

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2026.5.7>

УДК: 621.396.677

## РАСЧЕТ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗЕРКАЛЬНОЙ АНТЕННЫ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Е.И. Лаврецкий

НИИ Точных Приборов, 127490, Москва, ул. Декабристов, владение 51

Статья поступила в редакцию 3 апреля 2026 г.

**Аннотация.** Для расчета осесимметричной зеркальной антенны Кассегрена применено интегральное уравнение электрического поля для тела вращения, которое решается методом Галеркина. Для повышения точности численного решения интегрального уравнения предложен способ вычисления двойных интегралов с логарифмической особенностью, возникающих в элементах матрицы СЛАУ. Проведено сравнение метода интегрального уравнения электрического поля для тела вращения по скорости вычислений и требуемой памяти с методом интегральных уравнений электрического поля с локальными базисными функциями *RWG* и с методом физической оптики с учетом многократных переотражений. Показано, что метод интегрального уравнения электрического поля для тела вращения при расчете осесимметричной антенны Кассегрена дает высокую точность при малых затратах оперативной памяти компьютера, время вычислений с использованием предложенного метода сравнимо с временем вычислений по методу физической оптики с учетом многократных переотражений. С помощью метода интегрального уравнения электрического поля для тела вращения был проведен расчет антенны Кассегрена для геометрии с реальным рупором, когда неизвестными в

интегральном уравнении были токи на отражателях и на рупоре, что дает возможность автоматически учесть затенения от рупора. Результаты расчета на частоте 1,7 ГГц практически совпали с результатами расчета этой антенны в *CST Microwave Studio-IE*.

**Ключевые слова:** зеркальная антенна Кассегрена, интегральное уравнение электрического поля для тела вращения, метод физической оптики с учетом многократных переотражений.

**Автор для переписки:** Лаврецкий Евгений Изидорович, [e.lavretski@mail.ru](mailto:e.lavretski@mail.ru)

## Введение

Метод интегральных уравнений для решения задачи возбуждения идеально-проводящего тела вращения был впервые применен Васильевым Евгением Николаевичем в 1959 г. в его пионерской работе [1]. Развитие этого метода было вызвано необходимостью расчета характеристик антенн космических кораблей и ракет, когда форма тел не позволяла применить метод собственных функций [2]. Электрические размеры тел вращения на первом этапе развития метода не превышали нескольких длин волн [1,2]. В 1987 г. Васильев Е.Н. опубликовал обобщающую монографию «Возбуждение тел вращения» [3], где развит численный метод решения граничных задач электродинамики применительно к телам вращения произвольной формы. В этом методе неизвестный поверхностный ток на теле вращения представлялся в виде суммы азимутальных гармоник тока, что позволило свести задачу к решению отдельных интегральных уравнений для нахождения распределений токов вдоль образующей тела вращения для разных азимутальных гармоник. В результате для азимутальных гармоник решались СЛАУ значительно меньшей размерности, чем при решении этой же задачи с введением на поверхности локальных базисных функций.

В рамках рассмотрения в [1-3] и в других работах Васильева Е.Н. для решения интегральных уравнений для тел вращения применялся метод Крылова-

Боголюбова (метод коллокации), когда для неизвестных распределений гармоник поверхностного тока использовалась кусочно-постоянная аппроксимация вдоль образующей, а граничные условия удовлетворялись в дискретных точках. Для терминологии метода Галеркина (метода моментов) это значит [4], что базисными функциями были кусочно-постоянные функции, а проецирующими функциями были  $\delta$ -функции Дирака. Из-за наличия в уравнении оператора дифференцирования *graddiv* электрические поля листков с электрическим током, локализованных на поверхности тела, представляют собой несобственные интегралы при расположении точки наблюдения на поверхности тела. Это создавало математическую трудность при численной реализации метода, когда нужно было вычислять электрическое поле от кусочно-постоянной базисной функции на самой такой функции. На основании проведенного в [3] детального анализа свойств векторного потенциала листков с током и его производных было показано, что в интегральном уравнении электрического поля для идеально-проводящего тела указанные математические трудности снимаются, если граничное условие применяется на вспомогательной поверхности [3].

В работах Давыдова А.Г. с соавторами [5-8] и в других работах были построены вычислительные схемы для сведения граничной задачи к интегральному уравнению электрического поля, когда в качестве значения электрического поля на граничной поверхности рассматривался предел его интегрального представления при стремлении точки наблюдения к этой поверхности. Это позволило создать простой и результативный путь решения, когда поверхность тела и вспомогательная поверхность совмещены. Были рассмотрены трехмерные векторные задачи, поверхности вращения и цилиндрические поверхности [5-8], использовались метод коллокации и кусочно-постоянная аппроксимация распределений поверхностного тока. Особенность метода состояла в том, что предельный переход точки наблюдения к граничной поверхности осуществлялся после дискретизации уравнений, что позволило сначала аналитически вычислить однократный интеграл, а затем

перейти к пределу. Для задач с поверхностями вращения это позволило получить формулы для матричных элементов СЛАУ, в которых подынтегральные выражения не имели особенностей сильнее логарифмической [5]. С помощью такого подхода были получены численные решения для большого числа задач, и был разработан комплекс программ «*EDEM*» [9,10], представляющий собой систему для автоматизированного исследования электродинамических свойств многоэлементных проводящих структур различного назначения.

В зарубежных публикациях первой работой, посвященной рассеянию на телах вращения, считается вышедшая в 1965 г. статья Andreassen [11], где для решения интегрального уравнения также применялся метод Крылова-Боголюбова [1-3]. В работах Mautz и Harrington [12,13] был разработан несколько отличающийся (альтернативный) подход для решения задач расчета поверхностных токов и рассеянного поля в дальней зоне для произвольного возбуждения тела вращения с помощью решения интегрального уравнения. Для аппроксимации распределений тока гармоник вдоль образующей тела вращения были применены треугольные базисные функции, являющиеся линейно-независимыми, но не являющиеся ортогональными. Данные системы базисных функций являются в настоящее время стандартом для решения подобных задач, поскольку при таком базисе достигается более высокая точность решения (выше порядок аппроксимации), чем в методе коллокаций [4]. Другим «нововведением» в [12,13] по сравнению с [1-3] явилось использование «полного» метода Галеркина (метода моментов), когда в качестве проецирующих функций использовались те же треугольные базисные функции, что и для разложения искомым поверхностных токов. В результате этого задача сводится к решению СЛАУ, матричные элементы для которой представляются здесь в виде двойных интегралов, которые являются гладкими функциями благодаря второму интегрированию при проецировании. Дополнительным достоинством метода [12,13] является то, что решение по методу моментов тождественно решению рассматриваемого операторного уравнения

вариационным методом Рэлея-Ритца (соответствует минимуму вариационного функционала [4]).

Следующий шаг в развитии подхода [12,13] был сделан в работах [14,15], где был предложен эффективный способ вычисления коэффициентов разложения скалярной функции Грина в ряд Фурье по азимутальным гармоникам с помощью выделения сингулярного члена, что позволило, по оценкам авторов [15], на порядок повысить эффективность алгоритмов для больших тел вращения. Для этого азимутальные интегралы были записаны в виде суммы двух интегралов, где первая подынтегральная функция являлась разностью скалярной функции Грина и статического члена, а вторая подынтегральная функция была статическим членом. Первый интеграл не имел особенности и вычислялся обычными методами, а интеграл от статического члена вычислялся аналитически через полные эллиптические интегралы. Как было уже сказано, матричные элементы СЛАУ представлялись в виде двойных интегралов по базисным функциям на образующей. При совпадении базисной и проецирующей функций в подынтегральной функции имелась интегрируемая логарифмическая особенность, порожденная статическим членом. Для вычисления двойных интегралов с логарифмической особенностью в [15] был предложен метод интегрирования, который, однако, давал численную ошибку вблизи оси вращения, когда  $\rho$  и  $\rho'$  были небольшими (менее  $0,3\lambda$ ) [15].

Различные вопросы электродинамики для тел вращения продолжают оставаться актуальным предметом исследований, о чем свидетельствуют многочисленные публикации [16-21]. В частности, много внимания уделено разработке более совершенных методов расчета разложений скалярной функции Грина в ряд Фурье [17-20], в том числе в областях параметров, где имеются осциллирующие ядра. В статье [21] для расчета осесимметричной антенной системы с офсетным облучением для разложения токов вдоль образующей вместо треугольных функций применены полиномы Лежандра.

Метод расчета тел вращения, основанный на работах [12-15], был реализован и исследован для применения в расчете зеркальных антенн.

Отражатели зеркальных антенн могут рассматриваться как бесконечно-тонкие незамкнутые идеально-проводящие поверхности, для которых целесообразно применение интегральных уравнений электрического поля для поверхностных электрических токов. Исследование показало, что численные ошибки метода [15] проявлялись в том, что распределения токов вдоль образующей демонстрировали нефизические пульсации вблизи оси тела вращения, причиной которых были погрешности вычисления интегралов с логарифмической особенностью. Поэтому в настоящей статье предложено использовать другой способ вычисления двойных интегралов с логарифмической особенностью, который позволил более точно рассчитать матричные импедансы и получить «физически» корректные распределения токов на отражателях. Для полноты описания в статье обсуждены два разных представления электрического поля, создаваемого сторонним электрическим током, дано краткое описание метода интегральных уравнений электрического поля для тела вращения. После этого описан примененный метод вычисления двойного интеграла с логарифмической особенностью, возникающего при расчете элементов матрицы СЛАУ. Разработанный алгоритм расчета тел вращения был применен для анализа осесимметричных антенн большого электрического размера, в том числе двухзеркальных антенн Кассегрена, которые являются важным классом антенн, для которых должно выполняться высокоточное моделирование. Проведено сравнение предложенного метода интегрального уравнения электрического поля для тела вращения по скорости вычислений и требуемому объему памяти компьютера с методом интегрального уравнения электрического поля с локальными базисными функциями *RWG* и с методом физической оптики с учетом многократных переотражений. Показано, что метод интегрального уравнения электрического поля для тела вращения дает высокую точность вычислений при малых затратах *RAM* компьютера, а время вычислений сопоставимо с методом физической оптики.

## 1. Представления электрического поля, создаваемого сторонним электрическим током

Рассмотрим случай свободного пространства,  $k_0 = 2\pi/\lambda$  – волновое число, зависимость от времени зададим в виде  $e^{i\omega t}$ . В методических целях дадим краткий экскурс в известный вывод выражения для представления электрического поля в свободном пространстве на основе смешанных потенциалов (векторного и скалярного). При выводе представления электрического поля обычно используют векторный и скалярный потенциалы [22, с.37], напряженность электрического поля записывают в виде:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi^{\circ} - i\omega\mu_0\vec{A}^{\circ}, \quad (1)$$

где  $\varphi^{\circ}$  – скалярный потенциал, связанный с векторным потенциалом  $\vec{A}^{\circ}$  через формулу калибровки Лоренца

$$\text{div}\vec{A}^{\circ} + i\omega\varepsilon_0\varphi^{\circ} = 0. \quad (2)$$

При подстановке представления электрического поля (1) в уравнения Максвелла получают два отдельных волновых уравнения- для векторного и скалярного потенциалов соответственно

$$\nabla^2\vec{A}^{\circ} + k_0^2\vec{A}^{\circ} = -\vec{j}^{\circ}, \quad (3')$$

$$\Delta\varphi^{\circ} + k_0^2\varphi^{\circ} = -\frac{\rho^{\circ}}{\varepsilon_0}, \quad (3'')$$

где  $\vec{j}^{\circ}$  – объемная плотность электрического тока,  $\rho^{\circ}$  – объемная плотность электрического заряда. Далее, решая волновые уравнения с одной и той же функцией Грина, получают формулы для расчета векторного и скалярного потенциалов:

$$\vec{A}^{\circ} = \int_{V'} \vec{j}^{\circ}(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV', \quad (4')$$

$$\varphi^{\circ} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V'} \rho^{\circ}(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV'. \quad (4'')$$

В [22,23] указано, что для расчета электрического поля нет необходимости решать волновое уравнение (3'') для скалярного потенциала, а достаточно решать волновое уравнение (3') для векторного потенциала, поскольку скалярный потенциал может быть всегда найден через векторный потенциал (4'), используя уравнение калибровки Лоренца (2):

$$\varphi^{\circ} = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \operatorname{div} \vec{A}^{\circ} = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \nabla \cdot \int_{V'} \vec{j}^{\circ}(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV'. \quad (5)$$

Тогда электрическое поле на основании формул (1), (4') и (5) приобретает следующее стандартное выражение с оператором *graddiv* [22,23]:

$$\vec{E} = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \left( \nabla \nabla \int_{V'} \vec{j}^{\circ}(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV' + k_0^2 \cdot \int_{V'} \vec{j}^{\circ}(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV' \right). \quad (6)$$

Если все же использовать решение (4'') волнового уравнения для скалярного потенциала (3'') и применить уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения электрического заряда [22,23]

$$\nabla \vec{j}^{\circ} + i\omega \rho^{\circ} = 0, \quad (7)$$

то скалярный потенциал будет равен:

$$\varphi^{\circ} = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \int_{V'} \nabla' \vec{j}^{\circ}(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV'. \quad (8)$$

В итоге электрическое поле на основании формул (1), (4') и (8) примет следующее выражение:

$$\vec{E} = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \left( \nabla \int_{V'} \nabla' \vec{j}^{\circ}(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV' + k_0^2 \cdot \int_{V'} \vec{j}^{\circ}(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV' \right). \quad (9)$$

Заметим, что вывод формулы (9) является физически абсолютно строгим и не использует никаких «специальных» ограничений на функции распределения объемной плотности электрического тока и плотности заряда. Формулы (6) и (9) являются эквивалентными представлениями для электрического поля, создаваемого объемной плотностью электрического тока в свободном пространстве. Отличие между ними состоит в том, что в (9) дифференциальный оператор внесен под знак интеграла и воздействует на распределение объемной

плотности электрического тока. Известно также [24], что формула (6) может быть непосредственно преобразована в формулу (9) с помощью применения формулы Гаусса-Остроградского (теоремы о дивергенции) [25].

На основании изложенного становится понятным, почему для решения интегрального уравнения для идеально-проводящего тела вращения с помощью метода коллокации [1-3,5] применялась формула (6), а не применялась формула (9). Формула (9) стала применяться в работах [12,13] для тел вращения при введении по образующей треугольных базисных функций, дивергенция которых сводится к постоянным функциям. Впоследствии, формула (9) также стала применяться в методе решения задач для произвольного тела с локальными базисными функциями *RWG* [26].

## 2. Краткое описание метода интегральных уравнений электрического поля для тела вращения

Запишем интегральное уравнение электрического поля относительно неизвестного электрического тока на поверхности  $S$  идеально-проводящего тела (знак минус в левой части введен, чтобы действительные части собственных матричных импедансов были положительны)

$$-\vec{E}_\tau(\vec{J}^s)\Big|_S = \vec{E}_\tau^{nao}\Big|_S, \quad (10)$$

где  $\vec{E}_\tau^{nao}$  – тангенциальное электрическое поле падающей волны.

Будем рассматривать случай свободного пространства, когда диэлектрическая и магнитная проницаемости равны проницаемостям вакуума. Используем формулу (9), тогда напряженность электрического поля, создаваемая поверхностным электрическим током  $\vec{J}^s$ , равна

$$\vec{E}(\vec{J}^s) = \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \left( \nabla \int_{S'} \nabla' \vec{J}^s(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dS' + k_0^2 \int_{S'} \vec{J}^s(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dS' \right), \quad (11)$$

где  $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$  – скалярная функция Грина свободного пространства.

Поверхностный электрический ток формально представим в виде разложения по базисным функциям  $\vec{f}_q$  с неизвестными коэффициентами  $I_q$

$$\vec{J}^{\circ} = \sum_q I_q \vec{f}_q. \quad (12)$$

Для перехода к СЛАУ подставим разложение тока (12) в интегральное уравнение (10), выполним проецирование на комплексно-сопряженные базисные функции  $\vec{f}_p^*$ , в результате чего получим следующие матричные импедансы:

$$\begin{aligned} Z_{pq} &= - \int_S \vec{f}_p^* \vec{E}(\vec{f}_q) dS = \\ &= \frac{-1}{i\omega\epsilon_0} \left\{ k_0^2 \cdot \iint_{S S'} \vec{f}_p^*(r) \vec{f}_q(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dS' dS - \iint_{S S'} (\nabla \vec{f}_p^*(r)) (\nabla \vec{f}_q(\vec{r}')) G(\vec{r}, \vec{r}') dS' dS \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Выражение (13) формально справедливо для задачи рассеяния на произвольном идеально-проводящем теле. При выводе формулы (13) использовалось условие  $(\vec{n}, \vec{f}_p(\vec{r}))|_S = 0$ , т.е. скалярное произведение нормали  $\vec{n}$  на векторную базисную функцию обращается в нуль, что очевидно всегда выполняется для базисных функций на поверхности тела.

Для тела вращения используем следующее разложение поверхностного электрического тока по базисным функциям (здесь  $q=(l, k)$ , см. (12)):

$$\vec{J}^{\circ} = \sum_{l=-N}^{+N} \sum_{k=1}^M \left[ I_{lk}^t \vec{f}_{lk}^t(\vec{r}) + I_{lk}^{\varphi} \vec{f}_{lk}^{\varphi}(\vec{r}) \right], \quad (14)$$

где базисные функции берем отдельными для компонент тока вдоль образующей и по азимуту [12,13]

$$\begin{aligned} \vec{f}_{lk}^t(\vec{r}) &= f_k^t(t) e^{il\varphi} \cdot \vec{t}^0(\vec{r}), \\ \vec{f}_{lk}^{\varphi}(\vec{r}) &= f_k^{\varphi}(t) e^{il\varphi} \cdot \vec{\varphi}^0(\vec{r}), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\vec{t}^0(\vec{r})$  и  $\vec{\varphi}^0(\vec{r})$  – единичные вектора вдоль образующей и по азимуту соответственно,  $t$  – координата вдоль образующей,  $\varphi$  – азимутальная координата. Фактически осуществляется разложение неизвестных компонент

тока в ряды Фурье по азимутальной координате, а по образующей используются локальные базисные функции  $f_k^{t,\varphi}(t)$ .

В итоге матрица импедансов примет блочную структуру (матрица состоит из 4-х блоков). Отдельно получаем матричные импедансы для продольных и азимутальных компонент тока и смешанные импедансы

$$\hat{Z} = \begin{bmatrix} \hat{Z}^{tt} & \hat{Z}^{t\varphi} \\ \hat{Z}^{\varphi t} & \hat{Z}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Индексы базисных функций запишем в виде  $p=(n,m)$  для проецирующей функции и  $q=(l,k)$  для функции источника. На основании (13), (14) элементы блочной матрицы (16) можно записать в виде:

$$Z_{pq}^{\alpha\beta} = \frac{-1}{i\omega\epsilon_0} \cdot \left\{ \begin{array}{l} k_0^2 \cdot \int_{S_p} \int_{S_q} \vec{f}_p^{\alpha*}(r) \vec{f}_q^\beta(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dS' dS - \\ - \int_{S_p} \int_{S_q} (\nabla \vec{f}_p^{\alpha*}(r)) (\nabla' \vec{f}_q^\beta(\vec{r}')) G(\vec{r}, \vec{r}') dS' dS \end{array} \right\}, \quad (17)$$

где верхние индексы означают  $\alpha, \beta=(t, \varphi)$ .

При введении разложения (14) вектор-столбец правой части СЛАУ будет состоять из двух векторов- столбцов, имеющих размерность напряжения:

$$U^{na\delta} = \begin{pmatrix} U^t \\ U^\varphi \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где элементы векторов-столбцов рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} U_{nm}^t &= \int_S f_m^t(t) e^{-in\varphi} \cdot (\sin \gamma E_\rho^{na\delta} + \cos \gamma E_z^{na\delta}) dS, \\ U_{nm}^\varphi &= \int_S f_m^\varphi(t) e^{-in\varphi} \cdot E_\varphi^{na\delta} dS, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\gamma = \arccos(\vec{t}^0(\vec{r}) \cdot \vec{z}^0)$  – угол между единичным вектором вдоль образующей  $\vec{t}^0(\vec{r})$  и единичным вектором вдоль оси  $OZ$ , которая выбрана осью вращения.

Матричные импедансы (17) записываются в виде двойных интегралов вдоль образующей:

$$Z_{pq}^{tt} = \frac{iW_0}{k_0} \cdot 2\pi\delta_{nl} \iint_{t_m t_k} \left\{ k_0^2 \cdot (\rho(t) f_m^t(t)) (\rho(t') f_k^t(t')) \times \right. \\ \left. \times \left( \sin \gamma \sin \gamma' \cdot \frac{g_{n-1} + g_{n+1}}{2} + \cos \gamma \cos \gamma' \cdot g_n \right) - \frac{\partial(\rho(t) f_m^t(t))}{\partial t} \cdot \frac{\partial(\rho(t') f_k^t(t'))}{\partial t'} \cdot g_n \right\} dt' dt, \quad (20')$$

$$Z_{pq}^{t\varphi} = + \frac{W_0}{k_0} \cdot 2\pi\delta_{nl} \iint_{t_m t_k} \left\{ k_0^2 \cdot (\rho(t) f_m^t(t)) (\rho(t') f_k^\varphi(t')) \sin \gamma \cdot \frac{g_{n-1} - g_{n+1}}{2} + \right. \\ \left. + n \cdot \frac{\partial(f_m^t(t))}{\partial t} \cdot f_k^\varphi(t') \cdot g_n \right\} dt' dt, \quad (20'')$$

$$Z_{pq}^{\varphi t} = - \frac{W_0}{k_0} \cdot 2\pi\delta_{nl} \iint_{t_m t_k} \left\{ k_0^2 \cdot (\rho(t) f_m^\varphi(t)) (\rho(t') f_k^t(t')) \sin \gamma' \cdot \frac{g_{n-1} - g_{n+1}}{2} + \right. \\ \left. + n \cdot f_m^\varphi(t) \cdot \frac{\partial(\rho(t') f_k^t(t'))}{\partial t'} \cdot g_n \right\} dt' dt, \quad (20''')$$

$$Z_{pq}^{\varphi\varphi} = \frac{iW_0}{k_0} \cdot 2\pi\delta_{nl} \iint_{t_m t_k} f_m^\varphi(t) f_k^\varphi(t') \cdot \left\{ k_0^2 \cdot \rho(t) \rho(t') \cdot \frac{g_{n-1} + g_{n+1}}{2} - n^2 \cdot g_n \right\} dt' dt, \quad (20''''')$$

где коэффициенты разложения скалярной функции Грина в ряд Фурье равны:

$$g_n = \int_{\psi=0}^{2\pi} e^{in\psi} G(\cos\psi) d\psi = \int_{\psi=0}^{2\pi} e^{in\psi} \cdot \frac{e^{-ik_0 \sqrt{(\rho-\rho')^2 + (z-z')^2 + 2\rho\rho'(1-\cos\psi)}}}{4\pi \sqrt{(\rho-\rho')^2 + (z-z')^2 + 2\rho\rho'(1-\cos\psi)}} d\psi, \quad (21)$$

$\rho(t)$  и  $\rho(t')$  – цилиндрические радиусы для точек наблюдения и источника соответственно,  $W_0=120\pi$  Ом – волновой импеданс свободного пространства. Символы Кронекера  $\delta_{nl}$  перед интегралами по образующей в (20) означают, что ненулевыми являются только матричные импедансы при совпадении азимутальных индексов базисной и проецирующей функций ( $n=l$ ). Таким образом, получаем отдельные СЛАУ для каждого азимутального индекса базисных функций, решая которые, находим распределения токов вдоль образующей для базисных функций каждого азимутального индекса. Например, для осесимметричного возбуждения тела вращения (например, расположенным вдоль оси диполем) достаточно решать задачу только для введения базисных

функций с  $n = 0$ , для симметричного возбуждения тела вращения волной с линейной поляризацией достаточно решать задачу только для введения базисных функций с гармониками  $n = -1$  и  $n = +1$ .

Для удобства вычислений в [12,13] базисные функции по образующей были записаны с весом (треугольные функции делятся на цилиндрический радиус):

$$\begin{aligned} f_m^t(t) &= \frac{T_m(t)}{\rho(t)}, \\ f_m^\varphi(t) &= \frac{\phi_m(t)}{\rho(t)}, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $T_m(t)$ ,  $\phi_m(t)$  – стандартные одномерные локальные базисные функции (системы пересекающихся треугольных функций), для разных компонент тока специально вводим разные обозначения для треугольных функций. Для задания системы треугольных функций на теле вращения вводится сетка вдоль образующей, треугольная базисная функция задается на двух сегментах сетки, как показано на рисунке 1 для функции  $T_m(t)$ , может быть задана половинка функции на одном сегменте; соседние базисные функции имеют один общий сегмент (пересекаются). Для иллюстрации на рисунке 2 показаны производные треугольных базисных функций.

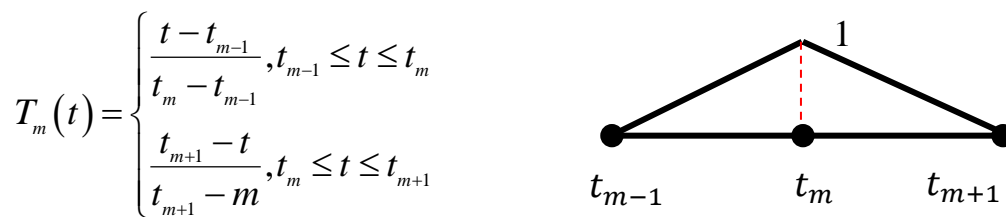


Рис. 1. Треугольная базисная функция вдоль образующей.

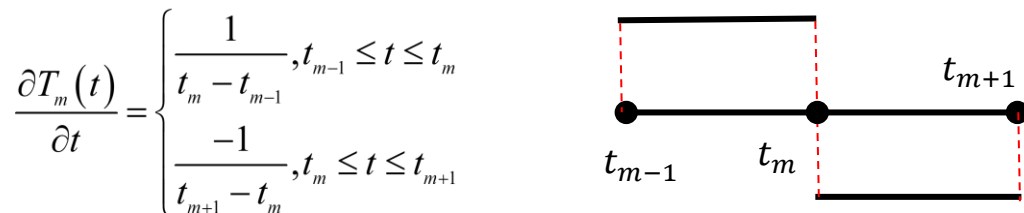


Рис. 2. Производная треугольной базисной функции вдоль образующей.

При использовании формул (22) представления (20) для элементов матричных импедансов примут следующий более компактный вид:

$$Z_{pq}^{ii} = \frac{iW_0}{k_0} \cdot 2\pi\delta_{nl} \iint_{t_m t_k} \left\{ k_0^2 \cdot T_m(t) T_k(t') \left( \sin \gamma \sin \gamma' \cdot \frac{g_{n-1} + g_{n+1}}{2} + \cos \gamma \cos \gamma' \cdot g_n \right) - \frac{\partial T_m(t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial T_k(t')}{\partial t'} \cdot g_n \right\} dt' dt, \quad (23')$$

$$Z_{pq}^{i\varphi} = + \frac{W_0}{k_0} \cdot 2\pi\delta_{nl} \iint_{t_m t_k} \left\{ k_0^2 \cdot T_m(t) \phi_k(t') \sin \gamma \cdot \frac{g_{n-1} - g_{n+1}}{2} + n \cdot \frac{\partial T_m(t)}{\partial t} \cdot \frac{\phi_k(t')}{\rho(t')} \cdot g_n \right\} dt' dt, \quad (23'')$$

$$Z_{pq}^{\varphi i} = - \frac{W_0}{k_0} \cdot 2\pi\delta_{nl} \iint_{t_m t_k} \left\{ k_0^2 \cdot \phi_m(t) T_k(t') \sin \gamma' \cdot \frac{g_{n-1} - g_{n+1}}{2} + n \cdot \frac{\phi_m(t)}{\rho(t)} \cdot \frac{\partial T_k(t')}{\partial t'} \cdot g_n \right\} dt' dt, \quad (23''')$$

$$Z_{pq}^{\varphi\varphi} = \frac{iW_0}{k_0} \cdot 2\pi\delta_{nl} \iint_{t_m t_k} \phi_m(t) \phi_k(t') \cdot \left\{ k_0^2 \cdot \frac{g_{n-1} + g_{n+1}}{2} - \frac{n^2}{\rho(t)\rho(t')} \cdot g_n \right\} dt' dt. \quad (23''''')$$

Таким образом, смысл введения весовых функций в (22) состоял в том, чтобы в (23) упростились подынтегральные выражения в сравнении с (20), хотя это не является обязательным.

Проанализируем свойства матричных импедансов (23). Для нулевой гармоники  $n = 0$  получаем  $Z_{pq}^{i\varphi} = Z_{pq}^{\varphi i} = 0$ , в результате чего СЛАУ распадается на две независимые системы уравнений, для продольных токов и для азимутальных токов (в (16) остаются только диагональные блоки). Для  $n \neq 0$  продольные и азимутальные токи связаны между собой.

Все матричные импедансы (23) представляют собой двойные интегралы по образующей. Формально двойные интегралы заданы на криволинейных образующих. При расчете тела вращения целесообразно заменить кривую вдоль образующей системой прямых отрезков (выполнить сегментацию) [12-15].

Анализ подынтегральных функций в (23) показывает, что в них входят треугольные базисные функции и их производные, цилиндрические радиусы  $\rho(t')$  и  $\rho(t)$ ,  $g_n$  – коэффициенты разложения скалярной функции Грина в ряд Фурье (21). Поэтому главная сложность алгоритма состоит в расчете  $g_n$  при разных положениях точки источника и точки наблюдения, а затем в численном расчете двойных интегралов.

В случае, когда в (23) рассчитываются взаимные импедансы между двумя базисными функциями, не имеющими общих сегментов, подынтегральные функции не имеют особенностей, поэтому для вычисления двойных интегралов используют квадратурные формулы Гаусса-Лежандра [12-15].

Более сложная ситуация возникает при расчете собственных импедансов и взаимных импедансов между соседними базисными функциями (пересекающимися), имеющими общий сегмент вдоль образующей. Здесь функции  $g_n$  имеют особенности при совпадении точки источника и точки наблюдения, поэтому и подынтегральные функции в целом имеют особенности; интегрировать в лоб с помощью квадратурных формул нельзя. Анализ выражений (23) показывает, что особенность имеет место в функции  $g_n$  и в комбинации  $\frac{g_{n-1} + g_{n+1}}{2}$ , но исключается за счет вычитания в комбинации  $\frac{g_{n-1} - g_{n+1}}{2}$ . Как было уже указано во введении, в [14,15] был предложен эффективный метод расчета функций  $g_n$  с помощью выделения сингулярного члена, что позволило, по оценкам авторов [15], на порядок повысить эффективность алгоритмов для больших тел вращения. Для этого коэффициенты разложения скалярной функции Грина в ряд Фурье (21) были тождественно записаны в виде суммы двух интегралов:

$$g_n = \int_{\psi=0}^{2\pi} e^{in\psi} \frac{e^{-ik_0R}}{4\pi R} d\psi = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\psi=0}^{\pi} \cos(n\psi) \left( \frac{e^{-ik_0R}}{R} - \frac{1}{R} \right) d\psi + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\psi=0}^{\pi} \frac{\cos(n\psi)}{R} d\psi, \quad (24)$$

где в первом интеграле записана разность скалярной функции Грина и статического члена, а во втором интеграле – только статический член. Обозначим:

$$g_n^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \cos(n\psi) \frac{e^{-ik_0R} - 1}{R} d\psi, \quad (25)$$

$$g_n^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \frac{\cos(n\psi)}{R} d\psi. \quad (26)$$

В первом интеграле  $g_n^{(1)}$  (25) подынтегральная функция не имеет особенности при  $R = 0$ , для него используется обычный метод вычисления, а второй интеграл  $g_n^{(2)}$  (26) вычислялся аналитически через полные эллиптические интегралы [25].

Удобно воспользоваться результатами статьи [18], в которой получено:

$$g_n^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2(-1)^n}{R_2} \cdot I_n(w), \quad (27)$$

где  $w = \frac{4\rho\rho'}{R_2^2}$ ,  $R_2 = \sqrt{(\rho + \rho')^2 + (z - z')^2}$ , а  $I_n(w)$  – специально введенная в [18]

функция (это не есть модифицированная функция Бесселя, хотя имеет такое же обозначение), равная интегралу:

$$I_n(w) = \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2nx)}{\sqrt{1 - w \cdot \sin^2 x}} dx. \quad (28)$$

Для вычисления этой функции при разных индексах в [18] была выведена рекуррентная формула:

$$I_{n+1}(w) = \frac{1}{2n+1} \cdot \left[ 4n \frac{w-2}{w} I_n(w) - (2n-1) I_{n-1}(w) \right]. \quad (29)$$

Начальные члены рекуррентной формулы равны:

$$I_0(w) = \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - w \cdot \sin^2 x}} = K(\sqrt{w}), \quad (30')$$

$$I_1(w) = \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{1 - w \cdot \sin^2 x}} dx = \frac{2 \cdot E(\sqrt{w}) + (w-2)K(\sqrt{w})}{w}, \quad (30'')$$

где  $K(m)$  и  $E(m)$  – полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода соответственно, равные [25]:

$$K(m) = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \cdot \sin^2 \theta}}, \quad (31')$$

$$E(m) = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m^2 \cdot \sin^2 \phi} \cdot d\theta. \quad (31'')$$

Полный эллиптический интеграл 1-го рода  $K(m)$  имеет логарифмическую особенность при  $m \rightarrow 1$  [25]:

$$K(m) \Big|_{m \rightarrow 1} \approx \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1 - m^2}. \quad (32)$$

Данная ситуация возникает для  $K(\sqrt{w})$  в (30) при  $w \rightarrow 1$ , т.е. стремлении точки наблюдения к точке источника, когда  $t \rightarrow t'$  ( $\rho \rightarrow \rho'$  и  $z \rightarrow z'$ ):

$$\begin{aligned} K(\sqrt{w}) &= K \left( \sqrt{\frac{4\rho\rho'}{R_2^2}} \right) \Big|_{t \rightarrow t'} \approx \frac{1}{2} \ln \frac{16 \cdot ((\rho + \rho')^2 + (z - z')^2)}{(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2} = \\ &= \ln 4 + \ln \left( \sqrt{(\rho + \rho')^2 + (z - z')^2} \right) - \ln \left( \sqrt{(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Функция  $E(m)$  не имеет особенности при  $m \rightarrow 1$  [25]. Поэтому сингулярность  $I_n(w)$  (28) при  $w \rightarrow 1$  определяется только функцией  $K(\sqrt{w})$  (33), имеющей логарифмическую особенность в члене  $\ln \left( \sqrt{(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2} \right)$ .

На основании (29) и (30) можно получить, что

$$I_n(w) \Big|_{w \rightarrow 1} \approx (-1)^n K(\sqrt{w}) \Big|_{w \rightarrow 1}. \quad (34)$$

В итоге, при  $w \rightarrow 1$  получаем сингулярный член (см. формулы (27) и (34)):

$$g_n^{(2)}(w) \Big|_{w \rightarrow 1} \approx \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{R_2} \cdot K(\sqrt{w}) \Big|_{w \rightarrow 1} \approx -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{R_2} \cdot \ln R_1, \quad (35)$$

$$R_1 = \sqrt{(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2}. \quad (36)$$

Таким образом, в функциях  $g_n^{(2)}$  имеется логарифмическая особенность (35), которая создает трудности расчета двойных интегралов в матричных импедансах. Для интегрирования в [15] применено еще одно выделение сингулярного члена, теперь в функции  $g_n^{(2)}$ , для чего приближенно полагалось,

что  $R_2|_{w \rightarrow 1} = \sqrt{(\rho + \rho')^2 + (z - z')^2} \Big|_{w \rightarrow 1} = 2\rho$  [15], где  $\rho = const$  на сегменте (брался радиус центра сегмента), тогда записывали:

$$g_n^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left( \frac{2}{R_2} \cdot (-1)^n I_n(w) + \frac{1}{\rho} \cdot \ln R_1 \right) - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \ln R_1. \quad (37)$$

Таким образом, для вычислений использовали (см. (24)-(26) и (37)):

$$g_n = g_n^{(1)} + \tilde{g}_n^{(2)} + g_{особ}, \quad (38)$$

где

$$\tilde{g}_n^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left( \frac{2}{R_2} \cdot (-1)^n I_n(w) + \frac{1}{\rho} \cdot \ln R_1 \right), \quad (39)$$

$$g_{особ} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \ln R_1. \quad (40)$$

На основании (38) матричные импедансы вычислялись в виде сумм трех слагаемых:

$$Z_{pq}^{\alpha\beta} = Z_{pq}^{\alpha\beta(1)} + \tilde{Z}_{pq}^{\alpha\beta(2)} + Z_{pq,особ}^{\alpha\beta}, \quad (41)$$

где  $Z_{pq}^{\alpha\beta(1)}$  и  $\tilde{Z}_{pq}^{\alpha\beta(2)}$  рассчитывались по формулам (23) при подстановке в них вместо  $g_n$  соответственно  $g_n^{(1)}$  и  $\tilde{g}_n^{(2)}$ . При этом подынтегральные функции в двойных интегралах не имели особенностей, поэтому для их вычисления применяли квадратурные формулы Гаусса-Лежандра [12-15].

Матричные импедансы  $Z_{pq,особ}^{\alpha\beta}$  в (41) рассчитывались по формулам (23) при подстановке в них вместо  $g_n$  члена с особенностью  $g_{особ}$  (40); для вычисления двойных интегралов использовалось аналитическое интегрирование. Для этого при расчете тела вращения кривая линия вдоль образующей заменялась системой прямых отрезков (выполнялась сегментация). При совпадении сегментов базисной функции источника и проецирующей функции получаем:

$$R_1 = \sqrt{(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2} = |t - t'|. \quad (42)$$

Для интегралов с особенностью в [15] было применено приближение  $\rho(t') \approx \rho_0$ ,  $\rho(t) \approx \rho_0$  на сегментах, тогда данные интегралы были равны:

$$Z''_{pq,особ} \approx -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho_0} \int_{t_k^{(\alpha)}} \int_{t_k^{(\alpha)}} \left\{ k_0^2 \cdot T_m(t) T_k(t') - \frac{\partial T_m(t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial T_k(t')}{\partial t'} \right\} \ln|t-t'| dt' dt, \quad (43')$$

$$Z^{i\varphi}_{pq,особ} \approx -\frac{n}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho_0^2} \cdot \frac{\partial T_m}{\partial t} \int_{t_k^{(\alpha)}} \int_{t_k^{(\alpha)}} \phi_k(t') \ln|t-t'| dt' dt, \quad (43'')$$

$$Z^{\varphi t}_{pq,особ} \approx -\frac{n}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho_0^2} \cdot \frac{\partial T_k}{\partial t'} \int_{t_k^{(\alpha)}} \phi_m(t) \int_{t_k^{(\alpha)}} \ln|t-t'| dt' dt, \quad (43''')$$

$$Z^{\varphi\varphi}_{pq,особ} \approx -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho_0} \cdot \left\{ k_0^2 - \frac{n^2}{\rho_0^2} \right\} \int_{t_k^{(\alpha)}} \phi_m(t) \int_{t_k^{(\alpha)}} \phi_k(t') \ln|t-t'| dt' dt. \quad (43''''')$$

Таким образом, в (43) была выделена логарифмическая особенность, удобная для интегрирования. Двойные интегралы в (43) были вычислены аналитически [15].

В качестве тестовой задачи с использованием описанного алгоритма [12-15] был проведен расчет рассеяния плоской волны линейной поляризации на бесконечно-тонком идеально-проводящем круглом диске диаметром  $5\lambda$ . Были рассчитаны распределения поверхностного электрического тока вдоль образующей данного тела вращения, в данном случае по радиусу, показанные на рисунке 3. Для азимутальной компоненты тока в базис была добавлена половинка треугольной функции на краю диска, чтобы лучше аппроксимировать граничное условие Мейкснера на острой кромке. На оси диска дополнительных половинок треугольных базисных функций не добавлялось, т.к. при  $\rho = 0$  базисные функции (22) уже имеют конечные значения. Расчет был проведен с шагом сетки  $0,05\lambda$  вдоль образующей.

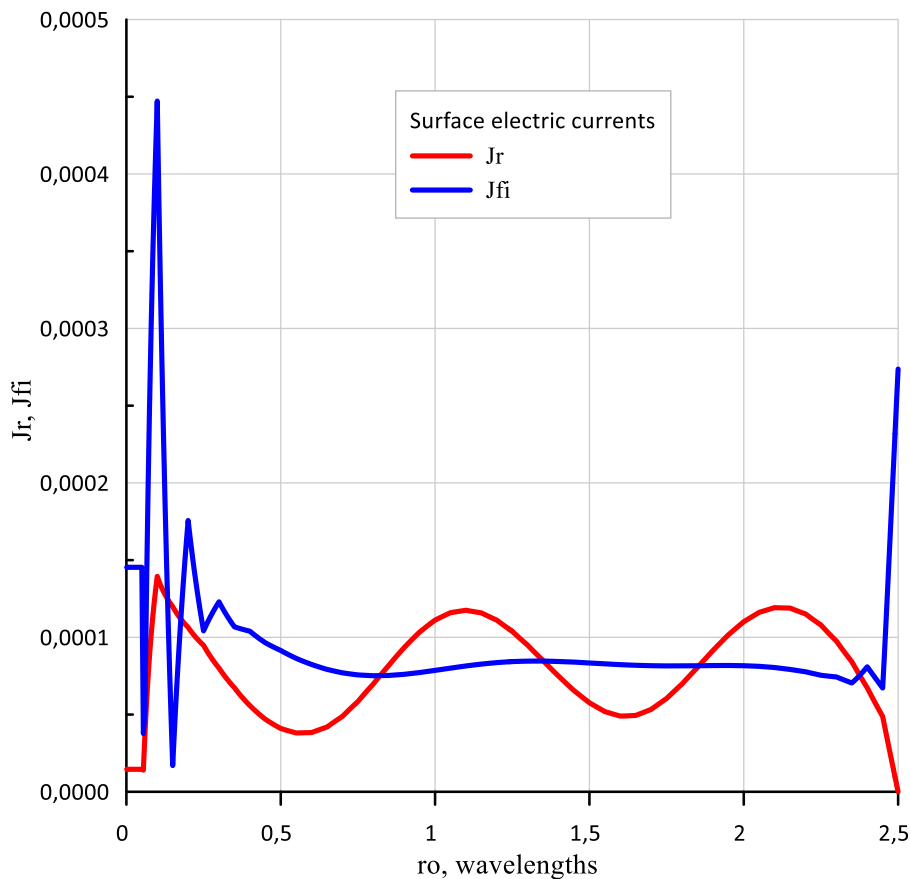


Рис. 3. Распределения компонент электрического тока на круглом диске  $\text{Ø } 5\lambda$ , расчет по методу [15].

Легко видеть на рисунке 3, что на краю диска для радиуса  $\rho = 2,5\lambda$  радиальная компонента тока  $J_r^\vartheta$  обращается в нуль, а азимутальная компонента тока  $J_\phi^\vartheta$  имеет острый максимум, что качественно соответствует граничным условиям на ребре. В то же время, вблизи оси тела вращения при  $\rho \leq 0,25\lambda$  в распределениях компонент тока наблюдаются «нефизические» пульсации.

Предположительная причина пульсаций состоит в недостаточно точном вычислении матричных импедансов по формулам (43) из-за использования приближений  $\rho(t') \approx \rho_0$ ,  $\rho(t) \approx \rho_0$  на сегментах. Следует заметить, что обнаруженные пульсации токов аналогичны пульсациям при эффекте Гиббса и не оказывают большого влияния на диаграмму рассеянного поля. Тем не менее, корректный алгоритм расчета должен исключать подобного вида неточности, распределения поверхностных токов должны соответствовать очевидному требованию равенства компонент тока на оси  $J_r^\vartheta(0) = J_\phi^\vartheta(0)$ .

### 3. Метод вычисления двойного интеграла с логарифмической особенностью при расчете матричных импедансов

Для решения данной проблемы может быть применен метод статьи [27], где рассмотрено вычисление двумерных интегралов с логарифмической особенностью следующего вида:

$$\iint_{t, t'} f(t, t') \ln|t - t'| dt dt', \quad (44)$$

где  $f(t, t')$  – двумерная гладкая функция (функция плотности), области интегрирования по  $t$  и  $t'$  совпадают.

Для функции плотности в [27] использовалась кусочно-постоянная аппроксимация на области интегрирования:

$$f(t, t') \approx \sum_{n=-k}^{+k} \sum_{m=-k}^{+k} f(t_n, t_m) \cdot \theta_{nm}(t, t'), \quad (45)$$

где  $\theta_{nm}(t, t') = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \left[ t_n - \frac{h}{2}, t_n + \frac{h}{2} \right], t' \in \left[ t_m - \frac{h}{2}, t_m + \frac{h}{2} \right], \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$   $h$  – шаг сетки

аппроксимации.

Подставляем представления (45) в (44) и почленно интегрируем, получаем:

$$\iint_{t, t'} f(t, t') \ln|t - t'| dt dt' \approx \sum_{n=-k}^{+k} \sum_{m=-k}^{+k} f(t_n, t_m) \cdot \iint_{t, t'} \theta_{nm}(t, t') \ln|t - t'| dt dt', \quad (46)$$

где

$$\iint_{t, t'} \theta_{n,m}(t, t') \ln|t - t'| dt dt' = \int_{t=t_n-\frac{h}{2}}^{t_n+\frac{h}{2}} \int_{t'=t_m-\frac{h}{2}}^{t_m+\frac{h}{2}} \ln|t - t'| dt dt'. \quad (47)$$

Интеграл от логарифма модуля вычисляем аналитически. Универсальная формула для интеграла с произвольными пределами интегрирования по разным координатам имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \ln|x-y| dx dy = & -(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) - \\
 & - \frac{(x_2 - y_2)^2}{2} \cdot \left( \ln|x_2 - y_2| - \frac{1}{2} \right) + \\
 & + \frac{(x_2 - y_1)^2}{2} \cdot \left( \ln|x_2 - y_1| - \frac{1}{2} \right) + \\
 & + \frac{(x_1 - y_2)^2}{2} \cdot \left( \ln|x_1 - y_2| - \frac{1}{2} \right) - \\
 & - \frac{(x_1 - y_1)^2}{2} \cdot \left( \ln|x_1 - y_1| - \frac{1}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{48}$$

Если отрезки интегрирования совпадают, то модули в формуле (48) могут быть раскрыты, а формула упрощается:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} \ln|x-y| dx dy = (x_2 - x_1)^2 \cdot \left( \ln(x_2 - x_1) - \frac{3}{2} \right). \tag{49}$$

Для нашего случая составляющие интегралов (23) с логарифмической особенностью (см. (41)) имеют интегрирование по совпадающему сегменту, тогда записываем их в виде:

$$\begin{aligned}
 Z_{pq,особ}^{tt} &= -\frac{iW_0}{k_0} \cdot \delta_{nl} \cdot \int_{t=t_1}^{t_2} \int_{t'=t_1}^{t_2} f_{tt}(t, t') \ln|t-t'| dt dt', \\
 Z_{pq,особ}^{t\varphi} &= -\frac{W_0}{k_0} \cdot \delta_{nl} \cdot \int_{t=t_1}^{t_2} \int_{t'=t_1}^{t_2} f_{t\varphi}(t, t') \ln|t-t'| dt dt', \\
 Z_{pq,особ}^{\varphi t} &= +\frac{W_0}{k_0} \cdot \delta_{nl} \cdot \int_{t=t_1}^{t_2} \int_{t'=t_1}^{t_2} f_{\varphi t}(t, t') \ln|t-t'| dt dt', \\
 Z_{pq,особ}^{\varphi\varphi} &= -\frac{iW_0}{k_0} \cdot \delta_{nl} \cdot \int_{t=t_1}^{t_2} \int_{t'=t_1}^{t_2} f_{\varphi\varphi}(t, t') \ln|t-t'| dt dt',
 \end{aligned} \tag{50}$$

где введены обозначения для функций плотности:

$$\begin{aligned}
 f_{tt}(t, t') &= \left\{ k_0^2 \cdot T_m(t) T_k(t') - \frac{\partial T_m(t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial T_k(t')}{\partial t'} \right\} \cdot \frac{2}{R_2}, \\
 f_{t\varphi}(t, t') &= \left\{ n \cdot \frac{\partial T_m(t)}{\partial t} \cdot \frac{\phi_k(t')}{\rho(t')} \right\} \cdot \frac{2}{R_2},
 \end{aligned}$$

$$f_{\varphi t}(t, t') = \left\{ n \cdot \frac{\phi_m(t)}{\rho(t)} \cdot \frac{\partial T_k(t')}{\partial t'} \right\} \cdot \frac{2}{R_2},$$

$$f_{\varphi\varphi}(t, t') = \left\{ \phi_m(t) \phi_k(t') \left( k_0^2 - \frac{n^2}{\rho(t)\rho(t')} \right) \right\} \cdot \frac{2}{R_2}. \quad (51)$$

Данные функции плотности (51) записаны точно, без использования приближений, как в (43). Способ применения метода интегрирования (формулы (44)-(49)) для интересующих нас интегралов (50) очевиден. Таким образом, метод статьи [27] позволяет вычислить двойной интеграл с логарифмической особенностью с более высокой точностью, которая регулируется числом точек сетки аппроксимации функции плотности на сегменте в (45), практически достаточно  $5 \div 10$  точек.

Для проверки метода было рассчитано рассеяние плоской волны линейной поляризации на том же бесконечно-тонком идеально-проводящем круглом диске диаметром  $5\lambda$  (см. рисунок 3). На рисунке 4 показаны распределения поверхностного электрического тока вдоль радиуса диска при использовании метода данного раздела. Для азимутальной компоненты тока в базис также была добавлена половинка треугольной функции на краю диска.

Легко видеть, что «нефизические» пульсации вблизи оси диска исчезли, распределения поверхностных токов соответствуют требованию равенства компонент тока на оси  $J_\rho^z(0) = J_\varphi^z(0)$ . Распределение компоненты электрического тока  $J_\rho^z$  (в  $E$ -плоскости) демонстрирует «типичные» пульсации и обращение в нуль на краю, распределение  $J_\varphi^z$  (в  $H$ -плоскости) более равномерно, но на краю демонстрирует острый максимум для удовлетворения условию на ребре. Расчеты показывают, что если шаг сетки вдоль образующей еще уменьшить, то значение максимума на краю будет возрастать.

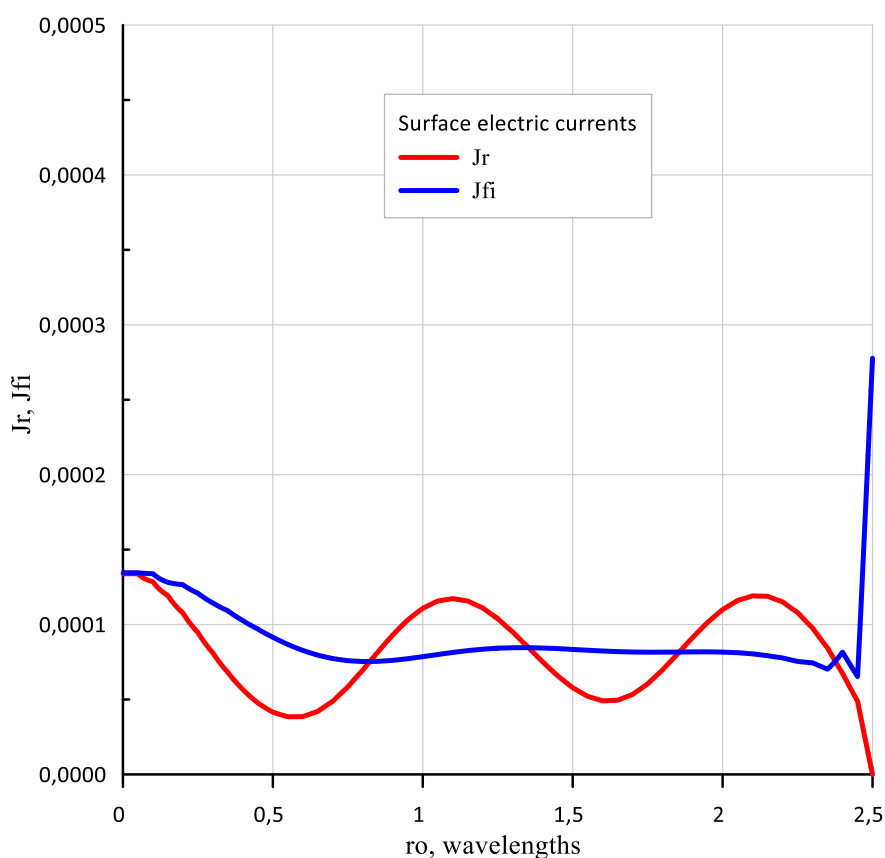


Рис. 4. Распределения компонент электрического тока на круглом диске  $\text{Ø } 5\lambda$ , расчет по методу данной статьи.

#### 4. Результаты расчетов антенны Кассегрена

С помощью метода интегрального уравнения электрического поля для тел вращения проведем расчет классической антенны Кассегрена, геометрия которой показана на рисунке 5 (ранее рассчитывалась в [28,29]). Параболический рефлектор имеет диаметр  $D = 5000$  мм, фокусное расстояние равно  $F = 2000$  мм ( $F/D = 0,4$ ), а гиперболический контр-рефлектор имеет диаметр  $D_{\text{кр}} = 750$  мм, эксцентриситет  $\varepsilon = 2,1$  и расстояние между фокусами гиперболы  $2C_{\text{кр}} = 987$  мм (рисунок 5). В данной зеркальной системе угол облучения края контр-рефлектора равен  $\theta_{\text{макс}} = 25^\circ$ , угол облучения края параболического рефлектора равен  $\psi_{\text{макс}} = 64^\circ$ . Правый фокус контр-рефлектора совмещен с фокусом рефлектора, первичный облучатель установлен в левый фокус контр-рефлектора. В качестве первичного облучателя применим облучатель идеальной круговой поляризации с амплитудной ДН по полю:

$$F_{obl}(\theta) = \left( \cos \frac{\theta}{2} \right)^p, \quad (52)$$

где значение параметра примем равным  $p = 50$  для обеспечения уровня облучения края контр-рефлектора -10 дБ.

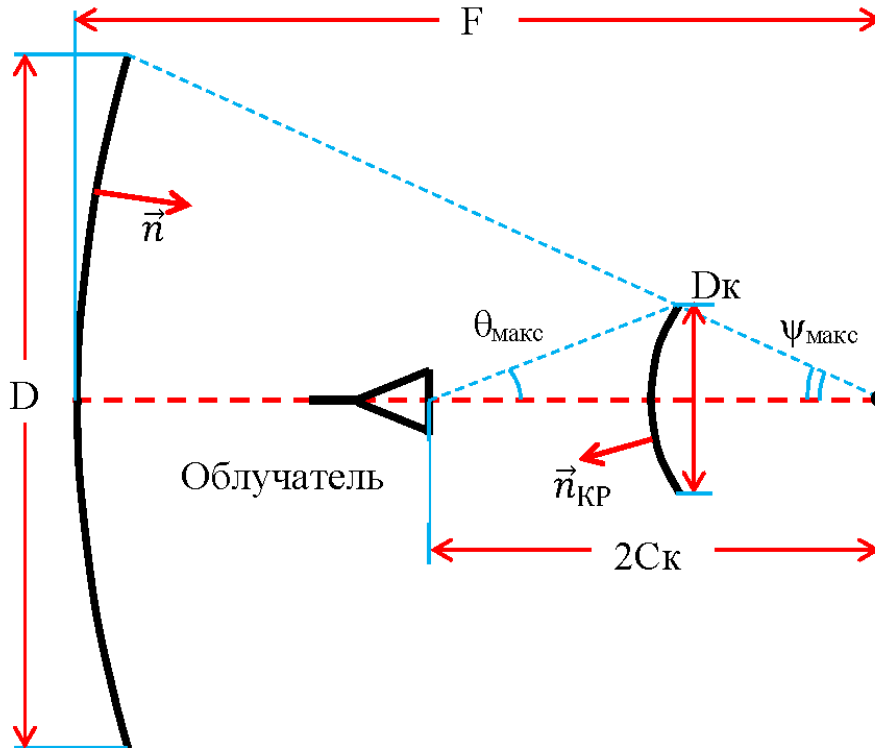


Рис. 5. Зеркальная система антенны Кассегрена.

Рассматриваемая модель двузеркальной антенны (рисунок 5) использует первичный облучатель, который не затеняет главное зеркало («виртуальный» первичный облучатель). Были проведены расчеты антенны с таким облучателем с помощью трех разных методов: метода физической оптики (ФО) с учетом многократных переотражений ( $N_{refl} = 10$ ) [28], метода интегрального уравнения электрического поля с локальными функциями *RWG* (далее – *EFIE-MLFMA*) [28] и метода интегрального уравнения электрического поля для тела вращения (далее – *EFIE-BoR*). В таблице 1 приведены результаты расчета антенны Кассегрена на частоте 1,7 ГГц. На рисунке 6 показан расчетный КИП двузеркальной антенны в диапазоне частот от 1,4 до 1,9 ГГц (сравнение результатов расчета по методу ФО при  $N_{refl} = 10$  и по методу *EFIE-BoR*).

В таблице 2 приведены результаты расчета антенны Кассегрена на частоте 8,2 ГГц. Расчет по методу ФО на этой частоте был проведен с сеткой  $0,25\lambda$  при интегрировании по проекциям отражателей на поперечную плоскость [28], для этой сетки уже была достигнута сходимость результата. Расчет по методу *EFIE-MLFMA* на частоте 8,2 ГГц был проведен для относительно грубой сетки  $0,35\lambda$  из-за ограничений оперативной памяти.

Таблица 1. Результаты расчета антенны Кассегрена на частоте  $f = 1,7$  ГГц.

Метод расчета	ФО ( $N_{refl} = 10$ )	<i>EFIE-MLFMA-6</i>	<i>EFIE-BoR</i>
Шаг сетки в $\lambda$	0,1	0,1	0,1
Размер матрицы, $N$	-	191465	320
Оперативная память (RAM), ГБ	0,30	5,6	0,36
Время расчета, мин	0,85	20	0,5
КНД, дБ	35,68	35,67	35,49
КИП	0,466	0,466	0,447
УБЛ, дБ	-17,2	-17,2	-17,5

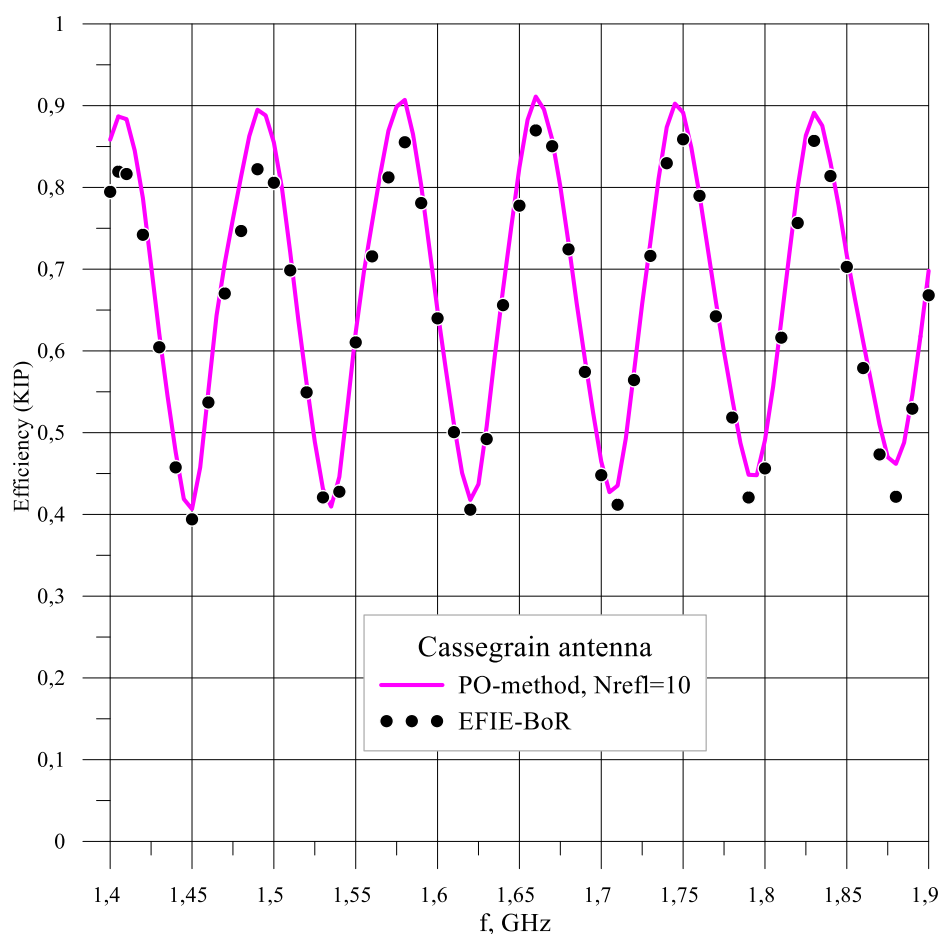


Рис. 6. Расчетный КИП в диапазоне частот от 1,4 до 1,9 ГГц (сравнение методов ФО и *EFIE-BoR*).

Таблица 2. Результаты расчета антенны Кассегрена на частоте  $f = 8,2$  ГГц.

Метод расчета	ФО ( $N_{refl} = 10$ )	<i>EFIE-MLFMA-7</i>	<i>EFIE-BoR</i>
Шаг сетки в $\lambda$	0,25	0,35	0,1
Размер матрицы, $N$	-	421276	1566
Оперативная память (RAM), ГБ	0,58	31,5	0,39
Время расчета, мин	9,4	80	8,7
КНД, дБ	51,23	51,37	51,17
КИП	0,719	0,743	0,709
УБЛ, дБ	-22,1	-22,6	-22,2

Из таблиц 1 и 2 следует, что результаты расчета с помощью трех разных методов достаточно близки, что является положительным тестом для предлагаемого в статье метода расчета *EFIE-BoR*.

Расчет по методу *EFIE-BoR* требует ресурсов оперативной памяти и затрат времени примерно одного порядка, что и метод ФО с учетом многократных переотражений при  $N_{refl} = 10$  [28].

В то же время, по сравнению с *EFIE-MLFMA*, расчет по методу *EFIE-BoR* требует оперативной памяти в  $\approx 15$  раз меньше на 1,7 ГГц и в  $\approx 80$  раз меньше на 8,2 ГГц, что связано с небольшим размером матрицы СЛАУ в методе *EFIE-BoR*. По времени расчета метод *EFIE-BoR* быстрее *EFIE-MLFMA* в  $\approx 40$  раз на частоте 1,7 ГГц и в  $\approx 9$  раз на частоте 8,2 ГГц.

Представляет интерес провести расчет антенны Кассегрена с реальным облучателем, затеняющим главное зеркало, участвующим в переотражениях между контр-рефлектором и главным зеркалом (также можно рассчитать однозеркальную антенну с реальным облучателем). Для этого в геометрию зеркальной системы нужно добавить конструкцию рупора. Такая электродинамическая задача может быть решена только методом интегральных уравнений (метод ФО здесь не работает, т.к. является приближенным методом для поверхностей с малой кривизной). Если зеркала и рупор облучателя являются телами вращения, то для решения электродинамической задачи подходит метод *EFIE-BoR*.

На рисунке 7 показана геометрия конструкции антенны для расчета на 1,7 ГГц (показаны образующие тел вращения для элементов зеркальной

системы), рефлектор и контр-рефлектор те же, что на рисунке 5; волноводный облучатель содержит конический рупор с раскрывом  $\varnothing 360 \text{ мм} \approx 2\lambda$  и регулярным волноводом  $\varnothing 166 \text{ мм}$  (длина конической части рупора  $L = 386 \text{ мм}$ , длина регулярного волновода  $L_{reg} = 240 \text{ мм}$ ). Раскрыв рупора совпадал с положением «виртуального» облучателя на рисунке 5. При проведении расчета по методу *EFIE-BoR* поверхностные электрические токи вводились на главном зеркале, контр-рефлекторе и на волноводном рупорном облучателе. Сторонние источники для возбуждения рупора были расположены внутри регулярного волновода выше закоротки.

Для проверки результатов расчета по методу *EFIE-BoR* для геометрии на рисунке 7 также был выполнен расчет в коммерческом пакете *CST Microwave Studio* [30], в который включены все последние достижения по итерационному решению СЛАУ в методе интегральных уравнений (*MLFMA*), в том числе параллельные вычисления. Заметим, что в *CST Microwave Studio* не предусмотрено решения по методу интегральных уравнений для тел вращения, реализован только общий метод с локальными базисными функциями *RWG*. В проект *CST Microwave Studio* были введены главное зеркало, контр-рефлектор и волноводный рупорный облучатель (толщина стенки рупора была взята равной 5 мм). Для возбуждения структуры в рупорном облучателе снизу был введен волноводный порт. Электрический размер главного зеркала на частоте расчета не очень большой (равен  $28,3\lambda$ ), поэтому возможно было получение решения за умеренное время.

На рисунке 8 показаны расчетные ДН на круговой поляризации на частоте 1,7 ГГц для геометрии на рисунке 7, полученные по методу *EFIE-BoR* и рассчитанные в *CST Microwave Studio*. Легко видеть, что при расчете с реальным рупором КНД повысился на  $\approx 0,5 \text{ дБ}$ , а УБЛ снизился на  $\approx 4,3 \text{ дБ}$ . В таблице 3 для сравнения даны результаты расчета в *CST Microwave Studio* и по предлагаемому в статье методу *EFIE-BoR*.

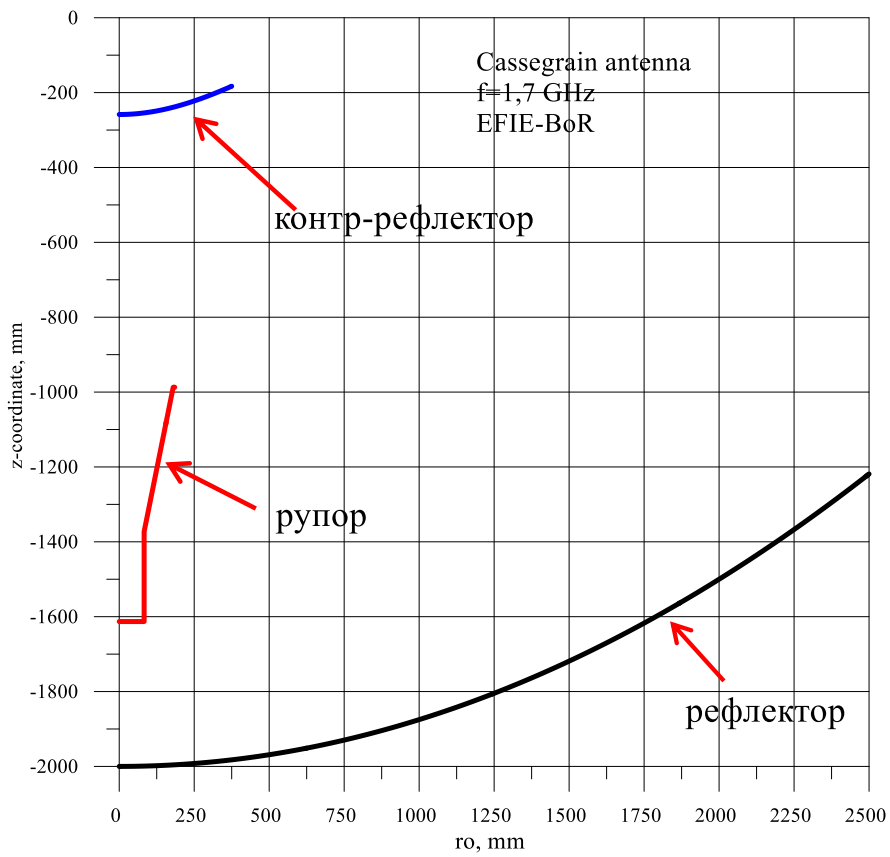


Рис. 7. Образующие элементы зеркальной системы антенны Кассегрена.

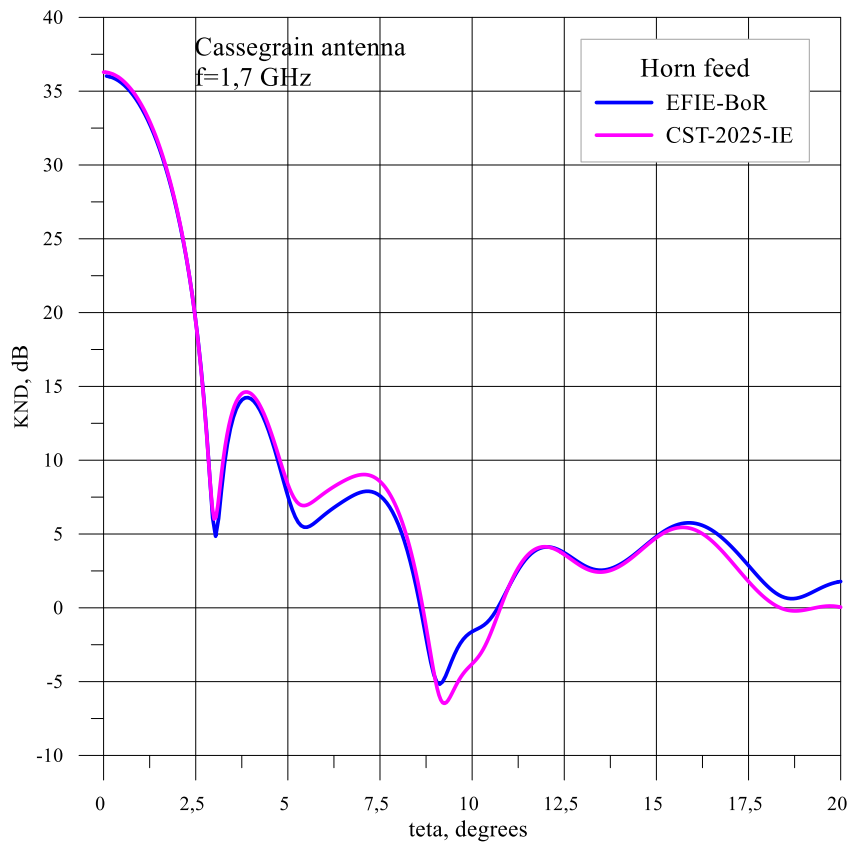


Рис. 8. Расчетные ДН по методу *EFIE-BoR* на частоте 1,7 ГГц (с рупорным облучателем).

Таблица 3. Результаты расчета антенны Кассегрена (рисунок 7)  
на частоте  $f = 1,7$  ГГц.

Метод расчета	<i>CST Microwave Studio-IE</i>	<i>EFIE-BoR</i>
Шаг сетки	10 cells/ $\lambda$	0,1 $\lambda$
Оперативная память (RAM), ГБ	10,7	0,4
Время расчета, мин	10	1,3
КНД, дБ	36,3	36,05
$\Delta\theta_{0,5}$ , градусы	2,4	2,4
УБЛ, дБ	-21,7	-21,8

Таким образом, расчет в коммерческой программе подтвердил количественно результаты расчета по методу *EFIE-BoR*. Расчет по методу *EFIE-BoR* выполнялся быстрее на порядок и потребовал на порядок меньше оперативной памяти. Опыт работы с пакетом *CST Microwave Studio* показывает, что в методе *IE* при большой размерности задачи получение решения не гарантировано, в определенных ситуациях решение СЛАУ не достигается. Поэтому расчет по разработанному методу *EFIE-BoR* для осесимметричных зеркальных систем является надежным и быстрым средством получения решения, может использоваться для оптимизации зеркальной антенны с электродинамическим учетом реального влияния конструкции облучателя.

## Заключение

Для расчета осесимметричной зеркальной антенны Кассегрена применено интегральное уравнение электрического поля для тела вращения, которое решается методом Галеркина. Для полноты описания в статье обсуждены два разных представления электрического поля, создаваемого сторонним электрическим током, дано краткое описание метода интегральных уравнений электрического поля для тела вращения. Для повышения точности численного решения интегрального уравнения предложен способ вычисления двойных интегралов с логарифмической особенностью, возникающих в элементах матрицы СЛАУ. Разработанный алгоритм расчета тел вращения использовался для анализа осесимметричной антенны Кассегрена большого электрического

размера, которая является важным классом антенн, для которых должно выполняться высокоточное моделирование.

Проведено сравнение метода интегрального уравнения электрического поля для тела вращения по скорости вычислений и требуемой памяти с методом интегральных уравнений электрического поля с локальными базисными функциями *RWG (EFIE-MLFMA)* и с методом физической оптики с учетом многократных переотражений. Показано, что метод интегрального уравнения электрического поля для тела вращения при расчете осесимметричной антенны Кассегрена дает высокую точность при малых затратах оперативной памяти компьютера, время вычислений с использованием предложенного метода сравнимо с временем вычислений по методу физической оптики с учетом многократных переотражений. По сравнению с методом *EFIE-MLFMA* метод интегрального уравнения для тела вращения быстрее в  $\approx 9\div 40$  раз и требует меньше оперативной памяти в  $\approx 15\div 80$  раз (в зависимости от частоты расчета).

С помощью метода интегрального уравнения электрического поля для тела вращения был проведен расчет антенны Кассегрена для геометрии с реальным рупором, когда неизвестными в интегральном уравнении были токи на отражателях и на рупоре, что давало возможность автоматически учесть затенения от рупора. Результаты расчета на частоте 1,7 ГГц практически совпали с результатами расчета этой антенны в *CST Microwave Studio-IE*.

Расчет по методу интегрального уравнения электрического поля для тела вращения является надежным и быстрым средством получения решения для осесимметричных зеркальных систем, может использоваться для оптимизации зеркальной антенны с электродинамическим учетом реального влияния конструкции облучателя.

## Литература

1. Васильев Е.Н. Возбуждение гладкого идеально проводящего тела вращения // Изв. вузов СССР. Сер. Радиофизика. – 1959. – Т.2. – №4. – С.588-601.
2. Марков Г.Т., Васильев Е.Н. (ред.) Антенны баллистических ракет, спутников и космических станций. – М.: Дом техники. – Т.1. – 1960. – 335 с.
3. Васильев Е.Н. Возбуждение тел вращения. – М.: Радио и связь. – 1987. – 272 с.
4. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. – М.: Мир. – 1988. – 352 с.
5. Давыдов А.Г., Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях вращения. // ДАН СССР. – 1983. – Т.269. – №2. – С.329-333.
6. Давыдов А.Г., Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях произвольной формы. // ДАН СССР. – 1984. – Т.276. – №1. – С.96-100.
7. Захаров Е.В., Давыдов А.Г., Халеева И.В. Интегральные уравнения с ядрами типа Адамара в задачах дифракции. В кн.: Актуальные вопросы прикладной математики. – М.: Изд-во Московского университета. – 1989. – С.118-127.
8. Давыдов А.Г., Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Гиперсингулярные интегральные уравнения в вычислительной электродинамике. В кн.: Прикладная математика и информатика. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова. – МАКС Пресс. – 2001. – №9. – С.5-22.
9. Давыдов А.Г., Пименов Ю.В. Программный комплекс EDEM3D для исследования электродинамических характеристик идеально проводящих трехмерных объектов. // Электродинамика СВЧ и КВЧ. – 1999. – Т.7. – №2. – С.24-26.
10. Давыдов А.Г., Пименов Ю.В. Возможности программы ЭДЭМ для разработки устройств антенной техники. // Антенны. – 2006. – №12. – С.12-18.

11. Andreasen M. Scattering from bodies of revolution. // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. – 1965. – Vol.10. – No.2. – P.303-310. <https://doi.org/TAP.1965.1138406>
12. Mautz J., Harrington R. H-field, E-field, and combined field solutions for bodies of revolution. // Interim technical report. – RADC-TR-77-109. – 1977. – 45 p.
13. Mautz J., Harrington R. An improved E-field solution for a conducting body of revolution. // Interim technical report. – RADC-TR-80-194. – 1980. – 71 p.
14. Glisson A., Wilton D. Simple and efficient numerical techniques for treating bodies of revolution. // Technical report. – RADC-TR-79-22. – 1979. – 129 p.
15. Gedney S., Mittra R. The use of the FFT for the efficient solution of the problem of electromagnetic scattering by a body of revolution. // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. – 1990. – Vol.38. – No.3. – P.313-322. <https://doi.org/10.1109/8.52253>
16. Resende U., Moreira F., Pereira-Filho O. Efficient evaluation of singular integral equations in moment method analysis of bodies of revolution. // Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications. – 2007. – Vol.6. – No. 2. – P.373-391.
17. Gustaffson M. Accurate and efficient evaluation of modal Green's functions. // Journal of Electromagnetic Waves. – 2010. – Vol.24. – No.10. – P.1291-1301. <https://doi.org/10.1163/156939310791958752>
18. Vaessen J., van Beurden M., Tijhuis A. Accurate and efficient computation of the modal Greens function arising in the electric-field integral equation for a body of revolution. // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. – 2012. – Vol.60. – No.7. – P.3294-3304. <https://doi.org/10.1109/TAP.2012.2196911>

19. Epstein Ch., Greengard L., O'Neil M. A high-order wideband direct solver for electromagnetic scattering from bodies of revolution. // Journal of Computational Physics. – 2019. – Vol.387. – No.5. – P.205-229. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.02.041>
20. Garritano J., Kluger Y., Rokhlin V., Serkh K. On the efficient evaluation of the azimuthal Fourier components of the Green's function for Helmholtz's equation in cylindrical coordinates. // Journal of Computational Physics. – 2022. – Vol.471. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111585>
21. Meincke P., Jorgenson E. Efficient BoR method of moments for rotationally symmetric antenna systems with offset illumination. // IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI). – 06-11 July 2014. <https://doi.org/10.1109/APS.2014.6905059>
22. Марков Г.Т., Петров Б.М., Грудинская Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Сов. радио. – 1979. – 376 с.
23. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь. – 1983. – 296 с.
24. Gibson W. The method of moments in electromagnetics. – Chapman & Hall. – 2008. – 272 p.
25. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука. – 1977. – 831 с.
26. Rao S., Wilton D., Glisson A. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape. // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. – 1982. – Vol.30. No.3. – P.409-418. <https://doi.org/10.1109/TAP.1982.1142818>
27. Мелешко И., Ласый П., Довга Ю. Приближенный метод вычисления интегралов с логарифмической особенностью. // Наука и техника. – 2012. – №3. – С.47-50.
28. Лаврецкий Е.И., Чернышов В.С. Расчет двузеркальной антенны по методу физической оптики с учетом многократных переотражений. // Журнал радиоэлектроники. – 2022. – №1. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.1.5>

29. Лаврецкий Е.И., Чернышов В.С. Расчет двузеркальной антенны с учетом влияния опор строгим методом. // Журнал радиоэлектроники. – 2023. – № 6. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.6.6>
30. Курушин А.А. Проектирование СВЧ устройств в CST Studio Suite. – М.: СОЛОН-Пресс. – 2023. – 428 с.

**Для цитирования:**

Лаврецкий Е.И. Расчет осесимметричной зеркальной антенны с помощью метода интегральных уравнений для тел вращения // Журнал радиоэлектроники. – 2026. – № 5. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2026.5.7>