DOI: https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.11.2
УДК: 621.396:519.876.5

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ШИРОКОПОЛОСНОЙ ШУМОВОЙ ПОМЕХИ В СИСТЕМАХ АДАПТИВНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ РАДИОСИГНАЛОВ

**М.Ю. Лишак**

**Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14**

Статья поступила в редакцию 29 сентября 2022 г.

**Аннотация.** Для исследования характеристик систем адаптивной пространственной фильтрации радиосигналов используются имитационные модели сигналов и помех. При этом обычно считается, что время распространения волны помехи вдоль антенной системы много меньше времени корреляции помехи, т.е. помеха является узкополосной в пространственно-временно́м смысле. Если это условие не выполняется, то для корректного определения характеристик системы необходимо использование модели помехи, которая учитывала бы различие комплексных огибающих помехи в антенно-приёмных каналах, обусловленное задержкой из-за разности хода волны. В статье описан алгоритм моделирования широкополосной в пространственно-временно́м смысле шумовой помехи, основанный на формировании спектра комплексной огибающей помехи с учётом задержек на апертуре антенной системы. Приведён текст функции на языке системы MATLAB, реализующей предложенный алгоритм. Для тестирования модели получены автокорреляционная и взаимно-корреляционная функции помехи, спектр помехи на выходе адаптивного пространственного фильтра, диаграмма направленности и амплитудно-частотная характеристика. Результаты тестирования подтверждают адекватность разработанной модели.

**Ключевые слова:** адаптивная пространственная фильтрация, имитационное моделирование, широкополосная шумовая помеха, дискретное преобразование Фурье, антенная решётка.

**Автор для переписки:** Лишак Михаил Юрьевич, LishakMY@rambler.ru

## Введение

Адаптивные системы пространственной фильтрации сигналов, иначе называемые адаптивными антенными решётками, применяются для защиты радиотехнических систем от воздействия внешних помех, которые отличаются от полезного сигнала по направлению прихода [1]. При исследовании характеристик таких систем широко используется имитационное моделирование. При этом обычно считается, что помеха, которая должна быть подавлена адаптивным пространственным фильтром (АПФ), является узкополосной в пространственно-временно́м смысле. Это означает, что время распространения волны помехи вдоль антенной системы много меньше времени корреляции помехи. В этом случае помеховые колебания в антенно-приёмных каналах имеют характер квазигармонических колебаний и описываются своими комплексными огибающими, которые имеют одинаковую задержку и различаются только фазовым сдвигом [1, 2]. Если помеха не является узкополосной в пространственно-временно́м смысле, то для её адекватного моделирования необходимо помимо фазового сдвига учитывать также различную задержку комплексной огибающей в антенно-приёмных каналах, обусловленную разностью хода волны. Необходимость в моделировании такой помехи возникает, в частности, при разработке алгоритмов обработки сигналов в широкополосных АПФ [3 - 5], а также при исследовании характеристик угловых пеленгаторов со сверхразрешением в условиях приёма широкополосных колебаний [6, 7].

## 1. Модель гауссова белого шума

Основой моделирования отсчётов широкополосной шумовой помехи является модель гауссова белого шума в виде последовательности некоррелированных нормально распределённых псевдослучайных чисел. В системе MATLAB такая последовательность формируется с помощью функции **`randn`**. В последних версиях MATLAB в этой функции используется алгоритм генерации псевдослучайных чисел, разработанный Дж. Марсальей (George Marsaglia) и описанный им совместно с В.В. Тсангом (Wai Wan Tsang) в усовершенствованном виде в статье [8]. Там же приведён текст программы **`rnorrexp.c`** на языке Си, реализующей этот алгоритм.

Принцип построения данного алгоритма формирования псевдослучайных чисел рассмотрен в книге К. Моулера (Cleve Moler) по вычислительным методам в системе MATLAB [9]. Этот алгоритм характеризуется тем, что имеет большой период повторения $2^{32} - 1 \approx 4{,}3 \cdot 10^9$ и обеспечивает очень точное соответствие эмпирического распределения вероятностей теоретическому. Математическое ожидание псевдослучайных чисел равно 0, среднеквадратическое отклонение (СКО) $\sigma = 1$. При заданной частоте дискретизации $f_д$ такая последовательность псевдослучайных чисел является моделью белого шума со спектральной плотностью $G_0 = \frac{\sigma^2}{f_д/2} = \frac{2}{f_д}$.

Ниже приведены результаты моделирования последовательности из $10^6$ псевдослучайных чисел. На рис. 1 показаны гистограмма и эмпирическая интегральная функция распределения вероятностей, преобразованная по методу «вероятностной бумаги», в соответствии с которым функция нормального распределения вероятностей имеет вид прямой линии. Среднее значение (выборочное математическое ожидание) псевдослучайных чисел равно $3 \cdot 10^{-4}$, выборочное СКО равно 1,001, что близко к теоретическим значениям. Видно, что преобразованная эмпирическая функция распределения полученной последовательности практически не имеет отклонений от теоретической линейной зависимости. На рис. 2 показана оценка спектральной плотности последовательности, моделирующей белый шум при частоте дискретизации $f_д = 100$ МГц. Видно, что спектральная плотность шума в среднем равномерна в области частот $[0,\ f_д/2] = [0,\ 50\ \text{МГц}]$ и её среднее значение $0{,}02\ \text{В}^2/\text{МГц}$ совпадает с теоретическим значением $G_0 = \frac{\sigma^2}{f_д/2} = \frac{1\ \text{В}^2}{100\ \text{МГц}/2} = 0{,}02\ \text{В}^2/\text{МГц}$, если считать, что $\sigma = 1$ В.

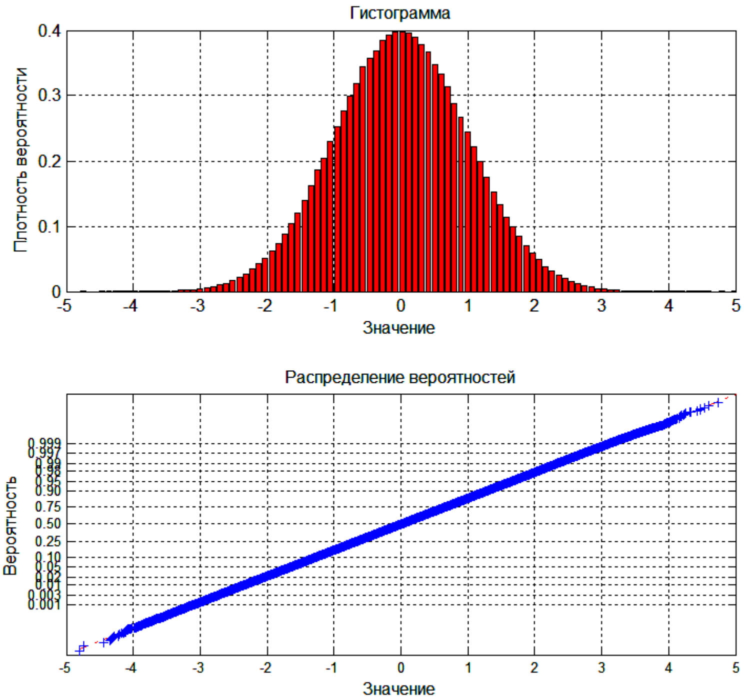



Рис. 1. Гистограмма и эмпирическое распределение вероятностей последовательности псевдослучайных чисел

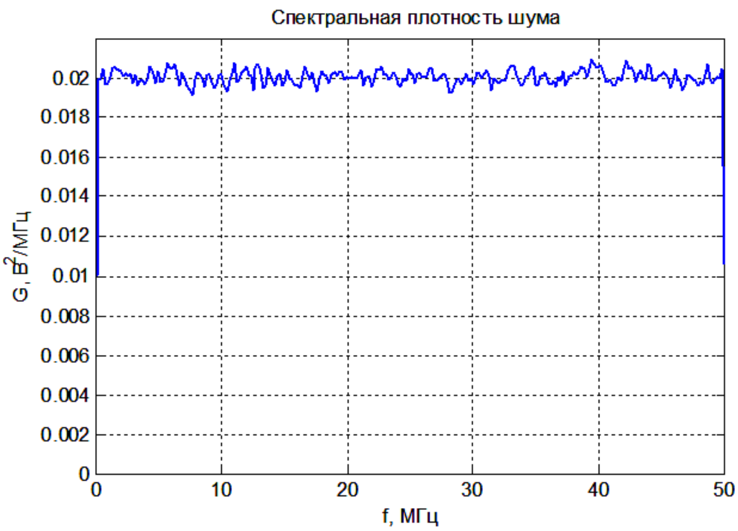



Рис. 2. Оценка спектральной плотности последовательности псевдослучайных чисел

## 2. Модель широкополосной шумовой помехи

Для адекватного моделирования широкополосной в пространственно-временно́м смысле шумовой помехи необходимо помимо фазового сдвига учитывать также различную задержку комплексной огибающей в антенно-приёмных каналах, обусловленную разностью хода волны. Шумовая помеха моделируется на промежуточной частоте $f_{\text{пр}}$ как последовательность отсчётов квазигармонического нормального случайного процесса с прямоугольным спектром, взятых с интервалом $\Delta t_{\text{д}} = \frac{1}{f_{\text{д}}}$. При этом в $n$-м антенно-приёмном канале фазовый сдвиг $\psi_n$ колебания помехи на частоте несущей $f_0$ и задержка $\tau_n$ её комплексной огибающей моделируются раздельно, т.е. отсчёты помехи вычисляются в соответствии с выражением

$$u_n(k) = Re\left\{\dot{U}_{n\tau}(k)e^{j\,(2\pi f_{\text{пр}}\cdot k\,\Delta t_{\text{д}} + \psi_n)}\right\}, \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{1}$$

где $n$ – номер антенно-приёмного канала; $\dot{U}_{n\tau}(k) = \dot{U}(t - \tau_n)|_{t=k\,\Delta t_{\text{д}}}$ – $k$-й отсчёт задержанной на время $\tau_n$ комплексной огибающей $\dot{U}(t)$. Задержанная комплексная огибающая моделируется на основе преобразования её комплексного спектра.

В качестве примера в статье рассматриваются характеристики шумовой помехи в каналах и на выходе АПФ с плоской антенной решёткой (АР), состоящей из 37 изотропных элементов, расположенных в узлах треугольной сетки. Система координат, связанная с АР, изображена на рис. 3. Здесь $\theta$ – угол между радиус-вектором направления наблюдения $\mathbf{r}$ и осью $z$ (зенитный угол), $\varphi$ – угол между проекцией радиус-вектора на горизонтальную плоскость и осью $x$ (азимут). На рис. 4 показана геометрия АР. Величина шага АР $d = \frac{\lambda}{\sqrt{3}}$, где $\lambda$ – длина волны, задана исходя из условия отсутствия побочных дифракционных максимумов ДН при любых углах сканирования [10, п. 3.3.1]. В модели задано $\lambda = 30$ см. В этом случае $d = 17{,}3$ см.

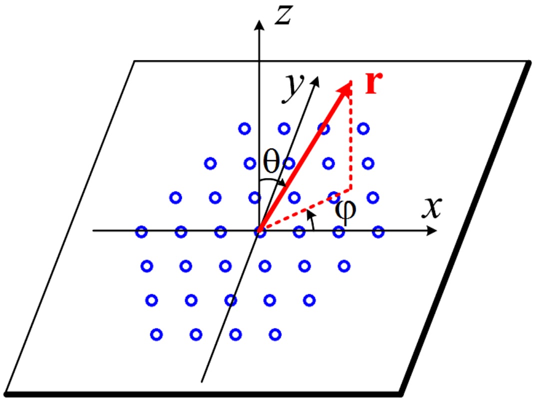



Рис. 3. Система координат

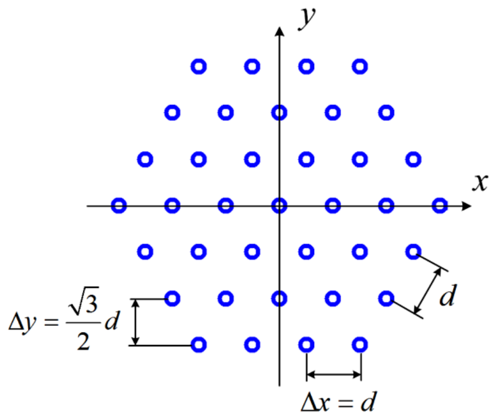



Рис. 4. Геометрия АР

В $n$-м антенно-приёмном канале фаза принимаемого колебания помехи равна

$$\psi_n = \kappa\, \Delta l_n, \tag{2}$$

где $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число; $\Delta l_n = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_n$ – разность хода волны относительно начала координат; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор источника помехи; $\mathbf{r}_n$ – радиус-вектор $n$-го антенного элемента. Для плоской АР

$$\Delta l_n = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_n = u\, x_n + v\, y_n, \tag{3}$$

где $x_n$, $y_n$ – координаты $n$-го антенного элемента; $u, v$ – обобщённые угловые координаты источника помехи, связанные с углами $\theta, \varphi$ сферической системы координат соотношениями

$$u = sin\, \theta\, cos\, \varphi\,, \tag{4}$$

$$v = \ sin\, \theta\, sin\, \varphi\,. \tag{5}$$

Задержка комплексной огибающей помехи на время распространения равна

$$\tau_n = -\frac{\Delta l_n}{c}, \tag{6}$$

где $c$ – скорость распространения электромагнитной волны.

Данный способ моделирования основан на том, что спектр задержанного на время $\tau$ аналогового сигнала $s_\tau(t) = s(t-\tau)$ равен

$$\dot{S}_\tau(j\omega) = \mathcal{F}\{s(t-\tau)\} = \dot{S}(j\omega)e^{-j\omega\tau},$$

где $\dot{S}(j\omega) = \mathcal{F}\{s(t)\}$ – спектр сигнала; $\mathcal{F}\{\cdot\}$ – символ оператора преобразования Фурье. Следовательно, задержанный сигнал равен

$$s(t-\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{\dot{S}_\tau(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\dot{S}(j\omega)e^{-j\omega\tau}\},$$

где $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$ – символ оператора обратного преобразования Фурье.

Аналогичные соотношения имеют место и для цифровых сигналов. В этом случае дискретное преобразование Фурье (ДПФ) сигнала $s_\tau(k)$, полученного дискретизацией задержанного сигнала $s_\tau(t)$, равно

$$\dot{S}_\tau(m) = \mathbb{F}\{s_\tau(k)\} = \dot{S}(m)e^{-j2\pi f(m)\tau}, \tag{7}$$

где $\mathbb{F}\{\cdot\}$ – символ оператора ДПФ; $\dot{S}(m) = \mathbb{F}\{s(k)\}$ – дискретный спектр цифрового сигнала; $f(m)$ – отсчёты частоты, равные

$$f(m) = \begin{cases} m\,\Delta f & \text{при } m = \overline{0, N_{FFT}/2} \\ -(N_{FFT}-m)\Delta f & \text{при } m = \overline{N_{FFT}/2+1, N_{FFT}-1} \end{cases}; \tag{8}$$

$\Delta f = \frac{f_{\text{д}}}{N_{FFT}}$ – дискрет частоты; $N_{FFT}$ – количество отсчётов сигнала и его спектра. Дискретное преобразование Фурье определяется как

$$\mathbb{F}\{s(k)\} = \frac{1}{N_{FFT}}\sum_{k=0}^{N_{FFT}-1} s(k)\, exp\left(-j\frac{2\pi}{N_{FFT}}k\,m\right). \tag{9}$$

Следовательно, отсчёты задержанного сигнала определяются выражением

$$s_\tau(k) = \mathbb{F}^{-1}\{\dot{S}_\tau(m)\} = \mathbb{F}^{-1}\{\dot{S}(m)e^{-j2\pi f(m)\tau}\}, \tag{10}$$

где $\mathbb{F}^{-1}\{\cdot\}$ – символ оператора обратного ДПФ, которое определяется как

$$\mathbb{F}^{-1}\{\dot{S}(m)\} = \sum_{m=0}^{N_{FFT}-1} \dot{S}(m)\, exp\left(j\frac{2\pi}{N_{FFT}}k\,m\right). \tag{11}$$

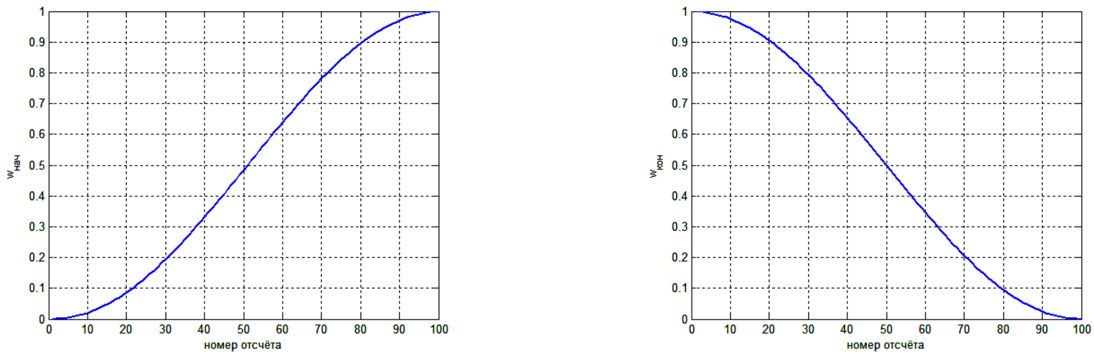
В приведённых выражениях количество отсчётов $N_{FFT}$ (объём преобразования Фурье) принимается одинаковым для сигнала и спектра, поскольку ДПФ вычисляется с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ). Для устранения выбросов на концах реализации помехи, возникающих при обратном БПФ из-за эффекта Гиббса, выполняется умножение заданного числа $k_w$ отсчётов в начале и в конце последовательности отсчётов помехи на сглаживающую функцию. Для сглаживания начальных отсчётов эта функция определяется как

$$w_{\text{нач}}(k) = \frac{1}{2}\left[1 - cos\left(\pi\frac{k}{k_w}\right)\right],\ \ k = 0,1,\dots,(k_w-1), \tag{12}$$

а для сглаживания конечных отсчётов – как

$$w_{\text{кон}}(k) = w_{\text{нач}}(k_w - 1 - k),\ \ k = 0,1,\dots,(k_w - 1). \tag{13}$$

Графики функций $w_{\text{нач}}(k)$ и $w_{\text{кон}}(k)$ при $k_w = 100$ показаны на рис. 5.




*а*) *б*)

Рис.5. Сглаживающие функции: *а*) $w_{\text{нач}}(k)$; *б*) $w_{\text{кон}}(k)$

Умножение отсчётов помехи на сглаживающую функцию производится в соответствии со следующими выражениями:

$$s_{\tau\ \text{сгл}}(k) = s_\tau(k) w_{\text{нач}}(k) \text{ при } k = 0,1,\dots,(k_w - 1), \tag{14}$$

$$s_{\tau\ \text{сгл}}(k) = s_\tau(k) w_{\text{кон}}(k - N_{FFT} + k_w) \tag{15}$$

при $k = (N_{FFT} - k_w), (N_{FFT} - k_w + 1), \dots, (N_{FFT} - 1)$.

Далее описаны основные этапы моделирования широкополосной шумовой помехи и приведены соответствующие фрагменты программы **`jammer_delay.m`** на языке системы MATLAB. Полный листинг программы приведён в Приложении.

### 1) *Формирование массива отсчётов спектра комплексной огибающей помехи без задержки и фазового сдвига*

Моделирование шумовой помехи, имеющей равномерный энергетический спектр в заданной полосе частот $B_{\text{п}}$, основано на том, что энеретический спектр её комплексной огибающей имеет прямоугольную форму в области частот $[-B_{\text{п}}/2\,, B_{\text{п}}/2]$. При этом действительная и мнимая части комплексного спектра помехи имеют нормальное распределение вероятностей и статистически независимы. Следовательно, отсчёты ДПФ комплексной огибающей помехи, соответствующие частотам $0$, $\Delta f$, $2\Delta f,\dots$, $n_{\text{п}}\,\Delta f$ и

$f_д - n_п \Delta f, f_д - (n_п - 1)\Delta f, \ldots, \ f_д - \Delta f$, являются комплексными нормально распределёнными независимыми случайными величинами с одинаковой дисперсией. Здесь $n_п \ = \left[\frac{B_п/2}{\Delta f} + \frac{1}{2}\right]$ – номер отсчёта спектра, наиболее близкого по частоте к половине ширины спектра помехи $B_п/2$; $[\cdot]$ – символ операции взятия целой части числа. Остальные отсчёты спектра комплексной огибающей равны 0, общее количество отсчётов равно $N_{FFT}$. В MATLAB-программе отсчёты действительной и мнимой частей спектра **S** комплексной огибающей помехи при нулевой задержке формируются с помощью генератора нормальных случайных чисел **randn** [11]:

```
n_B=round((B/2)/df); % Номер отсчёта частоты,
% соответствующего 1/2 ширины спектра помехи
S=zeros(1,NFFT); % Начальное обнуление массива отсчётов
% спектра помехи
% Формирование массива отсчётов спектра
% комплексной огибающей помехи без задержки:
% 1) для частот [0, B/2]
S(1:n_B+1)=randn(1,n_B+1)+1i*randn(1,n_B+1);
% 2) для частот [fs-B/2, fs-df]
S(NFFT-n_B+1:NFFT)=randn(1,n_B)+1i*randn(1,n_B);
```

### *2) Формирование массива отсчётов частоты и массивов отсчётов сглаживающих функций*

2.1) По формуле (8) рассчитывается массив отсчётов частоты:

```
f=zeros(1,NFFT);   % Начальное обнуление массива
% отсчётов частоты
for m=0:(NFFT/2)
    f(m+1)=m*df;  % Отсчёты частоты в интервале [0, fs/2]
end
for m=(NFFT/2+1):(NFFT-1)
    f(m+1)=-(NFFT-m)*df; % Отсчёты частоты
% в интервале [fs/2, fs-df]
end
```

2.2) В соответствии с формулами (12), (13) вычисляются массивы отсчётов сглаживающих функций $w_{нач}(k)$ и $w_{кон}(k)$:

```
k_w=100; % Количество сглаживаемых отсчётов
w1=zeros(1,k_w); % Начальное обнуление массива w1
for k=0:k_w-1
```

```
    w1(k+1)=(1-cos(pi*k/k_w))/2; % Отсчёты функции w_нач
    % для сглаживания в начале реализации
end
w2=zeros(1,k_w); % Начальное обнуление массива w2
for k=0:k_w-1
    w2(k+1)=w1(k_w-k); % Отсчёты функции w_кон
    % для сглаживания в конце реализации
end
```

Далее для каждого антенно-приёмного канала выполняются следующие вычисления.

***3) Формирование массива отсчётов спектра комплексной огибающей помехи с учётом задержки***

3.1) По формуле (3) вычисляется разность хода помехи относительно начала координат:

```
delta_l=r_elem(n,:)*r.';
```

3.2) По формуле (6) вычисляется задержка комплексной огибающей:

```
tau=-delta_l/c;
```

3.3) В соответствии с (7) формируется массив отсчётов спектра комплексной огибающей помехи с учётом задержки:

```
S_delay=S.*exp(-1i*2*pi*f*tau);
```

***4) Формирование массива отсчётов комплексного аналитического сигнала помехи на промежуточной частоте с учётом задержки и фазового сдвига***

4.1) С помощью обратного БПФ (11) вычисляется комплексная огибающая помехи с задержкой:

```
U_delay=ifft(S_delay, NFFT);
```

4.2) По формуле (2) вычисляется фазовый сдвиг на частоте несущей:

```
psi=k_wave*delta_l;
```

4.3) Вычисляются отсчёты комплексного аналитического сигнала помехи на промежуточной частоте с фазовым сдвигом $\psi_n$:

```
u_delay_complex=U_delay.*exp(1i*(2*pi*f_inter*t+psi));
```

***5) Формирование массива отсчётов сигнала помехи с учётом задержки и фазового сдвига***

5.1) Вычисляются вещественные отсчёты помехи:

```
u_jammer=real(u_delay_complex);
```

5.2) В соответствии с (14), (15) выполняется умножение заданного числа $k_w$ отсчётов в начале и в конце массива отсчётов помехи на сглаживающую функцию:

```
for k=0:(k_w-1)
    u_jammer(k+1)=w1(k+1)*u_jammer(k+1); % Умножение
% k_w начальных отсчётов на сглаживающую функцию w1
end
for k=(L-k_w):(L-1)
    u_jammer(k+1)=w2(k-L+k_w+1)*u_jammer(k+1);%Умножение
% k_w конечных отсчётов на сглаживающую функцию w2
end
```

5.3) Вычисляется СКО отсчётов помехи и производится нормировка для получения реализации с СКО равным 1; полученные отсчёты записываются в двумерный массив **Y_jammer**:

```
    sigma_u_jammer=std(u_jammer);
    Y_jammer(n,:)=u_jammer/sigma_u_jammer;
```

Для правильного моделирования помехи в соответствии с приведённым алгоритмом спектр помехи должен полностью помещаться либо в левой половине интервала частот $[0, f_д]$, либо в правой половине, т.е. ширина спектра $B_п$, промежуточная частота $f_{пр}$ и частота дискретизации $f_д$ должны удовлетворять следующим условиям:

| при $f_{пр} < \frac{f_д}{2}$ | при $f_{пр} > \frac{f_д}{2}$ |
|---|---|
| $\begin{cases} f_{пр} + \frac{B_п}{2} \le \frac{f_д}{2} \\ f_{пр} - \frac{B_п}{2} \ge 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} f_{пр} + \frac{B_п}{2} \le f_д \\ f_{пр} - \frac{B_п}{2} \ge \frac{f_д}{2} \end{cases}$ |

## 3. Тестирование модели широкополосной шумовой помехи

Для проверки адекватности модели шумовой помехи были получены следующие тестовые результаты.

### *3.1 Амплитудный спектр, автокорреляционная и взаимно-корреляционная функции*

Для помехи с шириной спектра $B_п = 20$ МГц и промежуточной частотой $f_{пр} = 25$ МГц были вычислены амплитудный спектр и оценка автокорреляционной функции (АКФ) в одном из приёмных каналов, а также оценка взаимно-корреляционной функции (ВКФ) сигнала помехи в двух приёмных каналах при межканальной задержке 0,05 мкс. Результаты моделирования приведены на рис. 6 - 8. На рис. 6 показан амплитудный спектр помехи в интервале частот от 0 до $f_д = 100$ МГц. Он имеет составляющие шириной 20 МГц на частотах $f_{пр} = 25$ МГц и $f_д - f_{пр} = 75$ МГц, что соответствует заданным параметрам.

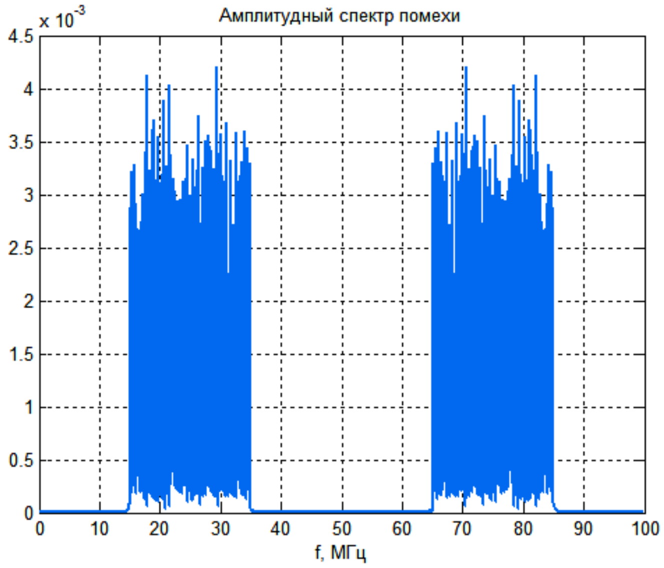
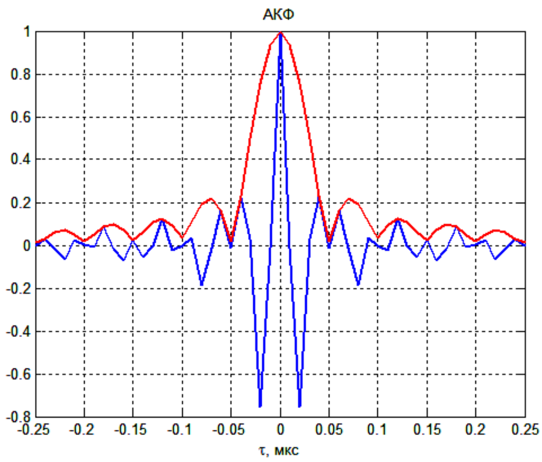



Рис. 6. Амплитудный спектр шумовой помехи

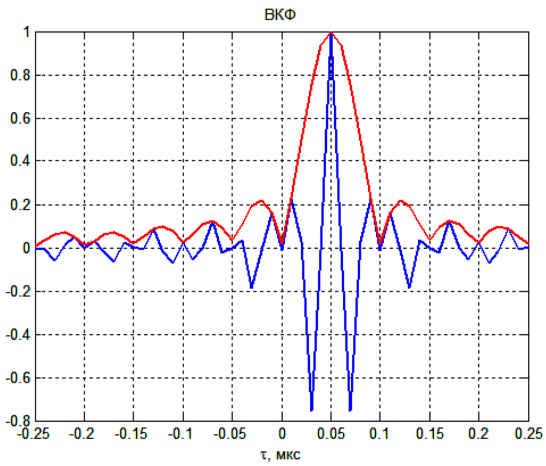
На рис. 7 показаны графики оценок нормированных АКФ и ВКФ, красным цветом изображены их огибающие. Видно, что форма огибающей соответствует выражению для модуля $|\rho(\tau)|$ нормированной АКФ низкочастотного шума с прямоугольным спектром шириной $B_п$, которая определяется выражением [12, п. 3.2]

$$\rho(\tau) = \frac{sin(\pi\tau\, B_п)}{\pi\tau\, B_п}. \qquad (16)$$

Нули главного максимума огибающей АКФ равны $\tau_0 = \pm 0{,}05$ мкс, что соответствует теоретическим значениям $\pm\frac{1}{B_п} = \pm\frac{1}{20\ МГц} = \pm 0{,}05$ мкс. Сдвиг максимума ВКФ равен заданному значению задержки 0,05 мкс.




*а*)




*б*)

Рис. 7. Автокорреляционная (*а*) и взаимно-корреляционная (*б*) функция шумовой помехи с прямоугольным спектром

### *3.2 Амплитудный спектр комплексной огибающей помехи*

Для помехи с шириной спектра $B_{\text{п}} = 20$ МГц с угловыми координатами $\theta_{\text{п}} = 45°$, $\varphi_{\text{п}} = 0$ был получен амплитудный спектр комплексной огибающей помехи в одном приёмном канале и на выходе АПФ.

Комплексная огибающая колебания на выходе АПФ определяется выражением [1]

$$\dot{Y}(k) = \mathbf{W}^{\text{H}}\mathbf{U}(k), \tag{17}$$

где $\mathbf{U}(k)$ – вектор отсчётов комплексных огибающих помехи в приёмных каналах; $\mathbf{W}$ – вектор весовых коэффициентов АПФ; н – символ эрмитова сопряжения.

Вектор весовых коэффициентов вычисляется в соответствии с регуляризованным прямым алгоритмом адаптации как решение матричного уравнения Винера-Хопфа [1]:

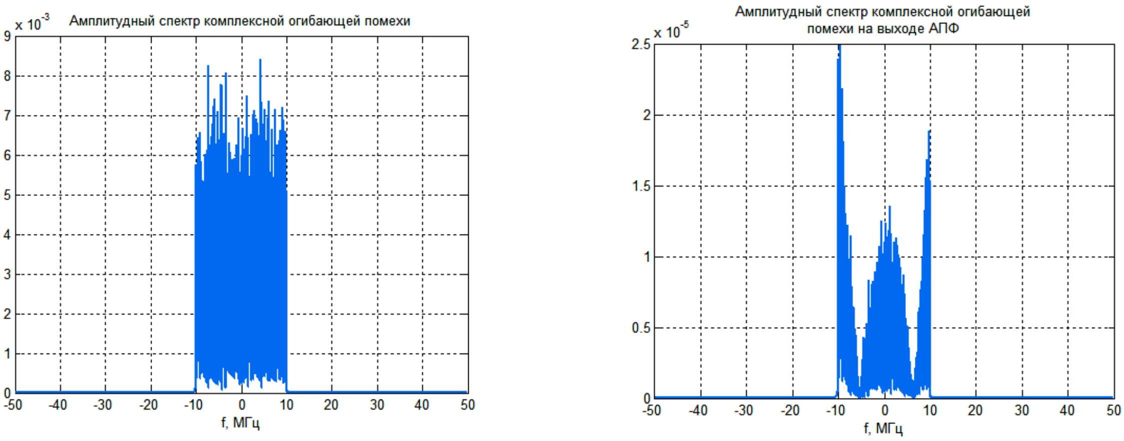
$$\widehat{\mathbf{R}}_{\text{рег}}\mathbf{W} = \mathbf{S}_0, \tag{18}$$

где $\widehat{\mathbf{R}}_{\text{рег}}$ – регуляризованная оценка оценки корреляционной матрицы комплексных огибающих помехи; $\mathbf{S}_0 = (1, \dots, 1)^{\text{T}}$ – направляющий вектор, определяющий положение максимума диаграммы направленности АПФ при отсутствии помехи. В алгоритме адаптации регуляризация оценки корреляционной матрицы производится в соответствии с выражением

$$\hat{\mathbf{R}}_{\text{рег}} = \hat{\mathbf{R}} + \mu\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\hat{R}_{nn}\right)\mathbf{I}\,, \tag{19}$$

где $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\mathbf{U}(k)\mathbf{U}(k)^{\text{H}}$ – выборочная корреляционная матрица комплексных огибающих помехи; $K$ – количество отсчётов; $\mu$ – нормированный параметр регуляризации; $N$ – количество антенно-приёмных каналов; $\mathbf{I}$ – единичная матрица. В модели было задано $K = 1024,\ \mu = 10^{-4}$.

На рис. 8*а* показан амплитудный спектр комплексной огибающей помехи в одном приёмном канале. Видно, что он ограничен по частоте значениями $-B_{\text{п}}/2 = -10$ МГц и $B_{\text{п}}/2 = 10$ МГц, что соответствует заданной ширине спектра помехи 20 МГц. На рис. 8*б* показан амплитудный спектр комплексной огибающей помехи на выходе АПФ. Видно, что он также ограничен по частоте значениями $-B_{\text{п}}/2$ и $B_{\text{п}}/2$ и имеет два симметрично расположенных провала.




*а*) *б*)

Рис. 8. Спектр комплексной огибающей помехи в одном приёмном канале (а) и на выходе АПФ (б)

Такая форма спектра обусловлена тем, что при воздействии широкополосной помехи происходит частичная декорреляция комплексной огибающей в различных антенно-приёмных каналах. В этом случае полное подавление помехи путём суммирования комплексных огибающих, умноженных на весовые коэффициенты, становится принципиально невозможным. Ослабление помехи обеспечивается за счёт того, что в диаграмме направленности АПФ в направлении на помеху формируется не один нуль, как при действии узкополосной помехи, а несколько близко расположенных нулей.

В данном случае образуются два нуля (рис. 9). В соответствии с этим амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) АПФ в направлении на помеху также имеет два нуля, расположенных симметрично вблизи границ спектра помехи (рис. 10). Благодаря этому в АЧХ формируется расширенная зона режекции, что обеспечивает подавление помехи в широкой полосе частот.

Следует отметить, что при моделировании помехи как узкополосного в пространственно-временно́м смысле колебания эти эффекты на модели АПФ не воспроизводятся.

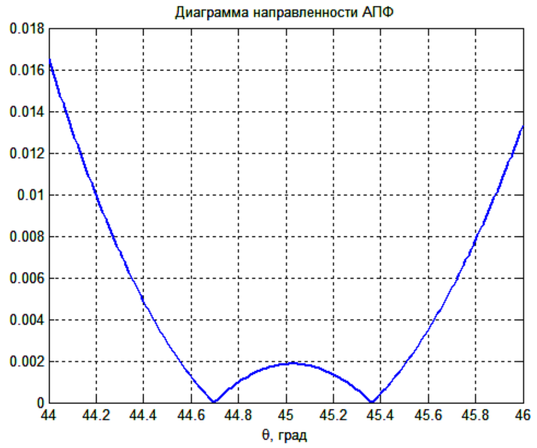



Рис. 9. Диаграмма направленности АПФ

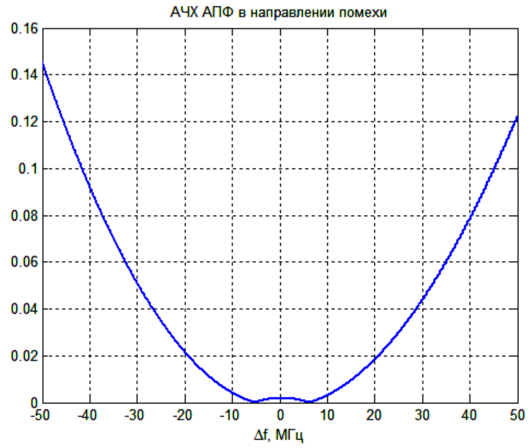



Рис. 10. АЧХ АПФ в направлении помехи

## 4. Характеристики пространственного фильтра при оптимальных и адаптивных весовых коэффициентах

Для проверки адекватности модели широкополосной шумовой помехи было также проведено сравнение АЧХ АПФ в направлении помехи в двух случаях:

- при оптимальных весовых коэффициентах АПФ, вычисленных с использованием рассчитанной теоретически корреляционной матрицы помехи;
- при адаптивных весовых коэффициентах, вычисленных с использованием оценки корреляционной матрицы по отсчётам принимаемых колебаний.

В обоих случая производилась регуляризация корреляционной матрицы в соответствии с (19).

Корреляционная матрица комплексных огибающих помехи с учётом задержек равна [1, 4]

$$\mathbf{R} = P_{\text{п}}(\mathbf{S}_{\text{п}}\mathbf{S}_{\text{п}}^{\text{H}})\odot\boldsymbol{\rho}, \qquad (20)$$

где $P_{\text{п}}$ – дисперсия комплексной огибающей помехи; $\mathbf{S}_{\text{п}}$ – направляющий вектор помехи; $\odot$ – символ операции поэлементного умножения матриц (произведения Адамара); $\boldsymbol{\rho}$ – матрица, элементы которой равны $\rho_{mn} = \rho(\tau_m - \tau_n)$; $\rho(\tau)$ – нормированная АКФ комплексной огибающей помехи, определяемая в случае прямоугольного спектра выражением (16); $\tau_m$, $\tau_n$ – значения задержки помехи в $m$-м и $n$-м приёмных каналах.

На рис. 11 синим цветом показана АЧХ адаптивного пространственного фильтра в направлении помехи, а красным цветом – АЧХ оптимального пространственного фильтра. Видно, что эти характеристики совпадают, что подтверждает правильность моделирования широкополосной помехи.

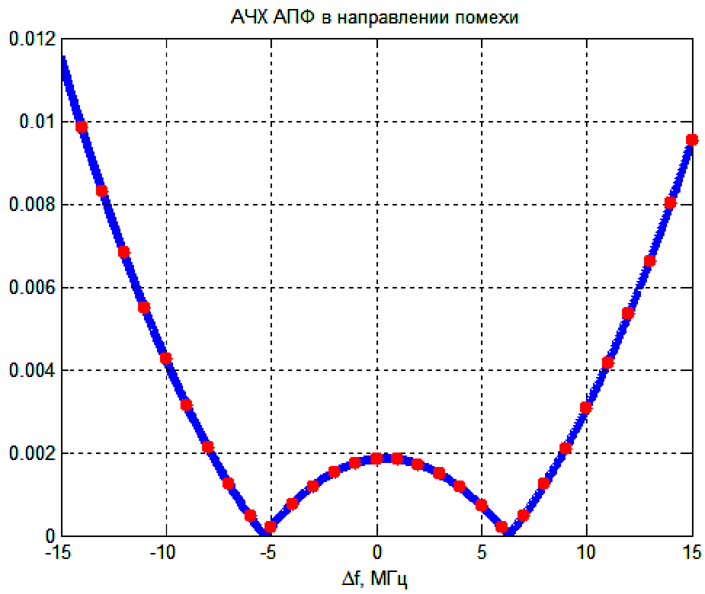



Рис. 11. АЧХ АПФ в направлении помехи при адаптивных (синяя линия) и оптимальных (красные точки) весовых коэффициентах

## Приложение

Функция моделирования шумовой помехи с задержкой **jammer_delay.m**

```
%           Модель шумовой помехи с задержкой
% Ширина спектра помехи B должна удовлетворять следующим условиям:
% 1) если f_inter > fs/2, т.е. спектр находится на правой
%    половине интервала частот, то
%    f_inter + B/2 <= fs и f_inter - B/2 >= fs/2
```

```
% 2) если f_inter < fs/2, т.е. спектр находится на левой
%    половине интервала частот, то
%    f_inter + B/2 <= fs/2 и f_inter - B/2 >= 0

function Y_jammer=jammer_delay(f_inter,B,fs,r,N,r_elem,lambda,L)
% f_inter - промежуточная частота (Гц)
% B - ширина спектра помехи (Гц)
% fs - частота дискретизации (Гц)
% r - единичный радиус-вектор помехи
% N - количество антенных элементов
% r_elem - массив радиус-векторов антенных элементов (м)
% lambda - длина волны (м)
% L - количество отсчётов помехи

c=2.99792458e8;      % Скорость распространения э/м волны (м/с)
k_wave=2*pi/lambda; % Волновое число (1/м)
NFFT=L;              % Объём ДПФ
df=fs/NFFT;          % Дискрет частоты (Гц)
dt=1/fs;             % Интервал дискретизации (с)
t=(0:NFFT-1)*dt;     % Массив отсчётов времени (с)

%% Формирование спектра комплексной огибающей помехи
%  без задержки и фазового сдвига:
n_B=round((B/2)/df);% Номер отсчёта частоты,
% соответствующего 1/2 ширины спектра помехи
S=zeros(1,NFFT);          % Начальное обнуление массива
% отсчётов спектра помехи
% Формирование массива отсчётов спектра
% комплексной огибающей помехи без задержки:
% 1) для частот [0, B/2]
S(1:n_B+1)=randn(1,n_B+1)+1i*randn(1,n_B+1);
% 2) для частот [fs-B/2, fs-df]
S(NFFT-n_B+1:NFFT)=randn(1,n_B)+1i*randn(1,n_B);

%% Формирование массива отсчётов частоты
% и массивов отсчётов сглаживающих функций
% Массив отсчётов частоты:
f=zeros(1,NFFT); % Начальное обнуление массива
% отсчётов частоты
for m=0:(NFFT/2)
    f(m+1)=m*df; % Отсчёты частоты в интервале [0, fs/2]
end
for m=(NFFT/2+1):(NFFT-1)
    f(m+1)=-(NFFT-m)*df;% Отсчёты частоты
% в интервале [fs/2, fs-df]
end
```

```
% Массивы отсчётов сглаживающих функций:
k_w=100; % Количество сглаживаемых отсчётов
% в начале и в конце реализации
w1=zeros(1,k_w); % Начальное обнуление массива w1
for k=0:k_w-1
    w1(k+1)=(1-cos(pi*k/k_w))/2; % Отсчёты функции
% для сглаживания в начале
end
w2=zeros(1,k_w); % Начальное обнуление массива w2
for k=0:k_w-1
    w2(k+1)=w1(k_w-k); % Отсчёты функции
% для сглаживания в конце
end

%% Формирование массива отсчётов помехи
Y_jammer=zeros(N,L);  % Начальное обнуление
% (N x L)-матрицы отсчётов помехи
% Цикл по номерам приёмных каналов:
for n=1:N
    delta_l=r_elem(n,:)*r.';    % Разность хода волны
    % для n-го канала (м)
    tau=-(delta_l/c);           % Задержка (с)
    S_delay=S.*exp(-1i*2*pi*f*tau); % Спектр комплексной
% огибающей помехи с задержкой
    U_delay=ifft(S_delay, NFFT); % Комплексная огибающая
% помехи с задержкой
    psi=k_wave*delta_l;    % Фазовый сдвиг (рад)
% Перенос комплексной огибающей на промежуточную
% частоту и фазовый сдвиг:
   u_delay_complex=U_delay.*exp(1i*(2*pi*f_inter*t+psi));
    % Вычисление вещественных отсчётов помехи:
    u_jammer=real(u_delay_complex);

    % Сглаживание в начале и в конце реализации помехи:
    for k=0:(k_w-1)
        u_jammer(k+1)=w1(k+1)*u_jammer(k+1);% Умножение
% k_w начальных отсчётов на сглаживающую функцию w1
    end
    for k=(L-k_w):(L-1)
% Умножение k_w конечных отсчётов на сглаживающую функцию w2:
        u_jammer(k+1)=w2(k-L+k_w+1)*u_jammer(k+1);
    end

% Нормировка реализации помехи на СКО
% и формирование (N x L)-матрицы отсчётов:
```

```
    sigma_u_jammer=std(u_jammer);
    Y_jammer(n,:)=u_jammer/sigma_u_jammer;
end
```

## Заключение

Разработана имитационная модель широкополосной шумовой помехи в антенно-приёмных каналах адаптивного пространственного фильтра с учётом задержек комплексной огибающей на апертуре антенной системы, позволяющая воспроизводить такие эффекты как формирование нескольких нулей в амплитудно-частотной характеристике и диаграмме направленности АПФ. В работе приведено подробное описание математической модели и программа на языке системы MATLAB. В качестве модели гауссова белого шума, на основе которой моделируется широкополосная шумовая помеха, используется последовательность псевдослучайных чисел с нормальным распределением вероятностей, формируемая функцией `randn` системы MATLAB. На основе оценки статистических характеристик данной последовательности показана высокая степень соответствия характеристикам белого шума.

Для проверки адекватности модели шумовой помехи с прямоугольным спектром получены оценки спектра комплексной огибающей помехи в приёмных каналах и на выходе АПФ при оптимальных и адаптивных весовых коэффициентах, а также диаграмма направленности в окрестности направления на источник помехи и амплитудно-частотная характеристика АПФ. Совпадение полученных результатов при оптимальных и адаптивных весовых коэффициентах подтверждает правильность моделирования широкополосной шумовой помехи с учётом задержек комплексной огибающей.

Имитационная модель может быть использована для оценки характеристик систем адаптивной пространственной фильтрации, а также угловой пеленгации в условиях воздействия широкополосных в пространственно-временно́м смысле колебаний.

## Литература


1. Ратынский М.В. *Адаптация и сверхразрешение в антенных решётках*. Москва, Радио и связь. 2003. 200 с.
2. Foutz J., Spanias A., Banavar M.K. Narrowband direction of arrival estimation for antenna arrays. Springer. 2008. *Synthesis lectures on antennas. Lecture #8*. https://doi.org/10.2200/S00118ED1V01Y200805ANT008
3. Godara L., Jahromi S. Limitations and capabilities of frequency domain broadband constrained beamforming schemes. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 1999. V.47. №9. P.2186-2195.
4. Li H., Zhang X., He Z., Yu J. A wideband digital beamforming method based on stretch processing. *WSEAS Transactions on Signal Processing*. 2009. V.5. №7. P.251-260.
5. Chern Sh.J., Sung Ch.Y. The hybrid Frost's beamforming algorithm for multiple jammers suppression. *Signal Processing*. 1995. V.43. P.113-132.
6. Agrawal M., Prasad S. DOA estimation of wideband sources using a harmonic source model and uniform linear array. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 1999. V.47. №3. P.619-629.
7. Amirsoleimani S., Olfat A. Wideband modal orthogonality: A new approach for broadband DOA estimation. *Arxiv*. https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.07261
8. Marsaglia G., Tsang W.W. The ziggurat method for generating random variables. *Journal of Statistical Software*. 2000. V.5. №8. P.1-7. https://doi.org/10.18637/jss.v005.i08
9. Moler C. Numerical Computing with MATLAB. SIAM. 2004. Chapter 9 Random Numbers [web]. *Mathworks*. Date of access: 01.08.2022. URL: https://www.mathworks.com/moler.html
10. Амитей Н., Галиндо В., Ву Ч. *Теория и анализ фазированных антенных решёток*. Москва, Мир. 1974. 456 с.
11. Сергиенко А.Б. *Цифровая обработка сигналов: Учеб. пособие*. 3-е изд. Санкт-Петербург, БХВ-Петербург. 2011. 768 с.

12. Баскаков С.И. *Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. для вузов. 3-е изд., перераб. и доп*. Москва, Высшая школа. 2000. 462 с.

**Для цитирования:**

Лишак М.Ю. Моделирование широкополосной шумовой помехи в системах адаптивной пространственной фильтрации радиосигналов. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2022. №11. https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.11.2