# ОБНАРУЖЕНИЕ СЛОЖНЫХ СИГНАЛОВ С ФЛУКТУИРУЮЩИМИ АМПЛИТУДАМИ И НАЧАЛЬНЫМИ ФАЗАМИ

**М. А. Киреев**

**Филиал “Московский центр автоматизированного управления воздушным движением” ФГУП “Госкорпорация по ОрВД”, г. Москва**

Получена 12 октября 2013 г.

**Аннотация**. В работе решается задача синтеза эффективных алгоритмов приема полезного сигнала с флуктуирующими амплитудами и начальными фазами на фоне негауссовых помех. Получены рабочие характеристики приемников обнаружения полезного сигнала на фоне негауссовых помех.

**Ключевые слова:** оптимальный приемник, негауссова помеха, аддитивная смесь, нелинейный четырехполюсник, квадратурная составляющая, пороговый уровень.

**Abstract.** The problem of synthesis of effective algorithms of reception of a useful signal is solved with fluctuating amplitudes and initial phases against non-Gaussian hindrances. Performance data of receivers of detection of a useful signal against non-Gaussian hindrances are received.

**Keywords:** optimum receiver, non-Gaussian hindrance, additive mix, nonlinear two-port network, quadrature component, threshold level.

В настоящее время в связи с ростом числа совместно работающих радиотехнических систем различного назначения много внимания уделяется вопросам синтеза оптимальных приемников обнаружения полезных сигналов на фоне активных и пассивных мешающих сигналов и помех. Активные помехи представляют собой излучаемые зондирующие сигналы других РЛС, мощные сигналы связных передающих связных станций, запросные сигналы бортовых и наземных радионавигационных систем. Пассивными помехами служат отраженные радиосигналы от подстилающей поверхности, метеообразований (зоны облачности, тумана), искусственных предметов возвышающихся над местностью. На практике амплитуды и фазы сигналов в результате отражения от целей, объектов сложной формы и подстилающей поверхности, многолучевого распространения радиоволн, прохождения через области гидрометеоров могут иметь распределение отличное от нормального.

В литературе описано достаточно методов и способов построения оптимальных приемников [1,2], при воздействии на их входы различных мешающих сигналов и помех, которые, однако, имеют сложную техническую реализацию.

В настоящей работе рассматриваются алгоритмы приемников полезных сигналов, полученные при следующих допущениях:

1) негауссовская помеха предполагается заградительной (или прицельно – заградительной), т.е. ширина энергетического спектра помехи $\Delta f_П$ намного превосходит ширину спектра анализируемого сигнала $\Delta f_S$:

$$\Delta f_П >> \Delta f_S . \qquad (1)$$

Причем спектр частот помехи предполагается достаточно равномерным хотя бы в полосе частот полезного сигнала (так называемая негауссовая помеха типа белого шума). Для негауссовой помехи типа белого шума функционал вероятности $F(x)$ как показано в [3], равен:

$$F\left[x(t)\right] = \exp\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \ln f\left[x(t)\right]dt\right\}, \qquad (2)$$

где $f(x)$ - одномерная плотность вероятности негауссовской помехи $x(t)$, а $T$ - интервал наблюдения, равный длительности сигнала. В случае белого гауссовского шума из выражения (2) вытекает известная из литературы формула для функционала вероятности белого гауссовского процесса, что приводит к корреляционному приемнику, эквивалентному согласованному фильтру (СФ);

2) мощность сигнала $M_S$ значительно меньше мощности помехи $M_П$:

$$M_S << M_П . \qquad (3)$$

Это условие всегда выполняется при воздействии мощных помех на приемники связных или радиолокационных систем. Кроме того, оптимизация систем всегда целесообразна для слабых сигналов;

3) на вход приемники системы обнаружения поступает смесь полностью известного сигнала $s(t)$ и негауссовой помехи $x(t)$:

$$y(t)=\begin{cases} x(t)+s(t), & s(t)\neq 0 \\ x(t), & s(t) \end{cases} =0 \qquad (4)$$

Используя выражение (2), нетрудно записать отношение правдоподобия $\Lambda$, и, с учетом условий (3,4) получить алгоритм обнаружения $l$ оптимального приемника:

$$l=\ln\Lambda\left[x(t)\right]=\frac{1}{T}\int_0^T s(t)\mathrm{z}(\mathrm{t})\,dt\,, \qquad (5)$$

и для вынесения решения о наличии (или отсутствии) сигнала во входной смеси случайная величина $l$ должна сравниваться с порогом $l_{ПОР}$, величина которого выбирается из обеспечения требуемого уровня ложных тревог. В формуле (5) $z(t)$ есть случайный процесс на выходе нелинейного четырехполюсника (НЧ) [3], амплитудная характеристика которого равна:

$$z(x)=-\frac{d}{dx}\ln f(x). \qquad (6)$$

Анализ алгоритма (5) показывает, что оптимальный приемник после усилителя промежуточной частоты (УПЧ) должен состоять из НЧ с амплитудной характеристикой (6), и, как показано в [4], коррелятора или оптимального линейного фильтра (ОФ), частотная характеристика которого т сопряжена со спектром сигнала $s(t)$. Далее следует пороговое устройство (ПУ).

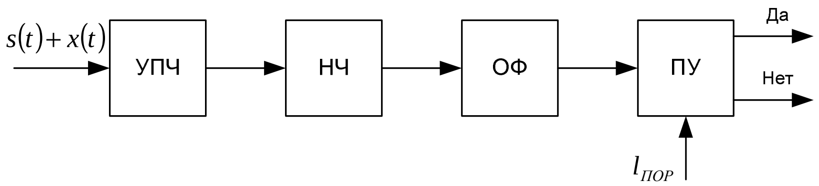


Рис.1 Структурная схема оптимального приемника.

Нетрудно привести физическое толкование тому факту, что ОФ сопряжен со спектром входного сигнала, а не со спектром сигнала на выходе НЧ. Действительно, т.к. сигнал слабый, то НЧ для сигнала линеаризуется, и сигнал на выход НЧ в первом приближении проходит практически без искажений. Спектр помехи остается не менее широкополосным на выходе НЧ (и, конечно, более широким, чем спектр сигнала).

В общей форме сигнал можно записать в виде:

$$s(t) = GA(t)\cos\left[\omega_0(t) - \psi(t) - \phi\right], \qquad (7)$$

где $G$ и $\varphi$ есть случайная амплитуда и неизвестная начальная фаза распределений, которые, соответственно, релеевское и равномерное (равновероятное):

$$P(G) = \begin{cases} G \cdot \exp\left\{-\dfrac{G^2}{2}\right\}, & 0 \le G \le \infty \\ 0, & G < 0 \end{cases} \qquad (8)$$

$$P(\phi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & 0 \le \phi \le 2\pi \\ 0, & \phi < 0,\ \phi > 2\pi \end{cases}, \qquad (9)$$

а $A(t)$ и $\psi(t)$ есть медленные (по сравнению с несущей $\omega_0$) регулярные функции, характеризующие законы амплитудной и фазовой модуляции соответственно.

В практике радиосвязи и радиолокации возможны случаи приема сигналов, когда неизвестная начальная фаза $\phi_i$ от импульса $s_i(t)$ к импульсу $s_{i+1}(t)$ меняется независимо:

$$s(t)=\sum_{i=1}^{n}A(t-\tau_i)\cos\left[\omega_i(t-\tau_i)-\psi_i(t)-\phi_i\right], \qquad (10)$$

где $A_i(t)$ и $\psi_i(t)$ характеризуют медленные (по сравнению с несущей $\omega_i$) процессы, модулирующие амплитуды и фазы элементарных сигналов, соответственно, либо когда случайная фаза всюду одинакова:

$$s(t)=\sum_{i=1}^{n}A_i(t-\tau_i)\cos\left[\omega_0(t-\tau_i)-\psi_i(t)-\phi\right]. \qquad (11)$$

Распределение начальных фаз в каждом случае равновероятное (9).

1) Пусть требуется обнаружить сложный квазидетерминированный сигнал с флуктуирующей амплитудой и неизвестной начальной фазой

$$S(t)=\sum_{i=1}^{n}G_iA(t-\tau_i)\cos\left[\omega_0(t-\tau)-\psi_i(t)-\phi_i\right], \qquad (12)$$

где распределения $G_i$ определяются выражением (8). Подставляя (12) в (5), получаем:

$$l=\ln\Lambda=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T}\int_0^T z(t)\cdot G_iA(t-\tau_i)\cos[\omega_0(t-\tau_i)-\psi_i(t)-\varphi_i]dt=$$

$$\sum_{i=i}^{n}\left[\cos\varphi_i\frac{G_i}{T}\int_0^T z(t)A(t-\tau_i)\cos[\omega_0(t-\tau_i)-\psi_i(t)]dt+\sin\varphi_i\frac{G_i}{T}\int_0^T z(t)A(t-\tau_i)\sin[\omega_0(t-\tau_i)-\psi_i(t)]dt\right]=$$

$$\sum_{i=1}^{n}G_i\left[u_i\cos\varphi_i+v_i\sin\varphi_i\right]=\sum_{i=1}^{n}G_i\varepsilon_i\cos(\phi_i-\varphi_i)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
u_i&=\varepsilon_i\cos\varphi_i=\frac{1}{T}\int_0^T z(t)A(t-\tau_i)\cos\left[\omega_0(t-\tau_i)-\psi_i(t)\right]\\
v_i&=\varepsilon_i\sin\varphi_i=\frac{1}{T}\int_0^T z(t)A(t-\tau_i)\sin\left[\omega_0(t-\tau_i)-\psi_i(t)\right]\\
\varepsilon_i^2&=u_i^2+v_i^2\\
tg\varphi_i&=\frac{v_i^2}{u_i^2}
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Из выражения (13):

$$l = \ln \Lambda = \sum_{i=1}^{n} G_i \varepsilon_i \cos(\varphi_i - \phi_i),$$

получаем, что

$$\Lambda(G_i, \phi_i) = \exp\left\{ \sum_{i=1}^{n} G_i \varepsilon_i \cos(\varphi_i - \phi_i) \right\}. \tag{14}$$

Усредняя отношение правдоподобия $\Lambda$ по неизвестным фазам $\phi_i$, которые распределены равномерно:

$$P(\phi_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, \ -\pi \le \phi_i \le \pi \\ 0, \ \phi_i < -\pi, \ \phi_i > \pi \end{cases},$$

получаем:

$$\Lambda(G_i) = \overline{\Lambda_{\phi_i}(G_i, \phi_i)} = \prod_{i=0}^{n} I_0(G_i \varepsilon_i). \tag{15}$$

Полагая все $G_i$ при $i = 1, \ldots n$ независимыми и распределенными равномерно и усредняя дополнительно по $G_i$, получим:

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_{G,\phi} &= \overline{\Lambda(G_i)_{G_i}} = \prod_{i=1}^{n} \int_0^{\infty} G_i \exp\left\{ -\frac{G_i^2}{2} \right\} I_0(G_i \varepsilon_i) dG_i = \\ &= \prod_{i=1}^{n} \exp\left\{ -\frac{\varepsilon_i^2}{2} \right\} \int_0^{\infty} G_i \exp\left\{ -\frac{G_i^2 - \varepsilon_i^2}{2} \right\} I_0(G_i \varepsilon_i) dG_i = \prod_{i=1}^{n} \exp\left( -\frac{\varepsilon_i^2}{2} \right) \end{aligned} \tag{16}$$

где интеграл в предпоследнем равенстве равен единице в силу условия нормировки плотностей вероятностей (интеграл берется от райсовского распределения). Из (16) получаем алгоритм оптимального приемника обнаружения слабых флуктуирующих сигналов (ФС):

$$l = \ln \bar{\Lambda}_{G,\phi} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \tag{17}$$

Блок-схема приемника, реализующая полученный алгоритм изображена на рис.2.

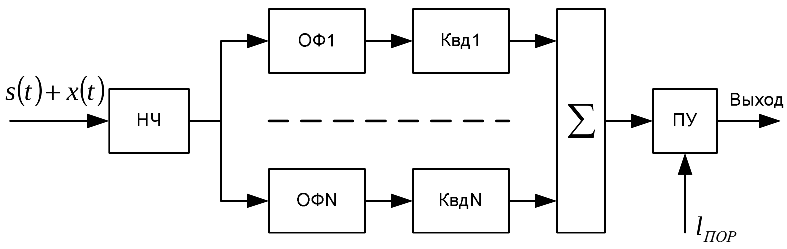


Рис.2 Функциональная схема приемника слабых флуктуирующих сигналов.

Пусть теперь обнаруживается неизвестный радиосигнал, когда в (12) все $G_i$ одинаковы. Тогда из (14,15) следует, что:

$$\Lambda(G)=\prod_{i=1}^{n} I_0(G\varepsilon_i) \tag{18}$$

откуда после усреднения по $G$ получаем:

$$\overline{\Lambda}_{G,\phi}=\int_0^\infty \overline{G}\exp\left\{-\frac{\overline{G}^2}{2}\right\}\prod_{i=1}^{n} I_0(\overline{G}\varepsilon_i)d\overline{G}. \tag{19}$$

Интеграл в (19) является неберущимся. Поэтому запишем теперь (18) в виде:

$$l(G)=\ln\Lambda(G)=\sum_{i=1}^{n}\ln I_0(G\varepsilon_i) \tag{20}$$

и предполагая, в силу малости сигнала $(G\varepsilon_i)<<1$, что $\ln I_0(G\varepsilon_i)\cong\frac{G\varepsilon_i}{4}$, из (20) получаем:

$$l(G)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}G^2\varepsilon_i^2=\frac{G^2}{4}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2. \tag{21}$$

Усредняя $l(G)$ по $G$, получим:

$$l=\overline{l(G)}=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\cdot\frac{1}{4}\int_0^\infty G^3\exp\left\{-\frac{G^2}{2}\right\}dG \tag{22}$$

Вычислим интеграл в (22) по частям:

$$\int_0^\infty G^3\exp\left\{-\frac{G^2}{2}\right\}dG=-\int_0^\infty G^2 d\left(\exp\left\{-\frac{G^2}{2}\right\}\right)=-\left[G^2\exp\left\{-\frac{G^2}{2}\right\}\Bigg|_0^\infty-2\int_0^\infty G\exp\left\{-\frac{G^2}{2}\right\}dG\right]=2 \tag{23}$$

ибо интеграл в (23) равен единице в силу условия нормировки. Поэтому алгоритм (22) равен:

$$l = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 . \tag{24}$$

2) Пусть теперь обнаруживается ФРС, т.е. когда в (12) $G_i$ различны, а все $\phi_i$ одинаковы, и равны $\phi_i = \phi$. Тогда из (13) следует что:

$$l = \ln\Lambda = \cos\phi\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T}\int_0^T z(t)\,A(t-\tau_i)\cos\left[\omega_0(t-\tau_i)-\psi_i\right]dt +$$

$$+\sin\phi\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T}\int_0^T z(t)A(t-\tau_i)\sin\left[\omega_0(t-\tau_i)-\psi_i\right]dt = \varepsilon'\cdot\cos(\varphi'+\phi),$$

и, следовательно

$$\left.\begin{array}{c} (\varepsilon_G')^2 = (u_G')^2 + (v_G')^2 \\ \varepsilon' \cos\varphi' = u_G' = \sum\limits_{i=1}^{n} G_i u_i;\;\; v_G' = \sum\limits_{i=1}^{n} G_i v_i = \varepsilon' \sin\varphi' \\ \left.\begin{array}{c} u_i \\ v_i \end{array}\right\} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T z(t)\cdot A(t-\tau_i)\cdot\left\{\begin{array}{c}\cos\left[\omega_0(t-\tau_i)-\psi_i\right] \\ \sin\left[\omega_0(t-\tau_i)-\psi_i\right]\end{array}\right. dt \\ tg\varphi' = \dfrac{v_G'}{u_G'} \end{array}\right\}. \tag{25}$$

Из (25) получаем:

$$\Lambda = \exp\left\{\varepsilon'\cos(\varphi+\phi)\right\}, \tag{26}$$

и после усреднения по случайной фазе $\varphi$ получаем:

$$l = \ln\overline{\Lambda_\phi(G_i)} = \ln I_0\left[\varepsilon'(G_i)\right], \tag{27}$$

откуда

$$\overline{\Lambda_\phi(G_i)} = I_0\left[\varepsilon'(G_i)\right]. \tag{28}$$

Усредняя (28) дополнительно по флуктуирующим амплитудам $G_i$, $i = 1...n$, получаем:

$$\overline{\Lambda_{G,\phi}} = \int_0^\infty\int_0^\infty \prod_{i=1}^{2n} G_i \exp\left\{-\frac{G_i^2}{2}\right\} I_0\left[\varepsilon'(G_i)\right]\cdot\prod_{i=1}^{2n} dG_i =$$

$$=\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty\prod_{i=1}^{2n}G_i\exp\left\{-\frac{G_i^2}{2}\right\}\cdot I_0\left[\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}G_iu_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}G_iv_i\right)^2}\right]\cdot\prod_{i=1}^{2n}dG_i\,. \qquad (29)$$

Поскольку:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}G_iu_i\right)^2=\sum_{i,j=1}^{n}G_iG_ju_iv_i\,,\qquad\left(\sum_{i=1}^{n}G_iv_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}G_iG_jv_iv_j$$

$$(\varepsilon')^2=\left(\sum_{i=1}^{n}G_iu_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}G_iv_i\right)^2=\sum_{i,j=1}^{n}G_iG_j\left(u_iu_j+v_iv_j\right), \qquad (30)$$

то выражение (29) равно:

$$\overline{\Lambda_{G,\phi}}=\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty\cdot\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty\prod_{i=1}^{n}G_i\exp\left\{-\frac{G_i^2}{2}\right\}\cdot\prod_{j=1}^{n}G_j\exp\left\{-\frac{G_j^2}{2}\right\}I_0\left\{\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}G_iG_j\left(u_iu_j+v_iv_j\right)}\right\}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}dG_i\cdot\prod_{j=1}^{n}dG_j\,. \qquad (31)$$

Интеграл (31) не является табличным. Поэтому, снова обращаясь к (27), в предположении малости огибающей $\varepsilon'$ (в силу малости $G_i$) получаем:

$$l(G_i)=\frac{(\varepsilon')^2}{4}\,, \qquad (32)$$

откуда с учетом выражений (25) и (30) получаем:

$$l(G_i)=\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}G_iG_j\left(u_iu_j+v_iv_j\right). \qquad (33)$$

Усредняя теперь (33) дополнительно по флуктуирующим амплитудам, с использованием выражения (8) получаем:

$$l=\overline{l_{G_i}}=\overline{l(G_i)_{G_i}}=\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{шо}\cdot\int_0^\infty\int_0^\infty G_i^2G_j^2\exp\left\{-\frac{G_i^2+G_j^2}{2}\right\}dG_idG_j\,, \qquad (34)$$

где $\alpha_{ij} = u_i u_j + v_i v_j$, поэтому, вычисляя

$$\int_0^\infty G_i^2 \exp\left\{-\frac{G_i^2}{2}\right\} dG_i = \int_0^\infty G_i d\left(\exp -\frac{G_i^2}{2}\right) = -\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{G_i^2}{2}\right\} dG_i = -\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{G_i^2}{2}\right\} dG_i =$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \tag{35}$$

и подставляя в (34), получаем:

$$l = \frac{\pi}{16}\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} = \frac{\pi}{16}\sum_{i,j=1}^{n}\left(u_i u_j + v_i v_j\right) \quad . \tag{36}$$

В соответствии с полученным алгоритмом и с учетом выражений (25) для $u_i$ и $v_i$, блок-схема оптимального приемника (рис.3) состоит из НЧ вида (6) и $n$ квадратурных каналов. Каждый квадратурный канал состоит из формирователя квадратурных составляющих (Кв), перемножителя ($\otimes$) и интегратора $\left(\int\ \right)$, причем на первые входы перемножителей поступают составляющие $u_{ij}$ или $v_{ij}$, а на другие входы - опорные квадратурные сигналы от генератора опорных сигналов (ГОС). Составляющие всех каналов $u_i$, $i = 1 ... n$ перемножаются при $i \neq j$, или возводятся в квадрат при $i = j$. Аналогично и для составляющих $v_i$, $i = 1 ... n$. Произведения вида $u_i u_j$ и $v_i v_j$ поступают на сумматор $\sum$ и далее на пороговое устройство.

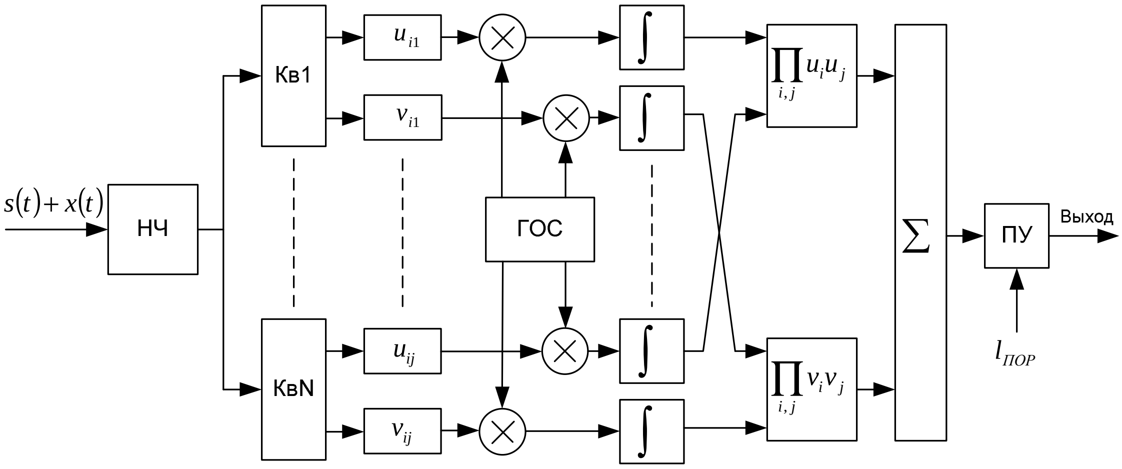


Рис.3 Функциональная схема квадратурного приемника.

Отметим, что в сумматоре происходит как некогерентное, так и когерентное суммировании, ибо хотя начальная фаза $\phi$ и неизвестна, но она одинакова для всех элементарных сигналов в (7). По этой причине обработка поступающего сигнала оказывается довольно сложная. Если же элементарные сигналы являются ортогональными, то совершенно очевидно, что $u_i u_j = v_i v_j = 0$, при $i \neq j$, и из (36) получаем:

$$l = \frac{\pi}{16}\sum_{i=1}^{n}\left(u_i^2 + v_i^2\right) = \frac{\pi}{16}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2, \qquad (37)$$

т.е. алгоритм обработки совпадает (с точностью до мультипликативной константы) с (17). Полученный результат означает, что независимо от того, одинакова в (12) начальная фаза или нет, структура приемника обнаружения ортогональных сигналов не меняется. С физической точки зрения этот результат понятен, так как рассматриваемые в работе методы синтеза оптимальных приемников являются в принципе амплитудными, то именно вид амплитуды $G$ сигналов определяет структуру обнаружителя в целом. Отметим, что алгоритм (36) допускает некоторое упрощение. Допустим, для общности, что несущие частоты $\omega_i$ $i = 1...n$ в элементарных сигналах не совпадают. Тогда подставляя $u_i$ и $v_i$ из (25) в (36), легко убедиться, что:

$$l = \sum_{i,j}^{n}\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T z(t_1)\, z(t_2) A(t_1 - \tau_i)\, A(t_2 - \tau_j)\cos\left[\omega_i t_1 - \omega_j t_2 - \omega_i\tau_i + \omega_j\tau_j - \psi_i + \psi_j\right] dt_1 dt_2 \qquad (38)$$

В частности, если все $\omega_i = \omega_0$, $i = 1...n$, то из выражения (38) получаем:

$$l = \sum_{i,j}\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T z(t_1) z(t_2)\, A(t_1 - \tau_i)\, A(t_2 - \tau_j) \times \cos\left(\omega_0(t_1 - t_2) + \omega_0(\tau_j - \tau_i) - \psi_i + \psi_j\right) dt_1 dt_2 =$$

$$= \sum_{i,j}\frac{1}{T}\int_0^T z(t_1)\, dt_1 \cdot \frac{1}{T}\int_0^T z(t_2)\, F\left(t_1, t_2, \tau_i, \tau_j\right) dt_2, \qquad (39)$$

где функция

$$F=\left(t_1,t_2,\tau_i,\tau_j\right)=A\left(t_1-\tau_i\right)A\left(t_2-\tau_j\right)\cos\left[\omega_0\left(t_1-t_2\right)+\omega_0\left(\tau_j-\tau_i\right)-\psi_i+\psi_j\right]=$$

$$=A\left(t_1-\tau_i\right)\cos\left[\omega_0\left(t_1-\tau_i\right)-\psi_i\right]\cdot A\left(t_2-\tau_j\right)\cos\left[\omega_0\left(t_2-\tau_j\right)-\psi_j\right]+$$

$$+A\left(t_1-\tau_i\right)\sin\left[\omega_0\left(t_1-\tau_j\right)-\psi_i\right]\cdot A\left(t_2-\tau_j\right)\sin\left[\omega_0\left(t_2-\tau_j\right)-\psi_j\right], \qquad (40)$$

является опорной и формируется из сигналов ГОС.

3) Пусть требуется обнаружить (ФС), когда в (12) все $G_i=G$, и $\phi_i=\phi,\ i=1...n$. Тогда из (24-26) следует, что

$$l=\ln\Lambda=\varepsilon_G\cos\left(\varphi+\phi\right) \qquad (41)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_G^2=u_G^2+v_G^2=G^2\left(u^2+v^2\right)=G^2\cdot\varepsilon^2\\
&u_G=Gu=G\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T}\int_0^T z(t)A\left(t-\tau_i\right)\cos\left[\omega_0\left(t-\tau_i\right)-\psi_i\right]dt\\
&v_G=Gv=G\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T}\int_0^T z(t)A\left(t-\tau_i\right)\sin\left[\omega_0\left(t-\tau_i\right)-\psi_i\right]dt\\
&tg\phi=\frac{v_G}{u_G}=\frac{v}{u}
\end{aligned}\right\}. \qquad (42)$$

Усредняя отношение правдоподобия

$$\Lambda\left(G,\phi\right)=\exp\left\{\varepsilon_G\cdot\cos\left(\varphi+\phi\right)\right\}$$

по фазе $\phi$, получаем (15):

$$\overline{\Lambda_\phi\left(G\right)}=I_0\left(G\varepsilon\right),$$

и после дополнительного усреднения по $G$ см.(25) получаем:

$$\overline{\Lambda}_{G,\phi}=\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2}\right\}, \qquad (43)$$

поэтому в силу монотонности экспоненциальной и квадратичной функций алгоритм оптимального приемника примет вид:

$$l=\sqrt{\ln\overline{\Lambda}_{G,\phi}}=\varepsilon, \qquad (44)$$

а блок-схема приемника его реализующая изображена на рис.4, где функциональный узел после сумматора есть детектор огибающей (ДО).

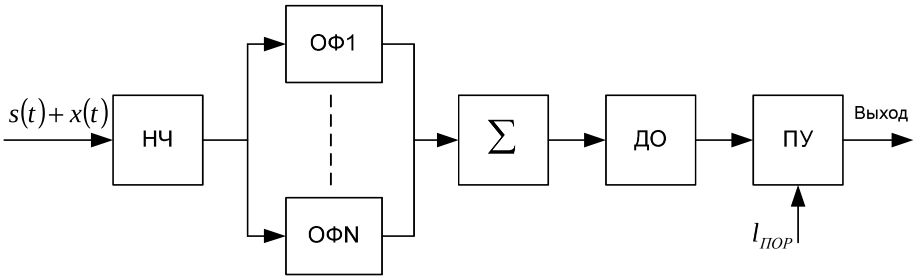


Рис.4 Функциональная схема приемника с “дружно” флуктуирующими параметрами.

Перейдем к вычислению характеристик. Пусть сигнал (12) отсутствует во входной смеси на входе приемника. Тогда в отсутствие сигнала среднее значение случайной величины (17) равно:

$$\overline{l} = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{\varepsilon}_i\right)^2 \tag{45}$$

ибо $\overline{u}_i = \overline{v}_i = 0$, и $\left(\overline{\varepsilon}_i\right)^2 = \left(\overline{u}_i\right)^2 + \left(\overline{v}_i\right)^2 = 0$, а дисперсия

$$\sigma_0^2 = \overline{\left(l-\overline{l}\right)^2} = \sum_{i,j} \overline{\varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2} = \sum_{i,j} \overline{\left(u_i^2+v_i^2\right)\cdot\left(u_j^2+v_j^2\right)} = \sum_{i,j}\left[\overline{u_i^2u_j^2}+\overline{v_i^2u_j^2}+\overline{u_i^2v_j^2}+\overline{v_i^2v_j^2}\right]. \tag{46}$$

Используя (13), получаем:

$$\overline{u_i^2u_j^2} = \left(\overline{u_iu_j}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{T^4}\left[\overline{\int_0^T\int_0^T z(t_1)z(t_2)A(t_1-\tau_i)A(t_2-\tau_j)\cdot\cos\left[\omega_0(t_1-\tau_i)-\psi_i\right]\cdot\cos\left[\omega_0(t_2-\tau_j)-\psi_j\right]dt_1dt_2}\right]^2 =$$

$$\frac{1}{T^4}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T \overline{z(t_1)z(t_2)z(t_3)z(t_4)}A(t_1-\tau_i)A(t_2-\tau_i)A(t_3-\tau_j)A(t_4-\tau_j)\cos\left[\omega_0(t_1-\tau_i)-\psi_1\right]\times$$

$$\times\cos\left[\omega_0(t_2-\tau_i)-\psi_i\right]\cdot\cos\left[\omega_0(t_3-\tau_j)-\psi_j\right]\cdot\cos\left[\omega_0(t_4-\tau_j)-\psi_j\right]\cdot dt_1dt_2dt_3dt_4. \tag{47}$$

Рассмотрим отдельно момент 4-го порядка в (47):

$$M_4 = M\left(t_1 t_2 t_3 t_4\right) = \overline{z\left(t_1\right) z\left(t_2\right) z\left(t_3\right) z\left(t_4\right)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} z_1 z_2 z_3 z_4 f\left(z_1, z_2, z_3, z_4\right) dz_1 dz_2 dz_3 dz_4\,, \tag{48}$$

где $f\left(z_1, z_2, z_3, z_4\right)$ – четырехмерная плотность вероятности. Предполагая, что помеха типа белого шума, получаем [5], что процесс $z(t)$ также типа белого шума. Можно показать, что для процессов типа белого шума:

$$f\left(z_1, z_2, z_3, z_4\right) = \begin{cases} f\left(z_1 \cdot z_2\right) \cdot \left(z_3 \cdot z_4\right), & \tau_1 = t_2 - t_1 \neq 0, \quad \tau_2 = t_4 - t_4 \neq 0 \\ f\left(z_1 \cdot z_2\right) \cdot \delta\left(z_4 - z_2\right) \cdot \delta\left(z_3 - z_1\right), & \tau_1 = \tau_2 = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$M_4 = M_2 \cdot M_2 = \overline{z\left(t_1\right) \cdot z\left(t_2\right)} \cdot \overline{z\left(t_3\right) \cdot z\left(t_4\right)}, \tag{49}$$

и из (47) с учетом выводов в [2] получаем:

$$\overline{u_i^2 \cdot u_j^2} = \sigma_z^4 \cdot M_{Si} \cdot M_{Sj}\,. \tag{50}$$

Аналогично, для $\overline{v_i^2 \cdot v_j^2}$ получаем:

$$\overline{v_i^2 \cdot v_j^2} = \sigma_z^4 \cdot M_{Si} \cdot M_{Sj} \tag{51}$$

Рассмотрим теперь произведение:

$$\overline{u_i^2 \cdot u_j^2} = \frac{1}{T^4} \int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_0^T \overline{z\left(t_1\right) z\left(t_2\right) z\left(t_3\right) z\left(t_4\right)} \cdot \prod_{i=1}^{4} A\left(t_i - \tau_i\right) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{2} \cos\left[\omega_0\left(t_i - \tau_i\right) - \psi_i\right] \cdot \prod_{j=3}^{4} \sin\left[\omega_0\left(t_j - \tau_j\right) - \psi_j\right] \cdot \prod_{i=4}^{4} dt_i$$

откуда с учетом (49) получаем:

$$\left(\overline{u_i^2 u_j^2}\right) = \sigma_z^4 M_{Si} M_{Sj}\,. \tag{52}$$

Подставляя (50) $\div$ (52) в (46), получаем:

$$\sigma_0^2 = 4\sigma_z^4 \sum_{i,j} M_{Si} M_{Sj}\,. \tag{53}$$

Отметим, что выражение (53) можно получить более простым путем, если учесть [5], что $\sigma_{ui}^2 = \sigma_z^2 M_{si}$.

При наличии сигнала дисперсия величины $l$ в силу малости сигнала совпадает с (53), а среднее значение равно [3]:

$$\overline{l}=\overline{l}\left(G_i\right)=\left(\overline{z}_i\right)^2\sum_{i=1}^{n}G_i^2M_{Si}^2. \tag{54}$$

В отсутствие сигнала распределение величины $l$ определяется выражением

$$P_0\left(l\right)=\frac{l^{n-1}\cdot\exp\left\{-\dfrac{l}{2\sigma^2}\right\}}{\left(2\sigma^2\right)^n\left(n-1\right)!}.$$

а вероятность $P_{ЛТ}$ как показано в [3] равна:

$$P_{ЛТ}=\int_{l_{П}}^{\infty}P_0\left(l\right)dl=\exp\left\{-\frac{l_П}{2\sigma^2}\right\}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{l_П}{2\sigma^2}\right)^k$$

Тогда вероятность правильного обнаружения равна:

$$P_{ПО}=\int_0^{\infty}....\int_0^{\infty}\prod_{i=1}^{n}P\left(G_i\right)dG_i\left[\int_{l_П}^{\infty}P\left(G_i,l\right)dl\right], \tag{55}$$

где, в соответствии с (14):

$$P\left(G_i,l\right)=\frac{1}{2\sigma^2}\left[\frac{l}{\overline{l}\left(G_i\right)}\right]^{\frac{n-1}{2}}I_{n-1}\sqrt{l\cdot\overline{l}\left(G_i\right)}\exp\left\{-\frac{l-\overline{l}\left(G_i\right)}{2\sigma^2}\right\}. \tag{56}$$

Интеграл (55) не является табличным, однако с помощью ЭВМ вычислить $P_{ПО}$ возможно. При $n=1$ (один элементарный сигнал) соответствующие выражения приведены в [4].

б) Пусть в (12) $G_i$ одинаковы, $\phi_i$ различны, и алгоритм приемника равен (23). Тогда в отсутствие сигнала $\overline{l_0}=0$, и $\sigma_0^2$ определяется (53). При наличии сигнала дисперсия совпадает с (53), а среднее значение равно:

$$\overline{l_s}=G^2\left(\overline{z}'\right)^2\sum_{i=1}^{n}M_{si}=G^2\cdot q^2,$$

Тогда вероятность ложной тревоги равна [4],

$$P_{ЛТ} = \int_{l_П}^{\infty} P_0(l)dl = \exp\left\{-\frac{l_П}{2\sigma^2}\right\}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k}\left(\frac{l_П}{2\sigma^2}\right)^k, \tag{57}$$

а вероятность правильного обнаружения равна:

$$P_{ПО} = \int_0^{\infty} G\exp\left\{-\frac{G^2}{2}\right\}dG\left\{\int_{l_П}^{\infty}\frac{1}{2\sigma^2}\left[\frac{l}{Gq}\right]^{\frac{n-1}{2}} \cdot I_{n-1}\sqrt{lqG}\,\exp\left\{-\frac{l-q^2G^2}{2\sigma^2}\right\}dl\right\} = \frac{1}{q^{\frac{n-1}{2}}2\sigma^2}\times$$

$$\times\int_{l_П}^{\infty} l^{\frac{n-1}{2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\right\}dl\left\{\int_0^{\infty}\frac{1}{G^{\frac{n-3}{2}}}\exp\left\{-\frac{G^2}{2}\right\}\left[1-\left(\frac{q^2}{2}\right)^2\right]\cdot I_{n-1}\sqrt{lqG}dG\right\}. \tag{58}$$

в) Пусть в (12) $G_i$ различные, а $\phi_i$ одинаковы, при этом алгоритм соответствует (32). В этом случае $\overline{l_0} = 0$, а выражения для дисперсии и среднего при наличии сигнала получаются довольно громоздкими, поэтому не приводятся. Необходимо отметить, что характеристики качества обнаружения в этом случае будут лучше, чем в случае, когда все $\phi_i$ различны (56), но хуже, чем в случае, когда все $\phi_i$ одинаковы, и нет флюктуации амплитуд (30). Этим определены границы вероятностей ложной тревоги и правильного обнаружения.

г) Пусть в (12) все $G_i$ и $\phi_i$ одинаковы, а алгоритм обнаружения соответствует (35). Тогда среднее значение $\overline{l_0} = 0$, а дисперсия равна:

$$\sigma^2 = \overline{\varepsilon}^2 = \left(\overline{u}'\right)^2 + \left(\overline{v}'\right)^2 = \left(\overline{\sum_{i-1}^{n} u_i}\right)^2 + \left(\overline{\sum_{i=1}^{n} v_i}\right)^2 =$$

$$= \sum_{i,j}\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \overline{z(t_1)z(t_2)}\cdot\prod_{i=1}^{n}\Big[A(t_1-\tau_i)\cdot A(t_2-\tau_i)\cdot\cos\left[\omega_0(t_1-\tau_i)-\psi_i\right]\cdot\cos\left[\omega_0(t_2-\tau_i)-\psi_i\right]+$$

$$+A(t_1-\tau_j)A(t_2-\tau_j)\cdot\sin\left[\omega_0(t_1-\tau_j)-\psi_j\right]\cdot\sin\left[\omega_0(t_2-\tau_j)-\psi_j\right]\Big]dt_1dt_2 =$$

$$= \sigma_z^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T}\left\{\int_0^T A^2(t-\tau_i)\cos^2\left[\omega_0(t-\tau_i)-\psi_i\right]dt + \int_0^T A^2(t-\tau_i)\cdot\sin^2\left[\omega_0(t-\tau_i)-\psi_i\right]dt\right\} =$$

$$= 2\sigma_z^2\sum_{i=1}^{n} M_{si}, \tag{59}$$

где при выводе была использована формула [5]:

$$\sigma_S^2(t) = \overline{\left[l(t) - \overline{l}_S(t)\right]^2} \le \overline{l^2(t)} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T s_i(t-\tau_i) s_j(t-\tau_j) K(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2,$$

где были отброшены интегралы от быстроосциллирующих функций. При наличии сигнала дисперсия определяется формулой (58), а среднее значение с учетом (13) равно:

$$\left(\overline{l}_s\right)^2 = \left(\overline{u}'\right)^2 + \left(\overline{v}'\right)^2 = G^2 \left(\overline{z}'\right)^2 \sum_{i=1}^{n} M_{si}\ . \qquad (60)$$

Вероятность $P_{ЛТ}$ определяется формулой (57), а $P_{ПО}$ - (58), в которой составляющие $l_s$ и $\sigma^2$ необходимо заменить выражениями (60) и (59) соответственно.

д) Если сигнал (12) обнаруживается на фоне нестационарной помехи, то аналитическое исследование значительно усложняется. Это происходит в силу того, что средние, дисперсии и т.д. будут зависить от времени.

## Литература


1. Зюко А. Г., Кловский Д. Д., Назаров М.В., Финк Л.М. Теория передачи сигналов. – М.: Связь, 1980. – 228 с.: ил.

2. Фалькович С.Е. Оценка параметров сигнала. – М.: Изд-во “Советское радио”, 1970. – 336 с.: ил.

3. Киреев М. А. Выделение полностью известного сигнала на фоне негауссовых помех. Телекоммуникации №3, 2012. – с.13 – 18.

4. Голяницкий И.А. Пространственно-временные статистические характеристики модулированных полей и процессов. – М.: Изд-во МАИ, 1991. – 160 с.: ил.

5. Голяницкий И.А. Оптимальная пространственно-временная обработка негауссовых полей и процессов. – М.: Изд-во МАИ, 1994. – 208 с.: ил.