

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.11.12>

УДК: УДК 537.874; 537.624

## УПРУГИЕ РЕЗОНАНСЫ В СТРУКТУРЕ: ТОНКАЯ МАГНИТНАЯ ПЛЕНКА – ТОЛСТАЯ УПРУГАЯ ПОДЛОЖКА

В.С.Власов<sup>1</sup>, В.Н.Шапоров<sup>1</sup>, В.Г.Шавров<sup>2</sup>, В.И.Щеглов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Сыктывкарский государственный университет им. П. Сорокина  
Российская Федерация, 167001 Сыктывкар, Октябрьский просп., 55

<sup>2</sup> Институт радиотехники и электроники РАН им. В.А.Котельникова  
Российская Федерация, 125009 Москва, ул. Моховая, 11, корп. 7

Статья поступила в редакцию 19 сентября 2023 г.

**Аннотация.** Рассмотрена задача о возбуждении связанных магнитных и упругих колебаний в плоскопараллельной структуре, состоящей из нормально намагниченной тонкой магнитной пленки, наложенной на толстую немагнитную упругую подложку. Для решения задачи предложена модель распространения периодического граничного режима, позволившая построить амплитудно-частотные характеристики магнитных и упругих колебаний. При этом характеристика колебаний намагниченности имела вид широкого колоколообразного максимума, на который наложена эквидистантная сетка узких упругих резонансов, отстоящих друг от друга на частоту, равную частоте упругого резонанса по толщине подложки. Выполнено модельное представление наложения упругих резонансов на магнитный с использованием системы двух связанных осцилляторов, частоты которых различаются на несколько порядков. Предложен механизм наложения упругих резонансов на характеристику намагниченности, состоящий в совпадении фазы волны после двукратного прохождения по толщине подложки с фазой начального возбуждения. Рассмотрено влияние затухания упругой волны на структуру амплитудно-частотных характеристик намагниченности и упругого смещения. Выявлено критическое значение параметра упругого затухания, ниже которого упругие

колебаний имеют резонансный характер, а выше становятся апериодическими. Установлено инверсное значение параметра затухания, определяющее переход от симметричного распределения упругих резонансов на характеристике намагниченности к антисимметричному. Показано, что инверсное значение параметра затухания значительно (на два-три порядка) меньше значения критического. Обнаружено явление вторичного упругого резонанса, состоящее в превышении частоты максимума огибающей сетки упругих резонансов над частотой максимума характеристики намагниченности. Выявлено связанное с затуханием расщепление вторичного резонанса, имеющее место в окрестности инверсного значения параметра затухания.

**Ключевые слова:** магнитная пленка, немагнитная подложка, магнитоупругий резонанс, связанные колебания.

**Финансирование:** Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

**Автор для переписки:** Щеглов Владимир Игнатьевич, [vshcheg@cplire.ru](mailto:vshcheg@cplire.ru)

## Введение

Уникальные эксплуатационные характеристики железоиттриевого граната (ЖИГ), такие как крайне малая ширина линии ферромагнитного резонанса (ФМР) и высокая упругая добротность [1] служат основой для создания широкого класса устройств обработки информации в СВЧ диапазоне [2,3]. К числу таких устройств можно отнести фильтры различных конструкций, малогабаритные линии задержки, вентили, циркуляторы и другие [4,5]. Широкие перспективы открывает использование в устройствах тонких эпитаксиальных пленок [6,7], в том числе обладающих высокими магнитоупругими свойствами [8]. Особо следует отметить широко развернувшиеся в последнее время работы по возбуждению магнитных, упругих и магнитоупругих колебаний при интенсивном воздействии света от фемтосекундного лазера [9-11].

Традиционным методом формирования пленок железоиттриевого граната является выращивание методом жидкофазной эпитаксии на подложках из

гадолиний-галлиевого граната, имеющего столь же высокие упругие свойства. Исследованию ферромагнитного резонанса в ферритовых пленках на таких подложках посвящено значительное количество работ [12-17].

В ряде работ [18-21] было установлено, что при локальном возбуждения пленки СВЧ магнитным полем на линию ферромагнитного резонанса накладывается сетка линий упругих резонансов подложки, причем число возбуждаемых мод может достигать пятисот и более. Так, в работе [20, рис. 2] на линию ФМР, имеющую частоту около 200 МГц, наложена сетка линий упругих резонансов с периодом 3,8 МГц. В работе [19, рис. 5] на линию ФМР, соответствующую частоте 1860 МГц наложена сетка упругих мод с шагом 3,8 МГц. В работе [18, рис. 2] на частоту ФМР около 5550 МГц наложена сетка с шагом 3,5 МГц.

В работах [22-24] сообщалось о наблюдении осцилляций на амплитудно-частотных характеристиках, прошедших через структуру «пленка-подложка» объемных магнитостатических волн. В более современной работе [25] подобные осцилляции наблюдались на частотных зависимостях коэффициента передачи поверхностных магнитостатических волн в структуре «пленка-подложка», возбуждаемой копланарными преобразователями.

Во всех перечисленных работах отмечалось равенство частотного интервала между модами частоте упругого резонанса по толщине подложки, однако подробная теоретическая трактовка в большинстве случаев была недостаточной. В ряде работ [18,20,21,26] для интерпретации наблюдаемых явлений предложена модель связанных осцилляторов, соответствующих модам упругих колебаний. Подробный вывод приведенной системы уравнений (например, формулы (6) в работе [21]) с необходимым физическим обоснованием отсутствовал. В работе [19] была предложена модель, интерпретирующая возбуждение ФМР как Бозе-конденсацию магнонов, однако расчетный аппарат должным образом также не был представлен.

В связи с определенной недостаточностью имеющихся теоретических положений, в работе [27] была предложена последовательная трактовка

наблюдаемого явления наложения на линию ФМР сетки резонансов подложки, использующая модель распространения периодического граничного режима [28, стр.106-110]. В линейном и нелинейном режимах были получены амплитудно-частотные характеристики линии ферромагнитного резонанса пленки с наложенной сеткой упругих резонансов подложки. Было отмечено соответствие расчетной картины явлениям, наблюдаемым в цитированных экспериментах.

Однако в работе [27] свойства самих упругих резонансов детально рассмотрены не были. Настоящая работа посвящена более подробному развитию предложенной в [27] модели, в первую очередь относительно выявления свойств упругих резонансных колебаний.

## 1. Геометрия задачи

Будем рассматривать геометрию, сходную с принятой в работах [29-32] для решения задачи о возбуждении мощных упругих колебаний в нормально намагниченной ферритовой пластине. Теперь в рассмотрение дополнительно введем подложку, аналогично тому, как это было сделано в работе [27].

Принятая здесь геометрия задачи показана на рис. 1.

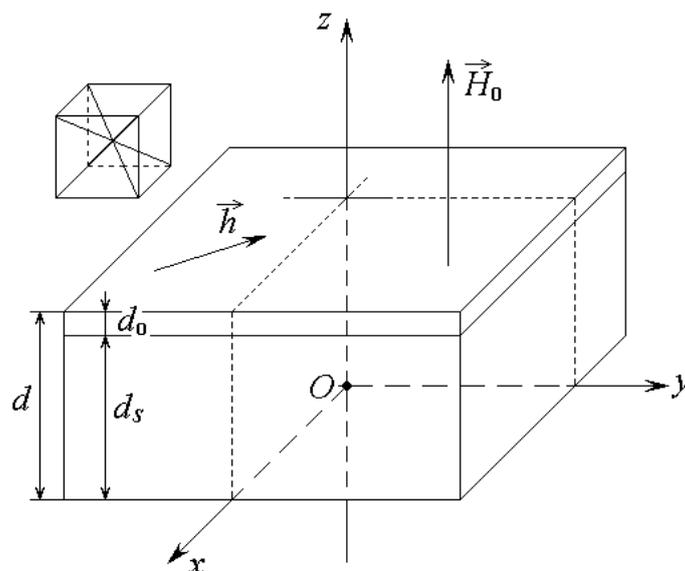


Рис. 1. Геометрия задачи.

В основе геометрии лежит пластина, состоящая из пленки на подложке, общей толщиной  $d$ , из которой на пленку приходится толщина  $d_0$ , на подложку

–  $d_s$ . Пленка обладает магнитными, упругими и магнитоупругими свойствами, подложка является немагнитной, однако упругие и кристаллографические свойства пленки и подложки совпадают. Материал пластины в целом имеет кубическую кристаллографическую симметрию, плоскость (100) которой совпадает с плоскостью пластины. Внешнее постоянное магнитное поле  $\vec{H}_0$  приложено перпендикулярно плоскости пластины, в плоскости которой действует переменное магнитное поле  $\vec{h}$ .

Задача решается в декартовой системе координат  $Oxyz$ , плоскость  $Oxy$  которой совпадает с плоскостью пластины, а оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  параллельны ребрам куба кристаллографической ячейки. Центр системы координат  $O$  находится на нижней по рисунку поверхности пластины, так что ее верхняя поверхность соответствует координате  $z = d$ .

## 2. Общая постановка задачи

Следуя работе [27], приведем общую постановку задачи. В соответствии с рис. 1 положим внешнее поле в виде

$$\vec{H} = \{ h_x; h_y; H_0 \}, \quad (1)$$

где  $h_{x,y} \ll H_0$ .

Полагая плотность энергии пластины  $U$  в поле  $\vec{H}$  равной сумме плотностей магнитной, упругой и магнитоупругой энергий [29] и оставляя только члены, необходимые для данного рассмотрения, получаем:

$$\begin{aligned} U = & -M_0 h_x m_x - M_0 h_y m_y - M_0 H_0 m_z + 2\pi M_0^2 m_z^2 + \\ & + 2c_{44}(u_{xy}^2 + u_{yz}^2 + u_{zx}^2) + \\ & + 2B_2(m_x m_y u_{xy} + m_y m_z u_{yz} + m_z m_x u_{zx}). \end{aligned} \quad (2)$$

где  $m_{x,y,z}$  – нормированный на  $M_0$  вектор намагниченности:

$$m_{x,y,z} = M_{x,y,z} / M_0, \quad (3)$$

$M_0$  – намагниченность насыщения;

$c_{44}$  – константа (модуль) упругости;

$B_2$  – константа магнитоупругого взаимодействия.

В этом выражении компоненты тензора деформаций равны [33, стр.15, форм. (1,5)]:

$$u_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \quad (4)$$

$$u_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right); \quad (5)$$

$$u_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right), \quad (6)$$

где  $u_{x,y,z}$  – компоненты упругого смещения по координатам.

Будем использовать уравнение движения для намагниченности (Ландау-Лифшица) с диссипативным членом в форме Гильберта: [34, стр.39, форм. (1.3.2)], [35, стр.26, форм. (1.67)], [36]:

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial t} = -\gamma [\vec{m} \times \vec{H}_e] + \alpha \left[ \vec{m} \times \frac{\partial \vec{m}}{\partial t} \right], \quad (7)$$

где  $\gamma$  – гиромагнитная постоянная ( $\gamma > 0$ ),  $\alpha$  – параметр затухания,  $\vec{H}_e$  – эффективное поле, равное:

$$\vec{H}_e = -\frac{1}{M_0} \cdot \frac{\partial U}{\partial \vec{m}}. \quad (8)$$

Записывая (7) по компонентам, получаем уравнения для намагниченности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_x}{\partial t} = & -\frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left[ (m_y + \alpha m_x m_z) H_{ez} - (m_z - \alpha m_y m_x) H_{ey} - \right. \\ & \left. - \alpha (m_y^2 + m_z^2) H_{ex} \right]; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left[ (m_z + \alpha m_y m_x) H_{ex} - (m_x - \alpha m_z m_y) H_{ez} - \alpha (m_z^2 + m_x^2) H_{ey} \right]; \quad (10)$$

$$\frac{\partial m_z}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left[ (m_x + \alpha m_z m_y) H_{ey} - (m_y - \alpha m_x m_z) H_{ex} - \alpha (m_x^2 + m_y^2) H_{ez} \right]. \quad (11)$$

Здесь  $m_{x,y,z}$  – динамические компоненты намагниченности, нормированные на намагниченность насыщения материала  $M_0$ ,  $\alpha$  – параметр затухания Гильберта,  $H_{ex,ey,ez}$  – эффективные поля, определяемые выражениями:

$$H_{ex} = h_x - \frac{B_2}{M_0} m_z \frac{\partial u_x}{\partial z}; \quad (12)$$

$$H_{ey} = h_y - \frac{B_2}{M_0} m_z \frac{\partial u_y}{\partial z}; \quad (13)$$

$$H_{ez} = H_0 - 4\pi M_0 m_z - \frac{B_2}{M_0} \left( m_x \frac{\partial u_x}{\partial z} + m_y \frac{\partial u_y}{\partial z} \right), \quad (14)$$

где  $u_{x,y,z}$  – компоненты упругого смещения,  $B_2$  – константа магнитоупругого взаимодействия, а поле  $h_{x,y}$  имеет гармоническую зависимость от времени вида:

$$h_x = h_{0x} \sin(\omega t); \quad (15)$$

$$h_y = -h_{0y} \cos(\omega t), \quad (16)$$

где  $h_{0x,0y}$  – постоянные.

Уравнения для компонент упругого смещения, подобно [29, форм. (26), (27)], имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial u_x}{\partial t} - \frac{c_{44}}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = 0; \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial u_y}{\partial t} - \frac{c_{44}}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} = 0, \quad (18)$$

где  $\beta$  – параметр упругого затухания,  $c_{44}$  – компонента модуля упругости,  $\rho$  – плотность материала пластины.

Граничные условия следует взять существенно отличными от принятых в работе [29]. Там рассматривались условия, симметричные относительно центральной плоскости пластины, что диктовалось требованием максимизации связи намагниченности с упругим смещением для повышения мощности возбуждаемого гиперзвука. По той же причине толщина пластины выбиралась из условия совпадения частоты упругого резонанса пластины с частотой ее ферромагнитного резонанса. Такие требования заставили в работе [29] ограничиться возбуждением только первой упругой моды по толщине пластины, что принесло свой результат в значительном повышении мощности возбуждаемого гиперзвука в нелинейном режиме. Благодаря такому выбору толщины пластины, последующие ее резонансные моды далеко выходили за частоту ферромагнитного резонанса и заметного влияния на колебания намагниченности не оказывали.

Однако в работах [18-21] наблюдались многократные «расщепления» линии ферромагнитного резонанса, обусловленные наложением на эту линию сетки упругих мод высоких порядков, вплоть до пятисотого. Подобные явления отмечались также в более ранних работах [22-25], причем во всех случаях утверждалось, что упругие колебания существуют не только в ферритовой пленке, как таковой, а также и в ее подложке, не обладавшей магнитными свойствами. То есть здесь имело место резко несимметричное возбуждение упругих колебаний, происходящее только на одной поверхности подложки в месте расположения магнитной пленки, тогда как вторая поверхность подложки оставалась свободной. Благодаря единству упругих свойств пленки и подложки,

можно полагать, что упругие колебания присутствуют по всей толщине пластины, но связаны они с прецессией намагниченности только на одной ее поверхности, например с той, координата  $z$  которой равна  $d$  (рис. 1) Таким образом, граничные условия в рассматриваемой здесь задаче, получаемые подобно принятым в работе [29, форм.(28), (29)], имеют вид:

$$\left. \frac{\partial u_x}{\partial t} \right|_{z=d} = -\frac{B_2}{c_{44}} m_x m_z; \quad (19)$$

$$\left. \frac{\partial u_y}{\partial t} \right|_{z=d} = -\frac{B_2}{c_{44}} m_y m_z; \quad (20)$$

$$\left. \frac{\partial u_x}{\partial t} \right|_{z=0} = 0; \quad (21)$$

$$\left. \frac{\partial u_y}{\partial t} \right|_{z=0} = 0. \quad (22)$$

При этом толщину пластины  $d$  будем считать значительно превышающей толщину, резонанс на которой соответствовал бы частоте ферромагнитного резонанса.

### 3. Последовательность хода решения

Основным предметом рассмотрения здесь, как и в работе [36], являются амплитудно-частотные характеристики магнитных и упругих колебаний структуры. При этом первичным возбудителем является подаваемое извне переменное магнитное поле (15), (16), под действием которого в магнитной пленке наступает прецессионное движение намагниченности. Возбужденные таким образом магнитные колебания далее за счет магнитоупругого взаимодействия возбуждают упругие колебания в пленке, которые распространяются далее по всей структуре в целом, захватывая подложку. Таким образом, первичным является переменное магнитное поле, вторичным –

колебания намагниченности и третьим выступают упругие колебания подложки. То есть упругие колебания являются чисто подчиненными, тогда как в отсутствие магнитоупругого взаимодействия их бы не было, а магнитные оставались. Упругие колебания возбуждаются через магнитные посредством граничных условий (19)-(22), после чего, будучи возбужденными, могут влиять на магнитные через эффективные поля (12)-(14). Характер упругих колебаний определяется уравнениями (17)-(18), поэтому первым этапом должно быть нахождение вынужденных упругих колебаний из уравнений (17)-(18) с граничными условиями (19)-(22), Далее, найденные таким образом упругие колебания должны быть подставлены в эффективные поля (12)-(14), обеспечивающие решение основной задачи о прецессии намагниченности (9)-(11), что и позволит далее получить амплитудно-частотные характеристики магнитных колебаний. Подобные характеристики упругих колебаний будут при подстановке магнитных колебаний в решения колебаний для упругости (17)-(18).

Таким образом, полное решение задачи состоит из следующих трех этапов:

1. Решение задачи для упругости, состоящей из уравнений (17)-(18) с граничными условиями (19)-(22). При этом будут получены выражения для упругого смещения, имеющие резонансный характер, определяемый параметрами упругой системы, а зависимость от времени будет определяться временной составляющей колебаний намагниченности, задающей граничные условия.

2. Определение развития во времени колебаний намагниченности в соответствии с системой уравнений (9)-(11), эффективные поля в которых определяются выражениями (12)-(14), где компоненты упругих смещений получены на этапе №2.

3. Путем пошагового изменения частоты колебаний переменного магнитного поля, на основе установившихся во времени колебаний, получение амплитудно-частотных характеристик для колебаний намагниченности и упруго смещения.

Именно такая схема решения реализована в работе [36]. Ввиду важности для дальнейшего рассмотрения, следуя основным положениям [36], приведем краткое изложение схемы.

#### 4. Возбуждение упругих колебаний

Первый этап состоит в решении задачи для упругих колебаний, состоящей из уравнений (17)-(18) и граничных условий. (19)-(22). Благодаря единообразию уравнений и граничных условий для компонент  $u_x$  и  $u_y$ , ограничимся рассмотрением задачи только для  $u_x$ . В соответствии с уравнениями (17)-(18), введем обозначение для скорости упругой волны в виде:

$$v = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}. \quad (23)$$

Положим далее, что компонента намагниченности  $m_x$  имеет вид:

$$m_x = m_x^{(0)} \exp(i \omega t), \quad (24)$$

а компонента  $m_z$  во времени остается постоянной, что имеет место при круговой прецессии намагниченности):

$$m_z = m_z^{(0)}, \quad (25)$$

причем величины  $m_x^{(0)}$  и  $m_z^{(0)}$  на данном этапе рассмотрения положим постоянными.

В этом случае граничное условие (19) принимает вид:

$$\left. \frac{\partial u_x}{\partial t} \right|_{z=d} = -\frac{B_2}{c_{44}} m_x^{(0)} m_z^{(0)} \exp(i \omega t), \quad (26)$$

Введем обозначение:

$$A = -\frac{B_2}{c_{44}} m_x^{(0)} m_z^{(0)}. \quad (27)$$

С этим обозначением задача (17), (19), (21) принимает вид:

уравнение:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial u_x}{\partial z} - v^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = 0; \quad (28)$$

граничные условия:

$$\left. \frac{\partial u_x}{\partial z} \right|_{z=d} = A \exp(i\omega t); \quad (29)$$

$$\left. \frac{\partial u_x}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (30)$$

Предположим, что в установившемся режиме упругая волна, определяемая уравнением (28), имеет чисто гармонический характер с амплитудой, не зависящей от времени. В такой постановке (28)-(30) можно рассматривать как задачу без начальных условий, вариантом которой является задача о распространении периодического граничного режима [28, стр.107], [37, стр.35-39]. То есть режим, задаваемый условием (29) при координате  $z = d$ , имеющий зависимость от времени вида  $\exp(i\omega t)$ , распространяется далее по всей пластине до ее свободной поверхности при  $z = 0$

Будем искать решение задачи (28)-(30) в виде:

$$u_x = Z(z) \exp(i\omega t), \quad (31)$$

где частота  $\omega$  задана возбуждающим полем  $h$  (15), (16).

Подставляя (31) в (28), сокращая на  $\exp(i\omega t)$  и выделяя зависящую от координаты часть  $Z(z)$ , получаем граничную задачу для  $Z$  в виде:

уравнение:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 Z = 0; \quad (32)$$

граничные условия:

$$\left. \frac{\partial Z}{\partial z} \right|_{z=d} = A; \quad (33)$$

$$\left. \frac{\partial Z}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (34)$$

где волновое число  $k$  определяется формулой:

$$k = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - i \frac{2\beta}{\omega}}. \quad (35)$$

Представляя  $k$  в виде суммы действительной и мнимой частей

$$k = \eta - i\xi, \quad (36)$$

получаем:

$$\eta = \frac{\omega}{v} \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\omega^2}} \right)}; \quad (37)$$

$$\xi = \frac{\omega}{v} \sqrt{\frac{1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\omega^2}} \right)}. \quad (38)$$

Возвращаясь к задаче (32)-(34), будем искать решение уравнения (32) в виде:

$$Z = C_1 \sin(kz) + C_2 \cos(kz). \quad (39)$$

Подставляя (39) в (32) и учитывая граничные условия (33)-(34), где  $A$  определяется выражением (27), получаем:

$$Z(z) = \frac{B_2}{c_{44}} m_x^{(0)} m_z^{(0)} \frac{\sin(kz)}{k \sin(kd)}. \quad (40)$$

Учитывая (31), получаем компоненту смещения  $u_x$  в виде:

$$u_x = \frac{B_2}{c_{44}} m_x^{(0)} m_z^{(0)} \frac{\sin(kz)}{k \sin(kd)} \exp(i\omega t). \quad (41)$$

При этом, в соответствии с (24) и (25), можно записать:

$$u_x = \frac{B_2}{c_{44}} m_x m_z \frac{\sin(k z)}{k \sin(k d)}. \quad (42)$$

Компоненту смещения  $u_y$  получаем заменой индекса  $x$  на  $y$ :

$$u_y = \frac{B_2}{c_{44}} m_y m_z \frac{\sin(k z)}{k \sin(k d)}. \quad (43)$$

В этих выражениях  $k$  определяется формулами (35)-(38).

Таким образом, задача об упругих колебаниях, соответствующая первому этапу полной задачи, решена. Перейдем теперь ко второму этапу – решению уравнений для намагниченности.

## 5. Эффективные поля

Для подстановки в эффективные поля (12)-(14), входящие в уравнения движения для намагниченности (9)-(11), требуются не упругие смещения  $u_{x,y}$ , а их производные  $\partial u_{x,y} / \partial z$ . Дифференцируя (42)-(43) по  $z$ , получаем:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{B_2}{c_{44}} m_x m_z \frac{\cos(k z)}{\sin(k d)}, \quad (44)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{B_2}{c_{44}} m_y m_z \frac{\cos(k z)}{\sin(k d)}. \quad (45)$$

Подставляя (44)-(45) в (12)-(14), получаем эффективные поля в виде:

$$H_{ex} = h_x - \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}} m_x m_z^2 \frac{\cos(k z)}{\sin(k d)}; \quad (46)$$

$$H_{ey} = h_y - \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}} m_y m_z^2 \frac{\cos(k z)}{\sin(k d)}; \quad (47)$$

$$H_{ez} = H_0 - 4\pi M_0 m_z - \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}} (m_x^2 + m_y^2) m_z \frac{\cos(k z)}{\sin(k d)}. \quad (48)$$

Введем вспомогательный параметр:

$$P(k, z, d) = \frac{\cos(kz)}{\sin(kd)}. \quad (49)$$

С этим параметром поля (46)-(48) принимают вид:

$$H_{ex} = h_x - \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}} m_x m_z^2 P; \quad (50)$$

$$H_{ey} = h_y - \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}} m_y m_z^2 P; \quad (51)$$

$$H_{ez} = H_0 - 4\pi M_0 m_z - \frac{B_2^2}{M_0 c_{44}} (m_x^2 + m_y^2) m_z P. \quad (52)$$

Параметр  $P(k, z, d)$  содержит волновое число  $k$ , имеющее комплексный характер (36), действительная и мнимая составляющие которого определяются выражениями (37)-(38), содержащими частоту  $\omega$ , скорость упругой волны  $v$  и параметр затухания  $\beta$ . Подставим (36) в (49) и воспользуемся формулами тригонометрических функций от комплексного аргумента [38, стр.76, форм.408.16, 408.17]:

$$\sin(x - iy) = \sin(x)\cosh(y) - i\cos(x)\sinh(y); \quad (53)$$

$$\cos(x - iy) = \cos(x)\cosh(y) + i\sin(x)\sinh(y). \quad (54)$$

В результате получаем:

$$\begin{aligned} \cos(kz) &= \cos(\eta z - i\xi z) = \\ &= \cos(\eta z)\cosh(\xi z) + i\sin(\eta z)\sinh(\xi z); \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \sin(kd) &= \sin(\eta d - i\xi d) = \\ &= \sin(\eta d)\cosh(\xi d) - i\cos(\eta d)\sinh(\eta d). \end{aligned} \quad (56)$$

Введем вспомогательные обозначения:

$$a = \cos(\eta z)\cosh(\xi z); \quad (57)$$

$$b = \sin(\eta z)\sinh(\xi z); \quad (58)$$

$$c = \sin(\eta d)\cosh(\xi d); \quad (59)$$

$$d = \cos(\eta d) \sinh(\xi d). \quad (60)$$

С этими обозначениями выражения (55)-(56) принимают вид

$$\cos(kz) = a + ib; \quad (61)$$

$$\sin(kd) = c - id. \quad (62)$$

Подставляя (61)-(62) в (49) и выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$P(k, z, d) = \frac{ac - bd}{c^2 + d^2} + i \frac{ad + bc}{c^2 + d^2}. \quad (63)$$

Введем обозначения:

$$g = \frac{ac - bd}{c^2 + d^2}; \quad (64)$$

$$h = \frac{ad + bc}{c^2 + d^2}. \quad (65)$$

С этими обозначениями (63) принимает вид:

$$P(k, z, d) = g + ih. \quad (66)$$

Модуль параметра  $P$  принимает вид:

$$|P(k, z, d)| = \sqrt{g^2 + h^2}. \quad (67)$$

Здесь параметры  $g$  и  $h$  через посредство (64)-(65), (57)-(60), (37)-(38) содержат частоту  $\omega$ , скорость упругой волны  $\nu$  и параметр затухания  $\beta$ . Получаемые при этом выражения являются довольно громоздкими, поэтому при машинном счете авторы рекомендуют их вычислять последовательно в обратном порядке, то есть сначала (37)-(38), затем (57)-(60), после чего (64)-(65).

## 6. Основные параметры задачи

В рамках настоящей работы использовались типичные параметры пленки железиттриевого граната на подложке из гадолиний галлиевого граната, подобные принятым в работах [27,29], а также в обзорах [1,8]: намагниченность

насыщения  $4\pi M_0 = 1750$  Гс, константа магнитоупругого взаимодействия  $B_2 = 6.96 \times 10^6$  эрг см<sup>-3</sup>, константа упругости  $c_{44} = 7.64 \times 10^{11}$  эрг см<sup>-3</sup>, плотность  $\rho = 5.17$  г см<sup>-3</sup>. Последние два параметра  $c_{44}$  и  $\rho$  в пленке и подложке считались одинаковыми. При этом скорость упругой волны равнялась:  $v = \sqrt{c_{44}/\rho} = 3.84 \times 10^5$  см<sup>-1</sup>. Постоянное поле  $H_0$  задавалось равным 2750 Э, что при  $\gamma = 2.8$  МГц Э<sup>-1</sup> обеспечивало частоту ферромагнитного резонанса равной 2800 МГц. Базовые значения параметров магнитного и упругого затухания составляли:  $\alpha = 0.01$ ,  $\beta = 10^8$  с<sup>-1</sup>.

В большинстве расчетов действительная часть волнового числа  $k$  (37) превышала мнимую (38) в два и более раз, что позволило для параметра  $P$  (66) ограничиться действительной частью, то есть использовать выражение (67), что значительно упростило вычисления. Влияние мнимой части волнового числа  $k$  на параметр  $P$  и соответствующие амплитудно-частотные характеристики будет рассмотрено в отдельной части работы.

Важнейшим параметром являлось соотношение толщин пленки и подложки. При этом толщина пленки железиттриевого граната всегда принималась равной  $d_0 = 0.6865$  мкм, что при заданных выше параметрах материала соответствовало частоте упругого резонанса на толщине пленки равной 2800 МГц, то есть совпадающей с частотой ферромагнитного резонанса.

Толщина пластины, то есть структуры в целом, как правило, была в 35-70 раз больше толщины пленки, то есть составляла от 24,03 до 48,06 мкм. Заметим, что принятое здесь значение толщины подложки несколько меньше традиционно используемого в экспериментах 200-500 мкм [5, стр.125-155, 201-206, 294-316], а также [39, стр.243-337]. Такое допущение сделано для наглядности рассмотрения, чтобы линии упругих резонансов были разнесены друг от друга на расстояния, значительно превышающие ширину самих линий.

Значение координаты  $z$ , на уровне которой регистрировалось упругое смещение, равнялась 0.6865 мкм, то есть находилась вблизи поверхности структуры, противоположной местонахождению пленки.

В некоторых случаях приведенные параметры затухания, константа магнитоупругости и координата регистрации смещения варьировались, что будет отмечено в соответствующих местах текста.

## 7. Колебания намагниченности

Динамика движения намагниченности определяется системой уравнений движения (9)-(10), эффективные поля в которых имеют вид (50)-(52). Параметр  $P$  при этом определяется формулами (67) с учетом (55)-(66) и (35)-(38).

В рамках настоящей работы приведенная система решалась численно методом Рунге-Кутты четвертого порядка [40, стр.702, вариант «с»]. В результате решения получалось развитие колебаний во времени. Условием решения аналитической части задачи было принято предположение о стационарности режима, поэтому амплитуда колебаний регистрировалась только по прошествии времени, значительно превышающего время релаксации магнитной и упругой систем. Упругие колебания регистрировались при заданном значении координаты  $z$  по толщине пластины. Осуществлялась пошаговая развертка по частоте, так что в результате получались амплитудно-частотные характеристики магнитных и упругих колебаний в установившемся режиме. Результаты расчетов представлены далее.

На рис. 2 приведены амплитудно-частотные характеристики колебаний намагниченности в линейном (а) и нелинейном (б) режимах возбуждения по переменному полю. На рисунке основу АЧХ составляет линия ферромагнитного резонанса пленки. В линейном режиме (а) эта линия имеет симметричный колоколообразный вид, в нелинейном (б) – вид скошенного в сторону высоких частот треугольника, конфигурация которого определяется расстройным механизмом ограничения колебаний намагниченности [35, стр.261, рис. 9.2], [41, стр.284, рис. 2].

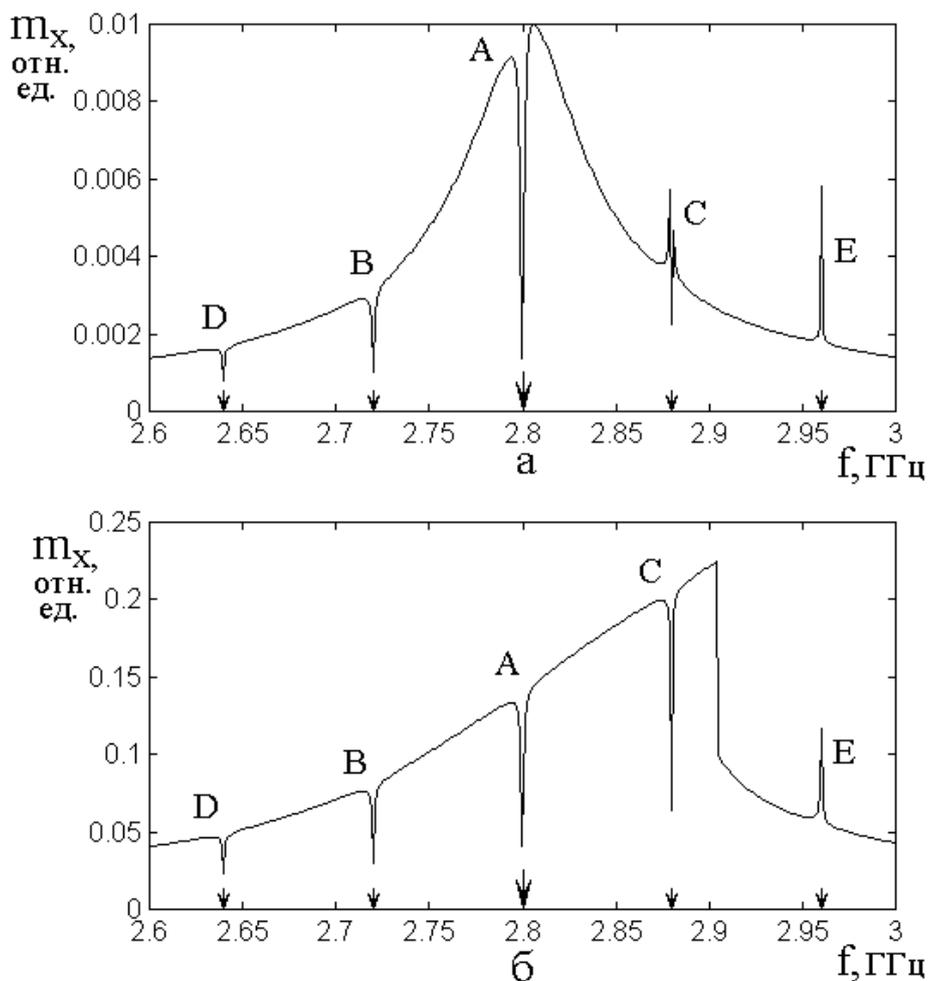


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики колебаний намагниченности, а) линейном (а) и нелинейном (б) режимах возбуждения по переменному полю: а)  $-h_{0x} = h_{0y} = 0,1$  Э; б)  $-h_{0x} = h_{0y} = 30$  Э; Параметры:  $d = 24,03$  мкм;  $\beta = 10^6$  с<sup>-1</sup>. Остальные параметры приведены в разделе 6.

На резонансной кривой наблюдаются провалы, обусловленные возбуждением упругих резонансов, подобные описанным в работе [27]. Прежде всего отметим, что частоты провалов на обеих характеристиках полностью совпадают, то есть можно утверждать, что частоты возбуждаемых упругих колебаний от уровня возбуждения не зависят.

## 8. Модельное представление наложения упругих резонансов на магнитный

В основе рассмотренных выше явлений лежит взаимодействие магнитных и упругих колебаний, результатом чего является суперпозиция тех и других в

виде наложением сетки упругих резонансов на амплитудно-частотную характеристику резонанса намагниченности. Представляет интерес рассмотреть, в какой мере простое взаимодействие колебаний упруго смещения и намагниченности, возбуждаемых переменным полем, могут отразить наблюдаемую картину. Довольно удобной в этом случае может явиться модель связанных осцилляторов, один из которых отражает колебания намагниченности, а другой – колебания упругого смещения [42-47], [48, стр.62-85].

Будем рассматривать колебания таких осцилляторов с помощью системы, предложенной в работе [48., стр.71, форм. (3.59), (3.60)]:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \frac{d x_1}{dt} + \omega_1^2 x_1 + \gamma_1 x_2 = A \cos(\omega_0 t); \quad (68)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \frac{d x_2}{dt} + \omega_2^2 x_2 + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (69)$$

Здесь  $x_{1,2}$  – координаты смещения осцилляторов от равновесного положения,  $\beta_{1,2}$  – параметры затухания,  $\omega_{1,2}$  – собственные частоты,  $\gamma_{1,2}$  – параметры связи между осцилляторами,  $A$  – амплитуда и  $\omega_0$  – частота вынуждающей силы.

В отличие от системы в работе [48], здесь связь через производные опущена, так что система (68)-(69) имеет классический вид, известный, например, в теории двухконтурного фильтра [49, стр.241, форм. 6.1.8, стр.249, форм. (6.3.2)]. Традиционно известная амплитудно-частотная характеристика колебаний такой системы имеет вид разнесенных на определенное расстояние двух максимумов, соответствующих собственным частотам того и другого осцилляторов [49, стр.251, рис. 6.10]. При совпадении этих частот максимумы сливаются в один, который при достаточно большой связи между осцилляторами симметрично расщепляется на два с минимумом между ними [49, стр.252, рис. 6.11].

При традиционном рассмотрении параметры обеих осцилляторов, как правило, задаются довольно близкими друг к другу (отличаются менее чем в полтора-два раза). В рассматриваемой здесь задаче различие частот и параметров затухания осцилляторов может достигать одного-двух и более порядков, поэтому картина получается несколько другая.

В настоящей работе система (68)-(69) решалась методом Рунге-Кутты четвертого порядка [40, стр.702, вариант «с»] при следующих параметрах:  $\beta_1 = 5$  отн. ед.,  $\beta_2 = 0,01$  отн. ед.,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 10$  отн. ед.,  $\omega_1 = 10$  отн. ед.,  $A = 1$  отн. ед., значение частоты  $\omega_2$  устанавливалась по очереди в соответствующей последовательности: 4, 7, 10, 13, 16 отн. ед., частота  $\omega_0$  менялась с шагом 0,1 отн. ед. в диапазоне от нуля до 20 отн. ед. Приведенный здесь набор параметров выбран для удобства наглядного представления существа явления. За основу взято соответствующее реальной задаче сильное различие (более чем на два порядка) параметров затухания магнитного  $x_1$  и упругого  $x_2$  осцилляторов, а также значительное различие их собственных частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Результаты расчетов приведены на рис. 3, где показаны различные варианты амплитудно-частотных характеристик осцилляторов. Рис. 3а и рис. 3б построены при отсутствии связи между осцилляторами, рис. 3в – при наличии такой связи.

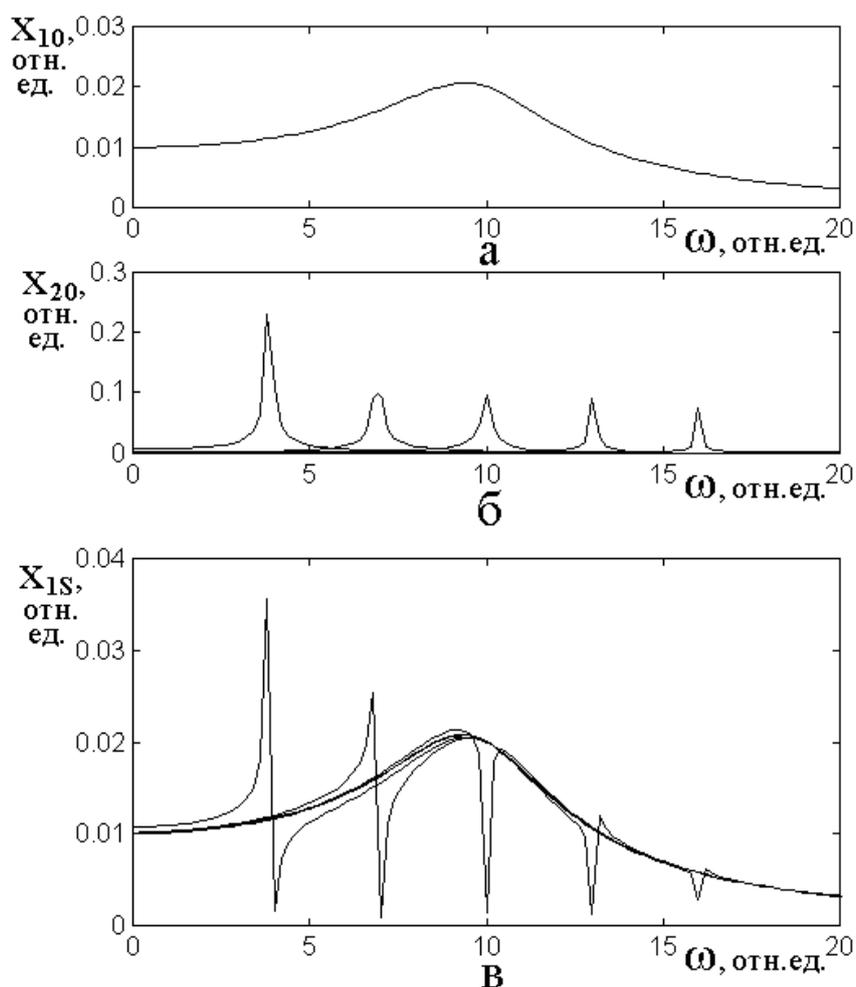


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики колебаний связанных осцилляторов при различных степенях связи между осцилляторами; а – первый осциллятор при отсутствии связи; б – второй осциллятор при частотах 4, 3, 7, 10, 13, 16 отн. ед. при отсутствии связи; в – первый осциллятор при наличии связи со вторым в той же сетке частот.

Характеристика на рис. 3а приведена для первого осциллятора, который соответствует колебаниям намагниченности. Затухание в этом случае довольно велико, поэтому характеристика имеет вид широкого максимума с плавными спадами в обе стороны. На рис. 3б приведены характеристики для второго осциллятора, соответствующие различным значениям его собственной частоты. Кривая на этом рисунке является совокупностью отдельных независимых кривых, каждая из которых соответствует своей частоте (то есть на одном графике построены пять независимых характеристик). Видно, что все кривые являются весьма узкими (особенно в сравнении с рис. 3а), что является следствием малости параметра затухания этого осциллятора.

На рис. 3в приведена характеристика для первого осциллятора при наличии связи со вторым. Как и на рис. 3б представлена совокупность построенных на одном графике кривых, соответствующих различным частотам второго осциллятора. Видно, что в этом случае второй осциллятора дает выбросы на характеристике для первого, частоты которых соответствуют частотам второго осциллятора. Характерным является тот факт, что при частотах ниже частоты резонанса первого осциллятора (то есть ниже 10 отн. ед.) выбросы преимущественно направлены вверх, а на частотах выше этой частоты – преимущественно вниз.

Для удобства сравнения с реальной задачей, на рис. 4а приведена та же характеристика, что и на рис. 3в, графическим путем очищенная от наложения боковых спадов характеристик второго осциллятора, то есть выделена общая средняя зависимость. Там же пунктиром показана характеристика, соответствующая первому осциллятору в отсутствие связи.

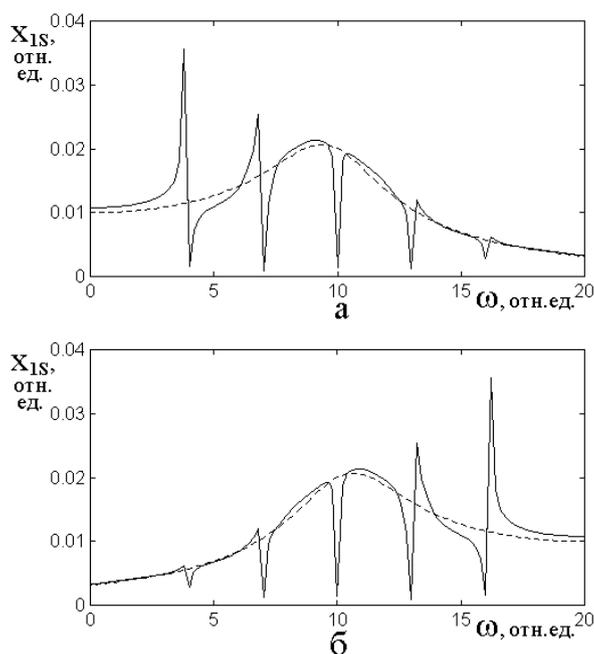


Рис. 4. Результирующая характеристика связанных осцилляторов. Пунктир – характеристика для первого осциллятора в отсутствие связи. а – обобщающая характеристика, построенная по рис. 3в; б – та же характеристика в обратной развертке по частоте.

Из рисунка видно, что суммарная характеристика имеет вид сетки резонансов второго осциллятора, наложенной на резонансную кривую для

первого осциллятора. Все наложенные резонансы имеют вид не простого максимума, а производной от максимума с выбросами вверх и вниз по очереди. На частотах ниже резонансной для первого осциллятора низкочастотный выброс каждого резонанса происходит вверх, а высокочастотный – вниз. На частотах ниже резонансной для первого осциллятора порядок выбросов меняется на обратный: низкочастотный направлен вниз, высокочастотный – вверх. При этом амплитуда выбросов ниже частоты первого осциллятора значительно ниже амплитуды выбросов выше этой частоты. При совпадении частоты второго осциллятора с частотой первого (10 отн. ед.) характеристика имеет симметричный глубокий провал, ширина которого соответствует ширине резонанса второго осциллятора.

Из сравнения с рис. 2а видно, что перечисленные особенности совпадают с таковыми для характеристики колебаний намагниченности с точностью до инверсии по частоте возбуждения. То есть на рис. 4а амплитуда выбросов преобладает на частотах ниже резонансной для второго осциллятора, а в реальной задаче то же самое происходит на частотах выше резонансной для намагниченности. Для сравнения с реальной задачей на рис. 4б приведена та же характеристика, что на рис. 4а, но инвертированная относительно частоты возбуждения. То есть это – зеркальное отражение исходной кривой, перевернутой справа налево. Можно видеть, что такая инверсия выправляет соответствие амплитуды выбросов, однако последовательность из составляющих (низкочастотный пик – вниз, высокочастотный – вверх) остается прежней.

Таким образом, можно видеть, что модель связанных осцилляторов в значительной степени отражает особенности магнитоупругих характеристик реальной задачи. Остающиеся различия, в основном, имеющие количественный характер, по-видимому, связаны с несовершенством предложенной модели, обусловленной стремлением к максимальному упрощению задачи. Можно полагать, что дальнейшее совершенствование модели должно идти по пути

углубления аналогии между колебаниями осциллятора и распространением граничного режима.

## **9. Замечание об антисимметричном характере упругих пиков на магнитной АЧХ**

Важной особенностью данного рассмотрения, хорошо заметной на рис. 2а, является антисимметричный характер пиков упругих резонансов, наложенных на амплитудно-частотную характеристику намагниченности. Так, из этого рисунка можно видеть, что на частотах ниже резонансной для ФМР, то есть ниже 2,80 ГГц упругие резонансы на магнитной характеристике проявляются в виде направленных вниз провалов, тогда как на частотах выше ФМР, то есть выше 2,80 ГГц, упругие резонансы дают на магнитной характеристике пики, направленные вверх.

Подобный асимметричный характер пиков узкополосного резонанса, наложенных на характеристику широкополосного резонанса, отмечен в разделе 8 для модели двух связанных осцилляторов (рис. 3, рис. 4), то есть подобное явление для системы с двумя степенями свободы является довольно общим. При этом колебания второго осциллятора по сравнению с колебаниями первого являются синфазными или противофазными в зависимости от того, ниже или выше собственная частота колебаний второго осциллятора относительно частоты первого [49. стр.243-244].

## **10. Механизм образования частот провалов**

В работе [36] отмечено, что частотные интервалы между провалами колебаний намагниченности соответствуют возбуждению резонансных колебаний по толщине пластины в целом. Однако должная интерпретация такого совпадения не дана. Рассмотрим механизм такого их поведения более подробно.

Согласно постановке задачи (раздел 6), частота возбуждения намагниченности  $f_0 = 2,80 \cdot 10^9$  Гц. При этой частоте период колебаний намагниченности равен:

$$T_0 = \frac{l}{f_0} = 3,57 \cdot 10^{-10} \text{ с.} \quad (70)$$

При принятых механических параметрах (раздел 6) скорость упругой волны в подложке равна:

$$v = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}} = 3,84 \cdot 10^5 \text{ см с}^{-1}. \quad (71)$$

Толщина подложки в условиях резонанса на частоте магнитного возбуждения, равна половине длины упругой волны на этой частоте:

$$d_0 = vT/2 = 0,6865 \cdot 10^{-4} \text{ см.} \quad (72)$$

В рассматриваемой задаче толщина подложка в 35 раз большая:

$$d = 35 \cdot d_0 = 2,40 \cdot 10^{-3} \text{ см.} \quad (73)$$

Будем считать, что упругая волна возбуждается на одной поверхности подложки (где находится пленка), после чего проходит всю подложку туда и обратно. Резонанс наступит тогда, когда волна, прошедшая в оба конца, совпадет по фазе с волной исходящей. Время, требуемое для двойного прохождения, равно:

$$\tau = \frac{2d}{v} = 1,25 \cdot 10^{-8} \text{ с.} \quad (74)$$

За это время намагниченность успеет совершить множество своих колебаний. Число таких колебаний за время двойного пробега упругой волны равно:

$$N = \frac{\tau}{T} = 0,35 \cdot 10^2 = 35. \quad (75)$$

Это означает, что за время, когда упругая волна пройдет по толщине подложки от одного конца до другого и вернется обратно, намагниченность проделает 35 колебаний.

Предполагаем, что упругая волна возбуждается, то есть начинает свое движение, в момент максимума первой половины первого периода колебаний намагниченности. При этом упругая волна возвратится через время, равное 35

периодам колебаний намагниченности, то есть опять попадет на первую половину периода колебаний намагниченности. То есть попадет в той же фазе, что была в момент начала ее распространения. Таким образом, имеет место синфазность и при повторении процесса амплитуда упругих колебаний может возрасти резонансным образом. При этом на частоте возбуждения намагниченности возникнет упругий резонанс, то есть упругая система нагрузит магнитную и в АЧХ магнитной появится резонансный провал. Частота провала будет соответствовать начальной частоте возбуждения, то есть:

$$f_{35} = f_0 = 2,80 \cdot 10^{10} \text{ Гц} = 2,80 \text{ ГГц.} \quad (76)$$

На рис. 2 этот главный провал на обеих характеристиках обозначен буквой А (частота обозначена стрелкой вниз).

Поскольку скорость упругой волны от частоты не зависит, то синхронизм может наступать и при других частотах возбуждения, лишь бы подходящая фаза колебаний намагниченности повторялась через одно и то же время, равное времени пробега упругой волны туда и обратно, то есть через время  $\tau$ , определяемое формулой (74).

Для примера рассмотрим, насколько надо уменьшить частоту колебаний намагниченности, чтобы синхронизм наступил не через 35, а через 34 периода колебаний намагниченности. Это означает, что период колебаний намагниченности равен:

$$T_{34} = \frac{\tau}{34} = 3,68 \cdot 10^{-10} \text{ с.} \quad (77)$$

Это период соответствует частоте:

$$f_{34} = \frac{1}{T_{34}} = 2,72 \cdot 10^8 \text{ Гц} = 2,72 \text{ ГГц.} \quad (78)$$

На этой частоте тоже возникнет упругий резонанс, который нагрузит магнитную систему и создаст на ее АЧХ резонансный провал, обозначенный на рис. 2 буквой В.

Найдем разность между частотами, соответствующими резонансным провалам на АЧХ магнитной системы:

$$\Delta f = f_{35} - f_{34} = 8,0 \cdot 10^7 \text{ Гц} = 80 \text{ МГц}, \quad (79)$$

как это и видно из АЧХ для намагниченности.

Такие же провалы будут, когда синхронизм наступит при любом числе колебаний намагниченности, что даст сетку провалов на магнитной АЧХ, отстоящих друг от друга на такие же расстояния.

Так, аналогично формуле (77), получаем, что 33 колебания дают частоту провала 2,64 ГГц (на рисунке – буква D), 36 колебаний дают провал на частоте 2,88 ГГц (буква С), 37 колебаний – на частоте 2,96 ГГц (буква Е) и так далее.

## 11. Амплитудно-частотные характеристики упругих колебаний

Поскольку, как показано выше (раздел 10), резонансный характер провалов на амплитудно-частотной характеристике намагниченности обусловлен возбуждением упругих резонансов по толщине структуры в целом, то следует ожидать, что интенсивность возбуждения таких резонансов будет зависеть от затухания упругих волн в процессе их распространения. Для проверки такого положения обратимся к следующему далее рис. 5,

На этом рисунке показаны амплитудно-частотные характеристики магнитных (а,в) и упругих (б,г) колебаний при двух значениях параметра упругого затухания: первый, когда  $\beta = 0 \text{ с}^{-1}$  (эпюры а, б), то есть затухание упругой волны отсутствует, второй, когда  $\beta = 4,8 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ , то есть затухание достаточно велико, чтобы заметное влияние упругой системы на магнитную отсутствовало. .

Для удобства рассмотрения в сравнительно небольшом диапазоне частот, а также для более подробного выявления роли затухания упругой волны за счет более длинного пробега, толщина структуры в целом взята довольно большой – в 70 раз больше толщины магнитной пленки, то есть:

$$d = 70 \times 0,6865 \cdot 10^{-7} = 48,0550 \cdot 10^{-7} \text{ см}, \quad (80)$$

что при скорости упругой волны  $\nu = 3.84 \cdot 10^5$  см  $\text{с}^{-1}$ , соответствует собственной частоте упругого резонанса структуры в целом:

$$f_0 = \frac{\nu}{2d} = 4.00 \cdot 10^7 \text{ Гц} = 40 \text{ МГц}. \quad (81)$$

То есть провалы на магнитной АЧХ и пики на упругой АЧХ должны быть разнесены на 40 МГц. Как отмечено выше (раздел 10), эта частота как раз соответствует времени пробега упругой волны по структуре в оба конца в прямом и обратном направлениях.

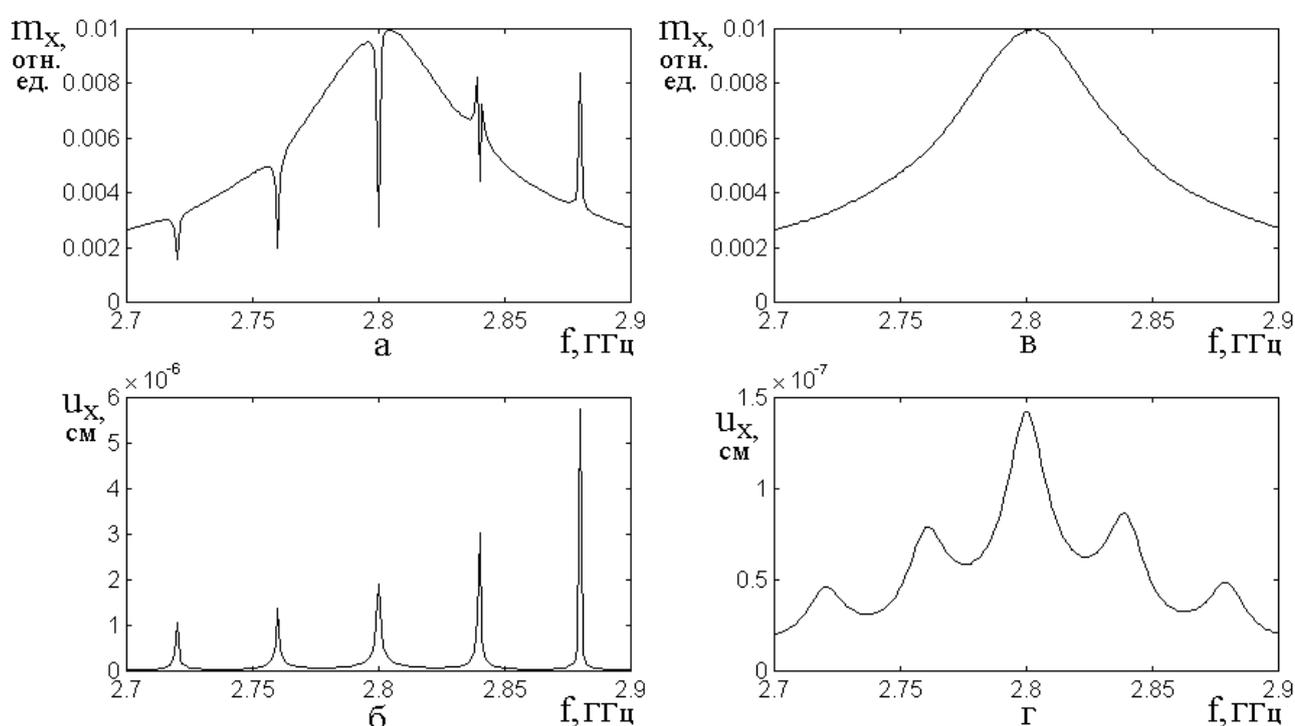


Рис. 5. Амплитудно-частотные характеристики магнитных (а,в) и упругих (б,г) колебаний при различных значениях параметра упругого затухания. а, б –  $\beta = 0 \text{ с}^{-1}$ ; в, г –  $\beta = 4.8 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ . Параметры:  $d = 48.0550$  мкм;  $h_{0x,0y} = 0.1$  Э. Остальные параметры приведены в разделе 6.

Из рис. 5а и рис. 5б, соответствующих отсутствию упругого затухания, видно, что расстояние между провалами на магнитной АЧХ и пиками на упругой равны как раз этой величине.

Однако из рис. 5в видно, что при большом упругом затухании магнитная АЧХ остается плавной и провалы на ней отсутствуют, однако из рис. 5г видно, что упругая АЧХ все же имеет резонансный характер, однако резонансные линии

крайне широкие. Так, ширина центральной резонансной кривой на рис. 5г, приходящейся на частоту 2,8 ГГц, на половине высоты (считая от основания при боковых провалах) составляет около 20 МГц.

Приведем те же данные более точно. Частоты трех центральных максимумов, измеренный по форме кривой на рис. 5а, равны 2.861, 2.800, 2.839 ГГц, то есть резонансная частота равна  $f_0 = 39.0$  МГц (совпадает с приведенной в формуле (81) с точностью в 2,5%, так что столь малым различием можно пренебречь). При этом средний уровень минимумов между этими максимумами равен  $0.602 \cdot 10^{-7}$  отн. ед., а уровень центрального максимума равен  $1.420 \cdot 10^{-7}$ . Расстояние по частоте на половине высоты между этими уровнями равно  $\Delta f|_{0.5} = 20.2$  МГц. Таким образом, пользуясь классическим определением добротности контура как отношения ширины резонансной кривой на половине ее высоты к частоте резонанса [50, стр.74, рис. 58], [51, стр.125, 129, рис. 6б], получаем, что добротность центрального максимума кривой на рис. 5г равна:

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f|_{0.5}} = \frac{39.0}{20.2} = 1.93 \approx 2.0. \quad (82)$$

С точки зрения колебательных систем такая добротность является крайне низкой. Заметим, что при  $Q = 1$  амплитудно-частотная характеристика контура уже не является резонансной, то есть максимум заменяется горизонтальным участком, а при дальнейшем уменьшении добротности колебания становятся апериодическими.

## 12. Критическое значение параметра затухания

Надо учитывать, что частота упругих волн равна частоте ФМР – 2800 МГц, а расстояние между пиками – 40 МГц, то есть наблюдаемый на основной частоте 2800 МГц упругий резонанс (как и остальные резонансы) не есть настоящий полуволновый резонанс а имеет фазовую природу, обусловленную

синфазностью достаточно долго путешествовавшей отраженной волны с исходным возбуждением.

При двойном пробеге по толщине подложки ослабление волны по амплитуде обусловлено параметром затухания  $\beta$ , определяющим мнимую часть волнового числа. Рассмотрим комплексный характер волнового числа более подробно, для чего будем исходить из полученных в разделе 4 действительной и мнимой частей волнового числа (37) и (38).

Прежде всего отметим, что уравнение (32) для упругих колебаний определяет значение волнового числа при частоте, равной частоте возбуждения упругого резонанса, то есть 2,8 ГГц. В то же время, например, из рис. 5, видно, что влияние упругих колебаний на АЧХ намагниченности пропадает уже при параметре упругого затухания  $\beta \approx 10^7 \text{ с}^{-1}$ . При этом второе слагаемое под внутренним корнем в выражениях (37) и (38), вида  $(2\beta/\omega)^2$ , составляет порядка  $10^{-6}$ , что значительно меньше другого слагаемого, равного единице, так что упругое затухание как-либо себя не проявляет. С другой стороны, можно полагать, что упругие резонансы, обусловленные двойным пробегом упругой волны по толщине подложки, допускают рассмотрение наравне с обычными упругими резонансами полуволнового характера, которые происходят на частоте, определяемой расстоянием между пиками амплитудно-частотной характеристики. То есть в качестве частоты для волнового числа следует брать не частоту возбуждения 2,8 ГГц, а частоту между этими пиками, соответствующую резонансу упругих колебаний – 40 МГц. При этом величина  $(2\beta/\omega)^2$  принимает значение порядка единицы, сравнимое со значением первого слагаемого внутреннего корня выражений (37) и (38).

Для сравнения с результатами по АЧХ, построенными относительно линейной частоты, запишем действительную (37) и мнимую (38) компоненты волнового числа в более удобном виде:

$$\eta = \frac{2\pi f_e}{v} \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\beta}{\pi f_e} \right)^2} \right)}; \quad (83)$$

$$\xi = \frac{2\pi f_e}{v} \sqrt{\frac{1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\beta}{\pi f_e} \right)^2} \right)} \quad (84)$$

где  $f_e$  – резонансная частота упругих колебаний (здесь – 40 МГц).

Из формул (83) и (84) видно, что действительная и мнимая части волнового числа в значительной степени определяются величиной параметра затухания  $\beta$ .

Чтобы выяснить роль этого параметра более подробно, обратимся к рис. 6, где приведены зависимости действительной  $\eta$  (кривая 1) и мнимой  $\xi$  (кривая 2) компонент волнового числа от параметра упругого затухания  $\beta$ .

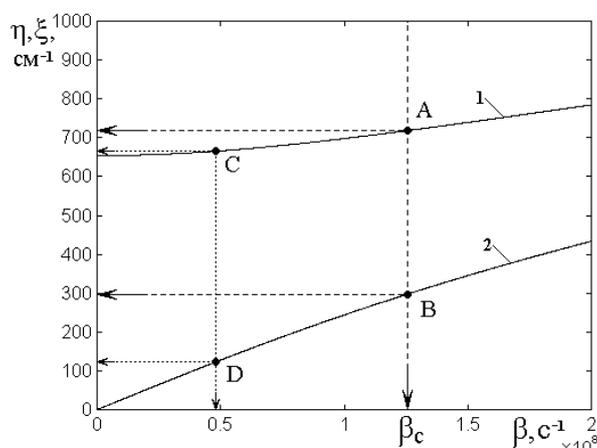


Рис. 6. Зависимость действительной  $\eta$  (кривая 1) и мнимой  $\xi$  (кривая 2) компонент волнового числа от параметра упругого затухания  $\beta$ . Кривые построены по формулам (83), (84). Частота  $f_e = 40$  МГц.

Для оценки влияния затухания воспользуемся широко применяемым в радиотехнике понятием добротности резонансного контура. Так, классическое уравнение вынужденных колебаний, например, механического смещения [50, стр.63, форм. (14.5)], [52, стр.27, форм. (2.20)] имеет вид:

$$\ddot{y} + 2\beta \dot{y} + \omega^2 y = f_0 e^{i P t}. \quad (85)$$

В качестве характеристики резонансной кривой решения такого уравнения используется понятие добротности, определяемое формулой [50, стр.71, форм. (15.2)], [51, стр.125, 7 строк снизу], [52, стр.26, форм. (2.18)]:

$$Q = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{\pi f_e}{\beta}. \quad (86)$$

Величина добротности может служить мерой характера амплитудно-частотной характеристики колебаний, определяемых уравнением (85) [50, стр.76, рис. 59], [52, стр.27, рис. 2.2]. Так, при  $Q > 1$  колебания смещения являются периодическими и их частотная характеристика, нормированная на амплитуду возбуждения, начинаясь с единицы, по мере увеличения частоты имеет резонансный характер с выраженным максимумом, в котором амплитуда превышает единицу. При  $Q = 1$  максимум частотной характеристики сменяется плоским участком, амплитуда на резонансной частоте равна единице, а при  $Q < 1$  характеристика сразу от нуля спадает, не проявляя никаких признаков резонанса, а сами колебания становятся апериодическими,

Таким образом, значение  $Q = 1$  является как бы критическим, определяющим переход от периодического режима колебаний к апериодическому. Исходя из этого условия, в соответствии с (86), находим критическое значение параметра затухания:

$$\beta_{\tilde{n}} = \pi f_e. \quad (87)$$

При частоте упругих колебаний равной 40 МГц, получаем:

$$\beta_c = 1,257 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}. \quad (88)$$

Это значение на горизонтальной оси рис. 6 отмечено направленной вниз стрелкой. Подстановка этого значения в формулы (83) и (84) дает соответственно значения действительной и мнимой частей волнового числа:  $\eta = 718,4 \text{ с}^{-1}$ ,  $\xi = 297,6 \text{ с}^{-1}$ .

На рис. 6 эти значения получаются как проекции точек А и В пересечения кривых 1 и 2 с вертикальной линией, соответствующей  $\beta_c$ , показанные пунктирными линиями, заканчивающимися стрелками на вертикальной оси.

Для дальнейшего рассмотрения будет важно еще одно значение параметра затухания, равное  $\beta = 0,480 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$ . Этому параметру соответствуют действительная и мнимая части волнового числа:  $\eta = 665,2 \text{ с}^{-1}$ ,  $\xi = 122,7 \text{ с}^{-1}$ . Таким образом, при принятом значении  $\beta = 0,480 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$ , мнимая часть волнового числа составляет от действительной почти 20% (точнее 18,4%).

Если бы затухание отсутствовало, то волновое число равнялось бы его целой части  $\eta$ , что соответствует полной длине волны, равной

$$\lambda = \frac{2\pi}{\eta} = 94,00 \cdot 10^{-4} \text{ см.} \quad (89)$$

Половина такой длины волны равна  $47,00 \cdot 10^{-4} \text{ см}$ . Условием резонанса (на первой моде) является равенство толщины структуры половине длины волны, то есть в отсутствие затухания для выполнения такого условия толщина структуры в целом должна быть равна именно этой величине.

Рассмотрим теперь, что происходит при учете затухания. При исходной толщине магнитной пленки равной  $0,6865 \cdot 10^{-4} \text{ см}$  и принятой при рассмотрении рис. 5 толщине структуры в целом в 70 раз большей, получаем полную толщину равной  $48,050 \cdot 10^{-4} \text{ см}$ , что соответствует резонансной длине волны в отсутствие затухания. При наличии затухания выше получена величина  $47,00 \cdot 10^{-4} \text{ см}$ , которая отличается от величины без затухания на 2%. Таким образом, видно, что даже при столь большом значении мнимой составляющей волнового числа, как 20% от действительной величины, частота полуволнового резонанса по толщине структуры в целом остается прежней с точностью около 2%.

### 13. Влияние толщины подложки на критическое значение параметра затухания

Приведенное выше критическое значение параметра затухания  $\beta_c = 1,257 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$  соответствует частоте 40 МГц, которая в свою очередь определяется толщиной подложки, равной  $48,050 \cdot 10^{-4} \text{ см}$ .

В то же время, чем толще подложка, тем больший путь должна пробегать волна, то есть на этом пути должна затухать сильнее и поддержание резонансных упругих колебаний становится все труднее. Таким образом, для обеспечения резонанса, то есть добротности колебаний большей единицы, критическое значение параметра затухания должно быть тем меньше, чем толщина подложки больше. В самом деле, подставляя в (87) значение  $f_e$ , определяемое формулой (81), между критическим параметром затухания и толщиной подложки получаем обратно пропорциональную зависимость, имеющую вид:

$$\beta_c = \frac{\pi v}{2d}, \quad (90)$$

где  $v$  – скорость упругой волны в материале подложки.

Это соотношение дает связь между толщиной подложки  $d$  и требуемом для резонанса критическом значении параметра затухания  $\beta_c$ . При затухании меньшем  $\beta_{\tilde{\eta}}$  периодические колебания имеются, а при большем – становятся аperiodическими, то есть резонанс как таковой отсутствует. Таким образом, чем толще подложка, тем условия для резонанса хуже, так как путь волны через подложку удлиняется и падение амплитуды волны за счет затухания увеличивается.

На рис. 7 приведена построенная по формуле (90) зависимость критического значения параметра затухания от толщины подложки. При параметре затухании ниже этой кривой упругие колебания являются периодическими, а выше – аperiodическими. При толщине подложки,

соответствующей разобранному выше примеру  $48,050 \cdot 10^{-4}$  см (отмечена стрелкой на горизонтальной оси), критическое значение параметра затухания получается равным  $\beta_c = 1,257 \cdot 10^8$  с<sup>-1</sup> (отмечено стрелкой на вертикальной оси).

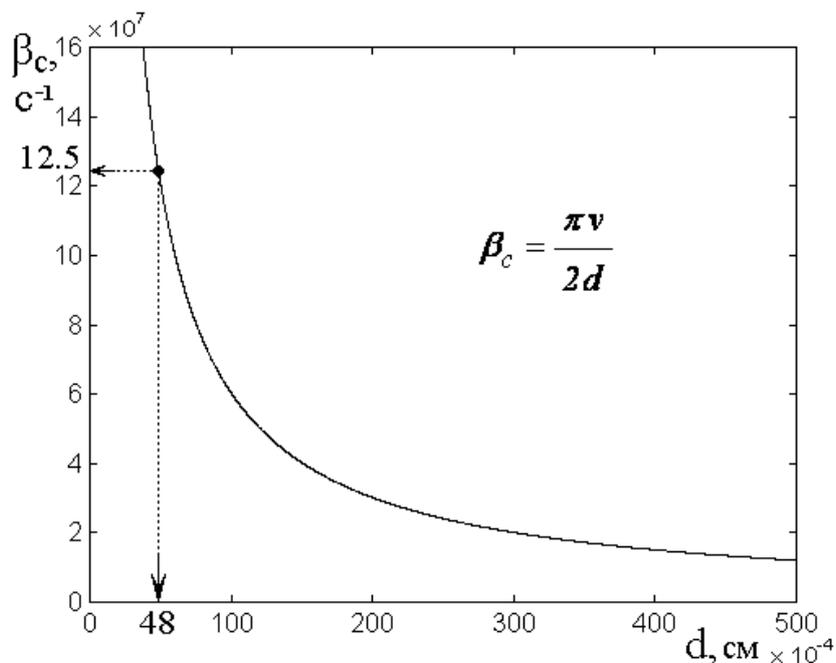


Рис. 7. Зависимость критического значения параметра затухания от толщины подложки. Скорость упругой волны  $v = 3.84 \cdot 10^5$  см с<sup>-1</sup>.

#### 14. Сравнение с результатами экспериментов

Для того, чтобы установить, могут ли наблюдаемые на практике значения параметра затухания обеспечить наличие сетки упругих резонансов, дающих провалы в амплитудно-частотных характеристиках намагниченности, обратимся к экспериментам по возбуждению упругих колебаний в пленках и объемных образцах железиттриевого граната. Заметим, что в экспериментах обычно измеряется добротность наблюдаемых резонансов, поэтому будем переводить ее в параметр затухания с помощью получаемой из (86) формулы:

$$\beta = \frac{\pi f_e}{Q}. \quad (91)$$

Так, в работе [1, стр.295] для добротности на частоте 9 ГГц приведены значения от  $2,5 \cdot 10^6$  до  $9,5 \cdot 10^6$ , что дает параметр затухания от  $2,8 \cdot 10^3$  до  $10,8 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>. В работе [8, стр.183, 193, 216] приведены значения добротности от  $10^5$  до  $10^6$ , что с учетом соответствующих частот дает параметр затухания от 30 до  $3 \cdot 10^4$  с<sup>-1</sup>. Там же [8, стр.183, рис. 45] показано, что импульс упругого смещения на частоте 500 МГц способен пробежать туда и обратно всю длину стрежня из ЖИГ длиной 10 мм порядка 150 раз, то есть в общей сложности покрывает расстояние до 300 см (три метра!). В работе [8, стр.193] отмечено, что затухание упругих колебаний в ЖИГ столь мало, что порог их параметрической неустойчивости заметно ниже такового для обменных спиновых волн, что позволяет в экспериментах уверенно наблюдать возбуждение упругих резонансов в условиях нелинейного ферромагнитного резонанса [8, стр.240, рис. 5.4], [54], [55].

Таким образом, видно, что наблюдаемые в экспериментах значения параметра затухания значительно (по крайней мере на два-три порядка) меньше критического значения  $\beta_c$ , требуемого для обеспечения сетки провалов на АЧХ намагниченности, показанной на рис. 2 и рис. 5а. То есть образование сетки при принятых здесь значениях  $\beta$  вполне правдоподобно.

## 15. Зависимости характеристик упругих колебаний от параметра затухания

Рассмотрим свойства упругих колебаний несколько более подробно, для чего обратимся к рис. 8, где приведены амплитудно-частотные характеристики упругих колебаний при различных значениях параметра упругого затухания. Для удобства сравнения масштаб по вертикальной оси – логарифмический.

Кривая 1 соответствует отсутствию упругого затухания, кривая 2 – довольно большому его значению, но еще в три раза меньшему критического, кривая 3 – критическому значению  $\beta_c$ .

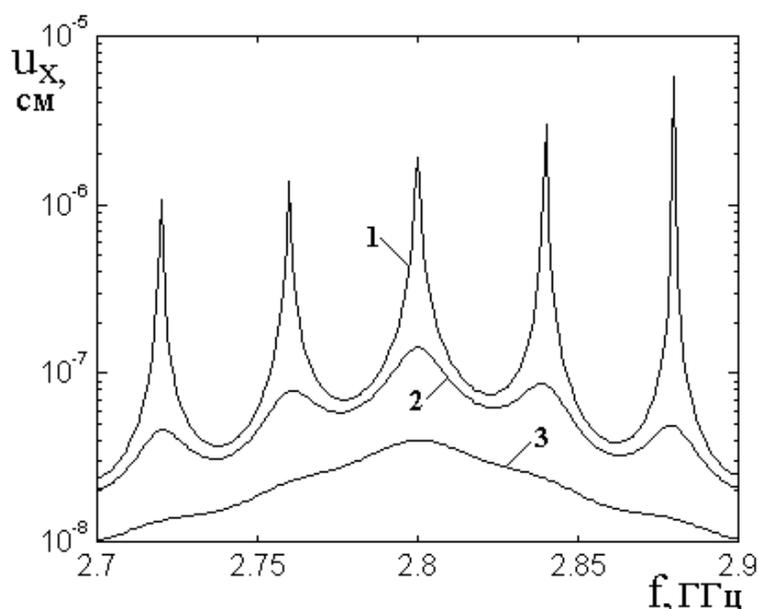


Рис. 8. Амплитудно-частотные характеристики упругих колебаний при различных значениях параметра упругого затухания: 1 –  $\beta = 0 \text{ с}^{-1}$ ; 2 –  $\beta = 4.8 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ ; 3 –  $\beta = 12.57 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ . Параметры – те же что на рис. 5.

Из рисунка видно, что кривые 1 и 2 имеют четко выраженный резонансный характер, причем частоты резонансов отставлены друг от друга на расстояние 40 МГц, как раз соответствующее двойному пробегу упругой волны по всей толщине подложки в обе стороны. На кривой 3, соответствующей критическому значению  $\beta = \beta_c$ , резонансные явления уже не выражены, некоторое «волнение» еще имеется, однако крайне незначительное: в линейном масштабе на частоте 2,47 ГГц отклонение от средней величины составляет менее 6%. Такое поведение этой кривой как раз соответствует подавлению резонанса при критическом значении затухания.

Все кривые относительно горизонтальной оси находятся как бы на симметричном по частоте выпуклом вверх «пьедестале», дно которого приходится на  $10^{-8}$  см, а верхняя часть на частоте около 2.8 ГГц достигает  $8 \cdot 10^{-8}$  см. Можно полагать, что само существование пьедестала обусловлено тем фактом, что упругие колебания возбуждаются за счет магнитных, которые имеют максимум как раз в области около 2.8 ГГц. Можно полагать, что по упругости мы имеем перекрытие по частоте соседних резонансных линий, а при

достаточном удалении от частоты магнитного резонанса крылья упругой характеристики стремятся к нулю.

Заметим, что амплитуды упругих пиков при большом и малом затухании ведут себя различным образом. Так, при большом и даже среднем затухании (кривые 2 и 3) характеристики по упругости симметрично спадают в обе стороны от центрального максимума, а при малом затухании (кривая 1) амплитуды упругих пиков по мере увеличения частоты всегда монотонно растут. Проверка показывает, что такой рост по мере увеличения частоты за пределы рисунка, замедляется, амплитуда пиков проходит через максимум вблизи частоты 2.95 МГц, после чего спадает примерно симметрично относительно этой частоты.

## **16. Влияние параметра затухания на амплитуды резонансов**

Из рис. 5 и рис. 8 можно видеть, что величина параметра затухания упругих колебаний играет существенную роль в формировании резонансных характеристик. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Прежде всего обратимся к АЧХ колебаний намагниченности. На рис. 9 показана зависимость низшей точки («дна») провала АЧХ намагниченности от величины параметра затухания упругих колебаний на частоте главного резонанса 2800 МГц (кривая 2) и по обе стороны от этой частоты на один шаг по 40 МГц: 2760 МГц (кривая 1) и 2840 МГц (кривая 3). Схема определения такой точки показана на врезке.

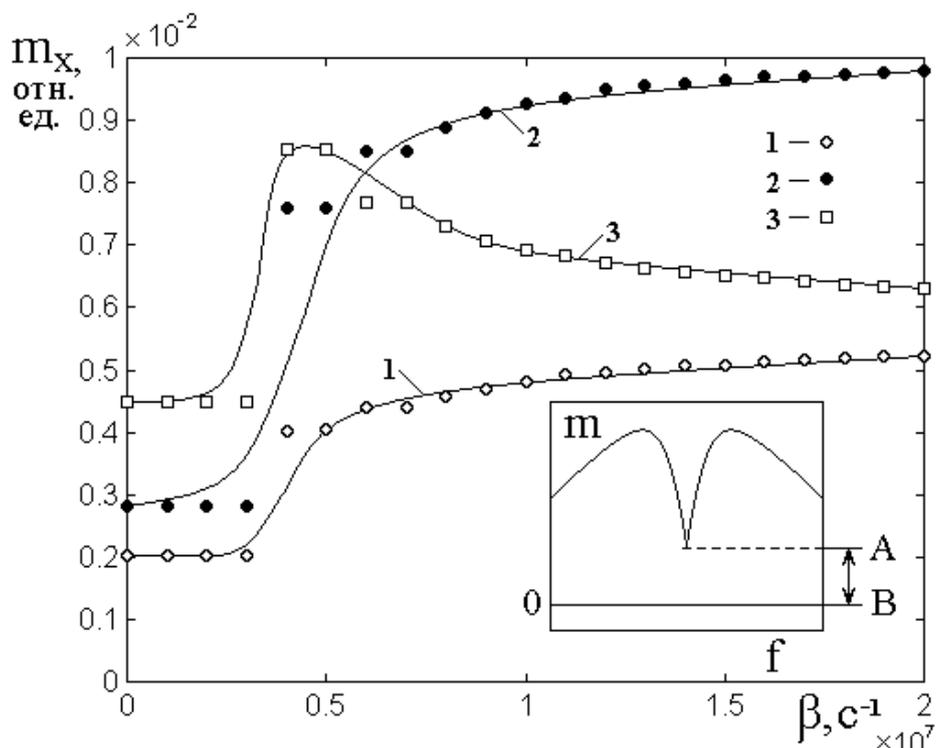


Рис. 9 Зависимости глубины провала АЧХ намагниченности от величины параметра затухания упругих колебаний на различных частотах: 1 – 2760 МГц, 2 – 2800 МГц, 3 – 2840 МГц. На врезке – схема отсчета уровня провала АЧХ.

Величина провала определяется расстоянием АВ, что и дает значение  $m_x$ , отложенное по вертикальной оси на основном графике. Параметры – те же, что на рис. 5, рис. 8.

Из рисунка можно видеть, что в отсутствие затухания, то есть при  $\beta = 0$  провал является наиболее глубоким на частоте 2760 МГц, то есть ниже главной (кривая 1). Уровень провала на главной частоте 2800 МГц, соответствующей частоте ФМР, несколько выше (кривая 2) и на частоте 2840 МГц, то есть выше главной – еще выше (кривая 3) Такой характер провалов аналогичен наблюдаемому на рис. 5а. По мере увеличения параметра затухания сначала уровни провалов не меняются, однако начиная с  $\beta = 0,4 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ , резко возрастают, однако уже при  $\beta = 0,4 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$  рост прекращается и далее уровни провалов стремятся к насыщению. При этом уровни для частот ниже главной и равной главной (кривые 1 и 2) стремятся к насыщению при плавном нарастании, причем кривая 2 идет выше кривой 1, как они располагались с самого начала. Однако уровень провала для частоты выше главной (кривая 3) стремится к

насыщению при плавном спаде, причем этот уровень становится ниже уровня для главной частоты (кривой 3). То есть, уже начиная с  $\beta = 0,5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$  уровни провалов кривой 2 и 3 меняются местами. Таким образом, при  $\beta$  ниже этого значения уровни провалов по мере увеличения затухания возрастают, а выше – принимают как бы «колоколообразный» характер, отражающий такой же «колоколообразный» характер АЧХ для намагниченности.

Поскольку при характерном значении  $\beta_p = 0,5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$  происходит как бы инверсия кривых 2 и 3, для удобства дальнейшего обращения будем называть значение  $\beta_p$  «инверсным» значением параметра затухания.

Заметим, что во всем исследованном интервале параметра  $\beta$  его величина значительно ниже критического значения  $\beta_c = 12,57 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ , определенного в разделе 13 по формуле (90), в соответствии с рис. 7, при  $d = 48,0550 \cdot 10^{-4} \text{ см}$  и  $\nu = 3,84 \cdot 10^5 \text{ см с}^{-1}$ . Таким образом, можно считать, что инверсное значение параметра затухания значительно меньше критического:

$$\beta_p \ll \beta_c, \quad (92)$$

причем при принятых здесь параметрах – меньше в 2,514 раз.

Рассмотрим теперь величину амплитуды провала, считая от уровня намагниченности в отсутствие провала (то есть при отсутствии магнитоупругого взаимодействия) до низшей точки («дна») провала, для чего обратимся к рис. 10, где показаны зависимости такой амплитуды от параметра затухания на тех же частотах, что на рис. 9. Схема определения такой амплитуды показана на врезке.

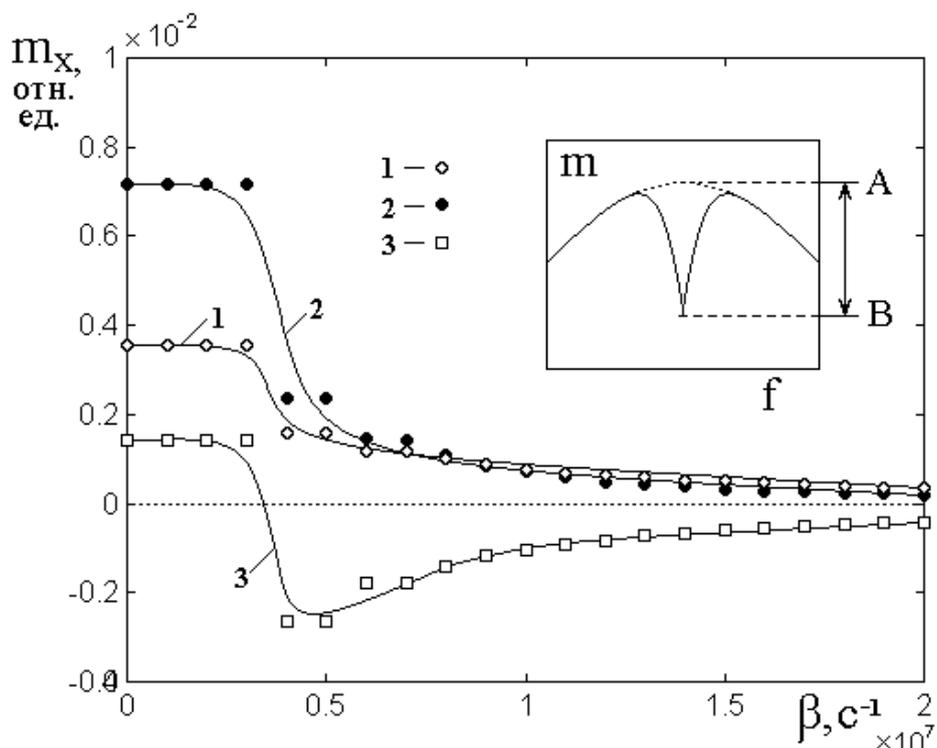


Рис. 10. Зависимости амплитуды провала АЧХ намагниченности от величины параметра затухания упругих колебаний на различных частотах: 1 – 2760 МГц, 2 – 2800 МГц, 3 – 2840 МГц. На врезке – схема отсчета амплитуды провала АЧХ. Величина провала определяется расстоянием АВ, что и дает значение  $m_x$ , отложенное по вертикальной оси на основном графике. Параметры – те же, что на рис. 9.

Из рисунка можно видеть, что в отсутствие затухания (при  $\beta = 0$ ) наибольшую амплитуду имеет провал на главной частоте 2800 МГц, совпадающей с частоте ФМР (кривая 2), а выше и ниже этой частоты амплитуды принимают меньшие значения (кривые 1 и 3).. Такая картина также соответствует представленной на рис. 5а. При увеличении параметра затухания до величины инверсии  $\beta_p = 0,5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$  амплитуды всех провалов не меняются, а после прохождения этой величины резко спадают и далее стремятся к стационарным значениям вблизи нуля. Следует заметить, что кривая 3, соответствующая частоте 2840 МГц, то есть выше главной, вблизи  $\beta_p = 0,5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$  меняет знак, становясь отрицательной. Это означает, что на АЧХ по намагниченности вместо провала появляется подъем, несколько возвышающийся над уровнем АЧХ в отсутствие провала (то есть при отсутствии

магнитоупругого взаимодействия). На рис. 5а такой подъем особенно четко виден на частоте 2880 МГц.

Таким образом, здесь при том же значении параметра затухания  $\beta_p = 0,5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$  имеет место изменение знака, то есть как бы инверсия кривой 3, что соответствует названию этого значения параметра.

Заметим, что изменение знака кривой 3 с положительного на отрицательный соответствует асимметрии наложения упругих пиков на характеристику магнитных колебаний. При этом изменение знака кривой 3, происходящее при переходе затухания через инверсное значение  $\beta_p$ , проявляется как замена провалов вниз на пики вверх на характеристике намагниченности.

Рассмотрим теперь, что происходит при изменении затухания с амплитудами упругих резонансов на тех же частотах, для чего обратимся к рис. 11, где показаны такие зависимости в том же интервале измерения  $\beta$ . Схема определения амплитуды упругого резонанса показана на врезке.

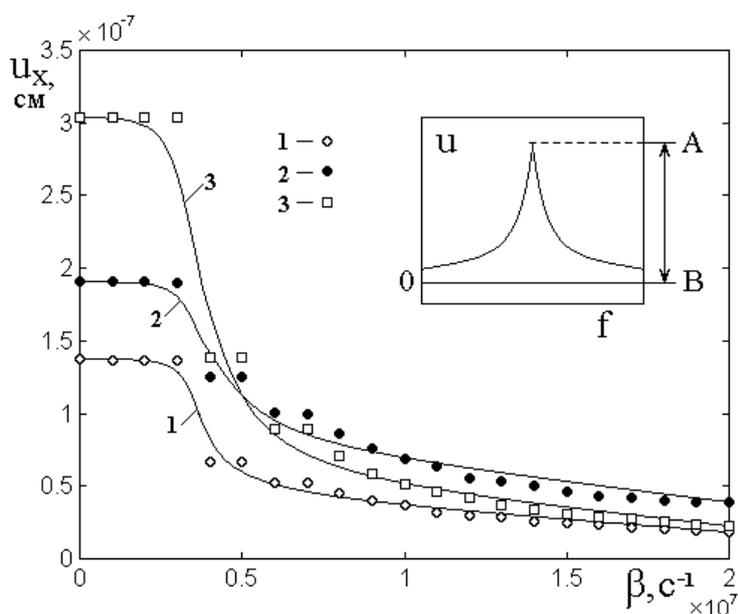


Рис. 11. Зависимости амплитуд резонансов АЧХ по упругому смещению от величины параметра затухания упругих колебаний на различных частотах: 1 – 2760 МГц, 2 – 2800 МГц, 3 – 2840 МГц. На врезке – схема отсчета амплитуды резонанса АЧХ. Величина амплитуды резонанса определяется расстоянием АВ, что и дает значение  $u_x$ , отложенное по вертикальной оси на основном графике.

Параметры – те же, что на рис. 9.

Из рисунка виден характер зависимостей, подобных таковым для намагниченности. Так, в интервале от нуля до  $\beta_p = 0,5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$  зависимости сохраняют постоянные значения, после чего спадают, стремясь далее к нулю. Существенное отличие состоит в том, что в отсутствие затухания, то есть при  $\beta = 0$ , кривые располагаются тем выше, чем частоты, им соответствующие, больше. То есть ниже всего идет кривая 1, соответствующая частоте 2760 МГц, несколько выше – кривая 2, соответствующая частоте 2800 МГц и выше всех – кривая 3, соответствующая частоте 2840 МГц. То есть – с увеличением частоты амплитуда пиков возрастает. Такой же характер изменения амплитуды пиков виден на рис. 5б. Однако после перехода через значение инверсии  $\beta_p = 0,5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$  кривые 2 и 3 меняются местами. Теперь наибольшую амплитуду имеет резонанс на главной частоте 2800 МГц (кривая 2), а амплитуды резонансов на боковых частотах 2760 МГц и 2840 МГц (кривые 1 и 3) становятся ниже главного. Такой характер с преобладанием центрального максимума виден также на рис. 5г. При дальнейшем увеличении параметра затухания амплитуды всех максимумов стремятся к нулю, однако преобладание главного максимума сохраняется.

### **17. Различие скорости спада амплитуды магнитных и упругих колебаний при увеличении затухания**

Отметим еще одну важную особенность, которую можно усмотреть из данных, приведенных в предыдущем разделе. Так, из рис. 10 можно видеть, что при изменении  $\beta$  от нуля до  $2,0 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$  амплитуда магнитного резонанса изменилась с  $0,75 \cdot 10^{-2}$  отн. ед. до  $0,02 \cdot 10^{-2}$  отн. ед., то есть уменьшилась в 37,5 раз. В то же время, из рис. 11 можно видеть, что амплитуда упругих колебаний в том же интервале изменения  $\beta$  уменьшилась с  $3,00 \cdot 10^{-7}$  см до  $0,40 \cdot 10^{-7}$  см, то есть уменьшилась в 7,5 раз. То есть по мере увеличения упругого затухания амплитуды магнитных резонансов падают значительно

скорее, чем упругих. Подобное положение можно видеть из рис. 5б и рис. 5г, соответствующих  $\beta = 4,8 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ . Видно, что на магнитной АЧХ (рис. 5б) провалы уже полностью отсутствуют магнитная АЧХ приняла вид, какой она имела бы в отсутствие магнитоупругой связи, тогда как на АЧХ для упругого смещения (рис. 5г) упругие резонансы выражены весьма четко. Проверка показывает, что упругие резонансы на АЧХ полностью исчезают при приближении параметра затухания к критическому значению  $\beta_c = 12,57 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ , как это и следует из рассмотрения, выполненного в разделе 15.

### 18. Вторичный резонанс упругих колебаний

Из рассмотрения рис. 11 можно видеть, что в отсутствие затухания упругих колебаний, то есть при  $\beta = 0$  амплитуды упругих резонансов с увеличением частоты увеличиваются. Так, при частоте 2760 МГц амплитуда упругого пика составляет  $1,4 \cdot 10^{-7}$  см, при частоте 2800 МГц –  $1,9 \cdot 10^{-7}$  см, при частоте 2840 МГц –  $3,0 \cdot 10^{-7}$  см. На этих же частотах амплитуда магнитного резонанса, как можно видеть из рис. 5б, составляет  $0,48 \cdot 10^{-2}$  отн. ед.,  $0,99 \cdot 10^{-2}$  отн. ед.,  $0,50 \cdot 10^{-2}$  отн. ед. То есть магнитные колебания на резонансной частоте ФМР имеют максимум, тогда как упругие колебания по амплитуде за этим максимумом не следуют, а по частоте все время возрастают. Такой же рост амплитуды упругих колебаний с частотой можно видеть из рис. 5в. Однако на рис. 8 картина несколько другая. Так, в отсутствие затухания при  $\beta = 0$  амплитуда упругих пиков по частоте монотонно растет (кривая 1), тогда как при увеличении затухания при  $\beta = 4,8 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$  уже становится симметричной, подобно магнитной, а при достижении критической величины  $\beta = 12,57 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$  упругие колебания полностью исчезают и зависимость становится полностью подобна магнитной. Таким образом, можно полагать, что при малом затухании

существует какой-то механизм, обязывающий амплитуду упругих резонансов по мере роста частоты увеличиваться.

Поскольку упругие колебания возбуждаются через посредство магнитных, имеющих ярко выраженный резонансный характер с максимумом на частоте ФМР, следует полагать, что при значительном увеличении частоты выше резонансной для ФМР рост амплитуды упругих колебаний прекратится и далее они должны спадать в соответствии со спадом амплитуды колебаний намагниченности.

Для проверки такого предположения обратимся к рис. 12, где показаны амплитуды упругих резонансов в более широком, чем на рис. 5 и рис. 8 диапазоне частот. Выбраны два значения параметра затухания: нулевое  $\beta = 0$  и в два раза превышающее значение инверсное  $\beta_p$ , то есть  $\beta = 10^7 \text{ с}^{-1}$ , при котором инверсия зависимостей, рассмотренных в разделе 16, выражена достаточным образом.

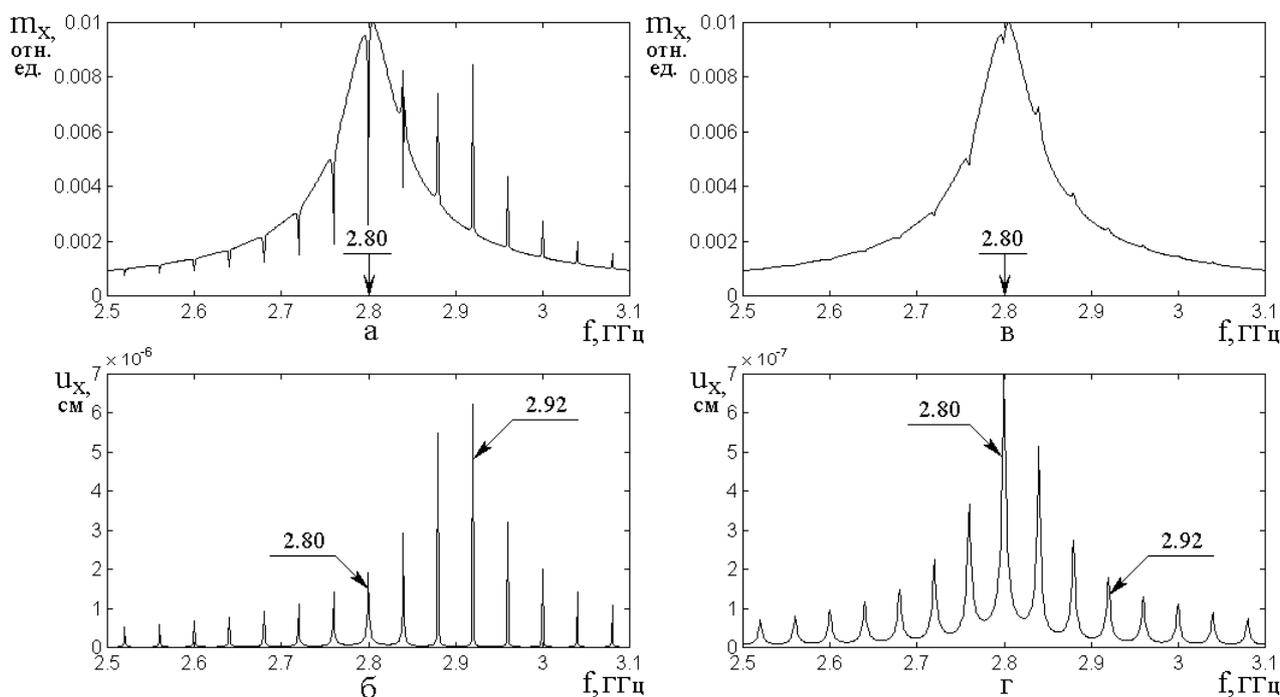


Рис. 12. Амплитудно-частотные характеристики магнитных (а,в) и упругих (б,г) колебаний в широком диапазоне частот при различных значениях параметра затухания: а,б –  $\beta = 0$  ; в,г –  $\beta = 10^7 \text{ с}^{-1}$ . Параметры – те же, что на рис. 9.

Из рисунка видно, что общая огибающая магнитных характеристик (а,в) при обоих значениях параметра затухания не меняется, ее максимум в обоих случаях приходится на частоту ФМР, равную 2,80 ГГц. Отличие состоит в том, что при малом параметре  $\beta$  пики, обусловленные упругими резонансами, выражены значительно сильнее, подобно тому, как отмечалось ранее при рассмотрении рис. 5а и рис. 5в (раздел 11). Однако упругие характеристики (б,г) ведут себя существенно отличным образом. Заметим, что общая амплитуда пиков при большем затухании (г) падает примерно на порядок (видно по масштабу на вертикальной оси), как это и должно быть при увеличении затухания, но не это составляет здесь главную особенность. Можно видеть, что характеристика при большом затухании (г) имеет вполне ожидаемый симметричный вид, с точностью до ширины пиков, подобный показанному на рис. 5г. В этом случае максимальный пик приходится на частоту ФМР, равную 2,80 ГГц. В противоположность этому, вид характеристики при отсутствии затухания (б) сильно асимметричен. Максимум приходится на частоту 2,92 ГГц, что на 120 МГц выше частоты ФМР, а по обе стороны от этого максимума амплитуды пиков плавно спадают. На частоте ФМР 2,80 ГГц амплитуда пика падает относительно максимального в 3,5 раза.

Можно считать, что центр симметрии АЧХ переместился вверх с частоты 2,80 ГГц на 2,92 ГГц, а общий характер спада по обе стороны от этого нового центра остался прежним.

Общая огибающая упругих резонансов теперь имеет близкий к резонансному характер, такой, как если бы ее максимум приходился на частоту 2,92 ГГц. Для удобства обращения назовем далее такое явление «вторичным упругим резонансом», в отличие от «первичного», который должен иметь максимум на частоте ФМР, то есть на той, где раскачка упруго смещения за счет резонанса намагниченности максимальна. Заметим, что при увеличении параметра затухания выше инверсного, как видно из рис. 12г, вторичный резонанс переходит в первичный.

Заметим попутно, что из сравнения рис. 12а и рис. 12в можно видеть, что обращение знака экстремумов на противоположных склонах характеристики намагниченности имеет место как в отсутствие затухания (а), так и при его наличии (в) и всегда происходит при переходе через частоту ФМР 2,80 ГГц. То есть ниже этой частоты экстремумы проявляются в виде провалов, а выше – в виде пиков, причем такое изменение их знака от величины параметра затухания не зависит.

### 19. Расщепление вторичного резонанса

Из рис. 12б и рис. 12г видно, что максимум амплитудно-частотной характеристики вторичного резонанса (то есть центральный пик упругих колебаний) при увеличении параметра затухания  $\beta$  от нуля до  $10^7 \text{ с}^{-1}$  переместился с частоты 2,92 ГГц на частоту 2,80 ГГц, то есть сначала он находится заметно выше частоты ФМР, а затем в результате скачкообразного увеличения параметра затухания с этой частотой сравнивается. Для выяснения характера такого смещения при более плавном изменении затухания обратимся к рис. 13, где показана трансформация амплитудно-частотной характеристики упругих колебаний при увеличении параметра упругого затухания  $\beta$  от  $0,350 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$  до  $0,500 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ .

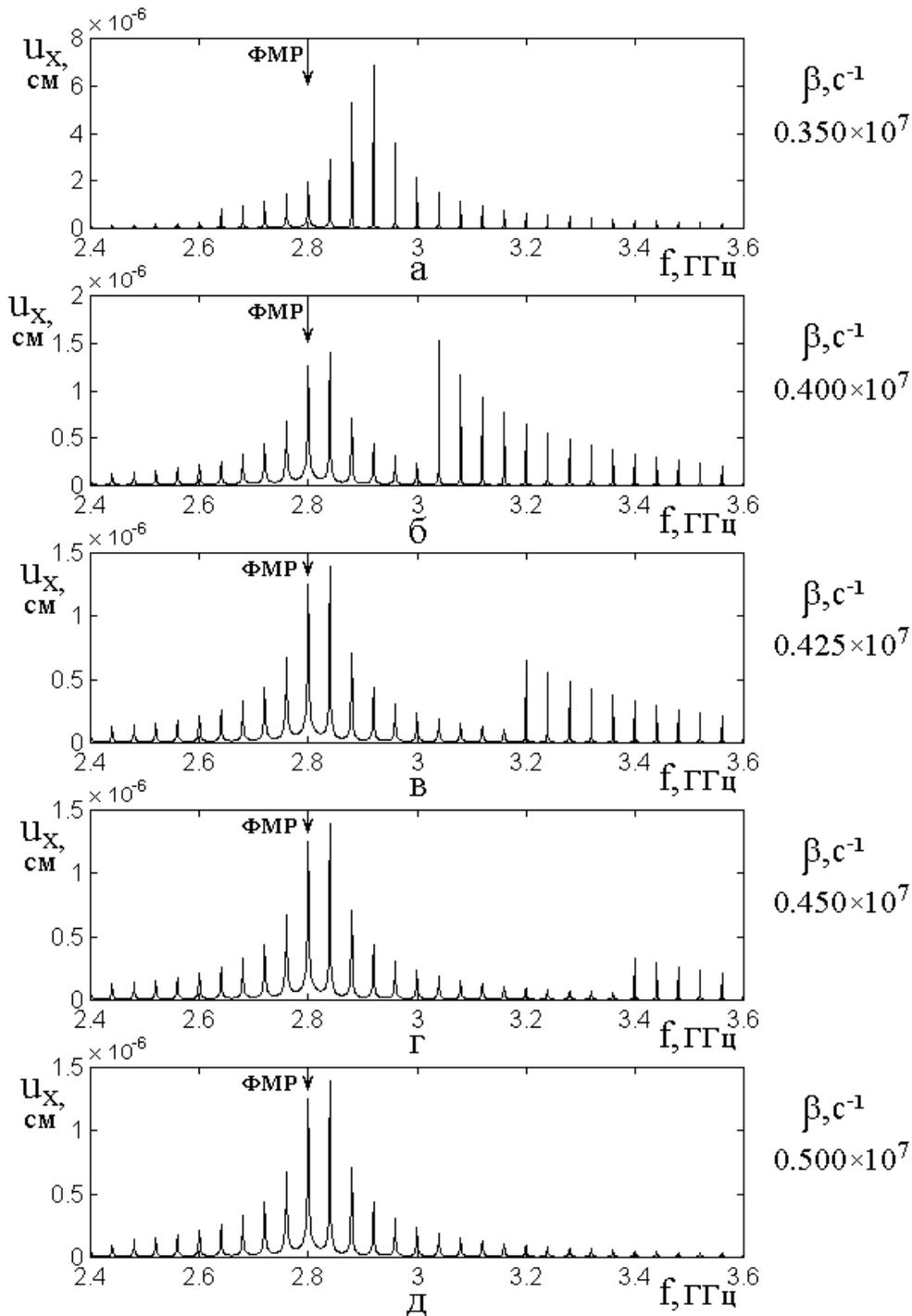


Рис. 13. Трансформация амплитудно-частотной характеристики упругих колебаний при увеличении параметра упругого затухания  $\beta$  от  $0,350 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$  до  $0,500 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$ .

Из рисунка видно, что при малом затухании  $\beta = 0,350 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$  характеристика вторичного резонанса является симметричной, а максимум располагается выше частоты ФМР на 80 МГц (то есть на два интервала, соответствующих частоте первичного упругого резонанса 40 МГц). При

увеличении затухания уже до величины  $\beta = 0,400 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$  (то есть на 12,5% от начальной величины) характеристика вторичного резонанса смещается в сторону высоких частот, так что максимум теперь приходится на частоту 3,04 ГГц, тогда как вид характеристики упругих колебаний вблизи частоты ФМР (две линии при 2,80 ГГц и 2,84 ГГц), в основном, сохраняется. То есть происходит как бы «расщепление» вторичного резонанса на две части, одна из которых сохраняет частоту ФМР, а другая смещается выше до частоты 3,04 ГГц. При этом смещенная часть характеристики становится резко несимметричной: со стороны низких частот имеет резкий спад по ширине, не превышающий частоту первой моды упругого резонанса (40 МГц), а со стороны высоких частот – плавный спад с крутизной, близкой к начальной при малом затухании. При дальнейшем увеличении затухания высокочастотный максимум вторичного резонанса еще больше отщепляется в сторону высоких частот, при затухании  $\beta = 0,425 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$  смещаясь на частоту 3,20 ГГц, при затухании  $\beta = 0,450 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$  – на частоту 3,40 ГГц, а при затухании  $\beta = 0,500 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$  уже практически не наблюдается. Амплитуда максимума, составляя при малом затухании  $\beta = 0,350 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$  около  $7,0 \cdot 10^{-6}$  см, уже при увеличении затухания до  $\beta = 0,400 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$  резко уменьшается до  $1,6 \cdot 10^{-6}$  см, а дальше, падая медленнее, при затухании  $\beta = 0,450 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$  составляет  $0,3 \cdot 10^{-6}$  см, после чего, при затухании  $\beta = 0,500 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$  и далее постепенно стремится к нулю. Такой спад как раз соответствует спаду характеристики колебаний намагниченности в процессе удаления от частоты ФМР.

## **20. Замечание о единстве расщепления вторичного резонанса и инверсии упругих резонансов на характеристике намагниченности**

Из сравнения кривых на рис. 13 можно видеть, что расщепление вторичного резонанса по мере увеличения затухания представляет собой как бы образование «провала» по частоте на характеристике того же резонанса при малом затухании. То есть из исходной характеристики вырезается ее часть, которая начинается вблизи частоты ФМР и по мере увеличения затухания расширяется в сторону высоких частот. Из сопоставления с данными раздела 16 можно сделать вывод, что такое «вырезание» происходит вблизи значения параметра затухания  $\beta_p = 0,500 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ , соответствующего инверсии амплитуды упругих пиков на амплитудно-частотной характеристике намагниченности. То есть, до инверсии характеристика вторичного резонанса остается единой, в процессе инверсии расщепляется, а по окончании инверсии снова становится единой,

Таким образом, можно полагать, что инверсия амплитуды упругих пиков на характеристике намагниченности и расщепление вторичного резонанса имеют одинаковую природу.

В качестве механизма обоих этих явлений можно предположить роль фазовых соотношений между первичным возбуждением намагниченности в магнитной пленке и возвращением упругой волны на пленку после двукратного прохождения толщины подложки.

## **Заключение**

Основные результаты настоящей работы сводятся к следующему.

Рассмотрена задача о возбуждении связанных магнитных и упругих колебаний в плоскопараллельной структуре, состоящей из нормально намагниченной тонкой магнитной пленки, наложенной на толстую немагнитную упругую подложку. Записаны связанные уравнения движения намагниченности и упругого смещения с граничными условиями, соответствующими возбуждению колебаний намагниченности в тонкой магнитной пленке, то есть на одной из внешних поверхностей структуры, тогда как другая внешняя поверхность структуры оставлена свободной.

Для решения задачи предложена модель распространения периодического граничного режима. Решение полученной системы уравнений выполнено методом Рунге-Кутты с последующим выделением стационарной амплитуды в установившемся режиме колебаний, что позволило построить амплитудно-частотные характеристики магнитных и упругих колебаний.

В условиях задачи, близких к эксперименту, магнитное поле было задано таким, чтобы обеспечить частоту ферромагнитного резонанса пленки значительно (на два порядка и более) выше частоты собственных упругих колебаний по толщине подложки. При этом характеристика колебаний намагниченности имела вид широкого колоколообразного максимума, на который наложена эквидистантная сетка узких упругих резонансов, отстоящих друг от друга на частоту, равную частоте упругого резонанса по толщине подложки.

Выполнено модельное представление наложения упругих резонансов на магнитный с использованием системы двух связанных осцилляторов, частоты которых различаются на несколько порядков. При этом первый осциллятор являлся аналогом магнитной системы, а второй – аналогом упругой системы, рассматриваемой задачи. Путем последовательной подстановки сетки резонансных частот второго осциллятора в резонансную характеристику первого получена картина амплитудно-частотной характеристики, сходная с таковой для магнитоупругих колебаний рассматриваемой задачи. Отмечена асимметричность связанных колебаний осцилляторов, подобная асимметричности наложения сетки упругих колебаний на характеристику магнитных относительно основной частоты магнитного резонанса. В качестве возможной причины асимметричности отмечено влияние синхронных и асинхронных колебаний по разные стороны от центрального резонанса в системе с двумя степенями свободы.

Предложен механизм образования резонансных особенностей в виде провалов и пиков на характеристике колебаний намагниченности. Показано, что упругий резонанс возникает тогда, когда упругая волна, первоначально

возбужденная на той поверхности структуры, где находится магнитная пленка, проходя туда и обратно по толщине подложки с соответствующей задержкой во времени, снова попадает на магнитную пленку в одинаковой фазе с присутствующими там в этот момент колебаниями намагниченности. Установлено, что в условиях реальных экспериментов задержка по времени может составлять десятки периодов колебаний намагниченности, в результате чего условия синфазности обеспечивают сетку упругих резонансов, расставленных друг от друга на величину, равную частоте собственных упругих колебаний по толщине структуры. Именно такая эквидистантная сетка резонансов и наблюдается на амплитудно-частотных характеристиках намагниченности и упругого смещения.

Рассмотрено влияние затухания упругой волны на структуру амплитудно-частотных характеристик намагниченности и упругого смещения. Выявлено критическое значение параметра упругого затухания, ниже которого упругие колебания имеют резонансный характер, а выше становятся аperiодическими. Показано, что критическое значение параметра затухания прямо пропорционально скорости упругой волны в материале подложки и обратно пропорционально толщине подложки. Для характеристики затухания использовано традиционное определение добротности резонанса. Показано, что критическое значение параметра затухания соответствует добротности, равной единице, тогда как в условиях, близких к эксперименту, добротность упругих резонансов может составлять десятки и сотни единиц.

Исследовано влияние параметра затухания на амплитуду упругих резонансов на магнитной и упругой характеристиках. Установлено, что при малом затухании амплитуды тех и других резонансов имеют асимметричный характер относительно центральной частоты упругого резонанса, а при большом затухании характер амплитуд становится симметричным. Показано, что изменение асимметричного характера на симметричный происходит с резким спадом амплитуды или с изменением знака упругих резонансов на магнитной характеристике. Для характеристики такого изменения упругих резонансов

введено «инверсное» значение параметра затухания, при котором асимметричный вид магнитных и упругих характеристик сменяется симметричным. Показано, что при параметрах задачи, близких к эксперименту, инверсное значение параметра затухания значительно меньше критического.

Исследована огибающая сетки упругих резонансов при различных значениях параметра затухания. Показано, что при любом значении затухания меньшем критического огибающая имеет колоколообразный вид по ширине близкий к характеристике колебаний намагниченности. Отмечено, что при значении затухания меньшем инверсного максимум колокола огибающей упругих резонансов смещен относительно максимума колокола магнитных колебаний в сторону высоких частот, причем это смещение может превышать полную ширину колокола на половине его высоты, тогда как при значении затухания большем инверсного максимум колокола по упругости совпадает с максимумом колокола по намагниченности. Для характеристики такого поведения максимума огибающей по упругости предложено понятие «вторичного упругого резонанса».

Исследована трансформация вторичного резонанса при изменении параметра упругого затухания. Установлено, что увеличение параметра затухания с малого значения в окрестности инверсного приводит к расщеплению линии вторичного резонанса на две части, одна из которой стремится в сторону уменьшения частоты вплоть до сближения с магнитной характеристикой, а другая смещается в сторону увеличения частоты на расстояние, в несколько раз превышающее ширину собственного колокола на половине его высоты, после чего амплитуда этой части характеристики вторичного резонанса постепенно стремится к нулю. Таким образом, до инверсии характеристика вторичного резонанса, пребывая в области высоких частот, остается единой, в процессе инверсии расщепляется на высокочастотную и низкочастотную части, а по окончании инверсии высокочастотная часть стремится к нулю, и остающаяся характеристика снова становится единой. На основе полученных результатов высказано предположение об одинаковой природе инверсии амплитуды упругих

пиков и расщеплении вторичного резонанса. В качестве механизма обоих этих явлений высказано предположение о решающей роли фазовых соотношений между первичным возбуждением намагниченности в магнитной пленке и возвращением упругой волны на пленку после двукратного прохождения толщины подложки.

**Финансирование:** Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

### Литература

1. Штраусс В. Магнитоупругие свойства иттриевого феррита-граната. В кн.: У. Мэзон (ред.): Физическая акустика. Т.4Б. Применения физической акустики в квантовой физике и физике твердого тела. М.: Мир. 1970. С.241-316.
2. Адам Дж.Д. Аналоговая обработка сигналов с помощью СВЧ-ферритов. ТИИЭР. 1988. Т.76. №2. С.73-86.
3. Исхак В.С. Применение магнитостатических волн: обзор. ТИИЭР. 1988. Т.76. №2. С.86-104,
4. Adam J.D., Davis L.E., Dionne G.F., Schloemann E.F., Stitzer S.N. Ferrite devices and materials. IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques. 2002. V.50. №3. P.721-737.
5. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Магнитостатические волны в неоднородных полях. М.: Физматлит. 2016.
6. Курушин Е.П., Нефедов Е.И. Применение тонких монокристаллических пленок ферритов в устройствах СВЧ-микроэлектроники. Микроэлектроника. 1977. Т.6, №6. С.549-561.
7. Serga A.A., Chumak A.V., Hillebrands B. YIG magnonics J. Phys. D: Appl. Phys. 2010. V.43. P.264002(16).
8. Ле-Кроу Р., Комсток Р. Магнитоупругие взаимодействия в ферромагнитных диэлектриках. В кн.: У. Мэзон (ред.): Физическая акустика. Т.3Б. Динамика решетки. М.: Мир. 1968. С.156.

9. Калашникова А.М., Кимель А.В., Писарев Р.В. Сверхбыстрый оптомагнетизм. УФН. 2015. Т.185. №10. С.1064-1076.
10. Janusonis J., Chang C.L., Jansma T., Gatilova A., Vlasov V.S., Lomonosov A.M., Temnov V.V., Tobey R.I. Ultrafast magnetoelastic probing of surface acoustic transients. Phys. Rev. B. 2016. V.94. №2. P.024415(7).
11. Власов В.С., Голов А.В., Котов Л.Н., Щеглов В.И., Ломоносов А.М., Темнов В.В. Современные проблемы сверхбыстрой магнитоакустики. АЖ (Акустический журнал). 2022. Т.68. №1. С.22-56.
12. Sparks M., Tittmann B.R., Mee J.F., Newkirk C. Ferromagnetic resonance in epitaxial garnet thin films JAP. 1969. V.40. №3. P.1518.
13. Chen H., De Gasperis P., Marcelli R., Pardavi-Horvath M., McMichael R., Wigen P.E. Wide-band linewidth measurements in yttrium iron garnet films JAP. 1990. V.67. №9. P.5530.
14. Телеснин Р.В., Козлов В.И., Дудоров В.Н. Ферромагнитный резонанс в эпитаксиальных пленках  $Y_3Fe_{5-x}Ga_xO_{12}$ . ФТТ. 1974. Т.16. №11. С.3532.
15. Аваева И.Г., Лисовский Ф.В., Осика В.А., Щеглов В.И. Исследование эпитаксиальных пленок смешанных ферритов-гранатов методом ферромагнитного резонанса ФТТ. 1975. Т.17. №10. С.3045.
16. Аваева И.Г., Лисовский Ф.В., Осика В.А., Щеглов В.И. Ферромагнитный резонанс в эпитаксиальных пленках смешанных ферритов-гранатов РЭ. 1976. Т.21. №9. С.1894.
17. Аваева И.Г., Лисовский Ф.В., Осика В.А., Щеглов В.И. Ферромагнитный резонанс в эпитаксиальных пленках смешанных ферритов-гранатов с кубической анизотропией. ФТТ. 1976. Т.18. №12. С.3694.
18. An K., Litvinenko A.N., Kohno R., Fuad A.A., Naletov V.V., Vila L., Ebels U., De Loubens G., Hurdequint H., Beaulieu N., Ben Youssef J., Vukadinovic N., Bauer G.E.W., Slavin A.N., Tiberkevich V.S., Klein O. Coherent long-range transfer of angular momentum between magnon Kittel modes by phonons. Phys. Rev. B. 2020. V.101. №6. P.060407(6)

19. Кузмичев А.Н., Ветошко П.М., Князев Г.А., Белотелов В.И., Буньков Ю.М. Особенности взаимодействия магнотонного Бозе-конденсата с акустическими модами в пленках железоиттриевого граната. ПЖЭТФ. 2020. Т.112. №11-12. С.749-753.
20. Полулях С.Н., Бержанский В.Н., Семук Е.Ю., Белотелов В.И., Ветошко П.М., Попов В.В., Шапошников А.Н., Чернов А.И. Модуляция магнитоупругой связи при ферромагнитном резонанса в пленках феррит-гранатов. // ЖТФ. 2021. Т.91. №7. С.1124- 1131.
21. Полулях С.Н., Бержанский В.Н., Семук Е.Ю., Белотелов В.И., Ветошко П.М., Попов В.В., Шапошников А.Н., Шумилов А.Г., Чернов А.И. Ферромагнитный резонанс и упругие колебания в эпитаксиальных пленках феррит-граната иттрия. ЖЭТФ. 2021. Т.159. №2. С.307-314.
22. Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Казаков Г.Т., Сысоев В.Г., Тихонов В.В., Филимонов Ю.А., Нам Б.П., Хе А.С. Наблюдение быстрых магнитоупругих волн в тонких пластинах и эпитаксиальных пленках железоиттриевого граната. ПЖЭТФ. 1981. Т.39. №9. С.500-504.
23. Казаков Г.Т., Тихонов В.В., Зильберман П.Е. ФТТ. 1983. Т.25. №8. С.2307-2312.
24. Андреев А.С., Зильберман П.Е., Кравченко В.Б., Огрин Ю.Ф., Темирязов А.Г., Филимонова Л.М. ПЖТФ. 1984. Т.10. №2. С.90-94.
25. Хивинцев Ю.В., Сахаров В.К., Высоцкий С.Л., Филимонов Ю.А., Стогний А.И., Никитов С.А. Магнитоупругие волны в субмикронных пленках ЖИГ, полученных ионно-лучевым распылением на подложках гадолиний-галлиевого граната. ЖТФ. 2018. Т.88. №7. С.1060-1066.
26. Streib S., Keshtgar H., Bauer G.E.W. Damping of magnetization dynamics by phonon pumping. Phys.Rev.Lett. 2018. V.121. №2. P.027202(6).
27. Ветошко П.М., Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Влияние упругих резонансов подложки на ферромагнитный резонанс в пленках железоиттриевого граната. РЭ. 2023. Т.68. №2. С.157-164.

28. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972.
29. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. РЭ. 2009. Т.54. №7. С.863-874.
30. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре. Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2013. №2. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/feb13/10/text.pdf>.
31. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Комбинационное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре. Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». М.: НИУ МЭИ. 2013. С.164-176.
32. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре при ферромагнитном резонансе. РЭ. 2014. Т.59. №5. С.482-497
33. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости (Теоретическая физика, т.VII). М.: Наука. 1965.
34. Гуревич А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. М.: Наука. 1973.
35. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. М.: Физматлит. 1994.
36. Gilbert T.L. A phenomenological theory of damping in ferromagnetic materials. IEEE Trans. on Magn. 2004. V.40. №6. P.3443-3449.
37. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Волны в многослойных структурах. Часть 1. Методы расчета: прямой, усреднения, матрицы. М.: Физматлит. 2022.
38. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука. 1973.
39. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Магнитостатические и электромагнитные волны в сложных структурах. М.: Физматлит. 2017.

40. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука. 1973.
41. Вейсс М. Сверхвысокочастотные и низкочастотные колебания, вызванные нестабильностью резонанса в ферритах. В кн.: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Сборник статей по ред. А.Г.Гуревича. М.: ИЛ. 1961. С.281-285.
42. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ линейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов. Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2013. №11. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/nov13/3/text.pdf>
43. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ нелинейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов в квадратичном приближении. Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2014. №1. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/11/text.pdf>
44. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 1. Основные уравнения. РЭ. 2015. Т.60. №1. С.79.
45. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 2. Некоторые нелинейные явления. РЭ. 2015. Т.60. №3. С.297.
46. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ автомодуляционных колебаний в магнитоупругой среде на основе модели связанных магнитного и упругого осцилляторов. Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. №5. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/may15/4/text.pdf>
47. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ автомодуляционных явлений в системе связанных магнитного и упругого осцилляторов на основе модели

потенциала. Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. №6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun15/9/text.pdf>

48. Шавров В.Г., Щеглов В.И., Иванов А.П. Нелинейные колебания в задаче возбуждения гиперзвука. Сыктывкар: ООО «Коми республиканская типография». 2021. ISBN 978-5-7934-0951-3.

49. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. М.: Наука. 1978.

50. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука. 1964. .

51. Харкевич А.А. Основы радиотехники. М.:Физматлит. 2007.

52. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. М.: Физматлит. 2003.

53. Моносов Я.А. Нелинейный ферромагнитный резонанс. М.: Наука. 1971.

54. Ikola R.J. New Excitation Mechanism for Magnetoacoustic Resonance in YIG. // Journ. Appl. Phys. 1965. V.36. №10. P.3260.

55. Моносов Я.А., Сурин В.В., Щеглов В.И. Возбуждение резонансных упругих колебаний при нелинейном ферромагнитном резонансе. // Письма в ЖЭТФ. 1968. Т.7. №9. С.315-317.

**Для цитирования:**

Власов В.С., Шапоров В.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Упругие резонансы в структуре: тонкая магнитная пленка – толстая упругая подложка. // Журнал радиоэлектроники. – 2023. – №. 11. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.11.12>