

УДК 519.216

## МЕТОД МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ЧАСТОТЫ В РАДИОВОЛНОВЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

В. К. Игнатъев, А. В. Никитин

Волгоградский государственный университет, кафедра радиофизики

Получена 17 октября 2011 г., после доработки - 21 ноября 2011 г.

**Аннотация.** Показано, что если для волны существует квазигармоническое представление с ограниченной медленно меняющейся частотой, то оно единственно. Необходимым и достаточным условием существования волны с медленно меняющимися амплитудой и частотой является медленное изменение параметров среды, в которой распространяется волна, и то, что источником волны является осциллятор с медленно меняющимися параметрами.

**Ключевые слова:** волна, квазигармоническое представление, медленно меняющаяся частота, единственность.

**Abstract.** It is shown that in case quasiharmonious representation for a wave with the limited slowly varying frequency exists, then it is unique. Necessary and sufficient condition for the wave's with slowly varying amplitude and frequency existence is a slow varying parameters of the environment through the wave propagates, and that the wave's source is the oscillator with slowly varying parameters.

**Key words:** wave, quasiharmonious representation, slowly varying frequency, uniqueness.

### Введение

Наиболее точно измеряемой физической величиной является частота, современные атомные часы имеют относительную нестабильность порядка  $10^{-15}$  и ожидается создание квантовых стандартов частоты с нестабильностью на уровне  $10^{-17}$  [1]. В радиоволновых измерениях частотный метод заключается в

извлечении информации об измеряемой величине из мгновенной частоты квазигармонической волны вида

$$x(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t)\cos[\theta(\mathbf{r}, t)], \quad (1)$$

причем частная производная по времени полной фазы  $\theta(\mathbf{r}, t)$  называется мгновенной частотой  $\omega(\mathbf{r}, t) = \partial\theta(\mathbf{r}, t)/\partial t$ , а ее градиент – волновым вектором  $\mathbf{k}(\mathbf{r}, t) = \partial\theta(\mathbf{r}, t)/\partial\mathbf{r}$  [2]. Однако спектр квазигармонической волны может меняться при ее распространении, например, из-за движения среды, в которой волна распространяется [3]. В результате мгновенная частота, регистрируемая приемником, будет отличаться от мгновенной частоты излучателя. Поэтому при извлечении информации из распространяющегося электромагнитного поля с точностью, которая обеспечивается современными квантовыми стандартами частоты [4] и требуется для систем радиоастрономии, радиоэлектронного противодействия, радиоволновых датчиков и контролируемых с помощью электромагнитных волн параметров технологических процессов [5, 6], необходимо определять динамику не только мгновенной частоты, но и волнового вектора квазигармонической волны, например, с помощью радиоинтерферометров [7].

### Волны с медленно меняющейся мгновенной частотой

Рассмотрим для примера задачу акустической локации. Пусть в системе координат, связанной с приемником по траектории  $\mathbf{r}_0(t)$  движется точечный источник гармонического сигнала с частотой  $\omega_0$ , а однородная несжимаемая среда перемещается со скоростью  $\mathbf{V}(t) = d\mathbf{r}_1(t)/dt$ , где  $\mathbf{r}_1(t)$  – координата элемента среды в системе отсчета, связанной с приемником. В системе отсчета, связанной со средой, волновое уравнение будет иметь вид [8]

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi \exp(i\omega_0 t)\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0(t)), \quad (2)$$

где  $\varphi(\mathbf{r}', t)$  – потенциал колебательной скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{r}', t) = -\nabla\varphi$ ,  $c$  – скорость звука в неподвижной среде,  $\mathbf{r}'_0(t) = \mathbf{r}_0(t) - \mathbf{r}_1(t)$  – координата источника в системе отсчета, связанной со средой.

Решение волнового уравнения (2) имеет вид [8]

$$\varphi(\mathbf{r}', t) = \frac{2 \exp[i\omega_0(t - R'/c)]}{|df/dR'|}, \quad (3)$$

где  $R'$  – положительный корень уравнения

$$f(R') = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0(t - R'/c)|^2 - R'^2 = 0. \quad (4)$$

Возвращаясь в систему координат, связанную с приемником, положим в уравнениях (3) и (4)  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)$ :

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{2 \exp[i\omega_0(t - R/c)]}{|df/dR|}, \quad (5)$$

$$f(R) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_0(t - R/c) + \mathbf{r}_1(t - R/c)|^2 - R^2 = 0. \quad (6)$$

Мгновенная частота и волновой вектор, регистрируемые приемником, будут при этом иметь вид

$$\omega(\mathbf{r}, t) = \omega_0 \left( 1 - \frac{\partial R / \partial t}{c} \right), \quad \mathbf{k} = \frac{\omega_0}{c} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}}. \quad (7)$$

Дифференцируя уравнение (6) по времени и по координатам и полагая, что скорость среды  $V$  меняется медленно и много меньше скорости звука  $c$ , получим, что в дальней зоне можно положить  $R \approx r_0$ , тогда в начале координат при  $\mathbf{r} = 0$  получаем:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{c(\mathbf{v} + \mathbf{a} r_0/c)\mathbf{n}}{c + (\mathbf{v} - \mathbf{V} - \mathbf{a} r_0/c)\mathbf{n}}, \quad \frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{c\mathbf{n}}{c + (\mathbf{v} - \mathbf{V} - \mathbf{a} r_0/c)\mathbf{n}}. \quad (8)$$

Здесь  $\mathbf{n} = \mathbf{r}_0/r_0$ ,  $\mathbf{a} = d\mathbf{V}/dt$ , значение скорости источника  $\mathbf{v}$  берется в момент времени  $t - r_0/c$ , а скорости среды  $\mathbf{V}$  и ее ускорения  $\mathbf{a}$  – в момент времени  $t$ .

Из формул (7) и (8), в свою очередь, следует, что приемник, расположенный в начале координат, зафиксирует следующие мгновенную частоту и волновой вектор:

$$\omega(t) = \omega_0 \frac{1 - V/c}{1 - V/c - a r_0/c^2 + v/c}, \quad \mathbf{k}(t) = -\frac{\mathbf{n}\omega_0/c}{1 - V/c - a r_0/c^2 + v/c}. \quad (9)$$

Здесь  $v = \mathbf{v}\mathbf{n}$ ,  $V = \mathbf{V}\mathbf{n}$ ,  $a = \mathbf{a}\mathbf{n}$  – радиальные компоненты скорости источника  $\mathbf{v}$ , скорости среды  $\mathbf{V}$  и ее ускорения  $\mathbf{a}$ .

Из формул (9) следует, что независимо от движения источника и среды волновой вектор  $\mathbf{k}(t) = -k(t)\mathbf{n}$  в любой момент времени направлен от источника к приемнику, что соответствует приближению геометрической акустики [8]. Для однородной среды с медленно меняющимися параметрами, в данном случае – скоростью, условия этого приближения выполняются. Кроме того,  $\omega(t) = k(t)(c - V)$ , то есть скорость звука в движущейся среде, измеренная неподвижным приемником, составляет  $c - V$ , что соответствует правилу сложения скоростей.

Для неподвижной среды из первой формулы (9) при  $V = 0$  получается классическая формула эффекта Доплера  $\tilde{\omega}(t) = \omega_0 / (1 + v/c)$ . Если же источник покоится относительно приемника, а среда движется неравномерно, приемник зафиксирует частоту

$$\omega(t) = \omega_0 \frac{1}{1 - ar_0 / (c^2 - Vc)},$$

а вычисление скорости источника по классической формуле Доплера покажет величину  $v = -ar_0/c$ . Эта величина – погрешность измерения скорости частотным методом – растет с увеличением расстояния до источника и может оказаться существенной в «порывах» ветра. Даже равномерное движение среды между движущимся источником и приемником вносит относительную погрешность в измерение скорости источника частотным методом, равную  $V/c$ .

Все эти погрешности можно исключить, если приемник фиксирует не только мгновенную частоту волны, но и мгновенное значение ее волнового вектора. Тогда из формул (9) получаем

$$v(t) = \frac{\omega_0 - \omega(t)}{k(t)} - \frac{r_0}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega(t)}{k(t)} \right), \quad V(t) = c - \frac{\omega(t)}{k(t)}. \quad (10)$$

Первое уравнение (10) можно переписать в виде линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{dr_0}{dt} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega}{ck} \right) r_0 + \frac{\omega - \omega_0}{k} = 0,$$

решение которого при известном начальном положении источника имеет вид:

$$r_0(t') = r_0(0) \exp\left[\frac{\omega(t) - \omega(0)}{ck(t) - ck(0)}\right] + \exp\left[\frac{\omega(t)}{ck(t)}\right] \int_0^t \exp\left[-\frac{\omega(\tau)}{ck(\tau)}\right] \frac{\omega_0 - \omega(\tau)}{k} d\tau, \quad (11)$$

где  $t' = t - r_0/c$ . Соответственно,

$$v(t') = \frac{\omega_0 - \omega(t)}{k(t)} + \frac{\omega(t)}{ck(t)} \exp\left[\frac{\omega(t)}{ck(t)}\right] \left\{ r_0(0) \exp\left[-\frac{\omega(0)}{ck(0)}\right] + \int_0^t \exp\left[-\frac{\omega(\tau)}{ck(\tau)}\right] \frac{\omega_0 - \omega(\tau)}{k} d\tau \right\}. \quad (12)$$

Второе слагаемое в формуле (12) представляет вносимую движением среды поправку к измеренной частотным способом скорости источника, вычисляемую по измеренным значениям волнового вектора. Если скорость источника меняется медленно, в формуле (11) можно положить  $r_0(t') = r_0(t)(1 - v(t)/c)$ .

Заметим, что полученные результаты для звукового поля движущегося источника во многих отношениях сходны с потенциалами Ленарда – Вихерта электромагнитного поля движущегося в вакууме точечного заряда  $e$  [9]:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')| (1 - \mathbf{n}\mathbf{v}(t')/c)}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 e \mathbf{v}_e(t')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')| (1 - \mathbf{n}\mathbf{v}_e(t')/c)},$$

где момент времени  $t'$ , в который берется координата заряда  $\mathbf{r}_e$  и его скорость  $\mathbf{v}_e$ , связаны с моментом измерения  $t$  соотношением  $ct' = ct - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|$ . Если заряд совершает гармонические колебания с частотой  $\omega_0$  около положения равновесия  $\mathbf{r}_0$ , то есть  $\mathbf{r}_e(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 \exp(i\omega_0 t)$ ,  $|\mathbf{r}_1| \ll |\mathbf{r}_0|$ , в дальней зоне переменная часть электрического поля будет равна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 \omega_0^2 \mathbf{d} \exp(i\omega_0 t')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')| (1 - \mathbf{n}\mathbf{v}(t')/c)}, \quad (13)$$

где  $\mathbf{d} = e\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}_0/dt$ . Нетрудно видеть, что уравнение (13) для проекций электрического поля аналогично уравнению (5) для акустического поля с учетом соотношений (6) и (8).

Влияние движения среды на распространение электромагнитной волны вида (13) можно качественно учесть с помощью известного результата Физо. В движущемся со скоростью  $u$  диэлектрике с коэффициентом преломления  $n$  скорость света составляет  $c' = c/n + u(1 - 1/n^2)$  [10]. Поэтому в формулу (9)

вместо скорости  $V$  следует подставить  $u(n - 1/n)$ . Таким образом, относительная погрешность, вносимая движением среды в частотный метод радиоволновых измерений, составит  $u(n - 1/n)/c$ . Для тропосферы  $n - 1 \approx 3 \cdot 10^{-4}$  [3], и при скорости ветра 30 м/с эта погрешность составит  $6 \cdot 10^{-11}$  и может проявиться лишь в предельных измерениях. Однако для ионосферной плазмы со сложным законом дисперсии соответствующая погрешность может оказаться существенно больше и, например, увеличить погрешность в опыте по измерению скорости нейтрино [11]. Устранить эту погрешность можно измерением волнового вектора в точках синхронизации часов по сигналам GPS [12].

Радиоэлектронные системы локации и связи в большинстве случаев находятся на поверхности Земли и движутся с ней в пространстве, поэтому развитие методов траекторных измерений космических объектов и космической навигации, анализ работы высокоточных доплеровских геодезических систем и ряд других задач требует строгого учета преобразования мгновенной частоты радиосигналов за счет вращения и поступательного движения как радиопередающего и радиоприемного звеньев, так и объекта локации, а также гравитационного поля в пространстве между ними. Так, строгое решение задачи о рассеянии монохроматической (в неподвижной системе отсчета) плоской электромагнитной волны вращающимся телом показывает, что спектр поля рассеяния зависит от отношения периода вращения к времени измерения и электродинамических свойств тела, а отраженная волна является квазигармонической [13] вида (1).

В рамках общей теории относительности неинерциальность системы отсчета может быть учтена введением дополнительных локальных гравитационных полей, гравитация же в отношении своего воздействия на электромагнитное поле играет роль среды с переменными электрической и магнитной проницаемостями [14]. Таким образом, в неинерциальных системах отсчета и с учетом гравитации даже вакуум следует рассматривать как неоднородную среду, формирующую сложную зависимость между волновым

вектором и частотой распространяющейся в нем волны (1). В современных радионавигационных системах обычно учитывается влияние гравитационного поля только на мгновенную частоту, но не на волновой вектор электромагнитной волны [4, 12].

Для однозначного описания волны (1) с помощью двух функций – амплитуды (огибающей)  $A(\mathbf{r}, t)$  и полной фазы  $\theta(\mathbf{r}, t)$  необходимо то или иное дополнительное условие. Если в любой точке пространства полная фаза определяется как аргумент аналитического сигнала

$$z(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) \exp[i\theta(\mathbf{r}, t)] = x(\mathbf{r}, t) + iy(\mathbf{r}, t),$$

построенного на основе исследуемой волны  $x(\mathbf{r}, t)$  с помощью преобразования Гильберта [15]:

$$y(\mathbf{r}, t) = \hat{H}[x(\mathbf{r}, t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\mathbf{r}, \tau)}{t - \tau} d\tau = A(\mathbf{r}, t) \sin[\theta(\mathbf{r}, t)], \quad (14)$$

то огибающая  $A(\mathbf{r}, t)$  и мгновенная частота  $\omega(\mathbf{r}, t)$  волны (1) равны

$$A(\mathbf{r}, t) = \sqrt{x^2(\mathbf{r}, t) + y^2(\mathbf{r}, t)},$$

$$\omega(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \theta(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{x(\mathbf{r}, t) \partial y(\mathbf{r}, t) / \partial t - y(\mathbf{r}, t) \partial x(\mathbf{r}, t) / \partial t}{x^2(\mathbf{r}, t) + y^2(\mathbf{r}, t)}. \quad (15)$$

Можно показать [16, 17], что преобразование Гильберта (14) является единственным непрерывным линейным преобразованием, связывающим функции  $x(\mathbf{r}, t)$  и  $y(\mathbf{r}, t)$ . Применяются и другие определения полной фазы [18], которые, как и определение Габора [15], являются формально-математическими и могут приводить к физическим противоречиям [19].

Отметим, что вопрос о единственности представления волны в форме (1) существенен, если огибающей и (или) мгновенной частоте сопоставляются измеряемые физические величины, например, огибающая определяет энергию волны, а мгновенная частота связана со скоростью объекта, как в задаче доплеровской локации.

Рассмотрим модельную задачу. Пусть излучателем является электрический диполь, ориентированный вдоль оси  $y$  и движущийся равномерно и прямолинейно вдоль оси  $x$  со скоростью  $v \ll c$ . Если дипольный

момент совершает гармонические колебания с постоянной частотой  $\omega_0$  и постоянной амплитудой  $p_0$ , то напряженность магнитного поля в начале координат в приближении дальней зоны и без учета релятивистских эффектов в будет равна [9]

$$H_z(0,t) = \frac{\omega_0^2 p_0}{c^2 vt} \sin(\omega_0 t). \quad (16)$$

Здесь  $x(t)$  – текущая координата диполя и принято, что в момент времени  $t = 0$  излучатель проходит точку  $x = 0$  с нулевой начальной фазой колебания. Если диполь движется с постоянной скоростью, то  $x(t) = vt$ , при  $v \ll c$  можно пренебречь доплеровским сдвигом частоты и вычислить преобразование Гильберта (14) для сигнала (16) аналитически:

$$y(t) = \frac{p_0 \omega_0^2}{c^2 vt} [\cos(\omega_0 t) - 1],$$

Для огибающей и полной фазы в этом случае по формулам (15) получим

$$A(t) = \frac{2p_0 \omega_0^2}{c^2 vt} \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right), \quad \theta(t) = -\frac{\omega_0 t}{2}. \quad (17)$$

Если полагать, что мгновенная частота сигнала, регистрируемого приемником, определяется источником колебаний, а огибающая – расстоянием до приемника, то представление сигнала в форме (17) приводит к физически неправильному результату – источник совершает сложное колебательное движение относительно начала координат, а частота принятого сигнала вдвое меньше, чем частота излученного. Таким образом, в представлении (16) огибающая и мгновенная частота связаны с физическими параметрами системы, а в представлении (17) – нет.

В этом случае нужны физические условия однозначного определения огибающей и полной фазы. Как показано в Приложении, при естественных предположениях, что в любой точке пространства огибающая  $A(\mathbf{r}, t)$  и мгновенная частота  $\omega(\mathbf{r}, t)$  – положительные и непрерывные функции, а  $\omega(\mathbf{r}, t)$  ограничена как сверху, так и снизу

$$0 < \omega_m \leq \omega(\mathbf{r}, t) \leq \omega_M, \quad (18)$$



одним из таких условий может быть ограниченность носителя спектра мгновенной частоты  $\omega(\mathbf{r}, t)$ . Заметим, что представление (6) этим условиям удовлетворяет, а основанное на преобразовании Гильберта (14) представление (17) со знакопеременной огибающей – нет.

Пусть в любой точке пространства  $\mathbf{r}$  мгновенная частота может быть представлена интегралом Фурье:

$$\omega(\mathbf{r}, t) = \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \tilde{\omega}(\mathbf{r}, p) \exp(ipt) dp.$$

Тогда для производных мгновенной частоты справедлива оценка

$$|\omega^{(n)}(\mathbf{r}, t)| \leq P \omega_B^n, \quad P = \int_{-\omega_B}^{\omega_B} |\tilde{\omega}(\mathbf{r}, p)| dp. \quad (19)$$

Квазигармоническую волну (1), для которой выполняются условия (18) и (19), естественно назвать волной медленно меняющейся мгновенной частотой (МММЧ).

### Существование квазигармонических волн МММЧ

На практике существование квазигармонического представления (1) с медленно меняющейся мгновенной частотой можно обосновать, например, связью параметров волны с медленно меняющимися параметрами среды, в которой распространяется волна, или породившей ее физической системы. Покажем, что для среды с медленно меняющимися во времени параметрами нормальной является волна вида (1) с медленно меняющейся мгновенной частотой. Волновое уравнение для электромагнитной волны в однородной среде без дисперсии с переменными проводимостью  $\sigma(t)$ , диэлектрической  $\epsilon(t)$  и магнитной  $\mu(t)$  проницаемостями имеет вид [9]

$$c^2 \Delta \mathbf{E} = \left( 4\pi \frac{d(\sigma\mu)}{dt} + \frac{d}{dt} \left( \mu \frac{d\epsilon}{dt} \right) \right) \mathbf{E} + \left( 4\pi\sigma\mu + \epsilon \frac{d\mu}{dt} + 2\mu \frac{d\epsilon}{dt} \right) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + (\epsilon\mu) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (20)$$

Будем искать решение уравнения (20) в виде волны с линейной поляризацией, положив  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}R(\mathbf{r})T(t)$ . Подставляя это выражение в

уравнение (20), с помощью стандартной процедуры разделения переменных получим

$$\Delta R(\mathbf{r}) + k^2 R(\mathbf{r}) = 0, \quad (21)$$

$$\ddot{T}(t) + p(t)\dot{T}(t) + q(t)T(t) = 0, \quad (22)$$

где  $k$  – волновое число и обозначено

$$p(t) = 4\pi \frac{\sigma}{\varepsilon} + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt} + \frac{2}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad p(t) = \frac{1}{\varepsilon\mu} \left( c^2 k^2 + 4\pi \frac{d(\sigma\mu)}{dt} + \frac{d}{dt} \left( \mu \frac{d\varepsilon}{dt} \right) \right) - \quad (23)$$

медленно меняющиеся коэффициенты.

Решение уравнения (21) можно записать в виде

$$R(\mathbf{r}) = \exp(\pm i\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad (24)$$

где введен волновой вектор  $\mathbf{k} = k\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{m}$  – единичный вектор. Уравнение (22), описывающее осциллятор с переменными параметрами, подстановкой

$$T(t) = y(t) \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_0^t p(t') dt' \right] \quad (25)$$

приводится к виду

$$\ddot{y}(t) + \Omega^2(t)y(t) = 0, \quad (26)$$

где

$$\Omega^2(t) = q(t) - \frac{1}{2} \frac{dp(t)}{dt} - \frac{1}{4} p^2(t). \quad (27)$$

Условие медленности изменения параметров осциллятора можно выразить соотношением  $1/\Omega_0\tau = \mu$ ,  $\mu \ll 1$ , или записать следующим образом:

$$\dot{\Omega}(t) \sim \mu\Omega^2(t), \quad \mu \ll 1. \quad (28)$$

Если уравнение (22) описывает линейный осциллятор с малыми потерями, то с учетом физических допущений  $p^2(t) \sim \mu q(t)$ . При таких условиях с математической точки зрения уравнение (26) с медленно меняющимся коэффициентом эквивалентно уравнению с малым параметром  $\mu$  при старшей производной. Такие уравнения решают с помощью асимптотических методов разложения по малому параметру [2, 20 – 22]. Такая процедура приводит к асимптотическому ряду, который расходится при увеличении количества его

членов: при фиксированном  $\mu$ , начиная с некоторого номера  $n$ , следующие слагаемые оказываются больше предыдущих [2, 23]. Поэтому ограничиваются конечным отрезком ряда, например, при использовании приближения ВКБ [21] двумя его членами. При заданных начальных условиях можно представить решение в тригонометрической форме:

$$y(t) = \frac{A_0}{\sqrt{\Omega(t)}} \cos \left[ \int_0^t \Omega(t') dt' + \varphi_0 \right] = \frac{A_0}{\sqrt{\Omega(t)}} \cos[\theta(t)], \quad \theta(t) = \int_0^t \Omega(t') dt' + \varphi_0.$$

Здесь  $A_0$  и  $\varphi_0$  – константы, определяемые из начальных условий. Возвращаясь к функции  $T(t)$ , получим

$$T(t) = \frac{A_0}{\sqrt{\Omega(t)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_0^t p(t') dt' \right] \cos \left[ \int_0^t \Omega(t') dt' + \varphi_0 \right] = a(t) \cos[\theta(t)], \quad (29)$$

где

$$a(t) = \frac{A_0}{\sqrt{\Omega(t)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_0^t p(t') dt' \right], \quad \theta(t) = \int_0^t \Omega(t') dt' + \varphi_0. \quad (30)$$

Видно, что введенная ранее как производная полной фазы  $\theta(t)$  частота  $\omega(t)$  [2] совпадает с  $\Omega(t)$ . Соотношения (23) и (27) определяют при этом закон дисперсии МММЧ волны. Записывая условие медленного изменения параметров среды и малых потерь в ней в виде

$$|d\varepsilon/dt| \ll \omega(t)\varepsilon, \quad |d\mu/dt| \ll \omega(t)\mu, \quad |d\sigma/dt| \ll \omega(t)\sigma, \quad \sigma \ll \omega(t)\varepsilon, \quad (31)$$

получим  $\omega(t) = ck/n(t)$ , где  $n(t) = \sqrt{\varepsilon(t)\mu(t)}$  – переменный коэффициент преломления. С учетом соотношений (24), (29) и (30) волновой процесс можно записать в форме (1), где

$$\theta(\mathbf{r}, t) = k \left( c \int_0^t \frac{dt'}{n(t')} - \mathbf{m}\mathbf{r} \right) + \varphi_0. \quad (32)$$

Источником волн МММЧ может быть осциллятор с медленно меняющимися параметрами. К примеру, в ЯМР известны уравнения Блоха для поперечных проекций магнитного момента [24]:

$$\dot{M}_x = \gamma M_y B - M_x/T_2, \quad \dot{M}_y = -\gamma M_x B - M_y/T_2, \quad B_x = 0, \quad B_y = 0, \quad B_z = B(t),$$

из которых легко получается уравнение вида (22) для свободной прецессии поперечной намагниченности в медленно меняющемся продольном магнитном поле  $B(t)$ , где  $T(t) = M_x$  или  $M_y$ ,  $p(t) = 2/T_2 - \dot{B}/B$ ,  $q(t) = \gamma^2 B^2 - \dot{B}/(BT_2) + 1/T_2^2$ .

В волновой зоне магнитно-дипольное излучение описывается векторным потенциалом [9]  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = [\dot{\mathbf{M}}(t - r/c) \times \mathbf{r}] / cr^2$ . В дальней зоне волну можно считать плоской, распространяющейся вдоль оси  $z$ . С учетом формулы (32) волновой процесс можно записать в форме (1):

$$A_x(z, t) = \frac{A_0(t - z/c) \sqrt{\omega(t - r/c)}}{cz} \cos \left[ \int_0^{t-z/c} \omega(\tau) d\tau + \varphi(t) \right], \quad (33)$$

где

$$A_0(t) = C \left( 1 + \frac{1}{\omega^2(t) T_2^2} - \frac{\dot{B}(t)}{B(t) \omega^2(t) T_2} \right), \quad \omega(t) = \sqrt{\gamma^2 B^2(t) - \frac{3(\dot{B})^2}{4B^2}},$$

$$\varphi(t) = -\text{arctg} \left( \frac{2\omega(t)}{2/T_2 - \dot{B}/B} \right).$$

Из формулы (33) видно, что если магнитное поле медленно меняется во время свободной прецессии, то есть  $|dB/dt| \ll \omega(t)B(t)$ , то магнитно-дипольное излучение будет волной ММЧ. Если возможно по измеренному, например спиновым детектором [24], сигналу (33) динамику мгновенной частоты и амплитуды, можно проследить за динамикой изменения продольного магнитного поля  $B(t)$  и времени поперечной релаксации  $T_2(t)$ , что важно в задачах спектроскопии, томографии, исследовании геомагнитного поля и т. д. Аналогичный результат можно получить для электрического дипольного перехода с помощью оптических уравнений Блоха [24], а так же для любого мультипольного излучения [9].

Зафиксируем в пространстве точку  $\mathbf{r}_0$ , например, координату приемника, в котором квазигармоническая волна (1) создаст колебание

$$y(t) = x(\mathbf{r}_0, t) = a(t) \cos[\varphi(t)], \quad (34)$$

где обозначено  $a(t) = A(\mathbf{r}_0, t)$ ,  $\varphi(t) = \theta(\mathbf{r}_0, t)$ . Рассмотрим колебание вида (34) медленно меняющимися амплитудой и мгновенной частотой (МММЧ),

условие медленного изменения по аналогии с условием МММЧ (19) можно сформулировать в виде

$$|a^{(n)}(t)| \leq \mu^n \omega^n(t) a(t), \quad |\omega^{(n)}(t)| \leq \mu^n \omega^{n+1}(t), \quad 0 \leq \mu \ll 1. \quad (35)$$

При выполнении условий МММЧ вида (35) любая производная МММЧ процесса тоже будет МММЧ процессом. Найдем первообразную колебания (34). Интегрируя по частям и полагая, что  $a(t \rightarrow -\infty) \rightarrow 0$ , получаем

$$\int_{-\infty}^t a(\tau) e^{i\varphi(\tau)} d\tau = -\frac{ia(t)}{\omega(t)} e^{i\varphi(t)} + i \int_{-\infty}^t \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{a(\tau)}{\omega(\tau)} \right] e^{i\varphi(\tau)} d\tau = \left[ -\frac{ia(t)}{\omega(t)} + \frac{\dot{a}(t)\omega(t) - a(t)\dot{\omega}(t)}{\omega^3(t)} + \dots \right] e^{i\varphi(t)}.$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условий МММЧ (35) все слагаемые в квадратных скобках являются медленно меняющимися функциями, удовлетворяющими условию (35), а каждое последующее слагаемое имеет порядок малости  $\mu$  по отношению к предыдущему. Поэтому ряд в квадратных скобках быстро сходится к медленно меняющейся функции (амплитуде). Следовательно, первообразная МММЧ процесса – тоже МММЧ процесс. Поскольку напряженности полей в волновой зоне пропорциональны первой или второй производной дипольного (или мультипольного) момента [9], для того, чтобы квазигармоническая волна в дальней зоне была волной МММЧ, необходимо и достаточно, чтобы дипольный момент излучателя был МММЧ колебанием.

С другой стороны, подстановкой функции (34) в уравнение (22) можно показать, что любое колебание МММЧ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами вида

$$p(t) = -2 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - \frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}, \quad q(t) = \omega^2(t) - \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + 2 \frac{(\dot{a}(t))^2}{a^2(t)} + \frac{\dot{a}(t)\dot{\omega}(t)}{a(t)\omega(t)}. \quad (36)$$

Таким образом, между медленно меняющимися мгновенной частотой и амплитудой колебания (34) и медленно меняющимися коэффициентами уравнения (22) существует взаимно однозначная связь вида (30) и (36), и можно сформулировать необходимое и достаточное условие того, что квазигармоническая волна была волной МММЧ – источником волны является

осциллятор с медленно меняющимися параметрами, а параметры среды, в которой распространяется волна, медленно меняются во времени.

Аппаратная реализация цифровых параметрических алгоритмов оценивания огибающей и мгновенной частоты квазигармонического сигнала по короткой выборке и эксперименты с реальными электромеханическими системами [25 – 28] подтверждают высокие метрологические характеристики метода медленно меняющейся мгновенной частоты при исследовании нестационарных систем. Отличительной особенностью этого метода является малое количество операций при вычислении огибающей и мгновенной частоты, не зависящее от длительности скользящего окна, в рамках которого производится оценка [28]. Это позволяет реализовать измерительную систему на базе сигнальных процессоров и добиться высокой скорости оценивания огибающей и мгновенной частоты. Дальнейшим совершенствованием этого метода является разработка быстрых алгоритмов для оценивания волнового вектора.

### **Заключение**

Основные мировые производители промышленного оборудования, такие как Siemens, Mitsubishi, Allen-Bradley, Emerson и другие в своих последних разработках и решениях широко используют беспроводные средства измерения и передачи данных. Если для передачи данных, в основном, используют наборы стандартов IEEE 802.11 и 802.15, то для измерений таких стандартов не существует, а датчики и вторичные измерительные приборы постоянно модифицируются в сторону увеличения класса точности и скорости измерений. Важнейшим условием для этого является минимизация методических и динамических погрешностей. Весьма перспективным в задачах дистанционного контроля является частотный метод радиоволновых измерений [6]. Доказанные условия существования и единственности квазигармонического представления волнового процесса позволяют установить взаимно однозначную связь огибающей и мгновенной частоты сигнала приемника с медленно

меняющимися физическими параметрами породившей волну системы или среды, в которой она распространяется, без предположений об узкополосности волнового процесса.

### Приложение. Единственность квазигармонического представления ММЧ волны

Предположим, что квазигармоническое представление (1) для волны ММЧ не единственно, то есть помимо функций  $A(\mathbf{r}, t)$  и  $\theta(\mathbf{r}, t)$  существуют еще функции  $B(\mathbf{r}, t)$  и  $\vartheta(\mathbf{r}, t)$  такие, что  $x(\mathbf{r}, t) = B(\mathbf{r}, t)\cos[\vartheta(\mathbf{r}, t)]$ , причем и функция  $\theta(\mathbf{r}, t)$ , и функция  $\vartheta(\mathbf{r}, t)$  удовлетворяют условиям (18) и (19) во всех точках пространства, но при этом  $\vartheta(\mathbf{r}, t)$  не равна тождественно  $\theta(\mathbf{r}, t)$ . Это значит, что существует, по крайней мере одна, точка  $\mathbf{r}_0$ , такая, что в какой-то момент времени  $t = t'$  имеет место неравенство  $\vartheta(\mathbf{r}_0, t') \neq \theta(\mathbf{r}_0, t')$ . Из непрерывности функций  $\theta(\mathbf{r}, t)$  и  $\vartheta(\mathbf{r}, t)$  следует, что это неравенство выполняется и в некоторой окрестности момента времени  $t'$ .

Зафиксируем в пространстве точку  $\mathbf{r}_0$  и рассмотрим колебание вида (34)

$$y(t) = x(\mathbf{r}_0, t) = a(t)\cos[\varphi(t)] = b(t)\cos[\psi(t)], \quad (37)$$

где обозначено  $a(t) = A(\mathbf{r}_0, t)$ ,  $\varphi(t) = \theta(\mathbf{r}_0, t)$ ,  $b(t) = B(\mathbf{r}_0, t)$ ,  $\psi(t) = \vartheta(\mathbf{r}_0, t)$ . По предположению о не единственности квазигармонического ММЧ представления  $\varphi(t) \neq \psi(t)$ , но обе мгновенные частоты  $\omega(t) = d\varphi(t)/dt$  и  $\omega_1(t) = d\psi(t)/dt$  удовлетворяют условиям (18) и (19).

Пусть функция  $y(t)$  вида (37) имеет нули в моменты времени  $t_k$ , образующие монотонную последовательность без конечных предельных точек. Из непрерывности и положительности функций  $a(t)$  и  $b(t)$  следует, что

$$\varphi(t_k) = \psi(t_k) = \theta_k = \pi k - \pi/2. \quad (38)$$

Здесь принято, что в момент времени  $t = t_0 = 0$  функция  $y(t)$  проходит через ноль с положительной производной. Таким образом, нахождение полной фазы  $\varphi(t)$  сводится к решению интерполяционной задачи для неэквидистантной последовательности точек (узлов интерполяции)  $t_k$ .

Задача интерполяции (35) всегда имеет решение, не обязательно в виде ряда Лагранжа, в классе целых аналитических функций, какими бы ни были действительные числа  $t_k$  и  $\theta_k$  [29]. Это решение не является единственным. Пусть целые функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ , где  $z = t + iu$ , являются решением интерполяционной задачи (38). Из условия (18) положительности мгновенной частоты следует, что в точках  $z = t_k$  функция  $\cos[\varphi(z)]$  имеет простые нули. Тогда функция

$$\chi(z) = [\psi(z) - \varphi(z)]/\cos[\varphi(z)]$$

тоже является целой аналитической, так как нули ее знаменателя совпадают с нулями числителя. Поэтому общее решение интерполяционной задачи (38) в классе целых функций имеет вид

$$\psi(z) = \varphi(z) + \chi(z)\cos[\varphi(z)], \quad (39)$$

где  $\chi(z)$  – произвольная целая функция.

Покажем, что решение интерполяционной задачи (38) единственно в классе целых функций с финитным спектром. Пусть существует конечный предел

$$\omega_C = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \omega(t) dt \right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{2\pi k}{t_k - t_{-k}} \right]. \quad (40)$$

Естественно, что  $\omega_m \leq \omega_C \leq \omega_M$ . Из ограниченности мгновенной частоты следует, что полная фаза  $\theta(t)$  растет при  $|t| \rightarrow \infty$  не быстрее чем  $t$ . Если носителем спектра функции  $\theta(t)$  является отрезок  $[-\omega_B, \omega_B]$ , причем  $\omega_B < \omega_C$ , то в силу теоремы Винера – Палея – Шварца [30, 31] ее аналитическое продолжение  $\varphi(z)$  является целой функцией конечной степени (типа), меньшей чем  $\omega_C$ .

Целая функция конечной степени имеет первый порядок. Из теоремы о порядке произведения целых функций [32] следует, что для того чтобы функция  $\psi(z)$ , не равная тождественно  $\varphi(z)$ , также имела конечную степень, меньшую  $\omega_C$ , необходимо, чтобы и функция  $\cos[\varphi(z)]$  имела порядок не выше первого. Целая функция  $\cos(z)$  имеет первый порядок, поэтому сложная



функция  $\cos[\varphi(z)]$  может иметь первый порядок только в случае, если  $\varphi(z)$  – многочлен [33]. Но многочлен степени выше первой растет на действительной оси быстрее, чем  $|t|$ , что противоречит условию (15) ограниченности мгновенной частоты.

Таким образом, различные решения интерполяционной задачи (38) возможны лишь при  $\varphi(t) = \omega_0 t - \pi/2$ . Но спектр функции вида (39)

$$\psi(t) = \omega_0 t - \pi/2 + \chi(t)\cos(\omega_0 t - \pi/2) \quad (40)$$

ограничен сверху частотой  $\omega_0 + \omega_\chi \geq \omega_C > \omega_B$ , где  $\omega_\chi$  – верхняя граничная частота спектра функции  $\chi(t)$ , так как для колебания (37) с полной фазой (9) из условия (40) следует  $\omega_C = \omega_0$ . Таким образом, при  $\chi(t)$  не равной тождественно нулю спектр функции  $\psi(t)$  не является финитным, что и доказывает единственность решения интерполяционной задачи (35) в классе целых функций с финитным спектром. При этом финитности спектра амплитуды  $a(t)$  и самого колебания  $y(t)$  не требуется.

Если предел (40) не существует, класс единственности решения интерполяционной задачи (38) определяется условием  $\omega_B < \omega_m$ . Условие положительности амплитуды  $a(t)$  также можно ослабить. Достаточно того, чтобы функция  $a(t)$  имела нули в счетном множестве точек  $t_m$ , которые полагаются известными. Тогда из множества узлов интерполяции  $t_k$  следует исключить простые нули сигнала  $x(t)$ , совпадающие с числами  $t_m$ .

Поскольку производная целой функции имеет тот же порядок и степень, что и сама функция [32], мгновенная частота в силу теоремы Винера – Палея – Шварца [30, 31] также должна быть целой функцией с финитным спектром, удовлетворяющей условию (19).

С другой стороны, при выполнении условия (19) коэффициенты разложения  $c_n$  аналитической функции  $\omega(t)/\omega_C$  в ряд Тейлора в произвольной точке удовлетворяют условию  $|c_n| \leq \omega_B^n P / (n! \omega_C)$ . Тогда для степени  $\alpha$  этой функции получаем [32]  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n]{n! c_n} \right) \leq \omega_A$  и по теореме Винера – Палея – Шварца [30, 31] мгновенная частота  $\omega(t)$  имеет финитный спектр,

ограниченный частотой  $\omega_B < \omega_C$ . Таким образом, если для колебания существует представление (37) с медленно меняющейся частотой, удовлетворяющей условиям (18) и (19), то оно единственно. В общем случае это представление может не являться аналитическим сигналом. Но из единственности квазигармонического представления ММЧ колебания (37) следует, что  $\psi(t) \equiv \varphi(t)$ , что, в свою очередь, противоречит предположению о не единственности представления (1) квазигармонической волны с медленно меняющейся частотой.

Вопрос об условиях, которым должен удовлетворять волна, чтобы для нее существовало квазигармоническое представление (1) с медленно меняющейся частотой, сводится к задаче об условиях, которым должна удовлетворять последовательность  $t_k$  нулей функции  $x(t)$ , чтобы числа  $\theta_k = \pi k - \pi/2$  могли быть значениями функции с финитным спектром, взятыми в моменты  $t_k$  [34]. Поскольку последовательность  $\theta_k$  бесконечно большая, эти условия могут быть излишне ограничительными или не иметь ясного физического смысла [35]. Например, может быть усилено условие (40) [34]:

$$t_k = \pi \frac{|k| + \delta_k}{\omega_C}, \quad \delta_k \leq \frac{1}{2|k| + 1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Работа поддержана грантом РФФИ 10-07-9713p\_a.

### Литература

1. *Риле Ф.* Стандарты частоты. Принципы и приложения / Пер. с англ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 512 с.
2. *Трубецков Д. И., Рожнев А. Г.* Линейные колебания и волны: Учеб. пособие. – М.: Физматлит, 2001. – 416 с.
3. *Яковлев О. И., Якубов В. П., Урядов В. П., Павельев А. Г.* Распространение радиоволн. – М.: ЛЕНАНД, 2009 – 496 с.
4. *Ashby N.* Relativity in the Global Positioning System. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2003-1>

5. *Перунов Ю. М., Фомичев К. И., Юдин Л. М.* Радиоэлектронное подавление информационных каналов систем управления оружием. – М.: Радиотехника, 2003. – 416 с.
6. *Викторов В. А., Лункин Б. В., Совлуков А. С.* Радиоволновые измерения. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 208 с.
7. *Томпсон Р., Моран Дж., Свенсон Дж.* Интерферометрия и синтез в радиоастрономии. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 624 с.
8. *Блохинцев Д. И.* Акустика неоднородной движущейся среды. – М.: Наука, 1981. – 208 с.
9. *Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н.* Классическая электродинамика. – М.: Физматлит, 1985. – 400 с.
10. *Бутиков Е. И.* Оптика. – М.: Высшая школа, 1986. С. 395.
11. Measurement of the neutrino velocity with OPERA detector in the CNGS beam. *Adam T. et al.* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1109/1109.4897.pdf>.
12. *Одуан К. Гино. Б.* Измерение времени. Основы GPS. – М.: Техносфера, 2002 – 400 с.
13. *Петров Б. М.* Прикладная электродинамика вращающихся тел. – М.: Горячая линия – Телеком, 2009. – 288 с.
14. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. – М.: Наука, 1973. – с. 328.
15. *Gabor D.* // IEEE. – 1946. – V. 93. – P. 429 – 457.
16. *Вакман Д. Е.* // Радиотехника и электроника. – 1972. – Т. 17. – № 5. – С. 972 – 978.
17. *Титчмарш Э. Ч.* Введение в теорию интегралов Фурье. – М.: ОГИЗ, 1948. – С. 159 – 161.
18. *Cohen L.* // Proc. IEEE. 1989. – V. 46. – № 7. – P. 941 – 981.
19. *Вайнштейн Л. А., Вакман Д. Е.* Разделение частот в теории колебаний и волн. – М.: Наука, 1983. – 288 с.
20. *Островский Л. А., Потапов А. И.* Введение в теорию модулированных волн. – М.: Физматлит, 2003. – 400 с.

21. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1983. – 352 с.
22. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
23. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – М.: Физматлит, 2004. – 800 с.
24. Квантовая радиофизика / *под ред. В. И. Чижика.* СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. – 689 с.
25. *Игнатъев В. К., Никитин А. В., Юшанов С. В.* // Изв. вузов. Электромеханика. – 2009. – № 2. – С. 28.
26. *Игнатъев В. К., Никитин А. В., Юшанов С. В.* // Известия вузов. Радиофизика. – 2010. – Т. LIII – № 2. – С. 145 – 159.
27. *Игнатъев В. К., Никитин А. В., Хоружий Д. Н., Юшанов С. В.* // Измерительная техника. – 2011. – № 1. – С. 32 – 36.
28. *Игнатъев В. К., Никитин А. В., Юшанов С. В.* // Журнал Радиоэлектроники [Электронный ресурс]. – 2011. – № 8. – 14 с. – Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug11/7/text.pdf>, свободный. – Загл. с экрана.
29. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. – М.: Физматгиз, 1959. – 212 с.
30. *Хургин Я. И, Яковлев В. П.* Финитные функции в физике и технике. – М.: Наука, 1971. – 408 с.
31. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Физматгиз, 1958. – 276 с.
32. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 176 с.
33. *Polya G.* // Journal London Math. Soc. – 1926. – V. 1. – P. 12 – 15.
34. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
35. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехтеориздат, 1956. – 632 с.