

УДК 537.874; 537.624

## ВЛИЯНИЕ ОБМЕННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ДИНАМИЧЕСКОГО РАЗМАГНИЧИВАНИЯ НА ДИСПЕРСИЮ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ ДЭЙМОНА-ЭШБАХА.

### ЧАСТЬ 3. ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ДИСПЕРСИИ

В. И. Щеглов

Институт радиотехники и электроники им В.А.Котельникова РАН,  
125009, Москва, ул. Моховая, 11-7

Статья поступила в редакцию 29 октября 2019 г.

**Аннотация.** Рассмотрено распространение поверхностной магнитостатической волны в касательно намагниченной пластине с учетом динамического размагничивания и неоднородного обменного взаимодействия в случае, когда волновой вектор волны перпендикулярен направлению поля. Приведен тензор магнитной восприимчивости с учетом размагничивания и обмена, на основе которого при заданных граничных условиях получено дисперсионное соотношение. Это дисперсионное соотношение исследовано с учетом двойственности и комплексного характера поперечного волнового числа. Рассмотрена дисперсия обменных волн при больших волновых числах вплоть до  $10^7 \text{ см}^{-1}$ , при которых длина волны становится соизмеримой с межатомными расстояниями в материале магнитной пластины. Показано, что в широком диапазоне изменения константы обмена дисперсионные зависимости имеют возрастающий квадратичный характер. Показано, что волновым числам порядка  $10^7 \text{ см}^{-1}$ , то есть длинам обменных волн порядка межатомных расстояний, соответствуют частоты порядка десятков и небольших сотен ТГц. Выполнено сравнение полученного закона дисперсии для касательно намагниченной пластины с классической формулой дисперсии для безграничной среды, представляющей собой произведение константы обмена на квадрат волнового числа. Установлено, что дисперсионная кривая без учета поперечного волнового числа лежит по частоте выше классической примерно в два раза, однако учет поперечного волнового числа приводит к уменьшению

различия всего до 20%. На основе сопоставления дисперсии в безграничном пространстве с дисперсией в тонкой пластине отмечена необходимость более точного определения константы неоднородного обменного взаимодействия, а также более глубокой физической разработки роли поперечного волнового числа. Выявлено существование, кроме основного, дополнительного решения дисперсионного соотношения. Показано, что основная кривая при отсутствии обмена и динамического размагничивания переходит в классическую дисперсионную кривую Дэймона-Эшбаха. Дополнительная кривая по частоте лежит выше основной, причем в области малых волновых чисел превышение составляет около 0,5 от нормированной частоты основной кривой. Наклон начального участка у дополнительной кривой отсутствует и с изменением толщины не меняется. Обе кривые имеют сходный квадратичный характер, причем по мере увеличения волнового числа расстояние по частоте между ними постепенно уменьшается, а при больших волновых числах обе кривые полностью сливаются. Геометрическая конфигурация дополнительной кривой от толщины пластины не зависит. При изменении постоянного поля смещение дополнительной кривой по частоте подобно смещению основной. На основе анализа структуры дисперсионного соотношения показано, что существование двух его решений обусловлено прохождением через нуль зависимости его левой части от частоты. При этом основная дисперсионная кривая формируется при плавном прохождении левой части через нуль, тогда как на частоте дополнительной дисперсионной кривой имеет место расходимость, по обе стороны от которой значение левой части дисперсионного соотношения, имея противоположные знаки, стремится к бесконечности. Рассмотрен вопрос о практической реализуемости отмеченного в ряде теоретических работ ограничения максимального значения волнового числа за счет диссипации. Отмечено, что причиной такого ограничения является снижение групповой скорости волны на пологом участке дисперсионной кривой до значения, при котором волна практически полностью затухает на расстоянии, меньшем ее длины. Выполнен сравнительный анализ известных на сегодня автору

настоящей работы экспериментальных результатов. Отмечено, что ограничение волнового числа при значительных уровнях диссипации, в рассмотренных экспериментах не наблюдалось. Высказано предположение о том, что в реальных материалах квадратичный рост дисперсии не позволяет групповой скорости уменьшиться до величины, при которой волна будет затухать на расстоянии своей длины. В качестве возможной задачи отмечена целесообразность получения численного критерия соотношения между расстоянием пробега волны до своего полного затухания и длиной той же волны в зависимости от параметра диссипации. Обсуждена структура распределения потенциала поверхностной магнитостатической волны с учетом обмена и динамического размагничивания, распространяющейся в касательно намагниченной пластине. Указано, что действительный характер поперечного волнового числа требует ограничения области существования волны двумя параллельными поверхностями, где потенциал принимает конечное значение. В случае безграничного пространства поперечное волновое число должно иметь чисто мнимый характер, обеспечивающий периодическую синусоидальную зависимость потенциала от перпендикулярной координаты. В связи с этим в качестве предмета для дальнейшего рассмотрения сформулированы две задачи: 1 – исследование распространения волны с учетом обмена и размагничивания в касательно намагниченной пластине в произвольном направлении относительно поля, выявление соответствующих углов отсечки; 2 – исследование распространения такой же волны в безграничном пространстве в произвольном направлении относительно поля, также с учетом возможных направлений отсечки. Обсуждены некоторые возможные применения обменных магнитостатических волн. В качестве традиционного направления упомянуто создание устройств обработки аналоговой информации, в первую очередь – линий задержки. Показано, что использование обменных волн вместо дипольных позволит уменьшить размеры волноведущих частей устройства на два-три порядка, обеспечивая габариты в десятки и единицы нанометров, а также увеличить рабочую частоту устройств до нескольких терагерц без

увеличения постоянного магнитного поля. Возможность укорочения длины обменной волны до нескольких нанометров позволяет рассматривать такую волну как возможный инструмент для построения микроскопа с пространственным разрешением, на два-три порядка превышающим разрешение оптического микроскопа. Другим возможным применением столь коротких волн может явиться исследование структуры вещества на атомно-молекулярном уровне, для теоретической интерпретации чего требуется переход от континуального рассмотрения к микроскопическому на квантовом уровне.

**Ключевые слова:** магнитостатическая волна, размагничивающее поле, обменное взаимодействие, дисперсия волн, наноразмеры.

**Abstract.** The propagation of magnetostatic surface waves along in-plane biased magnetic plate with dynamic demagnetization and nonuniform exchange interaction is investigated. The magnetic susceptibility tensor is described, and on the base of this tensor the dispersion relation is found under given boundary conditions.. This dispersion relation is investigated in connection with the double-mention and complex character of transverse wave number. The wave dispersion by large wave numbers up to  $10^7$  cm<sup>-1</sup>, where the wavelength becomes comparable with the interatomic distances in the material of the magnetic plate, is investigated. It is shown that in a wide range of changes in the exchange constant the dispersion curves have an increasing quadratic character. It is shown that wave numbers of the order of  $10^7$  cm<sup>-1</sup>, i.e., lengths of the exchange waves of the order of interatomic distances, correspond to frequencies of the order of tens and small hundreds of THz. The comparison is made between founded dispersion law for longitudinal magnetized plate and classic form of dispersion for infinite space which is the product of exchange constant and square of wave number. It is founded that the dispersion curve without the transversal wave number is placed on frequency upper than the classic curve in twice but taking into account the transversal wave number decreases this value to only 20%. On the basis of the comparison of the dispersion in infinite space with the dispersion in a thin plate, the necessity of more precise determination of

nonuniform exchange constant, as well as a deeper elaboration of the physical role of the transverse wave number, is noted. Besides the principal solution of dispersion relation, the additional solution of the same relation is found. It is shown that the main curve transforms to the classic Damon-Eshbach dispersion curve in the absence of exchange and demagnetization. The additional frequency curve lies upper than the main one. Moreover, in the region of small wave numbers the excess is about 0,5 of the normalized frequency of the main curve. The slope of initial region of additional curve is absent and it does not change with changing of plate thickness. Both curves have the similar quadratic character. When the wave number is increased the distance between these curves gradually decreases and by large wave numbers both curves become one. The geometry configuration of additional curve does not depend on the plate thickness. When the bias field changes, the displacement of additional curve on frequency is the similar to the displacement of the main curve. Based on the analysis of dispersion relation structure, it is shown that the existence of two of its solutions is due to the passage through zero of the dependence of its left side on frequency. In this case the main dispersion curve is formed by smooth intersection of left part through zero. But the intersection of additional dispersion curve is formed between divergence to both its branches, which opposite ends goes to plus and minus infinity. We investigated the problem of the practical realization of limitation of maximum value of wave number due to dissipation, noted in a number of theoretical works. It is established that the reason of this limitation is the decreasing of wave group velocity on plane region of dispersion curve to the value by which wave subside on the distance is equal to wave length. We made the comparative analysis of experimental results known to the author. It is established that the limitation of wave number by large dissipation levels in investigated experiments is absent. We suppose that in real materials the quadratic increasing of dispersion curve prevents the group velocity to decrease to the value when the wave is subsided on its length. As the possible task it is suggested to find a correlation criterion between the wave distance where it subsides and the wave length depending on dissipation parameter. The structure of magnetostatic surface wave potential in connection with exchange and

demagnetization, when the wave propagates in longitudinal magnetized plate, is discussed. It is shown that the real character of transversal wave number demands the limitation of wave existence region by two parallel planes where the potential takes the limited value. In the infinite space the transversal wave number must have imaginary character, which makes possible the limited periodic sinusoidal dependence of potential from normal coordinate to the surface of magnetic plate. In connection with this fact the two tasks are formulated as the aim of possible investigations: (1) the investigation of wave propagation with exchange and demagnetization in longitudinally biased plate in arbitrary direction relatively to field direction and founding the possible cutting directions; (2) the investigation of the same wave propagation in infinite space in arbitrary direction relatively to field direction and also founding the possible cutting directions. Some possible applications of exchange magnetostatic waves are discussed. As a traditional direction, the creation of devices for processing analog information, primarily delay lines, is mentioned. It is shown that the use of exchange waves instead of dipole waves will allow to decrease the dimensions of wave-guiding parts on two-three orders and to decrease device dimensions to values about tens and units nanometers and also to increase the working frequency of devices to some terra-hertz without the increasing the dc bias magnetic field. The possibility of decreasing the exchange waves to several nanometers allows us to consider such a wave as possible instrument for constructing a microscope with a spatial resolution that is two to three orders of magnitude higher than the resolution of an optical microscope. Another possible application of such short waves can be the study of the structure of matter at the atomic-molecular level. In this case, for the theoretical interpretation of these phenomena a transition from continual consideration to microscopic on quantum level is required.

**Key words:** magnetostatic wave, demagnetizing field, exchange interaction, wave dispersion, nanoscale.

## Введение

Требование уменьшения размеров устройств обработки информации, использующих волновые процессы в ферритах, стимулирует освоение диапазона волн, длина которых измеряется нанометрами [1-4]. В этом плане весьма обещающими являются магнитостатические (спиновые) волны обменного характера [5,6]. В работах [7-9], составляющих единый цикл, показано, что в свойствах таких волн решающее значение приобретают динамические поля размагничивания [7] и неоднородное обменное взаимодействие [8,9]. Рассмотрение выполнено на основе классической задачи о распространении поверхностной волны типа Дэймона-Эшбаха в ферритовой пластине, намагниченной вдоль ее плоскости [10,11-14].

Работа [7] посвящена влиянию динамического размагничивания на дисперсию волны в отсутствие обменного взаимодействия. Установлена комплексная структура поперечного волнового числа распространяющейся волны. Отмечено, что с математической стороны комплексный характер волнового числа обусловлен появлением в уравнении Уокера смешанной производной по координатам, в классической задаче Дэймона-Эшбаха отсутствующей. Представлен способ аналитического решения такого уравнения, ранее реализованный при рассмотрении ферромагнитного резонанса и магнитостатической волны в условиях ориентационного перехода [13,14]. С учетом динамического размагничивания получено дисперсионное соотношение для распространяющейся волны и выявлено монотонное увеличение фазовой и особенно групповой скорости волны по мере увеличения действительной части волнового числа, в том числе в той области, где в классической задаче Дэймона-Эшбаха групповая скорость стремится к нулю.

В работе [8], кроме размагничивания, введено влияние на дисперсию волны также неоднородного обменного взаимодействия. Получено поперечное волновое число, имеющее комплексный характер. Показано, что действительная часть поперечного волнового числа обеспечивает спад динамической намагниченности внутрь от поверхности пластины по

экспоненте с отрицательным показателем, а мнимая часть накладывает на экспоненциальный спад незатухающую гармоническую составляющую.

В работе [9] на основе результатов работ [7] и [8] получено дисперсионное соотношение для магнитостатической волны с учетом как размагничивания, так и обмена. Показано, что обменное взаимодействие по мере увеличения действительной части волнового числа приводит к росту дисперсионной кривой по закону, близкому к квадратичному. При этом в области сравнительно малых волновых чисел в характере роста дисперсионной кривой преобладающее значение имеет размагничивание, а при достаточно больших волновых числах решающую роль приобретает обменное взаимодействие. Таким образом, в любом случае стремление к нулю групповой скорости, свойственное волне в классической задаче Дэймона-Эшбаха, здесь отсутствует и для пленки толщиной порядка 10 мкм во всем интервале изменения волнового числа от  $10^2$  см<sup>-1</sup> до  $10^4$  см<sup>-1</sup> групповая скорость монотонно возрастает тем быстрее, чем волновое число больше.

Настоящая работа является логическим продолжением работ [7-9] и направлена на выявление предельных возможностей увеличения волнового числа вплоть до его физического предела, определяемого равенством длины волны межатомному расстоянию магнитной среды. В основу рассмотрения положим дисперсионное соотношение, полученное в работе [9], поэтому, ввиду его важности, представим конечный результат работы [9] в конспективном виде.

## 1. Геометрия задачи

Геометрии задачи, совпадающая с принятой в работах [7-9], приведена на рис.1.

Структура представляет собой безграничную ферритовую пластину 2 толщиной  $d$ , по обе стороны от которой находятся свободные полупространства 1 и 3. Система координат  $Oxyz$  выбрана таким образом, что ее плоскость  $Oyz$  параллельна плоскостям ферритовой пластины, а ось  $Ox$  – перпендикулярна. При этом ось  $Oz$  ориентирована вдоль направления

внешнего поля. Начало координат  $O$  находится посередине между поверхностными плоскостями пластины, координаты которых равны  $\pm d/2$ . Подобно работам [7-9], ограничимся рассмотрением волны, распространяющейся вдоль оси  $Oy$ , так что полагаем  $\varphi = 0$ .

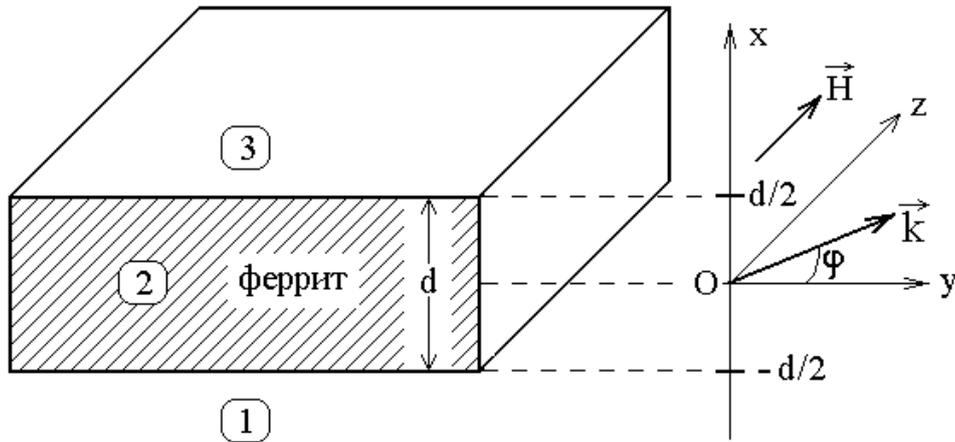


Рис.1. Геометрия задачи.

## 2. Тензор магнитной проницаемости

Следуя работе [9], полагаем тензор магнитной проницаемости в виде:

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \nu_1 & 0 \\ -\nu_2 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

компоненты которого  $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ , а также необходимый далее параметр  $\nu$ , определяются выражениями (формулы (3)-(7) в работе [9]):

$$\mu_1 = \frac{\Omega_{lk}^2 - \beta \frac{k_y^2}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega_{ok}^2}; \quad (2)$$

$$\mu_2 = \frac{\Omega_{lk}^2 - \beta \frac{k_x^2}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega_{ok}^2}; \quad (3)$$

$$v_1 = \frac{-i\Omega + \beta \frac{k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega_{0k}^2}; \quad (4)$$

$$v_2 = \frac{-i\Omega - \beta \frac{k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega_{0k}^2}; \quad (5)$$

$$v = v_1 - v_2 = \frac{2\beta \frac{k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega_{0k}^2}, \quad (6)$$

В этих формулах использованы вспомогательные обозначения (формулы (8)-(10) в работе [9]):

$$\Omega_{0k}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}(\Omega_{Hk} + \beta); \quad (7)$$

$$\Omega_{lk}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}(\Omega_{Hk} + \beta + 1), \quad (8)$$

а также:

$$\Omega_{Hk} = \Omega_H + Q(k_x^2 + k_y^2), \quad (9)$$

где нормированные частоты определяются выражениями (формулы (11)-(13) в работе [9]):

$$\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}; \quad (10)$$

$$\Omega_H = \frac{H_0}{4\pi M_0}; \quad (11)$$

$$Q = \frac{q}{4\pi}, \quad (12)$$

в которых  $M_0$  – намагниченность насыщения и  $q$  – константа обменного взаимодействия магнитной пластины.

Обозначение  $\beta$  в формулах (2)-(6) представляет собой нормированный параметр размагничивания (формула (14) в работе [9]):

$$\beta = \frac{\alpha_p}{2} \left\{ th \left[ d \left( k_y - \frac{\pi}{d} \right) \right] + 1 \right\}, \quad (13)$$

где  $\alpha_p$  – нормировочный коэффициент, такой что:  $0 \leq \alpha_p \leq 0,1$ .

В силу двойственности поперечного волнового числа  $k_x^{(+)}$  и  $k_x^{(-)}$ , компоненты тензора  $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$  также имеют двойственный характер: (разделы №11-№14 работы [9]).

### 3. Общая постановка задачи

Задача решается в магнитостатическом приближении, что позволяет для переменного поля ввести потенциал (формула (18) в работе [9]):

$$\vec{h} = grad \psi = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\}. \quad (14)$$

Система уравнений для потенциалов в трех областях, показанных на рис.1, имеет вид (формулы (19)-(21) работы [9]):

область 1 – вне феррита (уравнение Пуассон):

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = 0. \quad (15)$$

область 2 – внутри феррита (уравнение Уокера):

$$\mu_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (16)$$

область 3 – вне феррита (уравнение Пуассон):

$$\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} = 0. \quad (17)$$

Граничные условия (формулы (22)-(25) в работе [9]):

$$\mu_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \Big|_{x=-\frac{d}{2}} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{d}{2}}; \quad (18)$$

$$\mu_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \Big|_{x=\frac{d}{2}} = \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \Big|_{x=\frac{d}{2}}; \quad (19)$$

$$\psi_2 \Big|_{x=-\frac{d}{2}} = \psi_1 \Big|_{x=-\frac{d}{2}}; \quad (20)$$

$$\psi_2 \Big|_{x=\frac{d}{2}} = \psi_3 \Big|_{x=\frac{d}{2}}. \quad (21)$$

В этих выражениях параметры  $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, \nu$  определяются формулами (2)-(6).

#### 4. Дисперсионное соотношение

Решение приведенной задачи методом разделения переменных позволяет получить дисперсионное соотношение в виде (формула (45) в работе [9]):

$$\frac{e^{\rho^{(+)} - \rho^{(-)}} - e^{-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})}}{e^{\rho^{(+)} - \rho^{(-)}} + e^{-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})}} = \frac{k_x^e (\varepsilon^{(-)} - \varepsilon^{(+)})}{(k_x^e)^2 - \varepsilon^{(+)} \varepsilon^{(-)}}, \quad (22)$$

где величины  $\rho^{(\pm)}$  и  $\varepsilon^{(\pm)}$  определяются формулами (формулы (39)-(43) в работе [9]):

$$\rho^{(+)} = \frac{k_x^{(+)} d}{2}; \quad (23)$$

$$\rho^{(-)} = \frac{k_x^{(-)} d}{2}; \quad (24)$$

а также:

$$\varepsilon^{(+)} = \mu_1 k_x^{(+)} - i \nu_1 k_y; \quad (25)$$

$$\varepsilon^{(-)} = \mu_1 k_x^{(-)} - i \nu_1 k_y, \quad (26)$$

где оба варианта комплексного поперечного волнового числа имеют вид (формулы (46),(47) в работе [9]):

$$k_x^{(+)} = k_d + i k_m; \quad (27)$$

$$k_x^{(-)} = -k_d - i k_m, \quad (28)$$

где  $k_d$  и  $k_m$  – действительные.

Компоненты поперечного волнового числа при заданном значении продольного волнового числа  $k_y$  в отсутствие обмена имеют вид (формулы (48),(49) в работе [9]):

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left( \frac{\beta}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)} \right)^2}} \cdot k_y; \quad (29)$$

$$k_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left( \frac{\beta}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)} \right)^2}} \cdot k_y. \quad (30)$$

При наличии обмена эти компоненты определяются путем решениями уравнения относительно неизвестной величины  $\xi$ , имеющего вид (формула (66) в работе [9]):

$$g_8 c_{8b} + g_6 c_{6b} + g_4 c_{4b} + g_{2a} c_{2b} + g_{2b} c_{2a} = 0. \quad (31)$$

В этом уравнении заданные параметры  $g$ , не содержащие  $\xi$ , определяются формулами (формулы (51)-(55) а работе [9]):

$$g_8 = -Q^2; \quad (32)$$

$$g_6 = -Q [2Qk_y^2 + (2\Omega_H + \beta + 1)]; \quad (33)$$

$$g_4 = -Q(2\Omega_H + \beta + 1) k_y^2 + [\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)]; \quad (34)$$

$$g_{2a} = Q [2Qk_y^2 + (2\Omega_H + \beta + 1)] k_y^4; \quad (35)$$

$$g_{2b} = -2\beta k_y^2, \quad (36)$$

а параметры  $c$ , содержащие искомую неизвестную  $\xi$ , имеют вид (формулы (61)-(65) в работе [9]):

$$c_{8b} = 8k_d \xi (k_d^6 - 7k_d^4 \xi^2 + 7k_d^2 \xi^4 - \xi^6); \quad (37)$$

$$c_{6b} = 2k_d \xi (3k_d^4 - 10k_d^2 \xi^2 + 3\xi^4); \quad (38)$$

$$c_{4b} = 4k_d \xi (k_d^2 - \xi^2); \quad (39)$$

$$c_{2a} = k_d^2 - \xi^2; \quad (40)$$

$$c_{2b} = 2k_d \xi, \quad (41)$$

где  $k_d$  определяется через  $k_y$  по формуле (29).

Решение уравнения (31) методом поиска нуля приводит к двум значениям неизвестной  $\xi$ , как раз соответствующим значениям компонент поперечного волнового числа  $k_d$  и  $k_m$ .

Подстановка перечисленных параметров в дисперсионное соотношение (22), а также учет равенства (формула (165) в работе [9]):

$$k_x^e = k_y, \quad (42)$$

выполняющегося при  $k_z = 0$ , позволяет привести его к виду, содержащему только частоту  $\Omega$  и продольное волновое число  $k_y$ . Комплексный характер поперечного волнового числа (27)-(28) приводит к комплексному виду дисперсионного соотношения. В работе [9] показано, что для получения действительной зависимости частоты  $\Omega$  от продольного волнового числа  $k_y$  достаточно рассмотреть только действительную часть полного дисперсионного соотношения, имеющую вид (формула (183) в работе [9]):

$$\frac{AB}{A^2 \sin^2(dk_m) + B^2 \cos^2(dk_m)} - \frac{u_d v_d + u_m v_m}{v_d^2 + v_m^2} = 0, \quad (43)$$

где введены обозначения (формулы (157), (158), (167)-(170), (139)-(144) в работе [9]):

$$A = e^{dk_d} - e^{-dk_d}; \quad (44)$$

$$B = e^{dk_d} + e^{-dk_d}, \quad (45)$$

а также:

$$u_d = k_y (\varepsilon_d^{(-)} - \varepsilon_d^{(+)}); \quad (46)$$

$$u_m = k_y (\varepsilon_m^{(-)} - \varepsilon_m^{(+)}); \quad (47)$$

$$v_d = k_y^2 - (\varepsilon_d^{(+)} \varepsilon_d^{(-)} - \varepsilon_m^{(+)} \varepsilon_m^{(-)}); \quad (48)$$

$$v_m = -(\varepsilon_d^{(+)} \varepsilon_m^{(-)} + \varepsilon_d^{(-)} \varepsilon_m^{(+)}), \quad (49)$$

в которых:

$$\varepsilon_d^{(+)} = \mu_{1d}^{(+)} k_d - \mu_{1m}^{(+)} k_m + v_{1m}^{(+)} k_y; \quad (50)$$

$$\varepsilon_m^{(+)} = \mu_{1d}^{(+)} k_m + \mu_{1m}^{(+)} k_d - v_{1d}^{(+)} k_y; \quad (51)$$

$$\varepsilon_d^{(-)} = -\mu_{1d}^{(-)} k_d + \mu_{1m}^{(-)} k_m + v_{1m}^{(-)} k_y; \quad (52)$$

$$\varepsilon_m^{(-)} = -\mu_{1d}^{(-)} k_m - \mu_{1m}^{(-)} k_d - v_{1d}^{(-)} k_y, \quad (53)$$

где  $\mu_{1d}^{(\pm)}$ ,  $\mu_{1m}^{(\pm)}$ ,  $v_{1d}^{(\pm)}$ ,  $v_{1m}^{(\pm)}$  – действительные и мнимые части компонент тензора проницаемости (2)-(6), взятые при значениях волнового числа (27) и (28) соответственно.

## 5. Дисперсия при больших волновых числах

Рассмотрим дисперсию обменных волн при больших волновых числах. В расчете будем использовать традиционное значение константы обмена для ЖИГ:  $q = 4,23 \cdot 10^{-11} \text{ см}^2$ . При этом нормированное значение

$$Q = \frac{q}{4\pi} \quad (54)$$

равно:  $Q(YIG) = 3,37 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2$ .

На рис.2 приведены полученные в соответствии дисперсионным соотношением (43) дисперсионные кривые при различных значениях константы обменного взаимодействия в пропорции относительно константы для ЖИГ. Утолщенной линией 2 выделена кривая, соответствующая константе для ЖИГ в чистом виде.

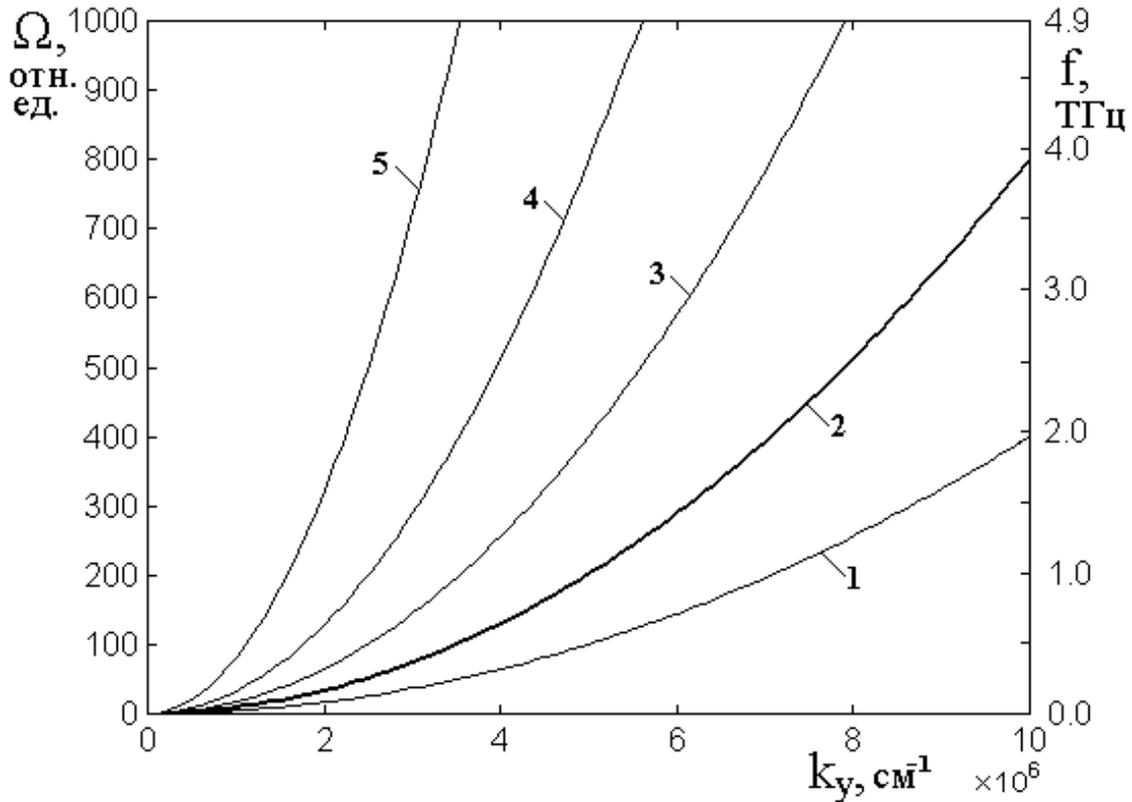


Рис.2. Дисперсионные кривые при различных значениях константы обменного взаимодействия в пропорции относительно константы для

$$\text{ЖИГ: } Q(YIG) = 3,37 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2.$$

1 –  $0,5 \cdot Q(YIG)$ ; 2 –  $1,0 \cdot Q(YIG)$ ; 3 –  $2,0 \cdot Q(YIG)$ ; 4 –  $4,0 \cdot Q(YIG)$ ; 5 –  $10,0 \cdot Q(YIG)$ .

Параметры:  $H_0 = 437,5 \text{ Э}$ ;  $4\pi M_0 = 1750 \text{ Гс}$ ;  $d = 1 \text{ мкм}$ .

Из рисунка видно, что все дисперсионные зависимости имеют возрастающий квадратичный характер. По мере увеличения константы относительная степень возрастания уменьшается, то есть рост, хотя и сохраняется, но постепенно замедляется.

Видно, что при единичной константе для ЖИГ волновому числу  $10^7 \text{ см}^{-1}$ , то есть длине волны в  $6,28 \text{ нм}$  (то есть примерно порядка десятка межатомных

расстояний), соответствует частота около 4 ТГц. Тому же волновому числу при константе  $10,0 \cdot Q(YIG)$  соответствует частота около 40 ТГц (за пределами рисунка). Таким образом, волновым числам порядка  $10^7 \text{ см}^{-1}$ , то есть длинам обменных волн порядка межатомных расстояний, соответствуют частоты порядка десятков и небольших сотен ТГц.

Для электромагнитных волн этим же волновым числам и длинам волн соответствуют частоты порядка  $10^{16}$  Гц (или  $10^4$  ТГц), то есть лежащие далеко выше видимого оптического спектра, уже в ультрафиолетовой и частично в рентгеновской области.

Рассмотрим теперь, как соотносятся полученные дисперсионные кривые с их классической трактовкой [15, стр.200, форм. (7.13)] в соответствии с формулой:

$$\omega = \eta k^2. \quad (55)$$

Здесь:

$$\omega = 2\pi f, \quad (56)$$

то есть:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (57)$$

а константа  $\eta$  связана с принятой здесь константой  $q$  соотношением:

$$q = \frac{\eta}{\gamma_\omega M_0}, \quad (58)$$

где  $\eta = 0,1$  [16, стр.379, строка 1 абзаца после рис.8.1.1 и подпись к рис.8.1.1, где приведено значение для ЖИГ:  $\eta = 0,1$ ],  $\gamma_\omega = 1,76 \cdot 10^7 \text{ Э}^{-1} \text{ с}^{-1}$  [17, стр.15, при этом  $\gamma_f = \gamma_\omega / 2\pi = 2,8 \text{ МГц Э}^{-1}$ ],  $M_0 = 140 \text{ Гс}$  (см.напр. [18, стр.421, 435, где для ЖИГ приведена величина  $4\pi M_0 = 1750 \text{ Гс}$ , откуда  $M_0 = 140 \text{ Гс}$ ]). Нормированная константа  $Q$ , согласно (1Б), (5Б), имеет вид:

$$Q = \frac{q}{4\pi} = \frac{\eta}{4\pi\gamma_{\omega}M_0}, \quad (59)$$

откуда получаем:

$$\eta = 4\pi\gamma_{\omega}M_0 \cdot Q. \quad (60)$$

Подставляя это выражение в (55), а также учитывая (57), получаем:

$$f = 2\gamma_{\omega}M_0Qk^2, \quad (61)$$

или:

$$f = 4\pi\gamma_fM_0Qk^2. \quad (62)$$

Учитывая, что, согласно (10):

$$\Omega = \frac{f}{4\pi\gamma_fM_0}, \quad (63)$$

получаем:

$$\Omega = Qk^2. \quad (64)$$

Эту формулу будем считать классической и использовать для дальнейших построений.

Обратимся теперь к рис.3, где показаны дисперсионные кривые построенные по различным формулам. Кривая 1 соответствует дисперсионному соотношению (43) для рассматриваемой здесь задачи Дэймона-Эшбаха, эта кривая совпадает с кривой 2 на рис.2. Кривая 2 построена по классической формуле (64) для безграничного пространства.

Из рисунка можно видеть, что все кривые имеют квадратичный характер, то есть геометрически подобны, однако кривая 1 проходит выше кривой 2 с коэффициентом пропорциональности около 2,37.

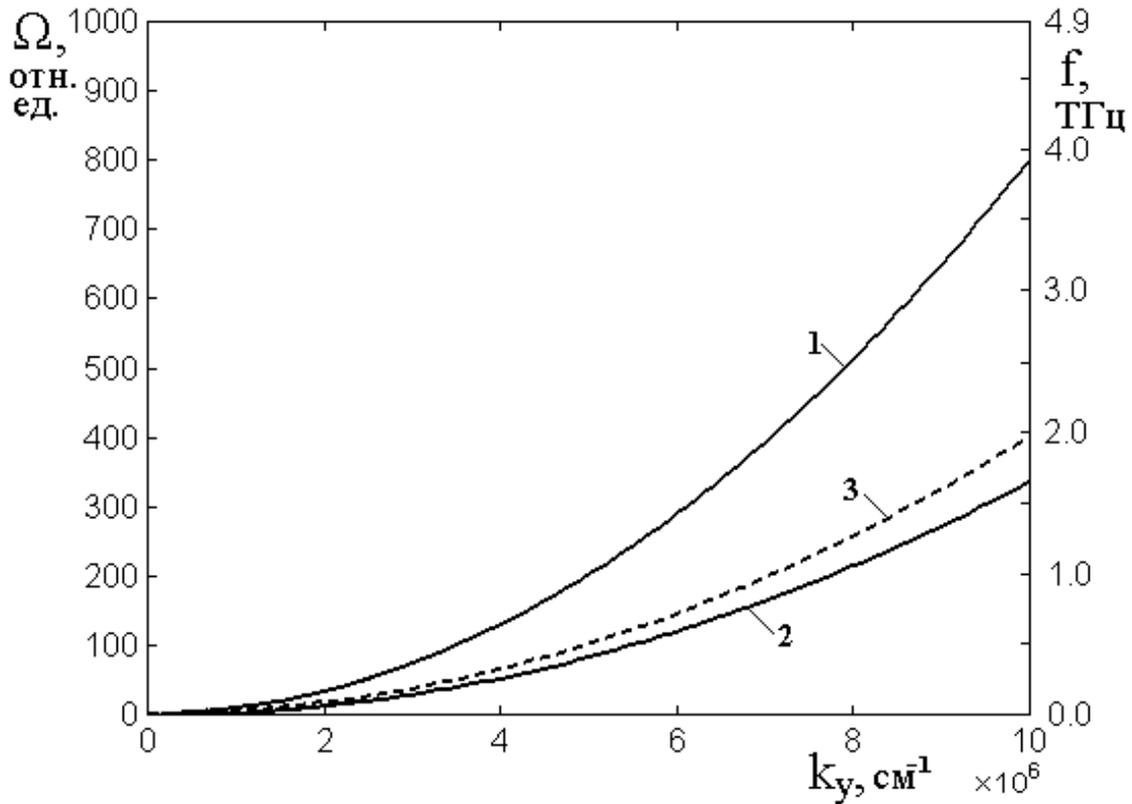


Рис.3. Дисперсионные кривые, построенные по различным формулам.  
 1 – формула (43); 2 – формула (64); 3 – формула (68).

Параметры:  $Q = 3,37 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2$ , остальные – те же, что на рис.2.

В качестве возможной причины различия можно предположить влияние поперечного волнового числа  $k_d$ . В самом деле, согласно [8, форм.(185)] действительная часть поперечного волнового числа определяется формулой:

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left( \frac{\beta}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + 1)} \right)^2}} \cdot k_y. \quad (65)$$

При достаточном удалении по частоте от начала дисперсионной кривой для поверхностной волны Дэймона-Эшбаха, то есть при

$$\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + 1) \gg 1, \quad (66)$$

а также с учетом того, что типичная величина параметра размагничивания  $\beta$  составляет порядка  $0,1 \dots 0,2$ , второе слагаемое под внутренним корнем будет значительно меньше первого. В этом случае с достаточной точностью можно

считать, что  $k_d = k_y$ , как это видно из кривой 1 на рис.5 в той же работе. Таким образом, с учетом поперечного волнового числа, перпендикулярного  $k_y$ , полное волновое число будет определяться формулой:

$$k_S = \sqrt{k_y^2 + k_d^2} \approx k_y \sqrt{2}, \quad (67)$$

то есть при любой заданной частоте полное волновое число  $k_S$  будет больше приведенного на рис.3 значения  $k_y$  в  $\sqrt{2}$  раз. При этом, если по горизонтальной оси вместо  $k_y$  откладывать полное волновое число  $k_S$ , то вся кривая 1 растягивается в правую сторону, так что частота определяется формулой:

$$\Omega = Qk_y^2/2. \quad (68)$$

Такая «растянутая» кривая, построенная по формуле (68), приведена на рис.3 под номером 3 и выделена пунктиром. Можно видеть, что эта кривая 3 значительно лучше, чем кривая 1, согласуется с кривой 2, соответствующей свободному пространству.

Таким образом, в формировании дисперсионной кривой для поверхностной волны типа Дэймона-Эшбаха в области волновых чисел, где обменное взаимодействие сказывается достаточно сильно (то есть при волновых числах больше  $10^4 \text{ см}^{-1}$ ) поперечное волновое число (точнее – его действительная часть) имеет принципиальное значение.

В качестве дополнения рассмотрим теперь, как меняется классическая дисперсия при различных значениях константы обмена, для чего обратимся к рис.4, где приведены дисперсионные кривые для свободного пространства, построенные по формуле (64) при различных значениях константы обменного взаимодействия  $Q$ . Кривые, представленные на рис.3 под номерами 1 и 2, приведены здесь же в виде утолщенных пунктирных линий.

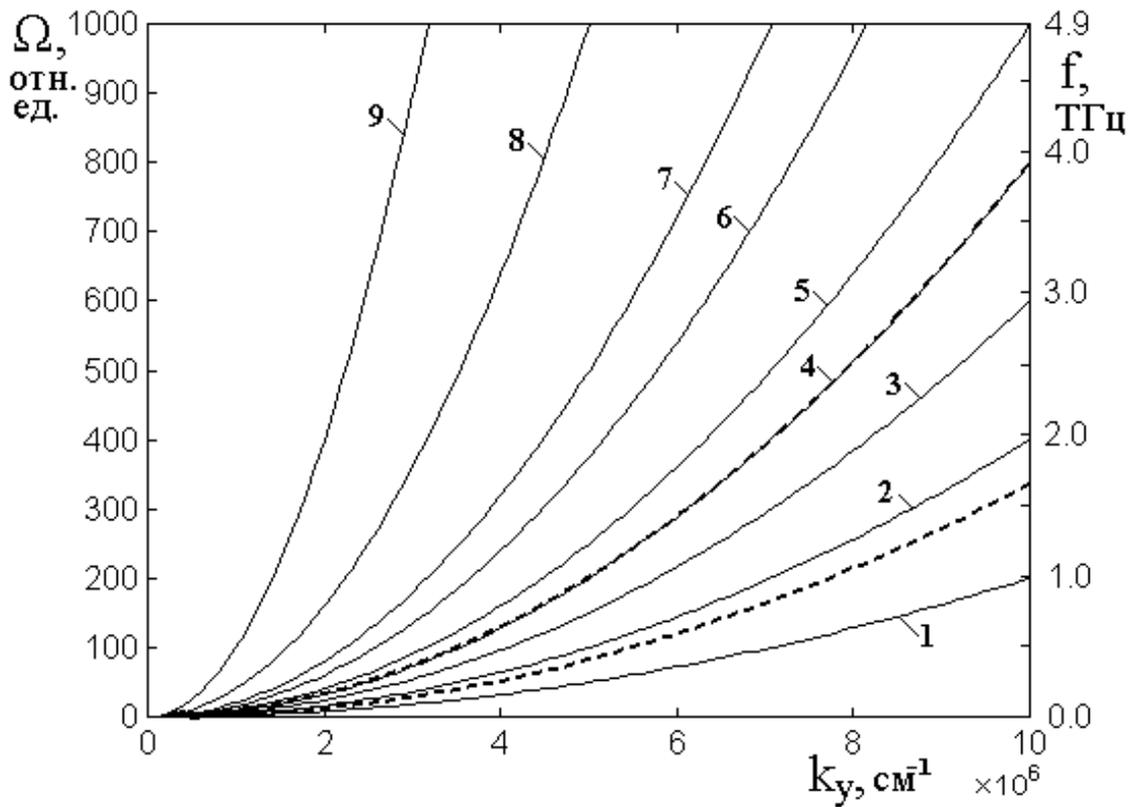


Рис.4. Дисперсионные кривые для свободного пространства при различных значениях константы обменного взаимодействия  $Q$ :

1 –  $2 \cdot 10^{-12}$  см<sup>2</sup>; 2 –  $4 \cdot 10^{-12}$  см<sup>2</sup>; 3 –  $6 \cdot 10^{-12}$  см<sup>2</sup>; 4 –  $8 \cdot 10^{-12}$  см<sup>2</sup>; 5 –  $10 \cdot 10^{-12}$  см<sup>2</sup>; 6 –  $15 \cdot 10^{-12}$  см<sup>2</sup>; 7 –  $20 \cdot 10^{-12}$  см<sup>2</sup>; 8 –  $40 \cdot 10^{-12}$  см<sup>2</sup>; 9 –  $100 \cdot 10^{-12}$  см<sup>2</sup>.

Остальные параметры – те же, что на рис.2.

Из рисунка можно видеть, что все кривые имеют возрастающий квадратичный характер, причем по мере увеличения константы степень возрастания уменьшается, то есть рост, хотя и сохраняется, но постепенно замедляется. В этом отношении кривые аналогичны приведенным на рис.2.

Кривая 4 здесь практически совпадает с кривой 1 на рис.3, так что константа обмена при ее построении принята равной  $8 \cdot 10^{-12}$  см<sup>2</sup>, так что соотносится с константой  $3,37 \cdot 10^{-12}$  см<sup>2</sup>, принятой при построении кривой 1 на рис.3 в 2,37 раз, как это уже отмечалось при обсуждении рис.3.

Кривая, соответствующая свободному пространству при константе  $3,37 \cdot 10^{-12}$  см<sup>2</sup> (нижний пунктир), расположена как раз между кривыми 1 и 2,

соответствующими значениям константы по обе стороны от приведенного значения.

Таким образом, можно полагать, что надлежащий выбор константы ( $8 \cdot 10^{-12}$  см<sup>2</sup>), позволяет формально согласовать между собой кривые для безграничного пространства и для тонкой пленки без учета роли поперечного волнового числа. В то же время, из рис.3 можно видеть, что кривая 3 на этом рисунке почти точно совпадает с кривой 2 на рис.4. При построении этих кривых приняты несколько различные значения константы обменного взаимодействия. Так для кривой 3 на рис.3 принято значение  $Q = 3,37 \cdot 10^{-12}$  см<sup>2</sup>, а для кривой 2 на рис.4 – значение  $Q = 4,00 \cdot 10^{-12}$  см<sup>2</sup>. Различие составляет менее 1%, однако оно может ставить вопрос о более точном определении константы неоднородного обменного взаимодействия, а сам факт близости этих значений требует более глубокой физической разработки роли поперечного волнового числа.

## 6. Дополнительное решение дисперсионного соотношения

Рассмотренное выше дисперсионное соотношение (43) представляет собой относительно параметра  $\xi$  уравнение восьмого порядка, так что кроме основного решения может иметь ряд побочных. Проверка показывает, что при любом заданном значении волнового числа  $k_y$  для частоты  $\Omega$  имеется всего два действительных решения, меньшее из которых соответствует обычному закону дисперсии типа Дэймона-Эшбаха, а большее – существенно превышает первое. Типичный пример кривых, соответствующих двум решениям уравнения (43), показан на рис.5. Как и в ряде предыдущих случаев, с целью наглядности, константа обмена равна десятикратному значению для ЖИГ. Для простоты динамическое размагничивание не учитывается ( $\alpha_p = 0$ ). На рисунке кривая 1 получена как первый корень уравнения (43), кривая 2 – как второй. Точечная линия 3 определяет нижнюю границу классического спектра ПМСВ:

$$\Omega_b = \sqrt{\Omega_H(\Omega_H + 1)}, \quad (69)$$

при условии  $\Omega_H = 0,25$  отн.ед, равную  $0,559$  отн.ед. Точечная линия 4 определяет верхнюю границу классического спектра ПМСВ:

$$\Omega_t = \Omega_H + 1/2, \quad (70)$$

равную  $0,75$  отн.ед. Кривая 5 – то же, что кривая 1, но при меньшей толщине пластины.

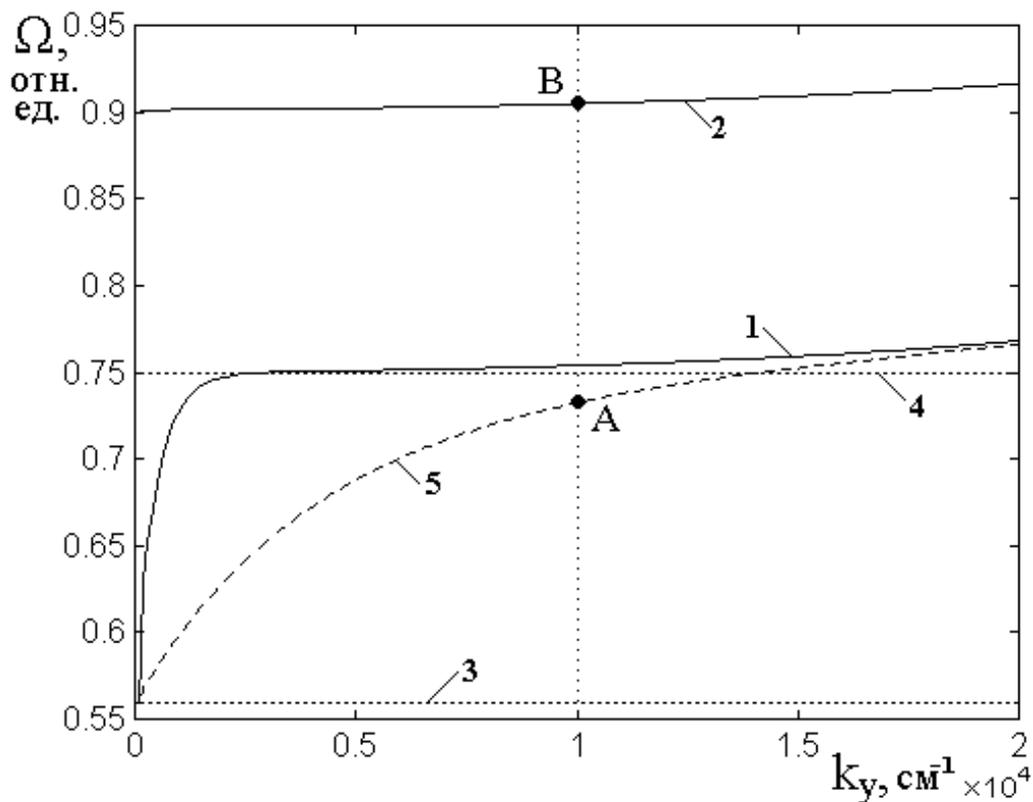


Рис.5. Дисперсионные кривые, соответствующие нулевым решениям уравнения (43). 1 – дисперсионная кривая при толщине  $d = 10$  мкм; 2 – дополнительная дисперсионная кривая; 3 – нижняя граница спектра ПМСВ (69); 4 – верхняя граница спектра ПМСВ (70); 5 – дисперсионная кривая при толщине  $d = 1$  мкм.

Назначение вертикальной точечной линии и точек А и В поясняется при

описании рис.7. Параметры:  $H_0 = 437,5$  Э;  $4\pi M_0 = 1750$  Гс;

$$Q = 3,37 \cdot 10^{-11} \text{ см}^2.$$

Из рисунка можно видеть, что кривая 1 представляют собой классическое решение задачи Дэймона-Эшбаха, дополненное учетом обменного

взаимодействия. Начало ее соответствует нижней границе спектра ПМСВ вида (69), после чего она довольно быстро нарастает, стремясь к верхнему значению спектра (70), однако за счет добавки от обменного взаимодействия вскоре пересекает эту границу, принимая далее квадратичный относительно  $k_y$  характер. Кривая 5 ведет себя таким же образом, с тем отличием, что ее нарастание при малых волновых числах происходит значительно плавнее, чем нарастание кривой 1, что полностью соответствует классическому закону дисперсии Дэймона-Эшбаха. При дальнейшем увеличении волнового числа кривая 5 сливается с кривой 1, принимая такую же квадратичность.

Особыми свойствами отличается кривая 2, соответствующая второму решению уравнения (43). Пологий участок при малых волновых числах у этой кривой отсутствует, то есть она сразу начинается при частоте равной 0,9 отн.ед., после чего далее плавно нарастает в соответствии с квадратичным законом относительно  $k_y$ . Геометрическая конфигурация этой кривой от толщины пластины не зависит. При изменении постоянного поля смещение кривой 2 по частоте подобно смещению кривой 1, однако по мере увеличения поля расстояние между кривыми 1 и 2 несколько уменьшается. Так, при волновом числе  $k_y = 10^4 \text{ см}^{-1}$  в поле 437, 5 Э, то есть при  $\Omega_H = 0,25$  отн.ед., расстояние по частоте  $\Omega$  между этими кривыми составляет около 1,5 отн.ед., а при увеличении поля вдвое, то есть до 875 Э, что соответствует  $\Omega_H = 0,50$  отн.ед., это расстояние составляет уже 1,3 отн.ед., то есть уменьшается на 13%.

Взаимное поведение кривых 1 и 2 в более широком диапазоне волновых чисел иллюстрируется рис.6, построенным при тех же условиях, что и рис.5.

Из рисунка можно видеть, что кривая 2 имеет такой же квадратичный характер, что и кривая 1, причем, по мере увеличения волнового числа  $k_y$ , кривая 2 постепенно приближается к кривой 1, а начиная с волнового числа около  $1,5 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$ , обе кривые практически полностью сливаются.

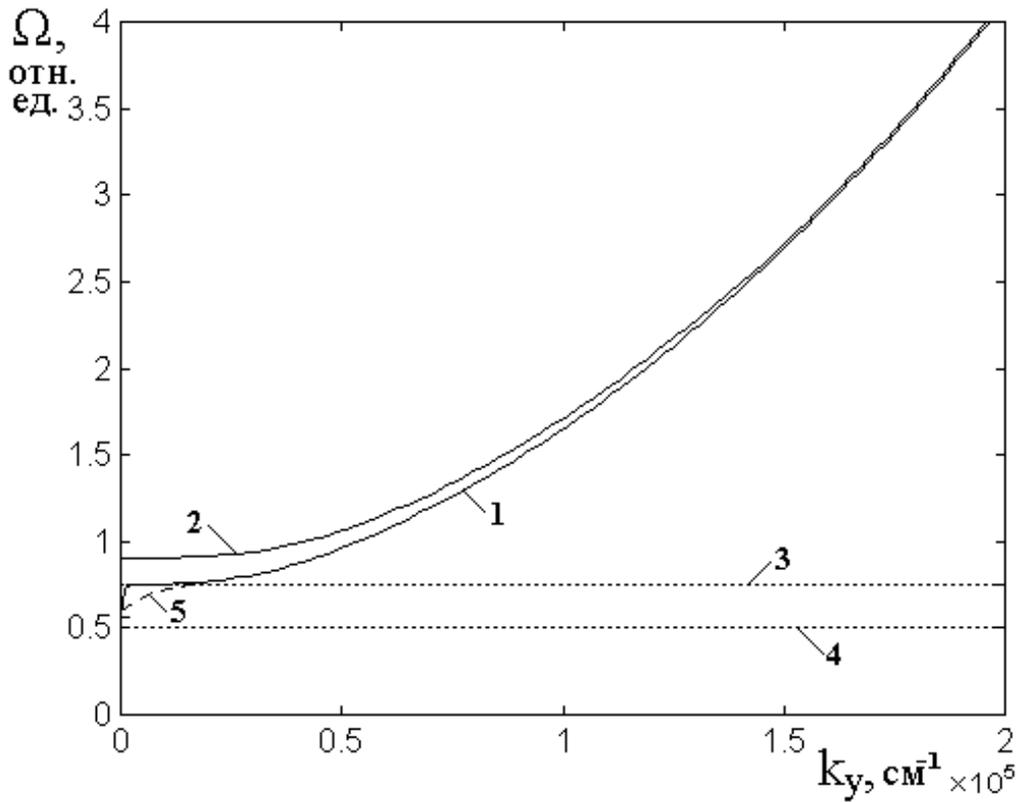


Рис.6. Те же кривые, что на рис.5, в более широком диапазоне волнового числа.  
 Нумерация кривых и параметры – те же, что на рис.5.

Рассмотрим теперь образование кривых 1 и 2 несколько более подробно, для чего обратимся к рис.7, где показаны зависимости от частоты параметра  $W_d$ , равного (формула (177) в работе [9]):

$$W_d = \frac{AB}{A^2 \sin^2(d k_m) + B^2 \cos^2(d k_m)} - \frac{u_d v_d + u_m v_m}{v_d^2 + v_m^2}, \quad (71)$$

то есть левой части дисперсионного соотношения (43), которая должна равняться нулю. Рис.7 построен при значении волнового числа  $k_y = 10^4 \text{ см}^{-1}$ , соответствующего вертикальной точечной линии на рис.5, где точки А и Б отвечают пересечению этой линии с дисперсионными кривыми 5 и 2. То есть рис.7 можно рассматривать как «сечение» рис.5 линией, соответствующей  $k_y = 10^4 \text{ см}^{-1}$ . Кривая 5 при этом выбрана вместо кривой 1 с целью большей наглядности.

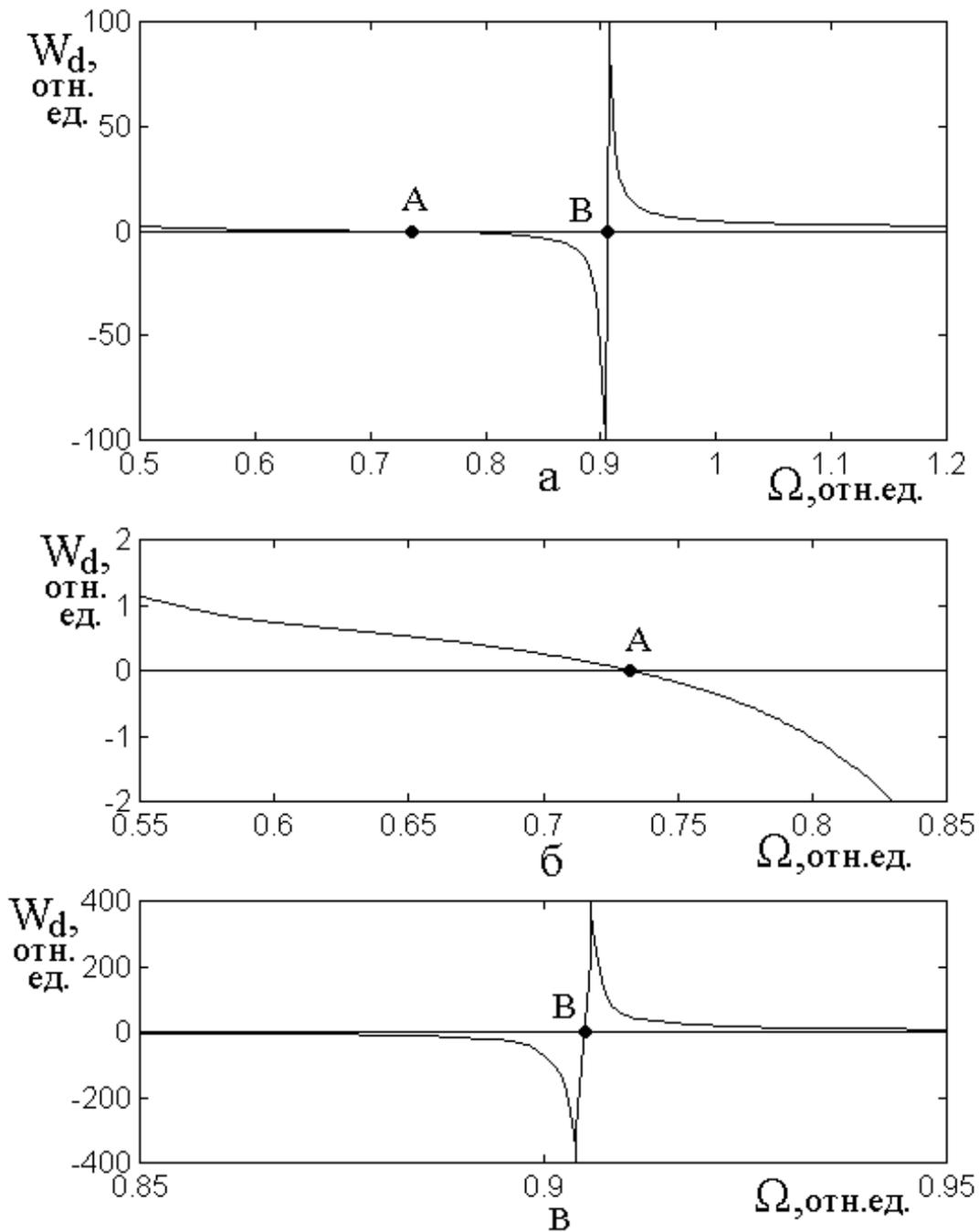


Рис.7. Зависимости параметра  $W_d$  от частоты.

а – полная зависимость в широком диапазоне частот;

б, в – участки изменения знака параметра  $W_d$  в более крупном масштабе.

Волновое число:  $k_y = 10^4 \text{ см}^{-1}$ ; толщина – 1 мкм.

Остальные параметры – те же, что на рис.5.

Из рис.7а можно видеть, что зависимость  $W_d$  от  $\Omega$  пересекает нулевую линию в двух точках А и В (соответствующих точкам с теми же обозначениями на рис.5). При этом характер пересечения в этих точках принципиально

различен. Для большей ясности окрестности точек пересечения представлены на рис.7б (точка А) и рис.7в (точка В) в более крупном масштабе. Можно видеть, что пересечение в точке А формируется при плавном изменении зависимости  $W_d$  от  $\Omega$ , тогда как пересечение в точке В имеет место при расходимости такой зависимости. Контрольная проверка показывает, что расходимость в точке В формируется за счет обращения в нуль знаменателя второго слагаемого выражения (71), тогда как в точке А имеет место баланс между обоими слагаемыми, то есть их равенство с противоположными знаками.

Следует заметить, что реальный физический смысл, соответствующий задаче Дэймона-Эшбаха с обменом, имеет точка А, образованная балансом между слагаемыми. При этом выяснение физического смысла точки В требует более подробного рассмотрения, выходящего за рамки настоящей работы и могущего составить предмет самостоятельной задачи. При этом важнейшим моментом исследования можно полагать не только нахождение нуля дисперсионного соотношения, как это сделано в настоящей работе, но и определение пространственного распределения потенциала и полей волны, а также ее динамической намагниченности в сочетании с определением угла отсечки, примерно таким же образом, как это сделано для классической волны Дэймона-Эшбаха в работе [11, стр.68-74].

## 7. К вопросу об ограничении волнового числа

В связи с продемонстрированной выше возможностью достижения волновым числом весьма высоких значений, возникает вопрос, в какой степени увеличение волнового числа может быть реализовано в реальных материалах, то есть, может ли длина волны уменьшаться до своего физического предела, близкого к межатомному расстоянию. Очевидно, для более коротких волн классическое рассмотрение магнитной среды в виде непрерывного континуума становится неприменимым и требуется рассмотрение на квантовом уровне. Физический предел рассмотрения магнитостатической волны, определяемый межатомным расстоянием, находится в пределах единиц нанометров, что соответствует волновому числу порядка  $10^7 - 10^8 \text{ см}^{-1}$ .

Следует отметить, что имеется ряд теоретических работ [19-29], где на основе классического дисперсионного соотношения Дэймона-Эшбаха показано, что в среде с реальным уровнем диссипации (например, в железиттриевом гранате, где константа Гильберта составляет порядка 0,001) дисперсионная кривая по мере увеличения волнового числа ограничивается на уровне порядка  $10^4 - 10^5 \text{ см}^{-1}$ . Из этого следует, что длина спиновой волны не может быть меньше единиц и десятых долей микрометра, то есть сотен и тысяч нанометров, что превышает межатомные расстояния в сотни и тысячи раз, то есть далеко не достигает своего физического предела.

Такое ограничение обусловлено уменьшением групповой скорости волны до такого уровня, когда за промежуток времени, равный периоду колебаний волны, волновое возмущение не успевает пройти расстояние, равное длине волны, в результате чего волна распространяться не может.

В то же время, следует отметить, что экспериментальное подтверждение ограничения диапазона допустимых волновых чисел на уровне  $10^4 - 10^5 \text{ см}^{-1}$ , в настоящее время отсутствует. Более того, во многих достаточно современных работах рассматриваются спиновые волны с волновым числом на порядок и более превышающим отмеченный выше уровень ограничения. Так, в работе [1], посвященной машинному моделированию спиновых волн с использованием программных пакетов, работающих по методу конечных разностей или конечных элементов, на рис.16 представлены волновые числа порядка  $0,1 \text{ нм}^{-1}$ , то есть  $10^6 \text{ см}^{-1}$ , на рис.20 – волновые числа порядка  $3 \cdot 10^6 \text{ см}^{-1}$  и так далее. В экспериментальной работе [30], посвященной возбуждению спиновых волн лучом фемтосекундного лазера, падающим на решетку из никеля, период этой решетки, определяющий длину возбуждаемых спиновых волн, составляет 500 нм, то есть волновое число здесь близко к величине  $10^5 \text{ см}^{-1}$ . В экспериментальной работе [3] продемонстрировано возбуждение спиновых волн с волновым числом порядка  $10^5 \text{ см}^{-1}$  в спиновом волноводе на основе пермаллоевой пленки шириной 100 нм и толщиной 10 нм. При этом, начиная с волновых чисел порядка  $6 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$  до максимально достигнутых волновых

чисел  $2 \cdot 10^5$  см<sup>-1</sup>, наблюдался резкий рост частоты возбуждаемых волн в диапазоне от 11 до 16 ГГц, имевший вид, близкий к квадратичному, что говорит в пользу обменного характера возбуждаемых волн.

С другой стороны, еще в ранних работах по возбуждению коротких спиновых волн в неоднородном поле, положивших основу созданию высокоэффективных линий задержки СВЧ сигнала, частично обобщенных в [31] (см. также обзор в главе 1 работы [11]), была показана не только возможность возбуждения спиновых волн длиной порядка единиц микрон, но и эффективное их преобразование в упругие волны той же длины.

Возбуждение обменных спиновых волн длиной в единицы и доли микрона широко исследовалось в металлических пленках микронных толщин (см. напр. [32, 33], а также обзор в главе 1 работы [11]). В таких пленках, благодаря проводимости, затухание настолько велико, что, согласно [19-29], ограничение по волновому числу должно наступать уже на уровне  $10^2 - 10^3$  см<sup>-1</sup>. При этом длина волны, особенно на модах высоких порядков, составляла единицы и десятые доли микрона, то есть волновое число достигало величины порядка  $10^5$  см<sup>-1</sup> и какое-либо его ограничение явным образом не наблюдалось.

Следует отметить также, что достаточно адекватная теоретическая трактовка экспериментальных работ по параметрическому возбуждению спиновых волн в условиях нелинейного ферромагнитного резонанса [34, 35] основана на рассмотрении таких волн с волновыми числами порядка  $10^6 - 10^7$  см<sup>-1</sup>, то есть имеющих длину менее сотен и даже десятков нанометров. При этом ограничение по волновому числу тоже никак не проявляется.

Таким образом, можно полагать, что предсказанное в теории [19-29] ограничение длины спиновых волн единицами микрометров или волнового числа величинами порядка  $10^4 - 10^5$  см<sup>-1</sup>, в реальной ситуации места не имеет.

В качестве причины снятия такого ограничения можно предположить отсутствие уменьшения групповой скорости до величины, когда волновое возмущение за время своего периода не успевает преодолеть длину собственной волны. То есть групповая скорость при любом значении волнового

числа всегда остается больше минимального критического значения, обуславливающего ограничение.

Как показано в работах [7-9], благодаря влиянию размагничивания и обмена, групповая скорость спиновой волны по мере увеличения волнового числа всегда только растет, причем тем сильнее, чем волновое число больше. Напротив того, в классической задаче Дэймона-Эшбаха, на которой основаны работы [19-29], групповая скорость по мере увеличения волнового числа стремится к нулю. Введение в рассмотрение размагничивания и обмена, выполненное в работах [7-9] такое стремление компенсирует, в результате чего ограничение по волновому числу если и может проявляться, то требует для своего выполнения весьма специфических условий, предусматривающих сочетание малой групповой скорости с высоким уровнем диссипации.

Довольно яркую иллюстрацию отсутствия уменьшения групповой скорости до малых значений дает рис.5. Здесь видно, что хотя для кривой 1 на участке изменения волнового числа от  $0,2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$  до  $0,5 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$  групповая скорость, как тангенс угла касательной к дисперсионной кривой, в самом деле близка к нулю, однако уже начиная с волновых чисел порядка  $0,5 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ , откуда начинается квадратичный рост кривой, эта скорость постепенно увеличивается тем сильнее, чем волновое число больше. Еще ярче такое отсутствие уменьшения групповой скорости наблюдается для кривой 5, соответствующей меньшей толщине пластины (1 мкм против 10 мкм для кривой 1). Здесь пологого участка, подобного наблюдаемому на кривой 1, вообще не существует, так как ниже  $k_y = 1,5 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$  высокая крутизна кривой 5 обеспечивается малостью толщины пластины (то есть работает размагничивающий фактор), а выше этого значения вступает в действие обмен, приводящий к квадратичному росту кривой в целом.

Следует заметить, что столь эффектная картина, как на рис.5, получена при значении константы обмена в 10 раз превышающей таковую для ЖИГ. Можно полагать, что в случае реальной константы ЖИГ для устранения

пологого участка, необходима еще меньшая толщина магнитной пластины. Однако, как отмечено в цитированных выше работах, толщина в 0,1 мкм и менее для проводимых на сегодняшний день экспериментах является типичной, что и может способствовать снятию ограничения на длину обменной волны по волновому числу.

**Замечание.** Проведенное здесь рассмотрение ликвидации ограничения по волновому числу является не более чем качественным. Для количественной трактовки следует прежде всего рассмотреть механизм ограничения более подробно, то есть найти критерий, накладываемый на групповую скорость длиной волны и параметром затухания. Далее следует выполнить рассмотрение дисперсии, подобное проведенному выше, с определением зависимости групповой скорости от волнового числа, после чего найти условия преодоления упомянутого критерия за счет обмена и малой толщины пластины, что даст картину, соответствующую эксперименту. Возможен и более прямой путь, то есть выполнить анализ дисперсии с учетом затухания, подобный, проведенному в работах [19-29], но с привлечением к рассмотрению обменного взаимодействия и динамического размагничивания. Однако можно полагать, что этот способ, хотя и будет более последовательным, но потребует вычислений значительно более громоздких, чем непосредственное получение критерия. Автор полагает, что более подробное рассмотрение задачи о наличии или отсутствии ограничения дисперсии по волновому числу может составить достойный внимания предмет для отдельной работы.

## **8. К вопросу о безграничной среде**

Проведенное рассмотрение поверхностной магнитостатической волны с учетом обмена и динамического размагничивания выполнено для параллельно-перпендикулярной геометрии классической задачи Дэймона-Эшбаха, то есть для случая касательно намагниченной пластины, в которой волна распространяется в направлении, перпендикулярном направлению постоянного поля. При этом было показано, что, как и в классическом случае, поперечное волновое число содержит действительную составляющую, абсолютная

величина которой близка к абсолютной величине действительной составляющей продольного волнового числа.

Действительная составляющая поперечного волнового числа подразумевает спад или нарастание амплитуды волны по экспоненте в направлении, перпендикулярном вектору продольного волнового числа. Для пластины такое обстоятельство означает, что амплитуда волны внутри пластины, имея конечное значение на поверхности пластины, спадает в ее глубину по экспоненциальному закону. Мнимая составляющая поперечного волнового числа подразумевает лишь, что такая спадающая экспонента промодулирована синусоидой постоянной амплитуды. Однако для безграничного пространства такое решение не подходит, так как в этом случае амплитуда волны по тому или другому направлению координаты, перпендикулярной направлению поля, должна была бы нарастать до бесконечности. В случае двух решений было бы две таких волны, нарастающие в противоположных направлениях.

Причиной появления действительной составляющей поперечного волнового числа, как в классическом случае, так и при учете обмена, является решение уравнения Уокера, получающееся для магнитной среды из классического уравнения электродинамики, требующего, чтобы дивергенция вектора магнитной индукции равнялась нулю. По этому параметру уравнение Уокера в классическом случае и при учете обмена и динамического размагничивания полностью эквивалентно. Учет обмена и размагничивания дает смешанную производную в уравнении Уокера, которая в конечном счете приводит к мнимой части поперечного волнового числа в дополнение к действительной. По отношению к безграничной среде мнимая составляющая дает лишь синусоидальную зависимость, к уходу на бесконечность не приводящую. То есть в отношении корректности важным параметром является именно действительная часть поперечного волнового числа.

Обращаясь к классической задаче Дэймона-Эшбаха, замечаем, что поперечное волновое число является действительным только при

распространении волны перпендикулярно направлению поля. В случае распространения волны вдоль направления поля поперечное волновое число является мнимым, то есть перпендикулярно плоскости пластины распространяется синусоидальная волна, для которой наличие двух поверхностей приводит к многомодовому режиму. Можно полагать, что и в случае учета обмена и динамического размагничивания поперечное волновое число также будет полностью мнимым, то есть в случае безграничного пространства вдоль направления поля будет распространяться волна, амплитуда которой будет сохраняться постоянной, к бесконечности не устремляясь.

Из сказанного следует, что в безграничной среде распространение волны в направлении, перпендикулярном направлению поля, физически не реализуется, тогда как при распространении волны вдоль направления поля такая реализация становится вполне возможной. Представляет также значительный интерес рассмотреть распространение волны не только вдоль и поперек направления поля, но и под произвольным углом к полю, где может проявиться сектор углов отсечки, а также неколлинеарность фазовой и групповой скоростей, подобная имеющей место для классической задачи Дэймона-Эшбаха.

**Замечание.** Следует заметить, что приведенный здесь вывод о невозможности реализуемости распространения обменной волны в направлении, перпендикулярном направлению поля, находится в противоречии с классически принятым положением о возможности распространения обменной волны, как вдоль поля, так и под углом в 90 градусов по отношению к нему (см. напр. [15, стр.201, рис.7.1]). Можно полагать, что такое различие обусловлено тем фактом, что в классической трактовке такой вывод сделан на основании закона дисперсии обменной волны в виде произведения константы обмена на квадрат волнового числа, полученного без учета равенства нулю дивергенции магнитной индукции, то есть без последовательно рассмотрения уравнения Уокера, обеспечивающего в конечном счете допустимость распространения

волны только в пределах определенных углов отсечки. Можно полагать, что проведенное здесь рассмотрение, дающее более сложный закон дисперсии является более корректным, вносит некоторые коррективы в классически принятую трактовку.

В заключение настоящего раздела заметим, что приведенные здесь соображения носят в первую очередь качественный характер, так что для подтверждения их правоты, коррекции или опровержения необходима более подробная количественная проверка. В этом свете проделанная работа ставит на повестку дня две первостепенные задачи:

первая – распространение волны с учетом обмена и размагничивания в касательно намагниченной пластине в произвольном направлении относительно поля;

вторая – распространение волны в безграничном пространстве в произвольном направлении относительно поля.

При решении обеих этих задач, как и при более подробном рассмотрении задачи, решенной в настоящей работе, следует полностью исследовать распределение потенциала и полей внутри и вне пластины, а также и в свободном пространстве.

## **9. Возможные применения обменных волн**

Остановимся вкратце на некоторых возможных применениях обменных волн. Прежде всего следует отметить традиционные применения для создания устройств обработки аналоговой информации. Такие устройства на дипольных волнах активно исследовались шестидесятих годах 20 века, в первую очередь применительно к малогабаритным линиям задержки. Подробное обобщение полученных результатов можно найти в обзорах [31, 36-39]. Составлявшие основу таких устройств дипольные волны имели длину в десятки и сотни микрон, так что волноведущая часть устройства имела габариты порядка единиц сантиметров. При этом рабочие поля устройств составляли порядка 100-1000 Э, а диапазон частот – 1-5 ГГц.

Обменные волны при таких же полях и диапазонах частот имеют длину в единицы и доли микрона, так что размер волноведущей части может быть уменьшен на два-три порядка. Квадратичный характер дисперсии позволяет при тех же достаточно небольших полях достичь значительно более высоких частот, вплоть до десятков-сотен ГГц и даже единиц ТГц, как это можно видеть, например из приведенного выше рис.2. Заметим, что применение традиционного ферромагнитного резонанса на таких частотах требует или огромных магнитных полей (десятки и сотни килоэрстед) или очень высокой анизотропии материала (того же порядка), что в реальных условиях крайне затруднительно. Для обменных же волн важнейшей, но вполне осуществимой задачей становится создание преобразователей, позволяющих возбуждать и регистрировать волны с волновым числом порядка  $10^5$ - $10^6$  см<sup>-1</sup>, то есть имеющих длину в десятки и менее нанометров. Преобразователь на основе решетки должен иметь период такой же величины, что можно осуществить вполне реализуемыми методами электронной микроскопии. Другим возможным способом возбуждения столь коротких волн является преобразование их длины в неоднородном поле, подобно тому, как это делалось для дипольных волн [40-43].

Дополнительные возможности для создания устройств открываются при использовании распространения волн в неоднородных полях. Здесь также можно использовать методы, развитые для дипольных волн, частично обобщенные в монографии [11]. Возможные перспективы для достижения частот терагерцового диапазона может открыть использование деления и умножения частот в нелинейном режиме [44-49]. Для оценки возможности такого использования следует исследовать регулярно возбуждаемые обменные волны в условиях сильной нелинейности, что на сегодняшний день полностью отсутствует.

**Замечание.** Под нелинейностью обменных волн здесь подразумевается не параметрическое возбуждение таких волн в условиях нелинейного ферромагнитного резонанса [34, 35, 50, 51], где колебания намагниченности

внутри волны остаются линейными, а такие обменные волны, колебания намагниченности внутри которых имеют нелинейный характер, то есть намагниченность внутри волны отклоняется от оси прецессии на углы до десятков градусов. Физическая теория таких волн еще требует своей изначальной разработки.

В заключение кратко упомянем еще некоторые соображения, касающиеся возможных применений обменных волн, требующих более подробной разработки.

Как показано в настоящей работе (например, можно видеть из рис.2), длина обменной волны может быть на два-три порядка меньше длины оптической электромагнитной волны, то есть составлять десятые и сотые доли микрона. Такое обстоятельство позволяет рассматривать обменную волну как возможный инструмент для построения микроскопа с пространственным разрешением на два-три порядка превышающим разрешение оптического микроскопа.

Примечательным является тот факт, что на частотах порядка десятков ТГц, хотя и с трудом, но все же достижимых известными радиотехническими методами, длина обменной волны становится сравнимой с межатомными расстояниями, так что при распространении в кристаллической решетке такая волна может испытывать на решетке дифракцию, подобную дифракции рентгеновских лучей в кристаллах. То есть обменные волны столь высоких частот можно рассматривать как определенный инструмент для изучения атомной структуры вещества. Заметим, что здесь выполненная выше континуальная разработка обменных волн уже не годится, а требуется разработка на квантовом уровне.

Разумеется, оба приведенные здесь соображения имеют чисто умозрительный характер, так что возможная их реализация требует значительных как теоретических, так и экспериментальных усилий. Автор осмеливается выразить надежду, что такие усилия будут предприняты будущими исследователями.

## Заключение

В развитие классической задачи Дэймона-Эшбаха рассмотрено распространение магнитостатической волны с учетом динамического размагничивания и неоднородного обменного взаимодействия. В классической геометрии задачи Дэймона-Эшбаха, представляющей собой ферритовую пластину, намагниченную внешним полем в ее плоскости, рассмотрено распространение поверхностной волны, волновой вектор которой перпендикулярен направлению поля.

Приведен тензор магнитной восприимчивости с учетом размагничивания и обмена, на основе которого при заданных граничных условиях получено дисперсионное соотношение, представляющее собой зависимость частоты волны от ее волнового числа. Дисперсионное соотношение исследовано с учетом двойственности и комплексного характера поперечного волнового числа.

Рассмотрена дисперсия обменных волн при больших волновых числах вплоть до  $10^7$  см<sup>-1</sup>, при которых длина волны становится соизмеримой с межатомными расстояниями в материале магнитной пластины. Исследования выполнены при изменении константы обменного взаимодействия в диапазоне от  $1,6 \cdot 10^{-12}$  см<sup>2</sup> до  $3,4 \cdot 10^{-11}$  см<sup>2</sup>, включающем в себя константу для железиттриевого граната (ЖИГ), равную  $Q(YIG) = 3,37 \cdot 10^{-12}$  см<sup>2</sup>. Показано, что во всем диапазоне изменения константы обмена дисперсионные зависимости имеют возрастающий квадратичный характер. По мере увеличения константы относительная степень возрастания уменьшается, то есть рост, хотя и сохраняется, но постепенно замедляется. Показано, что волновым числам порядка  $10^7$  см<sup>-1</sup>, то есть длинам обменных волн порядка межатомных расстояний, соответствуют частоты порядка десятков и небольших сотен ТГц. Так, при единичной константе для ЖИГ волновому числу  $10^7$  см<sup>-1</sup>, то есть длине волны в 6,28 нм соответствует частота около 4 ТГц. Тому же волновому числу при константе  $10,0 \cdot Q(YIG)$  соответствует частота около 40 ТГц.

Отмечено, что электромагнитным волнам той же длины соответствуют частоты порядка  $10^4$  ТГц, лежащие далеко выше видимого оптического спектра, уже в ультрафиолетовой и частично в рентгеновской области.

Выполнено сравнение полученного закона дисперсии для касательно намагниченной пластины с классической формулой дисперсии для безграничной среды, представляющей собой произведение константы обмена на квадрат волнового числа. Установлено, что дисперсионная кривая без учета поперечного волнового числа лежит по частоте выше классической примерно в два раза, однако учет поперечного волнового числа приводит к уменьшению различия всего до 20%. Таким образом, показано, что в формировании дисперсионной кривой для поверхностной волны типа Дэймона-Эшбаха в области волновых чисел, где обменное взаимодействие сказывается достаточно сильно (то есть при волновых числах больше  $10^4$  см<sup>-1</sup>), поперечное волновое число (точнее – его действительная часть) имеет принципиальное значение. На основе сопоставления дисперсии в безграничном пространстве с дисперсией в тонкой пластине отмечена необходимость более точного определения константы неоднородного обменного взаимодействия, а также более глубокой физической разработки роли поперечного волнового числа.

Выявлено существование, кроме основного, дополнительного решения дисперсионного соотношения. Показано, что основная кривая при отсутствии обмена и динамического размагничивания переходит в классическую дисперсионную кривую Дэймона-Эшбаха, по частоте заключенную между нижней и верхней границами спектра поверхностных магнитостатических волн, причем по мере уменьшения толщины пластины наклон начального участка классической дисперсионной кривой уменьшается. Показано, что дополнительная дисперсионная кривая по частоте лежит выше основной, причем в области малых волновых чисел превышение составляет около 0,5 от нормированной на намагниченность насыщения частоты основной кривой. Наклон начального участка у дополнительной кривой отсутствует и с изменением толщины не меняется. Обе кривые, как основная, так и

дополнительная, по мере увеличения волнового числа имеют сходный квадратичный характер, причем расстояние по частоте между ними постепенно уменьшается, а после волнового числа порядка  $1,5 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$ , обе кривые практически полностью сливаются. Геометрическая конфигурация этой кривой от толщины пластины не зависит. При изменении постоянного поля смещение дополнительной кривой по частоте подобно смещению основной, однако по мере увеличения поля расстояние между обеими кривыми уменьшается (на единицы и небольшие десятки процентов).

На основе анализа структуры дисперсионного соотношения показано, что существование двух его решений обусловлено прохождением через нуль зависимости его левой части от частоты. При этом характер прохождения через нуль для обеих кривых принципиально различен. Так, основная дисперсионная кривая формируется при плавном прохождении левой части через нуль, тогда как на частоте дополнительной дисперсионной кривой имеет место расхожимость, по обе стороны от которой значение левой части дисперсионного соотношения, имея противоположные знаки, стремится к бесконечности. Отмечено, что для более глубоко выявления физического смысла дополнительной дисперсионной кривой необходимо исследование пространственного распределения потенциала и полей волны, а также ее динамической намагниченности в сочетании с определением угла отсечки.

Рассмотрен вопрос о практической реализуемости отмеченного в ряде теоретических работ ограничения максимального значения волнового числа за счет диссипации. Отмечено, что причиной такого ограничения является снижение групповой скорости волны на пологом участке дисперсионной кривой до значения, при котором волна практически полностью затухает на расстоянии, меньшем ее длины. Выполнен сравнительный анализ известных на сегодня автору настоящей работы экспериментальных результатов, Отмечено, что ограничение волнового числа при значительных уровнях диссипации, в рассмотренных экспериментах не наблюдалось. Высказано предположение о том, что в реальных материалах квадратичный рост дисперсии не позволяет

групповой скорости уменьшиться до величины, при которой волна будет затухать на расстоянии своей длины. В качестве возможной задачи отмечена целесообразность получения численного критерия соотношения между расстоянием пробега волны до своего полного затухания и длиной той же волны в зависимости от параметра диссипации.

Обсуждена структура распределения потенциала поверхностной магнитостатической волны с учетом обмена и динамического размагничивания, распространяющейся в касательно намагниченной пластине. Отмечен действительный характер поперечного волнового числа, обеспечивающий экспоненциальную зависимость потенциала от координаты, перпендикулярной плоскости пластины. Указано, что такой его характер требует ограничения области существования волны двумя параллельными поверхностями, где потенциал принимает конечное значение. В случае безграничного пространства подобное ограничение отсутствует, из чего сделан вывод о том, что в такой среде поперечное волновое число должно иметь чисто мнимый характер, обеспечивающий не экспоненциальную, а периодическую синусоидальную зависимость потенциала от перпендикулярной координаты.

Высказано предположение о том, что в безграничной среде распространение волны в направлении, перпендикулярном направлению постоянного поля, не реализуется, ибо это запрещено действительным характером поперечного волнового числа. При этом распространение волны вдоль поля полностью разрешено, так как поперечное волновое число приобретает мнимый характер. В связи с этим в качестве предмета для дальнейшего рассмотрения сформулированы две задачи: (1) исследование распространения волны с учетом обмена и размагничивания в касательно намагниченной пластине в произвольном направлении относительно поля, выявление соответствующих углов отсечки; (2) исследование распространения такой же волны в безграничном пространстве в произвольном направлении относительно поля, также с учетом возможных направлений отсечки.

Обсуждены некоторые возможные применения обменных магнитостатических волн. В качестве традиционного направления упомянуто создание устройств обработки аналоговой информации, в первую очередь – линий задержки. Показано, что использование обменных волн вместо дипольных позволит уменьшить размеры волноведущих частей устройства на два-три порядка, обеспечивая габариты в десятки и единицы нанометров, а также увеличить рабочую частоту устройств до нескольких терагерц без увеличения постоянного магнитного поля. Упомянуты возможности создания устройств на основе неоднородных магнитных полей, а также работающих в сильно нелинейном режиме, что позволит повысить диапазон допустимых частот еще на порядок и более. Возможность укорочения длины обменной волны до нескольких нанометров позволяет рассматривать такую волну, как возможный инструмент для построения микроскопа с пространственным разрешением на два-три порядка превышающим разрешение оптического микроскопа. Другим возможным применением столь коротких волн может явиться исследование структуры вещества на атомно-молекулярном уровне, для теоретической интерпретации чего требуется переход от континуального рассмотрения к микроскопическому на квантовом уровне.

### **Благодарность**

Автор признателен В.И.Зубкову за помощь на начальных этапах работы, В.С.Власову за предоставление ряда литературных ссылок и постоянный стимулирующий интерес к работе, В.Г.Шаврову за активное стимулирующее внимание и обсуждение работы.

Работа выполнена в рамках государственного задания.

### **Литература**

1. Kim S.-K. Micromagnetic computer simulations of spin waves in nanometer-scale patterned magnetic elements. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2010. Vol.43. P.264004(25).

2. Khitun A., Bao M., Wang K.L. Magnonic logic circuits. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2010. Vol.43. P.264005(10).
3. Au Y., Ahmad E., Dmytriiev O., Dvornik M., Davison T., Kruglyak V.V. Resonant microwave-to-spin-wave transducer. // Appl. Phys. Lett. 2012. Vol.100. №18. P.182404(5).
4. Au Y., Davison T., Ahmad E., Keatley P.S., Hicken R.J., Kruglyak V.V. Excitation of propagating spin waves with global uniform microwave fields. // Appl. Phys. Lett. 2011. Vol.98. №12. P.122506(3).
5. Gruszecki P., Krawczyk M. Spin-wave beam propagation in ferromagnetic thin films with graded refractive index: mirage effect and prospective applications. // Phys. Rev. B. 2018. Vol.97. №9. P.094424(9).
6. Григорьева Н.Ю., Попов Д.А., Калиникос Б.А. Спектр дипольно-обменных спиновых волн в анизотропном ферромагнитном волноводе прямоугольного сечения. // ФТТ. 2014. Т.56. №9. С.1746-1755.
7. Щеглов В.И. Влияние поля размагничивания на дисперсию поверхностной волны Дэймона-Эшбаха. // Журнал радиоэлектроники. 2019. №2. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/feb19/3/text.pdf>.
8. Щеглов В.И. Влияние обменного взаимодействия и динамического размагничивания на дисперсию поверхностной волны Дэймона-Эшбаха. Часть 1. Поперечное волновое число. // Журнал радиоэлектроники. 2019. №7. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jul19/3/text.pdf>.
9. Щеглов В.И. Влияние обменного взаимодействия и динамического размагничивания на дисперсию поверхностной волны Дэймона-Эшбаха. Часть 2. Дисперсионное соотношение. // Журнал радиоэлектроники. 2019. №9. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/sep19/8/text.pdf>.
10. Damon R.W., Eshbach J.R. Magnetostatic modes of a ferromagnet slab. // J. Phys. Chem. Solids. 1961. Vol.19. №3/4. P.308.
11. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Магнитостатические волны в неоднородных полях. М.: Физматлит. 2016.

12. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Магнитостатические и электромагнитные волны в сложных структурах. М.: Физматлит. 2017.
13. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Ферромагнитный резонанс в условиях ориентационного перехода. М.: Физматлит. 2018.
14. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Динамика намагниченности в условиях изменения ее ориентации. М.: Физматлит. 2019.
15. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. М.: Физматлит. 1994.
16. Гуревич А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. М.: Наука. 1973.
17. Гуревич А.Г. Ферриты на сверхвысоких частотах. М.: Гос.Изд.физ.-мат.лит. 1960.
18. Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Сборник статей. Перевод с английского под редакцией А.Г.Гуревича. М.:ИЛ. 1961.
19. Вызулин С.А., Розенсон А.Э., Шех С.А. О спектре поверхностных магнитостатических волн в ферритовой пленке с потерями. // РЭ. 1991. Т.36. №1. С.164.
20. Ползикова Н.И., Раевский А.О. Особенности законов дисперсии поверхностных спиновых волн в структурах, содержащих сверхпроводник. // ФТТ. 1996. Т.38. №10. С.2937.
21. Келлер Ю.И., Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Дисперсионные свойства электромагнитных волн в касательно намагниченной ферритовой пластине. // Журнал радиоэлектроники. 2018. №4. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr18/7/text.pdf>.
22. Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Влияние диссипации на свойства поверхностных магнитостатических волн в касательно намагниченной пластине феррита. // Журнал радиоэлектроники. 2014. №7. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jul14/8/text.pdf>.
23. Келлер Ю.И., Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Поверхностные магнитостатические волны в пластине феррита с диссипацией.

Часть 1. Дисперсионные соотношения. // Журнал радиоэлектроники. 2016. №2.

Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/feb16/2/text.pdf>.

24. Келлер Ю.И., Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И.

Поверхностные магнитостатические волны в пластине феррита с диссипацией.

Часть 2. Распространение волны перпендикулярно направлению поля. //

Журнал радиоэлектроники. 2016. №3. Режим доступа:

<http://jre.cplire.ru/jre/mar16/1/text.pdf>.

25. Келлер Ю.И., Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И.

Поверхностные магнитостатические волны в пластине феррита с диссипацией.

Часть 3. Распространение волны в произвольном направлении относительно поля. // Журнал радиоэлектроники. 2016. №3. Режим доступа:

<http://jre.cplire.ru/jre/mar16/2/text.pdf>.

26. Келлер Ю.И., Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И.

Дисперсионные свойства поверхностных магнитостатических волн в пластине феррита с диссипацией. // РЭ. 2018. Т.63. №6. С.577.

27. Келлер Ю.И., Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И.

Распространение поверхностных магнитостатических волн в пластине феррита с диссипацией. // РЭ. 2018. Т.63. №9. С.974.

28. Makarov P., Maltceva L., Kotov L., Shcheglov V. Magnetostatic waves in a medium with damping. // Eur. Phys. Journ. 2018. Vol.185. P.02012(3).

29. Makarov P., Maltceva L., Kotov L., Shcheglov V. Dispersion of the magnetostatic volume waves in a medium with damping. // Eur. Phys. Journ. 2018. Vol.185. P.02015(4).

30. Chang C.L., Tamming R.R., Broomhall T.J., Janusonis J., Fry P.W., Tobey R.I., Hayward T.J. Selective excitation of localized spin-wave modes by optically pumped surface acoustic waves. // Phys. Rev. Applied. 2018. Vol.10. №3. P.034068(8).

31. Шлёман, Джозеф, Кохейн. Возбуждение спиновых волн в неоднородных магнитных полях и их применение в магнитных линиях задержки // ТИИЭР. 1965. Т.53. №10. С.1685.

32. De Wames R.E., Wolfram T. Dipole-exchange spin waves in ferromagnetic films // JAP. 1970. Vol.41. №4. P.987.
33. Wolfram T., de Wames R.E. Magnetoexchange branches and spin wave resonance in conducting and insulating films – perpendicular resonance // PR(B). 1971. Vol.4. №9. P.3125.
34. Моносов Я.А. Нелинейный ферромагнитный резонанс. М.: Наука. 1971.
35. Львов В.С. Нелинейные спиновые волны. М.: Наука. 1987.
36. Адам Дж.Д. Аналоговая обработка сигналов с помощью СВЧ-ферритов. // ТИИЭР. 1988. Т.76. №2. С.73.
37. Исхак В.С. Применение магнитостатических волн: обзор. // ТИИЭР. 1988. Т.76. №2. С.86.
38. Adam J.D., Davis L.E., Dionne G.F., Schloemann E.F., Stitzer S.N. Ferrite devices and materials. // IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques. 2002. Vol.50. №3. P.721.
39. Ле-Кроу Р., Комсток Р. Магнитоупругие взаимодействия в ферромагнитных диэлектриках. // В кн.: У. Мэзон (ред.): Физическая акустика. Т.3Б. Динамика решетки. М.: Мир. 1968. С.156.
40. Schlömann E. Generation of spin waves in nonuniform magnetic fields. I. Conversion of electromagnetic power into spin-wave power and vice versa. // JAP. 1964. Vol.35. №1. P.159.
41. Schlömann E., Joseph R.I. Generation of spin waves in nonuniform dc magnetic fields. II. Calculation of the coupling length. // JAP. 1964. Vol.35. №1. P.167.
42. Schlömann E., Joseph R.I. Generation of spin waves in nonuniform magnetic fields. III. Magneto-elastic interaction. // JAP. 1964. Vol.35. №8. P.2382.
43. Schlömann E., Joseph R.I., Kohane T. Generation of spin waves in nonuniform magnetic fields, with application to magnetic delay line. // Proc. IEEE. 1965. Vol.53. №10. P.1495.

44. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. // РЭ. 2009. Т.54. №7. С.863-874.

45. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Кратное преобразование частоты в схеме магнитострикционного преобразователя. Умножение частоты в режиме релаксации. // РЭ. 2019. Т.64. №5. С.487-489.

46. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Кратное преобразование частоты в схеме магнитострикционного преобразователя. Умножение частоты в непрерывном режиме. // РЭ. 2019. Т.64. №6. С.604-618.

47. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре. // Журнал радиоэлектроники. 2013. №2. С.10. Режим доступа <http://jre.cplire.ru/jre/feb13/10/text.html>.

48. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре при ферромагнитном резонансе. // РЭ. 2014. Т.59. №5. С.482-497.

49. Плешев Д.А., Котов Л.Н., Власов В.С., Щеглов В.И. Преобразование частоты при акустическом резонансе в феррите. Сыктывкар: СГУ. 2019.

50. Сул Г. Теория ферромагнитного резонанса при больших уровнях высокочастотной мощности. // В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А.Г. Гуревича. // М.: ИЛ. 1961. С.163-205.

51. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения. // УФН. 1974. Т.114. №4. С.609-632.

**Для цитирования:**

В.И.Щеглов. Влияние обменного взаимодействия и динамического размагничивания на дисперсию поверхностной волны Дэймона-Эшбаха. Часть 3. Особые случаи дисперсии. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2019. № 11. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/nov19/4/text.pdf>  
DOI 10.30898/1684-1719.2019.11.4