

## МОДЕЛИРОВАНИЕ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО МНОГОАЗОРНОГО РЕЗОНАТОРА

А. Н. Боголюбов, А. И. Ерохин, А. В. Шкитин

МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики

Статья получена 6 ноября 2014 г.

**Аннотация.** В данной работе предлагается математическая модель для расчета многоазорного аксиально симметричного резонатора. На основе предложенной модели произведен расчет собственных колебаний и собственных частот рассматриваемых систем.

**Ключевые слова:** атомарные функции, R-функции, многоазорный резонатор

**Abstract.** The mathematical model for computation of multigap axial-symmetric resonator is developed in this paper. The computation of eigenvalues and eigenmodes of considered system on the base of developed model was carried out.

**Key words:** atomic functions, R-functions, multigap resonator.

### Введение

В данной работе рассматривается аксиально-симметричный трехазорный резонатор. Резонаторы подобного типа находят широкое применение при конструировании усилительных клистронов с распределённым взаимодействием в миллиметровом и субмиллиметровом диапазоне длин волн[1].

В общем случае поперечное сечение рассматриваемой системы может иметь достаточно сложную форму, поэтому в данной работе для его описания применяется метод R-функций, разработанный Рвачевым В.Л. и развитый Кравченко В.Ф. [2,3]. Данный метод позволяет построить такую числовую функцию, которая равна нулю на границе плоской области достаточно сложной формы.

В работе с помощью метода R-функций строится уравнение вида  $\omega(\vec{x}) = 0$ , состоящее из композиции элементарных функций, которое полностью

описывает сечение резонатора. В зависимости от выбора R-функции она обладает некоторыми дополнительными свойствами, например, наперед заданную степень гладкости, а также удовлетворяет различным типам граничных условий. При этом  $\omega(\vec{x})$  внутри области больше нуля, а вне области – меньше нуля[3].

Дополнительным преимуществом этого метода является общность математической постановки для большого класса сечений рассматриваемого резонатора[4].

### Постановка задачи

Рассмотрим трехзорный цилиндрический резонатор с идеально проводящей поверхностью, поперечное сечение которого изображено на рис.1:

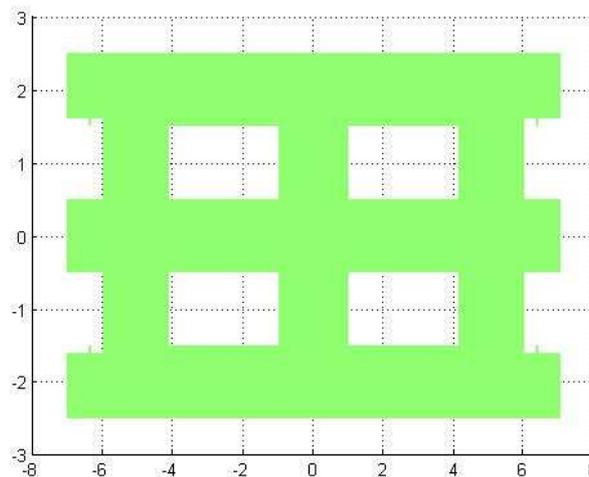


Рис.1 Поперечное сечение трехзорного резонатора

Электромагнитные колебания в рассматриваемом резонаторе описываются системой уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\mathbf{E} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H} \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где  $\mathbf{k}$  – волновой вектор,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  – вектора электрической и магнитной напряженности поля.

На границе резонатора для касательной компоненты поля  $\mathbf{E}$  выполняется граничное условие Дирихле:

$$E_{\tau} = 0,$$

где  $E_{\tau}$  – касательная компонента поля к поверхности резонатора, включая вырезы.

В данной работе ограничимся рассмотрением колебаний электрического типа, тогда поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  представимы с помощью поляризационного потенциала  $\Pi$ :

$$\mathbf{E} = \text{grad div } \Pi + k^2 \Pi \quad (2)$$

$$\mathbf{H} = -ik \text{ rot } \Pi \quad (3)$$

где все компоненты потенциала, кроме направленной вдоль оси  $z$ , равны 0[5].

Подставим (2) и (3) в (1), получим:

$$-ik \text{ rot}(\text{rot } \Pi) = -ik(\text{grad div } \Pi + k^2 \Pi)$$

$$-ik(\text{grad div } \Pi - \Delta \Pi) = -ik(\text{grad div } \Pi + k^2 \Pi)$$

Раскрывая скобки и сокращая слагаемые справа и слева, получим уравнение Гельмгольца с граничными условиями Дирихле:

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0 \quad (4)$$

$$\Pi|_{\partial D} = 0 \quad (5)$$

Представим  $z$ -компоненту  $\Pi$  в следующем виде:

$$\Pi = u(r, z)\psi(\phi) \quad (6)$$

Получим:

$$\Delta(u(r, z)\psi(\phi)) + k^2 u(r, z)\psi(\phi)$$

Откуда:

$$\frac{r}{u} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{r^2}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 r^2 = -\frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = \lambda \quad (7)$$

Рассмотрим сначала уравнение для функции  $\psi$ :

$$\begin{cases} -\psi'' = \lambda \psi \\ \psi(\phi) = \psi(\phi + 2\pi) \\ \psi'(\phi) = \psi'(\phi + 2\pi) \end{cases} \quad (8)$$

Отсюда получим  $\psi$ :

$$\psi = e^{im\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \dots \quad (9)$$

$$\lambda = m^2$$

Тогда для  $u(r, z)$  получим уравнение:

$$\begin{cases} r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + r^2 k^2 u = \lambda^2 u \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Проведя преобразование, аналогичное [6], получим следующую задачу:

Найти такие функции  $u \in \dot{H}_1$ , которые удовлетворяют следующему уравнению для любых функций  $v \in \dot{H}_1$ :

$$\int_{\Omega} r(\nabla u, \nabla v) d\sigma - \lambda^2 \int_{\Omega} \frac{uv}{r} d\sigma - k^2 \int_{\Omega} ruv d\sigma = 0 \quad (11)$$

### Численная реализация

Решение задачи представим в виде:

$$u = \psi\omega, \quad (12)$$

где  $\omega$  – R-функция Рвачева (Рис. 2), для построения которой использовались следующие логические операции [3]:

$$\vee(x, y) = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\wedge(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$$

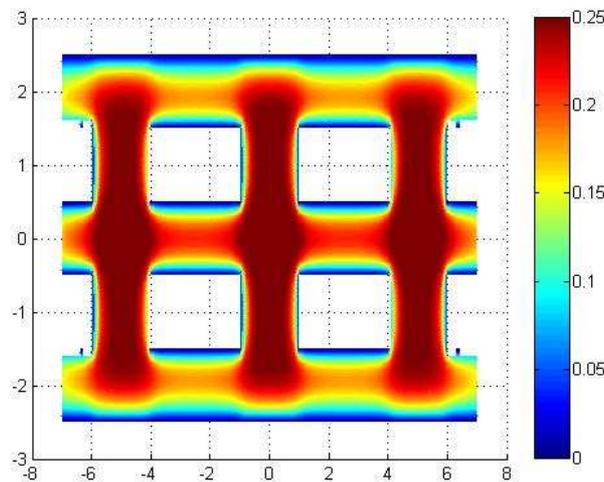


Рис.2.  $\omega(r, z)$  – R-функция, описывающая сечение резонатора

Для поиска функции  $\psi$  будем использовать метод Галеркина. В качестве базисных функций выберем полную систему  $f_i$  сдвигов и сжатий атомарной функции  $\text{fur}_2(r, z)$ , (рис.3), которая с хорошей точностью позволяет приблизить искомую функцию[7]:

$$u = \omega \sum_{i=1}^{i=N} c_i f_i \quad (13)$$

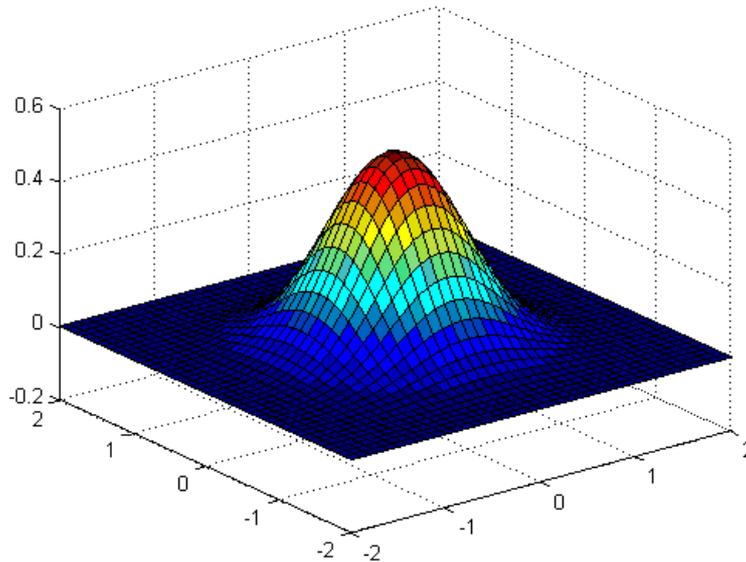


Рис.3  $fur_2(r, z)$

АФ  $fur_2$  обладает следующими важными свойствами[3]:

1. Одномерная функция  $fur_2(x)$  является бесконечно дифференцируемой финитной функцией с носителем  $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ .
2. АФ  $fur_2$  связана с АФ  $ur$ . Эта связь может быть выражена следующим образом:

$$fur_2(x) = \sum_{k=0}^2 C_k^*(2)ur(x - 1 - \frac{k}{4} + 2) \quad (14)$$

При  $k = 0$ :

$$C_0^*(2) = 2^{\frac{2(2+1)}{2}} = 8$$

При  $k > 0$ :

$$C_k^* = C_0^*(2)C_k'(2)$$

$$C_0' = 1$$

$$C_k' = (-1)^k C_{n+1}^k - \sum_{j=1}^{\min(k,7)} C_{k-j}' \delta_{j+1}$$

$$\delta_1 = 1$$

$$\delta_{2k-1} = \delta_k$$

$$\delta_{2k} = -\delta_k$$

3. В точках вида  $\frac{k}{2^j}$  функция  $ur$  принимает рациональные значения, которые могут быть точно вычислены по формуле:

$$ur(1 - k2^{-n}) = \frac{b_{n-1}}{(n-1)!2^{n(n-1)/2}} \quad (15)$$

$$b_{2n} = \frac{a_{2n}}{2}$$

$$b_{2n-1} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \sum_{k=1}^n C_{2n+2k}^{2k} a_{2n-2k+2}$$

$$a_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}} \sum_{k=1}^n \frac{a_{2n-2k}}{(2n-2k)!(2k+1)!}$$

Из свойств 2, 3 следует, что значения функции  $f_{ur_2}$  в точках вида  $\frac{k}{2^j}$  принимает рациональные значения, которые могут быть найдены с помощью формулы (15) для функции  $ur(x)$ .

Так как функция  $v$  должна удовлетворять однородным граничным условиям, представим ее в виде:

$$v = \omega \sum_{j=1}^{i=N} d_i f_i \quad (16)$$

и подставим в (11). Получим:

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j \int_{\Omega} r c_i d_j \left( \nabla(\omega f_i), \nabla(\omega f_j) \right) d\sigma + \lambda^2 \sum_i \sum_j \int_{\Omega} \frac{\omega^2 c_i d_j f_i f_j}{r} d\sigma = \\ k^2 \sum_i \sum_j \int_{\Omega} r \omega^2 c_i d_j f_i f_j d\sigma \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$A^{ij} = \int_{\Omega} r \left( \nabla(\omega u_i), \nabla(\omega u_j) \right) \quad (17)$$

$$B^{ij} = \int_{\Omega} \frac{((\omega u_i), (\omega u_j))}{r} \quad (18)$$

$$F^{ij} = \int_{\Omega} r \left( (\omega u_i), (\omega u_j) \right) \quad (19)$$

Учитывая, что равенство должно выполняться для любых наборов  $d_j$ , получим следующую матричную задачу:

$$Ac + \lambda^2 Bc = k^2 Fc \quad (20)$$

$c$  – столбец неизвестных коэффициентов разложения, а  $A, B, F$  – симметричные ленточные матрицы.

## Результаты

Ограничимся рассмотрением колебаний, не зависящих от индекса  $m$ , то есть  $m = 0$ .

На основе рассмотренной математической модели был реализован алгоритм расчета собственных колебаний и собственных частот трехззорного аксиально-симметричного резонатора с сечением, изображенным на рис. 1.

Параметры резонатора были выбраны следующие: длина  $L=15$  мм, высота  $H=5$  мм. Размер металлической вставки: длина  $a=2$  мм, ширина  $b=1$  мм.

Расстояние по горизонтали между металлическими вставками  $l = 2$  мм, расстояние по вертикали между металлическими вставками  $s = 1$  мм.

В качестве теста программы проводился расчет собственных мод безззорного резонатора, то есть цилиндра. Для данной задачи существует аналитическое решение, которое с высокой точностью совпадает с решением, полученным с помощью написанной программы. При увеличении количества базисных функций наблюдается быстрая сходимость алгоритма.

В качестве результатов работы программы были получены первые гармоники и соответствующие им распределения полей в указанном трехззорном резонаторе.

Нормируя скорость света  $c = 1$ , получим первую собственную частоту  $\omega_1 = 6.539$ . Соответствующая собственная мода и распределение  $r$  – и  $z$  – компонент поля  $\mathbf{E}$  показаны на рис. 4-6:

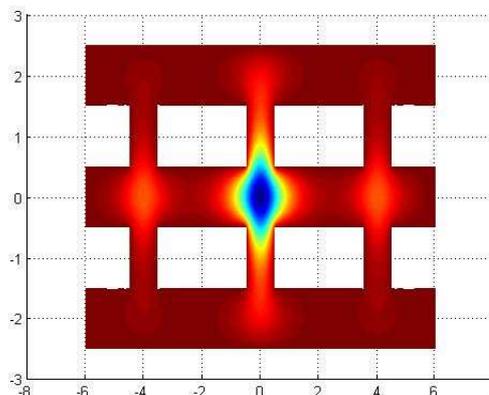


Рис.4. Первая собственная мода  $u$  трехззорного резонатора

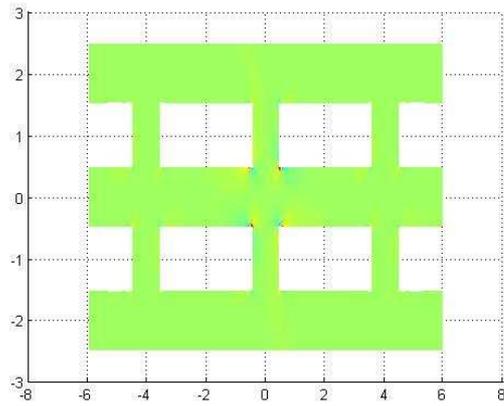


Рис. 5. Распределение компоненты  $E_r$  для первой собственной моды

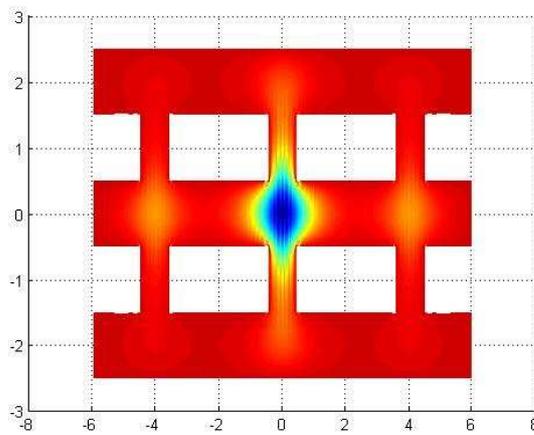


Рис. 6. Распределение компоненты  $E_z$  для первой собственной моды

Пятая собственная частота  $\omega_5 = 8.108$ . Соответствующая собственная мода и распределение  $r$  – и  $z$  – компонент поля  $\mathbf{E}$  показаны на рис. 7-9:

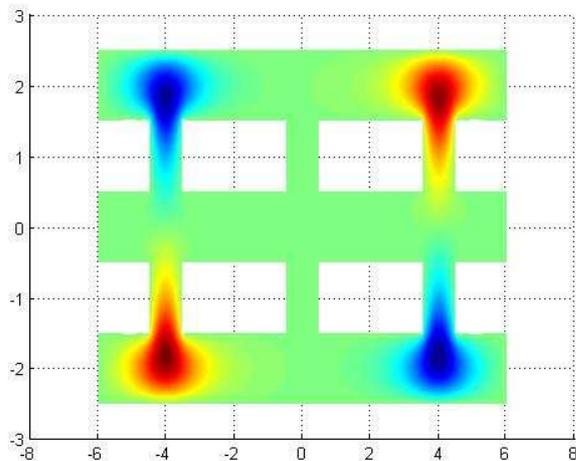


Рис.7. Пятая собственная мода  $u$  трехазорного резонатора

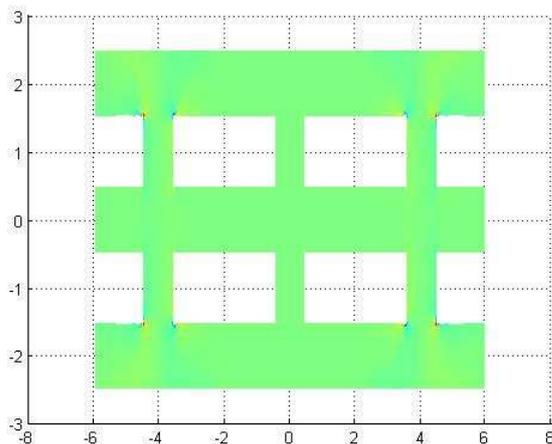


Рис. 8. Распределение компоненты  $E_r$  для первой собственной моды

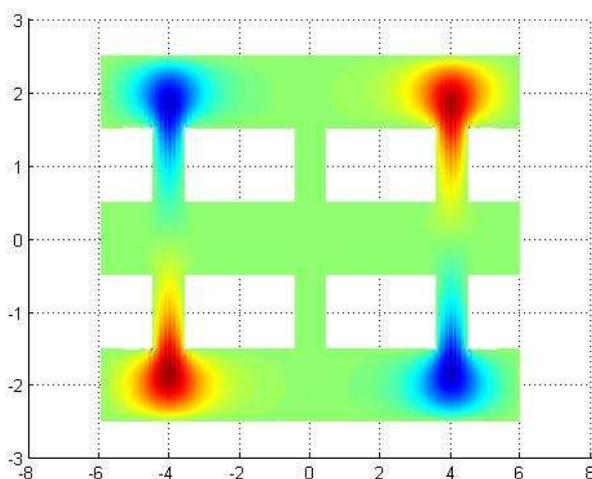


Рис. 9. Распределение компоненты  $E_z$  для первой собственной моды

Из рисунков 5 и 8 видно, что поля в углах имеют особенности, что хорошо согласуется с физикой данного процесса. [8]

### Заключение

Был реализован математический пакет по расчету собственных колебаний и собственных значений трехззорного резонатора. Благодаря реализации метода R-функций данную программу можно легко модернизировать для расчета сечений более сложных форм, в том числе для расчета резонаторов с любым количеством зазоров. В результате быстрой сходимости алгоритма данная модель может быть рекомендована для расчета конструкций подобного типа.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-01-31397 мол\_а, а так же гранта № 12-01-00479.*

## Литература

1. Фисенко Р.Н и др., «Резонаторная система для многолучевого клистрона», 13<sup>th</sup> Crimean Conference «Microwave & Telecommunication Technology», 2003.
2. Рвачев В. Л., «Теория R-функций и некоторые ее приложения», Киев, изд. «Думка», 1982 г.
3. Кравченко В. Ф., Рвачев В. Л., «Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях», Москва, изд. «Физматлит», 2006 г.
4. Кравченко В. Ф., Басараб М.А., «Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики», изд. «Физматлит», 2004 г.
5. Тихонов А.Н., Самарский Н. А., «Уравнения математической физики», М.: Изд-во МГУ, 1999 г.
6. А.Н. Боголюбов, А.И. Ерохин, И.Е. Могилевский, Н.Е. Шапкина, «Расчет резонансных частот открытого диэлектрического аксиально-симметричного резонатора с кусочно-постоянным радиусом», Вестник Московского Университета, Серия 3. Физика. Астрономия. 2009 г., №2, стр. 21-23
7. Кравченко В.Ф. «Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям». Монография. – М.: Радиотехника, 2003
8. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Могилевский И.Е., Свешников А.Г. Особенности нормальных волн неоднородного волновода с входящими ребрами // Радиотехника и электроника. 2003. Т.48. N7. С.787-794