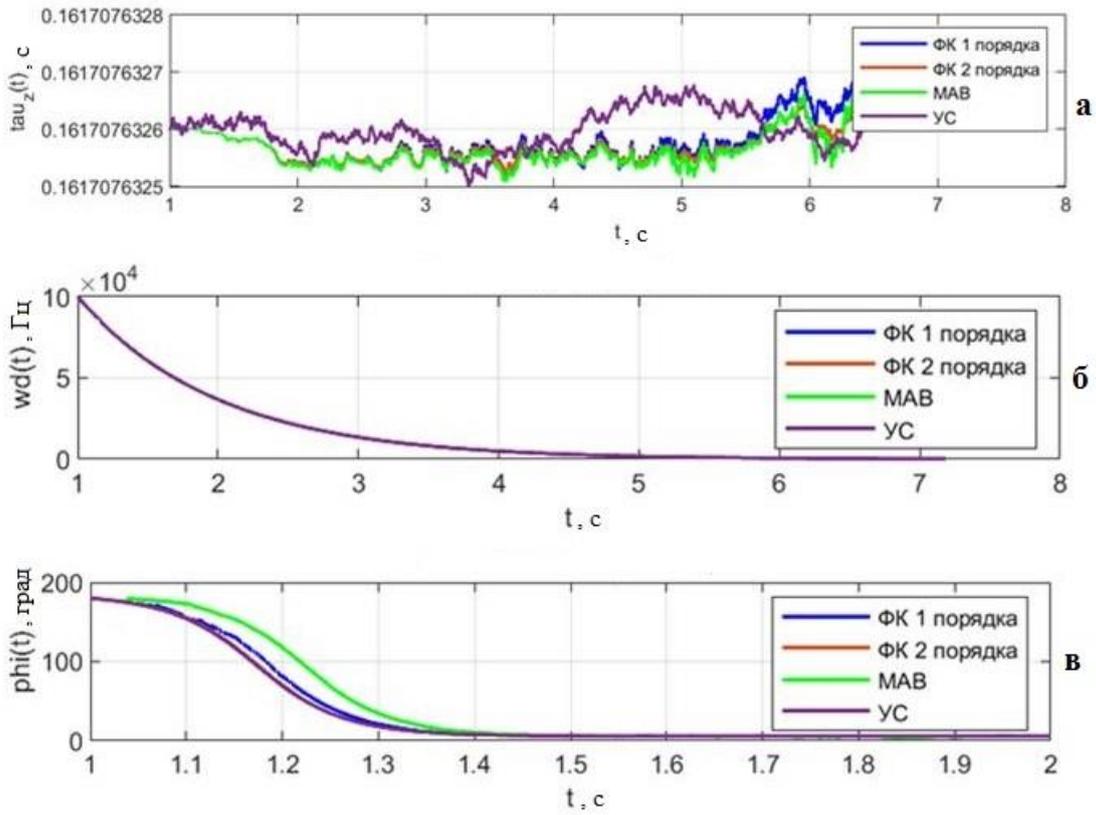


Рис. 4. Отфильтрованные задержка (а), частота Доплера (б) и фаза (в) для  $\Phi^{MT}, \omega_d^N$ .

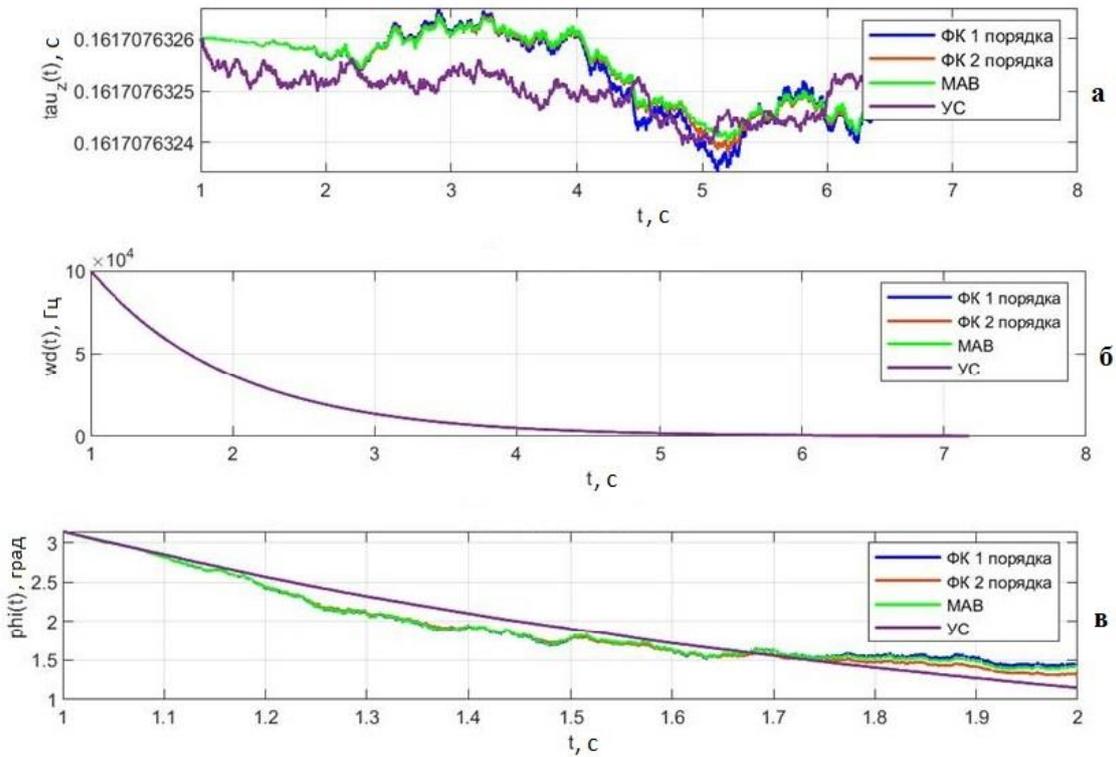


Рис. 5. Отфильтрованные задержка (а), частота Доплера (б) и фаза (в) для  $\Phi^N, \omega_d^N$ .

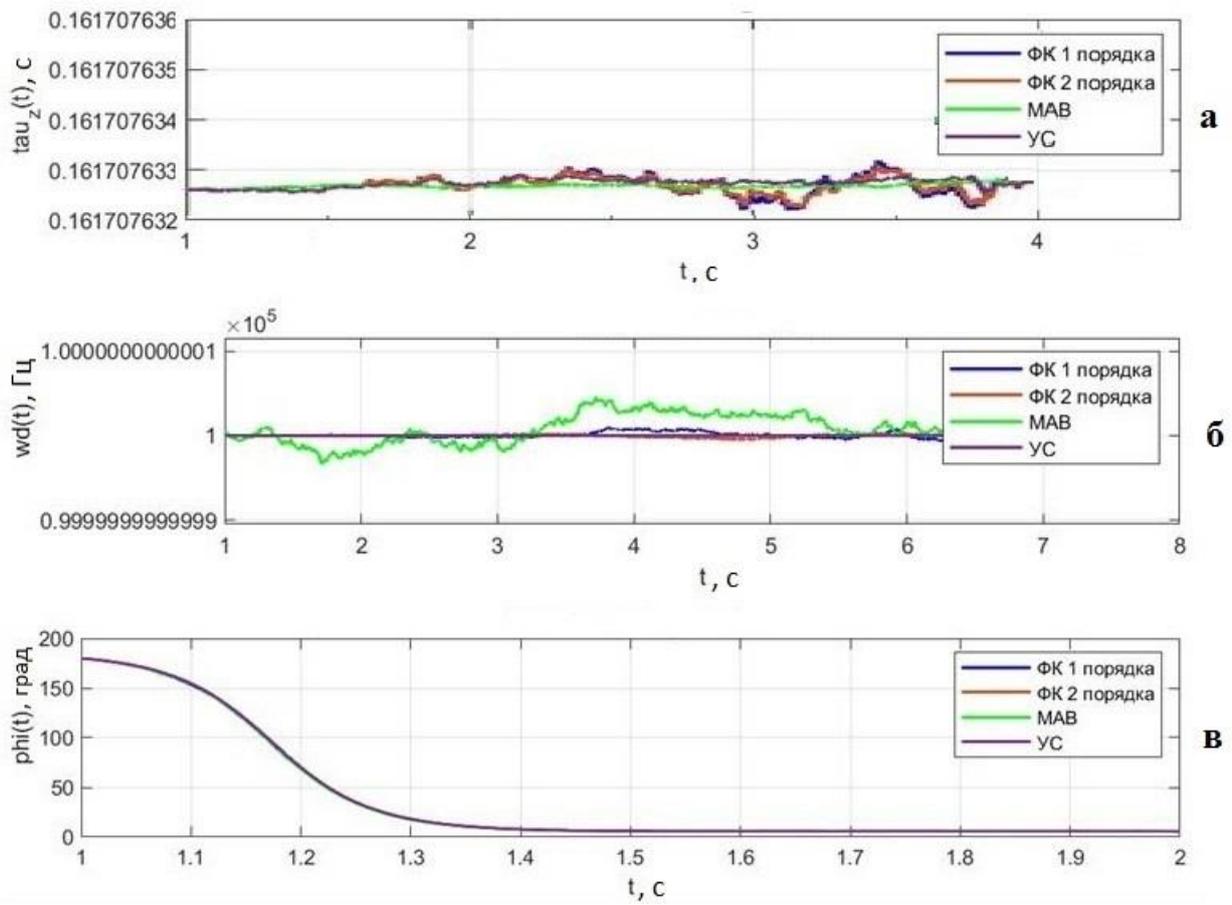


Рис. 6. – Отфильтрованные задержка (а), частота Доплера (б) и фаза (в) для  $\Phi^{MT}$ ,  $\omega_d^U$ .

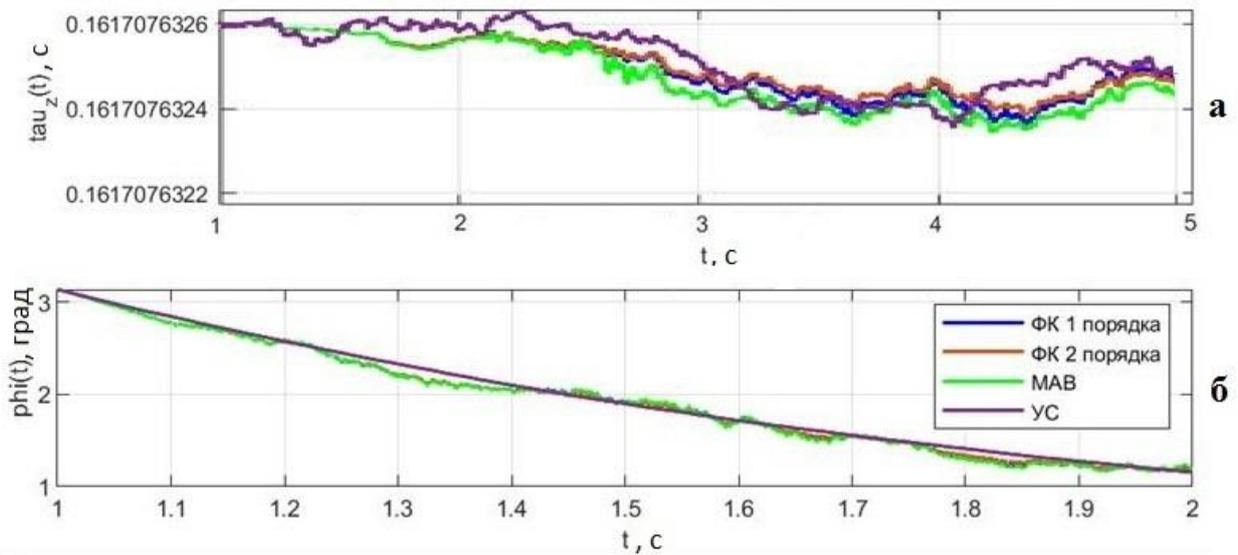


Рис. 7. Отфильтрованные задержка (а) и фаза (б) для  $\Phi^N$ ,  $\omega_d^U$ .

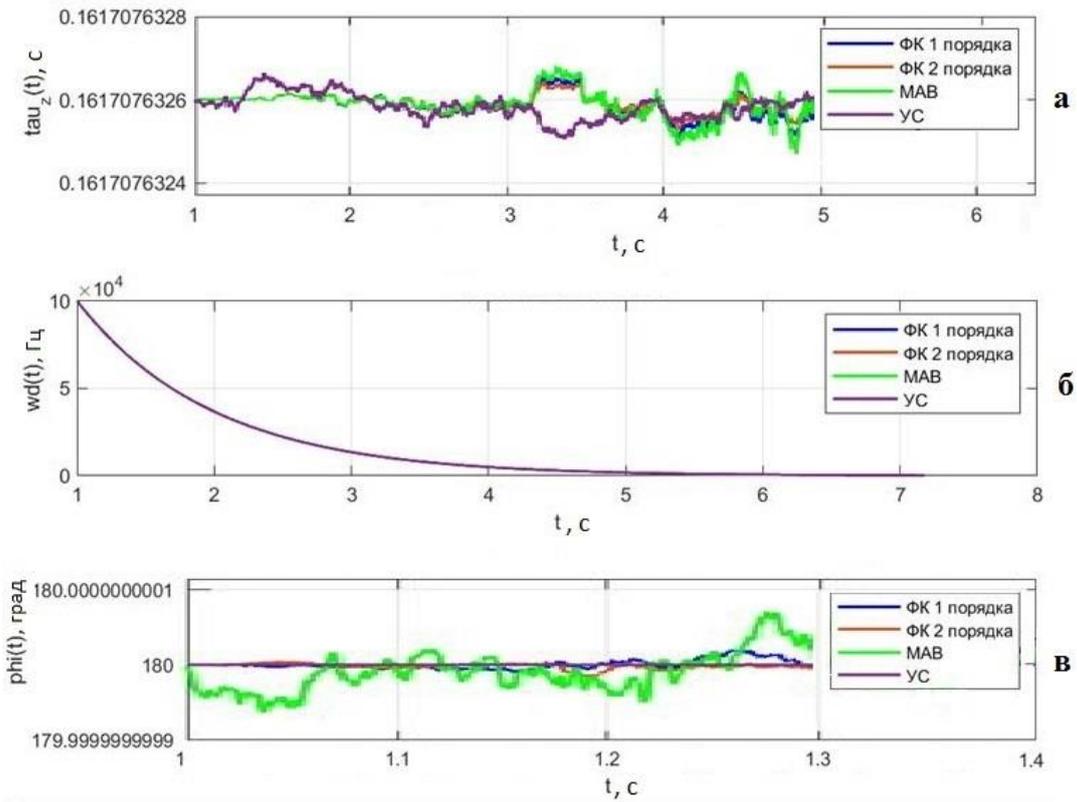


Рис. 8. Отфильтрованные задержка (а), частота Доплера (б) и фаза (в) для  $\Phi^U, \omega_d^N$ .

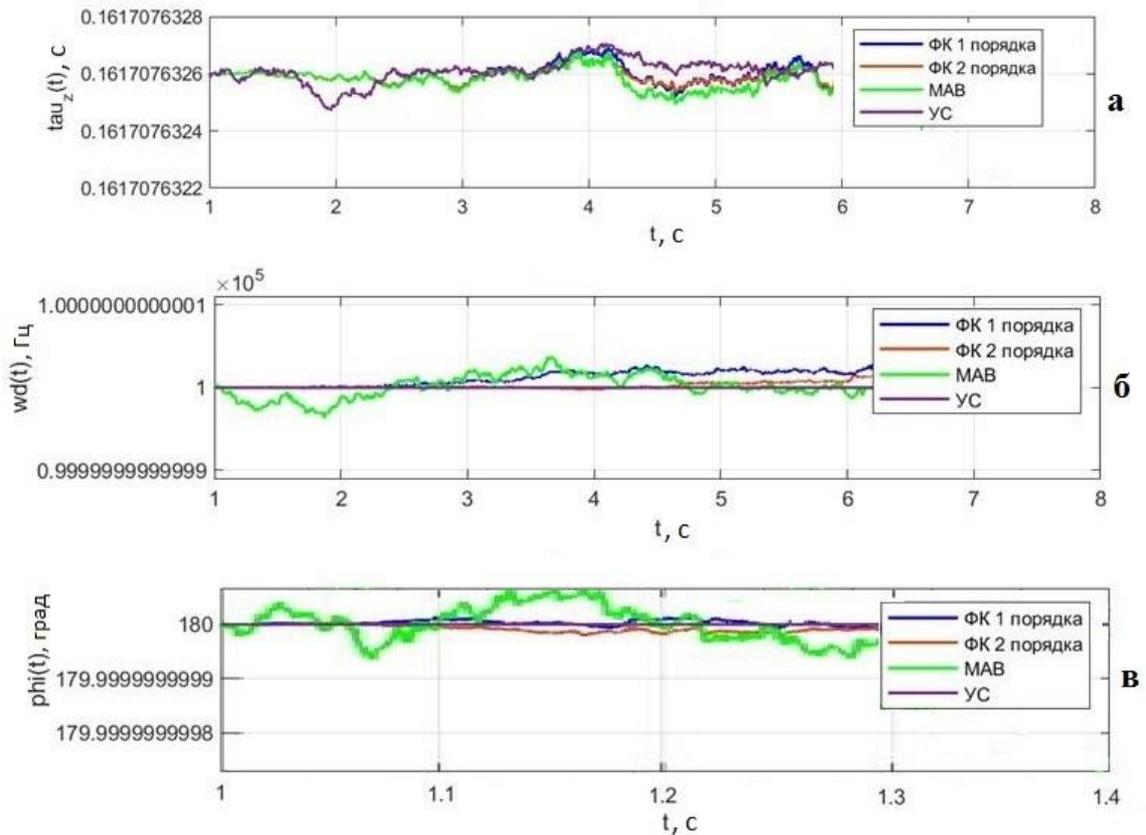


Рис. 9. Отфильтрованные задержка (а), частота Доплера (б) и фаза (в) для  $\Phi^U, \omega_d^U$ .

### 3.2 Небелый шум

Результаты анализа алгоритмов фильтрации при БГШ наблюдения представлены в табл. 2, 3 и на рис. 10-21.

Таблица 2. Общая среднеквадратическая ошибка для цветного шума №2.

	$P_v$ , дБ	MSE1	MSE2	MSE3	maxMSE	minMSE
$\Phi^{MT}, \omega_d^N$	17	0.05538340	0.008389513	0.03157057	ФК1	ФК2
$\Phi^N, \omega_d^N$	17	0.004867611	3.618712e-04	0.01879372	МAB	ФК2
$\Phi^{MT}, \omega_d^U$	20	4.605581287	0.624371028	0.05036048	ФК1	ФК2
$\Phi^N, \omega_d^U$	20	1.669007e+03	0.0188002965	0.00625856	ФК1	МAB
$\Phi^U, \omega_d^N$	20	0.00356850	0.0032899432	0.00690295	МAB	ФК2
$\Phi^U, \omega_d^U$	20	4.59701e-04	4.597012e-04	4.59701e-04	ФК2	МAB

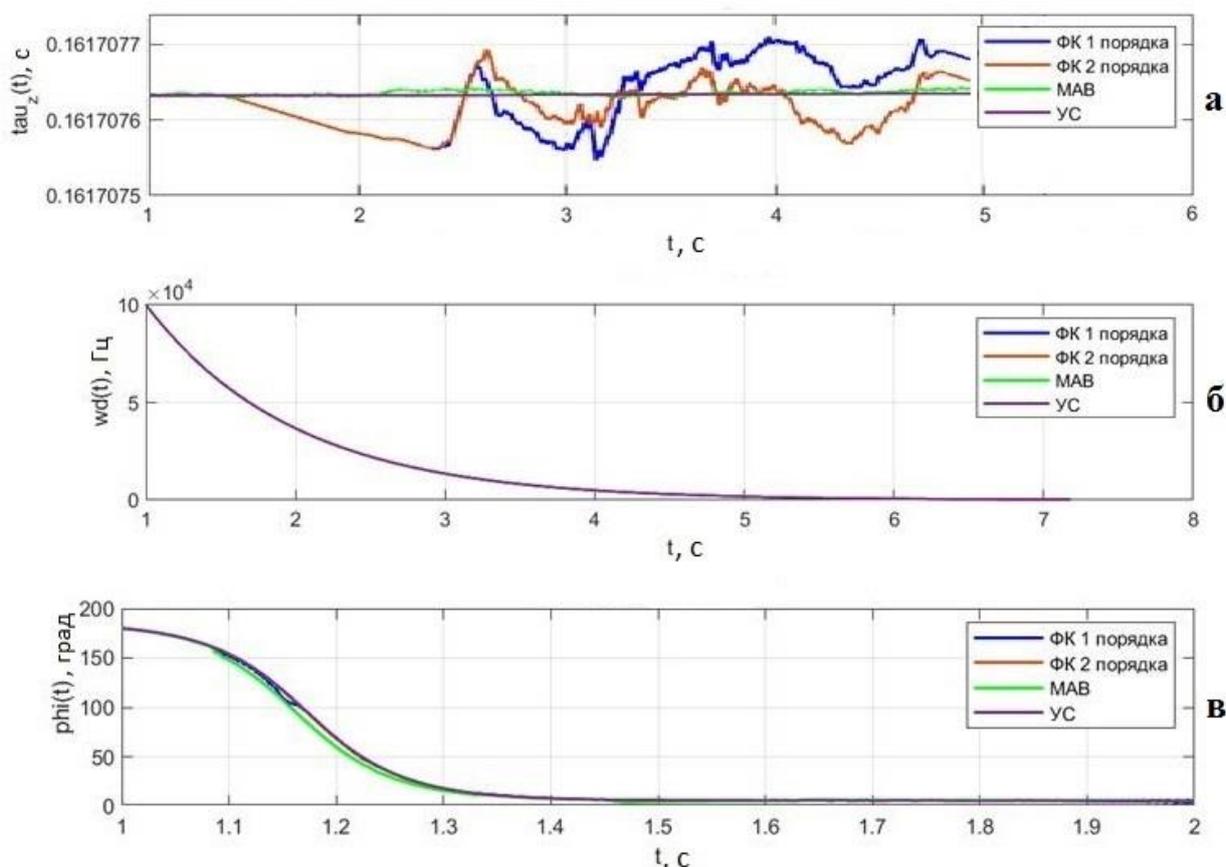


Рис. 10. Отфильтрованные задержка (а), частота Доплера (б) и фаза (в) для  $\Phi^{MT}, \omega_d^N$ .

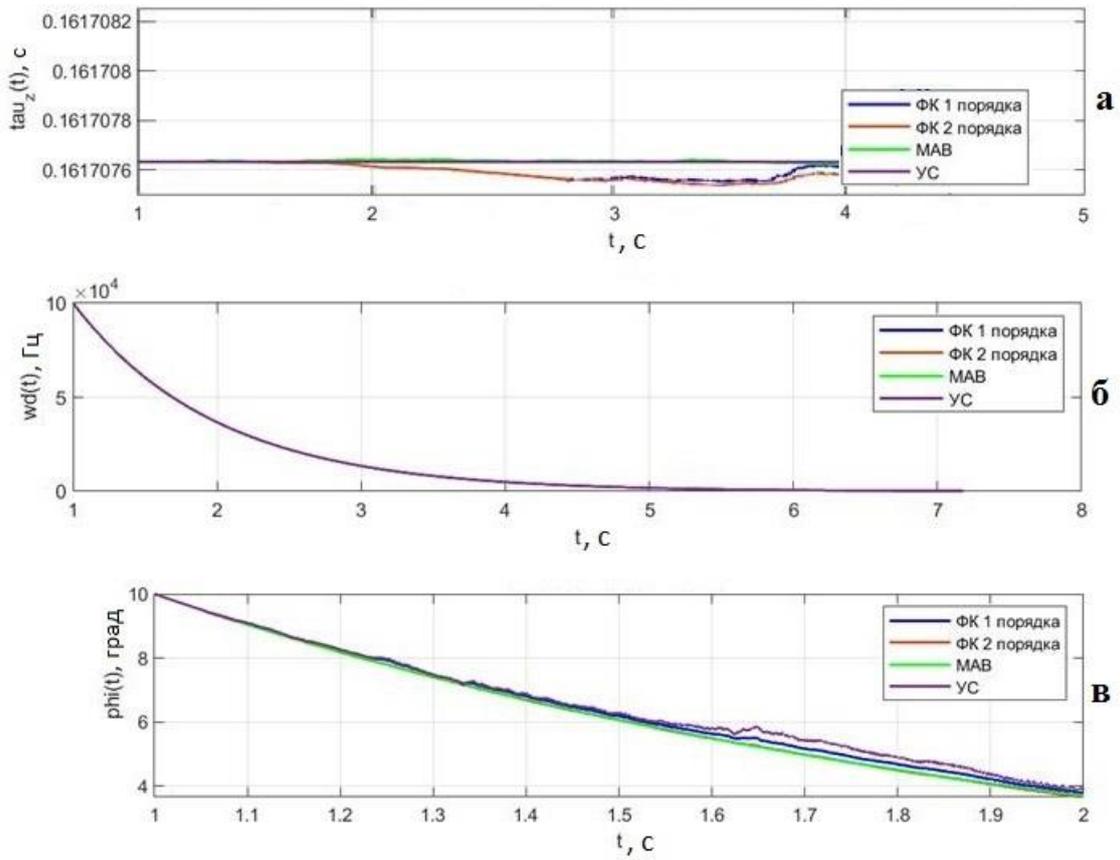


Рис. 11. Отфильтрованные задержка (а), частота Доплера (б) и фаза (в) для  $\Phi^N$ ,  $\omega_d^N$ .

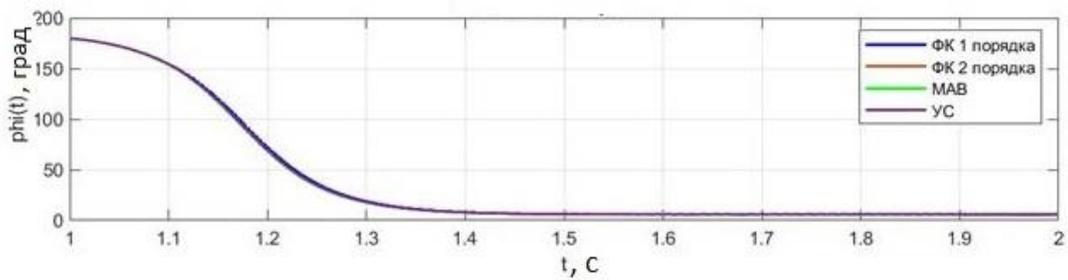


Рис. 12. Отфильтрованная фаза для  $\Phi^{MT}$ ,  $\omega_d^U$ .

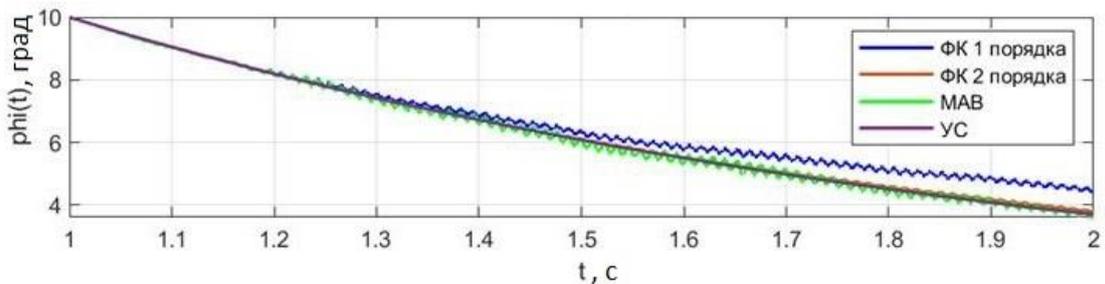


Рис. 13. Отфильтрованная фаза для  $\Phi^N$ ,  $\omega_d^U$ .

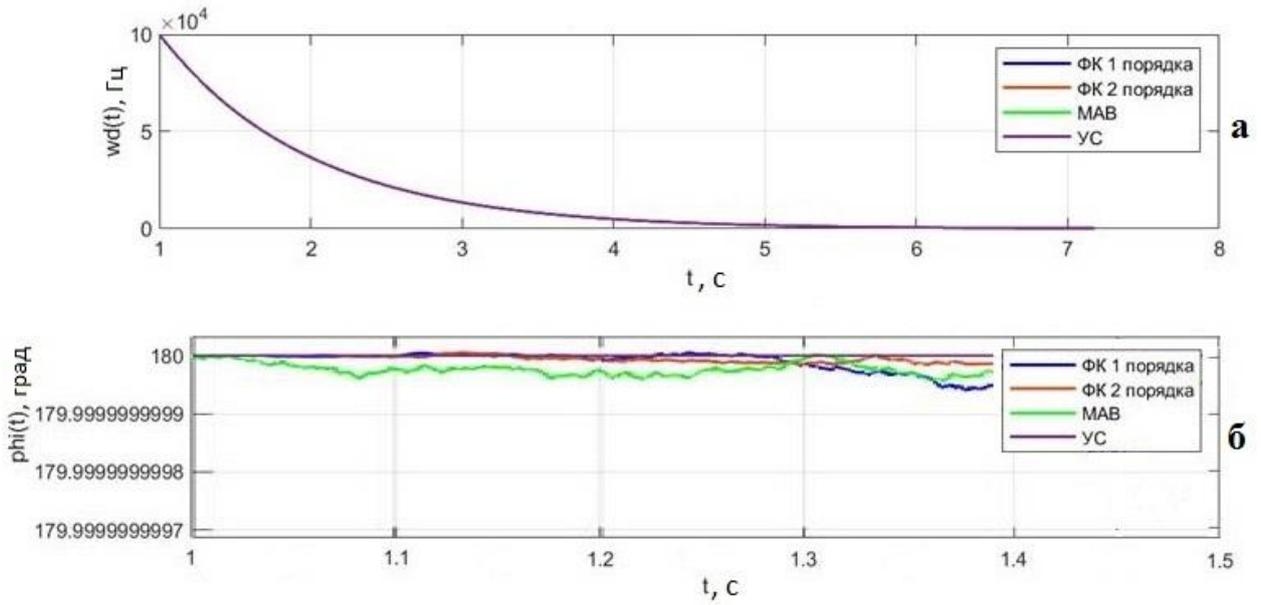


Рис. 14. Отфильтрованные частота Доплера (а) и фаза (б) для  $\Phi^U, \omega_d^N$ .

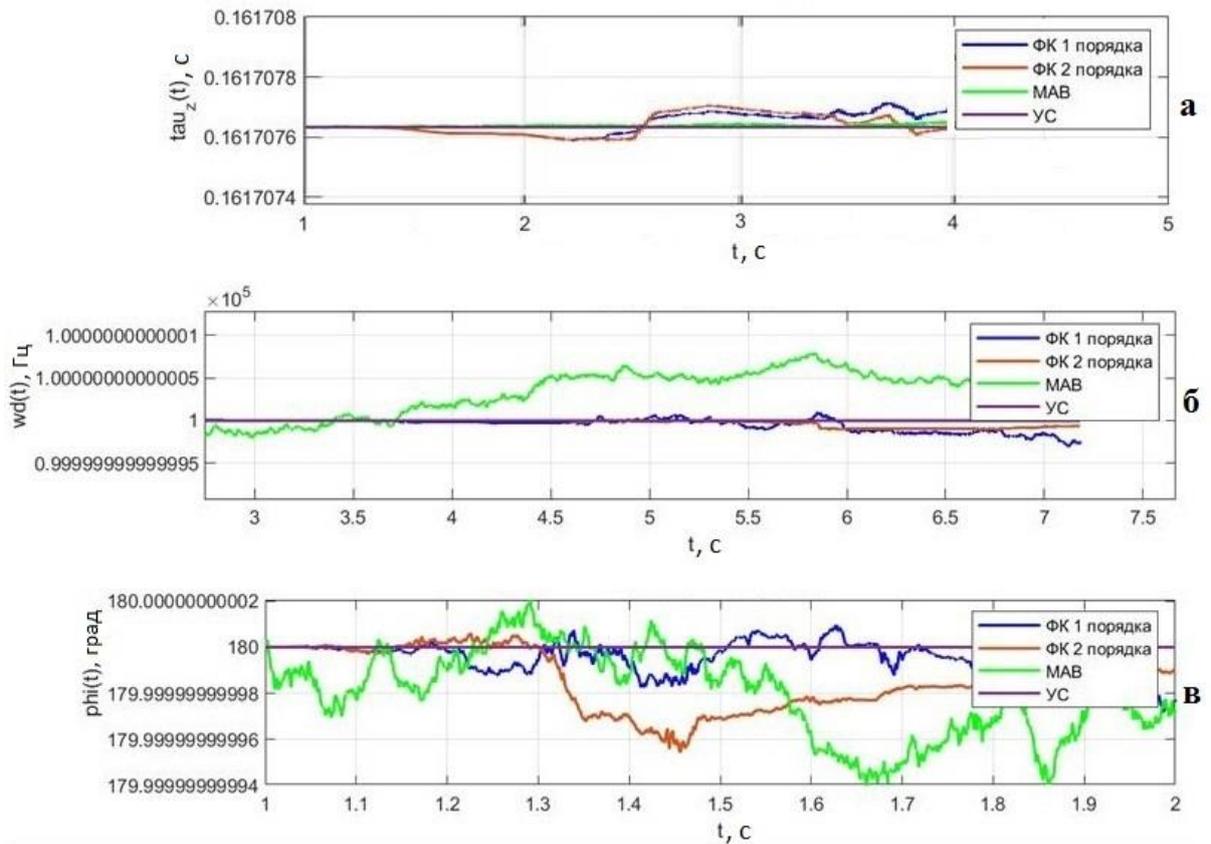


Рис. 15. Отфильтрованные задержка (а), частота Доплера (б) и фаза (в) для  $\Phi^U, \omega_d^U$ .

Таблица 3. Общая среднеквадратическая ошибка для цветного шума №3.

	$P_v, \text{дБ}$	MSE1	MSE2	MSE3	$\max \text{MSE}$	$\min \text{MSE}$
$\Phi^{\text{MT}}, \omega_d^{\text{N}}$	20	0.01065931	0.00330906	0.21128579	МАВ	ФК2
$\Phi^{\text{N}}, \omega_d^{\text{N}}$	20	0.00597993	6.95320e-04	0.02517318	МАВ	ФК2
$\Phi^{\text{MT}}, \omega_d^{\text{U}}$	20	0.23692607	0.03049987	0.01180266	ФК1	МАВ
$\Phi^{\text{N}}, \omega_d^{\text{U}}$	20	1.03429e+03	0.04081416	0.00525544	ФК1	МАВ
$\Phi^{\text{U}}, \omega_d^{\text{N}}$	27	0.93003692	0.06353872	0.03534233	ФК1	МАВ
$\Phi^{\text{U}}, \omega_d^{\text{U}}$	27	0.00309983	0.00309983	0.00309983	ФК1	МАВ

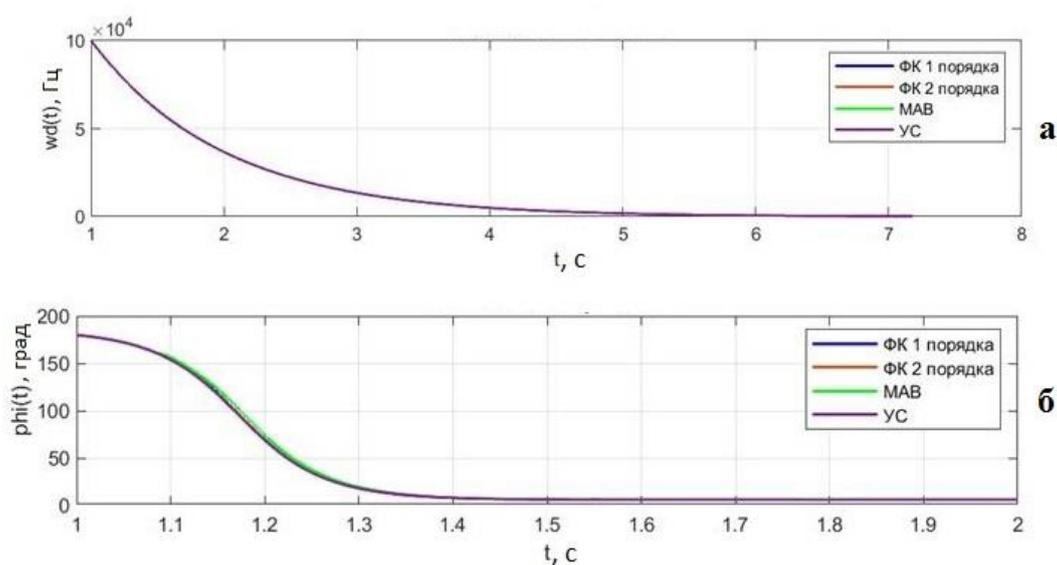


Рис. 16. Отфильтрованные частота Доплера (а) и фаза (б) для  $\Phi^{\text{MT}}, \omega_d^{\text{N}}$ .

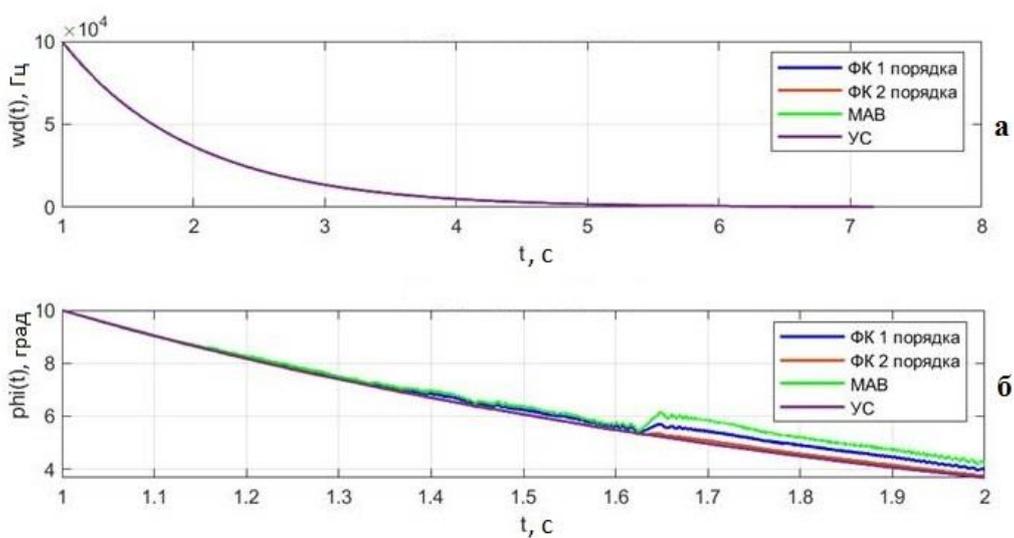


Рис. 17. Отфильтрованные частота Доплера (а) и фаза (б) для  $\Phi^{\text{N}}, \omega_d^{\text{N}}$ .

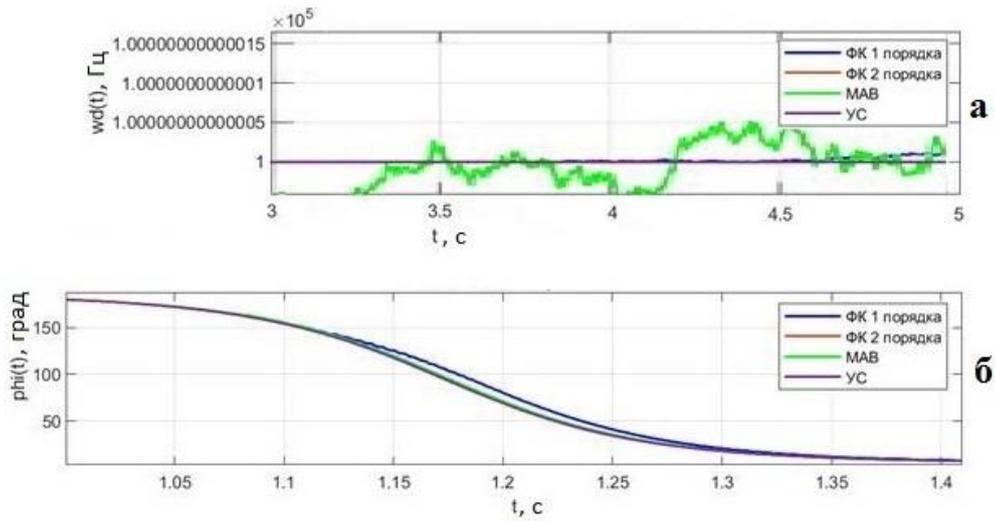


Рис. 18. Отфильтрованные частота Доплера (а) и фаза (б) для  $\Phi^{MT}, \omega_d^U$ .

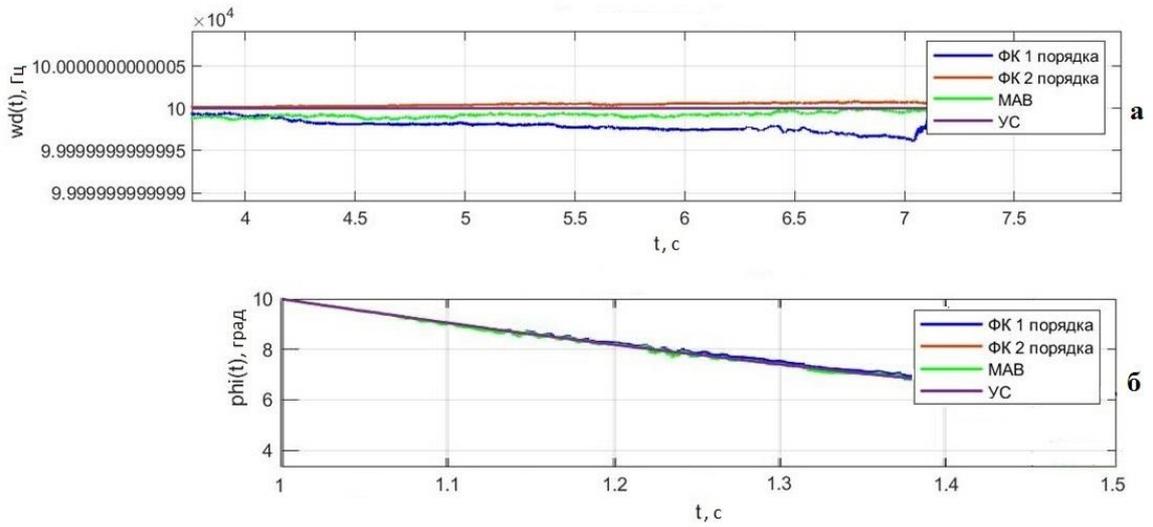


Рис. 19. Отфильтрованные частота Доплера (а) и фаза (б) для  $\Phi^N, \omega_d^U$ .

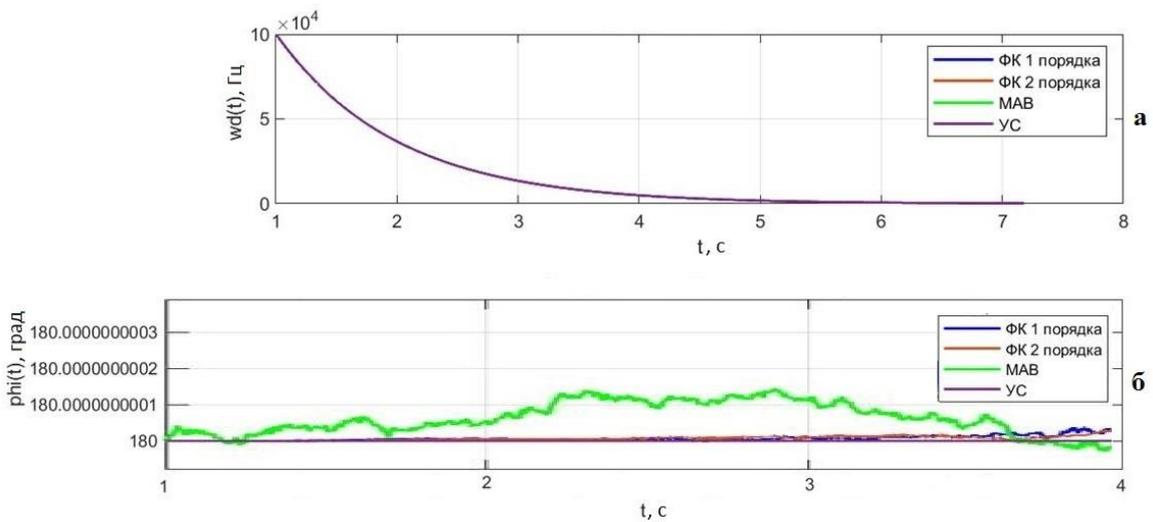


Рис. 20. Отфильтрованные частота Доплера (а) и фаза (б) для  $\Phi^U, \omega_d^N$ .

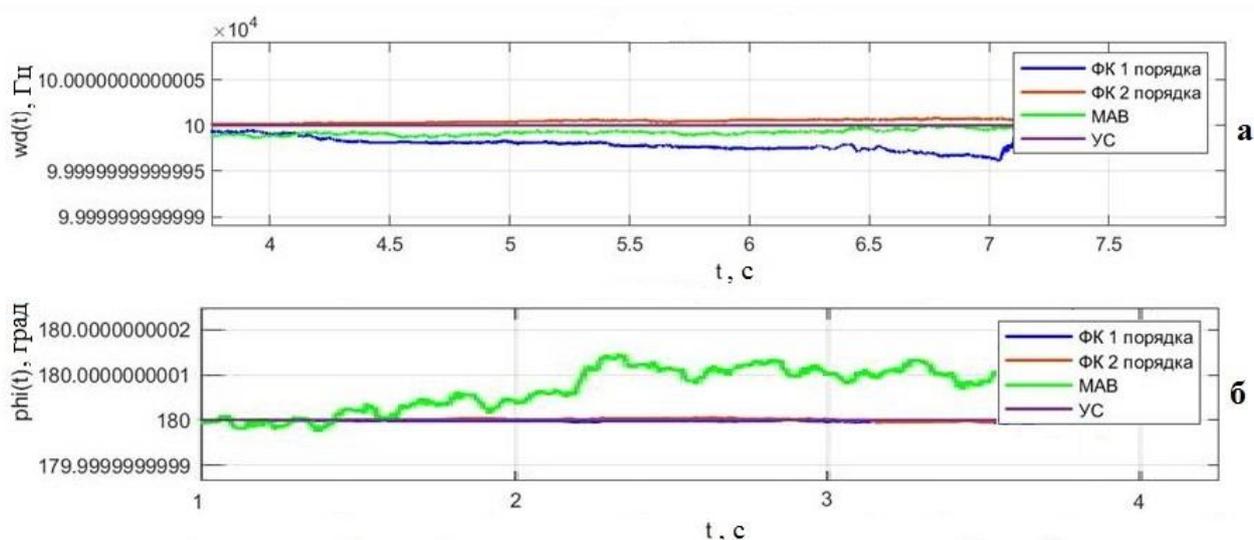


Рис. 21. Отфильтрованные частота Доплера (а) и фаза (б) для  $\Phi^U$ ,  $\omega_d^U$

## Заключение

Результаты показали, что, как и следует ожидать, фильтр Калмана 2-го порядка имеет выигрыш относительно фильтра 1-го порядка за счет введения дополнительного члена разложения функции  $f(x(t))$  в уравнении состояния, что обеспечивает более чувствительное слежение за изменениями состояния процесса  $x(t)$ . Можно видеть, что эта тенденция сохраняется как при белом шуме наблюдения, так и при окрашенных шумах. Фильтр МАВ показывает худшие результаты при различных значениях отношения сигнал/шум. Нелинейность не только уравнения состояния, но и уравнения наблюдения приводит к тому, что при увеличении мощности шума наблюдения дисперсия ошибки оценивания растет быстрее, чем для фильтров Калмана. При окрашенных шумах фильтр МАВ может оказываться лучшим, хотя все рассмотренные фильтры предполагают ухудшение точности, потому что рассчитаны на линейные модели процессов.

Как следует из таблиц 1-3, для равномерного распределения ошибка оценивания может быть любой для всех алгоритмов, таким образом, равномерное распределение представляет собой наиболее сложный случай фильтрации по исходному СДУ, в то время как распределения фон Мизеса-Тихонова и нормальное демонстрируют более корректные результаты.

Граничные мощности шума наблюдения, при которых все модели работают адекватно, соответствуют мощностям, представленным в таблицах.

### Литература

1. Кловский Д.Д., Конторович В.Я., Широков С.М. Модели непрерывных каналов связи на основе стохастических дифференциальных уравнений. – Радио и связь, 1984.
2. Глушанков Е.И., Конторович В.Я. Математическое моделирование сигналов различной пространственной когерентности в системах радиосвязи // Адаптивные радиотехнические системы с антенными решетками. – Л.: Издательство Ленинградского университета. – 1991. – С. 432-466.
3. Primak S., Kontorovich V., Lyandres V. Stochastic methods and their applications to communications: stochastic differential equations approach. – John Wiley & Sons, 2005.
4. Глушанков Е.И., Конторович В.Я., Караваев Д.А. Математическое моделирование сигналов в непрерывных каналах связи в форме стохастических дифференциальных уравнений // Системы управления, связи и безопасности. – 2023. – №. 4. – С. 1-35.
5. Перов А.И. и др. ГЛОНАСС. Модернизация и перспективы развития // Радиотехника. – 2020.
6. Ярлыков М.С. Статистическая теория радионавигации. – 1985.
7. Сейдж Э.М.Д. Теория оценивания и ее применения в связи и управлении. – 1976.
8. Лемешко Б.Ю. Непараметрические критерии согласия: Руководство по применению // М.: ИНФРА-М. – 2014.

#### Для цитирования:

Глушанков Е.И., Кондрашов З.К., Конторович В.Я., Суденкова А.В. Фильтрация навигационных сигналов в радионавигационных системах // Журнал радиоэлектроники. – 2025. – №.5. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.5.4>