

УДК 621.396.67

## СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ ДВУМЕРНО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ ДВУХМОДОВЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

С. Е. Банков<sup>1</sup>, Г. Г. Грачев<sup>1</sup>, М. Д. Дупленкова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, <sup>2</sup>ОКБ МЭИ

Получена 28 октября 2011 г.

**Аннотация.** Рассмотрены собственные волны двумерно-периодической решетки связанных двухмодовых металлических волноводов квадратного сечения. Связь волноводов осуществляется через бесконечную вдоль продольной оси систему периодически расположенных прямоугольных отверстий, выполненных в стенках волноводов. Для волноводов с идеально проводящими и бесконечно тонкими стенками сформулирована граничная задача, которая сводится к системе интегральных уравнений относительно электрических полей в отверстиях. Система интегральных уравнений решается методом Галеркина, с помощью которого получено дисперсионное уравнение относительно постоянных распространения собственных волн. Исследуется их поведение в квазипериодическом режиме. Получено решение для собственных волн в рамках феноменологической теории связанных волн, учитывающее связь волн разной поляризации. Сравниваются результаты приближенного и электродинамического подходов. Определены параметры феноменологической модели.

**Ключевые слова:** связанные волноводы, теория связанных волн, решетка волноводов.

**Abstract.** Eigen modes of an infinite double periodical system of coupled metal waveguides are considered. Coupling between waveguides is produced by an infinite system of rectangular holes periodically placed along longitudinal axis. Boundary problem for waveguides with perfectly conducting and infinitely thin walls is formulated and reduced to a system of integral equations relatively electric fields in holes. The system is solved with help of Galerkin's technique that gives a dispersion

equation relatively eigen modes propagation constants. Their behavior in a quasi-periodical regime is investigated. Approximate solution for eigen modes is obtained with help of phenomenological coupled waves theory. This solution is compared with electromagnetic solution. Parameters of approximate model are determined.

**Keywords:** coupled waveguides, theory of coupled waves, waveguide array.

### **Постановка задачи**

Проблема создания решеток с секторными диаграммами направленности (ДН) представляет большой интерес для теории и техники антенн различного назначения. Важнейшей частью такой решетки является диаграммообразующая схема (ДОС), которая формирует на своих выходах амплитудно – фазовое распределение (АФР), необходимое для создания секторной ДН. Одним из перспективных применений устройств данного типа является их использование в качестве облучателей оптических систем многолучевых антенн. Под оптической системой мы понимаем зеркальную или линзовую систему, формирующую излучение с игольчатой ДН.

Весьма часто многолучевая антенна должна формировать в пространстве систему лучей, пересекающихся на высоком уровне близком к  $-3$  дБ от максимума ДН. В такой антенне ДОС должна иметь число входов, равное числу лучей. При возбуждении ДОС со стороны любого из ее входов она формирует в пространстве излучение с парциальной секторной ДН. Фазовые центры ДН, соответствующих разным входам ДОС смещены в пространстве. Благодаря этому смещению направление главного луча ДН, формируемой оптической системой также смещается.

Известно, что требование к уровню пересечения лучей многолучевой антенны приводит к необходимости формировать на выходах ДОС АФР, которые также пересекаются на высоком уровне [1]. Данную задачу весьма трудно решить, если каналы ДОС изолированы и при возбуждении одного из ее входов возбуждается лишь один из элементов решетки. Поэтому распространенным подходом является создание связи между каналами ДОС,

которая обеспечивает передачу энергии на группу элементов решетки от активного входа схемы.

Интересный подход к созданию ДОС предложен в работе [2], в которой для формирования АФР используется система распределенно связанных волноводов. Для создания такой ДОС хорошо подходят открытые линии передачи и волноводы с поверхностными волнами: диэлектрические волноводы, спиральные линии, полосковые и щелевые линии передачи. Различные модификации одномерных и двумерных ДОС на волноводах с распределенной связью рассмотрены в работах [3 – 5]. Отметим, что в указанных работах анализировались устройства на основе одномодовых линий передачи.

Развитием ДОС на связанных волноводах является ДОС на двухмодовых волноводах, которая потенциально может работать с волнами двух ортогональных поляризации. В данной работе решается лишь часть задач анализа двумерной ДОС на связанных металлических волноводах квадратного сечения. В этой части исследуются собственные волны двумерно – периодической системы бесконечных связанных волноводов. Полный анализ ДОС должен включать также решение задачи о возбуждении волноводной системы конечной длины и излучении волн из нее в свободное пространство.

Структуры аналогичные системе связанных металлических волноводов рассматривались в работе [4] в рамках феноменологической теории связанных волн. Ее достоинством является возможность получить простое и физически наглядное описание явлений, происходящих в сложной волноведущей системе. Однако, при этом в данной теории возникают параметры, например линейный коэффициент связи (ЛКС), которые невозможно определить, исходя из феноменологической модели. Они должны находиться из более строгого решения электродинамической задачи.

С другой стороны, применение электродинамических подходов для описания ДОС приводит к созданию весьма сложных моделей, применение которых требует больших затрат компьютерных ресурсов.

Поэтому представляет интерес разработка комплексного подхода, сочетающего, как электродинамическое решение граничной задачи, так и теорию связанных волн. В результате применения такого подхода должна появиться простая и наглядная модель системы связанных волноводов, позволяющая с приемлемой точностью описывать поведение ее параметров.

## 1. Граничная задача

В этом разделе мы рассмотрим формулировку граничной задачи на собственные волны структуры, показанной на рис. 1. Она представляет собой двумерно – периодическую решетку квадратных волноводов с бесконечно тонкими стенками, имеющими размер  $a$ . В силу того, что стенки бесконечно тонкие, то периоды структуры вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  одинаковы и равны  $a$ . Из рис. 1 видно, что соседние волноводы имеют общие стенки, в которых выполнены прямоугольные отверстия. Отверстия расположены вдоль оси  $Oz$  периодически с периодом  $P$ . При этом центры отверстий находятся на середине стенки, в которой они выполнены. Таким образом, вся структура имеет симметрию поворота на  $90^\circ$  относительно оси симметрии любого из волноводов решетки. Подобная симметрия создает одинаковые условия для распространения волн разной поляризации, что необходимо для решения практически важной задачи создания двухполяризационной ДОС. По этой причине в данной работе мы рассматриваем только структуры, обладающие указанным выше типом симметрии. Структуры на основе волноводов неквадратного сечения или структуры с разными отверстиями на разных стенках не рассматриваются.

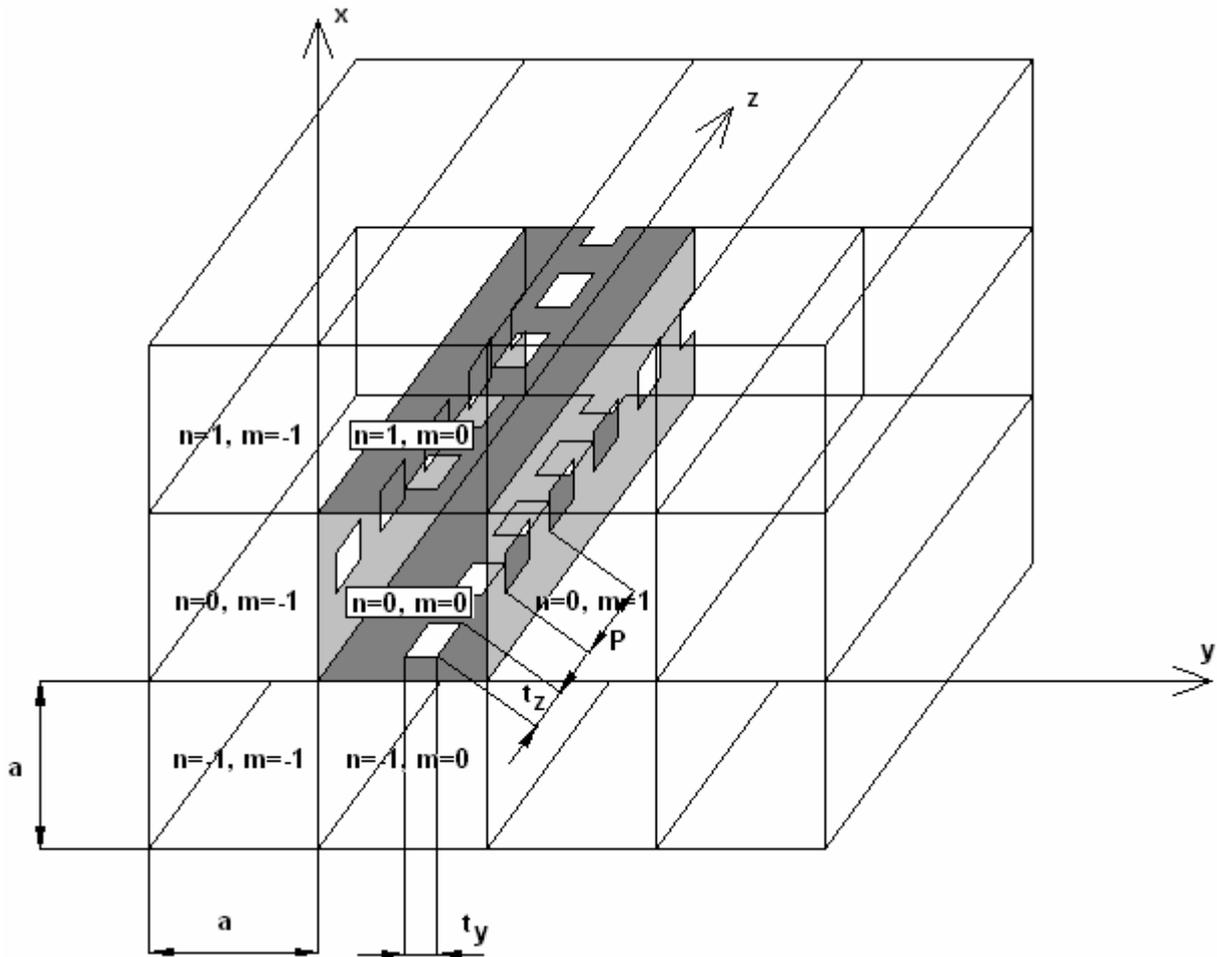


Рис. 1. Исследуемая структура.

Из рис. 1 видно, что анализируемая система связанных волноводов является трехмерно – периодической структурой. Поэтому прежде чем переходить к формулировке граничной задачи нам целесообразно пояснить, что мы понимаем под собственной волной такой структуры. Из теории периодических структур известно, что поле в бесконечной периодической структуре удовлетворяет условиям квазипериодичности, которое для нашего случая имеет следующий вид:

$$\vec{E}(x + na, y + ma, z + lP) = \vec{E}(x, y, z)e^{-i\alpha_x na - i\alpha_y ma - i\alpha_z lP}, \quad (1)$$

$$\vec{H}(x + na, y + ma, z + lP) = \vec{H}(x, y, z)e^{-i\alpha_x na - i\alpha_y ma - i\alpha_z lP}$$

где  $\vec{E}, \vec{H}$  - векторы электрического магнитного полей,  $n, m$  - номера определяющие положение волновода по осям  $Ox$  и  $Oy$ ,  $l$  - номер отверстия, задающий его положение на оси  $Oz$ .

Будем понимать под собственной волной решение уравнений Максвелла, удовлетворяющее условиям квазипериодичности (1). Отметим, что решение задачи на собственные волны не позволяет найти все неизвестные пока параметры  $\alpha_{x,y,z}$ . Оно только устанавливает функциональную зависимость типа  $\alpha_z(\alpha_x, \alpha_y)$ . Поэтому далее считаем, что параметры  $\alpha_{x,y}$  заданы, а параметр  $\alpha_z$ , имеющий смысл постоянной распространения собственной волны ищем из решения граничной задачи. Физический смысл параметров  $\alpha_{x,y}$  виден из соотношений (1). Они задают фазовые сдвиги между полями в соседних волноводах решетки и изменяются в следующих пределах:

$$|\alpha_{x,y}| \leq \pi/a. \quad (2)$$

Таким образом, собственной волной является решение граничной задачи для любой комбинации значений  $\alpha_{x,y}$ , удовлетворяющих неравенствам (2).

Условие (1) позволяет нам ограничиться описанием электромагнитного поля в пределах одного периода структуры:  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq a$ ,  $0 \leq z \leq P$ . В пределах этого периода располагаются четыре отверстия связи. Присвоим им номера 1 – 4 как показано на рис. 2.

Первый этап формулировки граничной задачи заключается в выражении электромагнитного поля в структуре через тангенциальные компоненты электрического поля в отверстиях (см. рис. 2). При таком подходе поле внутри периода удовлетворяет уравнениям Максвелла и всем граничным условиям за исключением условий периодичности и условий непрерывности тангенциальных компонент магнитного поля в отверстиях.

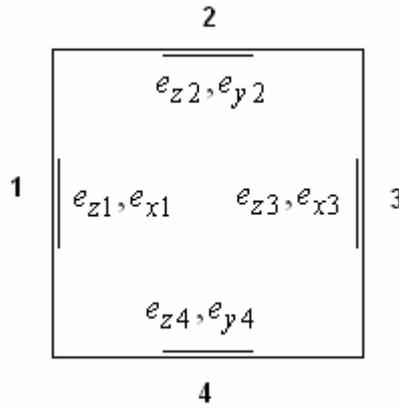


Рис. 2. Период структуры.

Далее накладываем на поле указанные выше условия и получаем систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций  $e_{z1-4}, e_{x1,3}, e_{y2,4}$ , описывающих тангенциальные компоненты электрического поля в щелях.

Следующий этап решения состоит в применении метода Галеркина. Для этого неизвестные функции представляются в виде набора известных базисных функций с неопределенными коэффициентами. Проекция системы интегральных уравнений на систему базисных функций позволяет свести граничную задачу к однородной системе линейных алгебраических уравнений. Условие существования ее нетривиальных решений в виде равенства нулю определителя системы дает нам искомое дисперсионное уравнение относительно неизвестных постоянных распространения собственных волн структуры.

Для реализации первого этапа описанной выше схемы решения граничной задачи выразим продольные компоненты поля  $E_z, H_z$  в виде следующих разложений:

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{n,m} e^{-iK_n z} \sin \beta_m x \operatorname{sh} \gamma_{n,m} (y-a),$$

$$H_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} B_{n,m} e^{-iK_n z} \cos \beta_m x \operatorname{ch} \gamma_{n,m} (y-a),$$

$$\kappa_n = \frac{2\pi n}{P} + \alpha_z, \quad (3)$$

$$\beta_m = \frac{\pi m}{a},$$

$$\gamma_{n,m} = \sqrt{\kappa_n^2 + \beta_m^2 - k^2},$$

где  $k$  - волновое число среды, заполняющей волновода,  $\alpha_z$  - постоянная распространения волны в структуре, которую необходимо определить,  $A, B$  - неизвестные коэффициенты разложений. Разложения (3) удовлетворяют уравнениям Максвелла, условию периодичности по оси  $Oz$ , а также граничным условиям на всех стенках волновода за исключением стенки при  $y = 0$ .

Отмеченная выше симметрия поворота структуры относительно оси волновода позволяет нам найти поле, порожденное полем первой щели. Выражения для полей, созданных другими щелями записываются элементарно.

Выразим неизвестные коэффициенты  $A, B$  через функции  $e_{z1}, e_{x1}$ , удовлетворив одновременно граничным условиям при  $y = 0$ . Для этого найдем сначала компоненту электрического поля  $E_x$  с помощью известных соотношений [6]:

$$E_x = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-i\kappa_n z} \cos \beta_m x \operatorname{sh} \gamma_{n,m} (y-a)}{\beta_m^2 - \gamma_{n,m}^2} (\kappa_n A_{n,m} + kW_0 \gamma_{n,m} B_{n,m}) \quad (4)$$

где  $W_0$  - волновое сопротивление свободного пространства.

При  $y = 0$  должны выполняться следующие условия:

$$E_x = \begin{cases} 0, & x, y \notin S_1, \\ e_{x1}, & x, y \in S_1, \end{cases} \quad (5)$$

$$E_z = \begin{cases} 0, & x, y \notin S_1, \\ e_{z1}, & x, y \in S_1, \end{cases}$$

где  $S_1$  - область на стенке волновода, занятая первой щелью. Подставим соотношения (3) и (4) в граничные условия (5) и воспользуемся ортогональностью функций  $\cos \beta_m x$ ,  $\sin \beta_m x$ ,  $e^{-i\kappa_n z}$ , которая позволяет нам определить коэффициенты  $A, B$ :

$$A_{n,m} = -\frac{1}{N \operatorname{sh} \gamma_{n,m} a} \int_{S_1} e_{z1} \sin \beta_m x e^{-i\kappa_n z} ds_1, \quad (6)$$

$$B_{n,m} = \frac{\varepsilon_m}{ikW_0 N \gamma_{n,m}} \frac{\beta_m^2 - \gamma_{n,m}^2}{\operatorname{sh} \gamma_{n,m} a} \int_{S_1} e_{x1} e^{-i\kappa_n z} \cos \beta_m x ds_1 +$$

$$+ \frac{2\kappa_n}{ikW_0 N \gamma_{n,m} \operatorname{sh} \gamma_{n,m} a} \int_{S_1} e_{z1} e^{-i\kappa_n z} \sin \beta_m x ds_1,$$

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m \neq 0. \end{cases}$$

Введем следующие соотношения:

$$E_{z1n,m} = \int_{S_1} e_{z1} \sin \beta_m x e^{-i\kappa_n z} ds_1, \quad (7)$$

$$E_{x1n,m} = \int_{S_1} e_{x1} \cos \beta_m x e^{-i\kappa_n z} ds_1.$$

Тогда для продольных компонент поля получаем компактные выражения:

$$E_z = \frac{2}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} E_{z1n,m} e^{-i\kappa_n z} \sin \beta_m x \frac{\operatorname{sh} \gamma_{n,m} (a-y)}{\operatorname{sh} \gamma_{n,m} a}, \quad (8)$$

$$H_z = -\frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-i\kappa_n z} \cos \beta_m x \frac{\varepsilon_m \operatorname{ch} \gamma_{n,m} (a-y)}{kW_0 \gamma_{n,m} \operatorname{sh} \gamma_{n,m} a} \\ \left( i(\beta_m^2 - \gamma_{n,m}^2) E_{x1n,m} - \kappa_n \beta_m E_{z1n,m} \right)$$

Найдем далее через известные соотношения [6] компоненты магнитного поля  $H_{x,y}$ :

$$H_x = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-i\kappa_n z} \sin \beta_m x \frac{\varepsilon_m \operatorname{ch} \gamma_{n,m} (a-y)}{kW_0 \gamma_{n,m} \operatorname{sh} \gamma_{n,m} a} \\ \left( i(k^2 - \beta_m^2) E_{z1n,m} + \kappa_n \beta_m E_{x1n,m} \right) \quad (9)$$

$$H_y = -\frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-i\kappa_n z} \cos \beta_m x \frac{\varepsilon_m \operatorname{sh} \gamma_{n,m} (a-y)}{kW_0 \operatorname{sh} \gamma_{n,m} a} \\ \left( i\beta_m E_{z1n,m} - \kappa_n E_{x1n,m} \right)$$

Соотношения (8) и (9) достаточны для того, чтобы записать систему интегральных уравнений, о которой говорилось выше. Однако мы опустим этот промежуточный шаг и перейдем сразу к проекциям выражений для полей на систему базисных функций, по которым раскладываются неизвестные функции в методе Галеркина. Отметим, что для нашего исследования система интегральных уравнений не является принципиальным этапом, так как условия периодичности и условия непрерывности магнитного поля могут быть эквивалентным образом записаны для коэффициентов разложений по базисным функциям и для проекций магнитного поля на эти функции.

Будем описывать электрические поля в отверстиях следующим образом:

$$e_{zi} = C_{zi} f_{zi}(s), \quad (10) \\ e_{\bar{a}i} = C_{\bar{a}i} f_{\bar{a}i}(s),$$

$$f_{z1,3}(x, z) = \frac{\cos\left(\frac{\pi(x - a/2)}{t_x}\right)}{\sqrt{(t_z/2)^2 - z^2}}$$

$$f_{z2,4}(y, z) = \frac{\cos\left(\frac{\pi(y - a/2)}{t_y}\right)}{\sqrt{(t_z/2)^2 - z^2}},$$

$$f_{\tau 1,3}(x, z) = \frac{\cos\left(\frac{\pi z}{t_z}\right)}{\sqrt{(t_x/2)^2 - (x - a/2)^2}},$$

$$f_{\tau 2,4}(y, z) = \frac{\cos\left(\frac{\pi z}{t_z}\right)}{\sqrt{(t_y/2)^2 - (y - a/2)^2}},$$

где  $C_{zi}$  и  $C_{\tau i}$  - неизвестные постоянные,  $t_{x,y,z}$  - размеры отверстий связи, причем в силу симметрии поворота структуры на  $90^0$ , они связаны следующим равенством:  $t_x = t_y$ , переменная  $\tau$  определяется следующим образом:

$$\tau = x, i = 1,3,$$

$$\tau = y, i = 2,4.$$

Из соотношений (10) видно, что для описания каждой компоненты электрического поля мы используем одну базисную функцию. Столь простое представление поля в отверстии допустимо только, если его размеры много меньше длины волны. На практике это условие почти всегда выполняется.

Введем далее проекции  $h_{zi}, h_{\tau i}$  тангенциальных компонент магнитного поля в отверстиях на базисные функции (10):

$$h_{zi} = \int_{S_i} H_{zi} f_{\bar{a}} ds_i, \quad (11)$$

$$h_{\bar{a}} = \int_{S_i} H_{\bar{a}} f_{zi} ds_i.$$

Кроме того, введем следующие обозначения:

$$F_{z1n,m} = F_{z3n,m} = \int_{S_1} f_{z1} \sin \beta_m x e^{-i\kappa_n z} ds_1, \quad (12)$$

$$F_{\tau1n,m} = F_{\tau3n,m} = \int_{S_1} f_{\tau1} \cos \beta_m x e^{-i\kappa_n z} ds_1,$$

$$F_{z2n,m} = F_{z4n,m} = \int_{S_4} f_{z4} \operatorname{sh} \gamma_{n,m} (a-y) e^{-i\kappa_n z} ds_4,$$

$$F_{\tau2n,m} = F_{\tau4n,m} = \int_{S_4} f_{\tau4} \operatorname{ch} \gamma_{n,m} (a-y) e^{-i\kappa_n z} ds_4.$$

Выразим далее проекции (11) с помощью соотношений (8) и (9):

$$h_{zi} = (S_i)_{1,1} C_{z1} + (S_i)_{1,2} C_{\tau1}, \quad (13)$$

$$h_{\bar{a}} = (S_i)_{2,1} C_{z1} + (S_i)_{2,2} C_{\tau1},$$

$$S_1 = \frac{1}{kW_0 N}$$

$$\sum_{n,m} \frac{\varepsilon_m c \operatorname{th} \gamma_{n,m} a}{\gamma_{n,m}} \begin{bmatrix} \beta_m \kappa_n F_{\tau1n,m} F_{z1n,m} & -i(\beta_m^2 - \gamma_{n,m}^2) F_{\tau1n,m}^2 \\ -i(k^2 - \beta_m^2) F_{z1n,m}^2 & \beta_m \kappa_n F_{\tau1n,m} F_{z1n,m} \end{bmatrix},$$

$$S_2 = \frac{1}{kW_0 N} \sum_{n,m} \frac{\varepsilon_m \cos \beta_m a}{\gamma_{n,m} \operatorname{sh} \gamma_{n,m} a}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_m \kappa_n F_{\tau2n,m} F_{z1n,m} & -i(\beta_m^2 - \gamma_{n,m}^2) F_{\tau2n,m} F_{\tau1n,m} \\ -i\beta_m \gamma_{n,m} F_{z1n,m} F_{z2n,m} & \kappa_n \gamma_{n,m} F_{\tau1n,m} F_{z1n,m} \end{bmatrix},$$

$$S_3 = \frac{1}{kW_0 N} \sum_{n,m} \frac{\varepsilon_m \cos \beta_m a}{\gamma_{n,m} \operatorname{sh} \gamma_{n,m} a}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_m \kappa_n F_{\tau 3n,m} F_{z 1n,m} & -i(\beta_m^2 - \gamma_{n,m}^2) F_{\tau 3n,m} F_{\tau 1n,m} \\ i(k^2 - \beta_m^2) F_{z 3n,m} F_{z 1n,m} & \beta_m \kappa_n F_{\tau 1n,m} F_{z 3n,m} \end{bmatrix},$$

$$S_4 = \frac{1}{kW_0 N} \sum_{n,m} \frac{\varepsilon_m}{\gamma_{n,m} \operatorname{sh} \gamma_{n,m} a}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_m \kappa_n F_{\tau 4n,m} F_{z 1n,m} & -i(\beta_m^2 - \gamma_{n,m}^2) F_{\tau 4n,m} F_{\tau 1n,m} \\ -i\beta_m \gamma_{n,m} F_{z 1n,m} F_{z 4n,m} & \kappa_n \gamma_{n,m} F_{\tau 1n,m} F_{z 4n,m} \end{bmatrix}.$$

Приведенные выше соотношения решают задачу определения проекций магнитного поля на выбранную систему базисных функций при возбуждении волновода полем первого отверстия. Как было сказано выше, найти аналогичные проекции поля при возбуждении волновода полями других отверстий не составляет труда в силу симметрии поворота на  $90^\circ$ . Приведем окончательный вид матрицы, связывающей проекции магнитного поля с постоянными  $C_{zi}$  и  $C_{\tau i}$ :

$$\hat{Y} \vec{V} = \vec{C}, \tag{14}$$

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} \vec{h}_z \\ \vec{h}_\tau \end{bmatrix}, \quad \vec{C} = \begin{bmatrix} \vec{C}_z \\ \vec{C}_\tau \end{bmatrix},$$

$\hat{Y} =$

$$\begin{bmatrix} (S_1)_{1,1} & (S_4)_{1,1} & (S_3)_{1,1} & (S_2)_{1,1} & (S_1)_{1,2} & (S_4)_{1,2} & -(S_3)_{1,2} & -(S_2)_{1,2} \\ (S_2)_{1,1} & (S_1)_{1,1} & (S_4)_{1,1} & (S_3)_{1,1} & (S_2)_{1,2} & (S_1)_{1,2} & -(S_4)_{1,2} & -(S_3)_{1,2} \\ (S_3)_{1,1} & (S_2)_{1,1} & (S_1)_{1,1} & (S_4)_{1,1} & (S_3)_{1,2} & (S_2)_{1,2} & -(S_1)_{1,2} & -(S_4)_{1,2} \\ (S_4)_{1,1} & (S_3)_{1,1} & (S_2)_{1,1} & (S_1)_{1,1} & (S_4)_{1,2} & (S_3)_{1,2} & -(S_2)_{1,2} & -(S_1)_{1,2} \\ (S_1)_{2,1} & -(S_4)_{2,1} & -(S_3)_{2,1} & (S_2)_{2,1} & (S_1)_{2,2} & -(S_4)_{2,2} & (S_3)_{2,2} & -(S_2)_{2,2} \\ (S_2)_{2,1} & (S_1)_{2,1} & -(S_4)_{2,1} & -(S_3)_{2,1} & (S_2)_{2,2} & (S_1)_{2,2} & (S_4)_{2,2} & (S_3)_{2,2} \\ (S_3)_{2,1} & -(S_2)_{2,1} & -(S_1)_{2,1} & (S_4)_{2,1} & (S_3)_{2,2} & -(S_2)_{2,2} & (S_1)_{2,2} & -(S_4)_{2,2} \\ (S_4)_{2,1} & (S_3)_{2,1} & -(S_2)_{2,1} & -(S_1)_{2,1} & (S_4)_{2,2} & (S_3)_{2,2} & (S_2)_{2,2} & (S_1)_{2,2} \end{bmatrix}$$

В соотношениях (13) под  $\vec{h}_z, \vec{h}_\tau, \vec{C}_z, \vec{C}_\tau$  понимаем четырехэлементные векторы с компонентами  $h_{zi}, h_{\tau i}$  и т.д.

Учтем далее граничные условия и условия периодичности. С учетом введенных выше обозначений они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} h_{z3} &= h_{z1} e^{-i\alpha_y a}, & C_{z3} &= C_{z1} e^{-i\alpha_y a}, \\ h_{z2} &= h_{z4} e^{-i\alpha_x a}, & C_{z2} &= C_{z4} e^{-i\alpha_x a}, \\ h_{\tau3} &= h_{\tau1} e^{-i\alpha_y a}, & C_{\tau3} &= C_{\tau1} e^{-i\alpha_y a}, \\ h_{\tau2} &= h_{\tau4} e^{-i\alpha_x a}, & C_{\tau2} &= C_{\tau4} e^{-i\alpha_x a}. \end{aligned} \tag{14}$$

Условия (14) позволяют нам уменьшить число независимых переменных до четырех и получить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\tilde{Y}\tilde{C} = 0, \tag{15}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_{z1} \\ C_{z4} \\ C_{\tau1} \\ C_{\tau4} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{Y} = \hat{T}\hat{Y}\hat{Q},$$

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_x a} & 0 & 0 \\ e^{-i\alpha_y a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\alpha_x a} \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha_y a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} -e^{-i\alpha_y a} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -e^{-i\alpha_x a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{-i\alpha_y a} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -e^{-i\alpha_x a} \end{bmatrix}.$$

Равенство нулю определителя системы является искомым дисперсионным уравнением, из которого находятся постоянные распространения собственных волн исследуемой структуры:

$$\det(\tilde{Y}) = 0. \tag{16}$$

## 2. Теория связанных волн

Дальнейшее исследование волноводной системы в рамках электродинамической модели связано с численным решением уравнения (16). Как было сказано в первом разделе, нашей задачей является разработка комплексного подхода, сочетающего строгие методы решения граничных задач и феноменологическую теорию связанных волн. Поэтому, прежде чем переходить к численному исследованию, мы получим соотношения,

описывающие поведение собственных волн системы связанных волноводов в рамках приближенной модели.

В рамках теории связанных волн их распространение описывается с помощью дифференциальных уравнений относительно для амплитуд, которые являются функциями продольной координаты  $z$ . При этом предполагается, что число волн в каждом из связанных волноводов такое же, как в уединенном волноводе. Связь между волнами описывается с помощью ЛКС. Формально все волноводы в системе связаны друг с другом. Однако на практике существенную роль играют лишь связи соседних волноводов, а в крайнем случае, волноводов расположенных через один период структуры.

Будем рассматривать только волноводы, работающие в двухволновом режиме, когда в них распространяются две волны, отличающиеся плоскостью поляризации. Назовем волну, имеющую компоненту электрического поля  $E_y$  волной горизонтальной поляризации, а волну с вектором  $E_x$  волной вертикальной поляризации. В квадратном волноводе у них одинаковые постоянные распространения  $\alpha_0$ :

$$\alpha_0 = \sqrt{k^2 - (\pi/a)^2}. \quad (17)$$

Пусть  $V_{v,h,n,m}$  - амплитуды волн вертикальной и горизонтальной поляризации в волноводе с индексами  $n, m$ . Будем использовать для их описания следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{dV_{vn,m}}{dz} + i\alpha_0 V_{vn,m} + \\ & + iC_{vy}(V_{vn,m+1} + V_{vn,m-1}) + iC_{vx}(V_{vn+1,m} + V_{vn-1,m}) + \\ & + iC_{vh}(V_{hn+1,m+1} + V_{hn-1,m-1} - V_{hn-1,m+1} - V_{hn+1,m-1}) = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{dV_{hn,m}}{dz} + i\alpha_0 V_{hn,m} +$$

$$+ iC_{hy} (V_{hn,m+1} + V_{hn,m-1}) + iC_{hx} (V_{vn+1,m} + V_{vn-1,m}) +$$

$$+ iC_{hv} (V_{vn+1,m+1} + V_{vn-1,m-1} - V_{vn-1,m+1} - V_{vn+1,m-1}) = 0,$$

где  $C_{vx}$  - ЛКС волны вертикальной поляризации с волной той же поляризации в волноводах сдвинутых относительно волновода с индексами  $n, m$  по оси  $Ox$ , аналогичный смысл, но для волны горизонтальной поляризации имеет параметр  $C_{hx}$ , параметры  $C_{vy}$  и  $C_{hy}$  описывают связь волн в волноводах сдвинутых по оси  $Oy$ . При этом в силу симметрии структуры мы полагаем, что ЛКС не зависит от направления сдвига волновода. Коэффициенты  $C_{hv}, C_{vh}$  учитывают связь волн разной поляризации. При этом, как видно из структуры уравнений (18) связь такого типа возникает только между волнами, сдвинутыми относительно  $n, m$  -ого волновода по диагонали.

Уравнения (18) учитывают только связь волн одинаковой поляризации в соседних волноводах, имеющих общие стенки (сдвинуты вдоль осей координат) и связь волн разной поляризации в соседних волноводах, соприкасающихся углами (сдвиг по диагонали). Для правильной записи уравнений связанных волн имеют соображения симметрии. Рассмотрим их подробнее.

Пусть в  $n, m$  - ом волноводе распространяется волна вертикальной поляризации. В этом случае в структуре в силу ее симметрии поле удовлетворяет граничным условиям на идеальном металле на горизонтальной плоскости (см. рис. 3) и условиям на идеальном магнетике на вертикальной плоскости. Отсюда сразу видно, что в волноводах, примыкающих к  $n, m$  - ому общими стенками волны ортогональной поляризации возбуждаться не могут, так как они не удовлетворяют указанным выше граничным условиям.

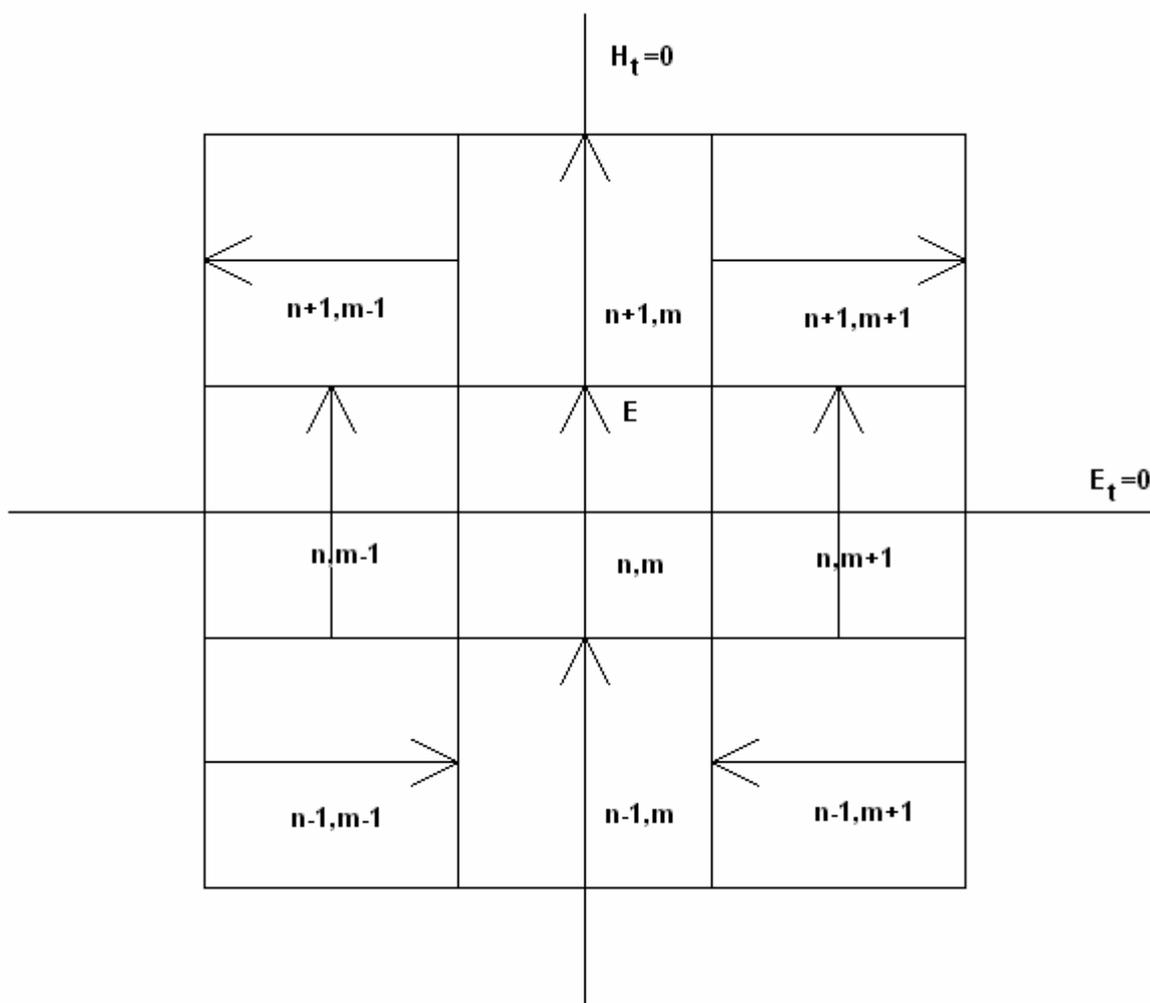


Рис. 3. Связь волноводов в решетке.

Отметим также, что они не возбуждятся во всех волноводах, сдвинутых относительно  $n,m$  - ого вдоль одной из координатных осей. Связь с волнами ортогональной поляризации может возникнуть только в волноводах, имеющих сдвиг сразу по двум координатам. Поскольку нас интересуют ближайшие к  $n,m$  - ому волноводы, то к ним относятся волноводы, соприкасающиеся ребрами, то есть сдвинутые по диагонали.

При этом в этих волноводах ориентация электрического поля волн горизонтальной поляризации также должна удовлетворять условиям симметрии. Поэтому векторы электрического поля в волноводах со сдвигом по диагонали направлены в разные стороны (см. рис. 3), что эквивалентно сдвигу

фаз их амплитуд на  $\pi$ . Этот сдвиг фаз учтен в уравнениях (18) тем, что амплитуды волн в последних скобках имеют разные знаки.

Симметрия структуры позволяет получить ряд соотношений для ЛКС, входящих в уравнения (18):

$$C_{vx} = C_{hy} = C_1, \quad (19)$$

$$C_{vy} = C_{hx} = C_2.$$

Из взаимности структуры следует равенство:

$$C_{vh} = C_{hv} = C_3. \quad (20)$$

Таким образом, модель в виде системы дифференциальных уравнений содержит четыре параметра: три ЛКС  $C_{1-3}$  и постоянную распространения  $\alpha_0$ .

Амплитуды волн удовлетворяют условиям периодичности, которые для них записываются следующим образом:

$$V_{v,h,n,m} = V_{v,h} e^{-i\alpha_x na - i\alpha_y ma}. \quad (21)$$

Подставим условие (21) в систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dV_v}{dz} + i\alpha_0 V_v + 2iC_2 V_v \cos \alpha_y a + 2iC_1 V_v \cos \alpha_x a - \\ - 4iC_3 V_h \sin \alpha_y a \sin \alpha_x a = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_h}{dz} + i\alpha_0 V_h + 2iC_1 V_h \cos \alpha_y a + 2iC_2 V_h \cos \alpha_x a - \\ - 4iC_3 V_v \sin \alpha_y a \sin \alpha_x a = 0. \end{aligned}$$

Решение системы (22) ищем стандартным путем, представляя амплитуды  $V_{v,h}$  в экспоненциальной форме:

$$V_{v,h} = A_{v,h} e^{-i\alpha z}, \quad (23)$$

где  $\alpha$  - неизвестная постоянная распространения собственной волны. Подставляя формулу (23) в (22), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных  $A_{v,h}$ :

$$(\alpha_0 + 2C_2 \cos \alpha_y a + 2C_1 \cos \alpha_x a - \alpha)A_v - 4C_3 A_h \sin \alpha_y a \sin \alpha_x a = 0, \quad (24)$$

$$(\alpha_0 + 2C_1 \cos \alpha_y a + 2C_2 \cos \alpha_x a - \alpha)A_h - 4C_3 A_v \sin \alpha_y a \sin \alpha_x a = 0.$$

Вводим следующие обозначения:

$$\alpha_v = \alpha_0 + 2C_2 \cos \alpha_y a + 2C_1 \cos \alpha_x a, \quad (25)$$

$$\alpha_h = \alpha_0 + 2C_1 \cos \alpha_y a + 2C_2 \cos \alpha_x a,$$

$$\Delta = 4C_3 \sin \alpha_y a \sin \alpha_x a.$$

Приравнявая нулю определитель системы (24), получаем дисперсионное уравнение относительно постоянной распространения  $\alpha$ :

$$\alpha^2 - (\alpha_v + \alpha_h)\alpha + \alpha_v \alpha_h - \Delta^2 = 0. \quad (26)$$

Уравнение (26) имеет два корня:

$$\alpha_{1,2} = \frac{\alpha_v + \alpha_h}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_v - \alpha_h}{2}\right)^2 + \Delta^2}. \quad (26)$$

Таким образом, в периодической структуре в квазипериодическом режиме существуют две волны с разными постоянными распространения, которые зависят от фазовых сдвигов между волноводами, которые задаются постоянными  $\alpha_{x,y}$ . Указанные зависимости являются результатом связи волноводов. Их исследование позволяет найти основные параметры феноменологической модели, которые пока остаются неопределенными.

### 3. Численное исследование системы связанных волноводов

В этом разделе будут представлены результаты численного решения дисперсионного уравнения (16), полученного с помощью электродинамических методов. Они будут сравниваться с решением (26). Результатом сравнения станет определение параметров феноменологической модели.

Будем исследовать зависимость постоянных распространения собственных волн от фазовых параметров  $\alpha_{x,y}$ . Фиксируем при этом геометрические размеры структуры:  $a = 17$ ,  $P = 15$ ,  $t_x = 6.2$ ,  $t_z = 5$ . Считаем, что волноводы заполнены воздухом.

Для описания постоянных распространения будем использовать более удобный безразмерный параметр – коэффициент замедления  $U$ , равный отношению постоянной распространения к волновому числу свободного пространства.

На рис. 4 показаны, полученные из численного решения уравнения (16) зависимости коэффициентов замедления собственных волн периодической структуры от безразмерного параметра  $\alpha_y a$ , который меняется от нуля до  $\pi$ . Поскольку функции  $U(\alpha_y)$  четные, то их поведение при отрицательных  $\alpha_y a$  интереса не представляет.

Кривые 1 – 5 получены при  $\alpha_x a = 0, \pi/5, \pi/2, 4\pi/5, \pi$ . Кривые 1' – 5' получены для тех же значений параметра  $\alpha_x a$ . Кривые 1 – 5 и кривые 1' – 5' соответствуют двум разным решениям уравнения (16). Горизонтальной линией на рис. 4 показано значение коэффициента замедления основной волны уединенного волновода.

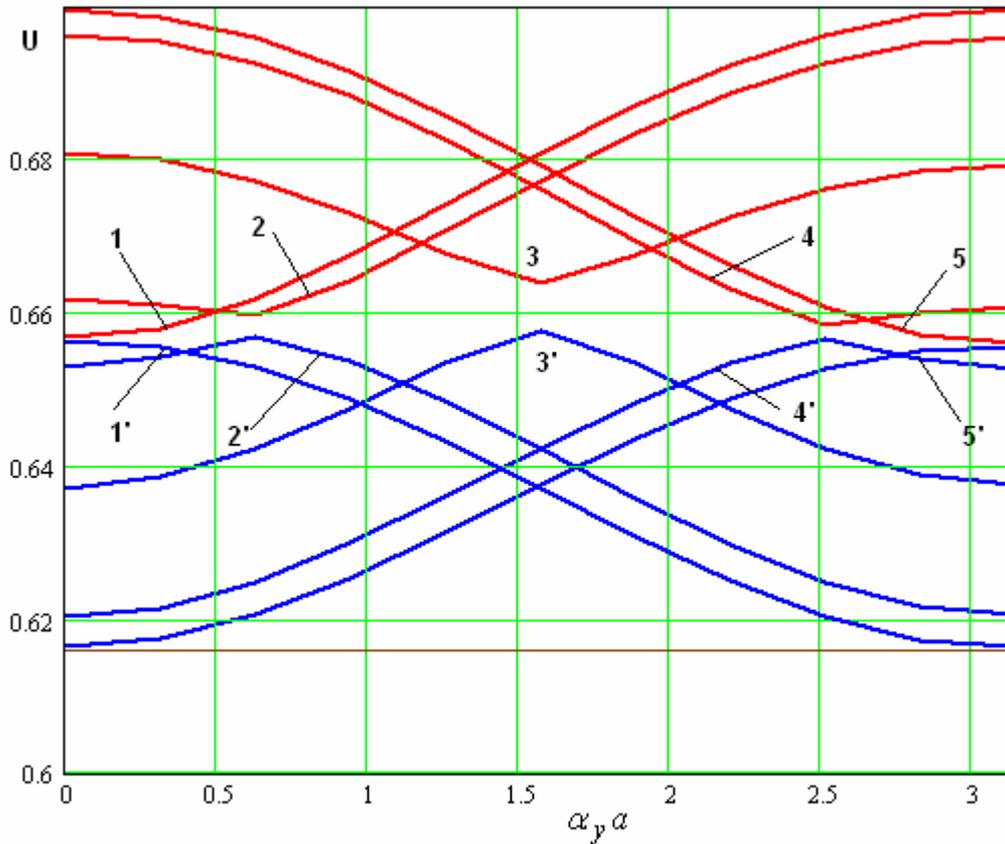


Рис. 4. Зависимость коэффициентов замедления собственных волн от сдвига фазы на период структуры.

Обсудим поведение кривых в характерных точках. Первая из них соответствует  $\alpha_x a = \alpha_y a = 0$ . В этой точке коэффициенты замедления двух волн равны друг другу и отличаются от коэффициента замедления одиночного волновода.

Причина вырождения собственных волн поясняется рис. 5, на котором качественно представлены линии электрического поля при нулевых сдвигах фаз между каналами структуры. Из теории периодических структур известно, что, если структура с прямоугольной сеткой имеет симметричный период, то при нулевом сдвиге фаз на двух параллельных границах периода поле удовлетворяет условиям на идеальной электрической стенке, а на двух других параллельных границах условиям на идеальной магнитной стенке.

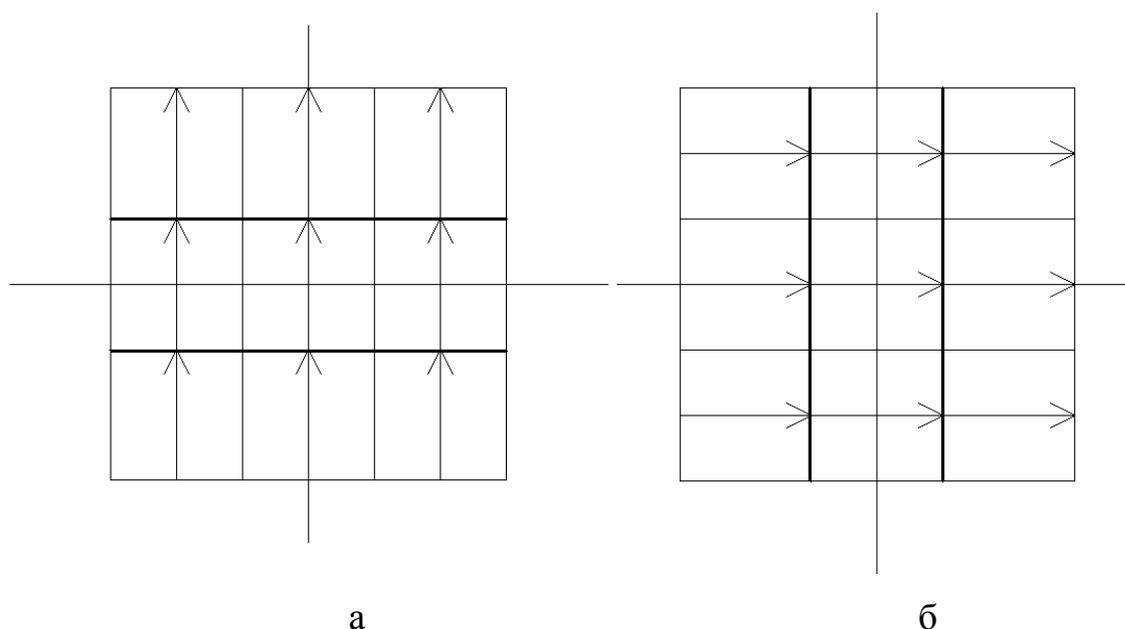


Рис. 5. Поле собственных волн решетки при  $\alpha_x a = \alpha_y a = 0$ .

Такое сочетание условий на границах периода возможно в двух вариантах показанных на рис. 5. Толстыми линиями показаны электрические стенки. Перпендикулярны им магнитные стенки. Электрическое поле перпендикулярно электрическим стенкам. Отверстия, в которые попадают электрические стенки, связи между волноводами не создают, так как в них тангенциальное электрическое поле равно нулю. Отверстия, в которые попадают магнитные стенки связывают волноводы. Таким образом, мы видим, что двумерная структура распадается на бесконечное множество одинаковых одномерных структур. Причем для волн вертикальной поляризации одномерные структуры вытянуты вдоль горизонтальной оси, а для волн горизонтальной поляризации вдоль вертикальной оси. Однако, несмотря на разную ориентацию в пространстве одномерные структуры совершенно идентичны и поэтому волны в них имеют одинаковые коэффициенты замедления.

Увеличение параметра  $\alpha_y a$  при постоянном  $\alpha_x a = 0$  приводит к снятию вырождения собственных волн (см. кривые 1 – 1' на рис. 5). В пределе при  $\alpha_y a = \pi$  их коэффициенты замедления расходятся максимально. При этом

коэффициент замедления, соответствующий кривой 1' становится равным коэффициенту замедления уединенного волновода.

Используя известные из теории периодических структур закономерности [7], можно прийти к выводу, что в следующей характерной точке  $\alpha_x a = 0$ ,  $\alpha_y a = \pi$  поле двух волн имеет структуру качественно изображенную на рис. 6 а,б. В этом случае фаза поля по столбцам меняется от периода к периоду на  $\pi$ , а при переходе со строки на строку она неизменна.

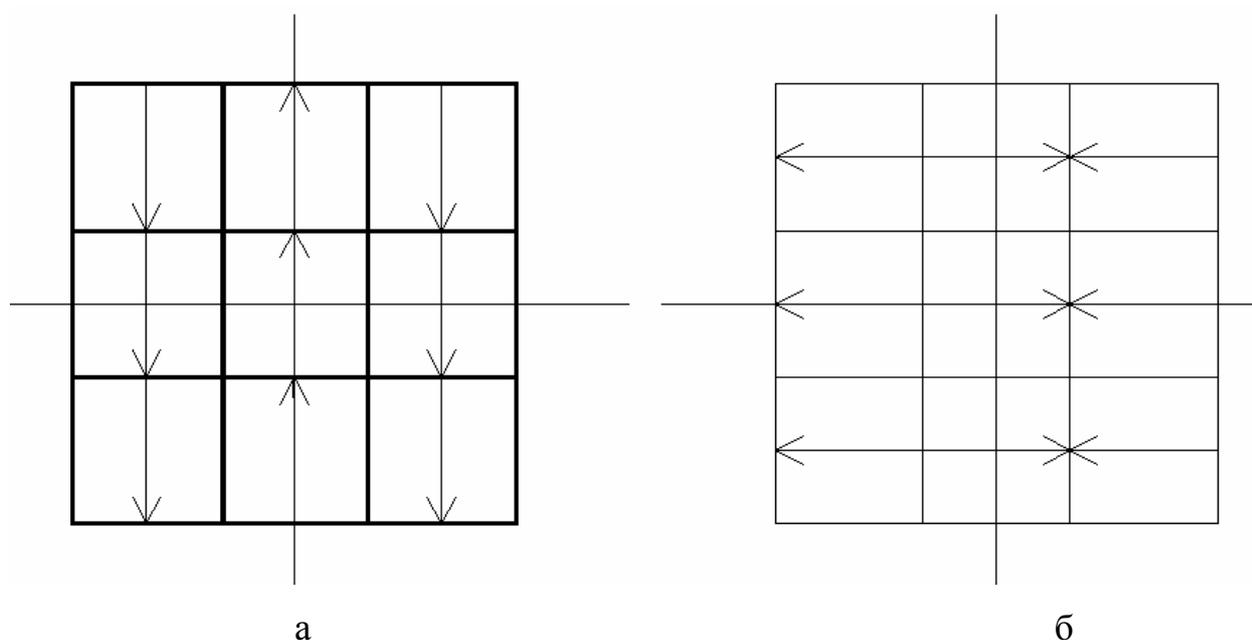


Рис. 6. Поле собственных волн волновода при  $\alpha_x a = 0$ ,  $\alpha_y a = \pi$ .

Такое изменение фазы для волн разной поляризации приводит к разным условиям на границах периода. Для вертикально поляризованной волны на всех границах периода устанавливаются электрические стенки, а для горизонтально поляризованной волны магнитные. Поэтому у первой волны все отверстия связи не работают, а у другой они функционируют с максимальной эффективностью. Поэтому коэффициент замедления волны с вертикальной поляризацией не отличается от коэффициента замедления волны одиночного волновода. Соответственно отличие коэффициента замедления волны с

горизонтальной поляризацией от коэффициента замедления волны одиночного волновода максимально.

Совершенно аналогичная картина, отличающаяся только поворотом на  $90^\circ$  имеет место в другой характерной точке при  $\alpha_y a = 0$ ,  $\alpha_x a = \pi$ .

Еще один тип вырождения наблюдается при  $\alpha_x a = \alpha_y a = \pi$ .

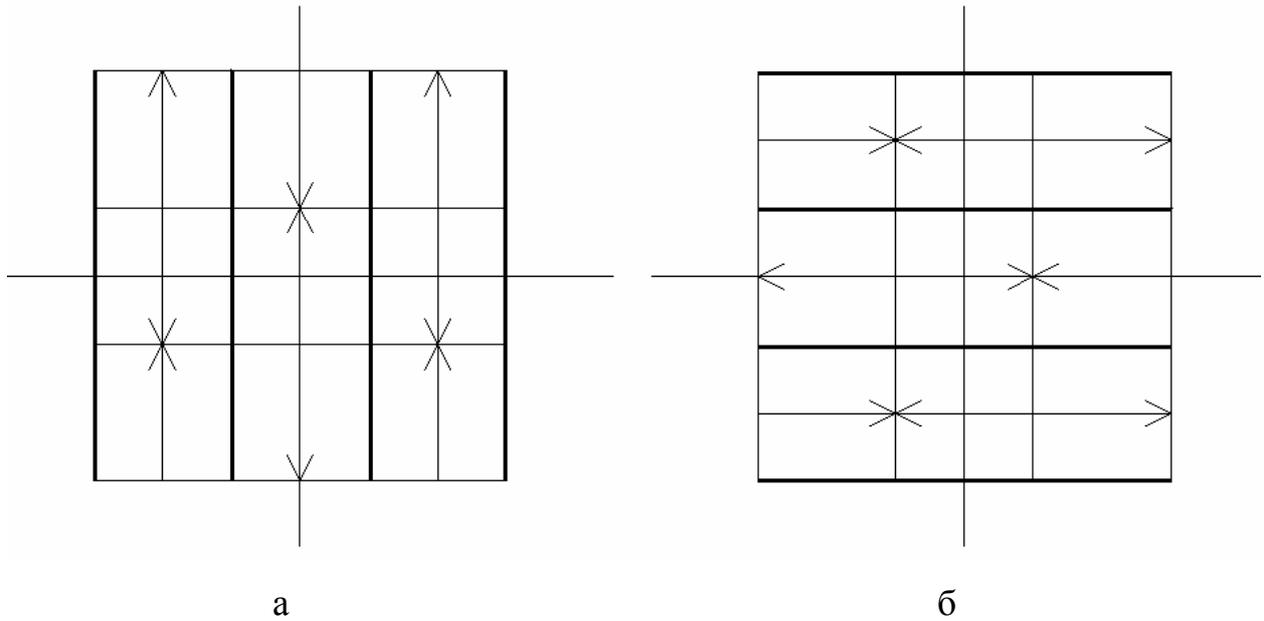


Рис. 7. Поле собственных волн волновода при  $\alpha_x a = \alpha_y a = \pi$ .

В этом случае мы также имеем две волны с одинаковой структурой поля повернутой на  $90^\circ$ , как показано на рис. 7 а,б. Ему соответствуют кривые 5 и 5' на рис. 4 в точке  $\alpha_y a = \pi$ .

Наибольший интерес представляет поведение кривых на рис. 4 в окрестности точки  $\alpha_x = \alpha_y$ . В данной области вид представленных кривых соответствует поведению дисперсионных кривых двух волн с сильной связью. При этом, если в точке  $\alpha_y a = 0$  верхняя кривая (номер без штриха) соответствует волне с вертикальной поляризацией, а нижняя (тот же номер со штрихом) волне с горизонтальной поляризацией, то при  $\alpha_y a = \pi$  ситуация имеет обратный характер.

Описанное выше поведение кривых на рис. 4 объясняется связью волн разной поляризации, которая существует в рассматриваемой структуре. Этот вывод легче всего обосновать с использованием модели, которая представлена в разд. 2. Прежде чем анализировать численные результаты, полученные с ее помощью необходимо найти все входящие в нее параметры. Для этого потребуем равенства коэффициентов замедления, получаемых из электродинамической и феноменологической моделей в четырех характерных точках. Эти равенства позволят нам сформировать систему уравнений для определения четырех неизвестных параметров.

В результате параметры приближенной модели определялись следующим образом:

$$\alpha_0 = \frac{1}{10} \left( \alpha_1 \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) + \alpha_1(0,0) + \alpha_1(\pi, \pi) + \alpha_1(0, \pi) + \alpha_1(\pi, 0) + \right. \\ \left. \alpha_2 \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) + \alpha_2(0,0) + \alpha_2(\pi, \pi) + \alpha_2(0, \pi) + \alpha_2(\pi, 0) \right), \\ C_1 = \frac{1}{8} (\alpha_1(0,0) - \alpha_1(\pi, \pi) + \alpha_1(0, \pi) - \alpha_2(0, \pi)), \quad (27) \\ C_2 = \frac{1}{8} (\alpha_1(0,0) - \alpha_1(\pi, \pi) - \alpha_1(0, \pi) + \alpha_2(0, \pi)), \\ C_3 = \frac{1}{8} \left( \alpha_1 \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) - \alpha_2 \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right),$$

где  $\alpha_{1,2}$  - постоянные распространения собственных волн из электродинамической модели. Первый аргумент соответствует  $\alpha_x a$ , а второй  $\alpha_y a$ .

На рис. 8 показаны зависимости коэффициентов замедления собственных волн, полученные с помощью двух подходов. Кривые 1,1',1a,1a' получены при  $\alpha_x a = \pi/5$ , а кривые 2,2',2a,2a' при  $\alpha_x a = 4\pi/5$ . Кривые 1,1',2,2'

получены с помощью строгого решения, а кривые 1a,1a',2a,2a' путем аппроксимации (27).

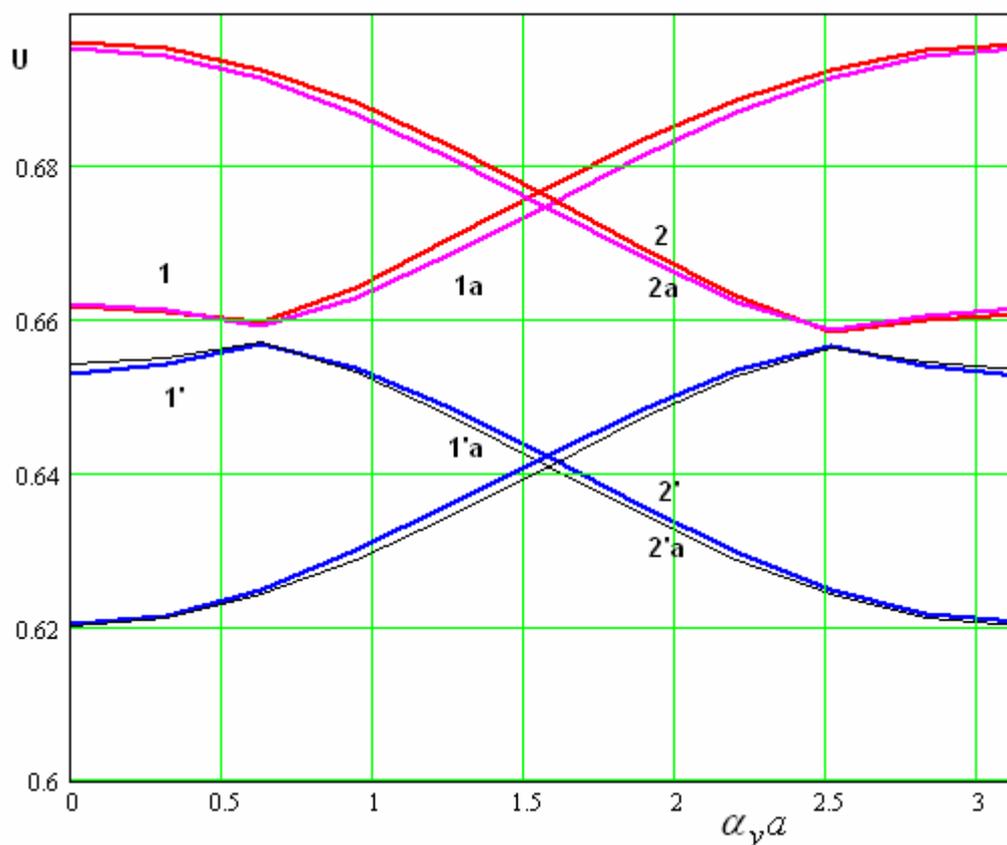


Рис. 8.

Нетрудно увидеть, что отличие аппроксимации от точного решения не превышает долей процента, что можно считать удовлетворительным результатом.

Рассмотрим далее кривые, представленные на рис. 9. Они получены при  $\alpha_x a = \pi/2$  с помощью теории связанных волн. Кривые 1,1' получены с учетом всех ЛКС, а кривые 2 и 2' в предположении, что  $C_3 = 0$ . Видно, что при отсутствии связи волн разной поляризации кривые пересекаются. Связь существенно меняет поведение кривых в области близкой к точке  $\alpha_x = \alpha_y$ . Сильное влияние связи волн разных типов именно в данной области теперь получает объяснение, так как в отсутствие связи взаимодействующие волны имеют одинаковые постоянные распространения. Равенство постоянных

распространения является условием для интенсивного обмена энергией между указанными волнами.

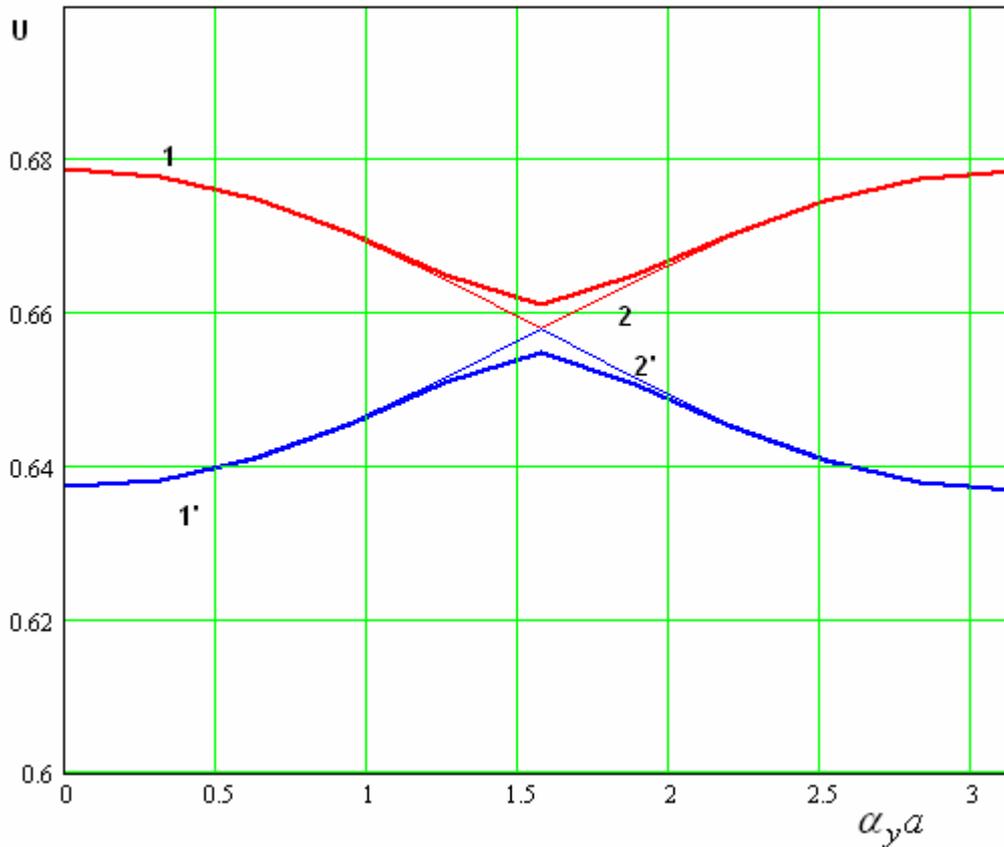


Рис. 9.

Рассмотрим далее поведение ЛКС. На рис. 10 показана частотная зависимость нормированных на волновое число свободного пространства  $k$  ЛКС  $C_{1-3}$ . Кривые 1 и 3 соответствуют  $C_{1,3}$ , а кривая 2 соответствует  $-C_2$ . Таким образом, из рис. 10 видно, что ЛКС  $C_{1,2}$  имеют разные знаки. Данный факт является существенным с точки зрения решения практической задачи построения ДОС на основе решетки связанных волноводов. Схема двумерной ДОС, предложенная в работе [3] была получена для системы связанных линий передачи, в которой ЛКС всех волн имели одинаковые знаки. Поэтому для построения ДОС на основе рассматриваемой волноводной системы необходимо изменить ее структуру в соответствии с полученными результатами.

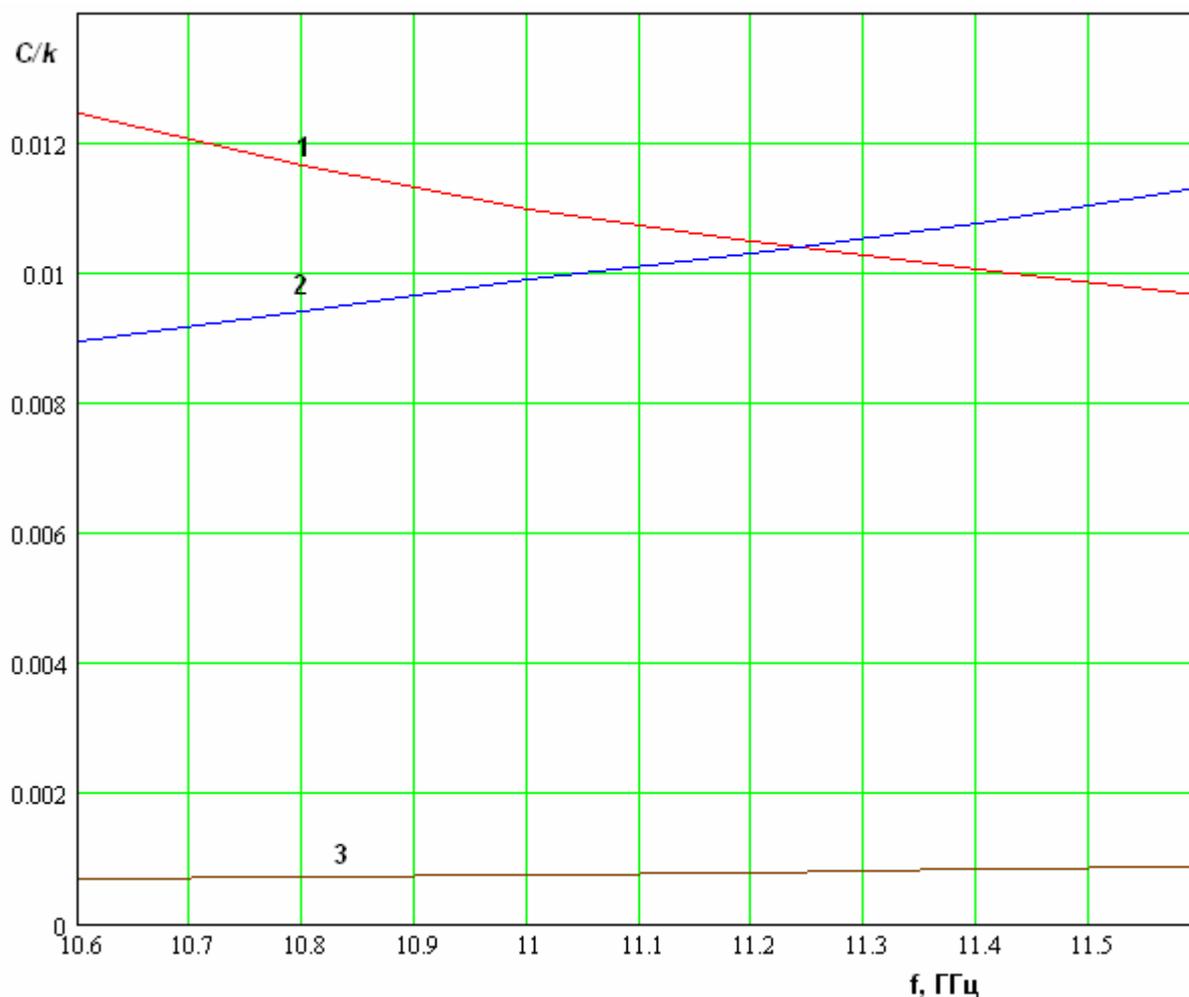


Рис. 10.

Обращает на себя внимание также то, что по модулю ЛКС  $C_{1,2}$  существенно больше ЛКС  $C_3$ . Такое соотношение между ЛКС говорит о том, что преобразование поляризации в системе играет второстепенную роль. Тем не менее, на основании анализа собственных волн рано окончательно судить об интенсивности этого эффекта, поскольку при определенных условиях, о которых говорилось выше в структуре может возникать интенсивная связь волн разной поляризации, которая усиливается за счет эффектов накопления при распространении волн вдоль оси  $Oz$ .

Модули ЛКС  $C_{1,2}$  зависят от частоты по-разному: коэффициент  $C_1$  растет, а  $|C_2|$  падает. На некоторой частоте, как видно из рис. 10 кривые 1 и 2 пересекаются. В окрестности точки пересечения ЛКС по модулю близки. Эта область представляет наибольший интерес, так как в ней структура приобретает

дополнительную симметрию, необходимую для эффективного функционирования ДОС.

### **Заключение**

Таким образом, цель сформулированная в начале работы достигнута. Построена достаточно простая математическая модель решетки связанных двухмодовых волноводов квадратного сечения. С помощью этой модели изучено поведение собственных волн решетки. В ходе исследования обнаружены и изучены эффекты интенсивной связи волн разной поляризации, а также эффект возникновения отрицательного ЛКС. Полученные результаты являются основой для следующего этапа исследования ДОС, который заключается в решении задачи о возбуждении решетки связанных волноводов, построении блока фазосдвигателей и излучении энергии в свободное пространство.

### **Литература**

1. Вендик О.Г. Антенны с немеханическим движением луча. М.: Сов. Радио. 1965.
2. Bankov S.E., Bugrova T.I. // Microwave and Optical Technology Letters, 1993. V. 6. P. 782.
3. Банков С.Е. // РЭ. 2009. Т. 54. №7. С. 796.
4. Банков С.Е. // РЭ. 2009. Т. 54. №10. С. 1157.
5. Банков С.Е., Калошин В.А, Фролова Е.В. Компьютерное проектирование и экспериментальное исследование кластерного излучателя на основе EBG структуры. [Электронный ресурс]. // Журнал радиоэлектроники. - 2009. - №3. – Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/mar09/1/text.html>, свободный. – Загл. с экрана.
6. Марков Г.Т, Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Энергия, 1967.
7. Сазонов В.П., Силин Р.А. Замедляющие системы. М.: Сов. Радио. 1966.